1 Wetterich Equation

考虑红外截断的生成泛函

$$Z_k[J]=\exp(W_k[J])=\int[d\phi]\exp\{-S[\phi]-\Delta S_k[\phi]]+J^a\phi_a\} \tag{1}$$

这里，我们用 ϕ 表示所有各种类型的场。抽象指标 a 代表各种自由度，包括不同的场，同种场的不同分量，以及其它各种分离和连续的自由度，比如时空坐标或动量指标。

$S[\phi]$ 是经典的作用量，J^a 是 ϕ_a 的源，$\Delta S_k[\phi]$ 是红外截断，它的作用是截断 $p^2<k^2$ 的量子涨落。通常我们选取二次项的形式（类似于质量项）来实现这种红外截断

$$\Delta S_k[\phi]=\frac{1}{2}\phi_a R_k^{ab}\phi_b \tag{2}$$

其中 $R_k^{ab}=R_k^{ba}(a,b$ 是玻色场指标），$R_k^{ab}=-R_k^{ba}(b,a$ 是费米场指标），我们这里以单个标量场为例，在坐标空间中

$$\Delta S_k[\phi]=\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\varphi(x)R_k(x,y)\varphi(y) \tag{3}$$

根据附录 1.A, 得

$$\begin{aligned}R_k(x,y)&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}R_k(p,-p)e^{ip(x-y)}\\&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}R_k(p)e^{ip(x-y)}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\varphi(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ipx}\varphi(p) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_k[\varphi]=&\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\varphi(x)R_k(x,y)\varphi(y)\\=&\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{ip_1x}\varphi(p_1)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}R_k(p)e^{ip(x-y)}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2y}\varphi(p_2)\\=&\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\varphi(-p)R_k(p)\varphi(p)\\=&\frac{1}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\varphi(-q)R_k(q)\varphi(q)\end{aligned} \tag{6}$$

对于确定的 q, regulator $R_k(q)$ 满足下面的性质

$$R_{k\to\infty}(q)\to\infty\quad R_{k\to0}(q)\to0 \tag{7}$$

为了压低 $q^2 < k^2$ 动量模式的涨落，而让高动量模式的涨落没有影响，我们可以选择

$$R_k(q)|_{q^2<k^2} \sim k^2, \quad R_k(q)|_{q^2>k^2} \sim 0 \tag{8}$$

比如

$$R_k(q) \sim \frac{q^2}{e^{\frac{q^2}{k^2}} - 1} \tag{9}$$

当然，我们可以选择其他形式的 regulator, 从式(1)可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\delta W_k[J]}{\delta J^a} =& \frac{1}{Z_k}\frac{\delta Z_k[J]}{\delta J^a} \\ =& \frac{1}{Z_k}\int [d\phi]\phi_a \exp\{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + J^a\phi_a\} \\ =& \langle\phi_a\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

在下面的讨论中，在不引起混淆的情况下，我们仍然用 ϕ_a 表示 $\langle\phi_a\rangle$。同样

$$\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J^b \delta J^a} = \langle\phi_b\phi_a\rangle_c \equiv G^k_{ba} \tag{11}$$

下标 c 代表连通图，G 是标度 k 依赖的传播子。

下面，我们对连通图的生成泛函 $W_k[J]$ 作 Legendre 变换。得到单粒子不可约的 (1PI) 图的生成泛函，即有效作用量

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + J^a\phi_a - \Delta S_k[\phi] \tag{12}$$

注意，这里的 $\phi_a \equiv \langle\phi_a\rangle$

为了将玻色场和费米场一并考虑，我们引入下面的记号

$$J^a\phi_a = r^a_b\phi_a J^b \tag{13}$$

其中

$$r^a_b = (-1)^{ab}\delta^a_b \tag{14}$$

$$(-1)^{ab} \equiv \begin{cases} -1, & for \quad a,b \quad fermion \\ 1, & for \quad a,b \quad beson \end{cases} \tag{15}$$

这样，从式(12)得到

$$\frac{\delta(\Gamma_k[\phi] + \Delta S_k[\phi])}{\delta\phi_a} = r^a_b J^b \tag{16}$$

对上式两边再求 J 的微商，得到

$$\frac{\delta^2(\Gamma_k[\phi] + \Delta S_k[\phi])}{\delta J^b \delta\phi_a} = r^a_b \tag{17}$$

附录 1.A n 点函数的 Fourier 变换

考虑一个一般的 n 点函数 $V(x_1,x_2,...,x_n)$, 它的 Fourier 变换为

$$V(x_1,x_2,...,x_n)=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}...\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}V(p_1,p_2,...p_n)e^{i(p_1x_1+p_2x_2+...p_nx_n)} \tag{18}$$

假如 V 满足下面的性质

$$V(x_1,x_2,...x_n)=V(x_1-x_n,x_2-x_n,...,0) \tag{19}$$

即 V 的函数值只依赖于坐标的相对值，那么

$$\begin{aligned}V(p_1,p_2,...p_n)=&\int d^4x_1d^4x_2...d^4x_nV(x_1,x_2,...x_n)e^{-i(p_1x_1+p_2x_2+...p_nx_n)}\\=&\int d^4x_1d^4x_2...d^4x_nV(x_1-x_n,x_2-x_n,...0)e^{-i(p_1x_1+p_2x_2+...p_nx_n)}\\=&\int d^4x_1d^4x_2...d^4x_nV(x_1,x_2,...0)e^{-i[p_1(x_1+x_n)p_2(x_2+x_n)+...p_{n-1}(x_{n-1}+x_n)]}\\=&\int d^4x_1d^4x_2...d^4x_nV(x_1,x_2,...0)e^{-i[p_1x_1+p_2x_2+...p_{n-1}x_{n-1}+(p_1+p_2+...+p_n)x_n]}\\=&(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+...p_n)\int d^4x_1d^4x_2...d^4x_{n-1}V(x_1,x_2,...,0)e^{-i(p_1x_1+p_2x_2+...p_{n-1}x_{n-1})}\end{aligned} \tag{20}$$

这样我们就可以将 $V(p_1,p_2,...p_n)$ 重新定义为

$$V(p_1,p_2,...p_n)=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+...p_n)V(p_1,p_2,...p_{n-1},-(p_1+p_2+...p_{n-1})) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,...x_n)=&\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}...\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2...+p_n)V(p_1,p_2,...-(p_1,p_2+...p_{n-1}))e^{i(p_1x_1+p_2x_2+...p_nx_n)}\\=&\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}...\frac{d^4p_{n-1}}{(2\pi)^4}V(p_1,p_2,...-(p_1,p_2+...p_{n-1}))e^{i[p_1(x_1-x_n)+p_2(x_2-x_n)+...p_{n-1}(x_{n-1}-x_n)]}\end{aligned} \tag{22}$$