

# FRG 数据使用说明

大连理工大学物理学院

强关联 QCD 课题组

2019 年 9 月 17 日

## 1 几率分布的计算

这篇说明简单介绍如何利用 FRG 下的夸克介子模型计算得到了重子数涨落的数据来计算净重子数几率分布的方法。

### 1.1 费米子真空涨落

由于在以往 FRG 的夸克介子模型的计算当中我们所得到的重子数涨落的峰度最大值只为 1, 为了让峰度的值能更大一些, 我们将有效势的流方程之中的费米子真空量子涨落逐步减少, 这样可以有效增大峰度在相变温度附近的峰值。具体的细节可以阅读 [arxiv: 1005.3166](#)。

我们引入一个新的截断能标  $\Lambda_2$ 。当 FRG 的跑动能标  $k$  高于  $\Lambda_2$  时, 费米子真空的量子涨落被剔除,  $k$  低于  $\Lambda_2$  时有效势流方程中包含有真空量子涨落。我们看到, 当真空量子涨落减少时, 重子数涨落的峰度明显产生了一个峰, 可以参考图 1。

这个文件中的数据包含了图片中这些截断的在不同重子化学势下的计算结果。

### 1.2 零化学势下重子数几率分布

由于在有限化学势下计算几率分布会存在计算精度的问题, 所以我们这里利用 Skellam 分布和 Gauss 分布一起来拟合重子数的几率分布。

### 1.2.1 Skellam 分布

Skellam 分布是一种离散的几率分布，用来描述两个独立随机变量  $N_1$  和  $N_2$  的差的分布，可以看作是两个独立柏松分布之差。它可以用来描述粒子和反粒子的理想气体状态下的几率分布，分布的形式由下式给出

$$P_s(N; b, \bar{b}) = e^{-(b+\bar{b})} (b/\bar{b})^{N/2} I_N(2\sqrt{b\bar{b}}) \quad (1)$$

其中，

$$I_N(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+N+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+N} \quad (2)$$

是第一类修正贝塞尔函数。 $N = N_1 - N_2$  是净粒子数， $b$  和  $\bar{b}$  分别是两个柏松分布的期待值，在这里可以看作是夸克和反夸克的平均数， $b = \langle N_q \rangle$  和  $\bar{b} = \langle N_{\bar{q}} \rangle$ 。夸克的平均数可以作为理想夸克气体计算

$$b = \frac{2N_f V}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 n_F(E_k, T, \mu) \quad (3)$$

上式当中  $n_F(E_k, T, \mu) = 1/[\exp(E_k - \mu)/T + 1]$  是费米子的分布函数， $E_k = \sqrt{k^2 + M_q^2}$  为动量为  $k$  的粒子的能量， $M_q^2$  为动力学生成质量。反夸克的平均数  $\bar{b}$  可以用上式将  $\mu \rightarrow -\mu$  来得到。

Skellam 分布的累积量  $C_s$  为

$$\begin{aligned} C_{s,2k+1} &= b - \bar{b} \\ C_{s,2k+2} &= b + \bar{b} \end{aligned} \quad (4)$$

$k \in \mathbb{Z}$ ，则我们可以得到  $C_3/C_1 = C_4/C_2 = 1$ 。

### 1.2.2 Gauss 分布

高斯分布是一种连续的几率分布，它具有如下形式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

其中， $\mu$  是分布的平均值或期待值， $\sigma$  是标准差， $\sigma^2$  是方差。我们可以将它离散化

$$P_g(N) = \int_{N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(x) dx \quad (6)$$

并且,

$$\begin{aligned} C_{g,1} &= \mu, \\ C_{g,2} &= \sigma^2, \\ C_{g,n>2} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$n \in \mathbb{Z}$ , 所以  $C_3/C_1 = C_4/C_2 = 0$ 。

我们假定 Skellam 分布和 Gauss 分布的耦合为线性耦合, 那么我们将它们之间的关系写为

$$P_{fit}(N) = AP_s(N) + (1-A)P_g(N) \tag{8}$$

A 为待定系数, 是一个 0 到 1 之间的常数,  $P_{fit}(N)$  表示拟合的结果。由重子数几率分布得到的前四阶累积量为

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle N \rangle, \\ C_2 &= \langle \delta N^2 \rangle, \\ C_3 &= \langle \delta N^3 \rangle, \\ C_4 &= \langle \delta N^4 \rangle - 3(\langle \delta N^2 \rangle)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

其中,  $\langle \delta N^k \rangle \equiv \langle (N - \langle N \rangle)^k \rangle$  是分布的 k 阶中心矩。累积量和广义磁化率的关系为  $C_i = \chi_i V T^3$ , V 和 T 为体积和温度。这样我们就有  $A, b, \bar{b}, \mu, \sigma$  五个可调参数, 原则上可以得到累积量的前四阶的符合结果。

我们用  $C_R$  来表示累积量。在零化学势下, 几率分布是关于  $N=0$  对称的, 所以  $C_1 = C_3 = 0$ 。令  $C_{s,2} = C_{g,2} = C_{R,2}$ , 则可以通过下述方程求解出 A

$$\begin{aligned} A(b - \bar{b}) + (1-A)\mu &= C_1 = 0, \\ b + \bar{b} &= C_2 = \sigma^2, \\ A(b - \bar{b}) &= C_3 = 0, \\ A(b + \bar{b}) &= C_4. \end{aligned} \tag{10}$$

我们得到  $A = C_4/C_2$ , 即  $A = R^{42}$ 。所以我们只要计算出广义磁化率求得对应温度体积的  $R^{42}$ , 就可以求得与其前四阶符合的分布函数。

### 1.3 有限化学势下重子数几率分布

在拟合有限化学势时，我们在  $N_B = 0$  附近的拟合结果是比较精确的，但是重子数较大时会出现偏差。零化学势时这种偏差影响不大，因为  $|N_B|$  较大时  $P_N$  已经很小了，但是有限化学势，尤其是高化学势，几率的峰值偏离了  $N_B = 0$ ，较大的  $N_B$  处的偏差会有较大影响。所以我们采用另一种方法拟合有限化学势下的几率分布。

我们假设每个分布的最低阶的累积量是相等的，即  $C_{g,1} = C_{s,1} = C_{R,1}$  所以  $k$  阶中心矩的关系为

$$\langle \delta N_{fit}^k \rangle = A \langle \delta N_s^k \rangle + (1-A) \langle \delta N_g^k \rangle \quad (11)$$

我们希望对于  $k \leq 4$  的情况，可以有  $\langle \delta N_{fit}^k \rangle = \langle \delta N_{FRG}^k \rangle$  通过式 9,7,4，可以得到方程组

$$\begin{aligned} C_{R,2} &= A C_{s,2} + (1-A) C_{g,2} \\ C_{R,3} &= A C_{s,3} \\ C_{R,4} + 3C_{R,2}^2 &= A(C_{s,4} + 3C_{s,2}^2) + 3(1-A)C_{g,2}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

求解可以得到

$$\begin{aligned} A &= R_{31} \\ C_{s,2} &= \frac{1}{6} \left( 6C_{R,2} + R_{31} - 1 + \sqrt{\frac{R_{31}-1}{R_{31}}} \sqrt{R_{31}(12C_{R,2} + R_{31} - 1) - 12C_{R,4}} \right) \\ C_{g,2} &= \frac{C_{R,2} - R_{31}C_{s,2}}{1 - R_{31}} \end{aligned} \quad (13)$$

其中， $R_{31} = C_{R,3}/C_{R,1}$ ,  $R_{42} = C_{R,4}/C_{R,2}$ 。很明显，此处的  $R_{31}$  相当于  $R_{42}$  在零化学势处的作用。作为检查，我们计算了低化学势的  $R_{31}$ ，随着化学势的降低，它愈发接近于零化学势下的  $R_{42}$ 。并且如果令式 13 的第三个方程中的  $C_{s,2} = C_{R,2}$ ，我们可以得到  $C_{g,2} = C_{R,2}$ ，则式 13 可以回到零化学势的状态。所以我们可以认为零化学势是式 13 的一种特殊情况，或者说，有限化学势是零化学势的合理推广。

## 2 Mathematica 程序

文件当中所附带的 Mathematica 程序 FRGdatainvoker 就利用了上面所提到的方法来计算粒子的分布。

这个程序分为了三个部分：input, loading data and calculation, output。

在 input 当中我们需要输入计算分布所用到的参数，其中包括了：Lambda2, mub, T, V, n。

Lambda2 这个参数是我们所要选取的费米子真空涨落截断能标。

mub 是我们要选取的重子化学势。

T, V 分别是我们选取的温度和体积。

n 是我们选取的计算点的个数（奇数）。

程序第二部分的作用主要是为了导入 FRG 的计算数据，并利用数据进行分布函数的计算。在拟合的计算当中所取的点的个数  $n$  对应着横坐标上的各个整数。当我们取  $n$  为奇数时， $N_B = 0$  为我们计算的分布的中间点，在 Mathematica 程序当中我们的分布计算也是在计算的点为奇数个时从关于  $N_B = 0$  对称的两边取各个整数点。另外需要说明的是，计算数据在低温情况下有很大的数值误差，这主要是由于在计算  $R_{42}$  时我们要用  $\chi_4^B/\chi_2^B$  而在低温时两者都为很小的数，小数除小数就会导致很大的误差。在导入数据中 Mathematica 有一些报错也是因为这个原因，我们可以暂时忽略它们。

程序的最后一部分是计算结果和导出数据。我们这里的  $P_s$  是指只用 Skellam 拟合的分布结果， $P_g$  是指只用 Gauss 拟合的分布结果，而  $P$  则是用二者结合来拟合的结果。最后我们把分布以 .dat 格式导出到了 output 文件夹中，如果需要其他格式也可以自己修改。

输出的图片如果像图 2 的形状，那么计算结果还算完美，如果出现其他奇怪的形状则说明需要调整 V 体积参数来调整计算。在计算分布时也要注意数据点的选择

由于对费米子真空涨落的截断会导致模型计算得到的相变点所对应的重子化学势减小，所以在我们对于较高化学势的计算当中会遇到发散的情况。这是由于我们计算重子数涨落所采用的切比雪夫方法所扫过的化学势范围距离临界点太近甚至越过了临界点所导致的。所以在这里我们不建议使用低截断能标下的高化学势的计算数据。在表 1 中我们给出了不同截断下  $R_{42}$  的峰值以及临界点位置的对应关系。由于计算精度以及临界点位置的问题所以在我们的数据中需要注意：截断为 0 时，只包含化学势为 0、25、78MeV 的计算结果；截断为 100MeV 时包含化学势为 0、25、78MeV 的数据；截断为 200MeV 时，包含化学势为 0、25、78、121、168MeV 的数据；截断为 300MeV 时包含 0、25、78、121、168、222MeV 的数据；截断为 400MeV 以及更高的情况时，包含了 0 至 459MeV 几个化学势的数据。

在填写 Mathematica 程序中的参数时输入整数即可。

我们使用的化学势来自于 arxiv:1512.08461。我们利用了里面化学势与对撞能量的对应关系，见表 2。

最后在图 3 和图 4 中我们可以看到拟合的大致结果。通过图 5 可以看出，在  $N_B = 0$  处的计算结果最为接近拟合的结果。

$\Lambda_2 (\text{MeV})$	0	100	200	300	400	500	600	700
$R_{42peak}$	7.79	6.38	2.8614	1.50	1.09	1.04	1.04	1.02
$criticalpoint (T (\text{MeV}), \mu_B (\text{MeV}))$	(124,335)	(123,345)	(117,435)	(110,552)	(98,655)	(97,725)	(95,770)	(89,785)

表 1: 不同截断下，零化学势  $R_{42}$  的峰值以及临界点的位置

$\sqrt{s} (\text{GeV})$	200	62.4	39	27	19.6	11.5	7.7
$\mu_{B,N_f=2} (\text{MeV})$	25.3	78.1	121	168.7	222.7	343	459.4

表 2: 化学势和对撞能量的对应关系

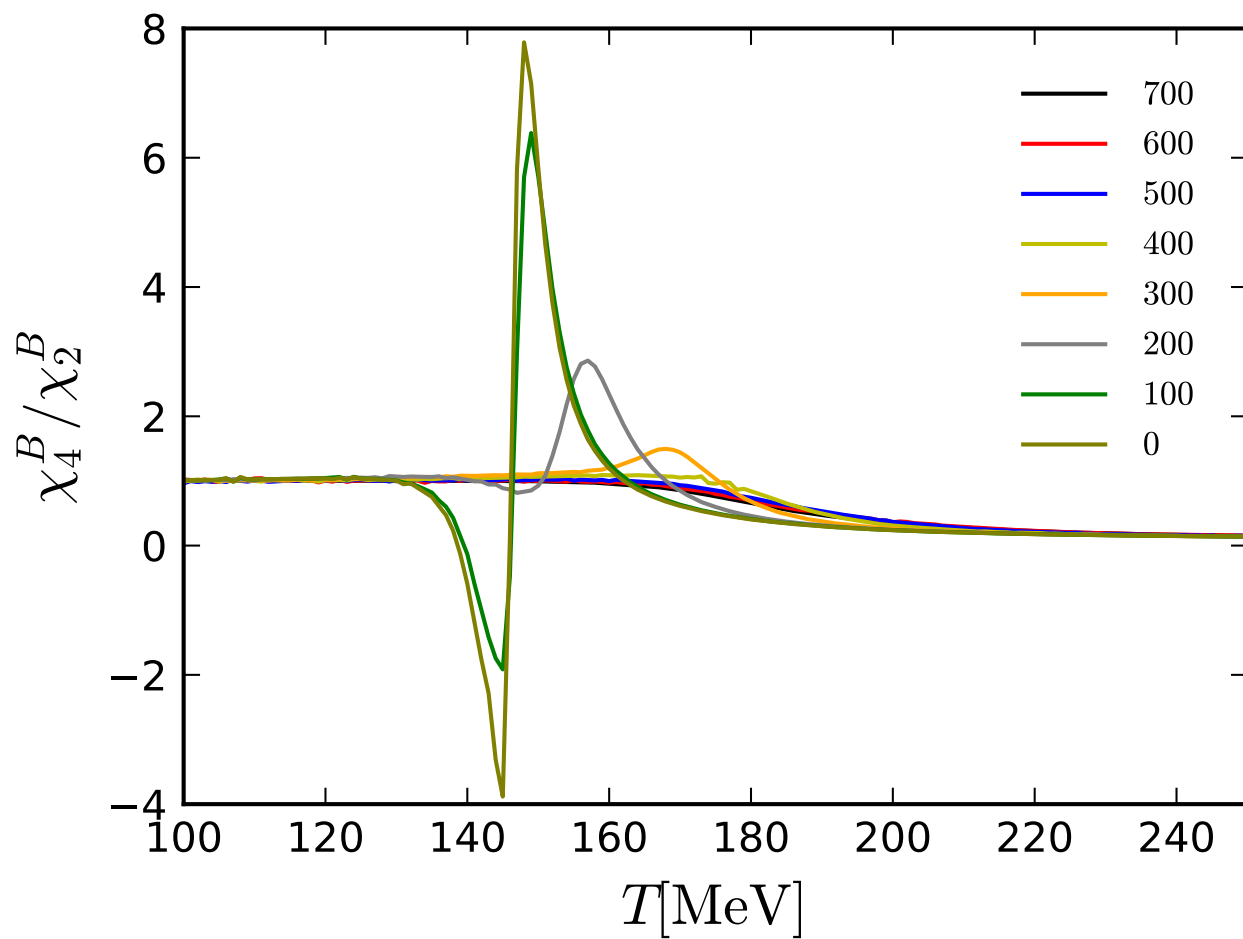


图 1: 在不同的截断能标  $\Lambda_2$  下计算得到的重子数涨落的峰度。可以看到当截断能标减小的时候, 涨落产生一个很高的峰, 截断能标在 700MeV 时回到包含全部真空涨落的结果。

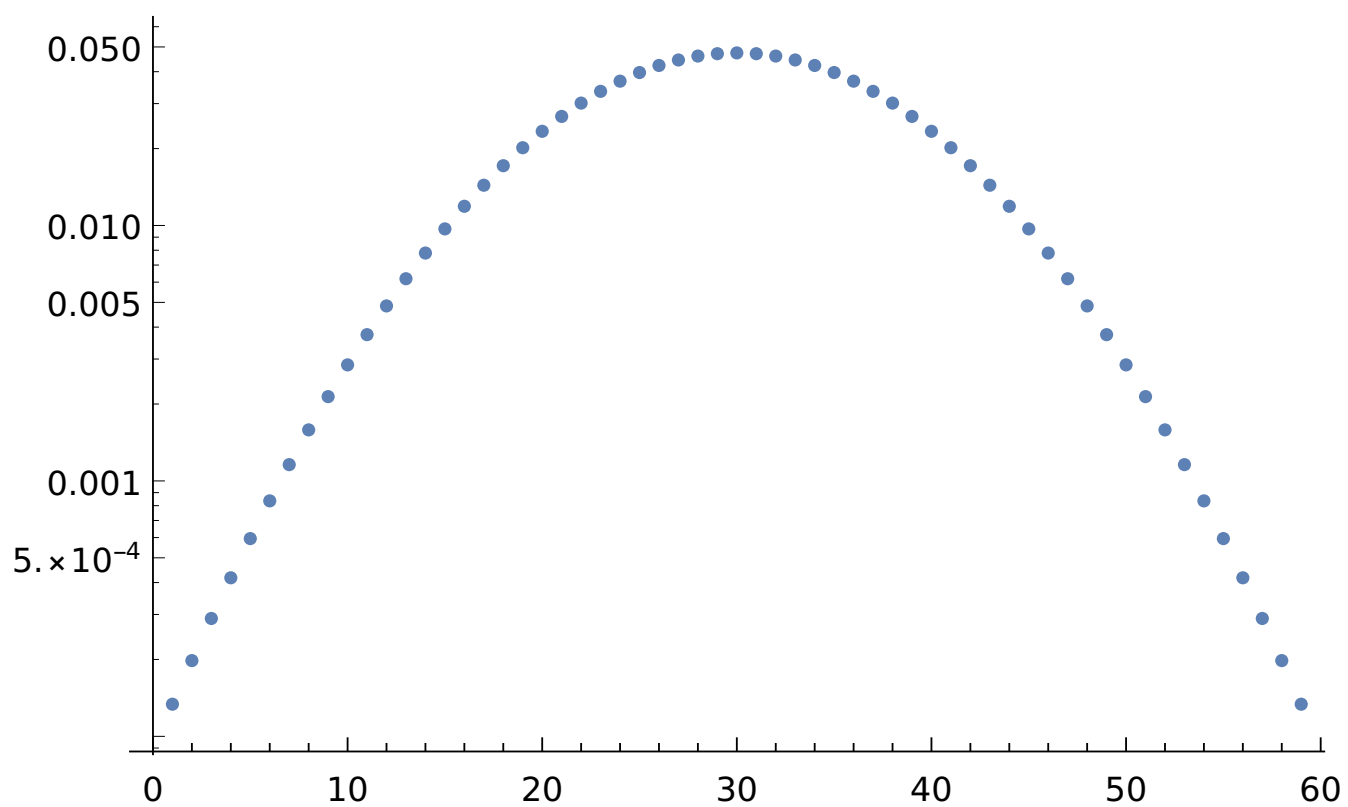


图 2: 一个零化学势计算结果的例子



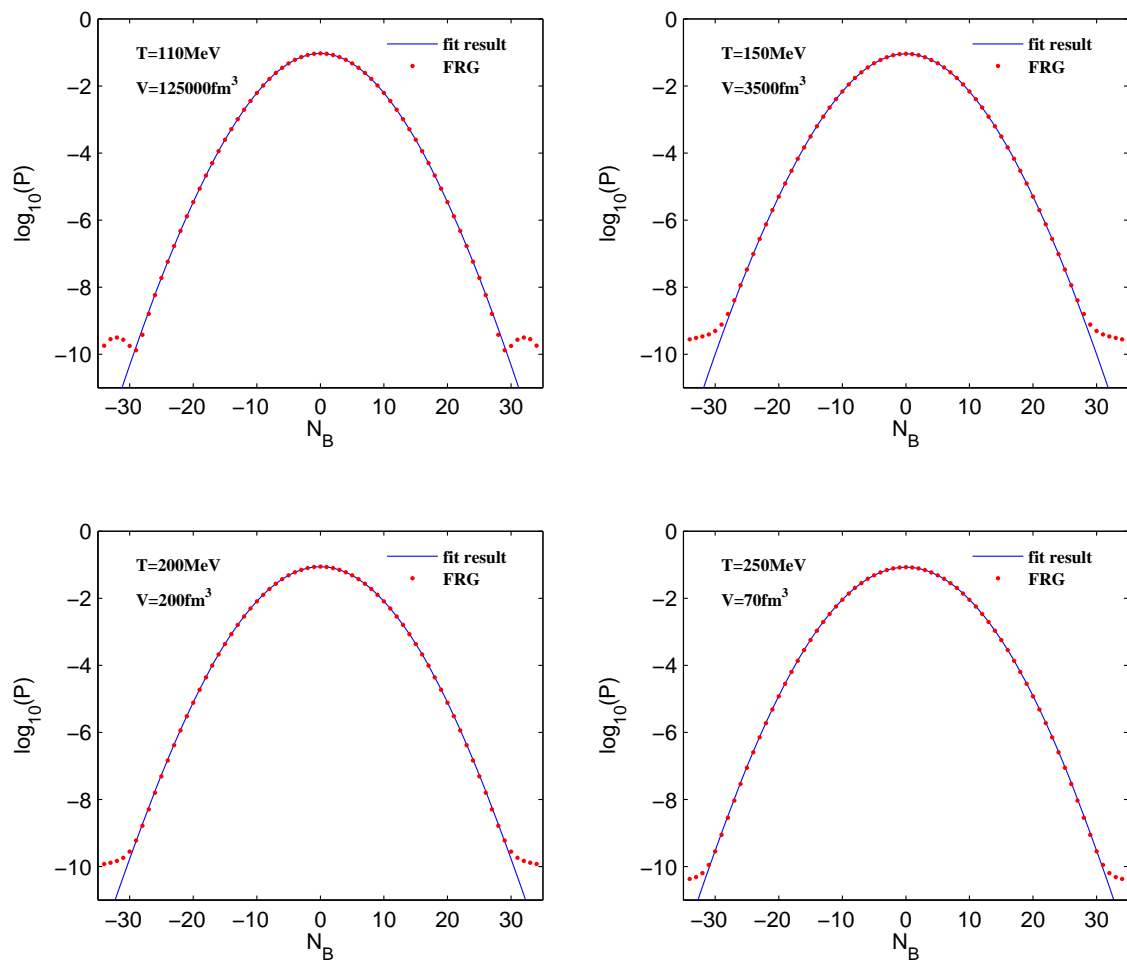


图 3: 蓝线为零化学势下的拟合结果

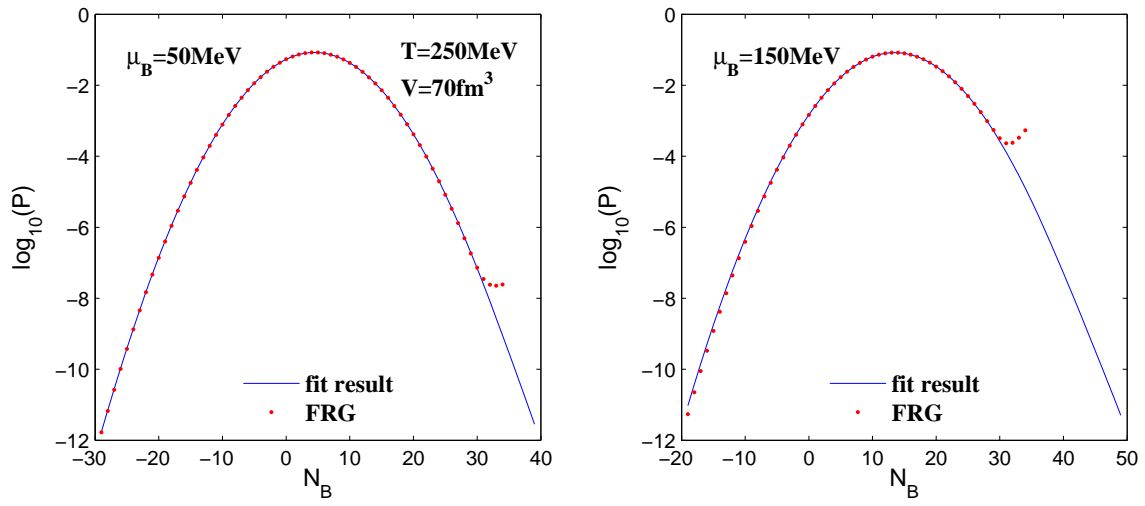


图 4: 蓝线为有限化学势下的拟合结果

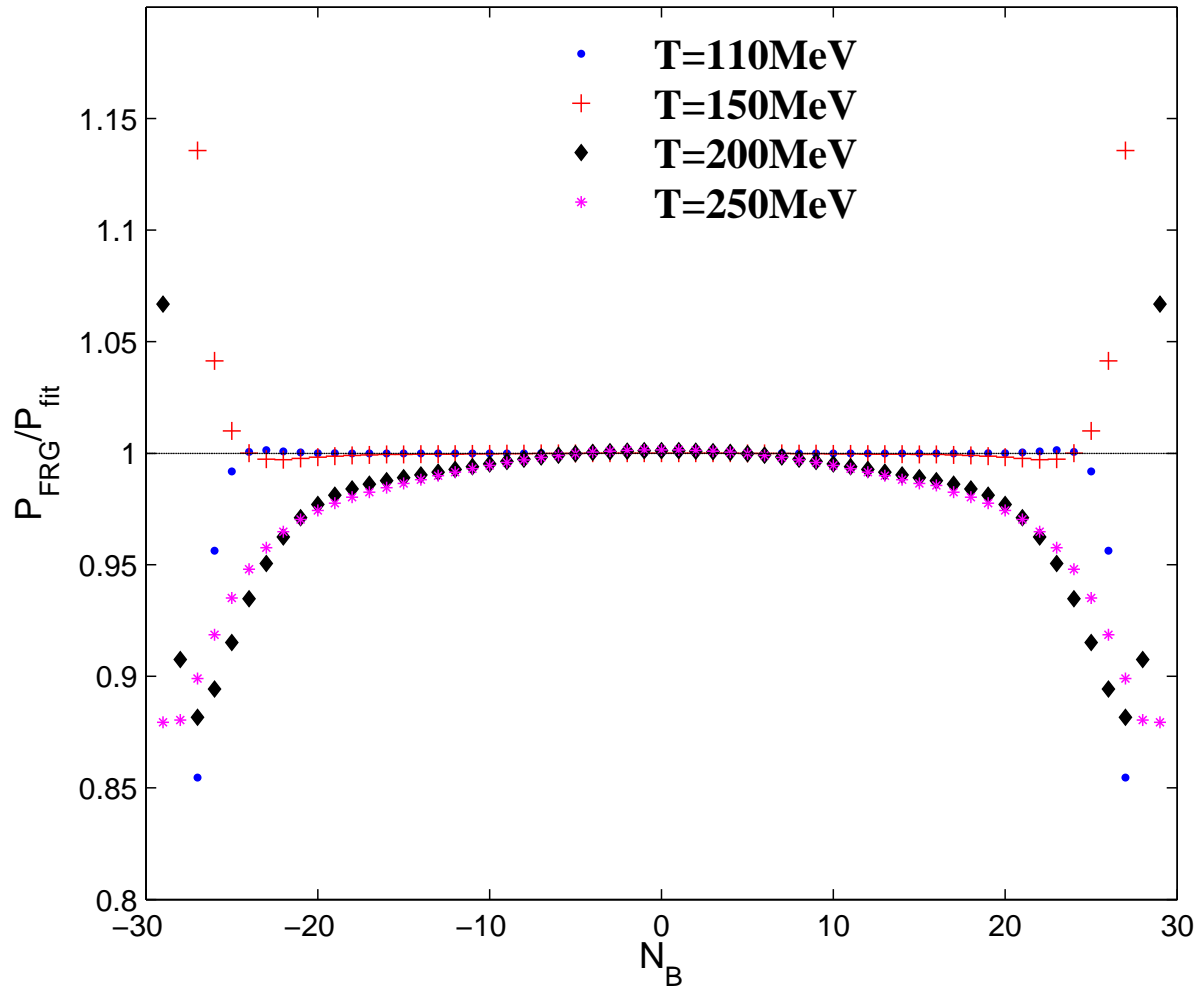


图 5: 零化学势下拟合结果和理论计算结果之比