江 苏 大 学 考 试 试 卷 答 案

<table>
<tr><td rowspan="3">教
师
填
写</td><td>2022–2023 学年度第 1 学期</td><td>开课学院
数学科学学院</td></tr>
<tr><td>课程名称：高等数学 A (期中)</td><td rowspan="2">试卷类别 (A, B)
[A] 共 4 页</td></tr>
<tr><td>考试时间：2022 年 11 月 09 日</td></tr>
<tr><td>考
生
填
写</td><td colspan="2">______学院______专业______班(级)
姓名______学号______ 任课教师______</td></tr>
</table>

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							
评阅人							

一、单选题（共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

答题须知：本题答案必须写在如下表格中，否则不给分.

小题	1	2	3	4
答案				

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(D)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$　(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在　(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

2. 若当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\cdot\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(B)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

3. 若 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(B)

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cosh)}{h^2}$ 存在　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f\left(1-e^h\right)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h-\sinh)}{h^2}$ 存在　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

4. 函数 $f(u)$ 可导，若 $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x_0=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1)=$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(D)

(A) -1　(B) 0.1　(C) 1　(D) 0.5

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 函数 $y=[\ln(x\cdot\sec x)]^2$ 的微分 $\mathrm{d}y=$ $2\ln(x\cdot\sec x)\cdot(\frac{1}{x}+\tan x)\mathrm{d}x$.

2. 设 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$, 则 $y'\big|_{x=0}=$ 1 .

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}, x>0\\ ae^{x}, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ -2 .

4. 写出方程 $\sin x+x-2=0$ 至少有一个根的区间 (长度尽量小) $(1,\frac{\pi}{2})$.

三、计算题（共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1+2x}}{\arctan x}$。

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1+2x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}-1}{x}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{4}x}{x}$ ……4 分

$=-\dfrac{1}{6}$ ……6 分

2. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=3$, 试求: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

解. 由题设知 $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0$, ……2 分

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x\cdot\ln2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x\sin x\cdot\ln2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2\cdot\ln2}=3$ ……4 分

因此 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3\ln2$ ……6 分

3. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解. 因为 $\sin^2 x$ 是周期为 π 的周期函数, 于是有

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$ ……2 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$ ……4 分

$=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$ ……6 分

装 订 线

线

订

装

4. 设 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}$,$(a>0,b>0,a\neq b)$，求 y'。

解. $y=\frac{b^a}{a^b}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}x^{b-a}$ ……2 分

$$y'=\frac{b^a}{a^b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\ln(\frac{a}{b})x^{b-a}+\left(\frac{a}{b}\right)^{x}(b-a)x^{b-a-1}\right]$$

$$=\frac{b^a}{a^b}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}x^{b-a-1}\left(\ln(\frac{a}{b})\cdot x+(b-a)\right)$$ ……6 分

5. 已知星形线方程: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，问：该曲线上哪点的切线与直线 $x+y=2$ 平行，并求出其切线方程。

解. 对 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边同时关于 x 求导，得

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$，即 $y'=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ……2 分

要使星形线的切线与直线 $x+y=2$ 平行，切点需满足方程

$$y'=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-1,\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

解得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a,-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$, ……4 分

因此切线的方程为 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 或 $x+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$。 ……6 分

6. 设 $f(u)$ 为可导函数, $y=f\left(\sin e^{3x}\right)-3^{\cos f(x)}$，求 y'。

解. $y'=f'(\sin e^{3x})\cos e^{3x}\cdot e^{3x}\cdot 3-3^{\cos f(x)}\ln 3\cdot\left(-\sin f(x)\right)\cdot f'(x)$ ……4 分

$=3e^{3x}\cos e^{3x}f'(\sin e^{3x})+\ln 3\cdot\sin f(x)\cdot f'(x)3^{\cos f(x)}$ ……6 分

四、大题（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1. 设 $f(x)=\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$，求 $f(x)$ 的间断点，并指明类型。

解. $f(x)$ 的间断点为 $0,1,\frac{\pi}{2}+k\pi$，这里 $k\in\mathbb{Z}$。 ……2 分

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$ 知 $x=0$ 为跳跃间断点； ……4 分

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ 知 $x=1$ 为无穷间断点； ……6 分

由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi}f(x)=\infty$ 知 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$ 为无穷间断点。 ……8 分

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求出极限.

证. (1) 事实上，由于 $a_1<3$，且 $a_k<3$ 时

$$a_{k+1}=\sqrt{3+2a_k}<\sqrt{3+6}=3,$$

由数学归纳法知对所有 n 都有 $a_n<3$，即数列有上界. 又由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\frac{3}{a_n^2}+\frac{2}{a_n}}>\sqrt{\frac{3}{3^2}+\frac{2}{3}}=1,$$

所以数列单调增加. 由单调收敛准则知，数列必定收敛. ……5 分

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对递推式两边同时取极限得

$$A=\sqrt{3+2A}.$$

解得 $A=3$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$. ……8 分

3. 设 $y=\ln\left(1+x^2\right)$, 求: $y^{(100)}(0)$

解. $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}, y'(0)=0$

$\left[\left(1+x^2\right)y'\right]'=2xy'+(1+x^2)y''=2\Rightarrow y''(0)=2$ ……2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\left[\left(1+x^2\right)y'\right]^{(n)}=(2x)^{(n)}=0$

即 $y^{(n+1)}\cdot\left(1+x^2\right)+y^{(n)}C_n^1 2x+y^{(n-1)}C_n^2\cdot 2=0$

因此 $y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0$ ……6 分

注意到 $\dfrac{y^{(n+1)}(0)}{n!}+\dfrac{y^{(n-1)}(0)}{(n-2)!}=0$，因此 $\dfrac{y^{(100)}(0)}{99!}=(-1)^{49}\dfrac{y''(0)}{1!}=-2$，

从而 $y^{(100)}(0)=-2\times 99!$ ……8 分

此题利用泰勒展开更简单，直接有 $\dfrac{y^{(100)}(0)}{100!}=-\dfrac{1}{50}$。

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax}{e^{n(x-1)}+1}$，试确定常数 a 的取值，使 $f(x)$ 处处连续，并讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性。

解. 当 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax}{e^{n(x-1)}+1}=x^2$;

当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax}{e^{n(x-1)}+1}=\dfrac{a+1}{2}$;

当 $x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax}{e^{n(x-1)}+1}=ax$。 ……4 分

要使 $f(x)$ 处处连续，只需验证 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性，

即满足 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(0)$，解得 $a=1$。 ……6 分

由 $\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=2$，$\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=1$，知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。 ……8 分

装

订

线