1. $Ax=b$

$\Longrightarrow \quad x=A^{-1}b$

当 A 可逆（满秩）时 有唯一解.

2. Gaussian Elimination

设有 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 方阵.

高斯消元法:

$\rightarrow$ 目的: 将 A 变换为上三角矩阵 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & * \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & * \\ 0 & & & 0 \; 0 & * \end{pmatrix}$ 形式

原理过程:

- 定义 Permutation Matrix（置换矩阵）: 每一行,每一列只有1个1 其余为0

$$P_v=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots\; 1 & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots\; 1 \end{pmatrix}$$

注意.

性质: - 左乘 交换行

- 右乘 交换列

- 定义 下三角矩阵 L_v , $L_v=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & -l_{v+1,v} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -l_{m,v} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

注意

$$l_{k1}=\frac{\tilde{a}_{iv}^{(v)}}{\tilde{a}_{vv}^{(v)}} \quad i=v+1,\cdots,m$$

对于方程 $Ax=b$

① 首先交换行，使首位不为0，且绝对值最大

$$PAx=Pb$$

② 其次与 L_1 相乘，使当列除了第一个不变，其余为0

$$L_1 P_1 x = L_1 P_1 b$$

得 $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1m}^{(1)} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ 形式

③ 依此类推

得 $A^{(m)} = L_{m-1} P_{m-1} L_{m-2} P_{m-2} \cdots L_1 P_1 A$

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ & * & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & \underline{0} & & * \end{pmatrix}$$

3. QR 分解原理

对于方阵 $A\in R^{m\times m}$，存在正交矩阵 $Q\in R^{m\times m}$ 和上三角矩阵 $R\in R^{m\times m}$

使 $A=Q\cdot R$

若 A 非奇异，则 R 对角线为正，且 Q.R 唯一.

则对于

$$Ax=b$$

$$\Big\Updownarrow \quad A=Q\cdot R$$

$$QR\cdot x=b$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{都左乘 } Q^T$$

$$Q^TQR\cdot x=Q^Tb$$

$$\Big\Updownarrow \quad Q^T\cdot Q=I \ (\text{正交})$$

$$R\cdot x=Q^Tb$$

对于 $R\cdot x=Q^Tb$，因为 R 是上三角矩阵，易求 x

一 原理：(正交三角分解法) A 为列向量线性无关，

记 $A=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$，因为列向量线性无关

经过施密特正交变换后，得到正交向量组 $(\beta_1,\cdots\beta_n)$

其中 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\beta_j)\beta_j}{(\beta_j,\beta_j)}+\beta_i \quad (i>1)$，$\alpha_1=\beta_1$

则有 $A=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\cdots\beta_n)\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & & b_{2n} \\ & & 1 & \vdots \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

其中 $b_{ji} = \dfrac{(\alpha_i, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)}$

将 $\beta_1 \cdots\cdots \beta_n$ 单位化 得到

$$A = (\alpha_1, \cdots \alpha_n) = \underbrace{(\gamma_1, \cdots \gamma_n)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} |\beta_1| & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & |\beta_2| & & \vdots \\ & \underline{0} & \ddots & \vdots \\ & & & |\beta_n| \end{pmatrix}}_{R}$$

4. Cholesky 分解.

若 A 是 对称 ① 正定 ② ， $A = G \cdot G^T$ 称为 Cholesky 分解.

其中 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 有正对角元素的 下三角矩阵 .

对于方程 $Ax = b$

$$\Updownarrow$$

$$L^T L x = b$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} L^T z = b \\ L x = z \end{cases}$$

其中 G^T 上三角

G 下三角

分别易求 z, b.

一 过程: ⓪ 前提: A pos. definite

① 令 $A^{(1)} := A$

令 下三角矩阵 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & & \underline{0} & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{m1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & \underline{0} & & 1 \end{pmatrix}$

② $A^{(2)} = L_1 A^{(1)} L_1^{T}$

得到 $A^{(2)}$ 形式 $\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

此时 $B^{(2)}$ 也是正定矩阵

③ 以此类推

$$A^{(m)} = L_{m-1} \cdot L_{m-2} \cdots L_1 \cdot A \cdot L_1^H \cdot L_2^H \cdots L_{m-2}^H \cdot L_{m-1}^H$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & & & 0 \\ & a_{22}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mm}^{(m)} \end{pmatrix}$$

我们记这个对角矩阵为 D，$D = diag(a_{11}^{(1)} \cdots a_{mm}^{(m)})$

则是 $\sqrt{D} = diag(\sqrt{a_{11}^{(1)}}, \cdots, \sqrt{a_{mm}^{(m)}})$

$\Longrightarrow$ 由 式子可得

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1} \sqrt{D}}_{\text{这} =: L} \cdot \underbrace{\sqrt{D} \cdot (L_{m-1}^H)^{-1} \cdots (L_1^H)^{-1}}_{\text{这} =: L^H}$$

$\Rightarrow \quad A = L \cdot L^H$

$\rightarrow$ 如何计算 L：
$$\begin{cases} \text{当 } k = 1 \cdots i-1, & l_{ik} = \dfrac{1}{l_{kk}} \left\{ a_{ik} - \sum\limits_{\mu=1}^{k-1} l_{i\mu} \overline{l_{k\mu}} \right\} \\ \text{当 } k = i \text{ 时}, & l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{\mu=1}^{i-1} |l_{i\mu}|^2} \end{cases}$$