1. 正定： 一个 $n\times n$ 的实对称矩阵称为正定，
当 $z^T M z$ 对所有非零 z 是正数
($z^* M z$ 对于复数)

半正定： 与上相似，只不过求解为非负

2. 给定方阵 A，它的特征向量为 $\vec{v}$，$\vec{v}$ 满足经过 A 变形后，仍与 $\vec{v}$ 本身平行。

即 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$，变形后长度方向有可能变

其中 λ 称为特征值。

- 特征值一定为实数
- 计算特征值方法，

由 $Ax = \lambda x$

得 $A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = 0$

$(A-\lambda I)\vec{x} = 0$

求 $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0$ 的解

3. - 若两个矩阵 A 和 B 有相同特征值，且 B 的特征向量 y 是 A 的特征向量 x 的线性变换，即 $y = S^{-1}x$，则称：
A 与 B 相似。

- 数学定义： $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，称 B 为 A 的相似矩阵
若存在非奇异 $S\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使 $B=S^{-1}AS$。此时 $A\to S^{-1}AS$ 称为相似变换，简写 $B\sim A$

有以下性质

1. A 与 A 本身相似

2. 若 A 相似于 B，则 B 相似于 A

3. 若 $A \sim B$，$B \sim C$ 则 $A \sim C$

几何意义：相同的变换在不同基底下的描述，即不同坐标系下的表述

4. 一 矩阵不一定能对角化

一 对角化定义：$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，若存在 $T, T^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵，则为可对角化。

一 可对角化例子：① A 有 n 个不同的 λ（n 个无关的 eigenvector）.

② $A^HA = AA^H$，A 正交

③ A 是 Hermitian 矩阵 $(A = A^H)$

④ A 是 unitary Matrix

一 不能对角化的矩阵 $\longrightarrow$ ① Jordan 标准形.（总能实现）.

即 除了主对角线上不为零，主对角线上方元素为 0 或 1.

e.g $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ 都是 Jordan

② 或转换为上三角矩阵

5. SVD (singular value decomposition)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (或 $\mathbb{C}^{m\times n}$)，存在正交(或 unitary)矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ($\mathbb{C}^{m\times m}$)
和 $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$) 使得

$$A = U \cdot \Sigma V^T \quad (U \cdot \Sigma V^H)$$

其中 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots \sigma_r)$

$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$

$r = \mathrm{rank}(A)$

6. 伪逆(又名广义逆)：

① 左逆：$LA = I$ $\quad AL \neq I$，L 是 A 的左逆

② 右逆：$AR = I$ $\quad RA \neq I$. R 是 A 的右逆

广义逆(伪逆)：$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$A$ 的广义逆为 G，使得
$Ax = y$ 为一致方程时，$x = Gy$ 是 $Ax = y$ 的解

(注：一致方程：$A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = y_{m\times 1}$ 为一致方程，若 A 行间存在的线性关系，也存在于向量 y 对应的元素中)

- Moore-Penrose 逆

一个矩阵 $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$，$A$ 的广义逆 定义为 $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$，
A^+ 满足以下 4 个条件 (又称 Moore-Penrose 条件)

① $AA^+A = A$ (注 AA^+ 不一定为单位阵)

② $A^+AA^+ = A^+$

③ $(AA^+)^* = AA^+$ (注 AA^+ 为 Heritian)

④ $(A^+A)^* = A^+A$

分为4类

满足①和②：称为自反广义逆 reflexive generalized inverse

满足①②③ 称为正规化广义逆 normalized generalized inverse

满足①②④ 称为弱广义逆 week generalized inverse

满足①–④ 称为 Moore-Penrose 逆

— 计算：关于 Moore-Penrose 逆求解：

① $B = AA^H$

② $B^2 X^H = B$ 得 X^H

③ $B^+ = XBX^H$

④ $A^+ = A^H B^+$

7.

(a). $x = (A^T A)^{-1} A^T b$

— 对 A 奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$

$\Longrightarrow x = V\Sigma^+ U^T b$

— 关系，对于奇异矩阵，进行 SVD，对于非奇异矩阵的 SVD 结果等于特征值分解。

(b). $Ax = 0$ 之前是 $\min \|Ax-b\|$

现在 $\min \|Ax\|$

对于 $Ax=0$，若 x 是方程解，则 $k\cdot x$ 也是方程解，

因此存在 $\|x\| = 1$ 为方程解。

此时 $\min \|Ax\| = \dfrac{\min \|Ax\|}{1} = \dfrac{\min \|Ax\|}{\|x\|^2} = \min \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|^2}$

结论可得 x 为 A^TA 的最小特征值对应的特征向量.

对 A 进行 SVD 分解.

$$\min \|Ax\| = \min \|U\Sigma V^T x\| \quad 且 \quad \|x\|=1$$

因为 U 不影响范数，V 不影响范数

上式 $\Rightarrow \quad \min \|\Sigma V^T x\| \quad 且 \quad \|V^T x\| = 1$

令 $\|y\|=1$

$\Rightarrow \quad \min \|\Sigma y\| \quad 且 \quad \|y\|=1$

其中 Σ 是对角矩阵，则 $y=(0,\cdots,0,1)^T$

$\Rightarrow \quad x = V^T y$，即 x 为 V 的最后一列

(c). 几何意义 对于 $Ax=0$，相当于寻找 A 的零空间

而矩阵本身是线性变换，

即 A 对 x 的线性变换，使 x 经过映射为零点