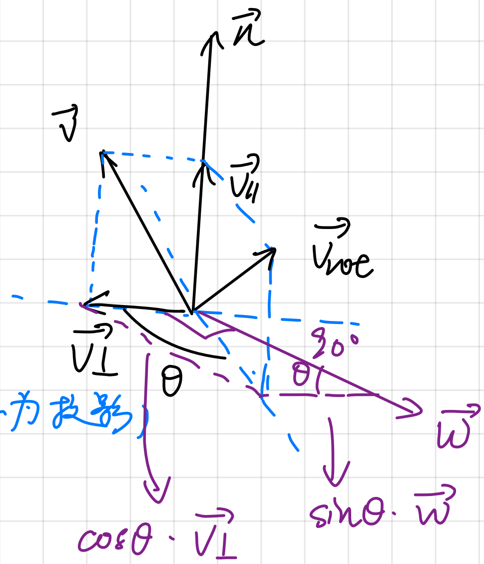
1. Rodrigues' Rotation Formula. 证明

已知 $\vec{v}$ 绕 $\vec{n}$ 旋转 θ 度为 $\vec{v}_{rot}$



将 $\vec{v}$ 分解

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

其中
$$\begin{cases} \vec{v}_{\parallel} = (\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n} & \text{(利用点积为投影)} \\ \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} \end{cases}$$

$$= \vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}$$

$$= -\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v})$$ (利用叉积为两垂线性质).

而取 $\vec{w} = \vec{n}\times\vec{v}$ 为 $\vec{n}, \vec{v}$ 的两垂线

我们因此得到 $\begin{cases}\vec{v}_{\parallel} \\ \vec{v}_{\perp} \\ \vec{w}\end{cases}$ 三个彼此正交的向量.

由图得旋转后
$$\vec{v}_{rot} = \vec{v}_{\parallel} + \cos\theta\cdot\vec{v}_{\perp} + \sin\theta\,\vec{w}$$

$$= \vec{v}_{\parallel} + \cos\theta\cdot(\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v})$$

$$= \cos\theta\cdot\vec{v} + (1-\cos\theta)\vec{v}_{\parallel} + \sin\theta\,(\vec{n}\cdot\vec{v})$$

$$= \cos\theta\,\vec{v} + (1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n} + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v})$$

$$= \cos\theta\cdot\vec{v} + (1-\cos\theta)\underbrace{(\vec{v}-\vec{v}_{\perp})}_{\text{I}} + \sin\theta\, n^{\wedge}\cdot\vec{v}$$

I: $\vec{v} - \vec{v}_{\perp} = \vec{v} + \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v})$

$$= \vec{v} + n^{\wedge}(n^{\wedge}\vec{v})$$

将 I 代入原式中

$$\vec{V}_{rot} = \cos\theta\cdot\vec{v} + (1-\cos\theta)(\vec{v} + n^\wedge(n^\wedge\vec{v})) + \sin\theta n^\wedge\vec{v}$$

$$= (\cos\theta + 1 - \cos\theta)\vec{v} + (1-\cos\theta)n^\wedge(n^\wedge\vec{v}) + \sin\theta n^\wedge\vec{v}$$

$$= \vec{v} + (1-\cos\theta)(n^\wedge)^2\cdot\vec{v} + \sin\theta\, n^\wedge\cdot\vec{v}$$

$$= \underbrace{\left[I + (1-\cos\theta)(n^\wedge)^2 + \sin\theta\cdot n^\wedge\right]}_{R}\cdot\vec{v}$$

为了得到书中另一种R的表达

从 $\vec{V}_{rot} = \cos\theta\vec{v} + (1-\cos\theta)\vec{v}_{//} + \sin\theta\, n^\wedge\vec{v}$ 推起.

由于 $\vec{v}_{//}$ 是 $\vec{v}$ 在 $\vec{n}$ 上投影，在n上的投影矩阵为 $\frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\vec{n}^T\vec{n}}$

因为 $\vec{n}$ 为单位向量，$\vec{n}^T\vec{n} = 1$

$$\Longrightarrow \vec{v}_{//} = \vec{n}\vec{n}^T$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_{rot} = \underbrace{\left[\cos\theta + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T + \sin\theta n^\wedge\right]}_{R}\vec{v}$$

2. 证明 $R^{-1} = R^T$

$$R = I + (1-\cos\theta)(n^\wedge)^2 + \sin\theta\cdot n^\wedge$$

R^{-1} 相当于同一个轴 $\vec{n}$，向相反方向旋转 θ

即 $\theta := -\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} R^{-1} &= \cos(-\theta)I + (1-\cos(-\theta))\vec{n}\vec{n}^T + \sin(-\theta)n^\wedge \\ &= \cos\theta I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T - \sin\theta n^\wedge \end{aligned}}$$ ①

对于 R^T，对每个元素分别转置之和

即：$R^T = \underbrace{(\cos\theta\, I)^T}_{\text{不变}} + \underbrace{\left[(1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T\right]^T}_{\vec{n}\cdot\vec{n}^T \text{为对称的，不变}} + \underbrace{(\sin\theta\, n^\wedge)^T}_{\text{符号取反}}$

$n^\wedge = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{= \cos\theta I + (1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}^T - \sin\theta\, n^\wedge} \quad ②$$

发现 ① = ②

即 $R^T = R^{-1}$

证毕