

证:

求解 $\min \|Dy\|_2^2$, s.t. $\|y\| = 1$

与 $\min \|Dy\|$, s.t. $\|y\| = 1$

两个问题等价

与 D 进行 SVD 分解:

$$D = U \Lambda V^T$$

根据酉矩阵保范性

有: $\|U \Lambda V^T y\| = \|\Lambda V^T y\|$

$$\|V^T y\| = \|y\| = 1$$

令 $x = V^T y$

则原问题转换为: $\min \|\Lambda x\|$,
s.t. $\|x\| = 1$

因为 Λ 为对角矩阵, 元素由大到小排列.

且 $\|x\| = 1$

所以当 $x = (0, \dots, 0, 1)$ 时

$$\|\Lambda x\| \text{ 最小}$$

此时 $y = Vx$, y 是 V 的最后一列

因此, 当 $y = u_4$ 时, 有最优解