VIO lesson SS3

Yin Wu

2021 年 12 月

目录

1 Task 2 **1**
1.1 Question 1 1
1.2 Question 2 1

2 Task 3 **2**

1 Task 2

1.1 Question 1

任务：证明下面公式

$$f_{15} = \frac{\partial \delta \alpha_{b_{k+1}}}{\partial \delta b_k^g} = -\frac{1}{4}(R_{b_i b_{k+1}}[(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2)(-\delta t) \tag{1}$$

证明：
首先，我们写出 $\alpha_{b_i b_{k+1}}$

$$\begin{aligned}
\alpha_{b_i b_{k+1}} &= \alpha_{b_i b_k} + \beta_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\delta t^2 \\
&= \alpha_{b_i b_k} + \beta_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(q_{b_i b_k}(a^{b_k} - b_k^a) + q_{b_i b_{k+1}}(a^{b_{k+1}} - b_k^a))\boxtimes\right)\delta t^2 \\
&= \alpha_{b_i b_k} + \beta_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(q_{b_i b_k}(a^{b_k} - b_k^a) + q_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{bmatrix}(a^{b_{k+1}} - b_k^a))\boxtimes\right)\delta t^2
\end{aligned} \tag{2}$$

其中，只有 ω 项与 b_k^g 有关，因此在计算偏导时，我们只需要考虑这一项。

$$\begin{aligned}
f_{15} &= \frac{\partial \delta \alpha_{b_{k+1}}}{\partial \delta b_k^g} \\
&= \frac{\partial \frac{1}{4} q_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\omega - \delta b_k^g)\delta t \end{bmatrix}(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta b_k^g} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_i b_k} exp([\omega - \delta b_k^g \delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta b_k^g} \\
&\approx \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_i b_k} exp([\omega\delta t]_\times) exp([-J_r(\omega\delta t)\delta b_k^g \delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta b_k^g} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_i b_{k+1}} exp([-J_r(\omega\delta t)\delta b_k^g \delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta b_k^g} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{R_{b_i b_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2]_\times \cdot (-J_r(\omega\delta t)\delta b_k^g \delta t)}{\partial \delta b_k^g} \\
&= -\frac{1}{4} R_{b_i b_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2 \cdot (-J_r(\omega\delta t)\delta t)
\end{aligned} \tag{3}$$

因为，当 ϕ 非常小的时候，有 $J_r(\phi) \approx I$，带入得到：

$$f15 = -\frac{1}{4} R_{b_i b_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2 \cdot (-\delta t) \tag{4}$$

证毕

1.2 Question 2

任务：证明下面公式

$$g12 = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial n_k^g} = -\frac{1}{4}(R_{b_i b_{k+1}}[(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2)(\frac{1}{2}\delta t) \tag{5}$$

证明:

同样的原理，我们首先需要写出 $\alpha_{b_ib_{k+1}}$ 的表达式，其与第一问 (2) 相同。之后我们需要在表达式中找到求偏导变量的有关项，即 n_k^g。此项与第一问类似，也只存在于 ω 当中。但是根据 ω 的表达式，与第一问的 b_k^g 稍有不同:

$$\omega = \frac{1}{2}((\overline{\omega}^{b_k} + n_k^g - b_k^g) + (\overline{\omega}^{b_{k+1}} + n_{k+1}^g - b_k^g)) \tag{6}$$

则偏导可以根据此式写为

$$\begin{aligned}
f_{15} &= \frac{\partial \delta\alpha_{b_{k+1}}}{\partial \delta n_k^g} \\
&= \frac{\partial \frac{1}{4} q_{b_ib_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\omega + \frac{1}{2}n_k^g)\delta t \end{bmatrix} (a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta n_k^g} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_ib_k} exp([(\omega + \frac{1}{2}n_k^g)\delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta n_k^g} \\
&\approx \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_ib_k} exp([\omega\delta t]_\times) exp([J_r(\omega\delta t)\frac{1}{2}n_k^g\delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta n_k^g} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial R_{b_ib_{k+1}} exp([J_r(\omega\delta t)\frac{1}{2}n_k^g\delta t]_\times)(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2}{\partial \delta n_k^g} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{R_{b_ib_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)\delta t^2]_\times \cdot (J_r(\omega\delta t)\frac{1}{2}n_k^g\delta t)}{\partial \delta n_k^g} \\
&= -\frac{1}{4}R_{b_ib_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2 \cdot (J_r(\omega\delta t)\frac{1}{2}\delta t) \\
&= -\frac{1}{4}R_{b_ib_{k+1}} \cdot [(a^{b_{k+1}} - b_k^a)]_\times \delta t^2 \cdot (\frac{1}{2}\delta t)
\end{aligned} \tag{7}$$

证毕

2 Task 3

任务：证明下面公式

$$\Delta x_{lm} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{F}'^T}{\lambda_j + \mu}\boldsymbol{v}_j \tag{8}$$

证明:

已知公式

$$(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} + \mu\boldsymbol{I})\Delta x_{lm} = -\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}'^T \tag{9}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}$ 是方阵，将其进行特征值分解:

$$\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是是由特征列向量组成的矩阵: $\boldsymbol{V} = [v_1, v_2 ... v_n]$，其中特征向量 v_i 已经被标准化，则矩阵 $\boldsymbol{V}$ 满足 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V}^{-1}$。

我们对 (9) 进行处理:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}+\mu\boldsymbol{I} &= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T+\mu\boldsymbol{I} \\
&= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T+\mu\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}\boldsymbol{V}^T \\
&= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T+\boldsymbol{V}\mu\boldsymbol{I}\boldsymbol{V}^T \\
&= \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Sigma}+\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{V}^T \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1+\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_n^T \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{11}
$$

对 (11) 求逆得

$$
(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}+\mu\boldsymbol{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1+\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_n^T \end{bmatrix} \tag{12}
$$

带入 (9) 得到:

$$
\begin{aligned}
&\Delta x_{lm} \\
&= -(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}+\mu\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{F}'^T \\
&= -\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1+\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_n^T \end{bmatrix} \boldsymbol{F}'^T \\
&= -\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1+\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{F}'^T \\ \boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{F}'^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{F}'^T \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_1+\mu} \\ \frac{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_2+\mu} \\ \cdots \\ \frac{\boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_n+\mu} \end{bmatrix} \\
&= -(\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_1+\mu}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\frac{\boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_n+\mu}\boldsymbol{v}_n) \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{F}'^T}{\lambda_j+\mu}\boldsymbol{v}_j
\end{aligned} \tag{13}
$$

证毕