

高等代数笔记

讲课：谢启鸿

记录：Cowboy

更新：2025 年 3 月 24 日 21:52

目 录

1	行列式	1
1.1	n 阶行列式	1
1.2	行列式的展开和转置	10
1.3	Gramer 法则	11
1.4	行列式的计算	13
1.5	Laplace 定理	14
2	矩阵	17
2.1	矩阵的逆	17
2.2	Cauchy-Binet 公式	17
3	线性空间	21
3.1	矩阵的秩	21
3.2	线性方程组的解	22
4	线性映射	25
4.1	线性映射与矩阵	25
4.2	线性映射的像与核	26
4.3	不变子空间	29
5	多项式	34
5.1	复系数多项式	34
5.2	结式和判别式	34
6	特征值	38
6.1	对角化	38

6.2	极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理	38
6.3	特征值的估计	42
7	相似标准型	46
7.1	多项式矩阵	46
7.2	矩阵的法式	46
7.3	不变因子	49
7.4	有理标准型	52
7.5	初等因子	55
7.6	Jordan 标准型	56
7.7	Jordan 标准型的进一步讨论和应用	62
7.8	Jordan 标准型练习题	68
7.8.1	TOPIC 1	68
7.8.2	TOPIC 2	69
7.8.3	TOPIC 3	71
7.9	矩阵函数	73
8	二次型	75
8.1	二次型的化简与矩阵的合同	75
8.2	二次型的化简	76
8.2.1	配方法	76
8.2.2	对称初等变换法	76
8.3	惯性定理	76
8.3.1	实二次型	77
8.3.2	复二次型	77
8.4	正定型与正定矩阵	78
8.5	半正定型和半正定矩阵	82
8.6	Hermite 型	84

9	内积空间	89
9.1	内积空间的概念	89
9.2	内积的表示和正交基	94
9.3	伴随	103
9.4	内积空间的同构, 正交变换和酉变换	106
9.5	自伴随算子	113
9.6	复正规算子	119
9.7	实正规矩阵	125
9.8	谱	132
9.9	奇异值分解	139

1 行列式

1.1 n 阶行列式

定义 1.1 由两条竖线围成的 n 行 n 列元素组成的式子 (数值) 称为 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

有时也记为 $\det(A)$, determinant.

$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 第 i 行

$a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 第 j 列

$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 主对角线

a_{ij} 称为第 (i, j) 元素, 删去 a_{ij} 所在的第 i 行, 第 j 列, 剩余元素按原来的顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式, 称为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} .

定义 1.2 (递归定义) 当 $n=1$ 是, 1 阶行列式 $|a_{11}| \triangleq a_{11}$. 设所有 $n-1$ 阶行列式值已定义好, 特别地, M_{ij} 已定义好, 下面按第一列展开, 定义 n 阶行列式:

$$|A| \triangleq a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

定义 1.3 a_{ij} 的代数余子式为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

定义 A 的 n 阶行列式:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

定义 1.4 若 $a_{ij} = 0, \forall i > j$, 即主对角线下方所有元素都为 0, 则称 $|A|$ 为上三角行列式; 若 $a_{ij} = 0, \forall i < j$, 即主对角线上方所有元素都为 0, 则称 $|A|$ 为下三角行列式.

性质 1 上三角 (下三角) 行列式值等于主对角线元素之积.

证明: 当 $n=1$ 时, $|a_{11}| = a_{11}$, 结论成立. 设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 下面证 n 阶的情形.

1°. 上三角时:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据定义1.2, $|A| = a_{11}M_{11}$. 其中, M_{11} 为 $n-1$ 阶上三角行列式. 由归纳假设,

$$M_{11} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn},$$

因此,

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

2°. 下三角时:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义1.2

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

考虑余子式 $M_{k1} (1 \leq k \leq n)$, 设 $M_{k1} = (b_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$, 则

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i,j+1}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ a_{i+1,j+1}, & k \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (1.1)$$

$|A|$ 为下三角行列式, 即

$$\forall i < j, a_{ij} = 0. \quad (1.2)$$

由(1.1)式和 (1.2)式可知, M_{k1} 都是下三角行列式. 可以断言, 当 $k \geq 2$ 时, M_{k1} 必有一个主对角元为 0, 因为

$$b_{k-1,k-1} = a_{k-1,k} = 0.$$

因此, 根据归纳假设,

$$M_{k1} = 0 (k \geq 2), M_{11} = a_{22} \cdots a_{nn},$$

从而

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

□

性质 2 行列式 $|A|$ 的某行 (列) 乘以常数 c , 得到的行列式 $|B| = c \cdot |A|$.

证明: 当 $n = 1$ 时,

$$|B| = |c \cdot a_{11}| = ca_{11} = c \cdot |A|.$$

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立, 下面证 n 阶的情形.

1°. 行的情形:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

设 $|A|$ 的余子式为 M_{ij} , $|B|$ 的余子式为 N_{ij} . 由定义1.2可得

$$|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i+1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}. \quad (1.3)$$

当 $k \neq i$ 时, N_{k1} 是 M_{k1} 的某一行元素乘以 c 得到, 因此由归纳假设可知

$$N_{k1} = c \cdot M_{k1}, \quad (1.4)$$

当 $k = i$ 时,

$$N_{k1} = M_{k1}. \quad (1.5)$$

将(1.4)式和(1.5)式代入(1.3)式中去:

$$|B| = c(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = c|A|.$$

2°. 列的情形:

(1) 乘以 c 的是第 1 列时:

$$|B| = \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此时, $\forall i, N_{i1} = M_{i1}$, 所以

$$\begin{aligned} |B| &= ca_{11}N_{11} - ca_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}ca_{n1}N_{n1} \\ &= c(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = c|A|. \end{aligned}$$

(2) 乘以 c 的是第 j 列, $j \geq 2$ 时:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据定义1.2,

$$|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}, \quad (1.6)$$

上式中 N_{i1} 是由 M_{i1} 某一列乘以 c 得到, 由归纳假设可知,

$$N_{i1} = c \cdot M_{i1}, \forall i. \quad (1.7)$$

将(1.7)式代入(1.6)式, 可得

$$|B| = c(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = c \cdot |A|.$$

□

性质 3 若 $|A|$ 有一行 (列) 元素全为 0, 则 $|A| = 0$.

证明:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{根据性质 2}} 0 \cdot |A| = 0.$$

□

性质 4 对换 $|A|$ 的两个不同行, 所得行列式 $|B| = -|A|$.

证明: 当 $n = 2$ 时, 容易验证结论成立. 设结论对 $n - 1$ 阶行列式成立, 下面证结论对 n 阶行列式成立.

1°. 对换相邻两行, 即第 i 行与 $i + 1$ 行, 此时

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据定义1.4,

$$|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}N_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i1}N_{i+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}. \quad (1.8)$$

当 $k \neq i, i + 1$ 时, N_{k1} 由 M_{k1} 对换相邻两行得到, 由归纳假设可知,

$$N_{k1} = -M_{k1}, \forall k \neq i, i + 1. \quad (1.9)$$

当 $k = i, i + 1$ 时,

$$N_{i1} = M_{i+1,1}, N_{i+1,1} = M_{i,1}. \quad (1.10)$$

将(1.9)式和(1.10)式都代入(1.8)式中, 可得

$$|B| = -(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = -|A|.$$

2°. 对换 $|A|$ 的第 i 行和第 j 行 ($i < j$). 因为普通的行对换等价于一系列的相邻行对换的复合, 所以

$$\begin{array}{ccccc} i & & i+1 & & j \\ i+1 & & \dots & & i+1 \\ \vdots & \xrightarrow{j-i \text{ 次相邻行对换}} & j-1 & \xrightarrow{j-i-1 \text{ 次相邻行对换}} & \vdots \\ j-1 & & j & & j-1 \\ j & & i & & i \end{array}$$

从上面行指标的对换过程可以看出, 任何第 i 行和第 j 行做对换, 等价于做了 $2(j-i)-1$ 次相邻行对换, 根据 1° 可得

$$|B| = (-1)^{2(j-i)-1}|A| = -|A|.$$

□

性质 5 若 $|A|$ 的两行成比例 (相等), 则

$$|A| = 0.$$

证明: 设 $|A|$ 的第 j 行的元素是第 i 行对应元素的 c 倍, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{根据性质 2}} c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

根据性质 4, 交换上式最后一个矩阵的第 i 行和第 j 行, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

将上式结论代入(1.11)式, 得

$$|A| = c \times 0 = 0.$$

□

性质 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} + b_{r1} & a_{r2} + b_{r2} & \cdots & a_{rn} + b_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 当 $n = 1$ 时, $|a_{11} + b_{11}| = |a_{11}| + |b_{11}|$, 结论成立. 设结论对 $n - 1$ 阶行列式成立, 下面证明 n 阶的情形. 设结论等式左边的行列式为 $|C|$, 其余子式为 Q_{ij} ; 等式右边两个行列式分别为 $|A|$ 和 $|B|$, 它们的余子式分别为 M_{ij} 和 N_{ij} . 根据定义 1.2,

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}(a_{r1} + b_{r1})Q_{r1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}, \quad (1.12)$$

当 $k \neq r$ 时, Q_{k1}, M_{k1}, N_{k1} 满足性质 6 中的条件, 由归纳假设可知

$$Q_{k1} = M_{k1} + N_{k1}, \forall k \neq r. \quad (1.13)$$

当 $k = r$ 时,

$$Q_{r1} = M_{r1} = N_{r1}. \quad (1.14)$$

将(1.13)式和(1.14)式代入(1.12)式,

$$\begin{aligned} |C| &= (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) + \\ &\quad (a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{r+1}b_{r1}N_{r1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}) \\ &= |A| + |B|. \end{aligned}$$

□

性质 7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} + a_{j1} & ca_{i2} + a_{j2} & \cdots & ca_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明: 设等式左边的行列式为 $|B|$, 等式右边的行列式为 $|A|$. 根据性质 6 对 $|B|$ 进行拆分,

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据性质 5, 上式最后一个行列式的值为 0, 因此

$$|B| = |A|.$$

□

性质 5' 若 $|A|$ 有两列成比例 (相等), 则

$$|A| = 0.$$

证明: 对阶数 n 进行归纳. 当 $n = 2$ 时, 容易验证结论成立. 设对 $n - 1$ 阶行列式结论成立, 现证 n 阶的情形. 两列成比例情况可以转化为相等的情况, 因此只需证明两列相等的情形.

Case 1: 相等的两列都不是第一列.

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \quad (1.15)$$

$\forall i, M_{i1}$ 都有两列相等. 由归纳假设可知,

$$M_{i1} = 0, \forall i.$$

将上式代入(1.15)式, 可得

$$|A| = 0.$$

Case 2: 第 1 列和第 r 列相等. 如果第一列全部为 0, 结论显然成立, 下面证第一列不全为 0 的情形, 例如设 $a_{s1} \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 } s \text{ 行乘以 } -\frac{a_{i1}}{a_{s1}} \text{ 后加到第 } i \text{ 行上}]{\text{根据性质 7}} |C| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{s1} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{vmatrix}.$$

上式中, $|C|$ 第 1 列和第 r 列都只有 a_{s1} 非零, 将 $|C|$ 按第 1 列展开,

$$|A| = |C| = (-1)^{s+1}a_{s1}Q_{s1},$$

Q_{i1} 为 $|C|$ 按第 1 列展开时的余子式, Q_{s1} 中, 由于第 s 行全去掉了, 因此, 有一列全部为 0, 因此根据性质 3, $Q_{s1} = 0$, 从而

$$|A| = |C| = 0.$$

□

性质 6'

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} + b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} + b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} + b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: $n = 1$ 时显然成立. 设阶数为 $n - 1$ 时结论成立, 现证 n 阶时的情形. 设上面等式左边的行列式为 $|C|$, 其余子式为 Q_{ij} ; 等式右边第一个行列式为 $|A|$, 其行列式为 M_{ij} ; 等式右边第二个行列式为 $|B|$, 其行列式为 N_{ij} .

Case 1: $r = 1$ 时

$$|C| = (a_{11} + b_{11})Q_{11} - (a_{21} + b_{21})Q_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}(a_{n1} + b_{n1})Q_{n1}. \quad (1.16)$$

由于求和的列位于第 1 列, 因此第 1 列元素的余子式不包括求和的列, 所以

$$Q_{i1} = M_{i1} = N_{i1}, \forall i.$$

将上式代入(1.16), 得

$$|C| = |A| + |B|.$$

Case 2: $r > 1$ 时

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}. \quad (1.17)$$

Q_{i1}, M_{i1}, N_{i1} 满足性质 6' 中的条件, 根据归纳假设可知

$$Q_{i1} = M_{i1} + N_{i1},$$

将上式代入(1.17)可得

$$|C| = |A| + |B|.$$

□

性质 7'

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} + ca_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} + ca_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} + ca_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 由性质 6' + 性质 5' 可证.

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} + ca_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} + ca_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} + ca_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{根据性质 5', 该行列式值为 0}} \\
 = & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

性质 4' 对换 $|A|$ 的两个不同列, 得到的行列式 $|B| = -|A|$.

证明: 设 $|B|$ 是对换 $|A|$ 的第 r 列与第 s 列所得,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

构造一个新行列式 $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1r} + a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2r} + a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nr} + a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{根据性质 5'}} 0.$$

利用性质 6' 将 $|C|$ 拆分成 4 个行列式:

$$\begin{aligned}
 |C| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + |A| + |B| \\
 &= |A| + |B| \\
 &= 0 \\
 \implies |B| &= -|A|.
 \end{aligned}$$

□

1.2 行列式的展开和转置

定理 1.1 若

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.18)$$

第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij} , 则对任意的 $r (r = 1, 2, \cdots, n)$ 列有展开式:

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}. \quad (1.19)$$

又对任意的 $s \neq r$, 有

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0 \quad (1.20)$$

证明: 先证 $s = r$ 的情况.

方法一: 将第 r 列和前面相邻列逐次对换, 直到第 r 列对换到第 1 列, 此时的行列式为 $|B|$. 设 $|A|$ 的余子式为 M_{ij} , $|B|$ 的余子式为 N_{ij} .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{|A| \text{ 经过 } r-1 \text{ 次相邻两列对换}} |B| = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1,r-1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & \cdots & a_{2,r-1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nr} & a_{n1} & \cdots & a_{n,r-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\implies |B| = a_{1r}N_{11} - a_{2r}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1}. \end{aligned}$$

$|A|$ 经过 $r-1$ 次相邻两列对换得到 $|B|$, 故 $|A| = (-1)^{r-1}|B|$. 又因为 $\forall i, N_{i1} = M_{ir}$, 代入 $|B|$ 的表达式, 得

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{r-1}|B| = (-1)^{r-1}(a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}M_{nr}) \\ &= (-1)^{r+1}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{r+2}a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{r+n}a_{nr}M_{nr} \\ &= a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr} \end{aligned}$$

上面推算中, $(-1)^{r-1} = (-1)^{r+1}$.

方法二: 利用性质 6' 将第 r 列进行拆分.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}.$$

所以, (1.19)式成立。

再证 $s = r$ 的情况.

在(1.18)式基础上, 将其第 s 列换成第 r 列, 构建一个新行列式, 其值为 0, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

将上面行列式按第 s 列展开:

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0$$

所以(1.20)式成立。

同理可证, 按照任意 $r(r=1, 2, \cdots, n)$ 行展开有展开式:

$$|A| = a_{r1}A_{1r} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn}. \quad (1.21)$$

又对任意的 $s \neq r$, 有

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0 \quad (1.22)$$

9

1.3 Gramer 法则

定理 1.2 (Gramer 法则) 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.23)$$

记这个方程组的系数行列式为 $|A|$, 若 $|A| \neq 0$, 则方程组有且仅有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \quad (1.24)$$

其中 $|A_j| (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是一个 n 阶行列式, 它由 $|A|$ 去掉第 j 列换上方程组的常数项 b_1, b_2, \cdots, b_n 组成的列而成.

证明:

方法一: 只需验证(1.24)式确为方程组(1.23)的解.

将 $|A_j|$ 按第 j 列展开, 得

$$|A_j| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}, \quad (1.25)$$

根据式(1.24)和式(1.25)可得,

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad (1.26)$$

方程组(1.23)第 k 个方程为

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = b_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.27)$$

将(1.26)代入(1.27)左边得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j &= \sum_{j=1}^n (a_{kj} \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}) \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{kj} b_i A_{ij} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n b_i (\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij}) \end{aligned}$$

上式最后一个等式里 $\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij}$ 部分的值如下:

当 $i \neq k$ 时, 为行列式 $|A|$ 第 k 行每个元素与第 i 行同列元素对应的代数余子式的乘积之和, 其值为 0;

当 $i = k$ 时, 为行列式 $|A|$ 按第 k 行元素展开, 即第 k 行每个元素与其对应代数余子式的乘积之和, 其值为 $|A|$. 所以,

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \frac{1}{|A|} b_k \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} = \frac{b_k}{|A|} |A| = b_k$$

由于 k 为任意 1 至 n 的自然数, 因此(1.24)式是(1.23)式的解.

方法二: 利用系数矩阵求逆的方法. 方程组(1.23)可以写成矩阵形式

$$Ax = \beta,$$

其中, $A = (a_{ij})$. 若 $|A| \neq 0$, 则 A^{-1} 必存在, 因此

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}\beta,$$

即

$$x = A^{-1}\beta$$

将上式中的矩阵写出来就是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1})$$

其中

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其余 x_i 同理可得.

□

1.4 行列式的计算

例 1.1 计算 n 阶 *VanderMonde* (范德蒙德) 行列式:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_{n-2} & x_{n-2}^2 & \cdots & x_{n-2}^{n-2} & x_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

解: 将第 $n-1$ 列乘以 $-x_n$ 后加到第 n 列上, 再将第 $n-2$ 列乘以 $-x_n$ 加到第 $n-1$ 列上. 这样一直做下去, 直到将第一列乘以 $-x_n$ 加到第二列上为止. 这样变形后行列式值不变. 得到

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \cdots & x_1^{n-2} - x_1^{n-3} x_n & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3} x_n & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}.$$

提取每行公因子后得到 $n-1$ 阶行列式恰好是一个 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 的 $n-1$ 阶 *VanderMonde* 行列式, 将其标记为 V_{n-1} . 得到递推公式

$$V_n = (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_{n-2} & x_{n-2}^2 & \cdots & x_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}$$

即

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

例 1.2 求下列行列式的值:

$$F_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

解: 按第一行展开, a_n 的余子式是一个上三角行列式, 其值等于 $(-1)^{n-1}$, λ 的余子式是与 F_n 相类似的 $n-1$ 阶行列式, 记之为 F_{n-1} , 于是得到递推关系式:

$$F_n = \lambda F_{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}a_n = \lambda F_{n-1} + a_n.$$

将递推公式不断代入, 最后求得

$$F_n = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n.$$

1.5 Laplace 定理

定理 1.3 (Laplace 定理) 设 $|A|$ 是 n 阶行列式, 在 $|A|$ 中任取 k 行 (列), 那么包含于这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$. 即若取定 k 个行: $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 则

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k & n \end{pmatrix} \hat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k & n \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

同样若取定 k 个列: $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, 则

$$|A| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k & n \end{pmatrix} \widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k & n \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

证明: 如果能证明 $|A|$ 的每个 k 阶子式与其代数余子式之积的展开式中的每一项都互不相同且都属于 $|A|$ 的展开式, 两者总项数相等, 那么就证明了 Laplace 定理.

首先证明 $|A|$ 的任意 k 阶子式与其代数余子式之积的展开式中的每一项都属于 $|A|$ 的展开式.

先证明特殊情形: $i_1 = 1, i_2 = 2, \cdots, i_k = k; j_1 = 1, j_2 = 2, \cdots, j_k = k$. 这时 $|A|$ 可写为:

$$\begin{vmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{vmatrix}, \quad (1.30)$$

其中

$$|A_1| = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (1.31)$$

$$|A_2| = \widehat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

(1.31)式中的任一项具有形式:

$$(-1)^{N(j_1, j_2, \cdots, j_k)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k},$$

其中 $N(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 是排列 (j_1, j_2, \cdots, j_k) 的逆序数. (1.32)式中的任一项具有形式:

$$(-1)^{N(j_{k+1}, j_{k+2}, \cdots, j_n)} a_{j_{k+1}, k+1} a_{j_{k+2}, k+2} \cdots a_{j_n n},$$

所以

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \widehat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

中的任一项具有下列形式:

$$(-1)^\sigma a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k} a_{j_{k+1}, k+1} \cdots a_{j_n n}, \quad (1.33)$$

其中 $\sigma = N(j_1, \cdots, j_k) + N(j_{k+1}, \cdots, j_n)$. 注意 (j_1, \cdots, j_k) 是 $(1, \cdots, k)$ 的一个排列, (j_{k+1}, \cdots, j_n) 是 $(k+1, \cdots, n)$ 的一个排列, 因此 $(j_1, \cdots, j_k, j_{k+1}, \cdots, j_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列且

$$N(j_1, \cdots, j_k, j_{k+1}, \cdots, j_n) = N(j_1, \cdots, j_k) + N(j_{k+1}, \cdots, j_n).$$

因此, (1.33)式是 $|A|$ 中的某一项.

再证明一般情况, 设

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n.$$

经过 $i_1 - 1$ 次相邻两行的对换, 可把 i_1 行调到第一行, 经过 $i_2 - 2$ 次相邻两行的对换, 可把 i_2 行调到第二行, \dots , 经过 $(i_1 + \dots + i_k) - \frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换, 可把第 i_1, i_2, \dots, i_k 行调至前 k 行. 同理, 经过 $(j_1 + \dots + j_k) - \frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换, 可把第 j_1, j_2, \dots, j_k 行调至前 k 列. 因此, $|A|$ 经过 $(i_1 + \dots + i_k) + (j_1 + \dots + j_k) - k(k+1)$ 次行列的对换 (其中 $k(k+1)$ 必为偶数), 得到了一个新的行列式:

$$|C| = \begin{vmatrix} D & * \\ * & B \end{vmatrix}$$

其中

$$|D| = A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

由以上分析可知, $|C| = (-1)^{p+q}|A|$, $p = i_1 + \dots + i_k$, $q = j_1 + \dots + j_k$. $|B|$ 是子式 $|D|$ 在 $|C|$ 中的代数余子式, 由前面特殊情况的分析可知, $|D||B|$ 中的任一项都是 $|C|$ 中的项. 由于

$$\hat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q}|B|,$$

因此,

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

中的任一项都是 $(-1)^{p+q}|C| = |A|$ 中的项.

以上分析了(1.34)式中任一项均属于 $|A|$ 的展开式。

最后证明二者总项数相等: 当 i_1, i_2, \dots, i_k 固定时, 对不同的 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ 共有 C_n^k 个不同子式, 每个子式完全展开后均含有 $k!$ 项, 相应的余子式也有 C_n^k 个, 每个余子式展开后均含有 $(n-k)!$ 项. 由(1.34)式展开得到的项是没有重复的, 且一共有 $C_n^k \cdot k!(n-k)! = n!$ 项. $|A|$ 的展开式也有 $n!$ 项, 因此(1.28)式成立.(1.29)式同理可证. \square

2 矩阵

2.1 矩阵的逆

定理 2.1 设 A 为 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $|A| \neq 0$, 则 A 是一个非异阵, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*. \quad (2.1)$$

证明:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式中两个矩阵乘积的第 (i, j) 元素为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

按照定理(1.1)可知: 当 $i = j$ 时上式为 $|A|$, 当 $i \neq j$ 时上式为零。因此

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_n.$$

同理可证

$$A^*A = |A| \cdot I_n.$$

因为 $|A| \neq 0$, 由以上二式同除以 $|A|$ 可以得到

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I_n,$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

A 是非异阵. □

2.2 Cauchy-Binet 公式

定理 2.2 (Cauchy-Binet 公式) 设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times m$ 矩阵. $A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$ 表示 A 的一个 s 阶子式, 它由 A 的第 i_1, \cdots, i_s 行与第 j_1, \cdots, j_s 列交点上的元素按原次序排列组成的行列式, 同理可定义 B 的 s 阶子式.

(1) 若 $m > n$, 则必有 $|AB| = 0$;

(2) 若 $m \leq n$, 则必有

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

证明: 令 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix}$. 用不同方法表示行列式 $|C|$:

首先, 对 C 进行第三类分块初等变换, 得到矩阵 $M = \begin{pmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix}$, M 可以改写为 $M = \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} C$. 因此, $|M| = |C|$.

用 Laplace 定理来计算 $|M|$, 由于 AB 占据 M 的前 m 行和第 $n+1$ 至第 $n+m$ 列, M 除 AB 外, 前 m 行的其余列都是 0, 因此 $|M|$ 按前 m 行展开得

$$\begin{aligned} |M| &= (-1)^{(n+1+n+2+\dots+n+m)+(1+2+\dots+m)} | -I_n ||AB| \\ &= (-1)^{nm+m(m+1)+n} |AB| \end{aligned}$$

上面第二个等式是因为 $| -I_n | = (-1)^n$. 由于 $m(m+1)$ 总是偶数, 可以去掉该式, 且 $nm+n = n(m+1)$, 所以

$$|M| = (-1)^{n(m+1)} |AB|. \quad (2.2)$$

再计算 $|C|$, 用 Laplace 定理按前 m 行展开, 分两种情况:

若 $m > n$, 则 A 为瘦长型的矩阵, B 为矮胖型矩阵, 如图2.1所示:

前 m 行中任意一个 m 阶子式至少有一列全部为 0, 即要从 O 中获取 $m-n$ 列用于构建 m 阶子

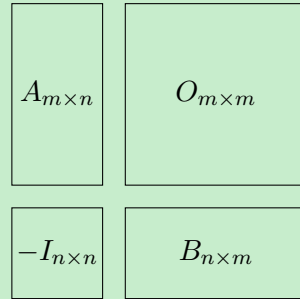


图 2.1: 瘦长型矩阵 A

式, 因此整个行列式的值为 0, 即 $|AB| = 0$.

若 $m \leq n$, 则 A 为矮胖型矩阵, B 为瘦长型的矩阵, 如图2.2所示:

由 Laplace 定理得

$$|C| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

其中, $\hat{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ 是 $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ 在矩阵 C 中的代数余子式. 显然,

$$\hat{C} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)+(j_1+j_2+\dots+j_m)} | -e_{i_1}, -e_{i_2}, \dots, -e_{i_{n-m}}, B |, \quad (2.4)$$

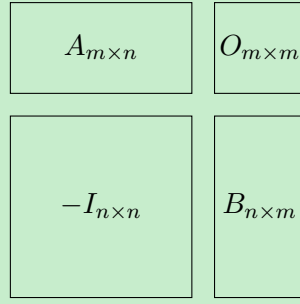


图 2.2: 矮胖型矩阵 A

其中 i_1, i_2, \dots, i_{n-m} 是 C 中前 n 列去掉 j_1, j_2, \dots, j_m 列后余下的列序号. $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-m}}$ 是相应的 n 维标准单位列向量. \hat{C} 除了包含全部 B , 还需要从 $-I_n$ 中获取 $n-m$ 个列. 记

$$|N| = | -e_{i_1}, -e_{i_2}, \dots, -e_{i_{n-m}}, B |.$$

下面计算 $|N|$. $|N|$ 用 Laplace 定理按前 $n-m$ 列展开, 只有一个子式非零, 其值等于 $| -I_{n-m} | = (-1)^{n-m}$. 这个子式的余子式为 $B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$. 因此,

$$|N| = (-1)^{(n-m)+(i_1+i_2+\dots+i_{n-m})+(1+2+\dots+n-m)} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

将(2.5)式代入(2.4)式, 再将(2.4)式代入(2.3)式得

$$|C| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} (-1)^l A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

其中,

$$l = \frac{1}{2}m(m+1) + (j_1 + j_2 + \dots + j_m) + (n-m) + (i_1 + i_2 + \dots + i_{n-m}) + (1 + 2 + \dots + n-m).$$

从图(2.2)可知, $j_1 + j_2 + \dots + j_m$ 是被选取到 $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ 中的列的序号, 则 $i_1 + i_2 + \dots + i_{n-m}$ 是前 n 列中剩余的列的序号, 所以

$$j_1 + j_2 + \dots + j_m + i_1 + i_2 + \dots + i_{n-m} = 1 + 2 + \dots + n.$$

因此,

$$l = (1 + 2 + \dots + m) + (1 + 2 + \dots + n) + (n-m) + (1 + 2 + \dots + n-m).$$

因为 $m \leq n$, 所以

$$l = 2(1 + 2 + \dots + m) + 2(n-m) + (m+1) + (m+2) + \dots + n + (1 + 2 + \dots + n-m-1).$$

其中, $2(1 + 2 + \dots + m) + 2(n-m)$ 为偶数, 去掉该式后不影响 l 的奇偶性. 令

$$l' = (m+1) + (m+2) + \dots + n + (1 + 2 + \dots + n-m-1),$$

则 l 与 l' 有相同的奇偶性. 将 l' 首、尾对应项相加, 得 $l' = n(n-m)$. 又因为

$$l' + n(m+1) = n(n-m) + n(m+1) = n(n+1),$$

且 $n(n+1)$ 为偶数, 因此 l' 与 $n(m+1)$ 有相同的奇偶性, 所以 l 与 $n(m+1)$ 有相同的奇偶性.

最后, 由 $|M| = |C|$ 即(2.2)式=(2.6)式, 得

$$(-1)^{n(m+1)}|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} (-1)^l A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

因为 l 取值和 j_1, j_2, \dots, j_m 无关, 所以

$$(-1)^{n(m+1)}|AB| = (-1)^l \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

上式中 l 与 $n(m+1)$ 有相同的奇偶性, 所以

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

当 $m = n$ 时, 上式右边只有一个组合. □

3 线性空间

3.1 矩阵的秩

例 3.1 设 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 求证: $\text{rank}(C) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明: 设初等矩阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2 s. t. $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 于是,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & O \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & I_{r_2} & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由矩阵乘以非异阵其秩不变以及分块矩阵在分块初等变换下秩不变, 可得

$$\text{rank}(C) = r_1 + r_2 = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

□

例 3.2 设 $C = \begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix}$, 求证: $\text{rank}(C) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 A Q_1 & P_1 D Q_2 \\ O & P_2 B Q_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & D_{11} & D_{12} \\ O & O & D_{21} & D_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & D_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & D_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由上例可知, $\text{rank}(C) = r_1 + \text{rank}(D_{22}) + r_2 \geq r_1 + r_2 = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, 当 $D_{22} = O$ 时等号成立. □

例 3.3 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$, 求证: $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.

证明: 先证右边. 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$, 设 $\{\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir}\}$ 是其极大无关组且断言 $\forall 1 \leq j \leq p$, $A\beta_j$ 是 $A\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir}$ 的线性组合. 因为 $\forall \beta_j$, $\beta_j = \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2} + \dots + \lambda_r \beta_{ir} \implies$

$A\beta_j = \lambda_1 A\beta_{i1} + \lambda_2 A\beta_{i2} + \cdots + \lambda_r A\beta_{ir}$ 所以, $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_p)$ 的每一个列向量都可由 $\{A\beta_{i1}, A\beta_{i2}, \cdots, A\beta_{ir}\}$ 线性表示 $\implies \text{rank}(AB) \leq r = \text{rank}(B)$. 同理, $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B'A') \leq \text{rank}(A') = \text{rank}(A) \implies \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$

再证左边.

$\begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} O & AB \\ -I_n & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$. 由最右边矩阵可知, $\text{rank} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = \text{rank}(AB) + n = r \begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \implies \text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$. \square

例 3.4 (秩的降阶公式) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 则:

- (1) 若 A 非异, 则 $\text{rank}(M) = \text{rank}(A) + \text{rank}(D - CA^{-1}B)$;
- (2) 若 D 非异, 则 $\text{rank}(M) = \text{rank}(D) + \text{rank}(A - BD^{-1}C)$;
- (3) 若 A, D 非异, 则 $\text{rank}(A) + \text{rank}(D - CA^{-1}B) = \text{rank}(D) + \text{rank}(A - BD^{-1}C)$.

证明: 只证 (1) 即可, 其余类似可证。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由前面例题可知, $\text{rank}(M) = \text{rank}(A) + \text{rank}(D - CA^{-1}B)$. \square

3.2 线性方程组的解

例 3.5 设 $Ax = \beta (\beta \neq 0)$ 的特解为 γ , 相伴齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$, 求证:

- (1) $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \cdots, \gamma + \eta_{n-r}$ 线性无关;
- (2) $Ax = \beta$ 的任一解必为如下形式: $c_0\gamma + c_1(\gamma + \eta_1) + c_2(\gamma + \eta_2) + \cdots + c_{n-r}(\gamma + \eta_{n-r})$, 其中 $c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-r} = 1$.

证明:

(1) 设 $\lambda_0\gamma + \lambda_1(\gamma + \eta_1) + \lambda_2(\gamma + \eta_2) + \cdots + \lambda_{n-r}(\gamma + \eta_{n-r}) = 0$, 合并整理得下式:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i\right)\gamma + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\eta_{n-r} = 0, \quad (3.1)$$

将 A 作用到上式两边, 得

$$\left(\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i\right)A\gamma + \lambda_1A\eta_1 + \lambda_2A\eta_2 + \cdots + \lambda_{n-r}A\eta_{n-r} = 0,$$

$$A\eta_i = 0 \implies \left(\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i\right) A\gamma = 0 \xrightarrow{A\gamma=\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i\right) \beta = 0 \xrightarrow{\beta \neq 0} \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i = 0,$$

将 $\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i = 0$ 代入(3.1)式, 可得

$$\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} = 0,$$

$\because \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是基础解系, $\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$,

由(3.1)式可知, $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \cdots, \gamma + \eta_{n-r}$ 线性无关.

(2) 设 α 为线性方程组 $Ax = \beta$ 的任一解, $k_i \in \mathbb{K}$, 那么

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r} \eta_{n-r} \\ &= (1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_{n-r})\gamma + k_1(\gamma + \eta_1) + k_2(\gamma + \eta_2) + \cdots + k_{n-r}(\gamma + \eta_{n-r}) \end{aligned}$$

令:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_{n-r} \\ c_1 &= k_1 \\ c_2 &= k_2 \\ &\vdots \\ c_{n-r} &= k_{n-r} \end{aligned}$$

显然, $\sum_{i=0}^{n-r} c_i = 1$. □

例 3.6 $A^2 - A - 3I_n = 0$, 求证: $A - 2I_n$ 非异.

证明:

1、凑因子法: $(A - 2I_n)(A + I_n) = I_n$, 所以 $A - 2I_n$ 非异。

2、线性方程组解法: 只要证明 $(A - 2I_n)x = 0$ 只有零解。设 x_0 是线性方程组 $(A - 2I_n)x = 0$ 的解, 那么

$$\begin{aligned} Ax_0 &= 2x_0, A^2x_0 = 2Ax_0 = 4x_0, \\ (A^2 - A - 3I_n)x_0 &= 0 \implies -x_0 = 0 \implies x_0 = 0. \end{aligned}$$

□

例 3.7 假设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 证明: $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A'A) = \text{rank}(A)$.

证明: 因为 $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A'A)$, 故只需证明右边的等式。

设 $Ax = 0$ 的解空间为 V_A , $A'Ax = 0$ 的解空间为 $V_{A'A}$. $Ax = 0$ 时, $A'Ax$ 必为 0, 所以 $V_A \subseteq V_{A'A}$.

任取 $x_0 \in V_{A'A}$, 此时 $x_0 \in \mathbb{R}_n$ 且 $A'Ax_0 = 0$.

$$\text{令 } Ax_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_m, \text{ 则}$$

$$(Ax_0)'(Ax_0) = 0 \implies (a_1, a_2, \dots, a_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = 0 \implies \sum_1^m a_i^2 = 0$$

$$\implies \forall i, a_i = 0 \implies Ax_0 = 0 \implies V_A' A \subseteq V_A \xrightarrow{V_A \subseteq V_{A'A}} V_A = V_{A'A}$$

$$\implies \text{rank}(A) = \text{rank}(A'A)$$

□

4 线性映射

4.1 线性映射与矩阵

定理 4.1 设 $V \in \mathbb{K}^n, U \in \mathbb{K}^m, W \in \mathbb{K}^p$, 它们的基分别为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_m\}, \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$, T 是从线性映射到其表示矩阵的线性同构. 设 $\varphi: V \longrightarrow U, \psi: U \longrightarrow W$ 为两个线性映射. 则 $\psi \circ \varphi: V \longrightarrow W$ 为线性映射, 且 $T(\psi \circ \varphi) = T(\psi) \cdot T(\varphi)$.

证明: 依题意设 $T(\varphi) = A = (a_{ij})_{m \times n}, T(\psi) = B = (b_{ij})_{p \times m}$. 只要证 $T(\varphi \circ \psi) = BA$ 即可.

$$\begin{aligned}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) &= (f_1, f_2, \dots, f_m)A \\ \iff \varphi(e_j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i, \forall 1 \leq j \leq n \\ \xrightarrow{\text{将}\psi\text{作用到上式两边}} \psi(\varphi(e_j)) &= \psi\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}f_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\psi(f_i), \forall 1 \leq j \leq n \\ \implies (\psi\varphi(e_1), \psi\varphi(e_2), \dots, \psi\varphi(e_n)) &= (\psi(f_1), \psi(f_2), \dots, \psi(f_m))A \\ &\because (\psi(f_1), \psi(f_2), \dots, \psi(f_m)) = (g_1, g_2, \dots, g_p)B, \\ &\therefore (\psi\varphi(e_1), \psi\varphi(e_2), \dots, \psi\varphi(e_n)) = (g_1, g_2, \dots, g_p)BA. \\ &\therefore T(\psi \circ \varphi) = T(\psi) \cdot T(\varphi).\end{aligned}$$

□

推论 4.1 $T: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ 保持乘法, 从而 T 是一个 \mathbb{K} -代数同构.

推论 4.2 上述 T 同构有下列性质:

(1) $T(I_V) = I_n$;

(2) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 则 φ 是自同构的充要条件是 $T(\varphi)$ 可逆且 $T(\varphi^{-1}) = T(\varphi)^{-1}$.

证明:

(1) 任取 V 的基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $I_V(e_i) = e_i \implies T(I_V) = I_n$.

(2) 证明必要性: 设 φ 为自同构, 则 $I_V = \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi$.

$$I_n = T(I_V) = T(\varphi \cdot \varphi^{-1}) = T(\varphi) \cdot T(\varphi^{-1}) \implies T(\varphi) \text{ 为可逆阵且 } T(\varphi^{-1}) = T(\varphi)^{-1}.$$

证明充分性: 设 $T(\varphi)$ 为可逆阵, 即 $T(\varphi)^{-1}$ 存在. $T: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ 为双射, 根据其满性: $\exists \psi \longmapsto T(\varphi)^{-1}$, 即 $T(\psi) = T(\varphi)^{-1}$, 即 $I_n = T(\varphi) \cdot T(\psi) = T(\psi) \cdot T(\varphi) \implies T(I_V) = T(\varphi \circ \psi) = T(\psi \circ \varphi) \xrightarrow{\text{单性}} I_V = \varphi\psi = \psi\varphi \implies \psi = \varphi^{-1}, \varphi \text{ 为自同构.}$ □

4.2 线性映射的像与核

定理 4.2 设 $\varphi : V^n \longrightarrow U^m$ 为线性映射, 设 V 的一组基为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, U 的一组基为 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, φ 在给定基下的表示矩阵为 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. 则 $\text{rank}(\varphi) = \text{rank}(A)$, $\dim \ker \varphi = n - \text{rank}(A)$.

证明: 参看下面映射交换图: 上图中, $\eta_U \circ \varphi = \varphi_A \circ \eta_V$. 只需证 $\ker \varphi \cong \ker \varphi_A$, $\text{Im } \varphi \cong \text{Im } \varphi_A$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \eta_V \downarrow \cong & & \cong \downarrow \eta_U \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\varphi_A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

图 4.1: 映射交换图

Step1: 先证 $\eta_V(\ker \varphi) \subseteq \ker \varphi_A$, $\eta_U(\text{Im } \varphi) \subseteq \text{Im } \varphi_A$.

(1) 任取 $v \in \ker \varphi$, 只要证 $\eta_V(v) \in \ker \varphi_A$.

$\because \varphi_A(\eta_V(v)) = \eta_U(\varphi(v)) = \eta_U(0) = 0$, 得证.

(2) 任取 $\varphi(v) \in \text{Im } \varphi$, $v \in V$, 只要证 $\eta_U(\varphi(v)) \in \text{Im } \varphi_A$.

$\because \eta_U(\varphi(v)) = \varphi_A(\eta_V(v)) \in \text{Im } \varphi_A$, 得证.

Step2: 作限制: $\eta_V : \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi_A$, $\eta_U : \text{Im } \varphi \longrightarrow \text{Im } \varphi_A$.

二者都是单线性映射, 只需证明以上两个映射是满射.

(1) 先证 $\eta_V : \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi_A$ 是满射:

\because 任取 $x \in \ker \varphi_A$, 即 $\varphi_A(x) = 0$, $x \in \ker \varphi_A \subseteq \mathbb{K}^n$ 且 $\eta_V : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ 是满射, 从而 $\exists v \in V$ s.t. $\eta_V(v) = x$. $\eta_U(\varphi(v)) = \varphi_A(\eta_V(v)) = \varphi_A(x) = 0$, 由 η_U 为同构可知, $\varphi(v) = 0$, 即 $v \in \ker \varphi$.

(2) 再证 $\eta_U : \text{Im } \varphi \longrightarrow \text{Im } \varphi_A$ 是满射.

\because 任取 $\varphi_A(x) \in \text{Im } \varphi_A$, 其中 $x \in \mathbb{K}^n$. 取 $v \in V$ s.t. $\eta_V(v) = x$. $\eta_U(\varphi(v)) = \varphi_A(\eta_V(v)) = \varphi_A(x)$, $\varphi(v) \in \text{Im } \varphi$. 从而 $\eta_U : \text{Im } \varphi \longrightarrow \text{Im } \varphi_A$ 是满射.

Step3: $\ker \varphi_A = \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = 0\}$ 即 $\ker \varphi_A$ 为 $Ax = 0$ 的解空间 V_A .

$\ker \varphi \cong \ker \varphi_A \implies \dim \ker \varphi = \dim \ker \varphi_A = \dim V_A = n - \text{rank}(A)$.

作列分块 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{K}_m$,

另 $\text{Im } \varphi_A = \{Ax | x \in \mathbb{K}^n\}$, 其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

从而推出 $\text{Im } \varphi_A = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n | x_i \in \mathbb{K}\} = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$\text{Im } \varphi \cong \text{Im } \varphi_A \implies \text{rank}(\varphi) = \dim \text{Im } \varphi = \dim \text{Im } \varphi_A = \dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= \text{rank}(\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}) = \text{rank}(A)$. □

推论 4.3 (线性映射的维数公式) 设 $\varphi: V^n \longrightarrow U^m$ 为线性映射, 则 $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$.

证明: \because 根据定理4.2, $\dim \ker \varphi = n - \operatorname{rank}(A)$, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rank}(A)$
 $\therefore \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n = \dim V$. □

推论 4.4 设 $\varphi: V^n \longrightarrow U^m$ 为线性映射, φ 在某组基下的表示矩阵为 $A^{m \times n}$, 则

(1) φ 为满射 $\iff A$ 为行满秩矩阵, 即 $\operatorname{rank}(A) = m$;

(2) φ 为单射 $\iff A$ 为列满秩矩阵, 即 $\operatorname{rank}(A) = n$.

证明: (1) 根据定理4.2:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ 是满射} &\iff \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim U = m \\ &\xLeftrightarrow{\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(A)} \dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rank}(A) = m \end{aligned}$$

(2) 根据定理4.2:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ 是单射} &\iff \dim \ker \varphi = 0 \\ &\xLeftrightarrow{\dim \ker \varphi = n - \operatorname{rank}(A)} \operatorname{rank}(A) = n \end{aligned}$$

□

推论 4.5 设 $\varphi: V^n \longrightarrow U^n$ 为线性映射且 $\dim V = \dim U = n$, 则以下结论等价:

(1) φ 为单射;

(2) φ 为满射;

(3) φ 为同构.

证明:

(1) 设 φ 为单射, 只要证 φ 为满射.

$$\begin{aligned} \because 0 &= \dim \ker \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi \\ \implies \dim \operatorname{Im} \varphi &= \dim V = \dim U \\ \implies \operatorname{Im} \varphi &= U \end{aligned}$$

(2) 设 φ 为满射, 只要证 φ 为单射.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi = U &\implies \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim U = \dim V \\ \implies \dim \ker \varphi &= 0 \implies \ker \varphi = 0 \end{aligned}$$

(3) 由以上 (1) 和 (2) 可得.

特别地, 当 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n)$ 时, φ 为自同构 $\iff \varphi$ 为单射 $\iff \varphi$ 为满射. \square

推论 4.6 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n)$, 则:

φ 为满射或单射 $\iff \varphi$ 在任一组基下的表示矩阵可逆.

证明: 从几何角度证明: 由推论 4.5 可知, φ 为满射或单射 $\iff \varphi$ 为自同构 $\iff \varphi$ 在任一组基下表示矩阵可逆.

从代数角度证明: φ 为满射或单射 $\iff A^{n \times n}$ 为行或列满秩矩阵 $\iff A$ 为非异矩阵. \square

例 4.1 设 $\varphi : V^n \implies U^m$ 为线性映射, V 的一组基为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, U 的一组基为 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. 计算:

(1) $\ker \varphi$ 用 e_i 的线性组合表示;

(2) $\text{Im } \varphi$ 用 f_i 的线性组合表示.

解: 参考图 4.1:

$\eta_V : \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi_A$ 为线性同构. 该映射将 V 中任意向量 v 映射成其坐标向量, 即 $v \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)'$; 其逆映射为 $\eta_V^{-1} : \ker \varphi_A \longrightarrow \ker \varphi$, 该映射将核空间中向量的坐标映射回核空间中的向量, 即 $(x_1, x_2, \dots, x_n)' \mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

同理, $\eta_U : \text{Im } \varphi \longrightarrow \text{Im } \varphi_A$ 为线性同构, 其逆映射为 $\eta_U^{-1} : \text{Im } \varphi_A \longrightarrow \text{Im } \varphi$, 将像的坐标向量映射回像向量, 即 $(y_1, y_2, \dots, y_m)' \mapsto y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_m f_m$.

根据定理 4.2 中的证明中 Step3 中所述, $\ker \varphi = \{x \in \mathbb{K}_n | Ax = 0\}$ 即 $\ker \varphi_A$ 为 $Ax = 0$ 的解空间, 又 $\text{Im } \varphi_A = \{Ax | x \in \mathbb{K}_n\} = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 即 $\text{Im } \varphi_A$ 为 A 的列向量张成的子空间.

计算方法:

(1) 对表示矩阵 A 实施初等行变换 (必要时进行列对换):

得到 A 的列向量极大无关组 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $r = \text{rank}(A)$;

得到 $Ax = 0$ 的基础解系 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-r}\}$.

(2) 算出 $\ker \varphi$ 和 $\text{Im } \varphi$:

$$\ker \varphi = k_1 \eta_V^{-1}(\beta_1) + k_2 \eta_V^{-1}(\beta_2) + \dots + k_{n-r} \eta_V^{-1}(\beta_{n-r}), k \in \mathbb{K}$$

$$\text{Im } \varphi = l_1 \eta_U^{-1}(\alpha_{i_1}) + l_2 \eta_U^{-1}(\alpha_{i_2}) \dots + l_r \eta_U^{-1}(\alpha_{i_r}), l \in \mathbb{K}$$

例 4.2 V^5, U^4 为 \mathbb{K} 上两个线性空间且 $\varphi : V \longrightarrow U$ 为线性映射, $\{e_1, e_2, e_3, e_4,$

$e_5\}$ 为 V 的基, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 为 U 的基. φ 在上述基下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -17 & 10 \end{pmatrix},$$

求 $\text{Im } \varphi$ 和 $\ker \varphi$.

解: 将表示矩阵 A 做行变换,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -17 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中, A 的最大无关列向量组为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

$\text{Im } \varphi = k_1(f_1 + 2f_2 + f_3 + 2f_4) + k_2(2f_1 + f_2 + f_3 + 3f_4) + k_3(f_1 + f_2 + 2f_3 - 5f_4), k \in \mathbb{K};$

$Ax = 0$ 的基础解系为

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$\ker \varphi = l_1(-e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4) + l_2(9e_1 - 11e_2 + 5e_3 + 4e_5), l \in \mathbb{K}.$

4.3 不变子空间

例 4.3 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 是纯量变换, 即 $\varphi(\alpha) = k\alpha$, 其中 $k \in \mathbb{K}$ 固定, 则 V 的任一子空间都是 φ -不变子空间.

引理 4.1 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 其中, $\alpha_i \in V$, 则 U 为 φ -不变子空间 $\iff \varphi(\alpha_i) \in U, \forall 1 \leq i \leq m.$

证明:

先证必要性: U 是 φ -不变子空间, 由不变子空间的定义可知, $\varphi(\alpha_i) \in U.$

再证必要性: 设 $\varphi(\alpha_i) \in U, 1 \leq i \leq m$.

任取 $\alpha \in U$, 可设 $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m, \lambda_i \in \mathbb{K}$,

则 $\varphi(\alpha) = \lambda_1 \varphi(\alpha_1) + \lambda_2 \varphi(\alpha_2) + \cdots + \lambda_m \varphi(\alpha_m) \in U$. \square

定理 4.3 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n), U$ 是 φ -不变子空间, 取 U 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$, 再扩张为 V 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$, 则 φ 在上述基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$.

证明: 由不变子空间的定义可知, $\varphi(e_i) \in U (1 \leq i \leq r)$,

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{r1}e_r,$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{r2}e_r,$$

\cdots

$$\varphi(e_r) = a_{1r}e_1 + a_{2r}e_2 + \cdots + a_{rr}e_r,$$

$$\therefore (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

\square

注 定理4.3的逆命题也成立: 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n)$, φ 在一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$. 令 $U = L(e_1, e_2, \cdots, e_r)$, 则 U 是 φ -不变子空间.

证明: 由引理4.1 \implies 只要 $\varphi(e_i) \in U, \forall 1 \leq i \leq r$.

由表示矩阵定义可知:

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_r), \cdots, e_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_r, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} A^{r \times r} & B^{r \times (n-r)} \\ O & D^{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

$$\implies \varphi(e_i) \in U, \forall 1 \leq i \leq r. \quad \square$$

引理 4.2 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n), V = V_1 \oplus V_2$, 其中, V_1, V_2 都是 φ -不变子空间, 则可取 V_1, V_2 的一组基拼成 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}$.

证明: 取 V_1 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ 及 V_2 的基 $\{e_{r+1}, e_{r+2}, \cdots, e_n\}$

$$\implies \varphi(e_i) \in V_1 (1 \leq i \leq r), \varphi(e_j) \in V_2 (r+1 \leq j \leq n)$$

$$\implies \varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_r), \cdots, e_n = (e_1, e_2, \cdots, e_r, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} A^{r \times r} & O \\ O & D^{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \quad \square$$

推广 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n), V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 其中 V_i 均为 φ -不变子空间, 取定 V_i 的基, 设 $\varphi|_{V_i}$ 在给定基下的表示矩阵为 $A_i (1 \leq i \leq m)$. 将 V_i 的基拼成 V 的基, 则 φ 的表示矩阵为 $\text{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$.

例 4.4 V^3 的基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 的表示矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 求证:

$U = L(e_3, e_1 + e_2 + 2e_3)$ 是 φ -不变子空间.

证明: 由引理4.1 \implies 只要证 $\varphi(e_3) \in U, \varphi(e_1 + e_2 + 2e_3) \in U$.

方法一: 直接验证

$\because \eta: V \longrightarrow \mathbb{K}^3$ 为线性同构, \therefore 只要对坐标向量进行验证即可.

$$\because e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 + e_2 + 2e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \varphi(e_3) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(e_1 + e_2 + 2e_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

因此 $\varphi(e_3) = -(e_1 + e_2 + 2e_3) + 2e_3, \varphi(e_1 + e_2 + 2e_3) = 2(e_1 + e_2 + 2e_3)$

所以, $\varphi(e_3) \in U, \varphi(e_1 + e_2 + 2e_3) \in U$.

方法二: 证明 $\varphi(e_3)$ 和 $\varphi(e_1 + e_2 + 2e_3)$ 是 e_3 和 $e_1 + e_2 + 2e_3$ 的线性组合

$$\because \text{rank } U = \text{rank}(e_3, e_1 + e_2 + 2e_3) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

\therefore 只要证 $\text{rank}(\varphi(e_3), e_3, e_1 + e_2 + 2e_3) = \text{rank}(\varphi(e_1 + e_2 + 2e_3), e_3, e_1 + e_2 + 2e_3) = 2$ 即可.

$$\text{显然, } \text{rank}(\varphi(e_3), e_3, e_1 + e_2 + 2e_3) = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{rank}(\varphi(e_1 + e_2 + 2e_3), e_3, e_1 + e_2 + 2e_3) = \text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2. \quad \square$$

从图4.1可以看出, 上面是线性空间表示的几何语言, 下面是向量空间表示的代数语言, 很多问题可以在几何和代数之间互相转化.

1. 几何转化成代数

例 4.5 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U), \text{rank}(\varphi) = r \geq 1$, 求证: 存在 $\varphi_i \in \mathcal{L}(V, U), \text{rank}(\varphi_i) = 1$ 且 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_r$.

证明: 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \text{rank}(A) = r \geq 1$.

只需证明 $\exists A_i \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \text{rank}(A_i) = 1$ 且 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$.

$$\because \exists \text{ 非异阵 } P, Q \text{ s.t. } A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,$$

设 $E_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 是第 (i, j) 元素为 1、其余所有元素为 0 的 $m \times n$ 矩阵, 令 $A_i = P E_{ii} Q, 1 \leq i \leq r$, 则 $\text{rank}(A_i) = 1$ 且 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$. \square

例 4.6 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^m), \varphi^m = 0, n = mq + 1$, 求证: $\text{rank}(\varphi) \leq n - q - 1$.

证明: 设 $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^m = 0$, $n = mq + 1$, 只要证 $\text{rank}(A) \leq n - q - 1$.

用反证法: 设 $\text{rank}(A) \geq n - q$.

$$\because 0 = \text{rank}(A^m) = \text{rank}(A^{m-1} \cdot A) \stackrel{\text{Sylvester 不等式}}{\geq} \text{rank}(A^{m-1}) + \text{rank}(A) - n \geq \text{rank}(A^{m-1}) - q \\ \implies \text{rank}(A^{m-1}) \leq q$$

$$\therefore q \geq \text{rank}(A^{m-1}) = \text{rank}(A^{m-2} \cdot A) \geq \text{rank}(A^{m-2}) + \text{rank}(A) - n \geq \text{rank}(A^{m-2}) - q \implies \\ \text{rank}(A^{m-2}) \leq 2q \xrightarrow{\text{反复应用以上过程}} \dots \implies \text{rank}(A) \leq (m-1)q$$

这与 $\text{rank}(A) \geq n - q \stackrel{n=mq+1}{=} (m-1)q + 1$ 矛盾. \square

2. 代数转化成几何

例 4.7 设 A 是 n 阶方阵, 求证: $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^{n+2}) = \dots$.

证明: 转化成几何问题: 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n)$, 则存在 $m \in [0, n]$ 使得:

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1} = \dots, \quad (4.1)$$

$$\ker \varphi^m = \ker \varphi^{m+1} = \dots, \quad (4.2)$$

$$V = \ker \varphi^m \oplus \text{Im } \varphi^m. \quad (4.3)$$

$$\because \varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) \in \text{Im } \varphi, \therefore V \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \supseteq \text{Im } \varphi^3 \supseteq \dots,$$

$$\text{同理, } \because v \in \ker \varphi \text{ 时, } \varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(0) = 0,$$

$$\therefore \ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2 \subseteq \ker \varphi^3 \subseteq \dots \subseteq V.$$

$$\therefore V \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } \varphi^n \supseteq \text{Im } \varphi^{n+1},$$

$$\therefore \dim V = n \geq \dim \text{Im } \varphi \geq \dim \text{Im } \varphi^2 \geq \dim \text{Im } \varphi^n \geq \dim \text{Im } \varphi^{n+1} \geq 0,$$

由抽屉原理, 以上 $n+2$ 个整数维数必有两个相等,

不妨设 $\exists m \in [0, n]$, s. t. $\dim \text{Im } \varphi^m = \dim \text{Im } \varphi^{m+1}$,

上式等价于 $\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}$, 只要证 $\forall k \geq m, \text{Im } \varphi^k = \text{Im } \varphi^{k+1}$.

$\therefore \text{Im } \varphi^{k+1} \subseteq \text{Im } \varphi^k$, 任取 $\varphi^k(v) \in \text{Im } \varphi^k$:

$$\varphi^m(v) \in \text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \exists u \in V \text{ s. t. } \varphi^m(v) = \varphi^{m+1}(u).$$

$$\varphi^k(v) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(v)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(u)) = \varphi^{k+1}(u) \in \text{Im } \varphi^{k+1}.$$

$$\forall k \geq m, \dim \ker \varphi^k + \dim \text{Im } \varphi^k = \dim V = n.$$

上式中, $\forall k \geq m, \text{Im } \varphi^k$ 的值不变, 所以 $\ker \varphi^k$ 的值亦不变. 因此, 4.1、4.2 两式得证.

下面证 4.3 式:

①先证 $\ker \varphi^m \cap \text{Im } \varphi^m = 0$.

$$\because \text{任取 } \alpha \in \ker \varphi^m \cap \text{Im } \varphi^m, \text{ 即 } \varphi^m(\alpha) = 0, \alpha = \varphi^m(\beta) \implies 0 = \varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$$

$$\text{即 } \beta \in \ker \varphi^{2m} = \ker \varphi^m \implies \varphi^m(\beta) = 0.$$

②再证 $V = \ker \varphi^m + \text{Im } \varphi^m$.

$$\because \text{任取 } \alpha \in V, \varphi^m(\alpha) \in \text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{2m}, \exists \beta \in V \text{ s. t. } \varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta)$$

$$\varphi^m(\alpha - \varphi^m(\beta)) = 0, \text{ 设 } \alpha - \varphi^m(\beta) = \gamma, \text{ 即 } \gamma \in \ker \varphi^m \implies \alpha = \gamma + \varphi^m(\beta) \in \ker \varphi^m + \text{Im } \varphi^m.$$

以上证毕. 此外, 由①亦可结合维数公式 $\implies V = \ker \varphi^m \oplus \text{Im } \varphi^m$. \square

例 4.8 证明线性映射的维数公式: $\varphi \in \mathcal{L}(V^n, U^m)$, 则 $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V = n$.

证明: 任取 $\ker \varphi$ 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, 扩展为 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$, $\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, 则:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \lambda_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \lambda_{k+2} \varphi(e_{k+2}) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n).$$

$\Rightarrow \text{Im } \varphi = L(\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}), \dots, \varphi(e_n))$, 只要证: $\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}), \dots, \varphi(e_n)$ 线性无关.

设 $c_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + c_{k+2} \varphi(e_{k+2}) + \dots + c_n \varphi(e_n) = 0$, 则 $\varphi(c_{k+1} e_{k+1} + c_{k+2} e_{k+2} + \dots + c_n e_n) = 0$, 因此, $c_{k+1} e_{k+1} + c_{k+2} e_{k+2} + \dots + c_n e_n \in \ker \varphi$

$$\Rightarrow c_{k+1} e_{k+1} + c_{k+2} e_{k+2} + \dots + c_n e_n = -c_1 e_1 - c_2 e_2 - \dots - c_k e_k$$

$$\Rightarrow c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k + c_{k+1} e_{k+1} + \dots + c_n e_n = 0.$$

$\because \{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基, $\therefore c_1 = c_2 = \dots = c_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ \square

例 4.9 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 求证: 方程组 $Ax = 0, Bx = 0$ 同解的充分必要条件是存在 m 阶非异阵 P , 使 $B = PA$.

证明: 转换成几何表述:

设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V^n, U^m)$, $\ker \varphi = \ker \psi$ 的充分必要条件是 \exists 自同构 $\xi \in \mathcal{L}(U)$ s. t. $\psi = \xi \varphi$. \square

5 多项式

5.1 复系数多项式

定理 5.1 (代数基本定理) 每个次数大于零的复数域上的多项式都至少有一个复数根.

推论 5.1 设 $n \geq 1$, 以下记法等价:

- (1) 任一 n 次复系数多项式至少有一个复根;
- (2) 复系数不可约多项式都是一次多项式;
- (3) 任一复系数多项式都是一次多项式的乘积;
- (4) 任一 n 次复系数多项式恰有 n 个复根 (计重根) .

证明: (1) \implies (2): 设 $P(x)$ 在 \mathbb{C} 上不可约.

由 (1) 可知, b 为 $P(x)$ 的根, 则 $(x - b) \mid P(x)$, 即 $P(x) = (x - b)q(x)$,

由 $P(x)$ 不可约可知, $q(x) = c \neq 0$, 从而 $P(x) = c(x - b)$ 是一次多项式.

(2) \implies (3): 因式分解定理即得.

(3) \implies (4): $f(x) = c(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$, 则 $f(x)$ 的根为 b_1, b_2, \dots, b_n .

(4) \implies (1): 显然. □

定理 5.2 (Osada) $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, 且 $|a_0| > 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|$, 其中 $|a_0|$ 为素数, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

5.2 结式和判别式

定理 5.3 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 \mathbb{C} 上有公根 $\iff R(f, g) = 0$, $(f(x), g(x)) = 1 \iff R(f, g) \neq 0$.

定理 5.4 设 $f(x)$ 的 n 个根为 x_1, x_2, \dots, x_n , $g(x)$ 的 m 个根为 y_1, y_2, \dots, y_n , 则

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j) \quad (\dagger)$$

证明: Step 1 首一化: 令 $f(x) = a_0 f_1(x)$, $g(x) = b_0 g_1(x)$, f_1, g_1 均为首一多项式.

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

从 $R(f, g)$ 前 m 行各提取一个 a_0 , 从 $R(f, g)$ 后 n 行各提取一个 b_0 , 得 $R(f, g) = a_0^m b_0^n R(f_1, g_1)$.

所以只要证明 $R(f_1, g_1) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j)$.

Step 2: 设 $f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, $g_1(x) = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m)$.

若 $\exists 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ s.t. $x_i = y_j$, 由定理5.3 \implies (\dagger)式成立.

下面设 $x_i \neq y_j, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 且 x_1, x_2, \dots, x_n 互不相同, y_1, y_2, \dots, y_m 互不相同,

设 $R(f_1, g_1)$ 在是 f_1 和 g_1 结式的方阵, 则

$$R(f_1, g_1) \begin{pmatrix} x_1^{m+n-1} & x_2^{m+n-1} & \cdots & x_n^{m+n-1} & y_1^{m+n-1} & y_2^{m+n-1} & \cdots & y_m^{m+n-1} \\ x_1^{m+n-2} & x_2^{m+n-2} & \cdots & x_n^{m+n-2} & y_1^{m+n-2} & y_2^{m+n-2} & \cdots & y_m^{m+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{m-1} f_1(x_1) & x_2^{m-1} f_1(x_2) & \cdots & x_n^{m-1} f_1(x_n) & y_1^{m-1} f_1(y_1) & y_2^{m-1} f_1(y_2) & \cdots & y_m^{m-1} f_1(y_m) \\ x_1^{m-2} f_1(x_1) & x_2^{m-2} f_1(x_2) & \cdots & x_n^{m-2} f_1(x_n) & y_1^{m-2} f_1(y_1) & y_2^{m-2} f_1(y_2) & \cdots & y_m^{m-2} f_1(y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) & f_1(y_1) & f_1(y_2) & \cdots & f_1(y_m) \\ x_1^{n-1} g_1(x_1) & x_2^{n-1} g_1(x_2) & \cdots & x_n^{n-1} g_1(x_n) & y_1^{n-1} g_1(y_1) & y_2^{n-1} g_1(y_2) & \cdots & y_m^{n-1} g_1(y_m) \\ x_1^{n-2} g_1(x_1) & x_2^{n-2} g_1(x_2) & \cdots & x_n^{n-2} g_1(x_n) & y_1^{n-2} g_1(y_1) & y_2^{n-2} g_1(y_2) & \cdots & y_m^{n-2} g_1(y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) & g_1(y_1) & g_1(y_2) & \cdots & g_1(y_m) \end{pmatrix}$$

$\because x_i, y_j$ 分别是 $f_1(x), g_1(x)$ 的解, $\therefore f_1(x_i) = 0, g_1(y_j) = 0$, 但是 $f_1(y_j) \neq 0, g_1(x_i) \neq 0$. 于是,

$$\begin{aligned}
 & R(f_1, g_1) \begin{pmatrix} x_1^{m+n-1} & x_2^{m+n-1} & \cdots & x_n^{m+n-1} & y_1^{m+n-1} & y_2^{m+n-1} & \cdots & y_m^{m+n-1} \\ x_1^{m+n-2} & x_2^{m+n-2} & \cdots & x_n^{m+n-2} & y_1^{m+n-2} & y_2^{m+n-2} & \cdots & y_m^{m+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_1^{m-1}f_1(y_1) & \cdots & y_m^{m-1}f_1(y_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_1(y_1) & \cdots & f_1(y_m) \\ x_1^{n-1}g_1(x_1) & \cdots & x_n^{n-1}g_1(x_n) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_n) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

(5.1)式左边是结式方阵和一个降幂的 Vander Monde 矩阵的乘积, 其乘积的行列式值为:

$$R(f_1, g_1) \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - x_k) \prod_{1 \leq j < l \leq m} (y_j - y_l) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j) \quad (5.2)$$

(5.1)式右边是一个分块对角方阵, 前 n 列分别提出 $g_1(x_i)$, 后 m 列分别提出 $f_1(y_j)$ 之后, 剩下非零部分是两个降幂 Vander Monde 矩阵, 按前 m 行、 n 列进行 Laplace 展开, 其行列式值为:

$$(-1)^{mn} \prod_{i=1}^n g_1(x_i) \prod_{j=1}^m f_1(y_j) \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - x_k) \prod_{1 \leq j < l \leq m} (y_j - y_l) \quad (5.3)$$

(5.2) = (5.3), 等式两边约去非零的相同部分后, 得:

$$R(f_1, g_1) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^n g_1(x_i) \prod_{j=1}^m f_1(y_j) \quad (5.4)$$

(5.4)式右边里,

$$\begin{aligned}
 (-1)^{mn} \prod_{j=1}^m f_1(y_j) &= \prod_{j=1}^m ((-1)^n f_1(y_j)) \\
 &= \prod_{j=1}^m ((-1)^n (y_j - x_1) \cdots (y_j - x_n)) \\
 &= \prod_{j=1}^m ((x_1 - y_j) \cdots (x_n - y_j)) \\
 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

将(5.5)式代入(5.4)式右边并约去非零部分，得

$$\begin{aligned} R(f_1, g_1) &= \prod_{i=1}^n g_1(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n ((x_i - y_1) \cdots (x_i - y_m)) \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j) \end{aligned}$$

Step 3: 摄动. $\exists c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$

s. t. $\forall 0 < t \ll 1, x_1 + c_1 t, \dots, x_n + c_n t, y_1 + d_1 t, \dots, y_m + d_m t$ 互不相同.

设 $f_t(x) = (x - x_1 - c_1 t) \cdots (x - x_n - c_n t), g_t(x) = (x - y_1 - d_1 t) \cdots (x - y_m - d_m t),$
 $\forall 0 < t \ll 1, f_t(x), g_t(x)$ 系数是 t 的多项式，且 $f_0(x) = f_1(x), g_0(x) = g_1(x)$, 由 Step 2 知,

$$R(f_t, g_t) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i + c_i t - y_j - d_j t)$$

令 $t \rightarrow 0^+$, 得

$$R(f_1, g_1) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - y_j)$$

□

6 特征值

6.1 对角化

定理 6.1 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 则存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵的充分必要条件是 φ 有 n 个线性无关的特征向量 (这样的线性变换成为可对角化线性变换).

证明: 必要性. 设 φ 可对角化, 根据定义即存在 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 使得 φ 在此基下的表示矩阵为对角阵 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则

$$\begin{aligned}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \implies \varphi(e_1) &= \lambda_1 e_1, \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n \\ \xrightarrow{e_i \text{ 为基向量}} \varphi &\text{ 有 } n \text{ 个线性无关的特征向量.}\end{aligned}$$

充分性. 设 φ 有 n 个线性无关的特征向量 e_1, e_2, \dots, e_n , 即 $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i, (1 \leq i \leq n)$, 并且 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 所以

$$\begin{aligned}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \implies \varphi &\text{ 的表示矩阵为对角阵}\end{aligned}$$

故 φ 可对角化. □

定理 6.2 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 为数域 \mathbb{K} 上 n 维线性空间 V 上线性变换 φ 的不同特征值, 则 $V_1 + V_2 + \dots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$.

推论 6.1 线性变换 φ 属于不同特征值的特征向量必线性无关.

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 为 φ 的不同特征值, v_1, v_2, \dots, v_k 为对应的特征向量. 令 $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$, 那么, $c_1 v_1 \in V_1, c_2 v_2 \in V_2, \dots, c_k v_k \in V_k$, 由定理 6.2 可知, $c_1 v_1 = c_2 v_2 = \dots = c_k v_k = 0$, 由于 v_i 都是特征向量, 故 $v_i \neq 0$, 所以, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, 因此, v_1, v_2, \dots, v_k 线性无关. □

6.2 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

命题 6.1 任一 n 阶矩阵的极小多项式必唯一.

命题 6.2 相似的矩阵具有相同的极小多项式.

命题 6.3 设 A 是一个分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

其中 A_i 都是方阵, 则 A 的极小多项式等于诸 A_i 的极小多项式之最小公倍式.

例 6.1 设 A 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 求证: 若 A 可对角化, 则极小多项式为 $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$.

证明: 存在非异矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & \\ & \lambda_2 I & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k I \end{pmatrix} = B$$

由命题6.2可知, A 与 B 有相同极小多项式, 即

$$m(x) = m_B(x).$$

因为 B 是分块对角阵, 由命题6.3可推出

$$m_B(x) = [x - \lambda_1, x - \lambda_2, \dots, x - \lambda_k] = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k).$$

□

注 A 可对角化 $\iff A$ 的极小多项式无重根.

命题 6.4 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = 0, \quad (6.1)$$

即 A 适合其特征多项式

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n). \quad (6.2)$$

证明: 设 $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 是第 i 行为 1 的单位列向量, 可得如下 n 个等式:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad (6.3)$$

$$Ae_1 = a_{12}e_1 + \lambda_2 e_2, \quad (6.4)$$

.....

$$Ae_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{i-1,i}e_{i-1} + \lambda_i e_i, \quad (6.5)$$

.....

$$Ae_n = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{n-1,n}e_{n-1} + \lambda_n e_n. \quad (6.6)$$

$$\because f(A)g(A) = g(A)f(A),$$

$$\therefore (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = (A - \lambda_{i+1} I_n)(A - \lambda_{i+2} I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_i I_n),$$

只要证

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n)e_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n \quad (6.7)$$

只要证

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_i I_n)e_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n \quad (6.8)$$

对 i 进行归纳:

$i = 1$ 时, 由(6.3)式可知, $(A - \lambda_1 I_n)e_i = 0$ 成立.

现假设 $i - 1$ 时结论成立, 则 i 时, 由(6.5)可知,

$$Ae_i - \lambda_i e_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{i-1,i}e_{i-1} \quad (6.9)$$

即

$$(A - \lambda_i I_n)e_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{i-1,i}e_{i-1} \quad (6.10)$$

将(6.10)式代入(6.8)式, 得

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_i I_n)e_i \\ &= (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_{i-1} I_n)(a_{1i}e_1 + \cdots + a_{i-1,i}e_{i-1}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

将(6.11)式前 $i - 1$ 个因式和第 i 个因式中的每一项相乘, 可得

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_i I_n)e_i \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_{i-1} I_n)e_j \end{aligned} \quad (6.12)$$

由归纳假设可知, (6.12)式的 $i - 1$ 项全部为 0, 从而(6.8)式为 0. \square

定理 6.3 (Cayley-Hamilton(凯莱-哈密顿) 定理) 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵, $f(x)$ 是 A 的特征多项式, 则 $f(A) = O$.

证明: \exists 非异阵 P s. t. $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$

其特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

由命题(6.4)可知 $f(B) = O$, 则

$$f(A) = f(PBP^{-1}) = Pf(B)P^{-1} = O. \quad \square$$

推论 6.2 条件和假设同定理(6.3), 则 $f(\lambda) \mid m(\lambda)^n$.

证明: $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 A 的全体不同特征值,

$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, 其中 $r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{Z}^+$.

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n \implies m_i \leq n \leq n \cdot r_i, 1 \leq i \leq k \implies f(\lambda) \mid m(\lambda). \quad \square$$

推论 6.3 (Cayley-Hamilton 定理 (几何领域)) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f(x)$ 是 φ 的特征多项式, 则 $f(\varphi) = 0$.

证明: 设 φ 的表示矩阵为 $A \in M_n(\mathbb{K})$.

先证 A 可对角化的情形:

设 $\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 其特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

$$f(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_n & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$f(A) = f(P\Lambda P^{-1}) = Pf(\Lambda)P^{-1} = O.$$

再证一般情形 (摄动法):

\exists 非异阵 P s. t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \cdots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$

$\exists c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ s. t. $\forall 0 < t \ll 1, \lambda_1 + c_1 t, \lambda_2 + c_2 t, \cdots, \lambda_n + c_n t$ 互不相同.

$$\text{构造矩阵 } A_t = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + c_1 t & * & * & * \\ & \lambda_2 + c_2 t & * & * \\ & & \cdots & * \\ & & & \lambda_n + c_n t \end{pmatrix} P^{-1},$$

当 $0 < t \ll 1$ 时, A_t 可对角化, 当 $t = 0$ 时, $A_0 = A$.

$$\forall 0 < t \ll 1, (A_t - (\lambda_1 + c_1 t)I_n)(A_t - (\lambda_2 + c_2 t)I_n) \cdots (A_t - (\lambda_n + c_n t)I_n) = 0,$$

令 $t \rightarrow 0$, 得 $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = 0$

□

6.3 特征值的估计

例 6.2 已知 $A^2 - A - 3I_n = 0$, 求证: $A - 2I_n$ 可逆.

证明:

方法一、凑因子法:

$$\because (A - 2I_n)(A + I_n) = I_n, \therefore A - 2I_n \text{ 可逆.}$$

方法二、线性方程组求解法:

只要证 $(A - 2I_n)x = 0$ 只有零解.

方法三、互素多项式法:

$(x^2 - x - 3, x - 2) = 1$, A 代入 $x^2 - x - 3$ 等于零, 则 A 代入 $x - 2$ 必不为零.

方法四、特征值法:

反正法: 设 $A - 2I_n$ 不可逆 $\Rightarrow 2$ 是 A 的特征值,

将 $\lambda = 2$ 代入 $A^2 - A - 3I_n$ 得 $2^2 - 2 - 3 \neq 0$ 产生矛盾, 从而 $A - 2I_n$ 可逆.

□

例 6.3 A 是 4 阶方阵且满足 $\text{tr}(A^i) = i, i = 1, 2, 3, 4$, 求 $|A|$.

解: 方法一: 利用牛顿公式

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 则 A^i 的特征值为 $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i \Rightarrow \sum_{k=1}^4 \lambda_k^i = i$.

根据上一章 Newton 公式:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^k k\sigma_k = 0, k \leq n = 4 \quad (6.13)$$

上式中, $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 4$, 只要求 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \sigma_4$.

$$\sigma_1 = s_1 = 1$$

$$s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{1}{2}$$

$$s_3 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_1 - 3\sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{6}$$

$$s_4 - s_3\sigma_3 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_1 + 4\sigma_4 = 0 \Rightarrow \sigma_4 = \frac{1}{24}$$

方法二：利用教材 P250 习题 6(1) 结论

$$\therefore \sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ddots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}, \quad \therefore \sigma_4 = \frac{1}{4!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{24}.$$

例 6.4 $A^{m \times m}, B^{n \times n}$ 无公共特征值, 求证: 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.

证明:

证法一: 设 $f(x) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式, 由 Cayley-Hamilton 定理 $\implies f(A) = 0$.
 $A^2 X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$, 因此 $A^n X = XB^n, n \in N$,
 因为 $f(A)$ 是关于 A 的多项式, $f(B)$ 是关于 B 的多项式, 所以

$$0 = f(A)X = Xf(B) \quad (6.14)$$

设 B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则 $f(B)$ 的特征值为 $f(\mu_1), f(\mu_2), \dots, f(\mu_n)$.

$\therefore A, B$ 无公共特征值,

$\therefore f(\mu_1), f(\mu_2), \dots, f(\mu_n)$ 皆不为零 $\implies f(B)$ 可逆 \implies (6.14) 式只有零解.

证法二: 设 B 的特征多项式为 $g(\lambda)$,

A, B 无公共特征值 $\implies f(\lambda), g(\lambda)$ 无公共根 $\implies (f(\lambda), g(\lambda)) = 1$

因而 \exists 非零多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$ s. t.

$$f(\lambda)u(\lambda) + g(\lambda)v(\lambda) = 1.$$

将 $\lambda = B$ 代入上式, 即

$$f(B)u(B) + g(B)v(B) = I \quad (6.15)$$

$\therefore g(\lambda)$ 为 B 的特征多项式,

\therefore (6.15) 式中 $g(B) = O \implies f(B)u(B) = I \implies f(B)$ 可逆. □

应用 6.1 A, B 为 n 阶方阵且特征值全大于零, $A^2 = B^2$, 求证: $A = B$.

证明: $A(A - B) = A^2 - AB = B^2 - AB = (A - B)(-B)$

上式中, $A, -B$ 必无公共特征值, 由例 6.4 $\implies A - B = 0$. □

应用 6.2 A 为 n 阶方阵且特征值全为偶数, 求证: 矩阵方程 $X + AX = XA^2$ 只有零解.

证明: $X + AX = XA^2 \implies (A + I)X = XA^2$,

$\therefore A$ 的特征值都是偶数, $\therefore A + I$ 的特征值为奇数, A^2 的特征值为偶数,

因此 $A + I$ 与 A^2 无公共特征值, 由例 6.4 可知,

$(A + I)X = XA^2$ 只有零解, 从而 $X + AX = XA^2$ 只有零解. □

应用 6.3 A 是 n 阶方阵且适合多项式 $a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 其中 $|a_m| > \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|$, 求证: $2X + AX = XA$ 只有零解.

证明: 任取 A 的特征值 λ_0 , 断言: $|\lambda_0| < 1$, 用反正法: 设 $|\lambda_0| \geq 1$.
由题意知: $a_m\lambda_0^m + a_{m-1}\lambda_0^{m-1} + \cdots + a_1\lambda_0 + a_0 = 0$, 则

$$a_m = -\frac{a_{m-1}}{\lambda_0} - \frac{a_{m-2}}{\lambda_0^2} - \cdots - \frac{a_1}{\lambda_0^{m-1}} - \frac{a_0}{\lambda_0^m} \implies |a_m| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|, \text{ 与题意矛盾.}$$

$\therefore A$ 的所有特征值必小于 1.

如图 6.1 所示, A 的所有特征值都位于左边的单位圆内, 且不包括圆周; $A + 2I_n$ 的所有特征值都位于右边的单位圆内, 且不包括圆周, 即左边的单位圆向右平移两个单位. 由于两个圆相切且不包括圆周, 因此 A 和 $A + 2I_n$ 没有公共特征值. 根据例 6.4 可知, $(A + 2I_n)X = XA$ 只有零解. \square

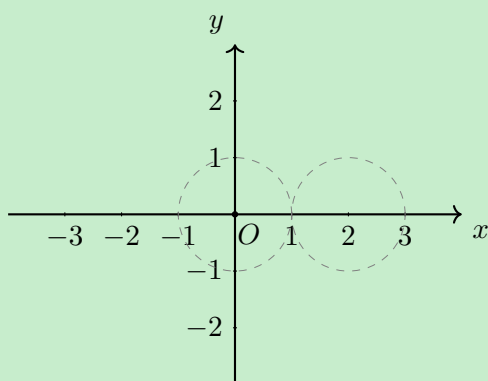


图 6.1

应用 6.4 $A^{m \times m}, B^{n \times n}$ 是数域 \mathbb{K} 上的方阵且无公共特征值, 求证: 对 $\forall C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, 矩阵方程 $AX - XB = C$ 有唯一解.

证明: 构建一个线性变换:

$$\begin{aligned} \varphi: M_{m \times n}(\mathbb{K}) &\mapsto M_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX - XB \end{aligned}$$

由题意 A, B 无公共特征值, 根据例 6.4 可知:

$AX = XB$ 只有零解, 即 $AX - XB = 0$ 只有零解, 从而只有 $X = 0$ 与 $AX - XB = 0$ 相对应, 即 $\ker \varphi = 0 \implies \varphi$ 为单射, 由于 φ 为线性变换, 单射线性变换必为满射, 从而 φ 为线性同构, 因此, 对 $\forall C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, 当 $AX - XB = C$ 时, 必有唯一的 X 与其对应, 即 $AX - XB = C$ 有唯一解. \square

例 6.5 $A^{m \times m}, B^{n \times n}$ 是数域 \mathbb{K} 上的方阵且无公共特征值, 若 A, B 可对角化, 则 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 可对角化.

证明: 由应用6.4 $\implies \exists X_0$ s. t. $AX_0 - X_0B = C$, 则

$$\begin{pmatrix} I_m & X_0 \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -X_0 \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C + X_0B - AX_0 \\ O & B \end{pmatrix}$$

上式等号右边, $C + X_0B - AX_0 = 0$, 所以, $M \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, A, B 可对角化, 故 M 也可对角化. \square

例 6.6 A 为非异的循环矩阵, 求证: A^{-1} 也是循环矩阵.

证明:

证法一:

单位循环矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} & & & I_{n-1} \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

依题意可知:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} = a_1 I_n + a_2 J + \cdots + a_n J^{n-1} \quad (6.17)$$

令 $g(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$,

J 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n - 1$, J 的 \mathbf{h} 特征值为 $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$,

$A = g(J)$, A 的特征值为 $g(w_k), k = 0, 1, \cdots, n-1$,

又因为 A 非异, 所以 $g(w_i) \neq 0$, 但 $f(w_i) = 0$,

因此,

$$\begin{aligned} f(x), g(x) \text{ 没有公共根} &\implies (f(x), g(x)) = 1 \\ \implies \exists \text{非零多项式 } u, v \text{ s. t. } f(x)u(x) + g(x)v(x) &= 1 \end{aligned} \quad (6.18)$$

将 $x = J$ 代入(6.18)式, 得

$$f(J)u(J) + g(J)v(J) = I_n \quad (6.19)$$

上式中, $f(J) = 0, g(J) = A$, 因而 $Av(J) = I_n \implies A^{-1} = v(J)$ 为循环矩阵.

证法二:

A 非异 $\xrightarrow{\text{Cayley-Hamilton定理}} A^{-1} = h(A)$, $h(A)$ 为 A 的 $n-1$ 次多项式, 见 P282 习题 1.

$h(A) = h(g(J))$ 仍为循环矩阵. \square

7 相似标准型

7.1 多项式矩阵

定义 7.1 $M(\lambda) = M_m\lambda^m + M_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + M_1\lambda + M_0$, 其中 $M_i \in M_{r \times s}(\mathbb{K})$, 称 $M(\lambda)$ 为矩阵多项式. 若 $M_m \neq 0$, 定义 $\deg M(\lambda) = m$, 约定 $\deg 0 = -\infty$.

$$N(\lambda) = N_n\lambda^n + N_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + N_1\lambda + N_0, N_n \neq 0, \text{ 则}$$

$$M(\lambda) = N(\lambda) \xLeftrightarrow{\text{def}} m = n, M_i = N_i, \forall 0 \leq i \leq m$$

设 $m \geq n$,

$$\text{定义加法: } M(\lambda) + N(\lambda) = M_m\lambda^m + \cdots + M_{n+1}\lambda^{n+1} + (M_n + N_n)\lambda^n + \cdots + (M_0 + N_0)$$

$$\text{定义数乘: } k \cdot M(\lambda) = k \cdot M_m\lambda^m + \cdots + k \cdot M_0$$

$$\text{定义乘法: } M(\lambda) \cdot N(\lambda) = P(\lambda) = \sum P_k\lambda^k, P_k = \sum_{i+j=k} M_i N_j$$

引理 7.1 $\deg(M(\lambda) \cdot N(\lambda)) \leq \deg M(\lambda) + \deg N(\lambda)$, 若 M_m 或 N_n 是可逆阵, 则等号成立.

证明: $M(\lambda) \cdot N(\lambda)$ 的首项是 $M_m \cdot N_n \cdot \lambda^{m+n}$, 若 M_m 或 N_n 可逆, 则 $M(\lambda) \cdot N(\lambda) \neq 0$. \square

定理 7.1 设 A, B 是数域 \mathbb{K} 上的矩阵, 则 A, B 相似的充分必要条件是 λ - 矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵.

7.2 矩阵的法式

定理 7.2 设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ - 矩阵, 则 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\text{diag}\{d_1(\lambda), d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, r-1)$.

引理 7.2 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 为 n 阶 λ - 矩阵, 则:

$$(1) |A(\lambda) \cdot B(\lambda)| = |A(\lambda)| \cdot |B(\lambda)|;$$

$$(2) A(\lambda)A(\lambda)^* = A(\lambda)^*A(\lambda) = |A(\lambda)| \cdot I_n.$$

证明: (1) 令 $f(\lambda) = |A(\lambda) \cdot B(\lambda)| - |A(\lambda)| \cdot |B(\lambda)|$ 是 λ 的多项式, 对任意的 $a \in \mathbb{K}$, $f(a) = |A(a) \cdot B(a)| - |A(a)| \cdot |B(a)| = 0$, 从而 $f(\lambda) \equiv 0$.

(2) 令 $(f_{ij}(\lambda))_{n \times n} = A(\lambda) \cdot A(\lambda)^* - |A(\lambda)| \cdot I_n, f_{ij}(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$,
 $\forall a \in \mathbb{K}, (f_{ij}(a)) = A(a) \cdot A(a)^* - |A(a)| \cdot I_n = 0 \implies f_{ij}(\lambda) \equiv 0, \forall i, j$ \square

定理 7.3 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 λ - 矩阵, 则下列结论等价:

(1) $A(\lambda)$ 是可逆 λ - 阵;

- (2) $|A(\lambda)|$ 是非零常数;
- (3) $A(\lambda)$ 的相抵标准型为 I_n ;
- (4) $A(\lambda)$ 只通过初等行(列)变换可变为 I_n ;
- (5) $A(\lambda)$ 是初等 λ - 矩阵的乘积.

证明: (1) \implies (2): $\exists B(\lambda)$ s. t. $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I_n$,
 等式两边同取行列式, 得: $|A(\lambda) \cdot B(\lambda)| = |A(\lambda)| \cdot |B(\lambda)| = |I_n| = 1$,
 因为上式左边是两个关于 λ 的多项式相乘, 右边是 1,
 因此 $|A(\lambda)|$ 和 $|B(\lambda)|$ 只能是非零常数.

(2) \implies (3): 由定理 7.2 $\implies \exists \lambda$ - 矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ s. t. $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda); 0, \dots, 0\}$, 其中, $d_i(\lambda)$ 皆为关于 λ 的首一多项式, 且 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \dots \mid d_r(\lambda)$, $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为初等 λ - 矩阵的乘积. 由引理 7.2 可知,

$$|P(\lambda)| \cdot |A(\lambda)| \cdot |Q(\lambda)| = d_1(\lambda)d_2(\lambda) \cdots d_r(\lambda)0 \cdots 0$$

上式左边, $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为初等 λ - 矩阵的乘积, 所以皆不为零, 又 $|A(\lambda)|$ 为非零常数, 故等式左边不等于零, 从而等式右边的 $n - r$ 个 0 均不会出现, 因此 $r = n$ 且 $d_i(\lambda)$ 都是非零常数. 又因为 $d_i(\lambda)$ 皆是首一多项式, 故对 $\forall i, d_i(\lambda) = 1$, 由此可推出 $A(\lambda) = I_n$.

(3) \implies (4): 设 $\exists P(\lambda), Q(\lambda)$ 是初等 λ - 矩阵的乘积 s. t.

$$\begin{aligned} P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) &= I_n \\ \implies P(\lambda)A(\lambda) &= Q(\lambda)^{-1} \\ \implies Q(\lambda)P(\lambda)A(\lambda) &= I_n \end{aligned}$$

即 $A(\lambda)$ 只需通过初等行变换即可变为 I_n . 同理可证 $A(\lambda)$ 只需通过初等列变换即可变为 I_n .

(4) \implies (5): 设 $P(\lambda)$ 是初等 λ - 矩阵 s. t.

$$\begin{aligned} P_r(\lambda)P_{r-1}(\lambda) \cdots P_1(\lambda)A(\lambda) &= I_n \\ \implies P_{r-1}(\lambda)P_{r-2}(\lambda) \cdots P_1(\lambda)A(\lambda) &= P_r(\lambda)^{-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \implies A(\lambda) &= P_1(\lambda)^{-1}P_2(\lambda)^{-1} \cdots P_r(\lambda)^{-1} \\ \implies A(\lambda) &\text{是初等 } \lambda - \text{ 矩阵的乘积.} \end{aligned}$$

(5) \implies (1): 初等 λ - 矩阵都是可逆阵, 且有限个可逆阵的乘积仍然是可逆阵, 因此推出 (1), 此时,

$$A(\lambda)^{-1} = \frac{1}{|A(\lambda)|} \cdot A(\lambda)^*.$$

证明: 由引理7.2可知,

$$\begin{aligned} A(\lambda) \cdot A(\lambda)^* &= A(\lambda)^* A(\lambda) = |A(\lambda)| \cdot I_n \\ \xrightarrow{A(\lambda) \text{可逆故} |A(\lambda)| \neq 0} A(\lambda) \left(\frac{1}{|A(\lambda)|} A(\lambda)^* \right) &= \left(\frac{1}{|A(\lambda)|} A(\lambda)^* \right) A(\lambda) = I_n \\ \implies A(\lambda)^{-1} &= \frac{1}{|A(\lambda)|} A(\lambda)^* \end{aligned}$$

□

□

定理 7.4 设 $A \in M_n(\mathbb{K})$, 则 $\lambda - A$ 相抵于

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_m(\lambda)\},$$

其中, $d_i(\lambda)$ 为非常数首一多项式且 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \dots \mid d_m(\lambda)$.

证明: 由定理7.2可知, $\exists P(\lambda), Q(\lambda)$ 为可逆 λ - 矩阵 s. t.

$$P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda), 0, \dots, 0\}$$

两边同时取行列式, 得

$$c \cdot |\lambda I_n - A| = d_1(\lambda)d_2(\lambda) \cdots d_r(\lambda)0 \cdots 0, c \neq 0$$

上式左边非零, 所以右边也不等于零, 故右边的 $n - r$ 个零均不会出现, 从而 $r = n$ 且

$$\begin{aligned} c|\lambda I_n - A| &= d_1(\lambda)d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda) \\ \implies c &= 1 \\ \implies |\lambda I_n - A| &= d_1(\lambda)d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda) \end{aligned} \tag{7.1}$$

把 $d_i(\lambda)$ 中的 1 都列出, 即可得到结论.

□

例 7.1 若 $\deg d_i(\lambda) \geq 1$, 则 $A = cI_n$.

证明: 由(7.1)两边取多项式次数, 得

$$n = \sum_{i=1}^n \deg d_i(\lambda) \geq n$$

从而 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 是一次首一多项式. 又由整除条件可知,

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - c$$

即 $\lambda I_n - A$ 相抵于矩阵

$$\text{diag}\{\lambda - c, \lambda - c, \dots, \lambda - c\} = \lambda I_n - cI_n,$$

由定理7.1可知, A 与 cI_n 相似, 从而 $cI_n = P^{-1}AP \implies A = cI_n$.

□

例 7.2 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\lambda I_n - A$ 的相似标准型.

解:

$$\begin{aligned} \lambda I_3 - A &= \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & 3(\lambda+1) \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3(\lambda+1) \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 6 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2-4\lambda+4 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \lambda-1 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & \lambda-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6(\lambda-1) \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & 6(\lambda-1) \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-4\lambda+4 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+4\lambda+2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.3 不变因子

引理 7.3 设 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_r(\lambda)$, 则

$$D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq r-1.$$

证明: 任取 $A(\lambda)$ 的 $i+1$ 阶子式 M_{i+1} , 将 M_{i+1} 按某行(列)展开, 这里假设按第一行展开:

$$M_{i+1} = a_{11}(\lambda)M_{11} - a_{12}(\lambda)M_{12} + \dots + (-1)^{i+2}a_{1,i+1}M_{1,i+1} \quad (7.2)$$

由行列式因子定义 $\implies D_i(\lambda) \mid (\lambda)M_{1j}, 1 \leq j \leq i+1$

$$\implies D_i(\lambda) \mid M_{i+1}$$

$$\xrightarrow{D_i(\lambda) \text{ 是 } M_{i+1} \text{ 公因子}} D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq r-1$$

□

定理 7.5 相抵的 λ - 矩阵有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子.

证明: 设

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

其中, $P(\lambda), Q(\lambda)$ 是可逆 λ - 矩阵, 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子分别为

$$D_k(\lambda), E_k(\lambda), 1 \leq k \leq n$$

要证

$$D_k(\lambda) = E_k(\lambda), \forall 1 \leq k \leq n.$$

$$B(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cauchy-Binet 公式}} P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq r_1 < \cdots < r_k \leq n \\ 1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq n}} P(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \end{pmatrix} A(\lambda) \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \end{pmatrix} Q(\lambda) \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

1°. 若 $D_k(\lambda) = 0$: 由(7.4)式可得:

$$B(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = 0,$$

从而 $E_k(\lambda) = 0$;

2°. 若 $D_k(\lambda) \neq 0$: 由行列式因子定义可知:

$$D_k(\lambda) \mid A(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

从而由(7.4)式可知:

$$D_k(\lambda) \mid B(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

从而 $D_k(\lambda) \mid E_k(\lambda)$.

由于 $A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}B(\lambda)Q(\lambda)^{-1}$, 因此同理可证,

1°. $E_k(\lambda) = 0 \implies D_k(\lambda) = 0$;

2°. 若 $E_k(\lambda) \neq 0$, 则 $D_k(\lambda) \neq 0$ 且 $E_k(\lambda) \mid D_k(\lambda)$.

由以上可知,

$$E_k(\lambda) = 0 \iff D_k(\lambda) = 0$$

或者

$$D_k(\lambda) \mid E_k(\lambda), E_k(\lambda) \mid D_k(\lambda)$$

结合以上可推出,

$$\exists 0 \neq c \text{ s. t. } D_r(\lambda) = c \cdot E_k(\lambda),$$

又因为 $D_k(\lambda), E_k(\lambda)$ 都是首一多项式, 因此 $c = 1 \implies D_k(\lambda) = E_k(\lambda)$. □

推论 7.1 设 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的法式为

$$\Lambda = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

其中 d_i 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, r-1)$, 则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$. 特别, 法式和不变因子之间相互唯一确定.

证明: 因为 $A(\lambda)$ 相抵于 Λ , 由定理7.5可知 $A(\lambda)$ 的不变因子即为 Λ 的不变因子, 而 Λ 的不变因子即 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$. \square

推论 7.2 设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 为 n 阶 λ - 矩阵, 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵当且仅当它们有相同的法式.

证明: 若 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的法式, 设为 Λ , 则 $A(\lambda) \sim \Lambda \sim B(\lambda)$, 由相抵的传递性可知, $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

若 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵, 设 $A(\lambda)$ 的法式为 Λ_1 , 设 $B(\lambda)$ 的法式为 Λ_2 , 则

$$A(\lambda) \sim \Lambda_1, B(\lambda) \sim \Lambda_2, \text{ 且 } A(\lambda) \sim B(\lambda)$$

由相抵的传递性可知, $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$, 由定理7.5可知, Λ_1 与 Λ_2 有相同的不变因子. 由于 Λ_1 与 Λ_2 都是法式, 所以它们主对角线上的非零首一多项式元素都相同, 从而 $\Lambda_1 = \Lambda_2$. \square

推论 7.3 λ - 矩阵在相抵关系下的全系不变量是它的行列式因子组或不变因子组.

证明: 由定理7.5可知, 相抵的 λ - 矩阵有相同的行列式因子 (组), 从而有相同的不变因子 (组).

反过来, 如果两个 λ - 矩阵有相同的行列式因子或不变因子, 由推论7.1可知, 它们必具有相同的法式, 从而由推论7.2可知, $A(\lambda) \sim B(\lambda)$. \square

推论 7.4 n 阶 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的法式与初等变换的选取无关.

证明: 设 $A(\lambda)$ 可通过某初等变换过程变换为法式 Λ_1 , 设 $A(\lambda)$ 可通过另一初等变换过程变换为法式 Λ_2 , 只要证 $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

$$A(\lambda) \sim \Lambda_1, A(\lambda) \sim \Lambda_2 \implies \Lambda_1 \sim \Lambda_2$$

由推论7.2可知, $\Lambda_1 = \Lambda_2$. \square

定理 7.6 数域 \mathbb{K} 上 n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 和 $\lambda I - B$ 具有相同的行列式因子或不变因子.

证明: 由定理7.1可知,

$$A \text{ 与 } B \text{ 相似} \iff \lambda I - A \text{ 与 } \lambda I - B \text{ 相抵}.$$

由推论7.3可知, $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的行列式因子或不变因子. \square

注 特征矩阵 $\lambda I - A$ 的行列式因子及不变因子均简称为 A 的行列式因子及不变因子.

推论 7.5 设 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ 是两个数域, A, B 是 \mathbb{F} 上的两个矩阵, 则 A 与 B 在 \mathbb{F} 上相似的充分必要条件是他们在 \mathbb{K} 上相似.

证明: A 与 B 在 \mathbb{F} 上相似 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ 非异矩阵 $P \in M_n(\mathbb{F})$ s.t. $B = P^{-1}AP$, A 与 B 在 \mathbb{K} 上相似 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ 非异矩阵 $Q \in M_n(\mathbb{K})$ s.t. $B = Q^{-1}AQ$.

必要性: 设 \exists 非异矩阵 $P \in M_n(\mathbb{F})$ s.t. $B = P^{-1}AP$, 可知 $P^{-1} \in \mathbb{F}$. 把 P, P^{-1} 看成是 \mathbb{K} 上的矩阵, 从而 P 在 \mathbb{K} 上可逆, 可以推出 A 与 B 在 \mathbb{K} 上也相似.

充分性: 若 A 与 B 在 \mathbb{K} 上相似, 由推论 7.6 可知, $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 作为 \mathbb{K} 上的 λ -矩阵有相同的不变因子组 (法式). 实际上 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 都是 \mathbb{F} 上的 λ -矩阵, 由推论 7.4 可知, 在求法式的过程中, 只要取 $\mathbb{F}[\lambda]$ 上的初等变换, 就可以得到 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 的法式, 且法式中的不变因子多项式 $d_i(\lambda)$ 仍是 \mathbb{F} 上的多项式. 因此, 存在 \mathbb{F} 上的可逆 λ -矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda), M(\lambda), N(\lambda)$ s.t.

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = M(\lambda)(\lambda I - B)N(\lambda) = \text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)\},$$

从而

$$(\lambda I - B) = M(\lambda)^{-1}P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda)N(\lambda)^{-1},$$

即 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 \mathbb{F} 相抵, 由定理 7.1 可知, A 与 B 在 \mathbb{F} 上相似. □

推论 7.6 矩阵的不变因子组在基域扩张下不变.

7.4 有理标准型

引理 7.4 设 r 阶矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

则

(1) F 的行列式因子为

$$1, \dots, 1, f(\lambda), \quad (7.6)$$

其中共有 $r-1$ 个 1, $f(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_r$, F 的不变因子组也由 (7.6) 式给出;

(2) F 的极小多项式和特征多项式都等于 $f(\lambda)$.

证明: (1)

$$\lambda I_r - F = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

$$D_r(\lambda) = |\lambda I_r - F| = \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \cdots + a_r = f(\lambda)$$

对 $\forall 1 \leq k < r$, $\lambda I - F$ 总有一个 k 阶子式 $= (-1)^k$, 从而

$$D_k(\lambda) = 1, \forall 1 \leq k < r.$$

(2) 设 F 极小多项式为 $m(\lambda)$, 只要证 $m(\lambda) = f(\lambda)$.

由定理6.3(Cayley-Hamilton 定理) $\implies m(\lambda) \mid f(\lambda) \implies \deg m(\lambda) \leq r$.

1°. 若 $\deg m(\lambda) = r$, 则 $m(\lambda) = f(\lambda)$;

2°. 若 $\deg m(\lambda) < r$, 用反正法: 设

$$m(\lambda) = c_{r-1} \lambda^{r-1} + c_{r-2} \lambda^{r-2} + \cdots + c_1 \lambda + c_0, c_i \text{不全为} 0,$$

设 e_i 为第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的单位行向量, 则

$$e_1 F = e_2, e_2 F = e_3, \cdots, e_{r-1} F = e_r,$$

即

$$e_1 F = e_2, e_1 F^2 = e_3, \cdots, e_1 F^{r-1} = e_r. \quad (7.7)$$

由于 $m(\lambda)$ 是 F 的极小多项式, 所以

$$0 = m(F) = c_{r-1} F^{r-1} + c_{r-2} F^{r-2} + \cdots + c_1 F + c_0 I_r,$$

上式左右两边同时左乘 e_1 , 可得

$$0 = c_{r-1} e_1 F^{r-1} + c_{r-2} e_1 F^{r-2} + \cdots + c_1 e_1 F + c_0 e_1,$$

上式各项分别应用(7.7)式的结论, 可得

$$0 = c_{r-1} e_r + c_{r-2} e_{r-1} + \cdots + c_1 e_2 + c_0 e_1 = (c_0, c_1, \cdots, c_{r-1}) \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_{r-1} = 0$$

与假设矛盾. □

引理 7.5 设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 相抵于对角 λ -矩阵

$$\text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}, \quad (7.8)$$

λ -矩阵 $B(\lambda)$ 相抵于对角 λ -矩阵

$$\text{diag}\{d_{i_1}(\lambda), d_{i_2}(\lambda), \cdots, d_{i_n}(\lambda)\}, \quad (7.9)$$

且 i_1, i_2, \cdots, i_n 是 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列, 则 $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

证明: 利用行对换及列对换即可将(7.8)式变换成(7.9)式, 因此(7.8)式所表示的矩阵和(7.9)式所表示的矩阵相抵, 所以 $A(\lambda) \sim B(\lambda)$. □

定理 7.7 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶方阵, A 的不变因子组为

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda),$$

其中 $\deg d_i(\lambda) = m_i$, 则 A 相似于下列分块对角阵:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}$$

其中 F_i 的阶等于 m_i , 且 F_i 是形如(7.5)式的矩阵, F_i 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 的系数(除最高次项)的负值组成.

证明:

$$\begin{aligned} \lambda I_n - A &\sim \text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)\} \\ \implies |\lambda I_n - A| &= d_1(\lambda) \cdots d_k(\lambda) \end{aligned} \quad (7.10)$$

则 $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$,

$$\lambda I - F_i = \lambda I - F(d_i(\lambda)) \sim \text{diag}\{1, \dots, 1, d_i(\lambda)\},$$

上式中 $d_i(\lambda)$ 前有 $m_i - 1$ 个 1, 则

$$\lambda I - F = \begin{pmatrix} \lambda I - F(d_1(\lambda)) & & & \\ & \lambda I - F(d_2(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I - F(d_k(\lambda)) \end{pmatrix}$$

即 $\lambda I - A$ 的法式为

$$\text{diag}\{1, \dots, 1, d_1(\lambda); 1, \dots, 1, d_2(\lambda); \dots; 1, \dots, 1, d_k(\lambda)\}, \quad (7.11)$$

上式中, 每个 $d_i(\lambda)$ 前都配有 $m_i - 1$ 个 1, 即共有 $m_1 - 1 + m_2 - 1 + \dots + m_k - 1 = n - k$ 个 1. 因此, (7.11)式是(7.10)式的一个置换. 由引理7.5可知, $\lambda I_n - A \sim \lambda I_n - F$, 由定理7.1可知, $A \sim F$. \square

定理 7.8 设数域 \mathbb{K} 上的 n 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda),$$

其中 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) (i = 1, \dots, k-1)$, 则 A 的极小多项式 $m(\lambda) = d_k(\lambda)$.

证明: 由定理7.6可知,

$$A \sim \text{diag}\{F(d_1(\lambda)), F(d_2(\lambda)), \dots, F(d_k(\lambda))\},$$

1°. $m_A(\lambda) = m_F(\lambda)$;

2°. 令 $F_i = F(d_i(\lambda))$, 则

$$m_F(\lambda) = [m_{F_1}(\lambda), m_{F_2}(\lambda), \dots, m_{F_k}(\lambda)].$$

由引理7.4 $\implies m_{F_i}(\lambda) = d_i(\lambda), 1 \leq i \leq k$

$$\implies m_A(\lambda) = [d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_k(\lambda)] \xrightarrow{d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)} d_k(\lambda).$$

□

推论 7.7 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 其极小多项式为 $m_{\mathbb{F}}(\lambda)$. $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, 将 A 看成是 \mathbb{K} 上的矩阵, 极小多项式为 $m_{\mathbb{K}}(\lambda)$, 则 $m_{\mathbb{K}}(\lambda) = m_{\mathbb{F}}(\lambda)$.

7.5 初等因子

定义 7.2 设 $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$, $p(\lambda)$ 为不可约多项式, 若存在 $e \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $p(\lambda)^e \mid f(\lambda)$ 但 $p(\lambda)^{e+1} \nmid f(\lambda)$, 则称 $p(\lambda)^e$ 为 $f(\lambda)$ 的准素因子.

定义 7.3 设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$ 是数域 \mathbb{K} 上矩阵 A 的非常数不变因子, 在 \mathbb{K} 上把 $d_i(\lambda)$ 分解成不可约因式之积:

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}, \\ d_2(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{21}} p_2(\lambda)^{e_{22}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}} p_2(\lambda)^{e_{k2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}, \end{aligned} \tag{7.12}$$

其中 e_{ij} 是非负整数 (注意 e_{ij} 可以为零!). 由于 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}$, 因此

$$e_{1j} \leq e_{2j} \leq \cdots \leq e_{kj} (j = 1, 2, \dots, t).$$

若(7.12)式中的 $e_{ij} > 0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 A 的一个**初等因子**, A 的全体初等因子成为 A 的**初等因子组**.

由因式分解的唯一性可知 A 的初等因子被 A 的不变因子唯一确定. 反过来, 若给定一组初等因子 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$, 适当添加一些 1 (表示为 $p_j(\lambda)^{e_{ij}} = 0$), 则可将这组初等因子按降幂排列如下:

$$\begin{aligned} &p_1(\lambda)^{e_{k1}}, p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}}, \dots, p_1(\lambda)^{e_{11}}, \\ &p_2(\lambda)^{e_{k2}}, p_1(\lambda)^{e_{k-1,2}}, \dots, p_1(\lambda)^{e_{12}}, \\ &\dots\dots\dots \\ &p_t(\lambda)^{e_{kt}}, p_1(\lambda)^{e_{k-1,t}}, \dots, p_1(\lambda)^{e_{1t}}, \end{aligned} \tag{7.13}$$

令

$$\begin{aligned} d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}} p_2(\lambda)^{e_{k2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}, \\ d_{k-1}(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}} p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}, \end{aligned}$$

则 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \dots, k-1)$, 且 $d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$ 的初等因子组就如 (7.13) 式所示, 因此, 给定 A 的初等因子组, 我们可唯一地确定 A 的不变因子组. 这一事实表明, A 的不变因子组与初等因子组在讨论矩阵相似关系中的作用是相同的. 因此, 有下述定理.

定理 7.9 数域 \mathbb{K} 上的两个矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们具有相同的初等因子组, 即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的全系不变量.

7.6 Jordan 标准型

引理 7.6 r 阶矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_0)^r$.

证明:

$$\lambda I - J = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 & -1 & & & \\ & \lambda - \lambda_0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda - \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

$$D_r(\lambda) = |\lambda I_r - J| = (\lambda - \lambda_0)^r,$$

如(7.14)式矩阵中虚线左上角部分所示,

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq k < r, \exists k \text{ 阶子式} &= (-1)^k \\ \implies D_k(\lambda) &= 1, \forall 1 \leq k < r. \end{aligned}$$

(7.14)式的行列式因子为

$$1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_0)^r,$$

(7.14)式的不变因子也为上式, 因此矩阵 J 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_0)^r$. □

引理 7.7 设特征矩阵 $\lambda I - A$ 经过初等变换化为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

其中, $f_i(\lambda) (i = 1, \dots, n)$ 为非零首一多项式. 将 $f_i(\lambda)$ 作不可约分解, 若 $(\lambda - \lambda_0)^k$ 能整除 $f_i(\lambda)$, 但 $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$ 不能整除 $f_i(\lambda)$, 就称 $(\lambda - \lambda_0)^k$ 是 $f_i(\lambda)$ 的一个准素因子, 则矩阵 A 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子的集合.

证明: Step 1: 对 $\forall 1 \leq i < j \leq n$, 设

$$(f_i(\lambda), f_j(\lambda)) = g(\lambda), [f_i(\lambda), f_j(\lambda)] = h(\lambda),$$

先证

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & \dots & & \\ & & f_i(\lambda) & \\ & & & \dots \\ & & & & f_j(\lambda) \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & \dots & & \\ & & g(\lambda) & \\ & & & \dots \\ & & & & h(\lambda) \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

并且两个对角阵主对焦元素的准素因子全体相同.

不妨设 $i = 1, j = 2$, 设

$$f_1(\lambda) = g(\lambda)q(\lambda), \quad (7.17)$$

$$h(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)/g(\lambda) = f_2(\lambda)q(\lambda), \quad (7.18)$$

$$\exists u(\lambda), v(\lambda) \text{ s. t. } g(\lambda) = f_1(\lambda)u(\lambda) + f_2(\lambda)v(\lambda). \quad (7.19)$$

由于对角阵第 1, 2 两行 (列) 的初等行 (列) 变换和其他行 (列) 无关, 因此, 下面只对前 2 行 (列) 进行操作:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{(7.19)\text{式}} \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & g(\lambda) \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{(7.17)\text{式}} \begin{pmatrix} 0 & g(\lambda) \\ -f_2(\lambda)q(\lambda) & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{g(\lambda) \text{ 是 } f_2(\lambda) \text{ 的因子}} \begin{pmatrix} 0 & g(\lambda) \\ -h(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & h(\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在数域 \mathbb{K} 上做公共因式分解:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{r_1} p_2(\lambda)^{r_2} \cdots p_t(\lambda)^{r_t}, \\ f_2(\lambda) &= p_1(\lambda)^{s_1} p_2(\lambda)^{s_2} \cdots p_t(\lambda)^{s_t}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

其中 $p_i(\lambda)$ 是首一互异的不可约多项式且 $r_i, s_i \geq 0$, 令 $e_i = \min\{r_i, s_i\}, k_i = \max\{r_i, s_i\}$, 则

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_1} p_2(\lambda)^{e_2} \cdots p_t(\lambda)^{e_t}, \\ h(\lambda) &= p_1(\lambda)^{k_1} p_2(\lambda)^{k_2} \cdots p_t(\lambda)^{k_t}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

(7.21)式和(7.20)式中, e_i, k_i 和对应的 r_i, s_i 相同或只是互换个位置, 由构造过程可知:

$\text{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda)\}$ 与 $\text{diag}\{g(\lambda), h(\lambda)\}$ 有相同的准素因子组.

Step 2: 反复利用 **Step 1**, 将 $\text{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$ 变为法式. 依次将第 $(1, 1)$ 元素与 $(2, 2)$ 元素, 第 $(3, 3)$ 元素, ..., 第 (n, n) 元素进行 **Step 1** 的操作, 从而使第 $(1, 1)$ 元素的多项式幂次均是最小的. 一般地, 设第 $(1, 1)$ 元素, ..., 第 $(i-1, i-1)$ 元素已完成如上操作, 第 (i, i) 元素, 第 $(i+1, i+1)$ 元素, ..., 第 (n, n) 元素重复进行 **Step 1** 的操作, 可使原矩阵相抵于 $\text{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}$ 且满足 $d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda) \mid \cdots \mid d_n(\lambda)$, 即原矩阵和其法式相抵. \square

例 7.3 $\lambda I - A$ 相抵于 $\text{diag}\{1, (\lambda - 1)^2(\lambda + 2), \lambda + 2, 1, \lambda - 1\}$, 求它的所有初等因子.

解: 由引理7.7可知, 初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, \lambda + 2, \lambda + 2$.

引理 7.8 设 $A = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$, 则 A 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \cdots, J_{r_k}(\lambda)^{r_k}$.

证明:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda I - J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & \lambda I - J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I - J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

由引理7.6可推出 $\lambda I - J_{r_i}(\lambda_i) \sim \text{diag}\{1, \cdots, 1, (\lambda - \lambda_i)^{r_i}\}$, 因此

$$\lambda I - A \sim \text{diag}\{1, \cdots, 1, (\lambda - \lambda_1)^{r_1}; 1, \cdots, 1, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}; \cdots; 1, \cdots, 1, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}\},$$

由引理7.7可推出, A 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$. \square

定理 7.10 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, 则 A 相似于 $J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

证明: 由引理7.8可知 J 的初等因子组也为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, 从而

$$A \simeq J.$$

\square

定义 7.4 定理7.10中的 $J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$ 称为 A 的 Jordan 标准型, $J_{r_i}(\lambda_i)$ 称为 Jordan 块.

注 Jordan 标准型中, Jordan 块次序可以互换. 每个 Jordan 块由一个初等因子唯一确定.

$$J_r(\lambda_0) \longleftrightarrow (\lambda - \lambda_0)^r,$$

从而在不考虑 Jordan 块的次序时, Jordan 标准型由 A 唯一确定.

定理 7.11 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$, 则存在 V 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为 Jordan 标准型 $J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

推论 7.8 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则下列结论等价:

- (1) A 可对角化;
- (2) A 的极小多项式无重根;
- (3) A 的初等因子都是一次多项式.

证明: (1) \implies (2): 由例题6.1可得.

(2) \implies (3): 设 A 的不变因子组为 $1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$, 由有理标准型理论可知, A 的极小多项式为 $m(\lambda) = d_k(\lambda)$, 从而 $d_k(\lambda)$ 无重根, 因此 $d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$ 均无重根, 由此可推出, $d_i(\lambda)$ 的准素因子都是一次的, 即 A 的初等因子都是一次多项式.

(3) \implies (1): 设 A 的初等因子组为 $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n$, 由定理7.11可知,

$$A \simeq J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以, A 可对角化, 即 A 的 Jordan 块都是一阶的. □

命题 7.1 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$, V_o 是 φ 的不变子空间. 若 φ 可对角化, 则 $\varphi|_{V_o}$ 也可对角化.

证明: 设 φ 的极小多项式为 $m(\lambda)$, $\varphi|_{V_o}$ 的极小多项式为 $g(\lambda)$, 则

$$m(\varphi|_{V_o}) = m(\varphi)|_{V_o} = 0.$$

由极小多项式性质 $\implies g(\lambda) | m(\lambda)$

φ 可对角化、推论7.6 $\implies m(\lambda)$ 无重根 $\implies g(\lambda)$ 也无重根

$\xrightarrow{\text{推论7.6}} \varphi|_{V_o}$ 也可对角化. □

推论 7.9 若

$$M = \begin{pmatrix} A^{m \times m} & C^{m \times n} \\ O & B^{n \times n} \end{pmatrix}$$

可对角化, 则 A, B 均可对角化.

证明: 设 M 的极小多项式为 $m(\lambda)$, 则

$$0 = m(M) = \begin{pmatrix} m(A) & * \\ O & m(B) \end{pmatrix},$$

从而

$$m(A) = m(B) = 0.$$

由极小多项式性质可以推出

$$m_A(\lambda) \mid m(\lambda), m_B(\lambda) \mid m(\lambda).$$

由推论 7.6 $\implies m(\lambda)$ 无重根 $\implies m_A(\lambda), m_B(\lambda)$ 无重根 $\implies A, B$ 可对角化.

□

命题 7.2 $\varphi \in \mathcal{L}(V), V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k, V_i$ 为 φ 的不变子空间. 则

$$\varphi \text{ 可对角化} \iff \varphi|_{V_i} \text{ 均可对角化}.$$

证明: 必要性由命题 7.1 可得结论.

充分性 $\exists V_i$ 的一组基 $\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}\}$ s. t. $\varphi|_{V_i}$ 的表示矩阵为对角阵.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k \implies V_i \text{ 的基可拼成 } V \text{ 的一组基},$$

$\therefore \varphi$ 在每个 $\varphi|_{V_i}$ 的表示矩阵在对应的基下都是对角阵,

$\therefore \varphi$ 在这组基下的表示矩阵也为对角阵.

□

推论 7.10

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \dots \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

则 A 可对角化 $\iff A_1, A_2, \dots, A_k$ 均可对角化.

证明:

$$m_A(\lambda) = [m_{A_1}(\lambda), m_{A_2}(\lambda), \dots, m_{A_k}(\lambda)].$$

□

推论 7.11 设 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 的特征值全部在 \mathbb{K} 中, 则 A 在 \mathbb{K} 上相似于其 Jordan 标准型.

证明: 有定理 7.10 可推出, 在复数域上

$$A \simeq J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_K}(\lambda_K)\},$$

由相似关系的基域扩张不变形可知, 在数域 \mathbb{K} 上

$$A \simeq J.$$

□

例 7.4 A 的初等因子组为 $(\lambda - 1), (\lambda - 1)^3, (\lambda + 2)^2, (\lambda + 2)^3$, 求 A 的 Jordan 标准型.

解:

$$J = \text{diag} \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

例 7.5 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^4)$ 在基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

φ 在新基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 下的表示矩阵为 Jordan 标准型 J , 求过渡矩阵 P .

解:

$$P^{-1}AP = J,$$

$$\lambda I - A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{diag}\{1, 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2\},$$

所以 A 的初等因子组为 $(\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2$, 由此可算出

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,

$$P^{-1}AP = J \implies AP = PJ \implies (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} A\alpha_1 = \alpha_1 \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \implies (A - I_4)\alpha_2 = \alpha_1 \\ A\alpha_3 = \alpha_3 \\ A\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_4 \implies (A - I_4)\alpha_4 = \alpha_3 \end{cases} \implies \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\implies \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

设 V 是 n 维复线性空间, φ 是 V 上的线性变换. 设 φ 的初等因子组为

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_2)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \quad (7.23)$$

由定理 7.11 可知, 存在 V 的一组基 $\{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r_1}; e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2r_2}; \dots; e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kr_k}\}$, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

上式中每个 J_i 是相应于初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ 的 Jordan 块, 其阶正好为 r_i . 令 V_i 是由基元 $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir_i}$ 生成的子空间, 则

$$\begin{aligned} \varphi(e_{i1}) &= \lambda_i e_{i1}, \\ \varphi(e_{i2}) &= e_{i1} + \lambda_i e_{i2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(e_{ir_i}) &= e_{ir_i-1} + \lambda_i e_{ir_i}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

这表明 $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, 即 $V_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是 φ 的不变子空间, 且有

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

定理 7.12 线性变换 φ 的特征值 λ_1 的代数重数等于属于 λ_1 的 Jordan 块的阶数之和; λ_1 的几何重数等于属于 λ_1 的 Jordan 块的个数.

令 $\psi = \varphi - \lambda_i I_V$, 则(7.24)式可化为下式:

$$\begin{aligned} \psi(e_{i1}) &= 0, \\ \psi(e_{i2}) &= e_{i1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(e_{ir_i}) &= e_{ir_i-1}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

即有如下循环链:

$$e_{ir_i} \xrightarrow{\psi} e_{ir_i-1} \xrightarrow{\psi} e_{ir_i-2} \xrightarrow{\psi} \dots \xrightarrow{\psi} e_{i2} \xrightarrow{\psi} e_{i1} \xrightarrow{\psi} 0.$$

从而

$$\{e_{ir_i}, \psi(e_{ir_i}), \dots, \psi^{r_i-1}(e_{ir_i})\}$$

构成了 V_i 的一组基. 从以下定义可知, V_i 是关于 $\psi = \varphi - \lambda_i I_V$ 的循环子空间.

定义 7.5 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, V_0 是 r 维 φ -不变子空间. 若存在 $0 \neq \alpha \in V_0$ 使得 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 是 V_0 的一组基, 则称 V_0 为关于 φ 的循环子空间, α 称为循环向量.

引理 7.9 设 $R(\lambda_1) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 则

$$R(\lambda_1) = \ker(\varphi - \lambda_1 I_V)^n = \{v \in V \mid (\varphi - \lambda_1 I_V)^n(v) = 0\}.$$

证明: 先证 $R(\lambda_1) \subseteq \ker(\varphi - \lambda_1 I_V)^n$:

任取 $v \in R(\lambda_1), v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s, v_i \in V_i$, 则 V_i 的基有如下循环链:

$$e_{ir_i} \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} e_{ir_i-1} \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} e_{ir_i-2} \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} \cdots \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} e_{i2} \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} e_{i1} \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 I_V} 0.$$

可得以下结论:

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda_1 I_V)^{r_i}(e_{ij}) &= 0, \forall j \implies (\varphi - \lambda_1 I_V)^{r_i}(v_i) = 0 \\ \implies (\varphi - \lambda_1 I_V)^n(v) &= (\varphi - \lambda_1 I_V)^n(v_1) + \cdots + (\varphi - \lambda_1 I_V)^n(v_s) = 0 \end{aligned}$$

上式中的 n 可缩小到 $\max\{r_1, r_2, \cdots, r_s\}$.

再证 $\ker(\varphi - \lambda_1 I)^n \subseteq R(\lambda_1)$:

设 $v \in V$ 在上述基下的坐标向量 $x = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}, \cdots)'$, 求 $(J - \lambda_1 I_n)^n x = 0$ 的解.

$$(J_{r_i}(\lambda_i) - \lambda_1 I_{r_i})^n = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_i - \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i - \lambda_1 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} 0, 1 \leq i \leq s \\ \text{非异}, s < i \leq k \end{cases}$$

由上式可推出

$$\begin{cases} x_{i1} - x_{i2} = \cdots = x_{ir_i} = 0, s < i \leq k \\ (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}; \cdots; x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sr_s}) \text{ 为任意解} \end{cases}$$

由上式可得

$$\ker(\varphi - \lambda_1 I)^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s = R(\lambda_1).$$

□

定义 7.6 $R(\lambda_1) = \ker(\varphi - \lambda_1 I)^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 称为特征值 λ_1 的根子空间.

注 (1) $R(\lambda_1) = \ker(\varphi - \lambda_1 I)^m, m = \max\{r_1, r_2, \cdots, r_s\}$ 或 m 为 λ_1 的代数重数.

(2) 特征子空间 $V_{\lambda_1} = \ker(\varphi - \lambda_1 I_V) \subseteq R(\lambda_1)$.

推论 7.12 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$ 可对角化 \iff 对任意特征值 $\lambda_0, R(\lambda_0) = V_{\lambda_0}$.

证明:

$$\begin{aligned} \forall \lambda_0, R(\lambda_0) = V_{\lambda_0} &\iff \dim R(\lambda_0) = \dim V_{\lambda_0} \\ &\iff \lambda_0 \text{ 的代数重数} = \text{几何重数} \\ &\iff \varphi \text{ 有完全的特征向量系} \iff \varphi \text{ 可对角化} \end{aligned}$$

□

定理 7.13 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$.

(1) 设 φ 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, (\lambda - \lambda_1)^{r_2}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{r_k}$, 则 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_K$, V_i 是关于 $\varphi - \lambda_i I_V$ 的循环子空间;

(2) 设 φ 的不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 则 $V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \dots \oplus R(\lambda_s)$.

评论 矩阵问题, 如果条件和结论在相似关系不改变, 则可将此问题化简到 Jordan 标准型, 进一步化简到 Jordan 块进行证明.

三段论: Jordan 块成立 \implies Jordan 标准型成立 \implies 一般矩阵成立.

例 7.6 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 $A = BC$, 其中 B, C 为对称阵.

证明: \forall 非异阵 P s. t. $P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$,

$$J_{r_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & 1 & \lambda_i & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \ddots & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} = S_i \cdot T_i.$$

令

$$S = \text{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_k\}, T = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_k\} \\ \implies J = S \cdot T$$

上式中, S, T 为对称阵.

$$\therefore A = PJP^{-1} = PSTP^{-1} = (PSP')((P^{-1})'TP^{-1}),$$

上式中, PSP' 和 $(P^{-1})'TP^{-1}$ 皆为对称阵.

□

例 7.7 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 求 $A^k (k \geq 1)$.

解: \exists 非异阵 P s. t. $P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \dots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$,

$$A^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1} = P \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)^k, \dots, J_{r_k}(\lambda_k)^k\}P^{-1}, \quad (7.26)$$

$$J_n(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I_n + N \quad (7.27)$$

$$N = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \implies N^n = 0 \quad (7.28)$$

N 为幂零矩阵, 且有如下性质:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

因为 I 与 N 可互相交换位置相乘结果不变, 所以

$$\begin{aligned} J_n(\lambda_0)^k &= (\lambda_0 I_n + N)^k, k \geq n-1 \\ &= \lambda_0^k I_n + C_k^1 \lambda_0^{k-1} N + C_k^2 \lambda_0^{k-2} N^2 + \dots + C_k^{n-1} \lambda_0^{k-n+1} N^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0^k & C_k^1 \lambda_0^{k-1} & C_k^2 \lambda_0^{k-2} & \dots & C_k^{n-1} \lambda_0^{k-n+1} \\ & \lambda_0^k & C_k^1 \lambda_0^{k-1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & C_k^2 \lambda_0^{k-2} \\ & & & \ddots & C_k^1 \lambda_0^{k-1} \\ & & & & \lambda_0^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.30)$$

上式中如果 $k < n-1$, 则右上角某些斜排会全为 0, 且 k 越小, 右上角的 0 斜行会越多. 将上式代入(7.26)式右边, 替换各 $J_{r_i}(\lambda_i)$, 即可求出 A^k .

引理 7.10 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, A, B 均可对角化, 且 $AB = BA$, 则 A, B 可同时对角化, 即 \exists 非异阵 P s.t. $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 均为对角阵.

证明: 将引理换成几何语言: $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$, φ, ψ 可对角化且 $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, 则 φ, ψ 可同时对角化, 即 \exists 公共基 s.t. φ, ψ 表示矩阵都为对角阵.

对维数 n 进行归纳. $n=1$ 时, 显然成立. 设维数 $< n$ 时成立, 现证维数为 n 时的情形.

设 φ 的全体特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$:

Case 1: 若 $s=1 \implies \varphi = \lambda_1 I_V$ 为纯量阵.

ψ 可对角化 $\implies \exists$ 一组基 $\{e_1, \dots, d_n\}$ s.t. ψ 的表示矩阵为对角阵.

由于纯量变换在任何基下表示矩阵都为对角阵, \therefore 在基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下 φ 的表示矩阵也为对角阵.

Case 2: $s > 1$, 设 φ 的各特征子空间为 V_1, \dots, V_s .

$$\varphi \text{ 可对角化} \implies V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s \implies \dim V_i < n$$

下面证明 $\varphi\psi = \psi\varphi \implies V_i$ 都是 ψ -不变子空间:

\therefore 任取 $v_i \in V_i$, 即 $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$,

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(v_i)) &= \psi(\varphi(v_i)) = \psi(\lambda_i v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \\ \implies \psi(v_i) &\in V_i \end{aligned}$$

做限制: $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 都可对角化.

$$\therefore \varphi\psi = \psi\varphi \implies \varphi|_{V_i}\psi|_{V_i} = \psi|_{V_i}\varphi|_{V_i},$$

由归纳假设可知, $\exists V_i$ 的一组基 s. t. $\varphi|_{V_i}, \psi|_{V_i}$ 在该基下的表示矩阵为对角阵.

将 V_i 的基拼成 V 的基, φ, ψ 的表示矩阵均为对角阵. □

定理 7.14 (Jordan-Chevalley 分解定理) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 $A = B + C$, 其中:

- (1) B 可对角化;
- (2) C 为幂零阵;
- (3) $BC = CB$;
- (4) B, C 均可表示为 A 的多项式.

并且满足条件 (1) (3) 的分解必定唯一.

证明: 先证存在性: 设 P 为非异阵 s. t. $P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 A 的全体不同特征值, J_1, J_2, \dots, J_s 是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 对应的根子空间的块.

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_i) & & \\ & J_{r_2}(\lambda_i) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{r_k}(\lambda_i) \end{pmatrix} = \lambda_i I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

上式右边 $\lambda_i I$ 为纯量阵可对角化, 令其为 M_i ; 上式右边最后的矩阵主对角线上全部为 0, 上次对角线上在 Jordan 块交界处的元素为 0, 其余元素全部为 1, 显然为幂零阵, 令其为 N_i . 又因为纯量

阵与其他方阵相乘时皆可交换位置, 所以 $M_i N_i = N_i M_i$. 令

$$M = \text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_s\}, N = \text{diag}\{N_1, N_2, \dots, N_s\},$$

则 M 为对角阵, N 为幂零阵, 且

$$MN = NM, J = M + N.$$

$$J_i \text{ 的特征多项式 } = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \xrightarrow{\text{Cayley-Hamilton 定理}} (J_i - \lambda_i I)^{m_i} = 0, \quad (7.31)$$

又因为 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ 两两互素, 根据中国剩余定理可知:

$$\exists g(\lambda) \text{ s. t. } g(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} q_i(\lambda) + \lambda_i, \forall 1 \leq i \leq s.$$

将 J_i 代入上式可得:

$$g(J_i) = (J_i - \lambda_i I)^{m_i} q_i(J_i) + \lambda_i I$$

由(7.31)式可知 $(J_i - \lambda_i I)^{m_i} = 0$, 代入上式可得:

$$g(J_i) = \lambda_i I = M_i$$

所以

$$g(J) = \text{diag}\{g(J_1), \dots, g(J_s)\} = \text{diag}\{M_1, \dots, M_s\} = M,$$

$$N = J - M = J - g(J),$$

从而 M, N 均可表示为 J 的多项式. 所以

$$A = PJP^{-1} = P(M + N)P^{-1} = PMP^{-1} + PNP^{-1},$$

令 $B = PMP^{-1}, C = PNP^{-1}$, 则 A 仍为可对角化矩阵, B 仍为幂零矩阵.

$$BC = (PMP^{-1})(PNP^{-1}) = PMNP^{-1} = PNMP^{-1} = (PNP^{-1})(PMP^{-1}) = CB.$$

$$g(A) = g(PJP^{-1})Pg(J)P^{-1} = PMP^{-1} = B, C = A - B = A - g(A).$$

从而 B, C 均可表示为 A 的多项式.

再证唯一性: 设 $A = B_1 + C_1$ 满足条件 (1) (3).

$$B_1 C_1 = C_1 B_1 \implies AB_1 = (B_1 + C_1)B_1 = B_1^2 + C_1 B_1 = B_1^2 + B_1 C_1 = B_1(B_1 + C_1) = B_1 A.$$

$$B = g(A) \implies BB_1 = B_1 B,$$

同理可推出 $CC_1 = C_1 C$.

$$A = B + C = B_1 + C_1 \implies B - B_1 = C_1 - C.$$

令 $C_1^r = 0, C^s = 0$, 则

$$(C_1 - C)^{r+s} = \sum_{i+j=r+s} C_{r+s}^i C_1^i C^j$$

上式中, 若 $i \geq r$, 则 $C_1^i = 0$, 若 $j \geq s$, 则 $C^j = 0$; 且若 $i \leq r$, 则 $j \geq s$, 若 $j \leq s$, 则 $i \geq r$.

$$\therefore (C_1 - C)^{r+s} \equiv 0,$$

同理可得 $(B - B_1)^{r+s} \equiv 0$. 由引理7.10可知, \exists 非异阵 P s. t.

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, P^{-1}B_1P = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= P^{-1}(B - B_1)^{r+s}P = (P^{-1}BP - P^{-1}B_1P)^{r+s} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 - b_1)^{r+s} & & & \\ & (a_2 - b_2)^{r+s} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (a_n - b_n)^{r+s} \end{pmatrix} \\ &\implies a_i = b_i, \forall i \implies B = B_1. \end{aligned}$$

同理可证 $C_1 = C$. □

7.8 Jordan 标准型练习题

7.8.1 TOPIC 1

如何合理选取特征向量求出广义特征向量.

例 7.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, 求 P s. t. $P^{-1}AP$ 为 Jordan 型.

解: 经计算可得 A 的初等因子组为 $(\lambda + 1), (\lambda + 1)^2$, 由此可推出 A 的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由 $AP = PJ$ 可得

$$A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = -\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3.$$

由上式可知, α_1, α_2 是 A 的特征向量且

$$(A + I_3)\alpha_3 = \alpha_2 \tag{7.32}$$

其中 α_3 即广义特征向量.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies A \text{ 的两个无关特征向量为 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 β_1 或 β_2 代入(7.32)式代替 α_2 , 例如

$$(A + I_3 \mid \beta_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 5 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

上式代表的线性方程组无解, 将 β_1 代入也同样无解.

令 $\alpha_2 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = (-2k_1 + 5k_2, k_1, k_2)$, 要使(7.32)式有解, 则

$$\text{rank} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & -2k_1 + 5k_2 \\ 1 & 2 & -5 & k_1 \\ 1 & 2 & -5 & k_2 \end{array} \right) = 1 \implies k_1 = k_2.$$

因此, 可令 $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = (3, 1, 1)$, 可解出 $\alpha_3 = (1, 0, 0)'$, 令 $\alpha_1 = \beta_1$, 可求出

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.8.2 TOPIC 2

带参数矩阵 Jordan 标准型的确定.

- (1) 选取特殊子式求出行列式因子;
- (2) 计算几何重数以确定 Jordan 块的个数;
- (3) 计算极小多项式以确定最大 Jordan 块的阶数.

例 7.9 (教材 P303 第 3 题) 求下列 n 阶上三角阵的行列式因子和不变因子:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

解: 方法一:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \lambda - a & -1 & \cdots & -1 \\ & & \lambda - a & \cdots & -1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda - a \end{pmatrix},$$

$$(\lambda I - A) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} = (\lambda - a)^{n-1}, \quad (7.33)$$

$$(\lambda I - A) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = g(\lambda). \quad (7.34)$$

因为 $g(a) = (-1)^{n-1} \neq 0$, 所以(7.33)式和(7.34)式无公根, 从而(7.33)式和(7.34)式互素. 由此可知,

$D_{n-1}(\lambda) = 1, D_n(\lambda) = (\lambda - a)^n \implies A$ 的行列式因子为 $1, \cdots, 1, (\lambda - a)^n$, Jordan 标准型为 $J_n(a)$.

方法二:

A 的特征值为 a , 代数重数为 n , 其几何重数 $= n - \text{rank}(A - aI_n) = n - (n - 1) = 1$. 由此可知 A 的 Jordan 块的个数为 1, 其 Jordan 标准型为 $J_n(a)$.

方法三:

A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - a)^n$, 设其极小多项式为 $m(\lambda) = (\lambda - a)^k, k \leq n$.

$$\begin{aligned} A &= aI_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}, \text{ 其中 } N = J_n(0) \\ \implies (A - aI_n)^{n-1} &= (N + N^2 + \cdots + N^{n-1})^{n-1} = N^{n-1} \neq 0 \\ \implies m(\lambda) &= (\lambda - a)^n \\ \implies A \text{ 的不变因子为 } &1, \cdots, 1, (\lambda - a)^n \\ \implies A \text{ 的 Jordan 标准型为 } &J_n(a). \end{aligned}$$

例 7.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a+2 & 1 & & \\ 5 & 3 & 1 & \\ 7 & 6 & b+4 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A 的 Jordan 标准型.

解: A 的特征值全为 1,

$$\text{特征值 1 的几何重数} = 4 - \text{rank}(A - I_4) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a+2 \neq 0 \text{ 且 } b+4 \neq 0 \\ 2, & \text{若 } a+2 = 0 \text{ 或 } b+4 = 0 \end{cases}$$

当几何重数为 1 时, 只有一个 Jordan 块, $J = J_4(1)$.

当几何重数为 2 时, 有两个 Jordan 块, 设

$$J = \text{diag}\{J_k(1), J_l(1)\}, \text{ 其中 } 1 \leq k \leq l, k + l = 4 \implies 2 \leq l \leq 3,$$

此时, 如果 $l = 2$, 则将 A 代入极小多项式 $(\lambda - 1)^2$ 将等于 0, 否则 $l = 3$.

$$\begin{aligned} (A - I_4)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3(a+2) & 0 & 0 & 0 \\ 6(a+2) + 5(b+4) & 3(b+4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } a+2=0 \text{ 且 } b+4=0 \implies k=l=2 \implies J = \text{diag}\{J_2(1), J_2(1)\} \\ \neq 0, & \text{若 } a+2=0 \text{ 和 } b+4=0 \text{ 之一成立} \implies k=1, l=3 \implies J = \text{diag}\{1, J_3(1)\} \end{cases} \end{aligned}$$

7.8.3 TOPIC 3

循环子空间的应用

定义 7.7 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{K}}^n)$, $0 \neq \alpha \in V$, 由 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots\}$ 张成的子空间记为 $C(\varphi, \alpha)$, 称为 φ 关于循环向量 α 的循环子空间.

引理 7.11 设 $\dim C(\varphi, \alpha) = m$, 则 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)\}$ 是 $C(\varphi, \alpha)$ 的一组基.

证明: 设 $k = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ \mid \alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{i-1}(\alpha) \text{ 线性无关}\}$

$$\begin{aligned} &\implies \begin{cases} \alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha) \text{ 线性无关} \\ \alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha), \varphi^k(\alpha) \text{ 线性相关} \end{cases} \\ &\implies \varphi^k(\alpha) \text{ 是 } \alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha) \text{ 的线性组合} \end{aligned}$$

用数学归纳法可证明: $\forall i \geq k, \varphi^i(\alpha)$ 是 $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)$ 的线性组合,

$$\begin{aligned} &\implies \{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{k-1}(\alpha)\} \text{ 是 } C(\varphi, \alpha) \text{ 的一组基} \\ &\implies \dim C(\varphi, \alpha) = k = m. \end{aligned}$$

□

注 设

$$\varphi^m(\alpha) = -a_0\alpha - a_1\varphi(\alpha) - \dots - a_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha),$$

令

$$g(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0 \in k[x].$$

$C(\varphi, \alpha)$ 实际上是包含 α 的最小的 φ -不变子空间, $\varphi|_{C(\varphi, \alpha)}$ 在基 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)\}$ 下的表示矩阵为

$$F = F(g(\lambda)) = \begin{pmatrix} & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix},$$

即 $g(x)$ 的友阵.

例 7.11 (1) $\varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha, (\lambda_0 \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0)$, 则 $C(\varphi, \alpha) = L(\alpha)$.

(2) $\varphi(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ 且互异, $\alpha \neq 0$, 令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, 则 $C(\varphi, \alpha) = V$.

(3) $\varphi \in \mathcal{L}(V_k^n)$, 不变因子为 $1, \dots, 1, d_1(\lambda), \dots, d_k(\lambda)$, 则

$$\exists \text{ 一组基 } \{e_1, \dots, e_n\} \text{ s. t. } \varphi \text{ 的表示矩阵为 } F = \text{diag}\{F(d_1(\lambda)), \dots, F(d_k(\lambda))\}. \quad (7.35)$$

如果一个线性映射的表示矩阵为一个友阵, 则其特征子空间必是循环子空间.

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3, \dots, \varphi(e_{n-1}) = e_n,$$

$$\varphi(e_n) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-1} e_n$$

$$e_1 \xrightarrow{\varphi} e_2 \xrightarrow{\varphi} e_3 \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} e_n \xrightarrow{\varphi} -\sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i$$

$$\text{由 (7.35)} \implies V = C(\varphi, e_{i1}) \oplus C(\varphi, e_{i2}) \oplus \dots \oplus C(\varphi, e_{ik})$$

(4) $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$, 初等因子为 $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \dots, (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \exists$ 一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ s. t. φ 的表示矩阵为 $J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_k}(\lambda_k)\} \implies V = C(\varphi - \lambda_1 I e_{i_1}) \oplus C(\varphi - \lambda_2 I e_{i_2}) \oplus \dots \oplus C(\varphi - \lambda_k I e_{i_k})$.

命题 7.3 设 $V = C(\varphi, \alpha)$ 为循环空间, $\psi \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 则

(1) ψ 由 $\psi(\alpha)$ 的值唯一决定;

(2) $\exists g(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ s. t. $\psi = g(\varphi)$.

证明: (1) $V = C(\varphi, \alpha)$ 的基为 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{n-1}(\alpha)\}$, ψ 由 ψ 在基上的作用唯一决定.

$$\begin{aligned} \psi(\varphi^i(\alpha)) &= \varphi^i(\psi(\alpha)), 0 \leq i \leq n-1 \\ \implies \psi &\text{ 由 } \psi(\alpha) \text{ 唯一决定.} \end{aligned}$$

(2)

$$\psi(\alpha) = a_0 \alpha + a_1 \varphi(\alpha) + \dots + a_{n-1} \varphi^{n-1}(\alpha),$$

令 $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$,

$$\left. \begin{array}{l} \psi, g(\varphi) \text{ 可交换} \\ \psi(\alpha) = g(\varphi)(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi = g(\varphi).$$

□

推论 7.13 $A = F(g(\lambda)), AB = BA$, 则 $B = g(A)$.

推论 7.14 $A = J_n(\lambda_0), AB = BA$, 则 $B = g(A)$.

7.9 矩阵函数

定理 7.15 幂级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < r$ 时逐项可导, 即

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且 $f'(x)$ 的收敛半径也是 r .

定义 7.8 $f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_pz^p \in \mathbb{C}[z], A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_0I_n + a_1A + \cdots + a_pA^p$.

设 P 为非异阵 s. t. $P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\}$, 则

$$f(A) = f(PJP^{-1}) = Pf(J)P^{-1} = P \text{diag}\{f(J_{r_1}(\lambda_1)), \cdots, f(J_{r_k}(\lambda_k))\}P^{-1},$$

其中

$$J_{r_i}(\lambda_i) = \lambda_i I + N, N = J_{r_i}(0), N^{r_i} = 0.$$

在 $z = \lambda_i$ 处对 $f(z)$ 进行泰勒展开:

$$f(z) = f(\lambda_i) + \frac{f'(\lambda_i)}{1!}(z - \lambda_i) + \cdots + \frac{f^{(p)}(\lambda_i)}{p!}(z - \lambda_i)^p,$$

将 $z = J_{r_i}(\lambda_i), J_{r_i}(\lambda_i) = \lambda_i I + N$ 代入上式可得

$$f(J_{r_i}(\lambda_i)) = f(\lambda_i)I + \frac{f'(\lambda_i)}{1!}N + \cdots + \frac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!}N^{r_i-1} = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(r_i-2)}(\lambda_i)}{(r_i-2)!} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

例 7.12 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 求 e^{tA} , 其中 t 是数值变量.

解: 设 $f(z) = e^{tz}$, 则 $f^{(i)}(z) = t^i e^{tz}$, 再设

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1), \cdots, J_{r_k}(\lambda_k)\},$$

则

$$e^{tA} = f(z) = Pf(J)P^{-1} = P\{f(J_{r_1}(\lambda_1)), \dots, f(J_{r_k}(\lambda_k))\}P^{-1}, \quad (7.37)$$

上式中 $f(J_{r_i}(\lambda_i)) = e^{tJ_{r_i}(\lambda_i)}$, 根据(7.36)式可得

$$\begin{aligned} f(J_{r_i}(\lambda_i)) = e^{tJ_{r_i}(\lambda_i)} &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda_i} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda_i} & \dots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{t\lambda_i} \\ & e^{t\lambda_i} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda_i} & \dots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!}e^{t\lambda_i} \\ & & e^{t\lambda_i} & \dots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!}e^{t\lambda_i} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix} \\ &= e^{t\lambda_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ & & 1 & \dots & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

将每个(7.38)式代入(7.37)式, 即可求出 e^{tA} 的表达式.

8 二次型

8.1 二次型的化简与矩阵的合同

引理 8.1 下列变换都是合同变换, 称为对称的初等变换:

- (1) 对换 A 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列, 即 $P_{ij}AP_{ij}, P'_{ij} = P_{ij}$;
- (2) A 的第 i 行乘以常数 C , 再将第 i 列乘以常数 C , 即 $P_i(C)AP_i(C), P'_i(C) = P_i(C)$;
- (3) A 的第 i 行乘以常数 C 加到第 j 行上, 再将第 i 列乘以常数 C 加到第 j 列上, 即

$$T_{ij}(C)AT_{ji}(C), T'_{ij}(C) = T_{ji}(C).$$

引理 8.2 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的非零对称阵, 则必存在非异阵 C , 使 $C'AC$ 的第 $(1, 1)$ 元素不等于零.

证明: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $a_{11} \neq 0$, 则结论成立;

下设 $a_{11} = 0$, 若 $\exists 2 \leq i \leq n$ s. t. $a_{ii} \neq 0$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{ii} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{ij}AP_{ij}]{\text{第(1)类合同变换}} \begin{pmatrix} a_{ii} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}; \quad (8.1)$$

下设 $\forall i, a_{ii} = 0$, 由 $A \neq 0$ 可知 $\exists a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n$, 则

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ji} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[T_{ji}(1)AT_{ij}(1)]{\text{第(3)类合同变换}} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & 2a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ji} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

再重复(8.1)式的操作即可得结论. □

定理 8.1 设 A 是数域 \mathbb{K} 上的 n 阶对称阵, 则必存在 \mathbb{K} 上的 n 阶非异阵 C , 使 $C'AC$ 为对角阵.

推论 8.1 合同变换是若干次对称初等变换的复合.

证明: 设矩阵 A 可通过合同变换 $C'AC$ 化为对角阵, 其中 C 为非异阵.

$\because C$ 为非异阵, 故可令 $C = P_1P_2 \cdots P_r, P_i$ 为初等矩阵,

$$\therefore C'AC = (P_1P_2 \cdots P_r)'A(P_1P_2 \cdots P_r) = (P'_r \cdots (P'_2(P'_1AP_1)P_2) \cdots P_r) \quad (8.2)$$

□

定义 8.1 下列变换为合同变换, 称为分块对称初等变换:

- (1) 对换 A 的第 i 分块行与第 j 分块行, 再对换第 i 分块列与第 j 分块列, 即 $P_{ij}AP'_{ij}$;
- (2) 第 i 分块行左乘非异阵 M , 第 i 分块列右乘 M' , 即 $P_i(M)AP_i(M')$, $P'_i(M) = P_i(M')$;
- (3) A 的第 i 分块行左乘矩阵 M 加到第 j 分块行上, 第 i 分块列右乘 M' 加到第 j 分块列上, 即 $T_{ij}(M)AT_{ji}(M')$, $T_{ij}(M)' = T_{ji}(M')$.

8.2 二次型的化简

8.2.1 配方法

基本公式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

步骤 (1) 将含 x_1 的所有项凑成完全平方 (消去 x_1);

(2) 剩余项中将含 x_2 的所有项凑成完全平方 (消去 x_2);

.....

(n-1) 剩余项中将含 x_{n-1} 的所有项凑成完全平方.

8.2.2 对称初等变换法

A 为对称阵, 则 \exists 非异阵 C s. t. $C'AC = \Lambda$ 为对角阵, C 的形式如(8.2)所示.

方法 (1) 构造一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $\left(A \middle| I_n \right)$, 对该矩阵整体实施行变换;

(2) 对左边的分块矩阵 A 实施对称的列变换, 直到左边的分块矩阵变为对角阵 Λ , 此时右边的分块阵是过渡阵 C 的转置, 即 C' .

$$\begin{aligned} \left(A \middle| I_n \right) &\xrightarrow[\text{整体实施行变换}]{\text{整体左乘 } P'_1} \left(P'_1 A \middle| P'_1 \right) \xrightarrow[\text{对左边分块矩阵实施对称的列变换}]{\text{仅对左边分块矩阵右乘 } P_1} \left(P'_1 A P_1 \middle| P'_1 \right) \\ &\xrightarrow{\text{多次实施对称初等变换}} \dots \longrightarrow \left(P'_r \dots P'_2 P'_1 A P_1 P_2 \dots P_r \middle| P'_r \dots P'_2 P'_1 \right) \end{aligned}$$

此时, 左边的分块矩阵即为对角阵 Λ , 右边的分块矩阵即为 C' .

8.3 惯性定理

8.3.1 实二次型

设是对称阵 $A = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0\}$, 把正项和负项分别放在一起, 可设 $d_1 > 0, \dots, d_p > 0; d_{p+1} < 0, \dots, d_r < 0$. A 所代表的二次型为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2. \quad (8.3)$$

令

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{d_1} x_1, \dots, y_p = \sqrt{d_p} x_p; \\ y_{p+1} &= \sqrt{-d_{p+1}} x_{p+1}, \dots, y_r = \sqrt{-d_r} x_r; \\ y_j &= x_j (j = r+1, \dots, n), \end{aligned}$$

则(8.3)式变为

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2. \quad (8.4)$$

该事实等价于 A 合同于下列对角阵:

$$\text{diag}\{1, \dots, 1; -1, \dots, -1; 0, \dots, 0\}, \quad (8.5)$$

上式中有 p 个 1, q 个 -1 , $n-r$ 个零. (8.4)式中的二次型称为 f 的规范标准型.

定理 8.2 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个 n 元实二次型, 且 f 可化为两个标准型:

$$\begin{aligned} c_1 y_1^2 + \dots + c_p y_p^2 - c_{p+1} y_{p+1}^2 - \dots - c_r y_r^2, \\ d_1 z_1^2 + \dots + d_k z_k^2 - d_{k+1} z_{k+1}^2 - \dots - d_r z_r^2, \end{aligned}$$

其中 $c_i > 0, d_i > 0$, 则必有 $p = k$.

定义 8.2 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个实二次型, 若它能化为形如(8.4)式的形状, 则称 r 是该二次型的秩, p 是它的正惯性指数, $q = r - p$ 是它的负惯性指数, $s = p - q$ 称为 f 的符号差.

定理 8.3 秩与符号差 (或正负惯性指数) 是对称阵在合同关系下的全系不变量.

8.3.2 复二次型

因为复二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2$$

必可化为

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2,$$

其中 $z_i = \sqrt{d_i} x_i (i = 1, 2, \dots, r), z_j = x_j (j = r+1, \dots, n)$. 所以复对称阵的合同关系只有一个全系不变量, 那就是秩 r .

8.4 正定型与正定矩阵

例 8.1

- | | |
|---|------|
| (1) $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ | 正定型 |
| (2) $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 (r \leq n)$ | 半正定型 |
| (3) $f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ | 负定型 |
| (4) $f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_r^2 (r \leq n)$ | 半负定型 |
| (5) $f = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 (1 \leq p < r \leq n)$ | 不定型 |

定理 8.4 设实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的秩为 r , 正负惯性指数分别为 p, q , 则

- (1) f 正定 $\iff p = n$;
- (2) f 半正定 $\iff p = r$;
- (3) f 负定 $\iff q = n$;
- (4) f 半负定 $\iff q = r$;
- (5) f 不定 $\iff p > 0$ 且 $q > 0$.

证明: (1) 充分性: 设 $p = n$, 则存在非异线性变换

$$x = Cy \text{ s.t. } f = y_1^2 + y_2^2 = \cdots + y_n^2.$$

任取 $0 \neq \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}$, 从而

$$\beta = C^{-1}\alpha \text{ 是非零实列向量, } \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)',$$

则

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 > 0 \implies f \text{ 正定}.$$

必要性: 用反证法, 设 $p < n$, 则 \exists 非异线性变换 $x = Cy$ 使得

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 (p \leq r).$$

令

$$b_1 = \cdots = b_p = 0, b_{p+1} = \cdots = b_n = 1,$$

从而 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是非零实列向量, 故

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' = C\beta \neq 0 \text{ 是非零列向量,}$$

于是

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = b_1^2 + \cdots + b_p^2 - b_{p+1}^2 - \cdots - b_r^2 \leq 0,$$

这与 f 是正定型矛盾.

(2)(3)(4)(5) 可类似证明.

□

定理 8.5 设 A 为实对称阵, $\text{rank}(A) = r$, 则

- (1) A 正定阵 $\Leftrightarrow A$ 合同于 I_n ;
- (2) A 半正定阵 $\Leftrightarrow A$ 合同于 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$;
- (3) A 负定阵 $\Leftrightarrow A$ 合同于 $-I_n$;
- (4) A 半负定阵 $\Leftrightarrow A$ 合同于 $\begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$;
- (5) A 不定阵 $\Leftrightarrow A$ 合同于 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix}$.

评论

$$\begin{array}{lll} f(A) \text{ 负定} & \Leftrightarrow & -f(-A) \text{ 正定;} \\ f(A) \text{ 半负定} & \Leftrightarrow & -f(-A) \text{ 半正定.} \end{array}$$

定理 8.6 设 A 为 n 阶是对称阵, 则

$$A \text{ 正定} \Leftrightarrow A \text{ 的 } n \text{ 个顺序主子式全大于零.}$$

证明: 必要性: 设 $A = (a_{ij})$ 为正定阵, 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = x'Ax = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

为正定型, 令

$$f_k(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k a_{ij}x_i x_j$$

f_k 的相伴对称矩阵为 A_k , 对 $\forall 0 \neq (C_1, C_2, \dots, C_k)' \text{ in } \mathbb{R}^k$, 有

$$f_k(C_1, C_2, \dots, C_k) = f(C_1, \dots, C_k, 0, \dots, 0) > 0,$$

注意到 $(C_1, C_2, \dots, C_k, 0, \dots, 0)'$ 为非零 n 维列向量, 由此可知

$$f_k \text{ 为正定型} \Leftrightarrow A_k \text{ 为正定阵} (1 \leq k \leq n).$$

由定理 8.5(1) 可知, 存在非异阵 $B_k \in M_k(\mathbb{R})$ s. t.

$$\begin{aligned} B_k' A_k B_k &= I_k \implies 1 = |I_k| = |B_k' A_k B_k| = |B_k|^2 \cdot |A_k| \\ \implies |A_k| &> 0 (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

充分性: 设 A 的 n 个顺序主子式全大于零, 对 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{11}) \Leftrightarrow f = a_{11}x_1^2$, 由 $a_{11} > 0$ 可知 $f = a_{11}x_1^2$ 为正定型, 即 A 为正定型. 设阶数 $< n$ 时结论成立, 现证 n 阶的情形. 此时 A 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一分块行乘以 } -\alpha' A_{n-1}^{-1} \text{ 加到第二分块行}} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第一分块列乘以 } -A_{n-1}^{-1} \alpha \text{ 加到第二分块列}} \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

A_{n-1} 的 $n-1$ 个顺序主子式是 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式, 从而它们全大于零, 由归纳假设可知 A_{n-1} 为正定阵. 上式是合同变换, 属于第三类分块对称初等变换, 所以不改变行列式的值. 因此

$$|A| = |A_{n-1}| \cdot (a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha) = |B|.$$

上式中,

$$\because |A| > 0, |A_{n-1}| > 0, \therefore \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha > 0.$$

因为 A_{n-1} 正定, 故存在非异阵 $C_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ s. t. $C_{n-1}' A_{n-1} C_{n-1} = I_{n-1}$, 因此

$$\begin{pmatrix} C_{n-1}' & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} C_{n-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \\ \implies A \text{ 的正惯性指数} = n$$

即 A 为正定阵. □

例 8.2 试求 t 的取值范围, 使下列二次型为正定型:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

解: 该二次型的相伴矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & 0 \\ t & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A 的顺序主子式为

$$|A_1| = 1 > 0, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4(t-1)(t+2), |A_4| = -12(t-1)(t+2).$$

要使 A 正定, 必须

$$\begin{cases} 4 - t^2 > 0 \\ -4(t-1)(t+2) > 0 \end{cases}$$

解得 $-2 < t < 1$.

推论 8.2 设 A 为 n 阶正定实对称阵, 则

- (1) A 的所有主子阵都是正定阵;
- (2) A 的所有主子式全大于零, 特别地, 主对角元素全大于零;
- (3) A 中之元素绝对值最大值只出现在主对角线上.

证明: (1) 取 A 中第 i_1, i_2, \dots, i_k 行、列构成主子阵 B , 设 A 对应的相伴二次型为

$$f(x_1, \dots, x_n) = x'Ax,$$

令

$$f_B(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \stackrel{\text{def}}{=} f(0, \dots, 0, x_{i_1}, 0, \dots, 0, x_{i_2}, 0, \dots, 0, x_{i_k}).$$

由 f 正定 $\implies f_B$ 正定 \implies 相伴矩阵 B 正定.

(2) 是 (1) 的推论.

(3) 用反证法: 设绝对值最大的元素为 $|a_{ij}|$, 其中 $i < j$. 考虑 2 阶主子式

$$A \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2, \quad (8.6)$$

$$\because |a_{ij}| \geq a_{ii} > 0, |a_{ij}| \geq a_{jj} > 0, \therefore (8.6) \text{ 式小于零.}$$

这和 (2) 矛盾. □

推论 8.3 设 A 为 n 阶正定实对称阵, 则 A 的特征值全大于零.

证明: 事实: 设

$$\xi = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \neq 0 \in \mathbb{C}^n,$$

则

$$\bar{\xi}' \cdot \xi = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0.$$

任取 A 的特征值 λ , 对应特征向量为 ξ .

$$A \text{ 正定} \implies \exists \text{ 非异阵 } C \in M_n(\mathbb{R}) \text{ s.t. } A = C' I_n C = C' C.$$

$$A\xi = \lambda_0 \xi \implies \lambda_0 \bar{\xi}' \xi = \bar{\xi}' A \xi = \bar{\xi}' C' C \xi = \overline{(C\xi)'} (C\xi).$$

$$\xi \neq 0 \implies \bar{\xi}' \xi > 0, C\xi \neq 0 \implies \overline{(C\xi)'} (C\xi) > 0 \implies \lambda_0 = \overline{(C\xi)'} (C\xi) / \bar{\xi}' \xi > 0.$$

□

定理 8.7 设 A 为 n 阶实对称阵, 则下列结论等价:

- (1) A 正定;
- (2) A 合同于 I_n ;
- (3) \exists 非异阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = C' C$;
- (4) A 的所有主子式全大于零;
- (5) A 的 n 个顺序主子式全大于零;
- (6) A 的特征值全大于零.

证明: (1) $\xLeftrightarrow{\text{定理8.5}}$ (2) $\xLeftrightarrow{\text{定义}}$ 3

(1) $\xRightarrow{\text{推论8.2}}$ (4) \implies (5) $\xRightarrow{\text{定理8.6}}$ (1)

(1) $\xRightarrow{\text{推论8.3}}$ (6) $\xRightarrow{\text{第九章讲}}$ (1)

□

8.5 半正定型和半正定矩阵

引理 8.3 设 A 是 n 阶实对称阵, 则

$$A \text{ 半正定} \iff \exists C \in M_n(\mathbb{R}) \text{ s. t. } A = C'C.$$

证明: 先证充分性: 由定理8.5(2) 可知,

$$A \text{ 合同于 } \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, r = \text{rank}(A),$$

即 \exists 非异阵 $B \in M_n(\mathbb{R})$ s. t.

$$A = B' \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} B.$$

令

$$C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} B,$$

则 $A = C'C$.

再证必要性: 设 $A = C'C$, 对 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\alpha' A \alpha = \alpha' C' C \alpha = (C\alpha)'(C\alpha).$$

设 $C\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$, 则上式可写为:

$$\alpha' A \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0.$$

□

引理 8.4 设 A 为 n 阶实对称阵, 则

$$A \text{ 半正定} \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, A + tI_n \text{ 为正定阵}.$$

证明: 先证充分性: $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\alpha'(A + tI_n)\alpha = \alpha' A \alpha + t\alpha' \alpha.$$

$$\because \alpha' A \alpha \geq 0, t \alpha' \alpha > 0, \therefore \alpha' (A + t I_n) \alpha > 0.$$

再证必要性: $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\alpha' (A + t I_n) \alpha = \alpha' A \alpha + t \alpha' \alpha > 0.$$

令 $t \rightarrow 0^+$, 则 $\alpha' A \alpha \geq 0$. □

例 8.3 $A = \text{diag}\{1, 0, -1\}$, $|A_1| = 1, |A_2| = |A_3| = 0$, 不能推出 A 为半正定阵.

引理 8.5 设 A 是 n 阶实对称阵, 则

$$A \text{ 半正定} \iff A \text{ 的所有主子式全大于或等于零}.$$

证明: 先证充分性: 令

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x' A x,$$

则 f 为半正定型. 取 A 第 i_1, \dots, i_r 行, 列交叉处的元素构成的主子阵 B , 构造二次型:

$$f_B(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = f(0, \dots, 0, x_{i_1}, 0, \dots, 0, x_{i_2}, 0, \dots, 0, x_{i_r}).$$

$$f \text{ 半正定} \implies f_B \text{ 半正定} \iff B \text{ 半正定} \implies A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = |B| \geq 0.$$

再证必要性:

$$|A + t I_n| = t^n + C_1 t^{n-1} + \cdots + C_{n-1} t + C_n,$$

其中 C_i 为 A 的所有 i 阶主子式之和, 因此

$$C_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n \implies \forall t \in \mathbb{R}^+, |A + t I_n| > 0.$$

设 A_k 为 A 的顺序主子式 ($1 \leq k \leq n$), 可得 A_k 的所有主子式都大于或等于零, 重复上述计算, 可得

$$|A_k + t I_k| > 0, \forall 1 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}^+ \implies A + t I_n \text{ 是正定阵}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{引理 8.4}} A \text{ 是半正定阵}.$$

□

引理 8.6 设 A 为 n 阶实对称阵, 则

$$A \text{ 半正定} \iff A \text{ 的所有特征值全大于或等于零}.$$

证明: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$$\begin{aligned} A \text{ 半正定} &\xleftrightarrow{\text{引理 8.4}} A + t I_n \text{ 正定}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff \lambda_i + t > 0, \forall 1 \leq i \leq n, \forall t > 0 \\ &\implies \lambda_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

□

定理 8.8 设 A 为 n 阶实对称阵, 则下列结论等价:

- (1) A 半正定;
- (2) A 合同于 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$;
- (3) $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$ s. t. $A = C'C$;
- (4) A 的所有主子式全部大于或等于零;
- (5) A 的所有特征值全大于或等于零.

性质 8.5.1 设 $A = (a_{ij})$ 为半正定阵, 若 $a_{ii} = 0$, 则 A 的第 i 行和第 i 列元素全为零.

证明: 任取 $a_{ij}, a_{ji} (i \neq j)$ 所在的二阶主子式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = -a_{ij}^2 \geq 0,$$

上式中 $A_{ii} = 0$, 从而 $\begin{cases} a_{ij} = 0 \\ a_{ji} = 0 \end{cases}$

□

性质 8.5.2 A 为半正定阵, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ s. t. $\alpha' A \alpha = 0$, 则 $A \alpha = 0$.

证明: $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$ s. t. $A = C'C$, 所以

$$0 = \alpha' A \alpha = \alpha' C' C \alpha = (C \alpha)' (C \alpha) \implies C \alpha = 0 \implies A \alpha = C' C \alpha = C' (C \alpha) = 0.$$

□

8.6 Hermite 型

二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_r x_r^2,$$

其中 $d_1, d_2, \dots, d_r \in \mathbb{C}, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为复变元. 则 $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n)' \in \mathbb{C}^n$,

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = d_1 a_1^2 + d_2 a_2^2 + \dots + d_r a_r^2 \in \mathbb{C}.$$

做如下调整:

- (1) 加限制性条件, 使得 d_1, d_2, \dots, d_r 为实数;
- (2) 将 x_i^2 变为 $|x_i|^2 = \bar{x}_i x_i$.

此时 $f \in \mathbb{R}$, 可写成如下形式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 \bar{x}_1 x_1 + d_2 \bar{x}_2 x_2 + \dots + d_r \bar{x}_r x_r.$$

调整后, f 已经不是多项式了, 不是二次型, 而是 Hermite 型.

定义 8.3 下列 n 个复变元的二次齐次函数称为 Hermite 型:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j,$$

其中 $\overline{a_{ij}} = a_{ji} (\forall 1 \leq i, j \leq n)$. 此时, f 为复变元实值函数.

引理 8.7 定义从 $\{n \text{ 阶 Hermite 阵}\} \longrightarrow \{n \text{ 元 Hermite 型}\}$ 的映射 φ :

$$A \mapsto f = \overline{x'} Ax,$$

求证: φ 为一一映射.

证明: 每个 Hermite 矩阵的各个元素都可写成一个 Hermite 型的对应项系数, 因此可知 φ 显然为满射. 下证 φ 为单射:

设 A, B 为 Hermite 阵且 $\overline{x'} Ax = \overline{x'} Bx$, 则

$$\overline{x'} (A - B)x = 0. \quad (8.7)$$

令 $C = (c_{ij}) = A - B$, x 可在复数域内取任意值(8.7)式都成立, 因此可令 x 分别取下列值:

$$x = \begin{matrix} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ i & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ n & & & & \end{matrix} \Rightarrow C_{ii} = 0 (\forall i), x = \begin{matrix} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ i & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ j & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ n & & & & \end{matrix} \Rightarrow C_{ij} + C_{ji} = 0 (\forall i, j),$$

$$x = \begin{matrix} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ i & & & & \vdots \\ & & & & \sqrt{-1} \\ j & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ n & & & & \end{matrix} \Rightarrow C_{ij} - C_{ji} = 0 (\forall i, j).$$

由以上可知, $A - B = C = 0$, 因此, $A = B$. □

定理 8.9 设 A 为 Hermite 阵, 则 \exists 非异阵 $C \in \mathbb{C}^n$ s. t. $\overline{C'}AC$ 为是对角阵.

证明: 共轭对称初等变换为负相合变换: (1) 对换第 i 行与第 j 行, 对换第 i 列与第 j 列:

$$P_{ij}AP_{ij}, \overline{P'_{ij}} = P_{ij};$$

(2) 第 i 行乘以非零复数 C , 第 i 列乘以 \overline{C} :

$$P_i(C)AP_i(\overline{C}), \overline{P_i(C)'} = P_i(\overline{C});$$

(3) 第 i 行乘以复数 C 加到第 j 行上, 再将第 i 列乘以 \overline{C} 加到第 j 列上:

$$T_{ij}(C)AT_{ji}(\overline{C}), \overline{T_{ij}(C)'} = T_{ji}(\overline{C}).$$

证明概要: 令 $A = (a_{ij})$.

(I) 若 $a_{11} \neq 0$, 则符合要求.

(II) 若 $a_{11} = 0, a_{ii} \neq 0 (2 \leq i \leq n)$, 则经过 $P_{1i}AP_{1i}$ 之后, $a_{11} \neq 0$.

(III) 若 $a_{ii} = 0 (\forall 1 \leq i \leq n)$, 任取 $a_{ij} \neq 0 (i < j)$.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ \overline{a_{ij}} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow[\text{第 } j \text{ 行乘以 } a_{ij} \text{ 再加到第 } i \text{ 行上}]{\text{第 } j \text{ 列乘以 } \overline{a_{ij}} \text{ 再加到第 } i \text{ 列上}} \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2|a_{ij}|^2 & a_{ij} \\ \overline{a_{ij}} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

此时 a_{ii} 已不为零, 再通过上述第 (III) 步调整, 可使 $a_{11} \neq 0$. A 可变为下列形式:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & * & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 } 1 \text{ 列分别乘以适当常数后加到第 } 2-n \text{ 列上}]{\text{第 } 1 \text{ 行分别乘以适当常数后加到第 } 2-n \text{ 行上}} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

上式中, A_{n-1} 为 $n-1$ 阶 Hermite 阵, 再用归纳法即可得证. \square

定理 8.10 (惯性定理) 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个 Hermite 型, 则它总可化为如下标准型:

$$\overline{y_1}y_1 + \cdots + \overline{y_p}y_p - \overline{y_{p+1}}y_{p+1} - \cdots - \overline{y_r}y_r,$$

且若 f 又可化为另一个标准型:

$$\overline{z_1}z_1 + \cdots + \overline{z_k}z_k - \overline{z_{k+1}}z_{k+1} - \cdots - \overline{z_r}z_r,$$

则 $p = k$.

定理 8.11 秩 r 与符号差 s (或正负惯性指数 p, q) 是 Hermite 型 (阵) 在复相合关系下的全系不变量.

定义 8.4 $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{x'}Ax$ 是 hermite 型, 其相伴 Hermite 矩阵为 A , $\forall 0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 则有如下定义和结论:

$\overline{\alpha'}A\alpha$	f	A
> 0	正定	正定
≥ 0	半正定	半正定
< 0	负定	负定
≤ 0	半负定	半负定
$\overline{\alpha'}A\alpha > 0, \overline{\beta'}A\beta < 0$	不定型	不定型

定理 8.12

$$\begin{aligned}
 (1) f \text{ 正定} & \iff p = n \quad A \text{ 正定} \xleftrightarrow{\text{复相合于}} I_n; \\
 (2) f \text{ 半正定} & \iff p = r \quad A \text{ 半正定} \xleftrightarrow{\text{复相合于}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}; \\
 (3) f \text{ 负定} & \iff q = n \quad A \text{ 负定} \xleftrightarrow{\text{复相合于}} -I_n; \\
 (4) f \text{ 半负定} & \iff q = r \quad A \text{ 半负定} \xleftrightarrow{\text{复相合于}} \begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}; \\
 (5) f \text{ 不定} & \iff p > 0 \text{ 且 } q > 0 \quad A \text{ 不定} \xleftrightarrow{\text{复相合于}} \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

评论

$$f(A) \text{ 负定 (半负定)} \iff -f(-A) \text{ 正定 (半正定)}.$$

定理 8.13 设 A 为 Hermite 阵, 则下列结论等价:

- (1) A 正定;
- (2) A 复相合于 I_n ;
- (3) \exists 非异阵 $C \in M_n(\mathbb{C})$ s. t. $A = \overline{C'}C$;
- (4) A 的所有主子式全大于零;
- (5) A 的 n 个顺序主子式全大于零;
- (6) A 的特征值全大于零.

定理 8.14 设 A 为 Hermite 阵, 则下列结论等价:

- (1) A 半正定;
- (2) A 复相合于 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$;

(3) $\exists C \in M_n(\mathbb{C})$ s. t. $A = \overline{C'}C$;

(4) A 的所有主子式全大于或等于零;

(5) A 的特征值全大于或等于零.

9 内积空间

9.1 内积空间的概念

$$\mathbb{R}^3: \quad \vec{u} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{v} = (y_1, y_2, y_3),$$

$$\text{点积 (内积): } \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

$$\text{长度: } \|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ 的距离: } \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

\mathbb{R}^3 中向量内积的性质

- (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- (2) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$;
- (3) $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- (4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, 且 $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ 当且仅当 $\vec{u} = 0$.

其中 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 是 \mathbb{R}^3 中的任意向量, c 是任一实数.

定义 9.1 设 V 为实线性空间, 若存在二元运算

$$(-, -): V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\alpha \times \beta \mapsto (\alpha, \beta)$ 且满足如下性质:

- (1) $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$; 对称性
- (2) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
- (3) $(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)$, c 为任一实数;
- (4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$. 正定性

则称 $(-, -)$ 为 V 上的一个内积, (α, β) 称为向量 α, β 的内积. 给定一个内积结构的实线性空间称为实内积空间. 有限维的内积空间称为 Euclid 空间 (欧氏空间).

定义 9.2 设 V 为复线性空间, 若存在二元运算

$$(-, -): V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\alpha \times \beta \mapsto (\alpha, \beta)$ 且满足如下性质:

$$\begin{aligned}
(1) & (\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)}; \text{共轭对称性} \\
(2) & (\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma); \\
(3) & (c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta), c \text{ 为任一复数}; \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{第一变元的线性} \\
(4) & (\alpha, \alpha) \geq 0 \text{ 且等号成立当且仅当 } \alpha = 0. \text{正定性}
\end{aligned}$$

则称 $(-, -)$ 为 V 上的一个内积, (α, β) 称为向量 α, β 的内积. 给定一个内积结构的复线性空间称为复内积空间. 有限维的复内积空间称为酉空间.

注 (1) 由共轭对称性 $\implies (\alpha, \alpha) \in \mathbb{R} \implies$ (4) 的定义有意义;

(2) 对于实线性空间, 第二变元仍线性, 对于复线性空间, 第二变元为共轭线性, 即

$$(\gamma, c\alpha + d\beta) = \bar{c}(\gamma, \alpha) + \bar{d}(\gamma, \beta).$$

$$\because (\gamma, c\alpha + d\beta) = \overline{(c\alpha + d\beta, \gamma)} = \overline{c(\alpha, \gamma) + d(\beta, \gamma)} = \overline{c(\alpha, \gamma)} + \overline{d(\beta, \gamma)} = \bar{c}(\gamma, \alpha) + \bar{d}(\gamma, \beta).$$

(3) 实内积空间的定义相容于复内积空间的定义, 因为实数的共轭等于它本身, 实内积空间是复内积空间的特殊情况.

例 9.1 设 \mathbb{R}_n 是 n 维实列向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha' \cdot \beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

则我们定义了一个内积, 这个内积称为 \mathbb{R}_n 中的标准内积.

设 \mathbb{R}^n 是 n 维实行向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha \cdot \beta' = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

则我们定义了一个内积, 这个内积称为 \mathbb{R}^n 中的标准内积.

例 9.2 设 \mathbb{C}_n 是 n 维复列向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, 定义

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha' \cdot \bar{\beta} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

$$\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{(\alpha' \cdot \bar{\beta})} = \bar{\alpha}' \cdot \beta = (\bar{\alpha}' \cdot \beta)' = \beta' \cdot \bar{\alpha} = (\beta, \alpha),$$

$$(\alpha, \alpha) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0.$$

则在此定义下 \mathbb{C}_n 成为一个酉空间, 上述内积称为 \mathbb{C}_n 的标准内积.

设 \mathbb{C}^n 是 n 维复行向量空间, $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha \cdot \bar{\beta}' = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

则在此定义下 \mathbb{C}^n 成为一个酉空间, 上述内积称为 \mathbb{C}^n 的标准内积.

例 9.3 设 $V = \mathbb{R}^2$ 为二维实向量空间, 若 $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$, 定义:

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2,$$

容易验证定义 9.1 中的 (1), (2), (3) 都成立. 当 $\beta = \alpha$ 时, 上式为 (4) 也成立. 因此, \mathbb{R}^2 在此内积下成为二维欧氏空间, 此内积称为**非标准内积**.

例 9.4 设 V 是 n 维实向量空间, G 是 n 阶正定实对称阵, 对 $\alpha, \beta \in V$, 定义 V 上内积:

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha' G \beta.$$

证明:

(1) $(\beta, \alpha) = \beta' G \alpha = (\beta' G \alpha)' = \alpha' G' \beta = \alpha' G \beta = (\alpha, \beta)$ 对称性成立;

(2) $(\alpha, \beta) = \alpha' G \beta$ 根据矩阵性质, 第一变元的线性显然成立;

(3) $(\alpha, \alpha) = \alpha' G \alpha$ 根据正定阵性质, 正定性显然成立.

□

注 (1) 当 $G = I$ 时, V 上内积就是例 9.1 中的标准内积, 是例 9.4 的特例;

(2) 当 $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 时, V 上内积就是例 9.3 中的非标准内积;

(3) 设 V 是 n 维实向量空间, G 是 n 阶正定实对称阵, 定义 V 上内积:

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha G \beta';$$

例 9.5 对 n 维复向量空间 U , 若有正定 Hermite 矩阵 H , 则可定义 U 上的内积:

$$(\alpha, \beta) \triangleq \alpha' H \bar{\beta}.$$

证明:

(1) $\overline{(\alpha, \beta)} = \overline{\alpha' H \bar{\beta}} = (\overline{\alpha' H \bar{\beta}})' = \beta' \bar{H}' \bar{\alpha} = \beta' H \bar{\alpha} = (\beta, \alpha)$ 对称性成立;

(2) $\alpha' H \bar{\beta}$ 由矩阵性质可知, 第一变元线性成立;

(3) $(\alpha, \alpha) = \alpha' H \bar{\alpha}$ 由正定 Hermite 阵性质可知, 正定性成立.

□

例 9.6 $V = C[a, b]$, 是 $[a, b]$ 上连续函数全体构成的实线性空间, $f(x), g(x) \in V$, 定义

$$(f(t), g(t)) \triangleq \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

证明: 对称性由积分性质可知显然成立; 第一变元的线性由积分的线性可得; 下面证正定性:

$$(f(t), f(t)) = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0 \text{ 等号成立当且仅当 } f(t) \equiv 0.$$

□

例 9.7 $V = \mathbb{R}[x]$, 假设 $n \geq m$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

$$(f(x), g(x)) = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_mb_m.$$

例 9.8 $V = M_n(\mathbb{R})$, $A, B, C \in V$, c, d 为任一实数:

$$(A, B) \triangleq \text{Tr}(AB').$$

证明:

$$(1) (B, A) = \text{Tr}(BA') = \text{Tr}((BA')') = \text{Tr}(AB') = (A, B);$$

$$(2) (cA + dB, C) = \text{Tr}((cA + dB)C') = c \text{Tr}(AC') + d \text{Tr}(BC');$$

$$(3) (A, A) = \text{Tr}(AA') = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0 \text{ 等号成立当且仅当 } A = 0, \text{ 此处假设 } A = (a_{ij});$$

此内积称为 Frobenius 内积. □

定义 9.3 设 V 是一个内积空间, $\alpha \in V$, α 的长度 (范数) 为

$$\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|.$$

例 9.9 $V = \mathbb{R}_n$, 标准内积, $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,

$$\|\alpha\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$V = \mathbb{C}_n$, 标准内积, $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,

$$\|\alpha\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

范数的性质:

(1) 非负性: $\|\alpha\| \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$;

(2) 对称性: $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.

定理 9.1 设 V 是实或复的内积空间, $\alpha, \beta \in V$, c 是任一常数 (实数或复数), 则

(1) $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$; 范数的齐次性

(2) $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$; Cauchy-Schwarz 不等式

(3) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$. 三角不等式

证明: (1) $\|c\alpha\|^2 = (c\alpha, c\alpha) = c \cdot \bar{c}(\alpha, \alpha) = |c|^2 \cdot \|\alpha\|^2$, 取平方根可得结论.

(2)(i) $\alpha = 0$: $(\alpha, \beta) = (0, \beta) = 0$, $\|\alpha\| \cdot \|\beta\| = 0\|\beta\| = 0$;

(ii) $\alpha \neq 0$: 令

$$\gamma = \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \cdot \alpha,$$

$$(\gamma, \alpha) = \left(\beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \cdot \alpha, \alpha \right) = (\beta, \alpha) - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} (\alpha, \alpha) = 0.$$

计算 $\|\gamma\|$:

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= (\gamma, \gamma) = (\gamma, \beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \cdot \alpha) \\ &= (\gamma, \beta) - \frac{\overline{(\beta, \alpha)}}{\|\alpha\|^2} (\gamma, \alpha) \\ &= (\gamma, \beta) = (\beta - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \cdot \alpha, \beta) = (\beta, \beta) - \frac{(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} (\alpha, \beta) \\ &= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha, \beta)|^2}{\|\alpha\|^2} \\ &\geq 0 \\ &\implies |(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \end{aligned}$$

上式中等号成立当且仅当 $\gamma = 0 \iff \alpha, \beta$ 线性相关.

(3)

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because |\operatorname{Re}(\alpha, \beta)| &\leq |(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|, \\ \therefore \|\alpha + \beta\|^2 &\leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 \\ \therefore \|\alpha + \beta\| &\leq \|\alpha\| + \|\beta\|. \end{aligned}$$

□

例 9.10 $V = \mathbb{R}_n$, 标准内积, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, Cauchy 不等式:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

$V = C[a, b]$, 积分内积, Schwarz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right).$$

定义 9.4 设 $\mathbf{0} \neq \alpha, \mathbf{0} \neq \beta, \alpha, \beta \in V$, α, β 的夹角为:

$$\begin{aligned} \text{实内积} \quad \cos \theta &= \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \quad \theta \in [0, \pi]; \\ \text{复内积} \quad \cos \theta &= \frac{|(\alpha, \beta)|}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

上式中, $|(\alpha, \beta)|$ 不能换成 $\operatorname{Re}(\alpha, \beta)$, 这样将失去几何意义.

定义 9.5 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 和 β 正交 (垂直), 记为 $\alpha \perp \beta$,

$$(\alpha, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \beta) = 0 \implies \mathbf{0} \perp \alpha, \mathbf{0} \perp \beta.$$

$$\text{若 } \alpha \neq \mathbf{0}, \beta \neq \mathbf{0} \text{ 且 } \alpha \perp \beta \implies \text{夹角 } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

定理 9.2 (勾股定理) 若 $\alpha \perp \beta$, 则

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

证明:

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) \\ &\stackrel{(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0}{=} \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2. \end{aligned}$$

□

9.2 内积的表示和正交基

设 V 是内积空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基. 令 $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $G = (g_{ij})_{n \times n}$. 取

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^n a_i e_i \longleftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \\ \beta &= \sum_{j=1}^n b_j e_j \longleftrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Case 1: V 是欧氏空间:

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j g_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i g_{ij} \right) b_j = (a_1, a_2, \dots, a_n) G \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{x}' G \mathbf{y}.
 \end{aligned}$$

上式中, G 称 V 关于基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 的内积矩阵或度量矩阵或 Gram 矩阵.

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji} \implies G \text{ 是实对称矩阵.}$$

$$(\alpha, \alpha) = \mathbf{x}' G \mathbf{x} > 0, \mathbb{R}^n \ni \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} (\iff V \ni \forall \alpha \neq \mathbf{0}) \implies G \text{ 是正定阵.}$$

反之, 设 V 是实线性空间, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是给定的一组基, G 为 n 阶正定实对称阵, $\forall \alpha \longleftrightarrow \mathbf{x}, \beta \longleftrightarrow \mathbf{y}$, 则 V 上的内积

$$(\alpha, \beta)_G \triangleq \alpha' G \beta \implies (-, -)_G \text{ 是 } V \text{ 上一个内积.}$$

设 V 是实线性空间, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是给定的一组基,

$$\{V \text{ 上所有内积结构} \} \xrightarrow{\text{一一对应}} \{n \text{ 阶正定实对称矩阵} \}$$

$$\varphi : (-, -) \mapsto G = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{n \times n}$$

$$\psi : (\alpha, \beta) \triangleq \alpha' G \beta \longleftrightarrow G$$

Case 2: V 是酉空间:

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{e}_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} g_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i g_{ij} \right) \overline{b_j} = (a_1, a_2, \dots, a_n) G \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{x}' G \overline{\mathbf{y}}.
 \end{aligned}$$

$$\overline{g_{ij}} = \overline{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji} \implies G' = \overline{G}, \overline{G'} = G \implies G \text{ 为 Hermite 阵.}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha, \alpha) &= \mathbf{x}' G \bar{\mathbf{x}} > 0, 0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \\
&= \mathbf{y}' G \bar{\mathbf{y}} > 0, 0 \neq \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n
\end{aligned}$$

$\implies G$ 为正定 Hermite 阵.

反之, G 为 n 阶正定 Hermite 阵, 则 V 上的内积

$$(\alpha, \beta)_G \triangleq \alpha' G \bar{\beta}.$$

设 V 是复线性空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是给定的一组基,

$$\{V \text{ 上所有内积结构} \} \xrightarrow{\text{一一对应}} \{n \text{ 阶正定 Hermite 矩阵} \}$$

$$\varphi: (-, -) \mapsto G = (e_i, e_j)_{n \times n}$$

$$\psi: (\alpha, \beta) \triangleq \alpha' G \bar{\beta} \longleftarrow G$$

命题 9.1

\exists 一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ s. t. Gram 矩阵为 $I_n \iff (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

定义 9.6 设 V 是 n 维内积空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 若 $(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$, 则称 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组正交基. 进一步, 若 $\|e_i\| = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 则称 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基.

例 9.11 $V = \mathbb{R}_n$ (或 \mathbb{C}_n), 标准内积, $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)'$, 其中 1 在第 i 个位置, 其他位置全为 0, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基.

例 9.12 $V = M_n(\mathbb{R})$, Frobenius 内积, E_{ij} 为 n 阶标准基矩阵, 其 (i, j) 元为 1, 其他元素为 0, 则 $\{E_{ij}\}$ 是 V 的一组标准正交基.

证明:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}, E_{kl}) &= \text{Tr}(E_{ij} E'_{kl}) = \text{Tr}(E_{ij} E_{lk}) \\
&= \delta_{jl} \text{Tr}(E_{ik}) = \delta_{jl} \delta_{ik} \\
&= \begin{cases} 1, & (i, j) = (k, l), \\ 0, & (i, j) \neq (k, l). \end{cases}
\end{aligned}$$

□

引理 9.1 两两正交的非零向量必线性无关.

证明: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是两两正交的非零向量且

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m = 0.$$

$$0 = \left(\sum_1^m c_i \alpha_i, \alpha_j \right) = \sum_1^m c_i (\alpha_i, \alpha_j) = c_j (\alpha_j, \alpha_j)$$

$$\implies c_j = 0 \forall 1 \leq j \leq m$$

□

推论 9.1 n 维内积空间中两两正交的非零向量至多只有 n 个.

引理 9.2 设 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 正交, 则 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合也正交, 即 $\forall \gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 都有 $(\beta, \gamma) = 0$.

证明: 设 $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m$,

$$\begin{aligned}(\beta, \gamma) &= (\beta, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m) \\&= c_1(\beta, \alpha_1) + c_2(\beta, \alpha_2) + \dots + c_m(\beta, \alpha_m) \\&= 0.\end{aligned}$$

□

定理 9.3 (Gram-Schmidt 正交化方法) 设 u_1, u_2, \dots, u_m 是 V 中线性无关的向量, 则存在一组两两正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_m , 使得 $L(v_1, v_2, \dots, v_m) = L(u_1, u_2, \dots, u_m)$.

证明: 对 m 进行归纳:

(1) 当 $m = 1$ 时, $v_1 = u_1$;

(2) 假设对 $m = k$ 成立, 即存在一组两两正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_k , 使得 $L(v_1, v_2, \dots, v_k) = L(u_1, u_2, \dots, u_k)$;

(3) 当 $m = k + 1$ 时, 先从三维情况获得思路 and 启发. 假设 V 为三维实内积空间, 如下图所示: 设 $u_3 = av_1 + bv_2 + v_3$, 则

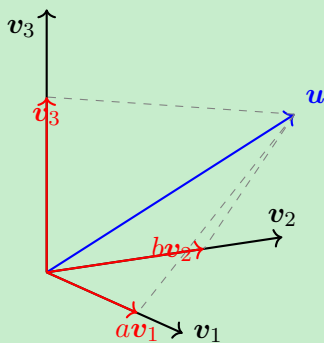


图 9.1: 向量 u 在正交坐标系 v_1, v_2, v_3 上的投影

$$\begin{aligned}(u_3, v_1) &= (av_1 + bv_2 + v_3, v_1) = a(v_1, v_1) = a\|v_1\|^2 \\ \implies a &= \frac{(u_3, v_1)}{\|v_1\|^2}, b = \frac{(u_3, v_2)}{\|v_2\|^2} \\ \implies v_3 &= u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{\|v_2\|^2}v_2.\end{aligned}$$

因此, 令

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(u_{k+1}, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i. \quad (9.1)$$

先证 $\mathbf{v}_{k+1} \neq 0$. 用反正法, 若 $\mathbf{v}_{k+1} = 0$, 则

$$\mathbf{u}_{k+1} \in L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$$

这与 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}$ 线性无关矛盾. 再证 \mathbf{v}_{k+1} 与 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ 正交:

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq k, (\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_j) &= (\mathbf{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \\ &= (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_j) - \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \\ &= (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_j) - \frac{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_j)}{(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j)} (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) = 0. \end{aligned}$$

从(9.1)式可知, $\mathbf{v}_{k+1} \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1})$,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}) &= L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) + L(\mathbf{u}_{k+1}) \\ &= L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) + L(\mathbf{u}_{k+1}) \subseteq L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) &= L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) + L(\mathbf{v}_{k+1}) \\ &\subseteq L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) + L(\mathbf{u}_{k+1}) \\ &= L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) + L(\mathbf{u}_{k+1}) \\ &= L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}). \end{aligned}$$

□

注 从内积空间的一组基出发, 经过 Gram-Schmidt 正交化方法, 可得到一组正交基, 即

$$\mathbf{u} = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n).$$

设过渡矩阵:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)A.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)} \mathbf{v}_2, \\ &\dots \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i \\ \implies A &= \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

单位化 (标准化):

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \longrightarrow \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \longleftarrow \left\| \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \right\| = 1.$$

令

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) &= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n) B \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n) \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{v}_1\| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|\boldsymbol{v}_2\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{v}_3\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\boldsymbol{v}_n\| \end{pmatrix} \\ \implies (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) &= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n) \cdot C. \end{aligned}$$

其中,

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{v}_1\| & * & * & \cdots & * \\ 0 & \|\boldsymbol{v}_2\| & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{v}_3\| & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\boldsymbol{v}_n\| \end{pmatrix}.$$

定理 9.4 任一有限维内积空间必存在标准正交基.

证明:

任取内积空间 V 的一组基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$

$\xrightarrow{\text{Gram-Schmidt 正交化方法}} V$ 的一组正交基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$

$\xrightarrow{\text{标准化 (单位化)}} V$ 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$.

□

例 9.13 $V = \mathbb{R}^3$, 标准内积, $\boldsymbol{u}_1 = (3, 0, 4)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1, 0, 7)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2, 9, 11)$, 用 Gram-Schmidt 正交化方法求 V 的一组标准正交基.

解:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = (3, 0, 4), \\
v_2 &= u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = (-1, 0, 7) - \frac{(-1, 0, 7) \cdot (3, 0, 4)}{(3, 0, 4) \cdot (3, 0, 4)} \cdot (3, 0, 4) \\
&= (-1, 0, 7) - \frac{25}{25} \cdot (3, 0, 4) = (-1, 0, 7) - (3, 0, 4) = (-4, 0, 3), \\
v_3 &= u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 \\
&= (2, 9, 11) - \frac{(2, 9, 11) \cdot (3, 0, 4)}{(3, 0, 4) \cdot (3, 0, 4)} \cdot (3, 0, 4) - \frac{(2, 9, 11) \cdot (-4, 0, 3)}{(-4, 0, 3) \cdot (-4, 0, 3)} \cdot (-4, 0, 3) \\
&= (2, 9, 11) - \frac{50}{25} \cdot (3, 0, 4) - \frac{25}{25} \cdot (-4, 0, 3) = (2, 9, 11) - 2 \cdot (3, 0, 4) - (-4, 0, 3) = (0, 9, 0), \\
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5}(3, 0, 4), \\
w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{5}(-4, 0, 3), \\
w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = (0, 1, 0).
\end{aligned}$$

引理 9.3 设 V 是 n 维内积空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 是 V 的两组基, 过度矩阵为 C , 即

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C,$$

则

$$V \text{ 为实内积空间时: } G_f = C' G_e C,$$

$$V \text{ 为复内积空间时: } G_f = C' G_e \overline{C}.$$

证明: 设

$$C = (c_{ij})_{n \times n}, G = (g_{ij})_{n \times n},$$

$$\therefore (f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C,$$

$$\therefore f_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} e_i, f_l = \sum_{j=1}^n c_{jl} e_j, k, l = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned}
(f_k, f_l) &= \left(\sum_{i=1}^n c_{ik} e_i, \sum_{j=1}^n c_{jl} e_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ik} c_{jl} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ik} c_{jl} g_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g_{ij} c_{ik} \right) c_{jl}.
\end{aligned}$$

□

注 在一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下, 对于任一正定实对称矩阵 G_e , \exists 非异阵 C s. t. $C'G_eC = I_n$.
令

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C,$$

由引理9.3可知,

$$G_f = C'G_eC = I_n.$$

即 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 是 V 的一组标准正交基.

定义 9.7 设 U 是内积空间 V 的子空间,

$$U^\perp = \{v \in V | (v, u) = 0, \forall u \in U\}$$

易证 U^\perp 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

定理 9.5 设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间,

$$(1) V = U \oplus U^\perp;$$

(2) U 的标准正交基可扩充为 V 的标准正交基.

证明: (1) 设 $\dim U = m$, 将 V 上内积限制在 U 上, 则 U 是 m 维内积空间, 由定理9.3可知, U 有一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$w = v - \sum_{i=1}^m (v, e_i) e_i, \forall v \in V,$$

则

$$\begin{aligned} (w, e_j) &= (v - \sum_{i=1}^m (v, e_i) e_i, e_j) \\ &= (v, e_j) - \sum_{i=1}^m (v, e_i) (e_i, e_j) \\ &= 0, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

从而 $(w, U) = 0$, 即 $w \in U^\perp$, 于是

$$U + U^\perp \ni v = \sum_{i=1}^m (v, e_i) e_i + w.$$

任取 $v \in U \cap U^\perp$, 则 $(v, v) = 0$, 即 $v = 0$, 从而 $U \cap U^\perp = \{0\}$, 即 $V = U \oplus U^\perp$.

(2) 取 U^\perp 的一组标准正交基 $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. □

定义 9.8 设 V 是 n 维内积空间, V_1, \dots, V_m 是 V 的子空间, 若对 $\forall \alpha \in V_i, \forall \beta \in V_j$, 有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 V_1 与 V_2 正交. 若 $V = V_1 + V_2 + \dots + V_m$ 且 V_i 两两正交, 则称上述和为正交和, 记为 $V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_m$. 例如 $V = U + U^\perp$ 即为正交和.

引理 9.4 正交和都是直和, 称为正交直和.

证明: 先证 V_i 与 $\sum_{j \neq i} V_j$ 正交. 任取 $\mathbf{v}_i \in V_i$ 有

$$(\mathbf{v}_i, \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j) = \sum_{j \neq i} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0.$$

任取 $\alpha \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$, 则 $(\alpha, \alpha) = 0$, 由内积的正定性可知 $\alpha = \mathbf{0}$, 从而

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

□

定义 9.9 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 对任一 $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_m$, ($\mathbf{v}_i \in V_i$) 的分解唯一. 构造 $E_i \in \mathcal{L}(V)$, $E_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq m$, 称 E_i 为 V 的**投影变换**.

投影变换的性质

$$(1) E_i^2 = E_i;$$

$$(2) E_i E_j = 0, i \neq j;$$

$$(3) E_1 + E_2 + \cdots + E_m = I_V;$$

进一步, 设 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_m$ 为正交直和, 则投影变换 E_i 称为从 V 到 V_i 的**正交投影变换**.

引理 9.5 设 V 为 n 维内积空间, $V = U \perp U^\perp$, 记 E 为从 V 到 U 的正交投影变换, 则 $\forall \alpha, \beta \in V$,

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

证明: 设 $\alpha = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1, \beta = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in U^\perp$, 则 $E(\alpha) = \mathbf{u}_1, E(\beta) = \mathbf{u}_2$,

$$(E(\alpha), \beta) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

$$(\alpha, E(\beta)) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

□

定理 9.6 (Bessel 不等式) 设 V 是内积空间, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ 是 V 中两两正交的非零向量组, 则 $\forall \mathbf{y} \in V$, 有

$$\sum_{i=1}^m \frac{|(\mathbf{y}, \mathbf{v}_i)|^2}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \leq \|\mathbf{y}\|^2.$$

等号成立当且仅当 \mathbf{y} 可由 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ 线性表示.

证明: $\because \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 两两正交, $y \in V$, 设

$$z = y - \sum_{i=1}^m \frac{(y, v_i)}{\|v_i\|^2} v_i,$$

再令 $x = \sum_{i=1}^m \frac{(y, v_i)}{\|v_i\|^2} v_i$, 则

$$\begin{aligned} (z, v_i) &= (y, v_i) - \sum_{j=1}^m \frac{(y, v_j)}{\|v_j\|^2} (v_j, v_i) = 0 \\ \Rightarrow (z, x) &= \sum_{i=1}^m \frac{(y, v_i)}{\|v_i\|^2} (z, v_i) = 0 \\ \Rightarrow \|y\|^2 &\stackrel{y=x+z}{=} \|z+x\|^2 \stackrel{(z,x)=0}{\underset{\text{勾股定理}}{=}} \|z\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2 \stackrel{\text{勾股定理}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{|(y, v_i)|^2}{\|v_i\|^2} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{|(y, v_i)|^2}{\|v_i\|^2} &\leq \|y\|^2. \end{aligned}$$

上式中等号成立当且仅当 $z = 0$, 即 $y = x$, 即 y 可由 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 线性表示. \square

注 上面定理对于无限维内积空间也成立: $\{v_1, v_2, \dots, v_m, \dots\}$ 为一列两两正交的非零向量组, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(y, v_i)|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|y\|^2.$$

9.3 伴随

线性变换又称为线性算子, operator.

设 V 是 n 维内积空间, $\mathcal{L}(V)$ 是 V 上的线性变换全体, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 是线性算子. 任取 $\alpha, \beta \in V$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, 分别是 α, β 在 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下的坐标向量, 则

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i \longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$\beta = \sum_{i=1}^n b_i e_i \longleftrightarrow y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\varphi \xrightarrow{\text{表示矩阵}} A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{C},$$

$$\varphi(\alpha) \longleftrightarrow Ax,$$

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (Ax)' \bar{y} = x' A' \bar{y} = x' (\overline{A'} y).$$

定义 $\psi \in \mathcal{L}(V) \xleftrightarrow{\text{表示矩阵}} \overline{A}'$

即 $\psi(\beta) \longleftrightarrow \overline{A}'y$.

$$(\alpha, \psi(\beta)) = \overline{x'(\overline{A}'y)}$$

$$\implies (\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta)), \forall \alpha, \beta \in V$$

特别的, 当 V 为欧氏空间时: $\psi \in \mathcal{L}(V) \xleftrightarrow{\text{表示矩阵}} A'$.

定义 9.10 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在线性算子 φ^* , 使得 $\forall \alpha, \beta \in V$

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)),$$

则称 φ^* 是 φ 的**伴随算子**, 或简称**伴随**.

定理 9.7 (1) 伴随算子若存在, 必唯一;

(2) 有限维内积空间上任一线性算子, 必有伴随算子.

证明: (1) 设 φ^* 和 $\varphi^\#$ 都是 φ 的伴随算子, 即

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)) = (\alpha, \varphi^\#(\beta))$$

$$\implies (\alpha, \varphi^*(\beta) - \varphi^\#(\beta)) = 0, \forall \alpha \in V$$

取 $\alpha = \varphi^*(\beta) - \varphi^\#(\beta)$, 则

$$(\varphi^*(\beta) - \varphi^\#(\beta), \varphi^*(\beta) - \varphi^\#(\beta)) = 0,$$

由正定性可知 $\varphi^*(\beta) = \varphi^\#(\beta)$, 从而

$$\varphi^* = \varphi^\#.$$

(2) 由伴随的唯一性及本节开始部分的构造可知,

$$\psi = \varphi^*,$$

所以, 有限维内积空间上任一线性算子必有伴随算子.

$$\begin{aligned} & \varphi \in \mathcal{L}(V) \xleftrightarrow{\text{表示矩阵}} A, \\ \implies & \begin{cases} \text{酉空间} & \varphi^* \xleftrightarrow{\text{表示矩阵}} \overline{A}', \\ \text{欧氏空间} & \varphi^* \xleftrightarrow{\text{表示矩阵}} A'. \end{cases} \end{aligned}$$

□

定理 9.8 设 V 为 n 维内积空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 的表示矩阵为 A ,

定理 9.9 设 V 为内积空间, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ 且 φ^*, ψ^* 存在, c 为常数, 则

- (1) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
- (2) $(c\varphi)^* = \bar{c}\varphi^*$;
- (3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
- (4) $(\varphi^*)^* = \varphi$;
- (5) 若 φ 可逆, 则 φ^* 也可逆, 且 $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

证明: 若 V 是有限维内积空间, 设 φ 的表示矩阵为 A , ψ 的表示矩阵为 B . $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, 则

- (1) $\overline{(A+B)}' = \overline{A}' + \overline{B}'$;
- (2) $\overline{(cA)}' = \bar{c}\overline{A}'$;
- (3) $\overline{(AB)}' = \overline{B}'\overline{A}'$;
- (4) $\overline{\overline{A}'} = A$;
- (5) 若 A 可逆, 则 \overline{A}' 也可逆, 且 $(\overline{A}')^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

若 V 是无限维内积空间, (1)-(2) 很容易证明, 下面证 (3)-(5):

- (3) $(\varphi\psi(\alpha), \beta) = (\psi(\alpha), \varphi^*(\beta)) = (\alpha, \psi^*\varphi^*(\beta)) \implies (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.
- (4) $(\varphi^*(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi(\beta)) \implies (\varphi^*)^* = \varphi$.
- (5) $(\varphi\varphi^{-1}(\alpha), \beta) = (\varphi^{-1}(\alpha), \varphi^*(\beta))$.

□

命题 9.2 设 V 是 n 维内积空间, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$,

- (1) 若 U 是 φ -不变子空间, 则 U^\perp 是 φ^* -不变子空间;
- (2) 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$.

证明: (1) 任取 $u \in U, w \in U^\perp$, 则

$$\begin{aligned} (\varphi(u), w) &= (u, \varphi^*(w)) = 0, \\ \implies \varphi^*(w) &\in U^\perp, \forall w \in U^\perp. \end{aligned}$$

(2) 取标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, φ 的表示矩阵为 A , φ^* 的表示矩阵为 \overline{A}' , 由题意可知,

$$|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

则

$$\begin{aligned}
 |\lambda I_n - \overline{A}'| &= |\lambda I_n - \overline{A}| \\
 \xrightarrow{\text{令 } \lambda = \overline{\mu}} \overline{|\mu I_n - A|} &= \overline{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \cdots (\mu - \lambda_n)} \\
 &= (\overline{\mu} - \overline{\lambda_1})(\overline{\mu} - \overline{\lambda_2}) \cdots (\overline{\mu} - \overline{\lambda_n}) \\
 &= (\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu) \cdots (\lambda_n - \mu).
 \end{aligned}$$

□

例 9.14 $V = U \perp U^\perp$, E 是从 U 到 V 的正交投影变换, 且

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)), \forall \alpha, \beta \in V.$$

则

$$E^* = E.$$

E 称为**自伴算子**.

例 9.15 $V = M_n(\mathbb{R})$, Frobenius 内积, 且 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\varphi(A) = PAQ$, $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$. 则

$$\begin{aligned}
 (\varphi(A), B) &= \text{Tr}(\varphi(A)B') = \text{Tr}((PAQ)B') \\
 &= \text{Tr}(AQB'P') = \text{Tr}(A(P'BQ')') = (A, \varphi^*(B)).
 \end{aligned}$$

9.4 内积空间的同构, 正交变换和酉变换

设 V 为欧氏空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为标准正交基. 线性同构:

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n (\text{标准内积})$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i \longmapsto \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \sum_{i=1}^n b_i e_i \longmapsto \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, \beta) = \mathbf{x}'\mathbf{y},$$

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \mathbf{x}'\mathbf{y}.$$

$$\therefore (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_{\mathbb{R}^n} = (\alpha, \beta)_V, \forall \alpha, \beta \in V.$$

设 V 为酉空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为标准正交基. 线性同构:

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{C}^n (\text{标准内积})$$

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_{\mathbb{C}^n} = (\alpha, \beta)_V, \forall \alpha, \beta \in V.$$

定义 9.11 设 V, U 为实内积 (复内积) 空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 是线性映射, 若 $\forall \alpha, \beta \in V$ 有

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_U = (\alpha, \beta)_V,$$

则称 φ 是保持内积的线性映射. 若进一步, φ 为线性同构, 则称 φ 为保积同构.

注 (1) 线性空间的保积同构是等价关系;

(2) 保积同构的线性映射必为单射;

\because 任取 $\alpha \in \ker \varphi$, 即 $\varphi(\alpha) = \mathbf{0}$, 则 $(\alpha, \alpha) = (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = 0$

\therefore 由正定性可知 $\alpha = \mathbf{0}$.

例 9.16 嵌入映射

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 (\text{标准内积})$$

$$(a, b)' \mapsto (a, b, 0)'$$

这个映射只能填满 $x-y$ 平面, 不能填满整个 \mathbb{R}^3 .

命题 9.3 保积映射必是保范 (保距) 映射.

证明: 令 $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(\alpha)\|^2 &= (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2 \\ \implies \|\varphi(\alpha)\| &= \|\alpha\|, \forall \alpha. \end{aligned}$$

□

命题 9.4 设 $\varphi: V \rightarrow U$ 是实 (复) 内积空间上的线性映射, 若 φ 保持范数, 则 φ 保持内积.

证明:

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) \quad (9.2)$$

$$\|\alpha - \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) \quad (9.3)$$

若 V 为欧式空间, 则 (9.2) 式-(9.3) 式, 得

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2).$$

则

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) &= \frac{1}{4}(\|\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)\|^2 - \|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\varphi(\alpha + \beta)\|^2 - \|\varphi(\alpha - \beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2) \\ &= (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

若 V 为酉空间, 则 (9.2) 式 $-(9.3)$ 式, 得

$$\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 = 2((\alpha, \beta) + 2(\beta, \alpha)) \quad (9.4)$$

$$\|\alpha + i\beta\|^2 - \|\alpha - i\beta\|^2 = -2((\alpha, \beta) + 2i(\beta, \alpha)) \quad (9.5)$$

将 (9.4) 式 $+(9.5)$ 式 $\times i$, 得

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2).$$

则

$$\begin{aligned} & (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \\ &= \frac{1}{4}(\|\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)\|^2 - \|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\|^2 + i\|\varphi(\alpha) + i\varphi(\beta)\|^2 - i\|\varphi(\alpha) - i\varphi(\beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\varphi(\alpha + \beta)\|^2 - \|\varphi(\alpha - \beta)\|^2 + i\|\varphi(\alpha + i\beta)\|^2 - i\|\varphi(\alpha - i\beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2) \\ &= (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

□

注 由以上两个命题可知, 保积映射和保范 (保距) 映射等价.

定理 9.10 $\varphi: V^n \longrightarrow U^n$ 是 n 维实 (复) 内积空间上的线性映射, 则下列命题等价:

- (1) φ 保持内积;
- (2) φ 是保积同构;
- (3) φ 将 V 的任一组标准正交基映为 U 的一组标准正交基;
- (4) φ 将 V 的某一组标准正交基映为 U 的一组标准正交基

证明: (1) \implies (2):

$$\varphi \text{ 保持内积 } \implies \ker \varphi = 0.$$

由维数公式可知:

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V = \dim U$$

从而 $\operatorname{Im} \varphi = U$, 即 φ 是满射, 于是 $\varphi: V \longrightarrow U$ 是线性同构.

(2) \implies (3): 任取 V 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 则

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$$

即 $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ 是 U 的一组标准正交基.

(3) \implies (4): 显然.

(4) \implies (1): 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的标准正交基且 $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)\}$ 是 U 的标准正交基, 任取

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum a_i e_i \longleftrightarrow x = (a_1, a_2, \dots, a_n)' \\ \beta &= \sum b_i e_i \longleftrightarrow y = (b_1, b_2, \dots, b_n)'\end{aligned}$$

则

$$\varphi(\alpha) = \sum a_i \varphi(e_i), \varphi(\beta) = \sum b_i \varphi(e_i).$$

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\sum a_i \varphi(e_i), \sum b_i \varphi(e_i)) = \sum a_i \bar{b}_i \quad (9.6)$$

$$(\alpha, \beta) = (\sum a_i e_i, \sum b_i e_i) = \sum a_i \bar{b}_i \quad (9.7)$$

由 (9.6) 式 = (9.7) 式可知, φ 保持内积. \square

推论 9.2 设 V, U 为实(复)内积空间, 则存在保积同构

$$\varphi: V \longrightarrow U \iff \dim V = \dim U.$$

证明: 必要性显然. 下面证明充分性: 设 $\dim V = \dim U = n$, 取 V 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 取 U 的标准正交基 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, 定义一个线性映射:

$$\varphi: V \longrightarrow U$$

$$e_i \longmapsto f_i$$

扩张为 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$. 由定理 9.10(4) 可知, φ 是保积同构. \square

定义 9.12 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若 φ 保持内积, 则

$$\text{称 } \varphi \text{ 为 } \begin{cases} \text{正交变换} & \text{欧氏空间 (实内积空间),} \\ \text{酉变换} & \text{酉空间 (复内积空间).} \end{cases}$$

由定理 9.9 可知, φ 为可逆算子.

定理 9.11 设 φ 为有限维空间 V 上的线性算子, 则

$$\varphi \text{ 为正交算子 (酉算子)} \iff \varphi \text{ 可逆且 } \varphi^* = \varphi^{-1}.$$

证明: 必要性 (\implies)

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\varphi^{-1}(\beta))) = (\alpha, \varphi^{-1}(\beta)) = (\alpha, \varphi^*(\beta)).$$

充分性 (\impliedby)

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \varphi^*(\varphi\beta)) = (\alpha, \varphi^{-1}(\varphi(\beta))) = (\alpha, \beta).$$

\square

定义 9.13 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A' = A^{-1}$, 则称 A 为正交矩阵; 设 $C \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $\overline{C}' = C^{-1}$, 则称 C 为酉矩阵.

定理 9.12 设 φ 为 n 维内积空间 V 上的线性算子, 则

φ 为正交算子 (酉算子) $\iff \varphi$ 在任 (某) 一组标准正交基下的表示矩阵为正交矩阵 (酉矩阵).

证明: 任取 V 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 设 φ 的表示矩阵为 A , 则 φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\begin{cases} A' & V \text{ 为欧氏空间,} \\ \overline{A}' & V \text{ 为酉空间.} \end{cases}$

φ 为正交算子 (酉算子), 由定理 9.11 可知, φ 可逆且 $\varphi^* = \varphi^{-1}$. 由线性变换及其表示矩阵之间的一一对应性可知, φ^* 与 φ^{-1} 在同一组标准正交基下有相同的表示矩阵, 即

$$\begin{cases} A' = A^{-1} (\text{即 } A \text{ 为正交矩阵}) & V \text{ 为欧氏空间时,} \\ \overline{A}' = A^{-1} (\text{即 } A \text{ 为酉矩阵}) & V \text{ 为酉空间时.} \end{cases}$$

□

定理 9.13 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则下列命题等价:

- (1) A 为正交矩阵;
- (2) A 的 n 个行分块向量是 \mathbb{R}_n (标准内积) 的一组标准正交基;
- (3) A 的 n 个列分块向量是 \mathbb{R}^n (标准内积) 的一组标准正交基.

证明: 这里只简要证明 (2)-(3).

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, 其中, α_i 是 A 的行分块向量. 依题意,

$$I_n = AA' = A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

$$a_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j' = (\alpha_i, \alpha_j)_{\mathbb{R}_n} = \delta_{ij}$$

上式中, a_{ij} 即 A 的第 (i, j) 元素.

(3) 设 $A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 其中, β_i 是 A 的列分块向量. 依题意,

$$I_n = A'A = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \dots \\ \beta_n' \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \beta'_i \cdot \beta_j = (\beta_i, \beta_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}.$$

□

定理 9.14 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则下列命题等价:

- (1) A 为酉矩阵;
- (2) A 的 n 个行分块向量是 \mathbb{C}_n (标准内积) 的一组标准正交基;
- (3) A 的 n 个列分块向量是 \mathbb{C}^n (标准内积) 的一组标准正交基.

证明: 证明和上个定理完全一致, 下面是简要证明思路:

$$A \text{ 为酉矩阵} \iff A\bar{A}' = I_n \iff \bar{A}'A = I_n.$$

□

例 9.17 (1) 正交矩阵是特殊的酉矩阵;

(2) I_n 是正交矩阵或酉矩阵;

(3) $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}$ 是正交阵 $\iff d_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n$;

(4) 二阶正交阵分类:

(I) 旋转 θ 角度

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, |A| = 1;$$

(II) 反射

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, |A| = -1.$$

命题 9.5 (1) 酉阵的行列式的模长为 1, 正交阵的行列式值为 ± 1 ;

(2) 酉阵的特征值模长为 1.

证明: (1)

$$\begin{aligned} A\bar{A}' = I_n &\implies 1 = |I_n| = |A\bar{A}'| = |\det(A)|^2 \\ &\implies |\det(A)| = 1 \end{aligned}$$

(2) 设

$$A\alpha = \lambda_0\alpha, 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}^n, \lambda_0 \in \mathbb{C}, \quad (9.8)$$

则

$$\bar{\alpha}'\bar{A}' = \bar{\lambda}_0\bar{\alpha}' \quad (9.9)$$

将(9.9)式左右两边分别左乘到(9.8)式左右两边, 得:

$$\overline{\alpha}'\alpha = |\lambda_0|^2\overline{\alpha}'\alpha,$$

从而 $|\lambda_0| = 1$. □

定理 9.15 (QR 分解定理) 设 A 为 n 阶实 (复) 方阵, 则

$$A = QR$$

其中 Q 为正交阵 (酉阵), R 为上三角阵且主对角元素全大于等于 0. 进一步, 若 A 非异, 则上述分解必唯一.

证明: 设 $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, 其中 \mathbf{u}_i 是 A 的列分块向量. 作一个推广的 Gram-Schmidt 正交化过程 (因为不能确定 \mathbf{u}_i 是否线性无关): 目标是最终得到一个列向量组 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ 是正交向量组, 其中 \mathbf{w}_i 是 $\mathbf{0}$ 或者是单位向量.

归纳法: 设 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k-1}\}$ 已经构建好, 现求 \mathbf{w}_k . 令

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \text{ 则令 } \mathbf{w}_k = \mathbf{0}; \\ \text{若 } \mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}, \text{ 则令 } \mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|}; \end{array} \right\} \text{ 得到正交向量组 } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}.$$

因此,

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j + \|\mathbf{u}_k\| \mathbf{w}_k, (1 \leq k \leq n).$$

$$A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n) \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & * & * & * \\ & \|\mathbf{v}_2\| & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \|\mathbf{v}_n\| \end{pmatrix}.$$

令上式中的矩阵为 R , 则若某个 $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, 则 R 的第 i 行全为 0. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 中有 r 个非零向量 $\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \dots, \mathbf{w}_{i_r}$, 将其扩张为全空间 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基 $\{\widetilde{\mathbf{w}}_1, \widetilde{\mathbf{w}}_2, \dots, \widetilde{\mathbf{w}}_n\}$, 其中 $\widetilde{\mathbf{w}}_j = \mathbf{w}_j, j = i_1, i_2, \dots, i_r$, 令 $(\widetilde{\mathbf{w}}_1, \widetilde{\mathbf{w}}_2, \dots, \widetilde{\mathbf{w}}_n) = Q$, 则 Q 为正交阵, 且

$$A = QR.$$

□

9.5 自伴随算子

引理 9.6 内积空间 V 中两组标准正交基之间的过渡矩阵为正交阵 (欧氏空间) 或酉阵 (酉空间).

证明: 取欧氏空间 V 的两组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, 设过渡矩阵为 $P = (a_{ij})_{n \times n}$, 即

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)P.$$

则

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, f_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}e_i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \delta_{jk} = (f_j, f_k) &= \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \sum_{i=1}^n a_{ik}e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} \end{aligned}$$

即 P 的 n 个列分块向量是 \mathbb{R}^n (标准内积) 的一组标准正交基, 因此 P 为正交阵. 同理可证酉空间时的结论, 只需把上式中的 a_{ik} 加共轭即可. \square

注 线性算子 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在不同基下表示阵的相似关系:

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} &\xrightarrow{\text{表示阵}} A \\ \{f_1, f_2, \dots, f_n\} &\xrightarrow{\text{表示阵}} B \end{aligned}$$

则 A 与 B 相似, 即存在可逆阵 P , 使得

$$B = P^{-1}AP = \begin{cases} P'AP & V \text{ 为欧氏空间} \\ \overline{P}'AP & V \text{ 为酉空间} \end{cases}$$

定义 9.14 设 $A, B \in \mathbb{R}_n$, 若存在正交阵 P , 使得 $B = P'AP$, 则称 A 与 B 正交相似.

设 $A, B \in \mathbb{C}_n$, 若存在酉阵 P , 使得 $B = \overline{P}'AP$, 则称 A 与 B 酉相似.

注 正交相似与酉相似是等价关系.

(1) 自反性: A 与 A 正交相似, 取 $P = I_n$ 即可:

$$A = I_n' A' I_n.$$

(2) 对称性: A 与 B 正交相似, 则 B 与 A 正交相似, 取 $P = P^{-1}$ 即可:

$$B = P'AP \implies A = (P^{-1})'BP^{-1}.$$

(3) 传递性: A 与 B 正交相似, B 与 C 正交相似, 则 A 与 C 正交相似:

$$\begin{aligned} B &= P'AP, C = Q'BQ \\ \implies C &= (PQ)'A(PQ). \end{aligned}$$

定义 9.15 设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若 $\varphi^* = \varphi$, 则称 φ 为自伴随算子. 欧氏空间上的自伴随算子称为对称算子, 酉空间上的自伴随算子称为 Hermite 算子.

例 9.18 V 是 n 维内积空间, U 为其子空间, $V = U \oplus U^\perp$. 设 E 为 V 到 U 的正交投影算子, 则 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有

$$\begin{aligned} (E(\alpha), \beta) &= (\alpha, E(\beta)) \\ \implies E^* &= E \end{aligned}$$

因此, E 是自伴随算子.

推论 9.3 设 φ 是 n 维内积空间上的线性算子, 则

$$\varphi \text{ 是自伴随算子} \iff \varphi \text{ 在某 (任) 一组标准正交基下表示阵为 } \begin{cases} \text{实对称阵} & V \text{ 为欧氏空间} \\ \text{Hermite 阵} & V \text{ 为酉空间} \end{cases}$$

证明: 任取一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 设 φ 在该基下的表示阵为 A , 则 φ^* 在该基下的表示阵为 $A'(\overline{A}')$.

φ 是自伴随算子, 即 $\varphi = \varphi^* \xleftrightarrow{\text{代数与几何的一一对应}} \varphi, \varphi^* \text{ 在某 (任) 一组标准正交基下的表示阵相等,}$

即

$$\begin{cases} A = A' & V \text{ 为欧氏空间} \\ A = \overline{A}' & V \text{ 为酉空间} \end{cases}$$

□

命题 9.6 设 φ 是酉空间 V 上的自伴随算子, 则 φ 的所有特征值都是实数且属于不同特征值的特征向量是正交的.

证明: 任取 φ 的特征值 λ , 特征向量为 α , 则 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$, 即

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha, \alpha) &= (\lambda\alpha, \alpha) = (\varphi(\alpha), \alpha) = (\alpha, \varphi^*(\alpha)) \\ &= (\alpha, \varphi(\alpha)) = (\alpha, \lambda\alpha) = \overline{\lambda}(\alpha, \alpha) \\ \implies \lambda &= \overline{\lambda} \end{aligned}$$

即 λ 是实数.

任取不同特征值 μ , 特征向量 β , 则

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha, \beta) &= (\lambda\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \varphi^*(\beta)) \\ &= (\alpha, \varphi(\beta)) = (\alpha, \mu\beta) = \mu(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

但 $\lambda \neq \mu$, 故 $(\alpha, \beta) = 0$.

□

推论 9.4 Hermite 阵的所有特征值都是实数, 且属于不同特征值的特征向量相互正交.

任一实对称阵都是 Hermite 阵, 从而上述结论对实对称阵也成立.

推论 9.5 设 φ 为欧氏空间上的自伴随算子, 则 φ 的特征值都是实数且属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明: 任一标准正交基下, φ 的表示矩阵为 A , 由推论 9.3 可知, A 为实对称阵, 又由推论 9.4 可知, A 的特征值都是实数, A 的特征值全为实数, 存在实特征向量, 且不同特征值的特征向量相互正交. 根据几何和代数的一一对应性, 可得结论. \square

定理 9.16 设 φ 为 n 维内积空间 V 上的自伴随算子, 则存在标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 使得 φ 在该基下的表示阵为实对角阵.

证明: 取 φ 的一个特征值 λ , 且对应的特征向量为 $\alpha \in V$, 令 $e_1 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$, 则 e_1 是 φ 的单位特征向量, 下面对维数 n 进行归纳证明.

$n = 1$ 时显然成立.

假设 $\dim V = n - 1$ 时结论成立, 下面证明 $\dim V = n$ 时结论也成立.

令 $U = L(e_1)^\perp$, 则 $\dim U = n - 1$, 根据命题 9.2 可得:

$$L(e_1) \text{ 是 } \varphi - \text{不变子空间} \implies U \text{ 是 } \varphi^* - \text{不变子空间} \implies U \text{ 是 } \varphi - \text{不变子空间}.$$

作限制算子 $\varphi|_U : U \rightarrow U$, 则 $\forall u, v \in U \subseteq V$, 有

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi^*(v)) = (u, \varphi(v)) \iff (\varphi|_U(u), v) = (u, \varphi|_U(v)).$$

由此可推出 $\varphi|_U$ 是自伴随算子. 由归纳假设, 存在 U 标准正交基 $\{e_2, \dots, e_n\}$ 使得 $\varphi|_U$ 在该基下的表示阵为实对角阵 $\text{diag}\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 从而

$$V = L(e_1) \oplus U,$$

由此可得, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 标准正交基, 且 φ 在该基下的表示阵为

$$\text{diag}\{\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

\square

定理 9.17 设 A 为 n 阶实对称阵 (或 Hermite 阵), 则存在正交阵 (或酉阵) P 使得 $P'AP$ (或 $\bar{P}'AP$) 为实对角阵.

证明: 构造 A 对应的线性算子:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n (\text{标准内积})$$

$$\alpha \longmapsto A\alpha.$$

φ 在标准单位基下 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 的表示阵即为 A ,

A 为 Hermite 阵 $\implies \varphi$ 为自伴随算子,

由定理 9.16 可知, 存在 \mathbb{C}^n 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 使得 φ 在该基下的表示阵为实对称阵 Λ . 从而

$$\begin{aligned}(\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_n)) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)\Lambda, \\ A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)\Lambda.\end{aligned}$$

令 $P = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 P 为酉阵, 因此 $\overline{P}'AP = \Lambda$. □

定义 9.16 实对称阵 (或 Hermite 阵) 在正交相似 (或酉相似) 关系下的全系不变量是全体特征值, 正交相似 (或酉相似) 标准型是特征值构成的是对称阵.

证明: 特征值是正交相似不变量, 下面证是全体不变量.

设 A 和 B 是两个实对称阵, 它们的特征值都是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则存在正交阵 P, Q 使得

$$P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Q'BQ = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$$

其中 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列. 上式中, 两个对角阵可以通过合同变换相互转化:

$$P'_{ij} \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n\} P_{ij} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n\}, \quad (9.10)$$

上式中 P_{ij} 是初等阵, 因此

$$P'_{ij} = P_{ij}, P_{ij}^2 = I_n \implies P'_{ij}P_{ij} = I_n.$$

从而 P_{ij} 是正交阵, 式 (9.10) 是正交相似变换. 多次利用式 (9.10) 可得, 经过若干次正交相似变换,

$$\text{diag}\{\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n}\} \xrightarrow{\text{多次正交相似变换}} \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

因此, A, B 正交相似. □

评论

$$B = P'AP = P^{-1}AP,$$

因此, 正交相似变换既是合同变换, 又是相似变换.

几何上看,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}'A\mathbf{x},$$

若要进行线性变换:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y},$$

则矩阵 C 必须保证度量不变性, 即

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)C,$$

其中 \mathbf{f}_i 是和 \mathbf{e}_i 都必须是标准正交基, 因此 C 必须是正交阵. 从而

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \mathbf{y}'(C'AC)\mathbf{y}.$$

上式为正交相似变换或正交合同变换.

推论 9.6 设 $f = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ 为实二次型, 实对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则存在正交变换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 使得

$$f = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

f 的正惯性指数为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中正数的个数, 负惯性指数为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中负数的个数, 二次型的秩为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中非零数的个数.

推论 9.7 设 A 为 n 阶实对称阵, 则

$$A \begin{cases} \text{正定} \\ \text{负定} \\ \text{半正定} \\ \text{半负定} \end{cases} \iff A \text{ 的全体特征值都 } \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

例 9.19

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

求正交阵 P 使得 $P'AP$ 为对角阵.

解:

$$|\lambda I_3 - A| = \left| (\lambda - 2)I_3 - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

根据降阶公式:

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|, m \geq n,$$

$$\begin{aligned} |\lambda I_3 - A| &= (\lambda - 2)^2 \left| (\lambda - 2)I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) \end{aligned}$$

因此, 特征值为 8, 2, 2.

$$\lambda_1 = 8 \longleftrightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 2$ 时,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{0} \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对 α_2, α_3 进行正交化, 得到

$$\alpha'_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$, 则

$$P'AP = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

例 9.20 A 为 3 阶实对称阵, 其特征值为 0, 3, 3. 特征值 0 对应的特征向量为 $v_1 = (1, 1, 1)'$, 特征值 3 对应的特征向量为 $v_2 = (-1, 1, 0)'$, 求 A .

解: 设特征值 3 对应的另一个特征向量 $v_3 = (x_1, x_2, x_3)'$ 且与 v_1 及 v_2 正交, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \implies v_3 = (1, 1, -2)'.$$

标准化:

$$v_1 \longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_2 \longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{0} \end{pmatrix}, \quad v_3 \longrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

令 $P = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 则 P 为正交阵且 $P'AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. 于是

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} P' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 9.21 A 为 n 阶实对称阵且 $A^3 = I_n$, 求证: $A = I_n$.

证明: 任取 A 的特征值 λ , 则 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda^3 = 1$, 即 $\lambda = 1$. 存在正交阵 P 使得

$$P'AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cdots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I_n \implies A = PI_nP' = I_n.$$

□

注 上题中实对称阵的条件太强, 可以改为 A 的特征值全为实数且 $A^3 = I_n$. 证明过程可以改为:

任取 A 的特征值 λ , 则 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda^3 = 1$, 即 $\lambda = 1$, 则

$$(A - I_n)(A^2 + A + I_n) = 0 \xrightarrow{A^2 + A + I_n \text{ 为非异阵}} A - I_n = 0 \implies A = I_n.$$

9.6 复正规算子

V 为酉空间, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 为标准正交基, 使得 φ 的表示矩阵是复对角阵 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 即

$$(\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)\Lambda \iff \varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n).$$

φ^* 的表示矩阵为

$$\overline{\Lambda}' = \{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_n\} \iff \varphi^*(\mathbf{e}_i) = \overline{\lambda}_i \mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n).$$

$$\varphi\varphi^*(\mathbf{e}_i) = \varphi(\overline{\lambda}_i \mathbf{e}_i) = |\lambda_i|^2 \mathbf{e}_i \quad (9.11)$$

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{e}_i) = \varphi^*(\lambda_i \mathbf{e}_i) = |\lambda_i|^2 \mathbf{e}_i \quad (9.12)$$

$$(9.11)\text{式} = (9.12)\text{式}, 1 \leq \forall i \leq n \implies \varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$$

定义 9.17 设 V 为有限维内积空间, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 φ 为正规算子.

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $AA' = A'A$, 则称 A 为实正规阵;

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $A\overline{A}' = \overline{A}'A$, 则称 A 为复正规阵.

例 9.22 (1) 自伴随算子是正规算子, $\because \varphi = \varphi^*$;

(2) 正交算子 (酉算子) 是正规算子, $\because \varphi^* = \varphi^{-1}$;

(3) Hermite 阵, 酉阵都是复正规阵;

(4) 是对称阵, 正交阵都是实正规阵.

引理 9.7 设 V 为欧氏空间 (酉空间), $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 则 φ 是正规算子, 当且仅当 φ 在某 (任) 一标准正交基下的表示矩阵为实正规阵 (复正规阵).

证明: 任取 V 的一组标准正交基, 设 φ 的表示阵为 A , 则 φ 在同一组标准正交基下有相同的表示矩阵为 $\begin{cases} A' & V \text{ 为欧氏空间时,} \\ \bar{A}' & V \text{ 为酉空间时.} \end{cases}$ φ 为正规算子, 即 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$. 因此, $\varphi\varphi^*$ 与 $\varphi^*\varphi$ 在同一组基下表示矩阵相同. 即

$$\begin{cases} AA' = A'A & V \text{ 为欧氏空间时,} \\ A\bar{A}' = \bar{A}'A & V \text{ 为酉空间时.} \end{cases}$$

□

评论 酉空间 V 上的线性算子 φ 在某组标准正交基下的表示阵为复对角阵, 则 φ 是正规算子. 那么反过来是否成立?

引理 9.8 设 φ 是酉空间 V 上的正规算子,

(1) $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|, \forall \alpha \in V$;

(2) α 是 φ 关于特征值 λ 的特征向量, 等价于 α 是 φ^* 关于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量;

(3) φ 的关于不同特征值的特征向量相互正交.

证明: (1)

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \varphi^*\varphi(\alpha)) = (\alpha, \varphi\varphi^*(\alpha)) = (\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha)).$$

(2) 先证 $\lambda I - \varphi$ 也是正规算子:

$$\because (\lambda I - \varphi)^* = \bar{\lambda}I - \varphi^*,$$

$$\therefore (\lambda I - \varphi)(\lambda I - \varphi)^* = (\lambda I - \varphi)(\bar{\lambda}I - \varphi^*) = |\lambda|^2 I - \bar{\lambda}\varphi - \lambda\varphi^* + \varphi\varphi^*, \quad (9.13)$$

$$(\lambda I - \varphi)^*(\lambda I - \varphi) = (\bar{\lambda}I - \varphi^*)(\lambda I - \varphi) = |\lambda|^2 I - \bar{\lambda}\varphi - \lambda\varphi^* + \varphi^*\varphi. \quad (9.14)$$

由于 φ 是正规算子, 因此 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 所以, (9.13) 式 = (9.14) 式.

由 (1) 可以推出:

$$\|(\lambda I - \varphi)(\alpha)\| = \|(\bar{\lambda}I - \varphi^*)(\alpha)\|, \forall \alpha \in V.$$

又因为 $\alpha \neq 0$ 且 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$, 因此,

$$(\lambda I - \varphi)(\alpha) = 0 \iff (\bar{\lambda}I - \varphi^*)(\alpha) = 0 \iff \varphi^*(\alpha) = \bar{\lambda}\alpha, \alpha \neq 0.$$

(3) 设 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha, \varphi(\beta) = \mu\beta$, 且 $\lambda \neq \mu$, 则 $\varphi^*(\beta) = \bar{\mu}\beta$,

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha, \beta) &= (\varphi(\alpha), \beta) \\ &= (\alpha, \varphi^*(\beta)) = (\alpha, \bar{\mu}\beta) \\ &= \mu(\alpha, \beta) \\ \implies (\alpha, \beta) &= 0.\end{aligned}$$

□

定理 9.18 (Schur 定理) 设 φ 是酉空间 V 上的线性算子, 则存在 V 上的标准正交基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

证明: 对 $n = \dim V$ 维数进行归纳. $n = 1$ 时显然成立, 假设 $\dim V < n$ 时结论成立, 下面证 n 维的情形.

先取 φ^* 的特征值 λ 及特征向量 α , 令

$$e_n = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \quad \varphi^*(e_n) = \lambda e_n.$$

再令

$$U = L(e_n)^\perp, \quad \text{则 } \dim U = n - 1,$$

由此可得:

$$L(e_n) \text{ 是 } \varphi^* \text{ - 不变子空间 } \implies U \text{ 是 } (\varphi^*)^* = \varphi \text{ - 不变子空间.}$$

做限制 $\varphi|_U$, 由归纳假设可得 $\exists U$ 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, 使得 $\varphi|_U$ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵. 由此可知, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的标准正交基. 则

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_{n-1}), \varphi(e_n)) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \vdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & \vdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1, n-1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

□

推论 9.8 (Schur 定理) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在酉阵 P 使得 $\bar{P}'AP$ 为上三角阵.

定理 9.19 设 φ 是酉空间 V 上的线性算子, 则 φ 为正规算子的充分必要条件是 φ 在某组标准正交基下的表示阵为复对角阵.

证明: 充分性已证, 下面证明必要性.

根据 Schur 定理, 存在标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 使得 φ 的表示阵为上三角阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, φ^* 在同一组基的表示阵为 \bar{A}' , 则

$$\begin{aligned}
 & (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_{n-1}), \varphi(e_n)) \\
 &= (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 & (\varphi^*(e_1), \varphi^*(e_2), \dots, \varphi^*(e_{n-1}), \varphi^*(e_n)) \\
 &= (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n-1,1} & \bar{a}_{n-1,2} & \cdots & \bar{a}_{n-1,n-1} & 0 \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{n,n-1} & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(e_1) &= a_{11}e_1 \\
 &\xLeftrightarrow{\text{引理9.8(3)}} \varphi^*(e_1) = \bar{a}_{11}e_1,
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

又因为

$$\varphi^*(e_1) = \bar{a}_{11}e_1 + \bar{a}_{12}e_2 + \cdots + \bar{a}_{1n}e_n, \tag{9.16}$$

由(9.15)式=(9.16)式得,

$$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0.$$

同理,

$$\begin{aligned}
 \varphi(e_2) &= a_{22}e_2 \\
 &\xLeftrightarrow{\text{引理9.8(3)}} \varphi^*(e_2) = \bar{a}_{22}e_2,
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

又因为

$$\varphi^*(e_2) = \bar{a}_{22}e_2 + \bar{a}_{23}e_3 + \cdots + \bar{a}_{2n}e_n, \tag{9.18}$$

由(9.17)式=(9.18)式得,

$$\bar{a}_{23} = \bar{a}_{24} = \cdots = \bar{a}_{2n} = 0.$$

反复运用上述方法可得, $\bar{a}_{ij} = 0, \forall i < j$ 都成立, 从而 A 为对角阵. \square

推论 9.9 设 A 为复正规阵, 则存在酉阵 P 使得 $\bar{P}'AP$ 为复对角阵.

评论 同理可证, 复正规阵在酉相似关系下的全系不变量为全体特征值, 其酉相似标准型为特征值构成的对角阵. 酉矩阵是特殊的复正规阵.

推论 9.10 设 U 为酉阵, 则存在酉阵 P 使得 $\overline{P}'UP = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}, |c_i| = 1$.

证明: 由推论9.9可知, 存在酉阵 P 使得 $\overline{P}'UP = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}, c_i \in \mathbb{C}$. 由于 \overline{P}', U, P 都是酉阵, 因此 $\text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 也必是酉阵, 由此可推出 c_i 是模长为 1 的复数. \square

定理 9.20 设 φ 是酉空间上的线性算子, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 φ 全体不同特征值, V_1, V_2, \dots, V_k 是对应的特征子空间. 则

$$\varphi \text{ 是正规算子} \iff V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

证明: 先证必要性 (\Rightarrow):

$$\begin{aligned} \varphi \text{ 是正规算子} &\implies \varphi \text{ 可对角化} \\ &\implies V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k. \end{aligned} \quad (9.19)$$

又由引理9.8(3) 可得结论:

$$V_i \perp V_j, \forall i \neq j. \quad (9.20)$$

由(9.19)式和(9.20)式可推出:

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

再证充分性 (\Leftarrow):

取 V_i 的标准正交基拼成 V 的一组标准正交基, 这些基向量都是特征向量, 从而 φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵, 从而 φ 为正规算子. \square

定理 9.21 φ 是欧氏空间上的自伴随算子, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是全体不同特征值, V_1, V_2, \dots, V_k 是对应的特征子空间, 则

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

证明: 证明方法和定理9.20相同. \square

A 为 n 阶实对称阵, 特征值为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. 则存在正交阵 P 使得

$$P'AP = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

设

$$P = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n),$$

则 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的标准正交基, 从而

$$A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n).$$

对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 设

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n,$$

则

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{x}' A \mathbf{x} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \end{aligned}$$

于是,

$$\lambda_1 \mathbf{x}' \mathbf{x} \leq \mathbf{x}' A \mathbf{x} \leq \lambda_n \mathbf{x}' \mathbf{x}.$$

上式中, 当 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ 时, 左边等号成立; 当 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ 时, 右边等号成立. 从而得出:

$$\max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} = \lambda_n, \quad \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} = \lambda_1.$$

上式可估计出 λ_n, λ_1 , 但是中间的特征值不能估计. 为了估计所有特征值, 有下面的定理.

定理 9.22 (极小极大定理, Courant-Fischer 定理)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \min_{\dim V_i = i} \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} \\ &= \max_{\dim V_i = n+1-i} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

证明: 先固定某个 $V_i \subseteq \mathbb{R}^n, U = L(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \cdots, \mathbf{e}_n)$. 则

$$\dim V_i = i, \quad \dim U = n + 1 - i.$$

断言 $V_i \cap U \neq \mathbf{0}$, \because 若 $V_i \cap U = \mathbf{0}$, 则 $\mathbb{R}^n \supseteq V_i \oplus U$, 维数矛盾. 任取 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}_0 \in V_i \cap U, \mathbf{x}_0 = x_i \mathbf{e}_i + x_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$. 则

$$\mathbf{x}_0' A \mathbf{x}_0 = \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j^2, \quad \mathbf{x}_0' \mathbf{x}_0 = \sum_{j=i}^n x_j^2.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}_0' A \mathbf{x}_0}{\mathbf{x}_0' \mathbf{x}_0} &\geq \lambda_i \\ \implies \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} &\geq \lambda_i \\ \implies \min_{V_i} \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} &\geq \lambda_i. \end{aligned}$$

任取 $W = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_i), \dim W = i$, 再取 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in W, \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_i \mathbf{e}_i$, 则

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} = \sum_{j=1}^i \lambda_j x_j^2, \quad \mathbf{x}' \mathbf{x} = \sum_{j=1}^i x_j^2.$$

以上两式可推出:

$$\max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in W} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} \leq \lambda_i \text{ 且 } \mathbf{x} = \mathbf{e}_i \text{ 时取等号.}$$

从而

$$\lambda_i = \min_{\dim V_i = i} \max_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}}.$$

构建两个类似的空间, 类似可证

$$\lambda_i = \max_{\dim V_i = n+1-i} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_i} \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}}.$$

□

定理 9.23 (Cauchy 交错定理) 设 A 为 n 阶实对称阵, 它的全体特征值为

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

设 A_m 为 A 的 m 阶主子式, 它的全体特征值为

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_m.$$

则

$$\lambda_i \leq \mu_i, \quad \lambda_{n+1-i} \geq \mu_{m+1-i}, \quad \forall i.$$

定理 9.24 (Weyl 摄动定理) 设 A 为 n 阶实对称阵, 它的全体特征值为

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

设 B 为 n 阶实对称阵, 它的全体特征值为

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n.$$

则 $A + B$ 也为 n 阶实对称阵, 设它的全体特征值为

$$\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_n,$$

则

$$\lambda_i + \mu_1 \leq \nu_i \leq \lambda_i + \mu_n, \quad \forall i.$$

9.7 实正规矩阵

在欧氏空间 (实内积空间) V 下, 正规算子 φ 未必有实的特征值和特征向量. 不能像酉空间中的正规算子一样, 直接求特征值和特征向量. 如何求实正规算子的正交相似标准型?

Step1: φ 的极小多项式的不可约分解.

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k,$$

使得 $\varphi|_{W_i}$ 仍为正规算子且极小多项式次数 ≤ 2 .

Step2: 极小多项式次数为 2 的不可约多项式的正规算子的结构.

引理 9.9 φ 为实正规算子, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 则 $f(\varphi)$ 仍为实正规算子.

证明: 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= a_m \varphi^m + a_{m-1} \varphi^{m-1} + \cdots + a_1 \varphi + a_0 I \\ f(\varphi)^* &= \bar{a}_m (\varphi^*)^m + \bar{a}_{m-1} (\varphi^*)^{m-1} + \cdots + \bar{a}_1 \varphi^* + \bar{a}_0 I \\ &= a_m (\varphi^*)^m + a_{m-1} (\varphi^*)^{m-1} + \cdots + a_1 \varphi^* + a_0 I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because (\varphi\psi)^* &= \psi^* \varphi^*, \quad (\varphi^m)^* = (\varphi^*)^m, \\ \therefore f(\varphi)^* &= a_m (\varphi^*)^m + a_{m-1} (\varphi^*)^{m-1} + \cdots + a_1 \varphi^* + a_0 I \\ &= f(\varphi^*). \end{aligned}$$

因此,

$$f(\varphi)f(\varphi)^* = f(\varphi)f(\varphi^*) = f(\varphi^*)f(\varphi) = f(\varphi)^*f(\varphi).$$

□

引理 9.10 φ 为正规算子, $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, $(f(x), g(x)) = 1$. 任取 $\alpha \in \ker f(\varphi), \beta \in \ker g(\varphi)$, 则 $(\alpha, \beta) = 0$.

证明: 依题意, 存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

令 $x = \varphi$, 得

$$f(\varphi)u(\varphi) + g(\varphi)v(\varphi) = I_V.$$

将上式两边作用到 α 上, 得

$$u(\varphi)f(\varphi)(\alpha) + v(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = \alpha = u(\varphi)0 + v(\varphi)g(\varphi)(\alpha) = g(\varphi)v(\varphi)(\alpha).$$

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (g(\varphi)v(\varphi)(\alpha), \beta) \\ &= (v(\varphi)(\alpha), g(\varphi)^*(\beta)). \end{aligned} \tag{9.21}$$

由 $\beta \in \ker g(\varphi)$ 可知 $g(\varphi)(\beta) = 0$, 又因为 φ 为正规算子, 所以 $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$. 由引理 9.9 可知, $g(\varphi)$ 也是正规算子, 因此

$$\begin{aligned} \|g(\varphi)(\beta)\| &= \|g(\varphi)^*(\beta)\| = 0 \\ \implies g(\varphi)^*(\beta) &= 0. \end{aligned} \tag{9.22}$$

将(9.22)式代入(9.21)式得

$$(\alpha, \beta) = (v(\varphi)(\alpha), 0) = 0.$$

□

定理 9.25 φ 为实正规算子, $g(x)$ 是 φ 的极小多项式. 设 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$ 是 $g(x)$ 的所有互异并首一不可约因式, $W_i = \ker g_i(\varphi)$, 则

$$(1) g(x) = g_1(x)g_2(x) \cdots g_k(x) \text{ 且 } \deg g_i(x) \leq 2;$$

$$(2) V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k;$$

$$(3) W_i \text{ 是 } \varphi \text{ 的不变子空间, 且 } \varphi|_{W_i} \text{ 是实正规算子且极小多项式为 } g_i(x).$$

证明: (1) 任取 V 的一组标准正交基, φ 的表示阵为 A , 则 A 为实正规阵 ($AA' = A'A$). 将 A 看成复矩阵, 则 A 为复正规阵. 由推论 9.9 可知, A 酉相似于对角阵, 从而 A 可对角化, 等价于 $g(x)$ 在 \mathbb{C} 上无重根, 从而 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上无重根, 即

$$g(x) = g_1(x)g_2(x) \cdots g_k(x).$$

(2) 令

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{g(x)}{g_i(x)} = \prod_{j \neq i} g_j(x), \\ \implies (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) &= 1, \\ \implies \exists u_i(x) \text{ s. t. } f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) + \cdots + f_k(x)u_k(x) &= 1. \end{aligned}$$

令 $x = \varphi$, 得

$$f_1(\varphi)u_1(\varphi) + f_2(\varphi)u_2(\varphi) + \cdots + f_k(\varphi)u_k(\varphi) = I_V.$$

任取 $\alpha \in V$, 将上式两边作用到 α 上, 得

$$f_1(\varphi)u_1(\varphi)(\alpha) + f_2(\varphi)u_2(\varphi)(\alpha) + \cdots + f_k(\varphi)u_k(\varphi)(\alpha) = \alpha.$$

将 $g_i(\varphi)$ 作用到上式中任意项上, 即

$$\begin{aligned} g_i(\varphi)(f_i(\varphi)u_i(\varphi)(\alpha)) &= g(\varphi)u_i(\varphi)(\alpha) \stackrel{g(\varphi)=0}{=} 0 \\ \implies f_i(\varphi)u_i(\varphi)(\alpha) &\in \ker g_i(\varphi) = W_i. \end{aligned}$$

从而

$$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k.$$

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq k, (g_i(x), g_j(x)) = 1,$$

由引理 9.10 可知,

$$W_i \perp W_j.$$

于是

$$V = W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k.$$

(3) 先证 W_i 是 φ -不变子空间, 也是 φ^* -不变子空间.

任取 $w \in W_i = \ker g_i(\varphi)$, 即 $g_i(\varphi)(w) = 0$, 由此得

$$\begin{aligned} g_i(\varphi)(\varphi(w)) &= \varphi(g_i(\varphi)(w)) = \varphi(0) = 0 \\ \implies \varphi(w) &\in W_i. \end{aligned}$$

因此 W_i 是 φ -不变子空间. 同理,

$$\begin{aligned} g_i(\varphi)(\varphi^*(w)) &\stackrel{\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi}{=} \varphi^*(g_i(\varphi)(w)) = \varphi^*(0) = 0 \\ \implies \varphi^*(w) &\in W_i. \end{aligned}$$

因此 W_i 也是 φ^* -不变子空间.

做限制 $\varphi|_{W_i}, \varphi^*|_{W_i}$, 对 $\forall \alpha, \beta \in W_i$, 有

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha), \beta) &= (\alpha, \varphi^*(\beta)) \\ \implies (\varphi|_{W_i}(\alpha), \beta) &= (\alpha, \varphi^*|_{W_i}(\beta)) \\ \implies (\varphi|_{W_i})^* &= \varphi^*|_{W_i}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\varphi|_{W_i}(\varphi|_{W_i})^* = \varphi|_{W_i}\varphi^*|_{W_i} = \varphi^*|_{W_i}\varphi|_{W_i} = (\varphi^*|_{W_i})^*\varphi|_{W_i}.$$

从而 $\varphi|_{W_i}$ 仍为实正规算子.

因为 $W_i = \ker g_i(\varphi)$, 所以 $\varphi|_{W_i}$ 适合 $g_i(x)$, 即

$$g_i(\varphi)|_{W_i} = 0 \in \mathcal{L}(W_i).$$

$$\begin{aligned} \forall w \in W_i, g_i(\varphi|_{W_i})(w) &= g_i(\varphi)(w) = 0 \\ \implies \varphi|_{W_i} \text{ 的极小多项式整除 } g_i(x). \end{aligned}$$

由于 $g_i(x)$ 是不可约多项式, 所以 $\varphi|_{W_i}$ 的极小多项式 $= g_i(x)$. □

评论 二次不可约多项式都可写成如下形式:

$$g(x) = (x - a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R} \text{ 且 } b \neq 0.$$

下面的引理研究特殊情形:

$$g(x) = x^2 + 1.$$

引理 9.11 φ 为实正规算子, $g(x) = x^2 + 1$ 是 φ 的极小多项式, 任取 $0 \neq v \in V, u = \varphi(v)$, 则 $\|u\| = \|v\|, (u, v) = 0$ 且

$$(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varphi^*(u), \varphi^*(v)) = (u, v) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi^2(\mathbf{v}) = -\mathbf{v},$$

所以, 结论中左边的等式成立.

由 φ 为正规算子, 可得 $\|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\varphi^*(\mathbf{v})\|$; $(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}))$ 且 φ 为实算子, 可得 $(\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\varphi^*(\mathbf{v}), \mathbf{u})$. 因此,

$$\|\varphi(\mathbf{v}) - \mathbf{u}\| + \|\varphi(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\| = 0 \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} &= \|\varphi(\mathbf{v})\|^2 - 2(\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{u}) + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 - 2(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\varphi^*(\mathbf{v})\|^2 + 2(\varphi^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}) + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\varphi^*(\mathbf{u})\|^2 - 2(\varphi^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\implies \|\varphi^*(\mathbf{v}) - \mathbf{u}\|^2 + \|\varphi^*(\mathbf{u}) - \mathbf{v}\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

由(9.24)式可得:

$$\varphi^*(\mathbf{v}) = -\mathbf{u}, \quad \varphi^*(\mathbf{u}) = \mathbf{v}.$$

从而结论中右边的等式成立.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \varphi^*(\mathbf{u})) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

从而 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, -\mathbf{u}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \implies (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

□

引理 9.12 φ 为实正规算子, 极小多项式为 $g(x) = (x - a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. 任取 $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$, 令 $\mathbf{u} = b^{-1}(\varphi - aI_v)(\mathbf{v})$, 则 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ 且

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (\varphi^*(\mathbf{u}), \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

证明:

$$(\varphi - aI_v)^2 + b^2I_v = 0 \implies b^{-1}(\varphi - aI_v)^2 + I_v = 0.$$

令 $\psi = b^{-1}(\varphi - aI_v)(\mathbf{v})$, 则 ψ 的极小多项式为 $g(x) = x^2 + 1$. 由引理9.11可知,

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} = \psi(\mathbf{v}) = b^{-1}(\varphi - aI_v)(\mathbf{v}),$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

且

$$(\psi(\mathbf{u}), \psi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\psi^*(\mathbf{u}), \psi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

反之,

$$\varphi = aI_v + b\psi, \quad \varphi^* = aI_v + b\psi^*.$$

由此可得

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (\varphi^*(\mathbf{u}), \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

□

定理 9.26 φ 为实正规算子, 极小多项式为 $g(x) = (x - a)^2 + b^2, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. 则存在 s 个 2 维子空间 V_i 使得

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_s,$$

且存在 V_i 的标准正交基 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ 使得 $\varphi|_{V_i}$ 的表示阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

证明: 对维数 $n = \dim V$ 进行归纳证明. $n = 0$ 时, 证明已经结束; 当 $n = 1$ 时, $V = L(\mathbf{e})$ 为一维空间, $\varphi(\mathbf{e}) = \lambda_0 \mathbf{e}$, 其中 λ_0 为实特征值. $g(\lambda_0) = (\lambda_0 - a)^2 + b^2 > 0$, 产生矛盾, 因此 n 不可能为 1. 设 $\dim V < n$ 时结论成立, 下面证 n 维的情形.

任取 $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_1 \in V$ 且 $\|\mathbf{v}_1\| = 1$. 令 $\mathbf{u}_1 = b^{-1}(\varphi - aI_V)(\mathbf{v}_1)$. 由引理 9.12 可得:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{v}_1\| = 1, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = 0.$$

令 $V_1 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$, 则 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ 是标准正交基, 且

$$(\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{v}_1)) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (\varphi^*(\mathbf{u}_1), \varphi^*(\mathbf{v}_1)) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

从而 V_1 是 φ -不变子空间且是 φ^* -不变子空间, V_1^\perp 是 φ^* -不变子空间且是 φ -不变子空间. 作限制: $\varphi|_{V_1^\perp}, \varphi^*|_{V_1^\perp}$, 可以证明 $\varphi|_{V_1^\perp}$ 仍为正规算子.

$$\dim V_1^\perp = n - \dim V_1 = n - 2 < n.$$

由归纳假设, 存在 $s - 1$ 个 2 维子空间 V_2, V_3, \dots, V_s 使得

$$V_1^\perp = V_2 \perp V_3 \perp \cdots \perp V_s \implies V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_s.$$

存在 V_i 的标准正交基 $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\}$ 使得 $\varphi|_{V_i}$ 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

φ 在 V 的标准正交基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s\}$ 下表示矩阵为

$$\text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix} \right\}.$$

□

定理 9.27 设 φ 为实正规算子, 则存在 V 的标准正交基使得 φ 的表示阵为

$$\text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{pmatrix}, c_{2r+1}, \cdots, c_n \right\}. \quad (9.25)$$

其中, $a_i, b_i, c_j \in \mathbb{R}$ 且 $b_i \neq 0 (1 \leq i \leq r, 2r+1 \leq j \leq n)$,

证明: 考虑 $\varphi|_{W_i} (1 \leq i \leq k)$.

1° 若极小多项式 $g_i(x) = x - c_i$, 则 $\varphi|_{W_i} = c_i I_{W_i}$.

2° 若极小多项式 $g_i(x) = (x - a_i)^2 + b_i^2, b_i \neq 0$, 则由定理 9.26 可知, 存在 W_i 的标准正交基 $\{u_i, v_i\}$ 使得 $\varphi|_{\bigcup_{i=1}^r V_i}$ 的表示阵为

$$\text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}.$$

结合 1° 和 2°, 即可得结论. □

评论 我们将 (9.25) 式称为实正规算子的正交相似标准形.

实正规算子在正交相似下关系下的全系不变量是全体特征值.

对于 1° 中的限制, 其特征值为 c_i ; 对于 2° 中的限制, 其特征值为 $a_i \pm b_i i$.

推论 9.11 设 A 为正交阵, 则存在正交阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix}, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1 \right\}. \quad (9.26)$$

证明: 存在正交阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{pmatrix}, c_{2r+1}, \cdots, c_n \right\}.$$

上式中, 因为 P, P', A 皆为正交阵, 因此等式左边的矩阵也是正交阵, 从而右边也是正交阵, 即

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{pmatrix}$$

都是正交阵, 且 $c_j^2 = 1, j = 2r+1, \cdots, n$, 即 $c_j = 1$ 或 -1 . 正交阵和它的转置矩阵相乘等于单位阵, 因此

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = I_2 \implies a_i^2 + b_i^2 = 1.$$

设 $a_i = \cos \theta_i, b_i = \sin \theta_i$, 即可得结论. □

推论 9.12 设 A 为实对称阵, 则存在正交阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right\}.$$

证明: 由题意可知:

$$AA' = -A^2 = A'A,$$

存在正交阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ b_r & a_r \end{pmatrix}, c_{2r+1}, \dots, c_n \right\}.$$

$$(P'AP)' = P'A'P = -P'AP,$$

即 $P'AP$ 为反对称阵, 从而其主对角线上的元素全部为 0. 因此

$$a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0, \quad c_{2r+1} = \dots = c_n = 0.$$

□

推论 9.13 实反对称阵的秩为偶数且其特征值为 0 或纯虚数.

证明: 由推论 9.12 的结论可以直接观察得出.

□

9.8 谱

定理 9.28 (谱分析定理) 设 $\begin{cases} V \text{ 为酉空间, } \varphi \text{ 为正规算子} \\ V \text{ 为欧氏空间, } \varphi \text{ 为自伴随算子} \end{cases}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 φ 的全体不同特征值, $V_i = \ker(\varphi - \lambda_i I_V)$ 是对应的特征子空间, 则

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k.$$

设 E_i 为 V 到 V_i 的正交投影算子, 则

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k.$$

上式称为 φ 的谱分解.

证明: 投影算子的性质:

$$(1) E_i E_j = 0 (i \neq j);$$

$$(2) E_i^2 = E_i;$$

$$(3) E_1 + E_2 + \dots + E_k = I_V;$$

$$(4) E_i^* = E_i.$$

断言: $\varphi E_i = \lambda_i E_i$.

任取 $v \in V$, $E_i(v) \in V_i = \ker(\varphi - \lambda_i I_V)$, 即 $(\varphi - \lambda_i I_V)(E_i(v)) = 0$, 即 $\varphi E_i(v) = \lambda_i E_i(v)$, 从而 $\varphi E_i = \lambda_i E_i$.

由此可得

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi I_V = \varphi(E_1 + E_2 + \cdots + E_k) \\ &= \varphi E_1 + \varphi E_2 + \cdots + \varphi E_k \\ &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.\end{aligned}$$

□

引理 9.13 记号同定理9.28, 设

$$f_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i},$$

则

$$E_j = f_j(\varphi).$$

证明:

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k)^2 \\ &= \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \cdots + \lambda_k^2 E_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall m \geq 1, \varphi^m &= (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k)^m \\ &= \lambda_1^m E_1 + \lambda_2^m E_2 + \cdots + \lambda_k^m E_k\end{aligned}$$

设 $f(x) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x^m$, 则

$$\begin{aligned}f(\varphi) &= a_0 I_V + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \cdots + a_m \varphi^m \\ &= a_0 \left(\sum_{i=1}^k E_i \right) + a_1 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i \right) + \cdots + a_m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^m E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (a_0 + a_1 \lambda_i + \cdots + a_m \lambda_i^m) E_i \\ &= \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) E_i.\end{aligned}$$

又由于 $f_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$, 所以

$$f_j(\varphi) = \sum_{i=1}^k f_j(\lambda_i) E_i = E_j.$$

□

定理 9.29 设 φ 是酉空间 V 上的线性算子, 则

$$\varphi \text{ 为正规算子} \iff \exists f(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ 使得 } \varphi^* = \varphi f(\varphi).$$

证明: 充分性 (\Leftarrow):

$$\varphi\varphi^* = \varphi f(\varphi) = f(\varphi)\varphi = \varphi^*\varphi.$$

必要性 (\Rightarrow):

由定理 9.28 做谱分解:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

$$\varphi^* = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i \right)^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i} E_i^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i} E_i.$$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j} f_j(\lambda_i) = \sum_{j=1}^k (\overline{\lambda_j} \prod_{i \neq j} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}),$$

$$f(\varphi) = \sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j} f_j(\varphi) \stackrel{\text{引理 9.13}}{=} \sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j} E_j = \varphi^*.$$

□

定义 9.18 设 V 是有限维内积空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 若对 $\forall \mathbf{0} \neq \alpha \in V$, 有

$$\begin{cases} (\varphi(\alpha), \alpha) > 0 \triangleq \varphi \text{ 正定自伴随算子} \\ (\varphi(\alpha), \alpha) \geq 0 \triangleq \varphi \text{ 半正定自伴随算子} \\ (\varphi(\alpha), \alpha) < 0 \triangleq \varphi \text{ 负定自伴随算子} \\ (\varphi(\alpha), \alpha) \leq 0 \triangleq \varphi \text{ 半负定自伴随算子} \end{cases}.$$

若 V 是欧氏空间, 任取标准正交基, φ 的表示阵为 A , 则 A 为实对称阵. 设 α 的坐标向量为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 则 $\varphi(\alpha)$ 的坐标向量为 $A\mathbf{x}$. 若对 $\forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(\varphi(\alpha), \alpha) = (A\mathbf{x})' \mathbf{x} = \mathbf{x}' A' \mathbf{x} = \mathbf{x}' A \mathbf{x} \begin{cases} > 0 \triangleq A \text{ 正定实对称矩阵} \\ \geq 0 \triangleq A \text{ 半正定实对称矩阵} \\ < 0 \triangleq A \text{ 负定实对称矩阵} \\ \leq 0 \triangleq A \text{ 半负定实对称矩阵} \end{cases}.$$

酉空间有对应的正负定等 Hermite 矩阵的定义.

定理 9.30 设 φ 是酉空间上的正规算子, 则

- (1) 若 φ 的特征值全为实数, 则 φ 为自伴随算子;
- (2) 若 φ 的特征值全部大于或等于 0, 则 φ 为半正定自伴随算子;
- (3) 若 φ 的特征值全部大于 0, 则 φ 为正定自伴随算子;
- (4) 若 φ 的特征值的模长全为 1, 则 φ 为酉算子.

证明: 设

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

(1) φ 的特征值全为实数, 则 $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$,

$$\varphi^* = \overline{\lambda_1} E_1 + \overline{\lambda_2} E_2 + \cdots + \overline{\lambda_k} E_k = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k = \varphi.$$

(2) 任取 $\alpha \in V$, 则

$$\varphi(\alpha) = \lambda_1 E_1(\alpha) + \lambda_2 E_2(\alpha) + \cdots + \lambda_k E_k(\alpha),$$

$$\alpha = E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + \cdots + E_k(\alpha).$$

则

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha), \alpha) &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i(\alpha), \sum_{j=1}^k E_j(\alpha) \right) \\ &= \lambda_1 (E_1(\alpha), E_1(\alpha)) + \cdots + \lambda_k (E_k(\alpha), E_k(\alpha)) \end{aligned}$$

特征值全大于或等于零 ≥ 0 .

(3) 可类似证明.

(4)

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^k \lambda_i E_i, \quad \varphi^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i} E_i. \\ \varphi \varphi^* &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i \right) \left(\sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j} E_j \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_i} E_i = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| E_i = \sum_{i=1}^k E_i = I_V. \end{aligned}$$

□

定理 9.31 设 V 为有限维内积空间, φ 为 V 上的半正定自伴随算子, 则存在唯一的半正定自伴随算子 ψ 使得

$$\varphi = \psi^2.$$

也称 ψ 为 φ 的算术平方根, 记为

$$\psi = (\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

证明: 对 φ 做谱分解:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k,$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 为全体不同的特征值, V_i 为对应的特征子空间, E_i 为从 V 到 V_i 的正交投影算子.

$$\varphi \text{ 为半正定自伴随算子} \iff \lambda_i \geq 0 (1 \leq i \leq k).$$

令 $d_i = \sqrt{\lambda_i} \geq 0$, $\psi = d_1 E_1 + d_2 E_2 + \cdots + d_k E_k$, 则

$$\psi \text{ 也是半正定自伴随算子 } \begin{cases} d_1, d_2, \cdots, d_k \text{ 是 } \psi \text{ 的全体不同特征值} \\ V_i = E_i(V) \text{ 是 } d_i \text{ 的特征子空间} \end{cases}$$

$$\psi^2 = \sum_{i=1}^k d_i^2 E_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i E_i = \varphi.$$

下面证唯一性. 设 θ 是半正定自伴随算子且 $\theta^2 = \varphi$. 设

$$\theta = b_1 F_1 + b_2 F_2 + \cdots + b_k F_k,$$

b_1, b_2, \dots, b_k 为 θ 全体不同的特征值, $b_i \geq 0 (1 \leq i \leq k)$, F_i 为从 V 到特征子空间 $F_i(V)$ 的正交投影算子.

$$\begin{aligned} \varphi = \theta^2 &= b_1^2 F_1 + b_2^2 F_2 + \cdots + b_k^2 F_k \\ &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k. \end{aligned}$$

则 $b_1^2, b_2^2, \dots, b_k^2$ 为互不相同的非负数且

$$V = F_1(V) \perp F_2(V) \perp \cdots \perp F_k(V).$$

因此可知 $b_1^2, b_2^2, \dots, b_k^2$ 为 φ 的全体不同特征值. 从而 $k = r$, 在调整次序后可得

$$b_i^2 = \lambda_i (\forall 1 \leq i \leq k).$$

因此,

$$b_i = \sqrt{\lambda_i} = d_i (1 \leq i \leq k).$$

对 φ 而言, $F_i(V)$ 是特征值 $b_i^2 = \lambda_i$ 的特征子空间, $E_i(V)$ 是特征值 λ_i 的对应的特征子空间. 从而

$$F_i(V) = E_i(V) (1 \leq i \leq k).$$

$$E_i : V \longrightarrow E_i(V), \quad F_i : V \longrightarrow F_i(V).$$

因此

$$E_i = F_i \implies \theta = \psi.$$

□

例 9.23 φ 的表示矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 : V \longrightarrow L(\mathbf{e}_1), \quad E_2 : V \longrightarrow L(\mathbf{e}_2).$$

则

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \cdot E_1 + (-1) \cdot E_2, \\ \varphi^2 &= (1 \cdot E_1 + (-1) \cdot E_2)^2 = 1^2 \cdot E_1 + (-1)^2 \cdot E_2 = E_1 + E_2 = I_2. \end{aligned}$$

推论 9.14 设 A 为半正定的实对称阵 (或 Hermite 阵), 则存在唯一的半正定实对称阵 B 满足

$$A = B^2,$$

称 B 为 A 的算术平方根, 记为

$$B = A^{\frac{1}{2}}.$$

定理 9.32 (极分解定理) 设 V 为有限维内积空间, φ 为线性算子, 则

$$\varphi = \omega\psi,$$

其中 ω 为保积算子, ψ 为半正定自伴随算子, 并且 ψ 由 φ 唯一决定; 若 φ 可逆, 则 ω 也唯一.

先分析一下结论:

若 $\varphi = \omega\psi$, 则

$$\varphi^* = \psi^* \omega^* \xrightarrow{\psi \text{ 自伴随}} \psi \omega^* \xrightarrow{\omega \text{ 保积算子}} \psi \omega^{-1},$$

$$\varphi^* \varphi = \psi \omega^* \omega \psi = \psi \omega^{-1} \omega \psi = \psi^2.$$

若能证明 $\varphi^* \varphi$ 是半正定自伴随算子, 根据前面定理, 则上式会成立. 下面开始证明.

证明: 对 $\forall \alpha \in V$, 有

$$\begin{aligned} (\varphi^* \varphi(\alpha), \alpha) &= (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) \geq 0 \\ \implies \varphi^* \varphi &\text{ 是半正定自伴随算子.} \end{aligned}$$

令 ψ 为 $\varphi^* \varphi$ 的算术平方根, 即 ψ 为半正定自伴随算子且

$$\psi^2 = \varphi^* \varphi. \quad (9.27)$$

由定理9.32可知, ψ 唯一由 φ 决定, 且对于 $\forall \alpha \in V$,

$$\begin{aligned} (\psi \alpha, \psi \alpha) &= (\psi^2(\alpha), \alpha) = (\varphi^* \varphi(\alpha), \alpha) = (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) \\ \implies \|\psi \alpha\| &= \|\varphi \alpha\|. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Case 1: φ 可逆时,

$$\varphi \text{ 可逆} \implies \ker \varphi = \ker \psi = 0.$$

又 $\because \forall \alpha \in \ker \psi$, 即 $\psi \alpha = \mathbf{0}$, 根据(9.28)式可得 $\varphi(\alpha) = \mathbf{0}$. 于是, $\alpha = \mathbf{0}$, 则 $\ker \psi = 0$, 因此

$$\varphi \text{ 可逆} \iff \ker \varphi = 0 \iff \ker \psi = 0 \iff \psi \text{ 可逆}.$$

令 $\omega = \varphi \psi^{-1}$, 下面证 ω 保积.

$$\omega^* = (\varphi \psi^{-1})^* = (\psi^{-1})^* (\varphi)^* = (\psi^*)^{-1} \varphi^* = \psi^{-1} \varphi^*,$$

$$\omega^* \omega = \psi^{-1} \varphi^* \varphi \psi^{-1} \xrightarrow{(9.27) \text{ 式}} \psi^{-1} \psi^2 \psi^{-1} = I_V \longrightarrow \omega \text{ 保积}.$$

Case 2: φ 不可逆时,

$$\ker \varphi = \ker \psi \text{ 且不为零空间}.$$

由维数公式可得

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \operatorname{Im} \psi. \quad (9.29)$$

构造映射

$$\begin{aligned}\eta : \operatorname{Im} \psi &\rightarrow \operatorname{Im} \varphi \\ \psi(\mathbf{v}) &\mapsto \varphi(\mathbf{v})\end{aligned}$$

若 $\psi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{v})$, 则

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker \psi = \ker \varphi,$$

即 $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$.

$$\begin{cases} \eta(\psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})) = \eta(\psi(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) \\ \quad \quad \quad = \eta(\psi(\mathbf{u})) + \eta(\psi(\mathbf{v})) \\ \eta(k \cdot \psi(\mathbf{u})) = k\varphi(\mathbf{u}) \end{cases}$$

又因为每个 $\varphi(\mathbf{u})$ 都有一个 $\psi(\mathbf{u})$ 和它对应, 因此

$$\eta : \operatorname{Im} \psi \mapsto \operatorname{Im} \varphi \text{ 是满的线性映射}$$

根据前面维数公式, 映射前后维数一致且 η 又是满射, 因此 η 必是单射, 所以 η 是线性同构.

对所有 $\mathbf{v} \in V$, 有

$$\begin{aligned}\|\eta(\psi(\mathbf{v}))\| &= \|\varphi(\mathbf{v})\| \stackrel{(9.28)}{=} \|\psi(\mathbf{v})\| \\ \implies \eta \text{ 保范是同构} \\ \iff \eta \text{ 是保积同构.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because V &= \operatorname{Im} \psi \perp (\operatorname{Im} \psi)^\perp \\ &= \operatorname{Im} \varphi \perp (\operatorname{Im} \varphi)^\perp,\end{aligned}$$

由(9.29)式可知, $\dim(\operatorname{Im} \psi)^\perp = \dim(\operatorname{Im} \varphi)^\perp$, 所以必定存在保积同构

$$\xi : (\operatorname{Im} \psi)^\perp \rightarrow (\operatorname{Im} \varphi)^\perp.$$

令

$$\begin{aligned}\omega : V &\rightarrow V \\ (\psi(\mathbf{v}), \mathbf{u}) &\mapsto (\varphi(\mathbf{v}), \xi(\mathbf{u})),\end{aligned}$$

即

$$\omega = \eta \perp \xi.$$

容易证明, 一个线性保积同构和它正交补空间上的线性同构以直和的形式组合, 则仍然是线性保积同构, 因此 ω 也是线性保积同构.

最后验证

$$\varphi = \omega \cdot \psi \iff \varphi(\mathbf{v}) = \omega\psi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V.$$

此时 $\omega = \eta$, 所以上式成立. □

评论 极坐标中,

$$(\rho, \theta) \iff x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = x + iy = \rho \cdot e^{i\theta}.$$

上式即复数的极分解, 矩阵的极分解是复数极分解的推广. $e^{i\theta}$ 在复数中表示一个 θ 角的旋转, 对应矩阵极分解中的正交变换或酉变换, 即对应一个保积算子; ρ 在复数极分解中是一个大于等于 0 的实数, 对应矩阵极分解中的半正定的自伴随算子.

$$\varphi = \omega\psi = (\omega\psi\omega^*)\omega,$$

容易证明, 上式最右边 $(\omega\psi\omega^*)$ 仍然是一个半正定的自伴随算子, 因此 ω 写在左边或右边都可以.

推论 9.15 $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, 有 $A = OS = S_1O$, 其中 O 为正交矩阵, S 或 S_1 为半正定实对称矩阵. 这种分解叫 OS 分解或实矩阵的极分解;

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, 有 $A = UH = H_1U$, 其中 U 为酉矩阵, H 或 H_1 为半正定 Hermite 矩阵. 这种分解叫 UH 分解或复矩阵的极分解.

评论 A 为可逆实矩阵时, 求 OS 分解的步骤:

$A'A$ 为正定阵, 必存在正交阵 P 使得

$$P'A'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0.$$

则

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P'$$

满足 $A'A = S^2$, 则 $O = AS^{-1}$ 为正交阵.

A 为不可逆矩阵时, 可通过求奇异值分解来进行 OS 分解, 即下节将详细介绍.

9.9 奇异值分解

第 7 章和第 8 章主要介绍了相似标准型和合同 (复相合) 标准型, 第 9 章则演变成了正交 (或酉) 相似标准型. 那么相抵标准型到第 9 章进化成什么样呢?

设 $A^{m \times n}$ 为实矩阵, 则存在非异阵 $P^{m \times m}, Q^{n \times n}$ 使得

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

在内积空间中, 如果 $P^{m \times m}, Q^{n \times n}$ 为正交阵 (酉阵), 那会使得 $P'AQ$ 为什么矩阵呢?

定义 9.19 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 若存在非负数 σ , 非零向量 $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, 使得

$$A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}, A'\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v},$$

则称 σ 为 A 的奇异值, \mathbf{v} 为 A 的右奇异向量, \mathbf{u} 为 A 的左奇异向量.

定义 9.20 设 V 为 n 维欧氏空间, U 为 m 维欧氏空间, 线性映射

$$\varphi: V \rightarrow U,$$

则存在唯一的线性映射

$$\varphi^*: U \rightarrow V,$$

使得对 $\forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{u} \in U$ 有

$$(\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \varphi^*(\mathbf{u})).$$

上式中, 等号左边的内积是在空间 U 上, 右边的内积是在空间 V 上. φ^* 称为 φ 的伴随. 这可以看作是欧氏空间上线性算子的伴随推广到线性映射.

证明: 取 V 的一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, 取 U 的一组标准正交基 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$, φ 的表示矩阵为 A , \mathbf{v} 的坐标向量为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{u} 的坐标向量为 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, 则

$$(\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{u})_U = (A\mathbf{x})' \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}' \cdot A'\mathbf{y} \xrightarrow{\text{令 } \varphi^* \text{ 在给定基下的表示矩阵为 } A'} (\mathbf{x}' \cdot A') \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{v}, \varphi^*(\mathbf{u}))_V.$$

□

定义 9.21 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, 其伴随为 φ^* , 若存在非负数 σ 及 $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V, \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in U$, 使得

$$\varphi(\mathbf{v}) = \sigma\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{v},$$

则称 σ 为 φ 的奇异值, \mathbf{v}, \mathbf{u} 为 φ 的右, 左奇异向量. $\varphi^*\varphi \in \mathcal{V}$ 为半正定自伴随算子,

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{v}) = \varphi^*(\sigma\mathbf{u}) = \sigma\varphi^*(\mathbf{u}) = \sigma^2\mathbf{v}.$$

同理, $\varphi\varphi^* \in \mathcal{U}$ 为半正定自伴随算子,

$$\varphi\varphi^*(\mathbf{u}) = \varphi^*(\sigma\mathbf{v}) = \sigma\varphi^*(\mathbf{v}) = \sigma^2\mathbf{u}.$$

定理 9.33 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^m, U^n)$, 则存在 V 的一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$, U 的一组标准正交基 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$, 使得 φ 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} S & O \\ O & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix},$$

其中, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ 是 φ 的所有正的奇异值.

证明: $\varphi^*\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 是半正定自伴随算子, 则存在 V 的一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ 使得 $\varphi^*\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为

$$\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\},$$

其中, $r = \text{rank}(\varphi^*\varphi) = \text{rank}(\varphi)$, 且

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq r,$$

$$\varphi^*\varphi(\mathbf{e}_j) = 0, r+1 \leq j \leq m.$$

$$\forall 1 \leq i \leq r, (\varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_i)) = (\mathbf{e}_i, \varphi^*\varphi(\mathbf{e}_i)) = (\mathbf{e}_i, \lambda_i \mathbf{e}_i) = \lambda_i,$$

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq r, (\varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \varphi^*\varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \lambda_j \mathbf{e}_j) = 0,$$

$$\forall r < j \leq n, (\varphi(\mathbf{e}_j), \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_j, \varphi^*\varphi(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_j, 0) = 0 \implies \mathbf{e}_j = 0.$$

令

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, f_i = \frac{1}{\sigma_i} \varphi(\mathbf{e}_i), 1 \leq i \leq r,$$

则

$$\|f_i\| = 1, (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = 0, 1 \leq i \neq j \leq r,$$

即 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_r\}$ 是 U 中两两正交的单位向量组, 将其扩张为 U 上的一组标准正交基 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$, 则

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sigma_i \mathbf{f}_i, 1 \leq i \leq r, \quad (9.30)$$

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}, r+1 \leq j \leq m.$$

于是

$$\begin{aligned} & (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_r), \varphi(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, \varphi(\mathbf{e}_m)) \\ &= (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & O \end{pmatrix}_{n \times m}. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} & (\varphi^*(\mathbf{f}_1), \dots, \varphi^*(\mathbf{f}_r), \varphi^*(\mathbf{f}_{r+1}), \dots, \varphi^*(\mathbf{f}_n)) \\ &= (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_m) \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & O \end{pmatrix}_{m \times n}. \end{aligned}$$

上式等价于

$$(\varphi^*(\mathbf{f}_i)) = \sigma_i \mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq r, \quad (9.31)$$

$$(\varphi^*(\mathbf{f}_j)) = \mathbf{0}, r+1 \leq j \leq n.$$

由(9.30)式和(9.31)式可知, $\sigma_i (1 \leq i \leq r)$ 是 φ 的奇异值. □

定理 9.34 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 则存在 m 阶正交阵 P , n 阶正交阵 Q , 使得

$$P'AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & O \end{pmatrix}.$$

其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 是 A 的全体正奇异值. 上面左边等式又称 A 的正交相抵标准型.

定义 9.22 用定理 9.34 中的记号, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 则存在 m 阶正交阵 P , n 阶正交阵 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q',$$

上述分解称为 A 的奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD).

奇异值分解步骤

(1) 求 $A'A$ 的正交相似标准型: 存在正交阵 Q 使得 $Q'(A'A)Q = \text{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}$, $r = \text{rank}(A'A) = \text{rank}(A)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$;

(2) 设 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 令 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $\beta_i = \frac{1}{\sigma_i} A \alpha_i (1 \leq i \leq r)$, 可得到 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$ 是 \mathbb{R}^m 中的两两正交的单位向量, 扩张为 \mathbb{R}^m 的标准正交基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_m\}$;

(3) 令 $P = (\beta_1, \cdots, \beta_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_m)$ 为 m 阶正交阵, 则可得

$$A = P \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q'.$$

SVD 应用

(1) 对方阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 而言, 极分解等价于奇异值分解. 例如, 下面为 A 的一个极分解, 其中 O 为正交阵, S 为半正定的是对称阵:

$$\begin{aligned} A = OS = O(P'\Lambda P) \\ = (OP')\Lambda P, \end{aligned} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & O \end{pmatrix}.$$

上式中, (OP') 是正交阵, ΛP 也是正交阵, 就变成了奇异值分解. 反过来, 已知 A 的奇异值分解:

$$A = P \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q' = (PQ')(Q \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q').$$

上式中, (PQ') 是正交阵, $Q \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q'$ 是半正定的是对称阵, 就变成了极分解.

(2) PCA(Principal Component Analysis, 主成分分析).

$$A = P \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q'.$$

(a) 图片去噪音.

$$A^{m \times n} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

可将接近于 0 的奇异值对应的列去掉, 从而去掉噪音.

(b) 图片存储压缩. $A^{m \times n}$ 原来占用 $m \times n$ 个存储位.

$$\begin{aligned} A &= (\beta_1, \dots, \beta_r, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \sigma_1 \beta_1 \alpha_1' + \sigma_2 \beta_2 \alpha_2' + \dots + \sigma_r \beta_r \alpha_r'. \end{aligned}$$

只需要 $(m + n + 1)r$ 个存储位置.

(3) LSI(Latent Semantic Indexing, 潜在语义索引): 搜索网站将文章篇数看作一个大矩阵的行数, 文章中的词汇数看作这个大矩阵的列数. 如

$$A^{100000 \times 10000},$$

可表示 10 万篇 1 万字的文章, 进行 SVD 后,

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{m \times r} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{r \times r} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{r \times n}.$$

所有和索引有关的关键信息, 包括关键词, 全部位于中间的 $r \times r$ 的小对角矩阵中, 或者 $m \times r$ 矩阵的第一列和 $r \times n$ 矩阵的第一行中.

例 9.24 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V^n, U^m)$ s. t. $\varphi^* \varphi = \psi^* \psi$, 证明: 存在正交算子 $\omega \in \mathcal{L}(U)$ s. t. $\varphi = \omega \psi$.

证明: 取 V 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 使得 $\varphi^* \varphi$ 在这组基下的表示矩阵为

$$\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\},$$

其中, $r = \text{rank}(\varphi^* \varphi) = \text{rank}(\varphi)$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$. 令

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, f_i = \frac{1}{\sigma_i} \varphi(e_i), 1 \leq i \leq r.$$

将 \mathbf{f}_i 扩张为 U 上的一组标准正交基 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_m\}$. 同理, 令

$$\mathbf{g}_i = \frac{1}{\sigma_i} \psi(\mathbf{e}_i), 1 \leq i \leq r.$$

将 \mathbf{g}_i 扩张为 U 上的一组标准正交基 $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r, \mathbf{g}_{r+1}, \dots, \mathbf{g}_m\}$. 则

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sigma_i \mathbf{f}_i, \psi(\mathbf{e}_i) = \sigma_i \mathbf{g}_i, 1 \leq i \leq r.$$

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}, \psi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}, r+1 \leq j \leq n.$$

令

$$\omega : U \rightarrow U$$

$$\mathbf{g}_i \mapsto \mathbf{f}_i$$

则 ω 为正交算子. $1 \leq i \leq r$ 时,

$$\omega\psi(\mathbf{e}_i) = \omega(\sigma_i \mathbf{g}_i) = \sigma_i \omega(\mathbf{g}_i) = \sigma_i \mathbf{f}_i = \varphi(\mathbf{e}_i).$$

$r+1 \leq j \leq n$ 时,

$$\omega\psi(\mathbf{e}_j) = \omega(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \varphi(\mathbf{e}_j).$$

因此, $\varphi = \omega\psi$. □

(4) 广义逆.

定理 9.35 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n, U^m)$, 则存在唯一的线性映射 $\varphi^+ \in \mathcal{L}(U^m, V^n)$ 满足:

- (1) $\varphi\varphi^+\varphi = \varphi$;
- (2) $\varphi^+\varphi\varphi^+ = \varphi^+$;
- (3) $\varphi\varphi^+$ 和 $\varphi^+\varphi$ 均为自伴随算子.

上述 φ^+ 称为 φ 的 Moore-Penrose 广义逆.

证明: 如下图所示:

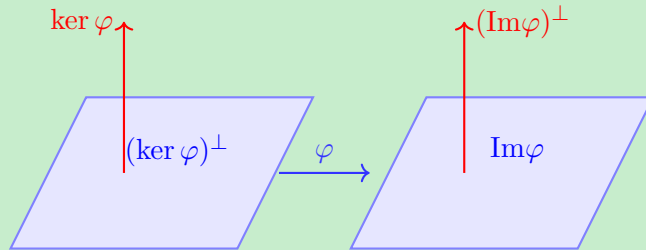


图 9.2: φ 映射示意图

令

$$\xi = \varphi|_{(\ker \varphi)^\perp} : (\ker \varphi)^\perp \rightarrow \text{Im } \varphi.$$

则

$$\ker \xi = \ker \varphi \cap (\ker \varphi)^\perp = \mathbf{0}, \quad (9.32)$$

$$\dim(\ker \varphi)^\perp = \dim V - \dim \ker \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi. \quad (9.33)$$

由(9.32)式可知, ξ 为单线性映射; 由(9.33)式可知, 线性映射 ξ 的定义域空间和值域空间的维数相等, 所以 ξ 为满线性映射. 从而 ξ 一定是线性同构.

定义

$$\varphi^+ = \begin{cases} \xi^{-1}(\mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \operatorname{Im} \varphi, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{u} \in (\operatorname{Im} \varphi)^\perp. \end{cases}$$

$\implies \varphi^+ : U \rightarrow V$ 为线性映射.

考虑 φ 的 SVD, 设 V 的一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, U 的一组标准正交基 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$, 则

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_i) &= \sigma_i \mathbf{f}_i, 1 \leq i \leq r, \\ \varphi(\mathbf{e}_j) &= \mathbf{0}, r+1 \leq j \leq n, \\ \ker \varphi &= L(\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n), \ker \varphi^\perp = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r) \\ \operatorname{Im} \varphi &= L(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r), (\operatorname{Im} \varphi)^\perp = L(\mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_m). \\ \forall 1 \leq i \leq r, \xi(\mathbf{e}_i) &= \varphi(\mathbf{e}_i) = \sigma_i \mathbf{f}_i. \end{aligned}$$

因此

$$\varphi^+(\mathbf{f}_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{e}_i, & 1 \leq i \leq r, \\ \mathbf{0}, & r+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

φ^+ 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ & & & & O \end{pmatrix}.$$

由以上两式可验证, 定理中的结论 (1)(2)(3) 都成立. □

推论 9.16 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 则存在唯一的 $A^+ \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ 满足:

- (1) $AA^+A = A$;
- (2) $A^+AA^+ = A^+$;
- (3) AA^+ 和 A^+A 均为对称阵.

上述 A^+ 称为 A 的 Moore-Penrose 广义逆.

证明: A 的奇异值分解

$$A = P \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q'.$$

则 A^+ 的奇异值分解

$$A^+ = Q \begin{pmatrix} S^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P'.$$

□

注

(1) φ, A 可逆时, $\varphi^+ = \varphi^{-1}, A^+ = A^{-1}$;

(2) $\varphi = 0, A = 0$ 时, $\varphi^+ = 0, A^+ = 0$.

引理 9.14 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V^n, U^m)$, φ^+ 是其广义逆, 则

$\varphi^+ \varphi$ 是 V 到 $(\ker \varphi)^\perp$ 的正交投影算子;

$\varphi \varphi^+$ 是 U 到 $\text{Im } \varphi$ 的正交投影算子.

证明:

$$\begin{aligned} \varphi^+ \varphi(\mathbf{e}_i) &= \varphi^+(\sigma_i \mathbf{f}_i), 1 \leq i \leq r \\ &= \frac{1}{\sigma_i}(\sigma_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i. \\ \varphi^+ \varphi(\mathbf{e}_j) &= \mathbf{0}, r+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

同理可证 $\varphi \varphi^+$.

□

定理 9.36 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \beta \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$A\mathbf{x} = \beta. \quad (*)$$

(1) 若 $(*)$ 有解, 则 $\mathbf{z} = A^+ \beta$ 是 $(*)$ 的长度最小的解;

(2) 若 $(*)$ 无解, 则 $\mathbf{z} = A^+ \beta$ 是 $(*)$ 的最优近似解, 即

$$\|A\mathbf{z} - \beta\| \leq \|A\mathbf{x} - \beta\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

证明: (1) 若 $(*)$ 有解, 则 β 必在 $\text{Im } A$ 上.

$$\beta = A\mathbf{x}_0, \mathbf{z} = A^+ A\mathbf{x}_0.$$

则

$$A\mathbf{z} = A(A^+ A\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_0 = \beta.$$

上式说明 \mathbf{z} 是 $(*)$ 的一个解.

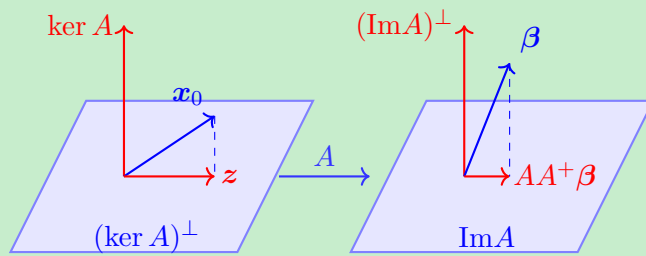


图 9.3: 矩阵 A 表示的线性映射示意图

设 x_0 是 (*) 的一个解, 如图9.3所示: 由于 $\ker A$ 在矩阵 A 的作用下等于 0, 因此 x_0 与 $\ker A$ 中任一元素的和都是 (*) 的解. 对 x_0 做正交直和分解, 这是长度最小的解. 由引理9.14(1) 可知, x_0 的正交直和分解即 $A^+Ax_0 = z$.

(2) 若 (*) 无解, 则 β 必不在 $\text{Im } A$ 上.

$$Az = A(A^+\beta) \perp (\text{Im } A)^\perp.$$

$$Ax - \beta = A(x - z) + Az - \beta,$$

由于 $A(x - z) \in \text{Im } A$, $Az - \beta \in (\text{Im } A)^\perp$, 根据勾股定理, 有

$$\|Ax - \beta\| \geq \|Az - \beta\|.$$

□

评论 在经济和金融等生产实际中, 常常可以根据实际数据得到大量的矛盾方程组:

$$A^{m \times n} x^{n \times 1} = \beta^{m \times 1},$$

由于实际可得的数量充分多, 因此 $m \gg 0$, 即矩阵的行数可以特别多, 方程数量可以很多, 从而只能保证列满秩 $\text{rank}(A) = n$. 根据定理9.36, 可以得到最优解 (最佳逼近解)

$$x = A^+\beta \stackrel{A^+ = (A'A)^{-1}A'}{=} (A'A)^{-1}A'\beta.$$

即 9.4 节中的最小二乘法.