第二单元学习笔记

yinxuhao [xuhao_yin@163.com]

January 9, 2023

Contents

信息的表示和处理

1 引言

孤立地讲，**单个的位不是非常有用，将位组合在一起，再加上某种解释(interpretation)，即赋予不同的可能位模式以含意**。我们就能表示任何有限集合的元素。

三种重要的数字表示：

1. **无符号**unsigned编码给予传统的二进制表示法
2. **补码**two's-complement编码是表示有符号整数的最常见的方式。
3. **浮点数**floating-point编码是表示实数的科学计数法的以 2 为基数的版本。

数据**溢出**overflow是产生 bug 的一大原因。负数下溢产生极大的正数；正数上溢产生极小的负数。

浮点运算有完全不同的数学属性。

1. **由于表示的精度有限，浮点运算是不可结合的**。例如

$$(3.14 + 1e_{20}) - 1e_{20} = 0.0$$

but

$$(3.14 + 1e_{20} - 1e_{20}) = 3.14$$

2. 该属性不同的原因，是处理数字表示有限性的方式不同——
整数虽只能编码一个相对较小的数值范围，然该表示法是精确的；
浮点数虽可以编码相对较大的数值范围，但这种表示只是近似的。

书中建议的本章学习方式：
深入学习数学语言
学习编写公式和方程式
以及重要属性的推导

2 信息存储

大多数计算机**使用 8 位的块或者字节作为最小的可寻址内存单位**，而不是内存中单独的比特。

机器级程序将内存视为一个非常大的字节数组，称为**虚拟内存**，所有可能的地址的集合称为**虚拟地址空间**virtual address space.

每个程序对象可以简单地视为一个字节块，而程序本身就是一个字节序列。

2.1 十六进制表示法

Hex digit	0	1	2	3	4	5	6	7
Decimal value	0	1	2	3	4	5	6	7
Binary value	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Hex digit	8	9	A	B	C	D	E	F
Decimal value	8	9	10	11	12	13	14	15
Binary value	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Figure 1: 十六进制表示法。每个十六进制数字都对 16 个值中的一个进行了编码

十六进制转二进制：将十六进制的每一位转换为二进制格式，然后拼接。例如：

十六进制	1	7	3	A	4	C
二进制	0001	0111	0011	1010	0100	1100

所以 $binary_{0x173a4c_{16}} = 000101110011101001001100_2$。

二进制转十六进制：将二进制从右到左做 4 个一组的划分，如最左侧不足 4 位则以 0 补之。然后将每个 4 位转换为对应的十六进制数字拼接即可。例如：

二进制	11	1100	1010	1101	1011	0011
十六进制	3	C	A	D	B	3

所以，$hex_{11110010101101101100011_2} = 3cadb3_{16}$

2.2 字数据大小

每台计算机都有一个字长，指明指针数据的标称大小。

C 数据类型的典型大小见下图：

C declaration		Bytes	
Signed	Unsigned	32-bit	64-bit
[signed] char	unsigned char	1	1
short	unsigned short	2	2
int	unsigned	4	4
long	unsigned long	4	8
int32_t	uint32_t	4	4
int64_t	uint64_t	8	8
char *		4	8
float		4	4
double		8	8

Figure 2: 基本 C 数据类型的典型大小 (以字节为单位)

2.3 寻址和字节顺序

小端法little endian: 最低有效字节在最前面放着。

大端法big endian: 最高有效字节在最前面放着。

具体示例见下图：

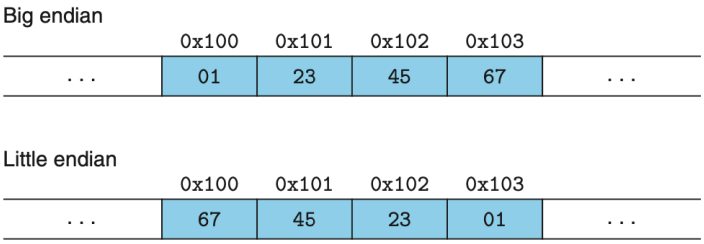


Figure 3: 大端法与小端法

```c
#include <stdio.h>

typedef unsigned char *byte_pointer;

void show_bytes(byte_pointer start, size_t len) {
    size_t i;
    for(i = 0; i < len; i++) {
        printf(" %.2x", start[i]);
    }
    printf("\n");
 }

 void show_int(int x) {
    show_bytes((byte_pointer) &x, sizeof(int));
}

void show_float(float x);

void show_pointer(void *x);

void test_show_bytes(int val) {
    int ival = val;
    float fval = (float) val;
    int *pval = &ival;
    show_int(ival);
    show_float(fval);
    show_pointer(pval);
}
```

通过以上代码，可以打印出数据的两位十六进制格式输出。对比结果可以发现，int和float的结果一样，只是排列的大小端不同，而指针值不同，与机器相关。

二进制代码是不兼容的。

2.4 布尔代数

~	
0	1
1	0

&	0	1
0	0	0
1	0	1

|	0	1
0	0	1
1	1	1

^	0	1
0	0	1
1	1	0

Figure 4: 布尔代数的运算。二进制 0 和 1 代表逻辑值 TRUE 和 FALSE. 以上四张图依次是逻辑运算符 NOT AND OR EXCLUSIVE-OR

位向量一个很有用的应用就是**表示有限集合**。利用位向量 $[a_{w-1}, \ldots, a_1, a_0]$ 可以编码任何子集 $A \in 0, 1, \ldots, w-1$。

例如，定义规则 $a_i = 1 \iff i \in A$。

位向量 a≒[01101001] 表示集合 $A = 0, 3, 5, 6$，而位向量 b≒[01010101] 表示集合 $B = 0, 2, 4, 6$。

编码集合的使用方法是使用布尔运算。

例如：$a\&b \to [010000001]$, 对应于 $A \cap B = 0, 6$。

它的实际应用，还有使用位向量作为掩码有选择地使用或屏蔽一些信号，该掩码就是设置为有效信号的集合。

C 语言中的位级运算，其实是按照各个位对应的位运算来的。

而 C 语言中的逻辑运算 (||、&&、!) 则是把所有的非零参数都表示 TRUE，参数 0 表示为 FALSE。它们只返回 1 或 0. 而位级运算只在参数特殊时才与之有相同的结果。

2.5 移位运算

`x<<k`: 左移 k 位，即丢弃最高 k 位，右端补充 k 个 0.

`x>>k`: 右移 k 位，支持逻辑右移和算术右移。逻辑右移在左端补充 k 个 0，算术右移则在左端补充 k 个最高有效位 (符号位)。

对无符号数，右移必须是逻辑的。

移位运算符是从左至右可结合的。

3 整数表示

Symbol	Type	Meaning
$B2T_w$	Function	Binary to two's complement
$B2U_w$	Function	Binary to unsigned
$U2B_w$	Function	Unsigned to binary
$U2T_w$	Function	Unsigned to two's complement
$T2B_w$	Function	Two's complement to binary
$T2U_w$	Function	Two's complement to unsigned
$TMin_w$	Constant	Minimum two's-complement value
$TMax_w$	Constant	Maximum two's-complement value
$UMax_w$	Constant	Maximum unsigned value
$+^t_w$	Operation	Two's-complement addition
$+^u_w$	Operation	Unsigned addition
$*^t_w$	Operation	Two's-complement multiplication
$*^u_w$	Operation	Unsigned multiplication
$-^t_w$	Operation	Two's-complement negation
$-^u_w$	Operation	Unsigned negation

Figure 5: 整数的数据与算术操作术语。下标 w 表示数据中表示中的位数

3.1 无符号数的编码

原理 1 无符号数编码的定义

对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2U_w(\vec{x}) \doteq \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i \tag{1}$$

形象的展示如下图:

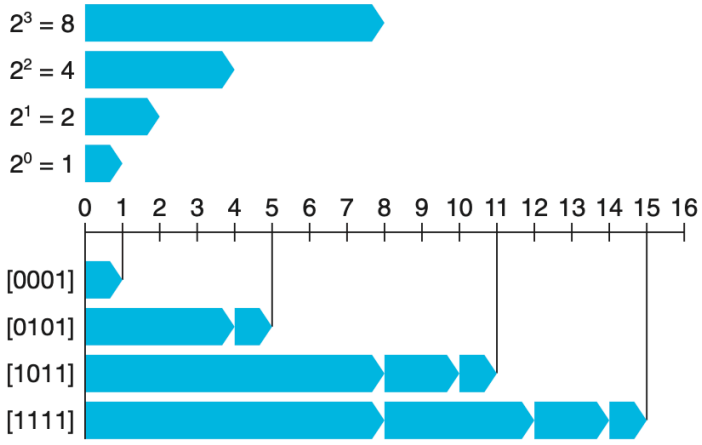


Figure 6: w=4 的无符号数示例。当二进制表示中位 i 为 1，数值就会相应加上 2^i

原理 2 无符号数编码的唯一性
函数 $B2U_w$ 是一个双射

3.2 补码编码

原理 3 补码编码的定义
对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2T_w(\vec{x}) \doteq -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \tag{2}$$

形象地展示如下图:

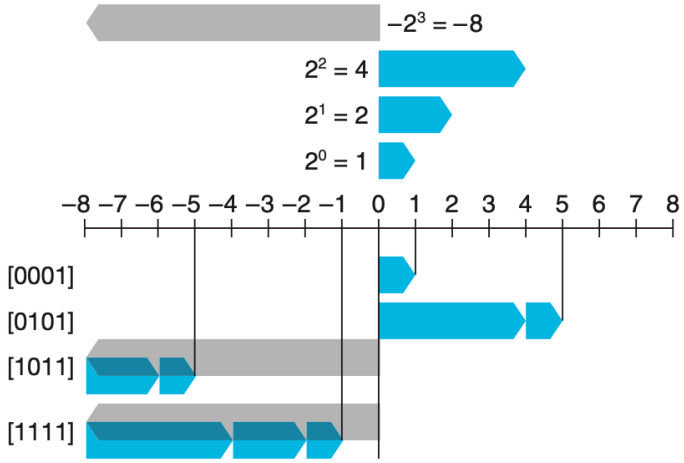


Figure 7: w=4 的补码示例。把位 3 作为符号位，因此当它为 1 时，对数值的影响是 $-2^3 = -8$。这个权重在图中用带向左箭头的条表示

原理 4 *补码编码的唯一性*
函数 $B2T_w$ 是一个双射。

1. 补码的范围是不对称的：$|TMin| = |TMax| + 1$，即 TMin 没有与之对应的正数。这是因为 0 是非负数。
2. 最大的无符号数值刚好比补码的最大值的两倍大一点：$UMax_w = 2TMax_w + 1$

3.3 有符号和无符号数之间的转换

原理 5 *补码转换为无符号数*
对满足 $TMin_w \le x \le TMax_w$ 的 x 有：

$$T2U_w(x) = \begin{cases} x + 2^w, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases} \tag{3}$$

推导 1 *补码转换为无符号数*
比较式1和2，我们发现对于位模式 $\vec{x}$，如果我们计算 $B2U_w(\vec{x}) - B2T_w(\vec{x})$ 之差，得到：

$$B2U_w(\vec{x}) - B2T_w(\vec{x}) = x_{w-1}2^w$$

由此得到一个关系：

$$B2U_w(\vec{x}) = x_{w-1}2^w + B2T_w(\vec{x}) \tag{4}$$

由此可得：

$$B2U_w(T2B_w(x)) = T2U_w(x) = x + x_{w-1}2^w \tag{5}$$

式5的计算：将 $T2B_w(x)$ 当作 x 代入4后得到。由于运算 $T2B_w$ 与 $B2T_w$ 是对 $\vec{x}$ 的逆运算，故

$$\because B2U_w(T2B_w(x)) = x_{w-1}2^w + B2T_w(T2B_w(x)) \therefore T2U_w(x) = x + x_{w-1}2^w$$

根据3的两种情况，在 x 的补码中，位 x_{w-1} 决定了 x 是否为负。 ■

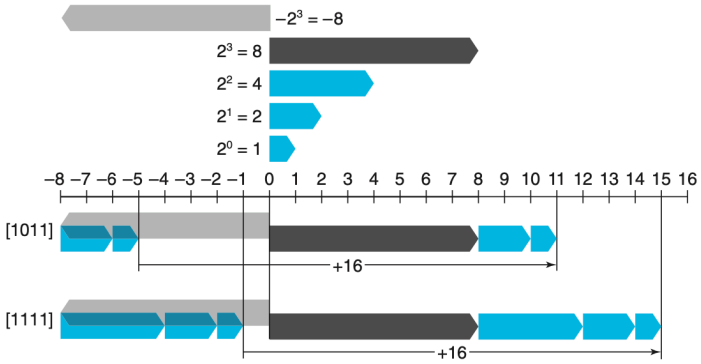


Figure 8: 比较当 w=4 时无符号数表示和补码表示 (对补码和无符号数来说，最高有效位的权重分别是-8 和 +8，因此产生一个差为 16)

原理 6 *无符号数转换为补码*

对满足 $0 \leq x \leq UMax_w$ 的 u 有：

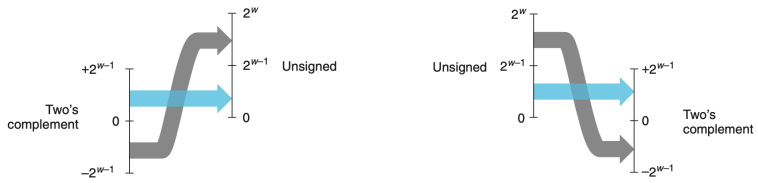
$$U2T_w(u) = \begin{cases} u, & u \leq TMax_w \\ u - 2^w, & u > TMax \end{cases} \tag{6}$$

推导 2 设 $\vec{x} = U2B_w(u)$，则这个位向量也是 $U2T_w(u)$ 的补码表示。式*1*和式*2*结合起来有

$$U2T_w(u) = -u_{w-1}2^w + u \tag{7}$$

在 u 的无符号表示中，对式*6*的两种情况来说，位 u_{w-1} 决定了 u 是否大于 $TMax_w = 2^{w-1} - 1$。 ■

以下图说明了函数 U2T 的行为。对于小的数，从无符号到有符号保留原值；一旦大于 $TMax_w$，数字将被转换为一个负数值。



(a) 从补码到无符号数的转换。函数 T2U 将负数转换为大的正数

(b) 从无符号数到补码的转换。函数 U2T 把大于 $2^{w-1} - 1$ 的数字转换为负值

Figure 9: 无符号数和补码的转换

3.4 扩展一个数字的位表示

用于将数据类型转换为一个更大的数据类型，例如 32 位 →64 位。

原理 7 *无符号数的零扩展*

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{u} = [u_{w-1}, u_{w-2}, \ldots, u_0]$ 和宽度为 w' 的位向量 $\vec{u}' = [0, \ldots, 0, u_{w-1}, u_{w-1}, \ldots, u_0]$，其中，$w' > w$。则 $B2U_w(\vec{u}) = B2U_{w'}(\vec{u}')$。

原理 8 补码数的符号扩展

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 和宽度为 w 的位向量 $\vec{x}' = [x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$，其中 $w' > w$。则 $B2T_w(\vec{x}) = B2T_{w'}(\vec{x}')$。

推导 3 补码数值的符号扩展

令 $w' = w + k$，证明

$$B2T_{w+k}([\underbrace{x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}}_{k\ times}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) = B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])$$

下面的证明是对 k 进行归纳。即：**如果我们能够证明符号扩展一位保持了数值不变，那么符号扩展任意位都能保持这种属性**。即：

$$B2T_{w+1}([x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) = B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])$$

用式2展开左边的表达式，得：

$$\begin{aligned}
B2T_{w+1}([x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) &= -x_{w-1}2^w + \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}2^w + x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}(2^w - 2^{w-1}) + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]).
\end{aligned}$$

其中使用的关键属性是 $2^w - 2^{w-1} = 2^{w-1}$。 ■

3.5 截断数字

原理 9 截断无符号数

令 $\vec{x}$ 等于位向量 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$，而 $\vec{x}'$ 是将其截断为 k 位的结果：$\vec{x}' = [x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$。令 $x = B2U_w(\vec{x}')$。则 $\vec{x}' = x \ mod\ 2^k$。

推导 4 截断补码数值

使用无符号数截断相同参数，则有

$$B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k = B2U_k[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$$

即，$x\ mod\ 2^k$ 能够被一个位级表示为 $[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$ 的无符号数表示。将其转换为补码数则有 $x' = U2T_k(x\ mod\ 2^k)$。 ■

总结：

无符号数的截断结果：

$$B2U_k[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0] = B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k$$

补码数字的截断结果：

$$B2T_l[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0] = U2T_k(B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k)$$

3.6 关于有符号数和无符号数的建议

有符号数到无符号数的隐式转换，会导致错误或者漏洞。避免这类错误的一种方法是绝不使用无符号数。(例如除 C 语言外，少有语言支持无符号整数。)

但是**当我们想要把字仅仅看做是位的集合而没有任何数字意义时，无符号数值是非常有用的**。

所以，见机行事。

4 整数运算

4.1 无符号加法

原理 10 *无符号数加法*

对满足 $0 \leq x, y \leq 2^w$ *的* x *和* y *有:*

$$x +_w^u y = \begin{cases} x+y, & x+y < 2^w & Normal \\ x+y-2^w, & 2^w \leq x+y < 2^{w+1} & Overflow \end{cases}$$

推导 5 *无符号数加法*

一般而言，我们可以看到，如果 $x+y < 2^w$*, 和的* $w+1$ *位表示中最高位会等于 0，因此丢弃它不会改变这个数值。*

另一方面，如果 $2^w \leq x+y < 2^{w+1}$*，和的* $w+1$ *位表示中的最高位会等于 1，因此丢弃它就相当于从和中减去了* 2^w*。* ■

形象表示见下图:

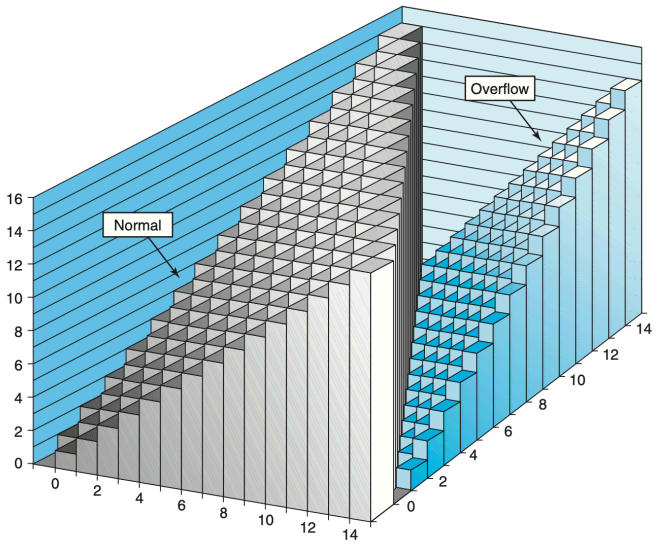


Figure 10: 无符号加法 (4 位字长，加法是模 16 的)

整数加法和无符号加法着急拿的关系见下图:

原理 11 *检测无符号数加法中的溢出*

对在范围 $0 \leq x, y \leq UMax_w$ *中的* x *和* y*，令* $s \doteq x +_w^u y$*。则对计算* s*，当且仅当* $s < x$*(或者等价的* $s < y$*) 时，发生了溢出。*

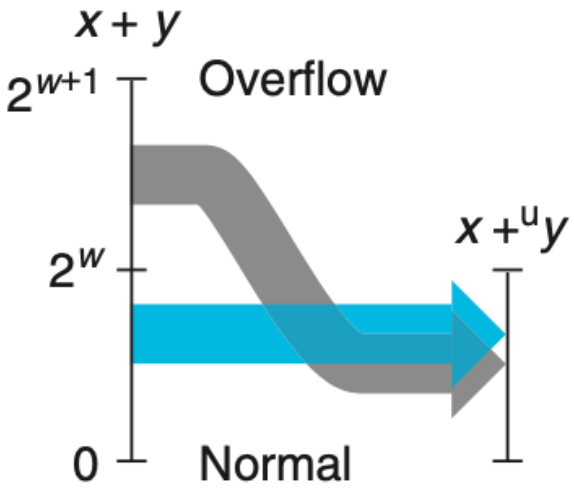


Figure 11: 整数加法和无符号加法间的关系。当 x+y 大于 $2^w - 1$ 时，其和溢出

推导 6 检测无符号数加法中的溢出

通过观察发现 $x + y \geq x$，因此如果 s 没有溢出，我们能够肯定 $s \geq x$。

另一方面，如果 s 确实溢出了，我们就有 $s = x + y - 2^w$。假设 $y < 2^w$，我们就有 $y - 2^w < 0$, 因此 $s = x + (y - 2^w) < x$。 ■

模数加法形成了一种数学结构,称为阿贝尔群 (Abelian goup), 它是可交换的和可结合的。它有一个单位元 0，并且每个元素有一个加法逆元。

原理 12 无符号数求反

对满足 $0 \leq x < 2^w$ 的任意 x，其 w 位的无符号逆元 $-_w^u x$ 由下式给出：

$$-_w^u x = \begin{cases} x, & x = 0 \\ 2^w - x, & x > 0 \end{cases}$$

推导 7 无符号数求反

当 $x = 0$ 时，加法逆元显然是 0。对于 $x > 0$, 考虑值 $2^w - x$。我们观察到这个数字在 $0 < 2^w - x < 2^w$ 范围之内，并且 $(x + 2^w - x) \; mod \; 2^w = 2^w \; mod \; 2^w = 0$。因此，它就是 x 在 $+_w^u$ 下的逆元。 ■

4.2 补码加法

定义 $x +_w^t y$ 为整数和 $x + y$ 被截断为 w 位的结果，并将这个结果看做是**补码数**。

原理 13 补码加法

对满足 $-2^{w-1} \leq x, y \leq 2^{w-1} - 1$ 的整数 x 和 y，有：

$$x +_w^t y = \begin{cases} x + y - 2^w, & 2^{w-1} \leq x + y & Positive \; overflow \\ x + y, & -2^{w-1} \leq x + y < 2^{w-1} & Normal \\ x + y + 2^w, & x + y < -2^{w-1} & Negative \; overflow \end{cases}$$

推导 8 补码加法

由于补码加法和无符号数加法有相同的位级表示，故可以按照如下步骤表示运算 $+_w^t$：

1. 将参数转换为无符号数
2. 执行无符号数加法
3. 将结果转换为补码

$$x +_w^t y \doteq U2T_w(T2U_w(x) +_w^u T2U_w(y))$$

由式5,$T2U_w(x) \iff x_{w-1}2^w + x$, $T2U_w(y) \iff y_{w-1}2^w + y$。使用属性【$+_w^u$ 是模 2^w 的加法，以及模数加法的属性，我们得到：

$$\begin{aligned} x +_w^t y &= U2T_w(T2U_w(x) +_w^u T2U_w(y) \\ &= U2T_w[(x_{w-1}2^w + x + y_{w-1}2^w + y) \ mod \ 2^w] \\ &= U2T_w[(x + y) \ mod \ 2^w] \end{aligned}$$

定义 $z \doteq x + y$, $z' \doteq z \ mod \ 2^w$, $z'' \doteq U2T_w(z')$, $z'' = x +_w^t y$。下面分 4 种情况讨论：

1. $-2^w \le z < -2^{w-1}$, 则 $z' = z + 2^w$。于是得出 $0 \le z' < -2^{w-1} + 2^w = 2^{w-1}$。检查式6可以看到 z' 在满足 $z'' = z'$ 的范围之内。这种情况称作**负溢出 *(negative overflow)***。将两个负数 x 和 y 相加 (这是得到 $z < -2^{w-1}$ 的唯一方式)，得到一个非负的结果 $z'' = x + y + 2^w$。
2. $-2^{w-1} \le z < 0$, 则 $z' = z + 2^w$。于是得出 $-2^{w-1} + 2^w = 2^{w-1} \le z' < 2^w$。检查式6可以看到 z' 在满足 $z'' = z' - 2^w$ 的范围之内。因此 $z'' = z' - 2^w = z + 2^w - 2^w = z$。即，补码和 z'' 等于整数和 $x + y$。
3. $0 \le z < 2^{w-1}$，则 $z' = z$。于是得出 $0 \le z' < 2^{w-1}$，因此 $z'' = z' = z$。于是补码和 z'' 又等于整数和 $x + y$。
4. $2^{w-1} \le z < 2^w$，则 $z' = z$。于是得出 $2^{w-1} \le z' < 2^w$。在这个范围内，$z'' = z' - 2^w$。因此得到 $z'' = x + y - 2^w$。这种情况称作**正溢出 *(positive overflow)***。将整数 x 和 y 相加 (这是得到 $z \ge 2^{w-1}$ 的唯一方式)，得出一个负数结果 $z'' = x + y - 2^w$。 ■

补码加法的形象表示见下图：

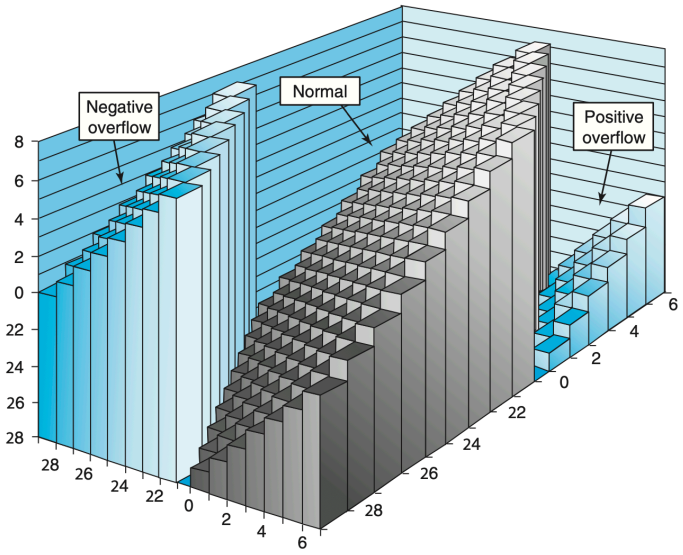


Figure 12: 补码加法 (字长为 4 位的情况下，当 $x+y<-8$ 时，产生负溢出；$x+y\geq 8$ 时，产生正溢出)

原理 14 检测补码加法中的溢出

对满足 $TMin_w \leq x,y \leq TMax_w$ 的 x 和 y，令 $s \doteq x +_w^t y$。当且仅当 $x>0, y>0$，但 $s\leq 0$ 时，计算 s 发生了正溢出。当且仅当 $x<0, y<0$，但 $s\geq 0$ 时，计算 s 发生了负溢出。

推导 9 检测补码加法中的溢出

1. 分析正溢出：若 $x>0, y>0$，而 $s\leq 0$，那么显然发生了正溢出。反过来，正溢出的条件为 *1)* $x>0, y>0$*(*或者 $x+y<TMax_w$*)*，*2)* $s\leq 0$。

2. 分析负溢出：若 $x<0, y<0$，而 $s\geq 0$，那么显然发生了负溢出。反过来，负溢出的条件为 *1)* $x<0, y<0$*(*或者 $x+y>TMin_w$*)*，*2)* $s\geq 0$。 ■

4.3 补码的非

原理 15 补码的非

对满足 $TMin_w \leq x \leq TMax_w$ 的 x，其补码的非 $-_w^t$ 由下式给出：

$$-_w^t x = \begin{cases} TMin_w, & x = TMin_w \\ -x, & x > TMin_w \end{cases}$$

即，对 w 位的补码加法来说，$TMin_w$ 是自己的加法的逆，其他任何数值 x 都有-x 作为其加法的逆。

推导 10 补码的非

观察发现 $TMin_w + TMin_w = -2^{w-1} + (-2^{w-1}) = -2^w$。这将导致负溢出，因此 $TMin_w +_w^t TMin_w = -2^w + 2^w = 0$。对满足 $x > TMin_w$ 的 x，数值-x 可以表示为一个 w 位的补码，它们的和 $-x + x = 0$。 ■

4.3.1 补码非的两种快速求法

1. 执行位级补码非可以对每一位求补，再对结果加 1. 即，$-x = \sim x + 1$.

2. 将位向量分为两部分：假设 k 是最右边的 1 的位置，故 x 可表示为 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_{k+1}, 1, 0, \ldots, 0]$。这个值的非写成二进制格式就是 $[\sim x_{w-1}, \sim x_{w-2}, \ldots, \sim x_{k+1}, 1, 0, \ldots, 0]$。即，对 k 左边的所有位取反。

4.4 无符号乘法

原理 16 无符号数乘法

对满足 $0 \leq x, y \leq UMax_w$ 的 x 和 y 有：

$$x *_w^u y = (x \cdot y) \ mod \ 2^w \tag{8}$$

4.5 补码乘法

原理 17 补码乘法

对满足 $TMin_w \leq x, y \leq TMax_w$ 的 x 和 y 有：

$$x *_w^t y = U2T_w((x \cdot y) mod \ 2^w) \tag{9}$$

原理 18 无符号数和补码乘法的位级等价性

给定长度为 w 的位向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$，用补码形式的位向量表示来定义整数 x 和 y：$x = B2T_w(\vec{x})$, $y = B2T_w(\vec{y})$。用无符号数形式的位向量表示来定义非负整数 x' 和 y'：$x' = B2U_w(\vec{x})$，$y' = B2U_w(\vec{y})$。则

$$T2B_w(x *_w^t y) = U2B_w(x' *_w^u y')$$

推导 11 无符号和补码乘法的位级等价性

据式*6*，我们有 $x' = x + x_{w-1}2^w$ 和 $y' = y + y_{w-1}2^w$。这些值的乘积模 2^w 可得：

$$\begin{aligned}(x' \cdot y') mod \ 2^w &= [(x + x_{w-1}2^w) \cdot (y + y_{w-1}2^w)] mod \ 2^w \\ &= [x \cdot y + (x_{w-1}y + y_{w-1}x)2^w + x_{w-1}y_{w-1}2^{2w}] mod \ 2^w \\ &= (x \cdot y) \ mod \ 2^w \end{aligned} \tag{10}$$

由于模运算符，所有带有权重 2^w 和 2^{2w} 的项都丢掉了。根据等式*9*，我们有 $x *_w^t y = U2T_w((x \cdot y) \ mod \ 2^w)$。对等式两边应用操作 $T2U_w$ 有：

$$T2U_w(x *_w^t y) = T2U_w(U2T_w((x \cdot y) \ mod \ 2^w)) = (x \cdot y) \ mod \ 2^w$$

由该结果与式*8*和式*10*结合得到 $T2U_w(x *_w^t y) = (x' \cdot y') \ mod \ 2^w = x' *_w^t y'$。对该式两边应用 $U2B_w$，得：

$$U2B_w(T2U_w(x *_w^t y)) = T2B_w(x *_w^t y) = U2B_w(x' *_w^u y')$$

■

4.6 乘以常数

编译器使用移位和加法运算组合来代替乘以常数因子的乘法。

原理 19 乘以 *2* 的幂

设 x 为位模式 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 表示的无符号整数。那么，对于任何 $k \geq 0$，我们都认为 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0, 0, \ldots, 0]$ 给出了 $x2^k$ 的 $w+k$ 位的无符号表示，这里右边增加了 k 个 *0*.

推导 12 乘以 *2* 的幂

$$\begin{aligned} B2U_{w+k}([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0, 0, \ldots, 0]) &= \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^{i+k} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i\right] \cdot 2^k \\ &= x2^k \end{aligned}$$

■

原理 20 与 *2* 的幂相乘的无符号乘法

C 变量 x 和 k 有无符号数值 x 和 k，且 $0 \leq k < w$，则 *C* 表达式 $x \ll k$ 产生数值 $x *_w^u 2^k$。

原理 21 与 *2* 的幂相乘的补码乘法

C 变量 x 和 k 有补码值 x 和无符号数值 k，且 $0 \leq k < w$，则 *C* 表达式 $x \ll k$ 产生数值 $x *_w^t 2^k$。

4.7 除以 2 的幂

原理 22 除以 *2* 的幂的无符号除法

C 变量 x 和 k 有无符号数值 x 和 k，且 $0 \leq k < w$，则 *C* 表达式 $x \gg k$ 产生数值 $\lfloor x/2^k \rfloor$

推导 13 除以 *2* 的幂的无符号除法

设 x 为位模式 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 表示的无符号整数，而 k 的取值范围为 $0 \leq k < w$。设 x' 为 $w-k$ 位位表示 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_k]$ 的无符号数，而 x'' 为 k 位位表示 $[x_{k-1}, \ldots, x_0]$ 的无符号数。由此，$x = 2^k x' + x''$，而 $0 \leq x'' < 2^k$。因此可得 $\lfloor x/2^k \rfloor = x'$。

对位向量 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 逻辑右移 k 位会得到向量

$$[0, \ldots, 0, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_k]$$

这个位向量有数值 x'，该值可以通过计算 $x \gg k$ 得到。 ■

原理 23 除以 *2* 的幂的补码除法，向下舍入

C 变量 x 和 k 分别有补码值 x 和无符号数值 k，且 $0 \leq k < w$，则当执行算术移位时，*C* 表达式 $x \gg k$ 产生数值 $\lfloor x/2^k \rfloor$。

推导 14 除以 *2* 的幂的补码除法，向下舍入

设 x 的位模式 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 表示的补码整数，而 k 的取值范围为 $0 \leq k < w$。设 x' 为 $w-k$ 位 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_k]$ 表示的补码数，而 x'' 为低 k 位 $[x_{k-1}, \ldots, x_0]$ 表示的无符号数。通过与对无符号数情况类似的分析，可得 $x = 2^k x' + x''$，而 $0 \leq x'' < 2^k$，得到 $x' = \lfloor x/2^k \rfloor$。算术右移位向量 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]k$ 位，得

$$[x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_k]$$

它刚好就是将 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_k]$ 从 $w-k$ 位符号扩展到 w 位。故这个移位后的位向量就是 $\lfloor x/2^k \rfloor$ 的补码表示。 ■

原理 24 除以 *2* 的幂的补码除法，向上舍入

C 变量 x 和 k 分别有补码值 x 和无符号数值 k，且 $0 \leq k < w$，则当执行算术移位时，*C* 表达式 $(x + (1 \ll k) - 1) \gg k$ 产生数值 $\lceil x/2^k \rceil$。

推导 15 除以 *2* 的幂的补码除法，向上舍入

查看 $\lceil x/y \rceil = \lfloor (x+y-1)/y \rfloor$，假设 $x = qy + r$，其中 $0 \leq r < y$，得到 $(x+y-1)/y = q + (r+y-1)/y$，因此 $\lfloor (x+y-1)/y \rfloor = q + \lfloor (r+y-1)/y \rfloor$。当 $r = 0$ 时，后面一项等于 *0*，而当 $r > 0$ 时，等于 *1*. 即，通过给 x 增加一个偏量 $y-1$，然后再将除法向下舍入，当 y 整除 x 时，我们得到 q，否则得到 $q+1$。

故当 $y = 2^k$，*C* 表达式 $x + (1 \ll k) - 1$ 得到数值 $x + 2^k - 1$。将这个值算术右移 k 位即产生 $\lfloor x/2^k \rfloor$。 ■

5 浮点数

浮点表示对形如 $V = x \times 2^y$ 的有理数进行编码。

5.1 二进制小数

十进制的小数表示法如下：

$$d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-n}$$

每个十进制数 d_i 的取值范围是 $0 \sim 9$。故该表达描述的数值 d 定义为：

$$d = \sum_{i=-n}^{m} 10^i \times d_i$$

类似的，一个形如

$$b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-n-1} b_{-n}$$

的表示法定义的 0 1 串数字定义如下：

$$b = \sum_{i=-n}^{m} 2^i \times b_i$$

符号.现在是二进制的点,点左边的位权是 2 的正幂，点右边的位的权是 2 的负幂。

例如,101.11_2 表示数字 $1 \times 2^2 = 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 4+0+1+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 5\frac{3}{4}$

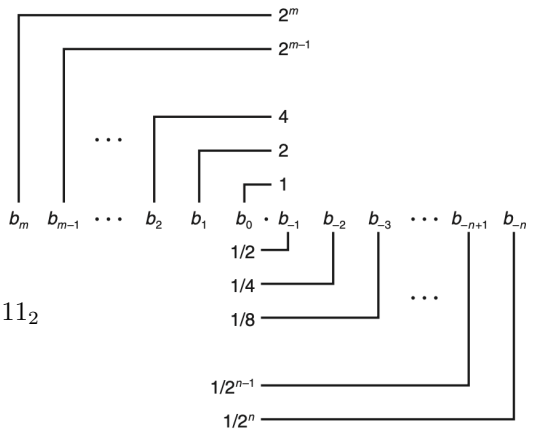


Figure 13: 小数的二进制表示。二进制点左边的数字的权形如 2^i, 而右边的数字的权形如 $1/2^i$

$0.111\ldots1_2$ 这样的数刚好是小于 1 的数。例如，0.111111_2 表示 $\frac{63}{64}$，我们通常用简单的表达法 $1.0-\epsilon$ 来表示这样的数值。

小数的二进制表示法只能表示那些能够表示成 $x \times 2^y$ 的数。其他的值只能够被近似表示。

例如，$\frac{1}{5} = 0.20_{10}$ 可以被十进制小数 0.20 精确表示，却不能被精确地表示为一个二进制小数。增加二进制表示的长度可以提高其表示精度:

表示	值	十进制
0.0_2	$\frac{0}{2}$	0.0_{10}
0.01_2	$\frac{1}{4}$	0.25_{10}
0.010_2	$\frac{2}{8}$	0.25_{10}
0.0011_2	$\frac{3}{16}$	0.1875_{10}
0.001101_2	$\frac{13}{64}$	0.203125_{10}
0.00110011_2	$\frac{51}{256}$	0.19921875_{10}

5.2 IEEE 浮点表示

IEEE 浮点标准用 $V = (-1)^s \times M \times 2^E$ 的形式来表示一个数:

- 符号 (sign) s 决定数字的正 (s=0) 负 (s=1), 对于数值 0 的符号位作为特殊情况处理。
- 尾数 (significand) M 是一个二进制小数，它的范围是 $1 \sim 2-\epsilon$，或者是 $0 \sim 1-\epsilon$。
- 阶码 (exponent) E 的作用是对浮点数加权，这个权重是 2 的 E 次幂 (可能为负数)。

对浮点数的位表示划分为三个字段，分别对这些值进行编码:

- 一个单独的符号位 s 直接编码符号 s。
- k 位的阶码字段 $exp = e_{k-1} \ldots e_1 e_0$ 编码阶码 E。

- n 位小数字段 $frac = f_{n-1} \ldots f_1 f_0$ 编码尾数 M，但是编码出来的值也依赖于编码字段的值是否等于 0。

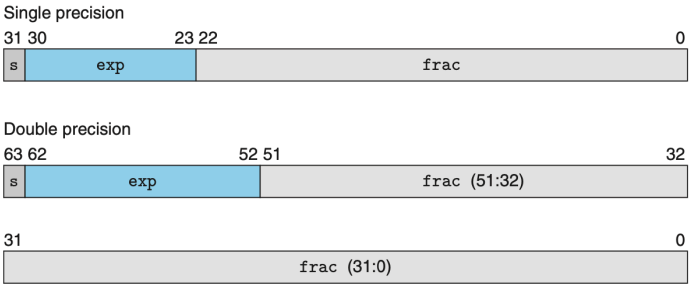


Figure 14: 标准浮点格式 (浮点数由 3 个字段表示。两种最常见的格式是他们被封装到 32 位 (单精度) 和 64 位 (双精度) 的字中)