第二单元学习笔记

yinxuhao [xuhao_yin@163.com]

December 21, 2022

Contents

信息的表示和处理

1 引言

孤立地讲，**单个的位不是非常有用，将位组合在一起，再加上某种解释(interpretation)，即赋予不同的可能位模式以含意**。我们就能表示任何有限集合的元素。

三种重要的数字表示：

1. **无符号**`unsigned`编码给予传统的二进制表示法
2. **补码**`two's-complement`编码是表示有符号整数的最常见的方式。
3. **浮点数**`floating-point`编码是表示实数的科学计数法的以 2 为基数的版本。

数据**溢出**`overflow`是产生 bug 的一大原因。负数下溢产生极大的正数；正数上溢产生极小的负数。

浮点运算有完全不同的数学属性。

1. **由于表示的精度有限，浮点运算是不可结合的**。例如

$$(3.14 + 1e_{20}) - 1e_{20} = 0.0$$

but

$$(3.14 + 1e_{20} - 1e_{20}) = 3.14$$

2. 该属性不同的原因，是处理数字表示有限性的方式不同——
整数虽只能编码一个相对较小的数值范围，然该表示法是精确的；
浮点数虽可以编码相对较大的数值范围，但这种表示只是近似的。
书中建议的本章学习方式：
<u>深入学习数学语言</u>
<u>学习编写公式和方程式</u>
<u>以及重要属性的推导</u>

2 信息存储

大多数计算机**使用 8 位的块或者字节作为最小的可寻址内存单位**，而不是内存中单独的比特。

机器级程序将内存视为一个非常大的字节数组，称为**虚拟内存**，所有可能的地址的集合称为**虚拟地址空间**`virtual address space`.

每个程序对象可以简单地视为一个字节块，而程序本身就是一个字节序列。

2.1 十六进制表示法

Hex digit	0	1	2	3	4	5	6	7
Decimal value	0	1	2	3	4	5	6	7
Binary value	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Hex digit	8	9	A	B	C	D	E	F
Decimal value	8	9	10	11	12	13	14	15
Binary value	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Figure 1: 十六进制表示法。每个十六进制数字都对 16 个值中的一个进行了编码

十六进制转二进制：将十六进制的每一位转换为二进制格式，然后拼接。例如：

十六进制	1	7	3	A	4	C
二进制	0001	0111	0011	1010	0100	1100

所以 $binary_{0x173a4c_{16}} = 000101110011101001001100_2$。

二进制转十六进制：将二进制从右到左做 4 个一组的划分，如最左侧不足 4 位则以 0 补之。然后将每个 4 位转换为对应的十六进制数字拼接即可。例如：

二进制	11	1100	1010	1101	1011	0011
十六进制	3	C	A	D	B	3

所以，$hex_{1111001010110110110011_2} = 3cadb3_{16}$

2.2 字数据大小

每台计算机都有一个字长，指明指针数据的标称大小。

C 数据类型的典型大小见下图：

C declaration		Bytes	
Signed	Unsigned	32-bit	64-bit
`[signed] char`	`unsigned char`	1	1
`short`	`unsigned short`	2	2
`int`	`unsigned`	4	4
`long`	`unsigned long`	4	8
`int32_t`	`uint32_t`	4	4
`int64_t`	`uint64_t`	8	8
`char *`		4	8
`float`		4	4
`double`		8	8

Figure 2: 基本 C 数据类型的典型大小 (以字节为单位)

2.3 寻址和字节顺序

小端法`little endian`：最低有效字节在最前面放着。

大端法`big endian`：最高有效字节在最前面放着。

具体示例见下图：

```
#include <stdio.h>

typedef unsigned char *byte_pointer;

void show_bytes(byte_pointer start, size_t len) {
    size_t i;
    for(i = 0; i < len; i++) {
```

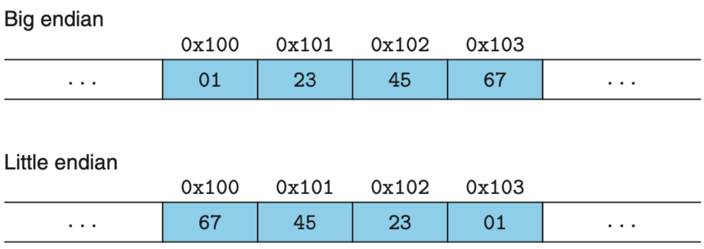


Figure 3: 大端法与小端法

```c
        printf(" %.2x", start[i]);
    }
    printf("\n");
 }

 void show_int(int x) {
    show_bytes((byte_pointer) &x, sizeof(int));
}

void show_float(float x);

void show_pointer(void *x);

void test_show_bytes(int val) {
    int ival = val;
    float fval = (float) val;
    int *pval = &ival;
    show_int(ival);
    show_float(fval);
    show_pointer(pval);
}
```

通过以上代码，可以打印出数据的两位十六进制格式输出。对比结果可以发现，`int`和`float`的结果一样，只是排列的大小端不同，而指针值不同，与机器相关。

二进制代码是不兼容的。

2.4 布尔代数

~	
0	1
1	0

&	0	1
0	0	0
1	0	1

|	0	1
0	0	1
1	1	1

^	0	1
0	0	1
1	1	0

Figure 4: 布尔代数的运算。二进制 0 和 1 代表逻辑值 TRUE 和 FALSE. 以上四张图依次是逻辑运算符 NOT AND OR EXCLUSIVE-OR

位向量一个很有用的应用就是**表示有限集合**。利用位向量 $[a_{w-1}, \ldots, a_1, a_0]$ 可以编码任何子集 $A \in 0, 1, \ldots, w-1$。

例如，定义规则 $a_i = 1 \iff i \in A$。

位向量 $a \doteq$[01101001] 表示集合 $A = 0,3,5,6$，而位向量 $b \doteq$[01010101] 表示集合 $B = 0,2,4,6$。

编码集合的使用方法是使用布尔运算。

例如：$a\&b \to$ [010000001], 对应于 $A \cap B = 0,6$。

它的实际应用，还有使用位向量作为掩码有选择地使用或屏蔽一些信号，该掩码就是设置为有效信号的集合。

C 语言中的位级运算，其实是按照各个位对应的位运算来的。

而 C 语言中的逻辑运算 (||、`&&`、`!`) 则是把所有的非零参数都表示 TRUE，参数 0 表示为 FALSE。它们只返回 1 或 0. 而位级运算只在参数特殊时才与之有相同的结果。

2.5 移位运算

`x<<k`: 左移 k 位，即丢弃最高 k 位，右端补充 k 个 0.

`x>>k`: 右移 k 位，支持逻辑右移和算术右移。逻辑右移在左端补充 k 个 0，算术右移则在左端补充 k 个最高有效位 (符号位)。

对无符号数，右移必须是逻辑的。

移位运算符是从左至右可结合的。

3 整数表示

Symbol	Type	Meaning
$B2T_w$	Function	Binary to two's complement
$B2U_w$	Function	Binary to unsigned
$U2B_w$	Function	Unsigned to binary
$U2T_w$	Function	Unsigned to two's complement
$T2B_w$	Function	Two's complement to binary
$T2U_w$	Function	Two's complement to unsigned
$TMin_w$	Constant	Minimum two's-complement value
$TMax_w$	Constant	Maximum two's-complement value
$UMax_w$	Constant	Maximum unsigned value
$+^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement addition
$+^{u}_{w}$	Operation	Unsigned addition
$*^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement multiplication
$*^{u}_{w}$	Operation	Unsigned multiplication
$-^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement negation
$-^{u}_{w}$	Operation	Unsigned negation

Figure 5: 整数的数据与算术操作术语。下标 w 表示数据中表示中的位数

3.1 无符号数的编码

原理 1 无符号数编码的定义

对向量 $\vec{x}=[x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]$:

$$B2U_w(\vec{x})\doteq\sum_{i=0}^{w-1}x_i2^i \tag{1}$$

原理 2 无符号数编码的唯一性

函数 $B2U_w$ 是一个双射

3.2 补码编码

原理 3 补码编码的定义

对向量 $\vec{x}=[x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]$:

$$B2T_w(\vec{x})\doteq-x_{w-1}2^{w-1}+\sum_{i=0}^{w-2}x_i2^i \tag{2}$$

原理 4 补码编码的唯一性

函数 $B2T_w$ 是一个双射。

1. 补码的范围是不对称的：$|TMin|=|TMax|+1$，即 TMin 没有与之对应的正数。这是因为 0 是非负数。
2. 最大的无符号数值刚好比补码的最大值的两倍大一点：$UMax_w=2TMax_w+1$

3.3 有符号和无符号数之间的转换

原理 5 补码转换为无符号数

对满足 $TMin_w\le x\le TMax_w$ 的 x 有:

$$T2U_w(x)=\begin{cases}x+2^w, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases} \tag{3}$$

推导 3.1 补码转换为无符号数

比较式1和2，我们发现对于位模式 $\vec{x}$，如果我们计算 $B2U_w(\vec{x})-B2T_w(\vec{x})$ 之差，得到:

$$B2U_w(\vec{x})-B2T_w(\vec{x})=x_{w-1}2^w$$

由此得到一个关系:

$$B2U_w(\vec{x})=x_{w-1}2^w+B2T_w(\vec{x}) \tag{4}$$

由此可得:

$$B2U_w(T2B_w(x))=T2U_w(x)=x+x_{w-1}2^w \tag{5}$$

式5的计算：将 $T2B_w(x)$ 当作 x 代入4后得到。由于运算 $T2B_w$ 与 $B2T_w$ 是对 $\vec{x}$ 的逆运算，故

$$\because B2U_w(T2B_w(x))=x_{w-1}2^w+B2T_w(T2B_w(x))\ \therefore T2U_w(x)=x+x_{w-1}2^w$$

根据3的两种情况，在 x 的补码中，位 x_{w-1} 决定了 x 是否为负。 ■

原理 6 无符号数转换为补码

对满足 $0\le x\le UMax_w$ 的 u 有:

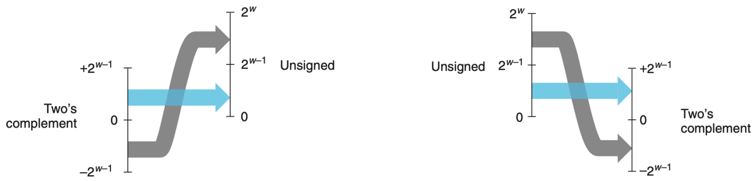
$$U2T_w(u)=\begin{cases}u, & u\le TMax_w\\ u-2^w, & u>TMax\end{cases} \tag{6}$$

推导 3.2 设 $\vec{x} = U2B_w(u)$，则这个位向量也是 $U2T_w(u)$ 的补码表示。式1和式2结合起来有

$$U2T_w(u) = -u_{w-1}2^w + u \tag{7}$$

在 u 的无符号表示中，对式6的两种情况来说，位 u_{w-1} 决定了 u 是否大于 $TMax_w = 2^{w-1} - 1$。 ■

以下图说明了函数 U2T 的行为。对于小的数，从无符号到有符号保留原值；一旦大于 $TMax_w$，数字将被转换为一个负数值。



(a) 从补码到无符号数的转换。函数 T2U 将负数转换为大的正数

(b) 从无符号数到补码的转换。函数 U2T 把大于 $2^{w-1} - 1$ 的数字转换为负值

Figure 6: 无符号数和补码的转换

3.4 扩展一个数字的位表示

用于将数据类型转换为一个更大的数据类型，例如 32 位 →64 位。

原理 7 无符号数的零扩展

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{u} = [u_{w-1}, u_{w-2}, \ldots, u_0]$ 和宽度为 w' 的位向量 $\vec{u}' = [0, \ldots, 0, u_{w-1}, u_{w-1}, \ldots, u_0]$，其中，$w' > w$。则 $B2U_w(\vec{u}) = B2U_{w'}(\vec{u}')$。

原理 8 补码数的符号扩展

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 和宽度为 w 的位向量 $\vec{x}' = [x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$，其中 $w' > w$。则 $B2T_w(\vec{x}) = B2T_{w'}(\vec{x}')$。