第二单元学习笔记

yinxuhao [xuhao_yin@163.com]

December 27, 2022

Contents

信息的表示和处理

1 引言

孤立地讲，**单个的位不是非常有用，将位组合在一起，再加上某种解释(interpretation)，即赋予不同的可能位模式以含意**。我们就能表示任何有限集合的元素。

三种重要的数字表示：

1. **无符号**`unsigned`编码给予传统的二进制表示法
2. **补码**`two's-complement`编码是表示有符号整数的最常见的方式。
3. **浮点数**`floating-point`编码是表示实数的科学计数法的以 2 为基数的版本。

数据**溢出**`overflow`是产生 bug 的一大原因。负数下溢产生极大的正数；正数上溢产生极小的负数。

浮点运算有完全不同的数学属性。

1. **由于表示的精度有限，浮点运算是不可结合的**。例如

$$(3.14 + 1e_{20}) - 1e_{20} = 0.0$$

but

$$(3.14 + 1e_{20} - 1e_{20}) = 3.14$$

2. 该属性不同的原因，是处理数字表示有限性的方式不同——
整数虽只能编码一个相对较小的数值范围，然该表示法是精确的；
浮点数虽可以编码相对较大的数值范围，但这种表示只是近似的。
书中建议的本章学习方式：
深入学习数学语言
学习编写公式和方程式
以及重要属性的推导

2 信息存储

大多数计算机**使用 8 位的块或者字节作为最小的可寻址内存单位**，而不是内存中单独的比特。

机器级程序将内存视为一个非常大的字节数组，称为**虚拟内存**，所有可能的地址的集合称为**虚拟地址空间**`virtual address space`.

每个程序对象可以简单地视为一个字节块，而程序本身就是一个字节序列。

2.1 十六进制表示法

Hex digit	0	1	2	3	4	5	6	7
Decimal value	0	1	2	3	4	5	6	7
Binary value	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Hex digit	8	9	A	B	C	D	E	F
Decimal value	8	9	10	11	12	13	14	15
Binary value	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Figure 1: 十六进制表示法。每个十六进制数字都对 16 个值中的一个进行了编码

十六进制转二进制：将十六进制的每一位转换为二进制格式，然后拼接。例如：

十六进制	1	7	3	A	4	C
二进制	0001	0111	0011	1010	0100	1100

所以 $binary_{0x173a4c_{16}} = 000101110011101001001100_2$。

二进制转十六进制：将二进制从右到左做 4 个一组的划分，如最左侧不足 4 位则以 0 补之。然后将每个 4 位转换为对应的十六进制数字拼接即可。例如：

二进制	11	1100	1010	1101	1011	0011
十六进制	3	C	A	D	B	3

所以，$hex_{1111001010110110110011_2} = 3cadb3_{16}$

2.2 字数据大小

每台计算机都有一个字长，指明指针数据的标称大小。

C 数据类型的典型大小见下图：

C declaration		Bytes	
Signed	Unsigned	32-bit	64-bit
[signed] char	unsigned char	1	1
short	unsigned short	2	2
int	unsigned	4	4
long	unsigned long	4	8
int32_t	uint32_t	4	4
int64_t	uint64_t	8	8
char *		4	8
float		4	4
double		8	8

Figure 2: 基本 C 数据类型的典型大小 (以字节为单位)

2.3 寻址和字节顺序

小端法`little endian`：最低有效字节在最前面放着。

大端法`big endian`：最高有效字节在最前面放着。

具体示例见下图：

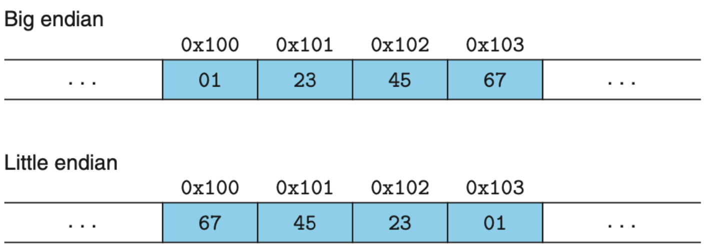


Figure 3: 大端法与小端法

```
#include <stdio.h>

typedef unsigned char *byte_pointer;

void show_bytes(byte_pointer start, size_t len) {
    size_t i;
    for(i = 0; i < len; i++) {
        printf(" %.2x", start[i]);
    }
    printf("\n");
 }

 void show_int(int x) {
    show_bytes((byte_pointer) &x, sizeof(int));
}

void show_float(float x);

void show_pointer(void *x);

void test_show_bytes(int val) {
    int ival = val;
    float fval = (float) val;
    int *pval = &ival;
    show_int(ival);
    show_float(fval);
    show_pointer(pval);
}
```

通过以上代码，可以打印出数据的两位十六进制格式输出。对比结果可以发现，`int`和`float`的结果一样，只是排列的大小端不同，而指针值不同，与机器相关。

二进制代码是不兼容的。

2.4 布尔代数

`~`	
0	1
1	0

`&`	0	1
0	0	0
1	0	1

`|`	0	1
0	0	1
1	1	1

`^`	0	1
0	0	1
1	1	0

Figure 4: 布尔代数的运算。二进制 0 和 1 代表逻辑值 TRUE 和 FALSE. 以上四张图依次是逻辑运算符 NOT AND OR EXCLUSIVE-OR

位向量一个很有用的应用就是**表示有限集合**。利用位向量 $[a_{w-1}, \ldots, a_1, a_0]$ 可以编码任何子集 $A \in 0, 1, \ldots, w-1$。

例如，定义规则 $a_i = 1 \iff i \in A$。

位向量 $a \doteq$[01101001] 表示集合 $A = 0, 3, 5, 6$，而位向量 $b \doteq$[01010101] 表示集合 $B = 0, 2, 4, 6$。

编码集合的使用方法是使用布尔运算。

例如：$a \& b \to$ [010000001], 对应于 $A \cap B = 0, 6$。

它的实际应用，还有使用位向量作为掩码有选择地使用或屏蔽一些信号，该掩码就是设置为有效信号的集合。

C 语言中的位级运算，其实是按照各个位对应的位运算来的。

而 C 语言中的逻辑运算 (||、`&&`、`!`) 则是把所有的非零参数都表示 TRUE，参数 0 表示为 FALSE。它们只返回 1 或 0. 而位级运算只在参数特殊时才与之有相同的结果。

2.5 移位运算

`x<<k`: 左移 k 位，即丢弃最高 k 位，右端补充 k 个 0.

`x>>k`: 右移 k 位，支持逻辑右移和算术右移。逻辑右移在左端补充 k 个 0，算术右移则在左端补充 k 个最高有效位 (符号位)。

对无符号数，右移必须是逻辑的。

移位运算符是从左至右可结合的。

3 整数表示

Symbol	Type	Meaning
$B2T_w$	Function	Binary to two's complement
$B2U_w$	Function	Binary to unsigned
$U2B_w$	Function	Unsigned to binary
$U2T_w$	Function	Unsigned to two's complement
$T2B_w$	Function	Two's complement to binary
$T2U_w$	Function	Two's complement to unsigned
$TMin_w$	Constant	Minimum two's-complement value
$TMax_w$	Constant	Maximum two's-complement value
$UMax_w$	Constant	Maximum unsigned value
$+^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement addition
$+^{u}_{w}$	Operation	Unsigned addition
$*^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement multiplication
$*^{u}_{w}$	Operation	Unsigned multiplication
$-^{t}_{w}$	Operation	Two's-complement negation
$-^{u}_{w}$	Operation	Unsigned negation

Figure 5: 整数的数据与算术操作术语。下标 w 表示数据中表示中的位数

3.1 无符号数的编码

原理 1 无符号数编码的定义

对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2U_w(\vec{x}) \doteq \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i \tag{1}$$

形象的展示如下图:

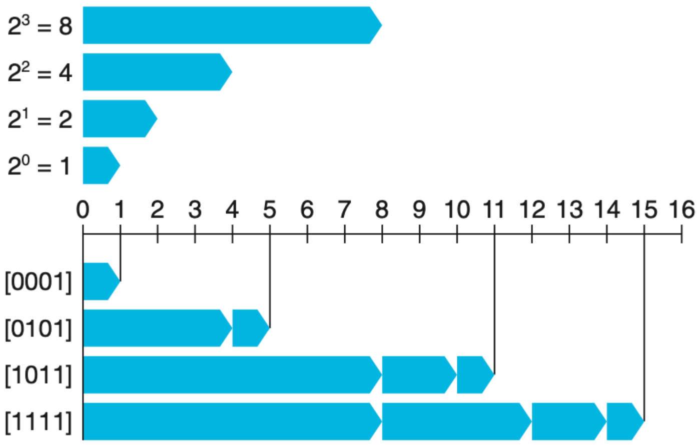


Figure 6: w=4 的无符号数示例。当二进制表示中位 i 为 1，数值就会相应加上 2^i

原理 2 无符号数编码的唯一性

函数 $B2U_w$ 是一个双射

3.2 补码编码

原理 3 补码编码的定义

对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2T_w(\vec{x}) \doteq -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \tag{2}$$

形象地展示如下图:

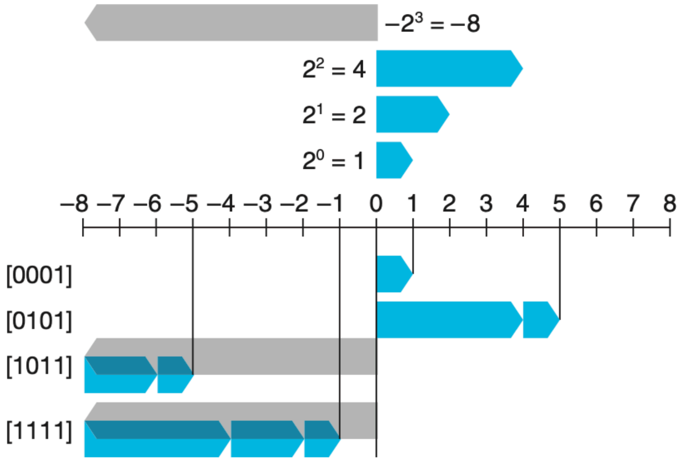


Figure 7: w=4 的补码示例。把位 3 作为符号位，因此当它为 1 时，对数值的影响是 $-2^3=-8$。这个权重在图中用带向左箭头的条表示

原理 4 补码编码的唯一性

函数 $B2T_w$ 是一个双射。

1. 补码的范围是不对称的：$|TMin|=|TMax|+1$，即 TMin 没有与之对应的正数。这是因为 0 是非负数。

2. 最大的无符号数值刚好比补码的最大值的两倍大一点：$UMax_w = 2TMax_w+1$

3.3 有符号和无符号数之间的转换

原理 5 补码转换为无符号数

对满足 $TMin_w \le x \le TMax_w$ 的 x 有：

$$T2U_w(x)=\begin{cases} x+2^w, & x<0 \\ x, & x\ge 0\end{cases} \tag{3}$$

推导 1 补码转换为无符号数

比较式1和2，我们发现对于位模式 $\vec{x}$，如果我们计算 $B2U_w(\vec{x})-B2T_w(\vec{x})$ 之差，得到：

$$B2U_w(\vec{x})-B2T_w(\vec{x})=x_{w-1}2^w$$

由此得到一个关系：

$$B2U_w(\vec{x})=x_{w-1}2^w+B2T_w(\vec{x}) \tag{4}$$

由此可得：

$$B2U_w(T2B_w(x))=T2U_w(x)=x+x_{w-1}2^w \tag{5}$$

式5的计算：将 $T2B_w(x)$ 当作 x 代入4后得到。由于运算 $T2B_w$ 与 $B2T_w$ 是对 $\vec{x}$ 的逆运算，故

$$\because B2U_w(T2B_w(x))=x_{w-1}2^w+B2T_w(T2B_w(x)) \therefore T2U_w(x)=x+x_{w-1}2^w$$

根据3的两种情况，在 x 的补码中，位 x_{w-1} 决定了 x 是否为负。 ■

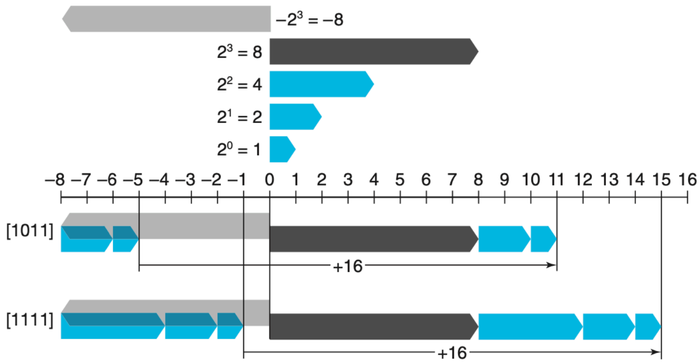


Figure 8: 比较当 w=4 时无符号数表示和补码表示 (对补码和无符号数来说，最高有效位的权重分别是-8 和 +8，因此产生一个差为 16)

原理 6 无符号数转换为补码

对满足 $0 \leq x \leq UMax_w$ 的 u 有：

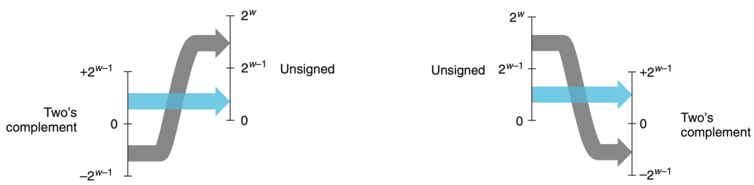
$$U2T_w(u) = \begin{cases} u, & u \leq TMax_w \\ u - 2^w, & u > TMax \end{cases} \tag{6}$$

推导 2 设 $\vec{x} = U2B_w(u)$，则这个位向量也是 $U2T_w(u)$ 的补码表示。式1和式2结合起来有

$$U2T_w(u) = -u_{w-1}2^w + u \tag{7}$$

在 u 的无符号表示中，对式6的两种情况来说，位 u_{w-1} 决定了 u 是否大于 $TMax_w = 2^{w-1} - 1$。 ■

以下图说明了函数 U2T 的行为。对于小的数，从无符号到有符号保留原值；一旦大于 $TMax_w$，数字将被转换为一个负数值。



(a) 从补码到无符号数的转换。函数 T2U 将负数转换为大的正数

(b) 从无符号数到补码的转换。函数 U2T 把大于 $2^{w-1} - 1$ 的数字转换为负值

Figure 9: 无符号数和补码的转换

3.4 扩展一个数字的位表示

用于将数据类型转换为一个更大的数据类型，例如 32 位 →64 位。

原理 7 无符号数的零扩展

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{u} = [u_{w-1}, u_{w-2}, \ldots, u_0]$ 和宽度为 w' 的位向量 $\vec{u}' = [0, \ldots, 0, u_{w-1}, u_{w-1}, \ldots, u_0]$，其中，$w' > w$。则 $B2U_w(\vec{u}) = B2U_{w'}(\vec{u}')$。

原理 8 补码数的符号扩展

定义宽度为 w 的位向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$ 和宽度为 w 的位向量 $\vec{x}' = [x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$，其中 $w' > w$。则 $B2T_w(\vec{x}) = B2T_{w'}(\vec{x}')$。

推导 3 补码数值的符号扩展

令 $w' = w + k$，证明

$$B2T_{w+k}([\underbrace{x_{w-1}, \ldots, x_{w-1}}_{k\ times}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) = B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])$$

下面的证明是对 k 进行归纳。即：**如果我们能够证明符号扩展一位保持了数值不变，那么符号扩展任意位都能保持这种属性**。即：

$$B2T_{w+1}([x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) = B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])$$

用式2展开左边的表达式，得：

$$\begin{aligned}
B2T_{w+1}([x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]) &= -x_{w-1}2^w + \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}2^w + x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}(2^w - 2^{w-1}) + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \\
&= B2T_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]).
\end{aligned}$$

其中使用的关键属性是 $2^w - 2^{w-1} = 2^{w-1}$。 ■

3.5 截断数字

原理 9 截断无符号数

令 $\vec{x}$ 等于位向量 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$，而 $\vec{x}'$ 是将其截断为 k 位的结果：$\vec{x}' = [x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$。令 $x = B2U_w(\vec{x}')$。则 $\vec{x}' = x\ mod\ 2^k$。

推导 4 截断补码数值

使用无符号数截断相同参数，则有

$$B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k = B2U_k[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$$

即，$x\ mod\ 2^k$ 能够被一个位级表示为 $[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0]$ 的无符号数表示。将其转换为补码数则有 $x' = U2T_k(x\ mod\ 2^k)$。 ■

总结：

无符号数的截断结果：

$$B2U_k[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0] = B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k$$

补码数字的截断结果：

$$B2T_l[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0] = U2T_k(B2U_w([x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0])\ mod\ 2^k)$$

3.6 关于有符号数和无符号数的建议

有符号数到无符号数的隐式转换，会导致错误或者漏洞。避免这类错误的一种方法是绝不使用无符号数。(例如除 C 语言外，少有语言支持无符号整数。)

但是**当我们想要把字仅仅看做是位的集合而没有任何数字意义时，无符号数值是非常有用的**。

所以，见机行事。

4 整数运算

4.1 无符号加法

原理 10 *无符号数加法*

对满足 $0 \leq x, y \leq 2^w$ 的 x 和 y 有：

$$x +_w^u y = \begin{cases} x + y, & x + y < 2^w \quad Normal \\ x + y - 2^w, & 2^w \leq x + y < 2^{w+1} \quad Overflow \end{cases}$$

推导 5 *无符号数加法*

一般而言，我们可以看到，如果 $x + y < 2^w$，和的 $w + 1$ 位表示中最高位会等于 0，因此丢弃它不会改变这个数值。

另一方面，如果 $2^w \leq x + y < 2^{w+1}$，和的 $w + 1$ 位表示中的最高位会等于 1，因此丢弃它就相当于从和中减去了 2^w。 ■

形象表示见下图：

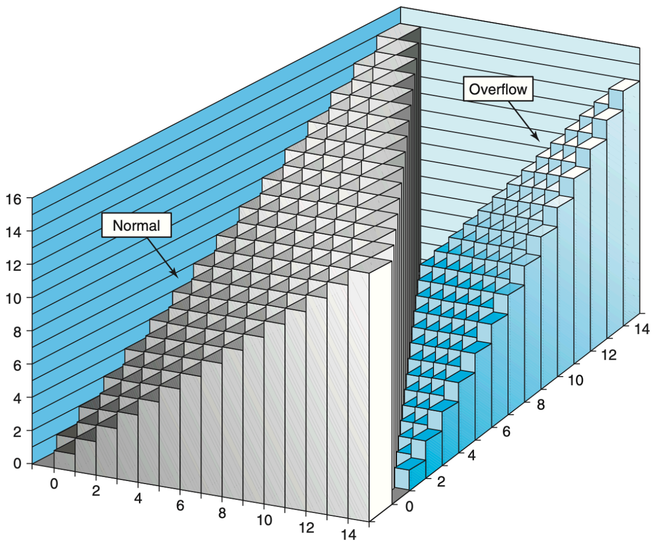


Figure 10: 无符号加法 (4 位字长，加法是模 16 的)

整数加法和无符号加法着急拿的关系见下图：

原理 11 *检测无符号数加法中的溢出*

对在范围 $0 \leq x, y \leq UMax_w$ 中的 x 和 y，令 $s \doteq x +_w^u y$。则对计算 s，当且仅当 $s < x$(或者等价的 $s < y$) 时，发生了溢出。

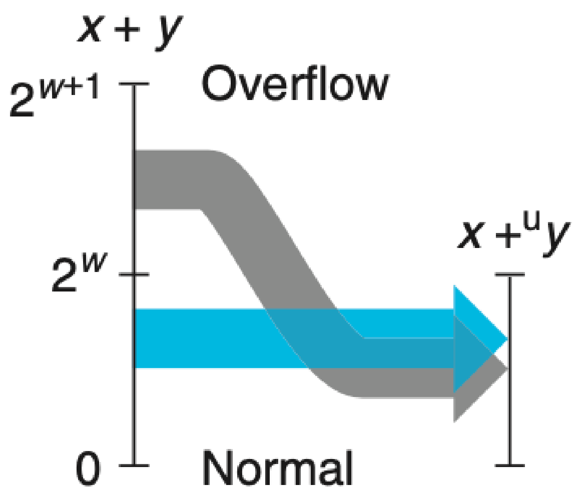


Figure 11: 整数加法和无符号加法间的关系。当 x+y 大于 $2^w - 1$ 时，其和溢出

推导 6 检测无符号数加法中的溢出

通过观察发现 $x + y \geq x$，因此如果 s 没有溢出，我们能够肯定 $s \geq x$。

另一方面，如果 s 确实溢出了，我们就有 $s = x + y - 2^w$。假设 $y < 2^w$，我们就有 $y - 2^w < 0$，因此 $s = x + (y - 2^w) < x$。 ■

模数加法形成了一种数学结构，称为阿贝尔群 (Abelian goup)，它是可交换的和可结合的。它有一个单位元 0，并且每个元素有一个加法逆元。

原理 12 无符号数求反

对满足 $0 \leq x < 2^w$ 的任意 x，其 w 位的无符号逆元 $-^u_w x$ 由下式给出：

$$-^u_w x = \begin{cases} x, & x = 0 \\ 2^w - x, & x > 0 \end{cases}$$

推导 7 无符号数求反

当 $x = 0$ 时，加法逆元显然是 *0*。对于 $x > 0$，考虑值 $2^w - x$。我们观察到这个数字在 $0 < 2^w - x < 2^w$ 范围之内，并且 $(x + 2^w - x) \ mod \ 2^w = 2^w \ mod \ 2^w = 0$。因此，它就是 x 在 $+^u_w$ 下的逆元。 ■

4.2 补码加法

定义 $x +^t_w y$ 为整数和 $x + y$ 被截断为 w 位的结果，并将这个结果看做是**补码数**。

原理 13 补码加法

对满足 $-2^{w-1} \leq x, y \leq 2^{w-1} - 1$ 的整数 x 和 y，有：

$$x +^t_w y = \begin{cases} x + y - 2^w, & 2^{w-1} \leq x + y & Positive\ overflow \\ x + y, & -2^{w-1} \leq x + y < 2^{w-1} & Normal \\ x + y + 2^w, & x + y < -2^{w-1} & Negative\ overflow \end{cases}$$

推导 8 补码加法

由于补码加法和无符号数加法有相同的位级表示，故可以按照如下步骤表示运算 $+^t_w$：

1. 将参数转换为无符号数

2. 执行无符号数加法

3. 将结果转换为补码

$$x +^t_w y \doteq U2T_w(T2U_w(x) +^u_w T2U_w(y))$$

由式5,$T2U_w(x) \iff x_{w-1}2^w + x$, $T2U_w(y) \iff y_{w-1}2^w + y$。使用属性【$+^u_w$ 是模 2^w 的加法，以及模数加法的属性，我们得到：

$$\begin{aligned} x +^t_w y &= U2T_w(T2U_w(x) +^u_w T2U_w(y) \\ &= U2T_w[(x_{w-1}2^w + x + y_{w-1}2^w + y)\ mod\ 2^w] \\ &= U2T_w[(x+y)\ mod\ 2^w] \end{aligned}$$

定义 $z \doteq x+y$，$z' \doteq z\ mod\ 2^w$, $z'' \doteq U2T_w(z')$，$z'' = x +^t_w y$。下面分 *4* 种情况讨论：

1. $-2^w \le z < -2^{w-1}$, 则 $z' = z + 2^w$。于是得出 $0 \le z' < -2^{w-1} + 2^w = 2^{w-1}$。检查式6可以看到 z' 在满足 $z'' = z'$ 的范围之内。这种情况称作**负溢出 *(negative overflow)***。将两个负数 x 和 y 相加 *(*这是得到 $z < -2^{w-1}$ 的唯一方式*)*，得到一个非负的结果 $z'' = x + y + 2^w$。

2. $-2^{w-1} \le z < 0$, 则 $z' = z + 2^w$。于是得出 $-2^{w-1} + 2^w = 2^{w-1} \le z' < 2^w$。检查式6可以看到 z' 在满足 $z'' = z' - 2^w$ 的范围之内。因此 $z'' = z' - 2^w = z + 2^w - 2^w = z$。即，补码和 z'' 等于整数和 $x + y$。

3. $0 \le z < 2^{w-1}$，则 $z' = z$。于是得出 $0 \le z' < 2^{w-1}$，因此 $z'' = z' = z$。于是补码和 z'' 又等于整数和 $x + y$。

4. $2^{w-1} \le z < 2^w$，则 $z' = z$。于是得出 $2^{w-1} \le z' < 2^w$。在这个范围内，$z'' = z' - 2^w$。因此得到 $z'' = x + y - 2^w$。这种情况称作**正溢出 *(positive overflow)***。将整数 x 和 y 相加 *(*这是得到 $z \ge 2^{w-1}$ 的唯一方式*)*，得出一个负数结果 $z'' = x + y - 2^w$。 ■

补码加法的形象表示见下图：

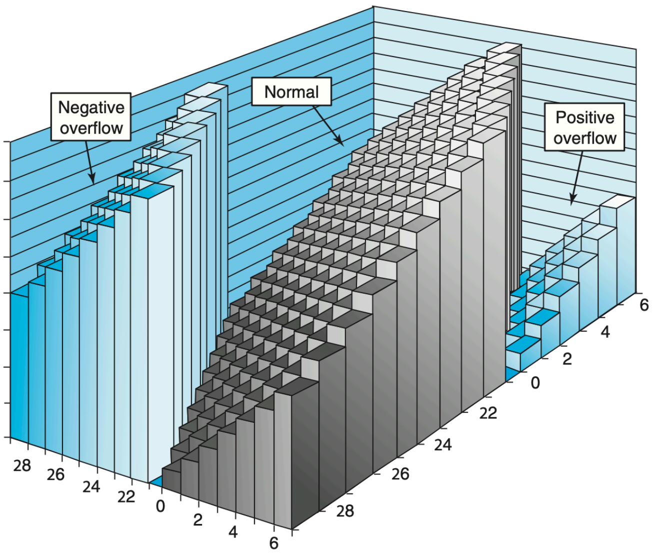


Figure 12: 补码加法 (字长为 4 位的情况下，当 $x+y<-8$ 时，产生负溢出；$x+y\geq 8$ 时，产生正溢出)

原理 14 检测补码加法中的溢出

对满足 $TMin_w \leq x, y \leq TMax_w$ 的 x 和 y，令 $s \doteq x +^t_w y$。当且仅当 $x>0, y>0$，但 $s \leq 0$ 时，计算 s 发生了正溢出。当且仅当 $x<0, y<0$，但 $s \geq 0$ 时，计算 s 发生了负溢出。

推导 9 检测补码加法中的溢出

1. 分析正溢出：若 $x>0, y>0$，而 $s \leq 0$，那么显然发生了正溢出。反过来，正溢出的条件为 *1)* $x>0, y>0$(或者 $x+y<TMax_w$)，*2)* $s \leq 0$。

2. 分析负溢出：若 $x<0, y<0$，而 $s \geq 0$，那么显然发生了负溢出。反过来，负溢出的条件为 *1)* $x<0, y<0$(或者 $x+y>TMin_w$)，*2)* $s \geq 0$。 ■

4.3 补码的非

原理 15 补码的非

对满足 $TMin_w \leq x \leq TMax_w$ 的 x，其补码的非 $-^t_w$ 由下式给出：

$$-^t_w x = \begin{cases} TMin_w, & x = TMin_w \\ -x, & x > TMin_w \end{cases}$$

即，对 w 位的补码加法来说，$TMin_w$ 是自己的加法的逆，其他任何数值 x 都有-x 作为其加法的逆。

推导 10 补码的非

观察发现 $TMin_w + TMin_w = -2^{w-1} + (-2^{w-1}) = -2^w$。这将导致负溢出，因此 $TMin_w +^t_w TMin_w = -2^w + 2^w = 0$。对满足 $x > TMin_w$ 的 x，数值-x 可以表示为一个 w 位的补码，它们的和 $-x + x = 0$。 ■

4.3.1 补码非的两种快速求法

1. 执行位级补码非可以对每一位求补，再对结果加 1. 即，$-x = \sim x + 1$.

2. 将位向量分为两部分：假设 k 是最右边的 1 的位置，故 x 可表示为 $[x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_{k+1}, 1, 0, \ldots, 0]$。这个值的非写成二进制格式就是 $[\sim x_{w-1}, \sim x_{w-2}, \ldots, \sim x_{k+1}, 1, 0, \ldots, 0]$。即，对 k 左边的所有位取反。

4.4 无符号乘法

原理 16 无符号数乘法

对满足 $0 \leq x, y \leq UMax_w$ 的 x 和 y 有：

$$x *_w^u y = (x \cdot y)\ mod\ 2^w \tag{8}$$

4.5 补码乘法

原理 17 补码乘法

对满足 $TMin_w \leq x, y \leq TMax_w$ 的 x 和 y 有：

$$x *_w^t y = U2T_w((x \cdot y) mod\ 2^w) \tag{9}$$

原理 18 无符号数和补码乘法的位级等价性

给定长度为 w 的位向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$，用补码形式的位向量表示来定义整数 x 和 y：$x = B2T_w(\vec{x})$, $y = B2T_w(\vec{y})$。用无符号数形式的位向量表示来定义非负整数 x' 和 y'：$x' = B2U_w(\vec{x})$，$y' = B2U_w(\vec{y})$。则

$$T2B_w(x *_w^t y) = U2B_w(x' *_w^u y')$$

推导 11 无符号和补码乘法的位级等价性

据式6，我们有 $x' = x + x_{w-1}2^w$ 和 $y' = y + y_{w-1}2^w$。这些值的乘积模 2^w 可得：

$$\begin{aligned}
(x' \cdot y') mod\ 2^w &= [(x + x_{w-1}2^w) \cdot (y + y_{w-1}2^w)] mod\ 2^w \\
&= [x \cdot y + (x_{w-1}y + y_{w-1}x)2^w + x_{w-1}y_{w-1}2^{2w}] mod\ 2^w \\
&= (x \cdot y)\ mod\ 2^w
\end{aligned} \tag{10}$$

由于模运算符，所有带有权重 2^w 和 2^{2w} 的项都丢掉了。根据等式9，我们有 $x *_w^t y = U2T_w((x \cdot y)\ mod\ 2^w)$。对等式两边应用操作 $T2U_w$ 有：

$$T2U_w(x *_w^t y) = T2U_w(U2T_w((x \cdot y)\ mod\ 2^w)) = (x \cdot y)\ mod\ 2^w$$

由该结果与式8和式10结合得到 $T2U_w(x *_w^t y) = (x' \cdot y')\ mod\ 2^w = x' *_w^t y'$。对该式两边应用 $U2B_w$，得：

$$U2B_w(T2U_w(x *_w^t y)) = T2B_w(x *_w^t y) = U2B_w(x' *_w^u y')$$

$\blacksquare$