# 第二单元学习笔记

yinxuhao [xuhao_yin@163.com]

December 26, 2022

## Contents

信息的表示和处理

# 1 引言

孤立地讲，**单个的位不是非常有用，将位组合在一起，再加上某种解释(interpretation)，即赋予不同的可能位模式以含意**。我们就能表示任何有限集合的元素。

三种重要的数字表示：

1. **无符号**`unsigned`编码给予传统的二进制表示法

2. **补码**`two's-complement`编码是表示有符号整数的最常见的方式。

3. **浮点数**`floating-point`编码是表示实数的科学计数法的以 2 为基数的版本。

数据**溢出**`overflow`是产生 bug 的一大原因。负数下溢产生极大的正数；正数上溢产生极小的负数。

浮点运算有完全不同的数学属性。

1. **由于表示的精度有限，浮点运算是不可结合的**。例如

$$(3.14 + 1e_{20}) - 1e_{20} = 0.0$$

but

$$(3.14 + 1e_{20} - 1e_{20}) = 3.14$$

2. 该属性不同的原因，是处理数字表示有限性的方式不同——

**整数虽只能编码一个相对较小的数值范围，然该表示法是精确的；**

**浮点数虽可以编码相对较大的数值范围，但这种表示只是近似的。**

*书中建议的本章学习方式：*

深入学习数学语言

学习编写公式和方程式

以及重要属性的推导

# 2 信息存储

大多数计算机**使用 8 位的块或者字节作为最小的可寻址内存单位**，而不是内存中单独的比特。

机器级程序将内存视为一个非常大的字节数组，称为**虚拟内存**，所有可能的地址的集合称为**虚拟地址空间**`virtual address space`.

每个程序对象可以简单地视为一个字节块，而程序本身就是一个字节序列。

## 2.1 十六进制表示法

| Hex digit | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Decimal value | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Binary value | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 |
| Hex digit | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
| Decimal value | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Binary value | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |

Figure 1: 十六进制表示法。每个十六进制数字都对 16 个值中的一个进行了编码

十六进制转二进制：将十六进制的每一位转换为二进制格式，然后拼接。例如：

| 十六进制 | 1 | 7 | 3 | A | 4 | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 二进制 | 0001 | 0111 | 0011 | 1010 | 0100 | 1100 |

所以 $binary_{0x173a4c_{16}} = 000101110011101001001100_2$。

二进制转十六进制：将二进制从右到左做 4 个一组的划分，如最左侧不足 4 位则以 0 补之。然后将每个 4 位转换为对应的十六进制数字拼接即可。例如：

| 二进制 | 11 | 1100 | 1010 | 1101 | 1011 | 0011 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 十六进制 | 3 | C | A | D | B | 3 |

所以，$hex_{1111001010110110110011_2} = 3cadb3_{16}$

## 2.2 字数据大小

每台计算机都有一个字长，指明指针数据的标称大小。

C 数据类型的典型大小见下图：

| C declaration | | Bytes | |
|---|---|---|---|
| Signed | Unsigned | 32-bit | 64-bit |
| [signed] char | unsigned char | 1 | 1 |
| short | unsigned short | 2 | 2 |
| int | unsigned | 4 | 4 |
| long | unsigned long | 4 | 8 |
| int32_t | uint32_t | 4 | 4 |
| int64_t | uint64_t | 8 | 8 |
| char * | | 4 | 8 |
| float | | 4 | 4 |
| double | | 8 | 8 |

Figure 2: 基本 C 数据类型的典型大小 (以字节为单位)

## 2.3 寻址和字节顺序

**小端法**`little endian`：最低有效字节在最前面放着。

**大端法**`big endian`：最高有效字节在最前面放着。

具体示例见下图：

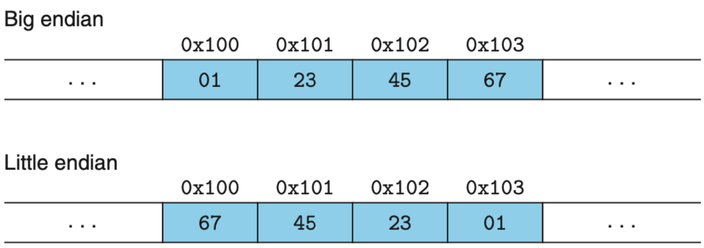



Figure 3: 大端法与小端法

```c
#include <stdio.h>

typedef unsigned char *byte_pointer;

void show_bytes(byte_pointer start, size_t len) {
    size_t i;
    for(i = 0; i < len; i++) {
        printf(" %.2x", start[i]);
    }
    printf("\n");
 }

 void show_int(int x) {
    show_bytes((byte_pointer) &x, sizeof(int));
}

void show_float(float x);

void show_pointer(void *x);

void test_show_bytes(int val) {
    int ival = val;
    float fval = (float) val;
    int *pval = &ival;
    show_int(ival);
    show_float(fval);
    show_pointer(pval);
}
```

通过以上代码，可以打印出数据的两位十六进制格式输出。对比结果可以发现，`int`和`float`的结果一样，只是排列的大小端不同，而指针值不同，与机器相关。

二进制代码是不兼容的。

## 2.4 布尔代数

| ~ | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| & | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

<table>
<tr><th>|</th><th>0</th><th>1</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

| ^ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Figure 4: 布尔代数的运算。二进制 0 和 1 代表逻辑值 TRUE 和 FALSE. 以上四张图依次是逻辑运算符 NOT AND OR EXCLUSIVE-OR

位向量一个很有用的应用就是**表示有限集合**。利用位向量 $[a_{w-1}, \ldots, a_1, a_0]$ 可以编码任何子集 $A \in 0, 1, \ldots, w-1$。

例如，定义规则 $a_i = 1 \iff i \in A$。

位向量 $a \doteq$[01101001] 表示集合 $A = 0, 3, 5, 6$，而位向量 $b \doteq$[01010101] 表示集合 $B = 0, 2, 4, 6$。

编码集合的使用方法是使用布尔运算。

例如：$a \& b \rightarrow$ [010000001], 对应于 $A \cap B = 0, 6$。

它的实际应用，还有使用位向量作为掩码有选择地使用或屏蔽一些信号，该掩码就是设置为有效信号的集合。

C 语言中的位级运算，其实是按照各个位对应的位运算来的。

而 C 语言中的逻辑运算 (||、`&&`、`!`) 则是把所有的非零参数都表示 TRUE，参数 0 表示为 FALSE。它们只返回 1 或 0. 而位级运算只在参数特殊时才与之有相同的结果。

## 2.5 移位运算

`x<<k`: 左移 k 位，即丢弃最高 k 位，右端补充 k 个 0.

`x>>k`: 右移 k 位，支持逻辑右移和算术右移。逻辑右移在左端补充 k 个 0，算术右移则在左端补充 k 个最高有效位 (符号位)。

**对无符号数，右移必须是逻辑的。**

**移位运算符是从左至右可结合的。**

## 3 整数表示

| Symbol | Type | Meaning |
|---|---|---|
| $B2T_w$ | Function | Binary to two's complement |
| $B2U_w$ | Function | Binary to unsigned |
| $U2B_w$ | Function | Unsigned to binary |
| $U2T_w$ | Function | Unsigned to two's complement |
| $T2B_w$ | Function | Two's complement to binary |
| $T2U_w$ | Function | Two's complement to unsigned |
| $TMin_w$ | Constant | Minimum two's-complement value |
| $TMax_w$ | Constant | Maximum two's-complement value |
| $UMax_w$ | Constant | Maximum unsigned value |
| $+^{\mathrm{t}}_w$ | Operation | Two's-complement addition |
| $+^{\mathrm{u}}_w$ | Operation | Unsigned addition |
| $*^{\mathrm{t}}_w$ | Operation | Two's-complement multiplication |
| $*^{\mathrm{u}}_w$ | Operation | Unsigned multiplication |
| $-^{\mathrm{t}}_w$ | Operation | Two's-complement negation |
| $-^{\mathrm{u}}_w$ | Operation | Unsigned negation |

Figure 5: 整数的数据与算术操作术语。下标 w 表示数据中表示中的位数

### 3.1 无符号数的编码

**原理 1** 无符号数编码的定义

对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2U_w(\vec{x}) \doteq \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i \tag{1}$$

形象的展示如下图:

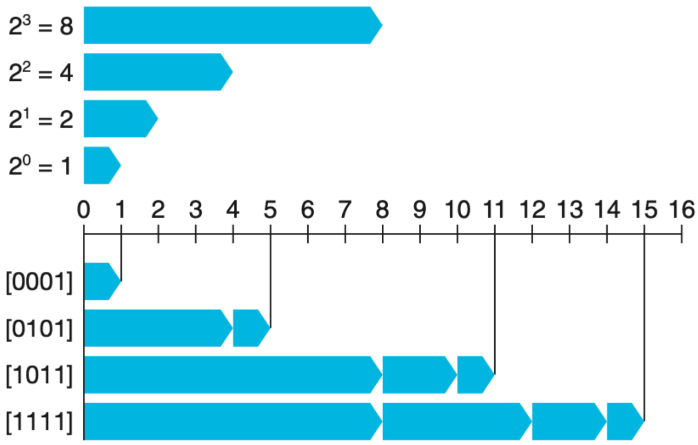



Figure 6: w=4 的无符号数示例。当二进制表示中位 i 为 1，数值就会相应加上 $2^i$

**原理 2** 无符号数编码的唯一性
函数 $B2U_w$ 是一个双射

## 3.2 补码编码

**原理 3** 补码编码的定义
对向量 $\vec{x} = [x_{w-1}, x_{w-2}, \ldots, x_0]$:

$$B2T_w(\vec{x}) \doteq -x_{w-1}2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i \tag{2}$$

形象地展示如下图:

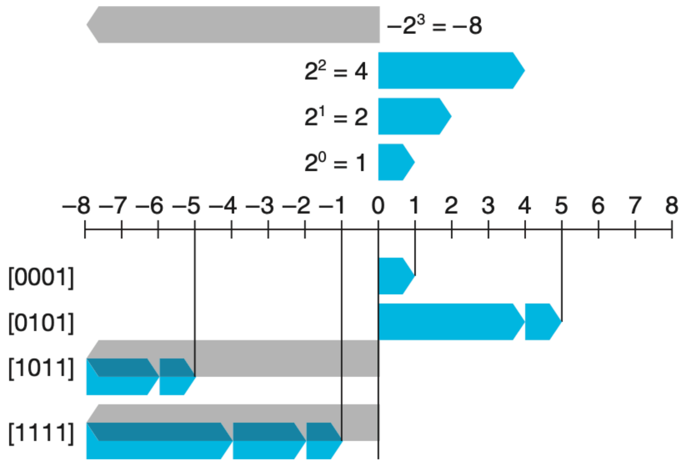



Figure 7: w=4 的补码示例。把位 3 作为符号位，因此当它为 1 时，对数值的影响是 $-2^3 = -8$。这个权重在图中用带向左箭头的条表示

**原理 4** 补码编码的唯一性
函数 $B2T_w$ 是一个双射。

1. 补码的范围是不对称的：$|TMin| = |TMax| + 1$，即 TMin 没有与之对应的正数。这是因为 0 是非负数。
2. 最大的无符号数值刚好比补码的最大值的两倍大一点：$UMax_w = 2TMax_w + 1$

## 3.3 有符号和无符号数之间的转换

**原理 5** 补码转换为无符号数
对满足 $TMin_w \leq x \leq TMax_w$ 的 $x$ 有：

$$T2U_w(x) = \begin{cases} x + 2^w, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

**推导 1** 补码转换为无符号数
比较式1和2，我们发现对于位模式 $\vec{x}$，如果我们计算 $B2U_w(\vec{x}) - B2T_w(\vec{x})$ 之差，得到：

$$B2U_w(\vec{x}) - B2T_w(\vec{x}) = x_{w-1}2^w$$

由此得到一个关系：

$$B2U_w(\vec{x}) = x_{w-1}2^w + B2T_w(\vec{x}) \tag{4}$$

由此可得：

$$B2U_w(T2B_w(x)) = T2U_w(x) = x + x_{w-1}2^w \tag{5}$$

式5的计算：将 $T2B_w(x)$ 当作 $x$ 代入4后得到。由于运算 $T2B_w$ 与 $B2T_w$ 是对 $\vec{x}$ 的逆运算，故

$$\because B2U_w(T2B_w(x)) = x_{w-1}2^w + B2T_w(T2B_w(x)) \therefore T2U_w(x) = x + x_{w-1}2^w$$

根据3的两种情况，在 $x$ 的补码中，位 $x_{w-1}$ 决定了 $x$ 是否为负。 ■

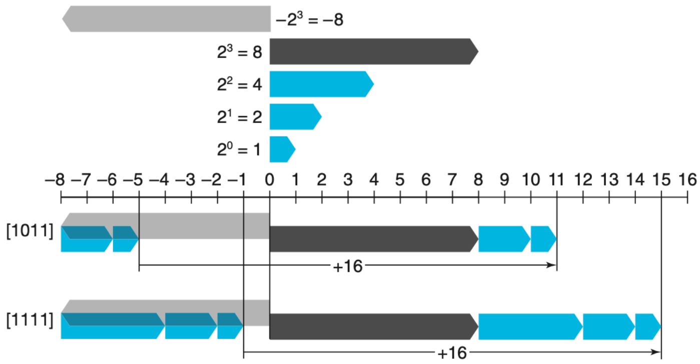



Figure 8: 比较当 w=4 时无符号数表示和补码表示 (对补码和无符号数来说，最高有效位的权重分别是-8 和 +8，因此产生一个差为 16)

**原理 6** 无符号数转换为补码

对满足 $0 \leq x \leq UMax_w$ 的 $u$ 有：

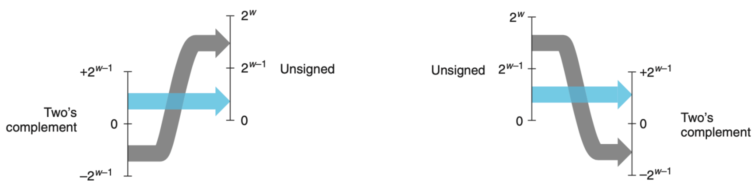
$$U2T_w(u) = \begin{cases} u, & u \leq TMax_w \\ u - 2^w, & u > TMax \end{cases} \tag{6}$$

**推导 2** 设 $\vec{x} = U2B_w(u)$，则这个位向量也是 $U2T_w(u)$ 的补码表示。式1和式2结合起来有

$$U2T_w(u) = -u_{w-1}2^w + u \tag{7}$$

在 $u$ 的无符号表示中，对式6的两种情况来说，位 $u_{w-1}$ 决定了 $u$ 是否大于 $TMax_w = 2^{w-1} - 1$。 ■

以下图说明了函数 U2T 的行为。对于小的数，从无符号到有符号保留原值；一旦大于 $TMax_w$，数字将被转换为一个负数值。




(a) 从补码到无符号数的转换。函数 T2U 将负数转换为大的正数

(b) 从无符号数到补码的转换。函数 U2T 把大于 $2^{w-1} - 1$ 的数字转换为负值

Figure 9: 无符号数和补码的转换

## 3.4 扩展一个数字的位表示

用于将数据类型转换为一个更大的数据类型，例如 32 位 →64 位。

**原理 7** 无符号数的零扩展

定义宽度为 $w$ 的位向量 $\vec{u} = [u_{w-1}, u_{w-2}, \ldots, u_0]$ 和宽度为 $w'$ 的位向量 $\vec{u}' = [0, \ldots, 0, u_{w-1}, u_{w-1}, \ldots, u_0]$，其中，$w' > w$。则 $B2U_w(\vec{u}) = B2U_{w'}(\vec{u}')$。

**原理 8** 补码数的符号扩展

定义宽度为 $w$ 的位向量 $\vec{x}=[x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]$ 和宽度为 $w$ 的位向量 $\vec{x}'=[x_{w-1},\ldots,x_{w-1},x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]$，其中 $w'>w$。则 $B2T_w(\vec{x})=B2T_{w'}(\vec{x}')$。

**推导 3** 补码数值的符号扩展

令 $w'=w+k$，证明

$$B2T_{w+k}([\underbrace{x_{w-1},\ldots,x_{w-1}}_{k\ times},x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])=B2T_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])$$

下面的证明是对 $k$ 进行归纳。即：**如果我们能够证明符号扩展一位保持了数值不变，那么符号扩展任意位都能保持这种属性**。即：

$$B2T_{w+1}([x_{w-1},x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])=B2T_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])$$

用式2展开左边的表达式，得：

$$\begin{aligned}
B2T_{w+1}([x_{w-1},x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]) &= -x_{w-1}2^w+\sum_{i=0}^{w-1}x_i2^i \\
&= -x_{w-1}2^w+x_{w-1}2^{w-1}+\sum_{i=0}^{w-2}x_i2^i \\
&= -x_{w-1}(2^w-2^{w-1})+\sum_{i=0}^{w-2}x_i2^i \\
&= -x_{w-1}2^{w-1}+\sum_{i=0}^{w-2}x_i2^i \\
&= B2T_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]).
\end{aligned}$$

其中使用的关键属性是 $2^w-2^{w-1}=2^{w-1}$。 ■

## 3.5 截断数字

**原理 9** 截断无符号数

令 $\vec{x}$ 等于位向量 $[x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0]$，而 $\vec{x}'$ 是将其截断为 $k$ 位的结果：$\vec{x}'=[x_{k-1},x_{k-2},\ldots,x_0]$。令 $x=B2U_w(\vec{x}')$。则 $\vec{x}'=x\ mod\ 2^k$。

**推导 4** 截断补码数值

使用无符号数截断相同参数，则有

$$B2U_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])\ mod\ 2^k=B2U_k[x_{k-1},x_{k-2},\ldots,x_0]$$

即，$x\ mod\ 2^k$ 能够被一个位级表示为 $[x_{k-1},x_{k-2},\ldots,x_0]$ 的无符号数表示。将其转换为补码数则有 $x'=U2T_k(x\ mod\ 2^k)$。 ■

总结：

无符号数的截断结果：

$$B2U_k[x_{k-1},x_{k-2},\ldots,x_0]=B2U_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])\ mod\ 2^k$$

补码数字的截断结果：

$$B2T_l[x_{k-1},x_{k-2},\ldots,x_0]=U2T_k(B2U_w([x_{w-1},x_{w-2},\ldots,x_0])\ mod\ 2^k)$$

### 3.6 关于有符号数和无符号数的建议

**有符号数到无符号数的隐式转换，会导致错误或者漏洞**。避免这类错误的一种方法是绝不使用无符号数。(例如除 C 语言外，少有语言支持无符号整数。)

但是**当我们想要把字仅仅看做是位的集合而没有任何数字意义时，无符号数值是非常有用的**。

所以，见机行事。

# 4 整数运算

## 4.1 无符号加法

**原理 10** 无符号数加法

对满足 $0 \leq x, y \leq 2^w$ 的 $x$ 和 $y$ 有:

$$x +_w^u y = \begin{cases} x + y, & x + y < 2^w & Normal \\ x + y - 2^w, & 2^w \leq x + y < 2^{w+1} & Overflow \end{cases}$$

**推导 5** 无符号数加法

一般而言，我们可以看到，如果 $x + y < 2^w$，和的 $w + 1$ 位表示中最高位会等于 *0*，因此丢弃它不会改变这个数值。

另一方面，如果 $2^w \leq x + y < 2^{w+1}$，和的 $w + 1$ 位表示中的最高位会等于 *1*，因此丢弃它就相当于从和中减去了 $2^w$。 ■

形象表示见下图:

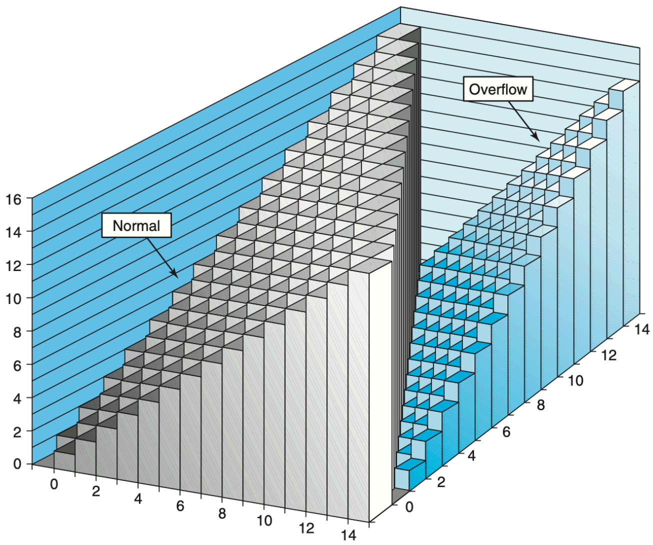



Figure 10: 无符号加法 (4 位字长，加法是模 16 的)

整数加法和无符号加法着急拿的关系见下图:

**原理 11** 检测无符号数加法中的溢出

对在范围 $0 \leq x, y \leq UMax_w$ 中的 $x$ 和 $y$，令 $s \doteq x +_w^u y$。则对计算 $s$，当且仅当 $s < x$(或者等价的 $s < y$) 时，发生了溢出。

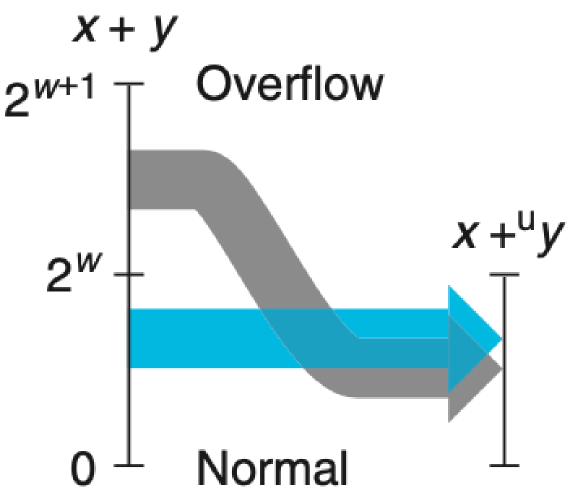



Figure 11: 整数加法和无符号加法间的关系。当 x+y 大于 $2^w - 1$ 时，其和溢出

**推导 6** 检测无符号数加法中的溢出

通过观察发现 $x + y \geq x$，因此如果 $s$ 没有溢出，我们能够肯定 $s \geq x$。

另一方面，如果 $s$ 确实溢出了，我们就有 $s = x + y - 2^w$。假设 $y < 2^w$，我们就有 $y - 2^w < 0$，因此 $s = x + (y - 2^w) < x$。 ■

**模数加法形成了一种数学结构，称为阿贝尔群 (Abelian goup)，它是可交换的和可结合的。它有一个单位元 0，并且每个元素有一个加法逆元。**

**原理 12** 无符号数求反

对满足 $0 \leq x < 2^w$ 的任意 $x$，其 $w$ 位的无符号逆元 $-^u_w x$ 由下式给出：

$$-^u_w x = \begin{cases} x, & x = 0 \\ 2^w - x, & x > 0 \end{cases}$$

**推导 7** 无符号数求反

当 $x = 0$ 时，加法逆元显然是 *0*。对于 $x > 0$，考虑值 $2^w - x$。我们观察到这个数字在 $0 < 2^w - x < 2^w$ 范围之内，并且 $(x + 2^w - x) \bmod 2^w = 2^w \bmod 2^w = 0$。因此，它就是 $x$ 在 $+^u_w$ 下的逆元。 ■

## 4.2 补码加法

定义 $x +^t_w y$ 为整数和 $x + y$ 被截断为 $w$ 位的结果，并将这个结果看做是**补码数**。

**原理 13** 补码加法

对满足 $-2^{w-1} \leq x, y \leq 2^{w-1} - 1$ 的整数 $x$ 和 $y$，有：

$$x +^t_w y = \begin{cases} x + y - 2^w, & 2^{w-1} \leq x + y & Positive\ overflow \\ x + y, & -2^{w-1} \leq x + y < 2^{w-1} & Normal \\ x + y + 2^w, & x + y < -2^{w-1} & Negative\ overflow \end{cases}$$

**推导 8** 补码加法

由于补码加法和无符号数加法有相同的位级表示，故可以按照如下步骤表示运算 $+^t_w$：

*1.* 将参数转换为无符号数

*2.* 执行无符号数加法

*3.* 将结果转换为补码

$$x +^t_w y \doteq U2T_w(T2U_w(x) +^u_w T2U_w(y))$$

由式*5*,$T2U_w(x) \iff x_{w-1}2^w + x$, $T2U_w(y) \iff y_{w-1}2^w + y$。使用属性【$+^u_w$ 是模 $2^w$ 的加法，以及模数加法的属性，我们得到：

$$\begin{aligned} x +^t_w y &= U2T_w(T2U_w(x) +^u_w T2U_w(y) \\ &= U2T_w[(x_{w-1}2^w + x + y_{w-1}2^w + y)\ mod\ 2^w] \\ &= U2T_w[(x+y)\ mod\ 2^w] \end{aligned}$$

定义 $z \doteq x + y$，$z' \doteq z\ mod\ 2^w$, $z'' \doteq U2T_w(z')$，$z'' = x +^t_w y$。下面分 *4* 种情况讨论：

*1.* $-2^w \leq z < -2^{w-1}$

*2.* $-2^{w-1} \leq z < 0$

*3.* $0 \leq z < 2^{w-1}$

*4.* $2^{w-1} \leq z < 2^w$