The solutions to the book "Introduction to Graph Theory, 2nd Edition" by Douglas B. West

Jian Li
Computer Science
Nanjing University, China

2011

Chapter 1 Fundamental Concepts

Chapter 1.1 What Is a Graph?

Problem 1.1.14

对 8×8 棋盘进行黑白染色,则当去掉两个对角的点后,黑色点的个数不等与白色点的个数,所以不能用 1×2 的黑白多米诺棋牌覆盖

所有二分图都是可以黑白染色的,保证黑色的点邻接的都是白色的点,白色的点邻接的都是黑色的点

Problem 1.1.22

1、2、5 同构,3、4 同构

比较每个图的 Complement,不难发现 1、2、5 的 Complement 是一个 C_7,而 3、4 的 Complement 是 C_3 和 C_4

Problem 1.1.24

对每个图进行 label,即 Petersen Graph

Problem 1.1.25

如果在 Petersen Graph 中存在一个 C_7,则由 Petersen Graph 的性质,每个点的度为 3、最小环的长度为 5,可得所有在 C_7 中的点都会有一条边连接一个不在环中的点(否则会出现一个 C_3 或 C_4),而不在环中的点有 3 个,根据鸽巢原理,易得必然有一个点至少连接了 3 个环中的点,而不管如何在环中放置这 3 个点,总会出现一个长度小于 5 的环,与 Petersen Graph 的性质矛盾,所以不存在 C_7

Problem 1.1.26

若如果 $|V_G| < 2k$,则由图中每个点的度数为 k,可得任意两点 u,v,除 u,v 外,u,v 各自至多有 $k-1$ 个 neighbors,而图中除了 u,v 两点外,有 $n-2<2(k-1)$ 个点,根据鸽巢原理,u,v 必有一个相同的 neighbor,构成了 C_3,矛盾;所以 $|V_G|\geq 2k$

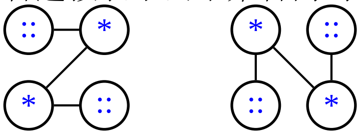
Problem 1.1.27

由于图中最小环为 C_5 且每个点的度数至少是 k,则对于一个点 x,其至少有 k 个 neighbors,且每对 neighbors 都不相连(否则会出现 C_3),然后每个 x 的 neighbors 必然有 $k-1$ 个 x 的 neighbors 的 neighbors,且除 x 外没有两个 x 的 neighbors 有相同的的 neighbors,所以 $|V_G|\geq 1+k+k(k-1)=k^2+1$

当 $k=2$ 时,C_5;当 $k=3$ 时,Petersen Graph

Problem 1.1.31

当 $n = 4k$ 时,我们可以将所有的点平均分到 4 个集合中,我们可以构造出下图,满足 $G \cong \overline{G}$,其中 $*$ 是 K_k,而 $::$ 是 indenpendent set,即 $\overline{*} \cong ::$,两个集合连接表示两个集合内的任意一对点都有一条边相连



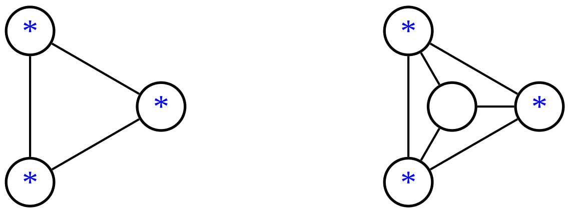
同理,当 $n = 4k + 1$ 时,只需要将多的这个点连接 $*$ 集合即可

Problem 1.1.34

利用图 1.1.24(b)

Problem 1.1.35

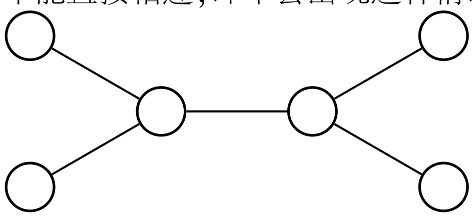
当 $n = 3k$ 时,我们可以将所有的点平均分到 3 个集合中,构造下图,其中 $*$ 是 K_k

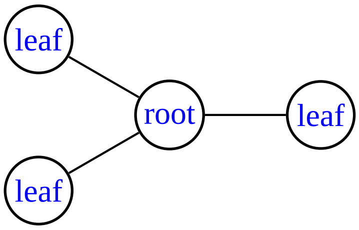


同理,当 $n = 3k + 1$ 时,只需要将多的这个点连接 A, B, C 集合即可

Problem 1.1.38

$\Rightarrow$: 因为图 G 能 decomposes into claws,所以对于两个 claws,他们中间的点不能直接相连,即不会出现这种情况:





即在不同的 claw 之间，只存在 leaf 之间相连所以所有 claws 的 root 构成一个 independent set，所有的 leaf 构成一个 independent set，所以 G 是一个二分图

$\Leftarrow$: 由于 G 是一个二分图，且每个点的度数为 3，任取其中的一个 independent set，则集合中的每个点作为 claw 的 root，则 G decomposes into claws

Chapter 1.2 Paths, Cycles, and Trails

Problem 1.2.15

因为 W 是一个长度至少为 1 的闭迹,且不含有环,设 P 是 W 的最长 Path,则 W 必然是在 Path 上重复走一些边,且最后回到起点,而重复走一些边,必然会在第一次反向时产生连续走一个边两次的情况,所以 W 的一些边会被连续重复走

Problem 1.2.17

Method 1:
对于任意一个 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列,我们都可以用 Bubble-Sort 的过程,使之成为 $1, 2, \cdots, n$;即所有的排列的点,都与 $1, 2, \cdots, n$ 的点 connected,所以 G_n 是 connected

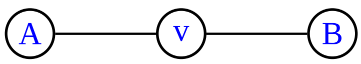
Method 2:
我们可以通过一种每次只交换相邻两个元素的方法,不重不漏的生成 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全排列,所以 G_n 是 connected(Richard A. Brualdi, Introductory Combinatorics)

Problem 1.2.18

可以将 G 中的点划分成两个集合,所有含有奇数个 1 的元素在一个集合中,所有含有偶数个 1 的元素在一个集合中,两个点集分别是 connected 且相互之间 disconnected,所以有 2 个 components

Problem 1.2.20

由于 v 是一个 cut-vertex,所以原图可以化为下图的形式,其中 A, B 是 disconnected,所以在图 $\overline{G}$ 中,除去 v 的所有点都必然是 connected,即 $\overline{G} - v$ 是 connected



Problem 1.2.25

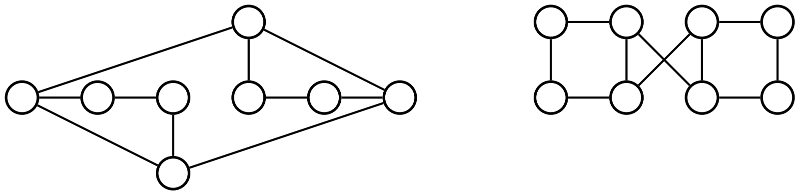
假设现有一个二分图 G,我们向其中加入一条不产生奇环的边 e,则这条边的两个端点必然不在同一个 indenpent set 中,所以 $G + e$ 仍然是二分图

Problem 1.2.26

$\Rightarrow$:(Omit!)

$\Leftarrow$:对于一个长度为 $2k+1$ 的奇环,其点至多构成一个大小为 k 的 independent set;现在对于 G 的任意一个子图 H,至少有一个大小至少为 $V(H)/2$ 的 independent set,所以图 H 中不存在奇环,即 G 中不存在奇环

Problem 1.2.28



a. only

b. not only

Problem 1.2.29

由于图 G 是 connected 且不包含 P_4 or C_3,所以图中不包含奇环,即图 G 是一个二分图;若图 G 不是 biclique,则图中必然存在 P_4,所以图 G 是 biclique

Problem 1.2.31

a. 因为 $n \le 2^k$,将 K_n 的 n 个点进行从 0 到 $n-1$ 编号,将其用二进制表示,总共 k 位;要构造 k 个二分图,使其 union 为 K_n,则可以对于 k 位中的每一位,所有是 1 的点放在一个集合中,所有是 0 的点放在一个集合中,添加所有端点在分别在两个集合中的边,形成一个二分图

b. 因为总共就 k 位编码,若 $n > 2^k$,则必有两个点的编码相同,则 $\bigcup_{i\le k} G_i \ne K_n$,矛盾,所以 $n \le 2^k$

Problem 1.2.37

在 u,v-path 和 v,w-path 中,至少有一个公共点 x,所以存在 $u-x-w$-path,所以 connection 关系是传递的

Problem 1.2.38

对于一个 n 阶的图,若图中无环,则最多由 $n-1$ 条边,形成一棵树,若图中至少有 n 条边,则必存在环

Problem 1.2.40

由于图 G 是 connected 的，若 P, Q 不存在公共点，则必然在 P 中存在一个点 u，Q 中存在一个点 v 使得 u, v 相连，这时可以构造出一条比 P, Q 更长的 path，与 P, Q 是图 G 中的最长 path 矛盾，所以 P, Q 必然有公共点