# *DISEÑO PRELIMINAR DE UNA TRAYECTORIA INTERPLANETARIA: DESDE LA TIERRA HASTA SATURNO CON ASISTENCIA GRAVITATORIA DE JÚPITER*


Santiago Villarroya

Cristian Asensio

Iván Sermanoukian

Yi Qiang Ji Zhang

Prof. José Enrique García Melendo

Departamento de Ingeniería Aeroespacial

Universidad Politécnica de Catalunya



ESEIAAT diciembre 2018

*"The universe is a pretty big place. If it's just us, seems like an awful waste of space."*

*– Carl Sagan*

*Astrónomo estadounidense y cosmólogo.*

# Abstracto

Al referimos al espacio exterior siempre surgen algunas incógnitas como, por ejemplo, hasta donde es capaz de llegar una nave no tripulada, cómo se puede controlar el movimiento de esta y la cantidad de energía que esto debe suponer. En este proyecto trataremos de resolver algunas de estas dudas a la vez que le damos otro punto de vista a este aspecto y mostramos como realmente si se comprende bien lo que realmente ocurre en el espacio exterior tampoco resulta tan complicado de entender.

A partir de conocer que existen varios tipos diferentes de trayectorias a través de las cuales una nave es capaz de moverse en el espacio, podremos calcular los impulsos necesarios y óptimos para situar a nuestra nave en dichas trayectorias mediante el menor consumo de energía posible. La clave de todo esto, e iremos viendo a lo largo del desarrollo del proyecto, será el hecho de que en todo momento la energía se deberá conservar. Del modo que, a partir de esto, uno de los objetivos será en todo momento conocer la posición, velocidad y energía de nuestra nave respecto de algunos de los astros más importantes del sistema solar como por ejemplo el Sol o la Tierra.

No obstante, el objetivo principal de la misión es hacer llegar a nuestra nave a Saturno. Ésta se podrá llevar a cabo de diferentes maneras, pero, de un modo u otro, estudiaremos las diferentes posibilidades que comportan cada una de ellas y las ventajas de unas respecto a las otras. Obviamente entre todas ellas se priorizará aquellas trayectorias que requieran un consumo de combustible menos, puesto que vivimos en un mundo donde todo vale demasiado dinero y la mínima reducción de precio o ahorro siempre se ve como un gran logro.

Como fuerza principal y predominante en todos nuestros cálculos aparecerá la fuerza gravitatoria universal, ya que incluso más allá de las fronteras de nuestro planeta el uso y aprovecho de dicha fuerza conlleva un gran número de ventajas.

Así que, una vez introducidos todos los aspectos principales de nuestro proyecto, adentrémonos en las profundidades del universo, rumbo a Saturno.

# CONTENIDO

# ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS

| | |
|---|---|
| $\Delta v$ | Impulso de velocidad |
| $\Delta v_1$ | Impulso de velocidad necesario para salir de una órbita |
| $\Delta v_2$ | Variación de velocidad necesaria para entrar en una órbita |
| $\Delta$ | Variación de alguna magnitud entre dos puntos |
| $\delta$ | Ángulo de giro de la hipérbola (entre asíntotas) |
| $\mu$ | Parámetro gravitacional estándar |
| $\mu_{Sol}$ | Parámetro gravitacional estándar del Sol |
| $\mu_{Sat}$ | Parámetro gravitacional estándar de Saturno |
| $\mu_T$ | Parámetro gravitacional estándar de la Tierra |
| $\mu_J$ | Parámetro gravitacional estándar de Júpiter |
| $V_{HP}$ | Velocidad en el periastro de una hipérbola |
| $\theta_A$ | Ángulo de intersección con Júpiter en el punto A |
| $\theta_B$ | Ángulo de intersección con Júpiter en el punto B |
| $\vec{h}$ | Momento angular relativo vectorial |
| $\vec{r}$ | Radio vector |

| | |
|---|---|
| $\vec{u}$ | Vector velocidad |
| $\overrightarrow{v_\infty^-}$ | Velocidad vectorial a la entrada de la hipérbola |
| $\overrightarrow{v_\infty^+}$ | Velocidad vectorial a la salida de la hipérbola |
| $\vec{v}$ | Velocidad vectorial |
| a | Longitud del semieje-mayor fr una órbita elíptica |
| $a_{elipse}$ | Longitud del semieje-mayor de una órbita elíptica |
| $a_{hip}$ | Longitud del semieje de una hipérbola |
| e | Excentricidad de una cónica |
| $e_1$ | Excentricidad de la primera elipse de transferencia |
| $e_2$ | Excentricidad de una de las elipses de transferencia |
| $e_\pi$ | Excentricidad de la hipérbola de asistencia gravitatoria |
| $\varepsilon_{\text{parábola}}$ | Energía por unidad de masa en una parábola |
| $\varepsilon_{\text{hipérbola}}$ | Energía por unidad de masa en una hipérbola |
| $\varepsilon_{\text{elipse}}$ | Energía por unidad de masa en una elipse |
| $\varepsilon_{circ}$ | Energía por unidad de masa en una órbita circular |
| H | Altitud |

| | |
|---|---|
| $H_0$ | Altitud inicial |
| $h$ | Momento angular relativo específico |
| $H_{0_{opt}}$ | Altitud de aparcamiento óptimo |
| $H_{Sat}$ | Altitud desde la superficie de Saturno |
| $r$ | Radio |
| $R(\delta)$ | Matriz de rotación para el ángulo $\delta$ |
| $r_a$ | Radio del apoapsis |
| $r_c$ | Radio de órbita circular |
| $r_p$ | Radio del periapsis |
| $R_T$ | Radio de la Tierra |
| $R_{orbJup}$ | Radio de la órbita de Júpiter (Sol-Júpiter) |
| $R_{orbSat}$ | Radio de la órbita de Saturno (Sol-Saturno) |
| $R_{orbT}$ | Radio de la órbita de la Tierra (Sol-Tierra) |
| $T$ | Periodo |
| $T_{Hoh}$ | Tiempo de vuelo de la Transferencia de Hohmann |
| $t_{JupSat}$ | Tiempo de vuelo desde Júpiter hasta Saturno |

| | |
|---|---|
| $t_{pJup}$ | Tiempo de vuelo des del periapsis de la elipse hasta Júpiter |
| $t_{pSat}$ | Tiempo de vuelo des del periapsis de la elipse hasta Saturno |
| $t_{TJup}$ | Tiempo de vuelo des de la Tierra hasta Júpiter |
| $t_{Total}$ | Tiempo de vuelo Total |
| $u_p$ | Velocidad en el periapsis |
| $u_a$ | Velocidad en el apoapsis |
| $v_c$ | Velocidad de órbita circular |
| $v_\infty$ | Exceso de velocidad de órbita hiperbólica |

# DATOS GENERALES

Datos recogidos de [7]:

$$r_{orbT} = 1\ \mathrm{UA} = 149\ 597\ 870\ 700\ \mathrm{m}$$

$$r_T = 6371\ \mathrm{km}$$

$$r_{orbSat} = 9{,}53707032\ \mathrm{UA} = 1\ 426\ 725\ 400\ 000\ \mathrm{m}$$

$$r_{Sat} = 58\ 232\ \mathrm{km}$$

$$r_{orbJup} = 5{,}20336301\ \mathrm{UA} = 778\ 412\ 010\ 000\ \mathrm{m}$$

$$r_{Jup} = 69\ 911\ \mathrm{km}$$

$$G = 6{,}6741\mathrm{x}10^{-11}\ \mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

$$\mu_T = 3{,}98724\mathrm{x}10^{14}\ \mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$$

$$\mu_{Sol} = 1{,}32747\mathrm{x}10^{20}\ \mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$$

$$\mu_{Sat} = 3{,}79429\mathrm{x}10^{16}\ \mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$$

$$\mu_{Jup} = 1{,}26721\mathrm{x}10^{17}\ \mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}$$

*Para simplificar la nomenclatura, definimos:

$$\mu_{planeta} = G \cdot M_{planeta}$$

# LISTA DE FIGURAS

# 1 INTRODUCCIÓN

Antes de empezar con el trabajo en sí, uno ha de tener un cierto conocimiento sobre el concepto de la asistencia gravitatoria y su utilidad. Para ello, introduciremos este concepto y nos fomentaremos en misiones reales anteriores que han usado este recurso.

## 1.1. ¿Qué es la asistencia gravitatoria?

Cuando una nave espacial vuela sobre un cuerpo muy masivo, esto es, un planeta (pero puede ser un satélite natural también), el planeta ejerce una fuerza sobre la nave. Esta fuerza la conocemos como fuerza gravitacional / gravitatoria y modifica la velocidad relativa de la nave con respecto el Sol.

Como la velocidad es un vector, este cambio puede ser en dirección o también en magnitud. Asimismo, el cambio puede ser positivo (la nave es acelerada) o negativo (la nave espacial se frena). Depende de la forma en que la nave espacial pase volando el planeta: si pasa por la parte frontal del planeta, la nave espacial pierde velocidad, en cambio, si pasa por detrás de la Planeta, la nave espacial gana velocidad.

La pregunta es: ¿Cómo puede ser esto posible?

Por la *Ley De Conservación De La Energía*, pero la elección del marco de referencia es muy importante aquí.

El cambio en la magnitud de la velocidad con respecto del planeta es cero, la magnitud cambia sólo cuando se toma como referencia el Sol.

Hay que conocer y saber en qué marco de referencia nos encontramos en cada momento para evitar así posibles errores en los cálculos. En cuanto al cambio en la magnitud de la velocidad, nos preguntamos: ¿Dónde obtiene o pierde la energía la nave espacial?

Esta energía que se gana o pierde se obtiene del planeta que lo acelera o frena. Es importante destacar que la energía que se obtiene o se pierde es muy grande, por lo cual, la nave sufre una gran modificación, pero el planeta es tan masivo con respecto a la nave espacial que no se puede despreciar cualquier cambio en el movimiento del planeta. La técnica de asistencia gravitatoria puede sumar o restar impulso para aumentar o disminuir la energía de la órbita de una nave espacial. Generalmente se ha utilizado en órbita solar, para aumentar la velocidad de una nave espacial y propulsarla hacia afuera en el sistema solar. Sin embargo, dado que un sobrevuelo también puede disminuir el impulso orbital de una nave espacial, de esta manera, es posible disminuir la masa de combustible de cohete necesaria para la inserción orbital hacia un planeta.

A modo de resumen, en mecánica orbital e ingeniería aeroespacial, una maniobra de asistencia por gravedad es el uso del movimiento relativo (por ejemplo, la órbita alrededor del Sol) y la gravedad de un planeta u otro objeto astronómico para alterar la trayectoria y la velocidad de unas naves espaciales, con fin de ahorrar combustible y reducir los gastos.

Por lo tanto, la asistencia gravitatoria se puede utilizar para acelerar una nave espacial, es decir, para aumentar o disminuir su velocidad o redirigir su trayectoria. Esta "asistencia" es proporcionada por la acción de la fuerza gravitacional de un cuerpo (astro) hacia la nave espacial.

## 1.2. Un poco de historia

La maniobra de asistencia por gravedad se utilizó por primera vez en 1959, cuando la sonda soviética Luna 3 fotografió el lado oculto de la Luna. Esta técnica fue utilizada por sondas interplanetarias desde Mariner 10 en adelante.

Varias naves espaciales robóticas han usado la técnica de "asistencia por gravedad". Mostraremos unos cuantos ejemplos: [12]

### 1.2.1. La misión Cassini

**Estado**: Terminado

**Objetivo**: Realizar estudios de Saturno, sus lunas, anillos y entorno magnético, y aterrizar en la luna más grande del planeta, Titán.

**Misión**: Desde julio de 2004, el orbitador Cassini hizo una serie de notables descubrimientos sobre los anillos de Saturno, sus lunas y su dinámica magnetosfera. En enero de 2005, la sonda Huygens descendió a través de la espesa atmósfera de Titán y devolvió las primeras imágenes de la superficie de su luna.

La sonda Huygens de la ESA (*European Space Agency*) que acompañaba a Cassini en esta misión, aterrizó en Titan, revelando que Titán es un mundo similar a la Tierra donde el metano desempeña el papel del agua. Esto puede resultar en un posible indicio de vida, pues su espesa atmósfera de nitrógeno muy rica en compuestos orgánicos que reaccionan asiduamente.

**Trayectoria**: Cassini-Huygens se lanzó el 15 de octubre de 1997 en un Titan-IVB/Centaur desde Cabo Cañaveral. La nave espacial realizó cuatro maniobras de giro por asistencia de gravedad; dos veces en Venus (abril de 1998 y junio de 1999), una vez en la Tierra (agosto de 1999) y una vez en Júpiter (diciembre de 2000).

El principal motor de cohete a bordo de la Cassini era necesario para frenar la nave espacial y permitir que fuera capturada en una órbita sobre Saturno a su llegada en 2004. En diciembre de 2004, la sonda Huygens fue expulsada en un crucero de 22 días a Titán. Huygens alcanzó la superficie de Titán el 14 de enero de 2005. Cassini dirigió la ciencia desde su órbita alrededor de Saturno hasta que se sumergió en la atmósfera del planeta gigante el 15 de septiembre de 2017.

Figura 1. Sonda Cassini

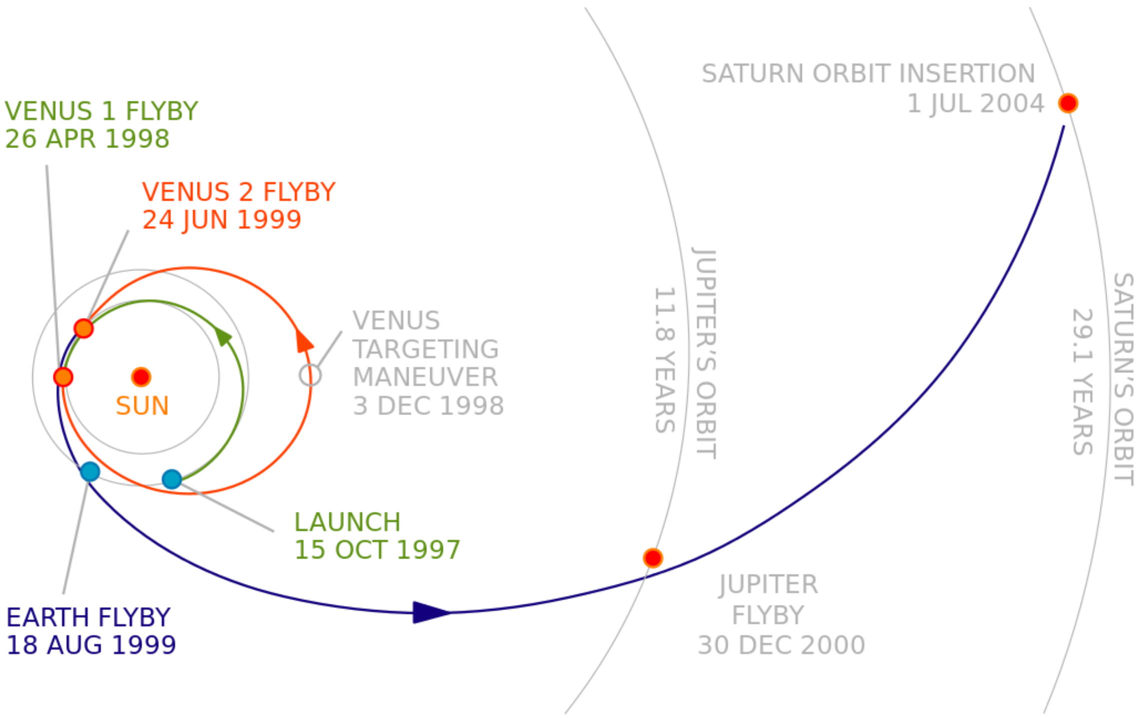


Figura 2. Trayecto de la sonda Cassini

### 1.2.2. La misión Rosetta

**Estado**: Post-operaciones

**Objetivo**: Reunirse con el cometa 67P / Churyumov-Gerasimenko y estudiar el núcleo del cometa y su entorno durante dos años, y aterrizar una sonda en su superficie.

**Misión**: La misión Rosetta hizo el estudio más detallado de un cometa en toda la historia de la humanidad. Rosetta siguió al cometa durante su viaje a través del Sistema Solar interior, realizando distintas mesuras como el aumento de la actividad a medida que la superficie helada se calentaba por el Sol además de mapear sus características y analizar las características de la composición de su superficie. El módulo de aterrizaje Philae tomó imágenes y tomó muestras del entorno de su sitio de aterrizaje.

Esta misión es muy importante pues los cometas son considerados como fósiles primitivos del Sistema Solar, y probablemente ayudaron a "sembrar" la Tierra con agua, y quizás incluso con vida. Rosetta será de gran ayuda a los científicos a aprender más sobre el papel de los cometas en la evolución del Sistema Solar.

Rosetta fue la primera misión en orbitar el núcleo de un cometa y aterrizar una sonda en su superficie. Además, Rosetta fue la primera misión espacial que viajó más allá del cinturón principal de asteroides, utilizando únicamente paneles solares para generación de energía, en lugar de los tradicionales generadores térmicos de radioisótopos. Esta nueva tecnología le permitió operar a más de 800 millones de kilómetros del Sol, donde los niveles de luz solar son solo el 4% de los de la Tierra.

**Trayectoria**: Rosetta fue lanzada el 2 de marzo de 2004 por un Ariane-5 G+ desde el puerto espacial de Europa en Kourou, Guayana Francesa. Para colocarlo en la órbita requerida para encontrarse con el cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, recibió cuatro maniobras de asistencia por gravedad: 3 desde la Tierra (4 de marzo de 2005, 13 de noviembre de 2007 y 13 de noviembre de 2009) y 1 desde Marte (25 de febrero de 2007).

La nave espacial entró en hibernación en el espacio profundo en junio de 2011 y se despertó en enero de 2014. El vehículo de aterrizaje, Philae, aterrizó a la superficie del cometa en noviembre de 2014. Rosetta siguió al cometa alrededor del Sol y mientras se movía hacia la órbita de Júpiter. La misión terminó con un descenso controlado de Rosetta a la superficie del cometa.

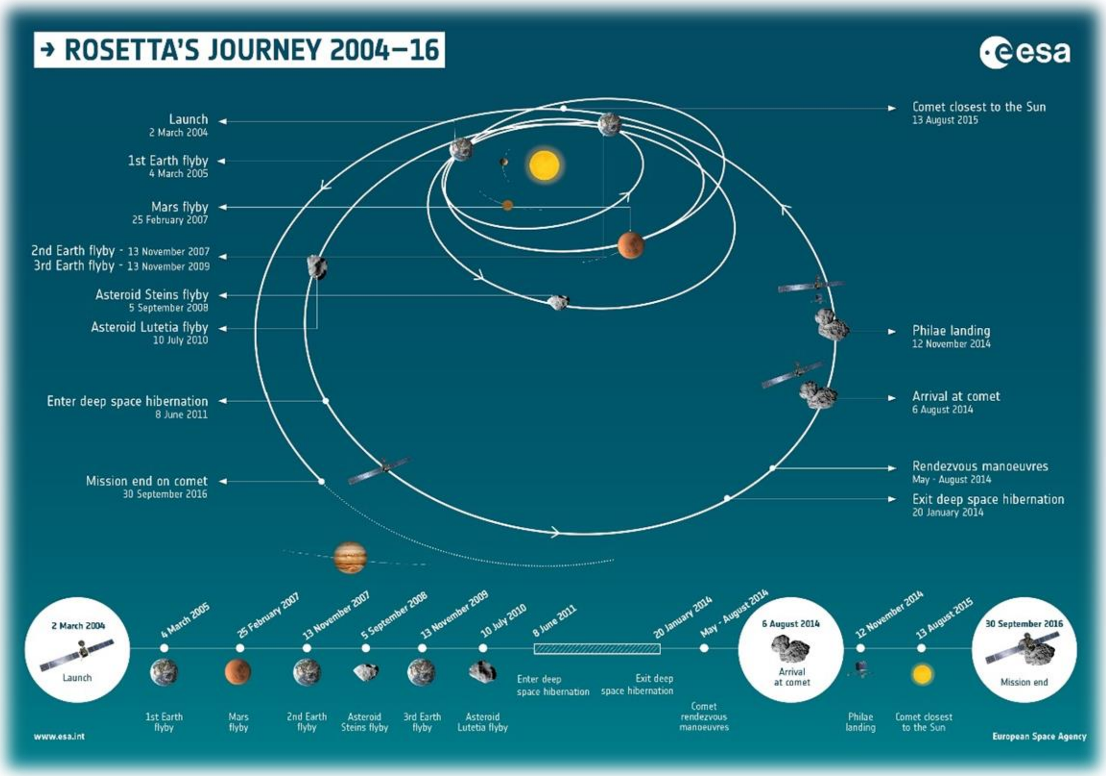


Figura 3. Trayecto de la sonda Rosetta

Figura 4. Sonda Rosetta

### 1.2.3. La misión Ulysses

**Estado**: Completado (2009)

**Objetivo**: Trazar los polos del Sol: explorar el entorno de nuestra estrella es vital si queremos entender el Sol, cómo funciona y su efecto en el Sistema Solar.

**Misión**: Ulysses es la primera misión que se ha llevado a cabo para estudiar el entorno del espacio por encima y por debajo de los polos del Sol. Es decir, gracias a los datos obtenidos se han podido observar el efecto variable que el Sol tiene sobre el entorno espacial que lo rodea.

Es importante estudiar el entorno del Sol para poder mapear el mismo y además, entender sus efectos en el sistema Solar. En particular, el satélite estudió el viento solar que el Sol no deja de producir la cual produce una enorme burbuja en el espacio llamada heliosfera.

El viento solar que llena la heliosfera es un plasma que corre hacia afuera de átomos cargados y electrones del Sol. Este viento solar causa tormentas magnéticas importantes y también, en su interacción con la Tierra producen lo que se conoce como auroras. Además, pueden afectar el clima terrestre y dañar los satélites, las fuentes de alimentación y las comunicaciones.

**Trayectoria**: Después del lanzamiento, Ulysses se dirigió a Júpiter y llegó en febrero de 1992 para realizar la maniobra de asistencia por gravedad que hizo girar a la nave en su única órbita solar. Pasó sobre el polo sur del Sol en 1994, y el polo norte en 1995. Comenzando su segunda órbita del Sol, Ulysses volvió a visitar el polo sur en 2000 y el norte un año después. En ese momento, el Sol estaba cerca del pico de su ciclo de actividad de 11 años. Ulysses luego regresó a la órbita de Júpiter en el tramo largo de su circuito de seis años alrededor del Sol.

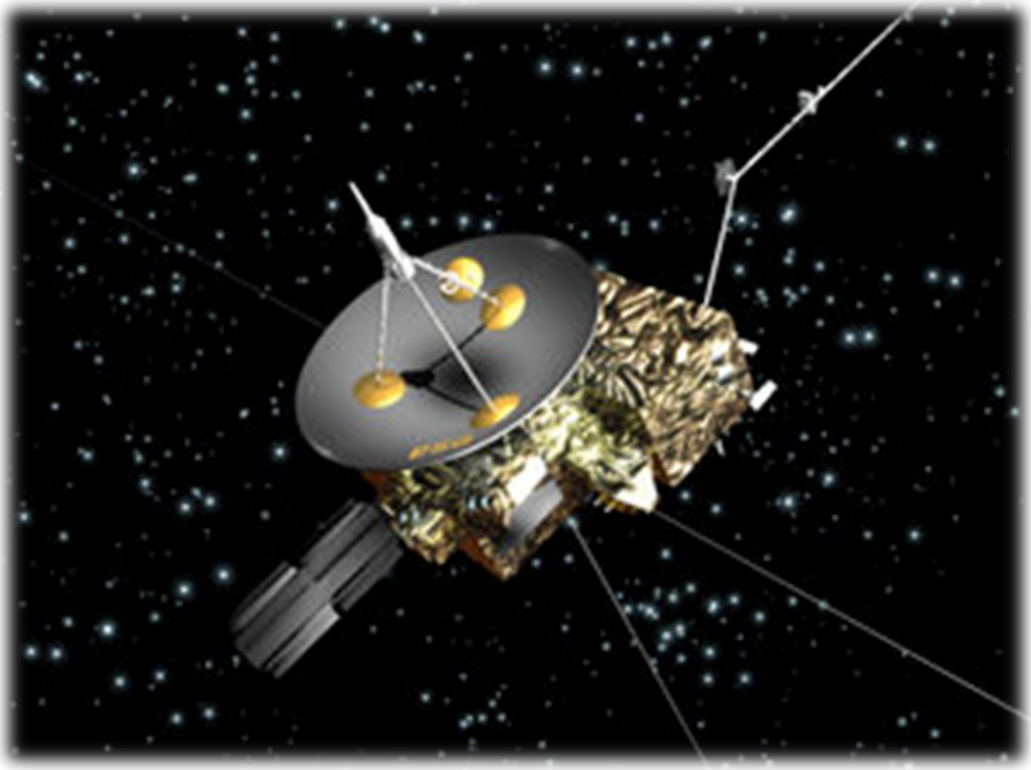

Figura 5. Sonda Ulysses

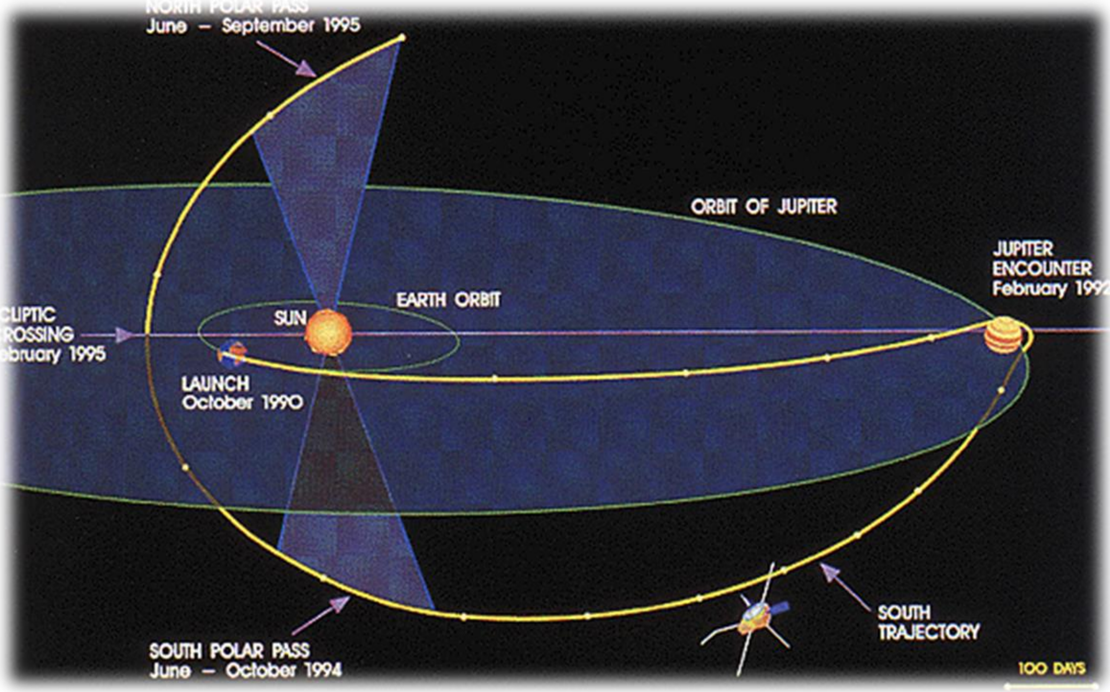


Figura 6. Trayecto de la sonda Ulysses

# 2 EL VIAJE HACIA SATURNO

## 2.1 Solución según una Transferencia de Hohmann

### 2.1.1 Salida de la Tierra mediante una trayectoria parabólica

Queremos calcular el ΔV total necesario para poner en órbita alrededor de Saturno nuestra misión espacial. A efectos de comparación con la asistencia gravitatoria natural, queremos calcular una trayectoria de transferencia de Hohmann entre la Tierra y Saturno. Para ello presentar un estudio con los siguientes pasos:

Calcular el $V_0$ necesario para escapar de la Tierra en una órbita parabólica cuando se parte de una órbita de aparcamiento terrestre circular situada a una altitud H0. Determinar el $V_1$ necesario para situar la nave en una órbita elíptica heliocéntrica con un afelio igual al radio de la órbita de Saturno.

Primeramente, hemos de calcular la velocidad a la que se encuentra la nave en la órbita de aparcamiento terrestre circular situada a una altitud $H_0$:

$$v_{órb.aparc.} = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + H_o}} \qquad (1)$$

A continuación, en el caso de una órbita parabólica, sabemos que la partícula llega a infinito con velocidad cero. Por lo tanto, la parábola es la trayectoria con energía mínima para escapar de la influencia gravitatoria de la Tierra. Así, teniendo e n cuenta que la energía total (por unidad de masa) debe ser nula, la podemos calcular como:

$$\frac{1}{2} v_{esc} - \frac{\mu_T}{R_T + H_o} = 0 \;\; \rightarrow \;\; v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{R_T + H_o}} \qquad (2)$$

En este caso, la energía cinética debe igualar en todo momento la energía potencial gravitatoria.

A partir de estas velocidades podemos observar que el incremento de velocidad necesario para escapar la Tierra en una órbita parabólica será:

$$\Delta V_0 = V_{esc} - V_{órb.aparc.} \qquad (3)$$

$$\Delta V_0 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{R_T + H_0}} - \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} \qquad (4)$$

Seguidamente, para calcular el incremento de velocidad necesario para situar la nave en una órbita elíptica heliocéntrica con un afelio igual al radio de la órbita de Saturno:

Calcularemos el incremento de velocidad $\Delta V_1$ que añadido a la velocidad de escape mínima de la parábola resultará en una órbita elíptica cuyo apoastro intersecará la órbita de Saturno mediante el seguimiento del satélite a lo largo de la trayectoria.

El punto de partida se tratará del periastro de la órbita en el cual se habrá de cumplir:

1) La velocidad del periastro de la órbita heliocéntrica será la suma de la velocidad orbital de la Tierra respecto al Sol más el incremento $\Delta V_1$.

$$v_p = v_T + \Delta v_1 \qquad (5)$$

2) Para el cálculo posterior, tendremos en cuenta que el radio del perihelio es igual al radio la de órbita terrestre y el radio del afelio es igual al radio de la órbita de Saturno.

$$a = \frac{R_T + R_{Sat}}{2} \qquad (6)$$

3) La energía total por unidad de masa de la elipse:

$$\varepsilon_{elipse} = k + U = -\frac{\mu}{2a} \qquad (7)$$

4) Con este resultado podemos determinar la velocidad orbital en cualquier punto de la elipse:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{\mu \cdot m}{r} = -\frac{\mu \cdot m}{2a} \rightarrow v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2a - r}{ar}\right)} \qquad (8)$$

5) En el caso de una órbita circular el semieje mayor es igual al radio de la órbita

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{r}}} \qquad (9)$$

A partir de estos datos, calculamos la velocidad del periastro:

$$v_p = \sqrt{\mu_{Sol}\left(\frac{2\left(\frac{R_{orbT} + R_{orbSat}}{2}\right) - R_{orbT}}{\left(\frac{R_{orbT} + R_{orbSat}}{2}\right) \cdot R_{orbT}}\right)} \qquad (10)$$

$$v_p = \sqrt{2 \cdot \mu_{Sol}\left(\frac{R_{orbSat}}{R_{orbT} \cdot (R_{orbT} + R_{orbSat})}\right)} \qquad (11)$$

$$\mathrm{v_p} = 40082{,}31589 \text{ m/s}$$

También calculamos la velocidad orbital de la Tierra:

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_{orbT}}} \tag{12}$$

$$v_T = 29784{,}664 \text{ m/s}$$

Finalmente, medimos el incremento de velocidad:

$$\Delta v_1 = v_p - v_T \tag{13}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{2 \cdot \mu_{Sol} \left( \frac{R_{\,orbSat}}{R_{orbT} \cdot (R_{orbT} + R_{\,orbSat})} \right)} - \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_{orbT}}} \tag{14}$$

$$\Delta v_1 = 10\ 297{,}652 \text{ m/s}$$

Así mismo la maniobra que deberá realizar nuestra nave para poder escarpar de la órbita de aparcamiento alrededor de la Tierra mediante una trayectoria parabólica será de la forma:

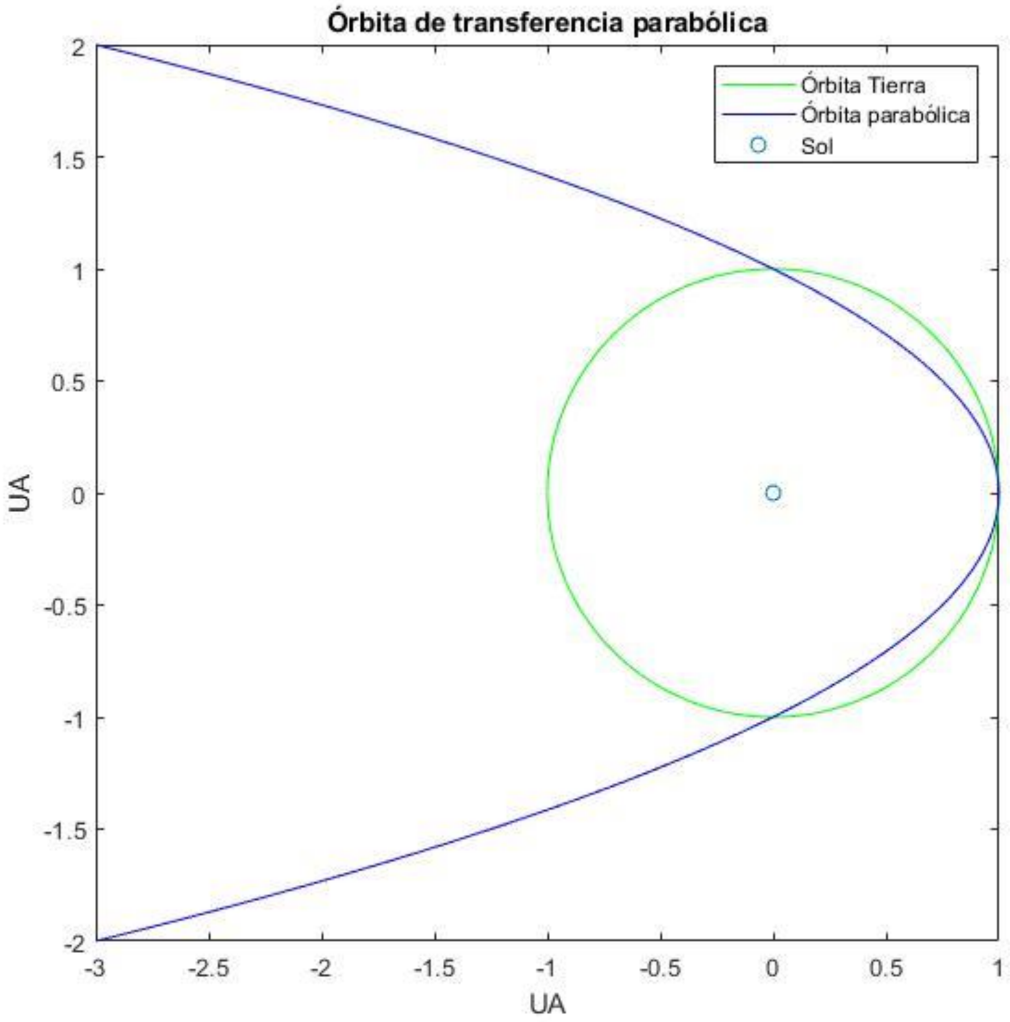


Figura 7. Gráfico de la salida de la órbita de aparcamiento alrededor de la tierra mediante trayectoria parabólica.

### 2.1.2 Salida de la Tierra mediante una trayectoria hiperbólica

Calcularemos el incremento de Velocidad ($\Delta V_0$) necesario para salir de la tierra siguiendo una trayectoria hiperbólica:

Para calcular la velocidad necesaria con la que ha de escapar nuestra nave de la Tierra a través de una órbita hiperbólica y entrar en una órbita elíptica de transferencia, primero debemos calcular la velocidad de exceso ($v_\infty$) necesaria para entrar en dicha órbita hiperbólica.

Tal y como se muestra en la Figura 8 la situación de la maniobra se basa en alcanzar Saturno en el periapsis de una órbita elíptica cuyo semieje mayor "$a$" será:

$$a = \frac{R_T + R_{Sat}}{2} \tag{15}$$

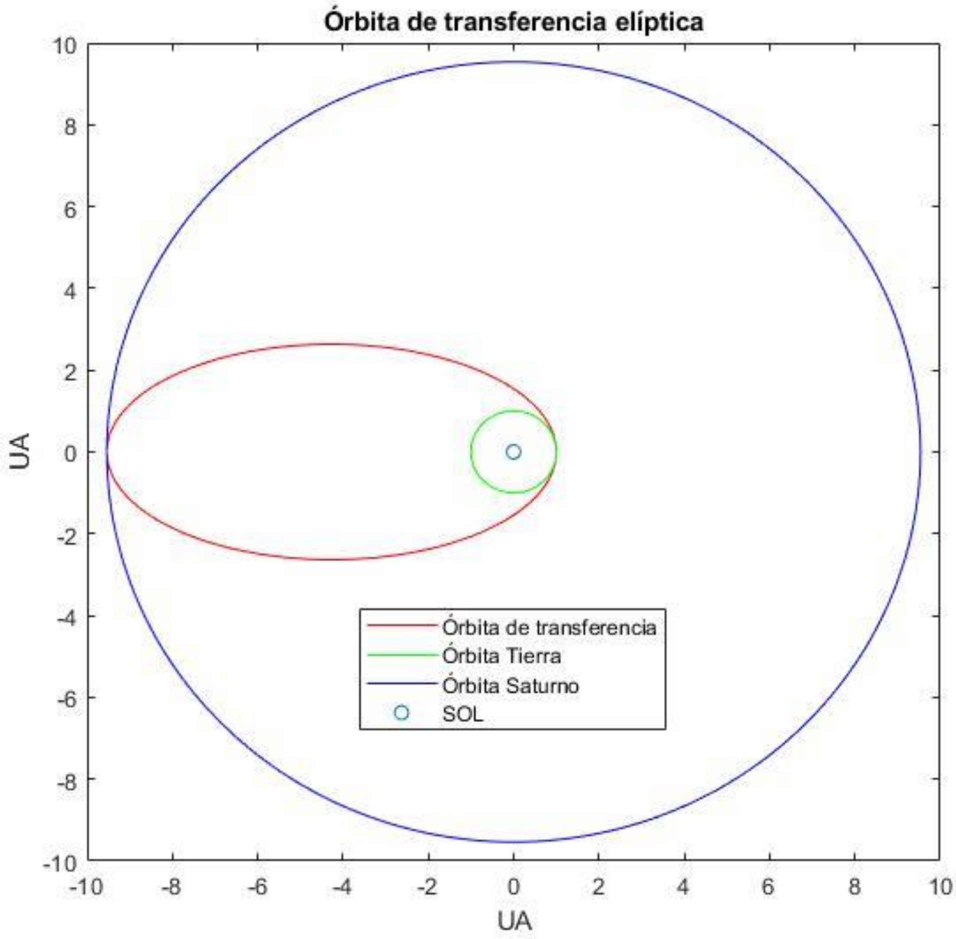


Figura 8. Gráfico donde se muestra cómo será la órbita elíptica en dirección Saturno.

Para calcular la velocidad de exceso con la que debemos salir de la órbita hiperbólica obtener las velocidades orbitales de la Tierra $V_T$ y la de la órbita de transferencia en su perihelio $V_{HP}$. Para ello sabemos que las velocidades de una órbita circular y una órbita elíptica vienen dadas respectivamente por las ecuaciones:

$$v_{orbPlaneta} = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_{Planeta}}} \tag{16}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_T}} = 29784{,}664 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{\mu \cdot (\frac{2}{r} - \frac{1}{a})} \tag{17}$$

$$V_{HP} = \sqrt{2 \cdot \mu_{Sol} \cdot (\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + R_{Sat}})} = 40082{,}316 \text{ m/s}$$

Asimismo, conocemos que la velocidad del periapsis es la suma de la velocidad de exceso de la órbita hiperbólica i la orbital de la tierra, puesto que salimos de su esfera de influencia y la nave dejará de moverse a su misma velocidad.

$$v_{\infty} = V_{HP} - V_T \tag{18}$$

No obstante, estamos tomando que nuestro satélite está orbitando alrededor de la Tierra en una órbita de aparcamiento de altura $H_0$ a una velocidad $V_P$.

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_T + \mathrm{H}_0}} \tag{19}$$

En el momento que impulsamos la nave fuera de su órbita de aparcamiento, el radio de la órbita de aparcamiento se convertirá en el perigeo de la órbita hiperbólica y se deberá cumplir que la velocidad en dicho periapsis ($V_h$) será:

$$V_p + \Delta v_0 = V_h \tag{20}$$

Analizando posteriormente el problema des del punto de vista energético y realizando los correspondientes balances de energías.

$$\frac{{V_h}^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_T + H_0} = \frac{{v_\infty}^2}{2} \tag{21}$$

Substituyendo en la expresión anterior la relación entre la velocidad de la órbita de aparcamiento, y la velocidad de la nave en el periapsis de la órbita hiperbólica, y simplificando, obtenemos:

$${v_\infty}^2 + \frac{2\mu_T}{r_T \ + H_0} = (V_p\,)^2 + (\Delta v_0)^2 + 2 \cdot V_P \cdot \Delta v_0 \tag{22}$$

Conociendo las expresiones correspondientes de $v_\infty$ i de $Vp$, el incremento de velocidad que será necesario para poner en órbita hiperbólica de salida a nuestra nave únicamente dependerá de la altitud de la órbita de aparcamiento respecto a la Tierra en la que se encuentre. Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante de la expresión anterior, tomando como incógnita el incremento de velocidad, el resultado de esta es:

$$\Delta v_0(H_0\,) = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_T}{r_T + H_0}} - \sqrt{\frac{\mu_T}{r_T + \mathrm{H}_0}} \tag{23}$$

Representando este incremento de velocidad necesario, en función de la altitud de la órbita de aparcamiento.

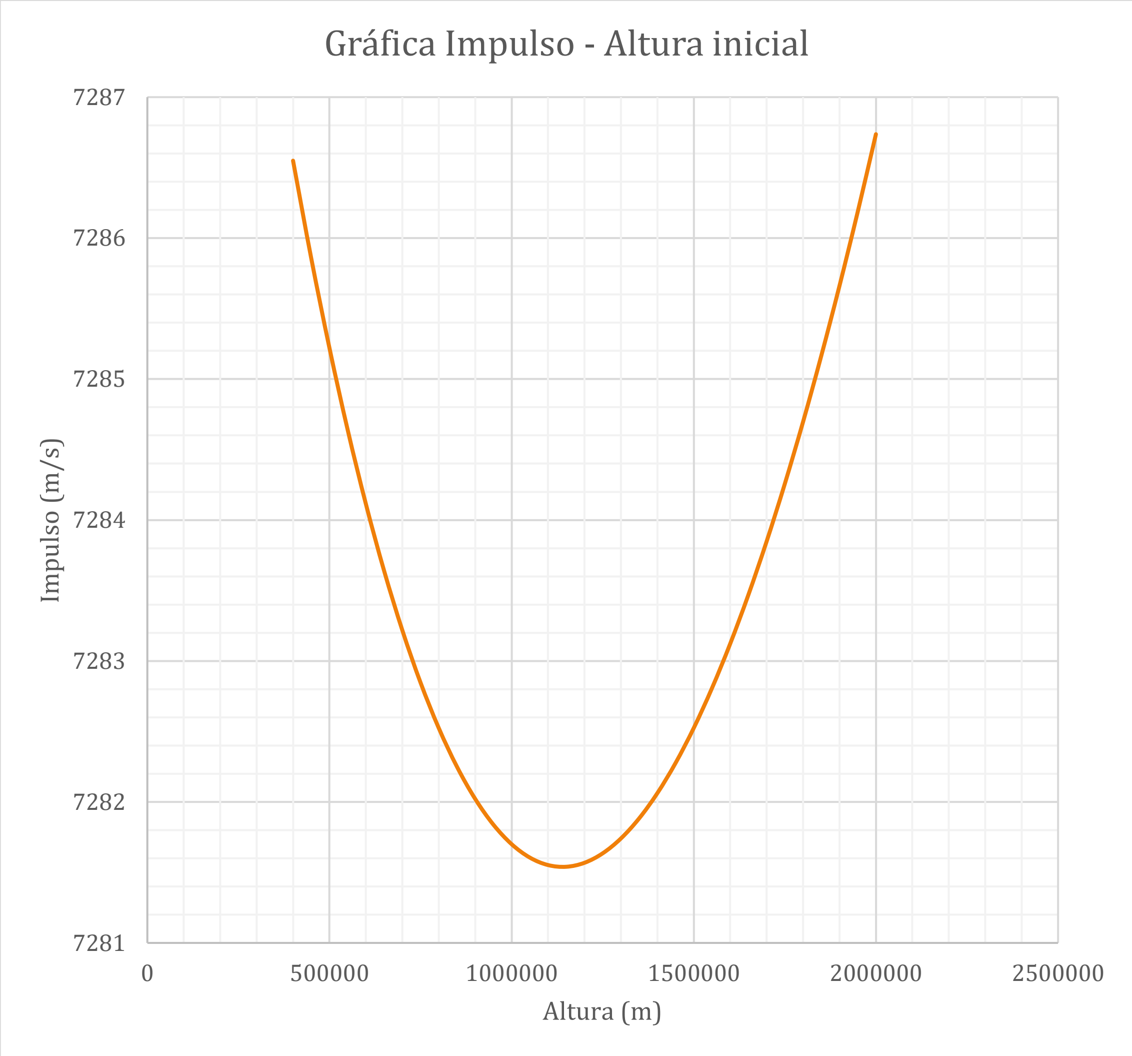


Figura 9. Gráfico donde se expone el incremento de velocidad en función de la Altura de la órbita de aparcamiento para así poder encontrar el mínimo.

A partir de la gráfica anterior (Figura 9), observamos como en esta relación aparece un mínimo de incremento de velocidad a una altura determinada. A pesar de que a partir del gráfico podríamos ser capaces de determinar este valor de altitud óptima ( $H_{opt}$ ) que nos permite dar el mínimo impulso ($\Delta v_{0min}$), resolveremos este problema mediante la derivación e igualación a 0 de la expresión anterior y así obtener el valor más exacto de $H_{opt}$.

$$\frac{d\Delta v_0}{dH_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( v_\infty^2 + \frac{2\mu_T}{r_T + H_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{-2\mu_T}{(r_T + H_0)^2} \right) - \left( \frac{\mu_T}{r_T + H_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{-\mu_T}{(r_T + H_0)^2} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

$$H_{opt} = \frac{2\mu_T}{v_\infty{}^2} - r_T \tag{25}$$

De este modo, sustituyendo:

$$v_\infty = V_{HP} - V_T \tag{26}$$

$$v_\infty = 10297{,}652 \text{ m/s}$$

$$\mathrm{H_{opt}} = 1\ 139\ 753 \text{ m}$$

$$\Delta v_{0min} = 781{,}539\ m/s$$

Una vez conocidos estos valores podemos calcular sin mayor complicación los parámetros de dicha hipérbola a través de la cual pretenderemos escapar de la Tierra.

Empecemos calculando el semieje mayor $a$,

$$a_{hip} = \frac{\mu}{v_\infty^2} = \frac{\mu_\mathrm{T}}{(V_{HP} - V_T)^2} \tag{27}$$

$$a_{\mathrm{hip}} = 3{,}759 \cdot 10^6\ m$$

Y de esta forma, obtenemos los parámetros necesarios para calcular la excentricidad $e$, que gracias a nuestros conocimientos teóricos sabemos que esta deberá ser mayor que 1.

$$e = \frac{r \cdot p}{a} + 1 \tag{28}$$

$$e = 3$$

Siendo el radio del perihelio $r_p$:

$$r_p = r_T + H_{opt} \tag{29}$$

$$r_p = 7\,517\,854\,m$$

Donde podemos determinar también el ángulo de giro $\gamma$,

$$\gamma = 2 \cdot arcsin\left(\frac{1}{e}\right) \tag{30}$$

$$\gamma = 38{,}942°$$

### 2.1.3 Parámetros de la órbita elíptica de transferencia:

Para determinar los parámetros de la elipse, podemos calcular fácilmente con los datos de los cálculos anteriores.

Para el semieje mayor de la elipse:

$$a_{elipse} = \frac{R_{orbPlaneta1} + R_{orbPlaneta2}}{2} \tag{31}$$

$$a_{\text{elipse}} = \frac{R_{orbSat} + R_{orbT}}{2} = 7{,}916 \cdot 10^{11}\,m = 5{,}29\,UA$$

Tiendo en cuenta que a la ecuación de posición de una órbita elíptica no dice que el radio en el apoapsis $(r_{ap})$ está directamente relacionado con la excentricidad y conociendo que este coincide con el radio orbital de Saturno tenemos,

$$R_{Sat} = R_{ap} = a_{elipse} \cdot (1 + e) \tag{32}$$

Donde podemos despejar la excentricidad $e_2$,

$$e = \frac{R_{Sat} - R_T}{R_{Sat} + R_T} \tag{33}$$

$$\mathrm{e} = \ 0{,}811$$

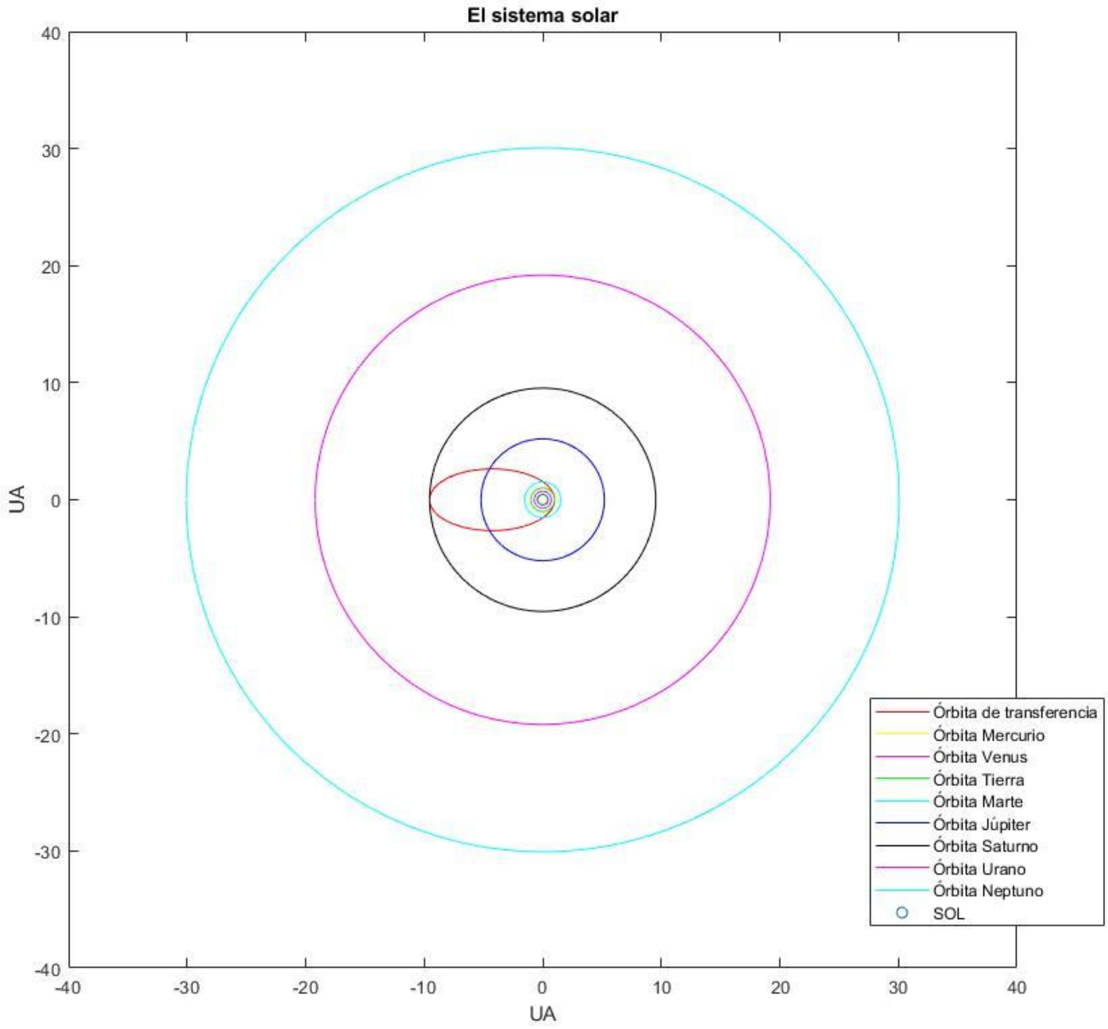


Figura 10. Esquema de Maniobra de Transferencia de Hohmann (Respecto Sistema Solar).

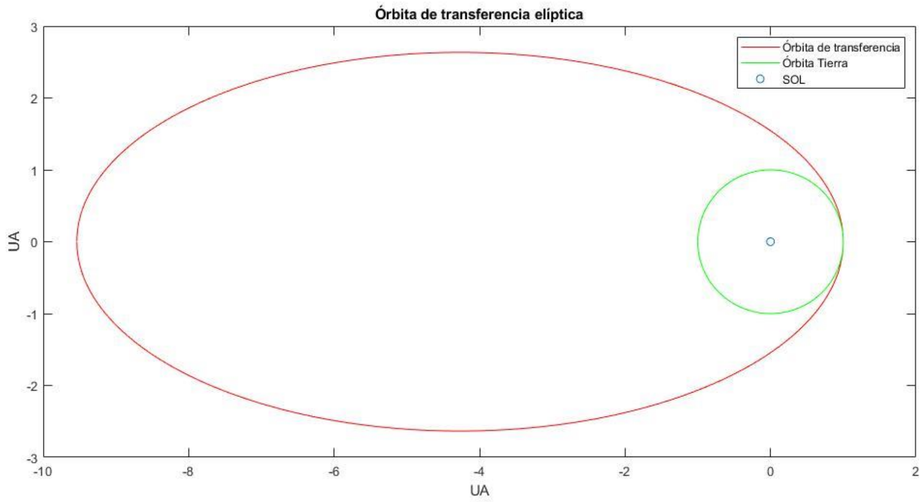


Figura 11. Esquema de Maniobra de Transferencia de Hohmann (Respecto la Tierra)

## 2.1.4 Inserción Orbital en Saturno:

Considerando que llegamos de una órbita elíptica que tiene como foco el Sol, los parámetros, la velocidad y energía de dicha órbita son conocidos.

$$\varepsilon_{elipse} = \frac{-\mu}{2a} \tag{34}$$

$$\varepsilon_{elipse} = \frac{-\mu_{Sol}}{2a_{elipse}} = \frac{-\mu_{Sol}}{R_{Sat} + R_T} = -1{,}256 \cdot 10^{18} \, \frac{J}{kg}$$

Teniendo en cuenta que la inserción orbital se producirá en el afelio, del cual conocemos el radio y la energía, igualando los valores de la energía potencial y cinética en dicho punto con el de la órbita.

$$\frac{{V_{ap}}^2}{2} - \frac{\mu_{Sol}}{\mathrm{R_{Sat}}} = \frac{-\mu_{Sol}}{R_{Sat} + R_T} \tag{35}$$

De modo que la velocidad de llegada a Saturno, utilizando la fórmula (20):

$$v_{ap} = \sqrt{2\mu_{Sol} \cdot \left(\frac{1}{R_{Sat}} - \frac{1}{R_{Sat} - R_T}\right)} = 18\,783{,}434\,\frac{m}{s}$$

Una vez conocemos esta velocidad de llegada de nuestra nave a Saturno, pasamos a ubicarnos dentro de la esfera de influencia de Saturno, dejando lejos la esfera de influencia del Sol, por lo que, para tratar con la velocidad de llegada precisa, será pertinente restarle el valor de la velocidad orbital de Saturno.

Entonces, hallamos primero la velocidad orbital de Saturno (16),

$$v_{Sat} = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_{Sat}}} = 9621{,}773\,\frac{m}{s} \tag{36}$$

Del mismo modo, la velocidad real de llegada a Saturno será considerada el exceso de velocidad con la que entraremos en la órbita hiperbólica para entrar a la órbita circular alrededor de Saturno:

Como llegaremos con un exceso de velocidad, a esa velocidad le tenemos que restar la velocidad orbital de Saturno porque tomamos como marco de referencia a Saturno.

$$u_{\infty} = v_{nave} - v_{Planeta} \tag{37}$$

$$u_{\infty} = v_{ap} - v_{Sat} = 9161{,}660 \text{ m/s}$$

Una vez conocemos esta velocidad de exceso con la que nuestra nave entrará a la órbita hiperbólica alrededor de Saturno, simplemente nos quedará encontrar le impulso/freno que necesitará la nave para que esta se quede orbitando finalmente alrededor de Saturno en una órbita circular de $H = 1.000.000.000\ m$.

La energía $\varepsilon$ de esta órbita circular será,

$$\varepsilon_{circ} = \frac{-\mu}{2 \cdot R_{orbPlaneta}} \tag{38}$$

$$\varepsilon_{circ} = \frac{-\mu_{Sat}}{2 \cdot (\mathrm{r}_{Sat} + H)} = -3{,}543 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{KJ}}{\mathrm{kg}}$$

Mientras que la energía de la órbita hiperbólica de llegada será:

$$\varepsilon_{hip} = \frac{\mu}{2 \cdot a} \tag{39}$$

$$\varepsilon_{hip} = \frac{\mu_{Sat}}{2 \cdot a_{hip}} = 4{,}247 \cdot 10^4 \, \frac{kJ}{kg}$$

Donde el *semieje mayor a* en este caso será,

$$u_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a_{hip}}} \tag{40}$$

$$a_{hip} = \frac{\mu_{Sat}}{u_\infty^2} = 4{,}467 \cdot 10^8 \, m = 2{,}986 \cdot 10^{-3} \, UA$$

Asimismo, procediendo al correspondiente balance de energías tenemos que se tiene que cumplir,

$$\varepsilon_{circ} = \varepsilon_{hip} - \frac{\Delta v_2^2}{2} \tag{41}$$

siendo $\varepsilon_{circ}$ la energía de la órbita circular de Saturno en la cual queremos que se quede nuestra nave orbitando, a una altura $H$ respecto a la superficie de Saturno.

Con lo cual, sustituyendo para este caso,

$$\frac{-\mu_{Sat}}{2 \cdot (\mathrm{r_{Sat}} + H)} + \frac{\Delta v_2^2}{2} = \frac{\mu_{Sat}}{2 \cdot a_{hip}} \tag{42}$$

Despejando el impulso $\Delta v_2$,

$$\Delta v_2 = \pm \sqrt{2 \cdot \left( \frac{\mu_{Sat}}{2a_{hip}} + \frac{-\mu_{Sat}}{2 \cdot (\mathrm{r_{Sat}} + H)} \right)} \tag{43}$$

$$\Delta v_2 \ = -\ 3081{,}232\ m/s$$

En este caso obtenemos este valor del impulso necesario como una raíz cuadrada que nos dará dos soluciones posibles (negativa o positiva) de modo que analizando el problema des de fuera, y teniendo en cuenta que se trata de un impulso necesario para frenar la nave, el valor adecuado de este será el valor negativo de dicha raíz.

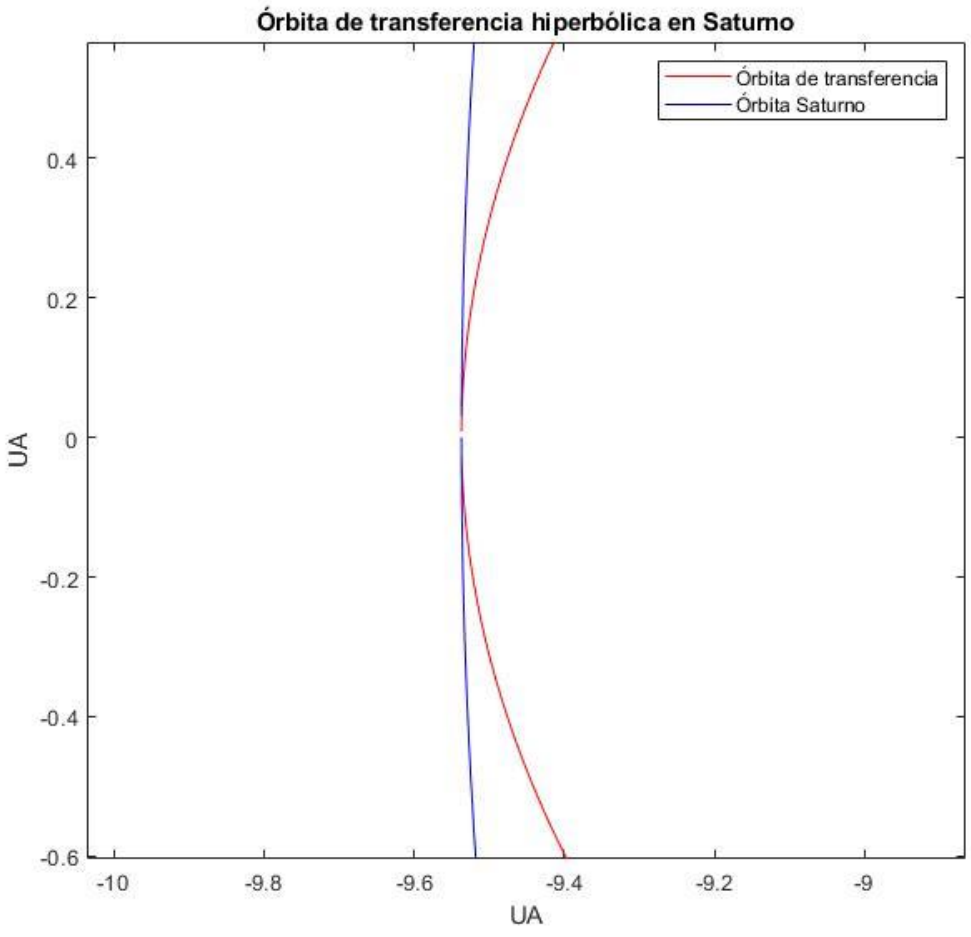

Figura 12. Gráfico de la llegada a Saturno y la inserción en una órbita circular alrededor de éste mediante una órbita hiperbólica.

## 2.2 Solución según una Asistencia Gravitatoria Natural a través de Júpiter

### 2.2.1 Salida de la tierra mediante trayectoria hiperbólica:

Determinaremos la órbita de escape de la tierra igual que en el apartado anterior de la transferencia de Hohmann. A partir de una órbita hiperbólica de escape, la cual en el momento de salir de la influencia gravitatoria de la tierra se convierte en una órbita elíptica alrededor del Sol, con un perihelio igual al radio orbital de la tierra y un afelio 5,7 veces el perihelio.

Primero de todo, calcularemos el semieje mayor de la elipse heliocéntrica que seguiremos después de la salida hiperbólica de la tierra. Como sabemos su afelio y perihelio, podemos obtenerlo a partir de la siguiente formula:

$$a_H = \frac{r_{orbT} + 5{,}7 r_{orbT}}{2} = 3{,}35 \cdot r_{orbT}$$

Donde $a_H$ i $r_{orbT}$ son los semiejes mayores de la órbita elíptica heliocéntrica y el radio orbital de la tierra, respectivamente.

Para calcular el impulso necesario $\Delta V$ para poner en órbita heliocéntrica el satélite, primero es necesario calcular el exceso de velocidad en la órbita hiperbólica de salida $V_\infty$. La calcularemos como la resta de la velocidad de órbita de transferencia en el perihelio $V_{HP}$ menos la velocidad orbital de la tierra $V_T$:

Empleando las ecuaciones (16) (17) (37),

$$v_\infty = \sqrt{\mu_{Sol}\left(\frac{2}{r_{orbT}} - \frac{1}{a_H}\right)} - \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_{orbT}}} \qquad (44)$$

A partir del exceso de velocidad en la órbita hiperbólica de salida $V_\infty$ podemos calcular la velocidad que le haría falta al satélite para iniciar una salida hiperbólica $V$, la cual obtendremos igualando la energía necesaria en la órbita de aparcamiento y la velocidad en la órbita hiperbólica:

$$\varepsilon_{orbaparcamiento} = \varepsilon_{orbhiper} \tag{45}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_T}{R_T + H_0} = \frac{{v_\infty}^2}{2} \tag{46}$$

$$v = \sqrt{{v_\infty}^2 + 2\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} \tag{47}$$

Donde $H_0$ la altura respecto la superficie terrestre de la órbita de aparcamiento.

Finalmente, el impulso requerido $\Delta V$ lo obtendremos restando la velocidad de la órbita de aparcamiento alrededor de la tierra $v_{apar}$, a la velocidad necesaria para una salida hiperbólica $v$:

$$\Delta V = v - v_{aparc} \tag{48}$$

$$v_{aparc} = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} \tag{49}$$

Sustituyendo nos queda,

$$\Delta V = \sqrt{{v_\infty}^2 + 2\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} - \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + H_0}} \tag{50}$$

Podemos observar que el impulso requerido $\Delta V$ depende únicamente de la altura de la órbita de aparcamiento $H_0$, la cual desconocemos. Como nos interesa un impulso mínimo, optimizamos la función $\Delta V(H_0)$ y encontramos un valor óptimo de $H_0$.

$$H_0 = \frac{2\mu_T}{V_\infty{}^2} - R_T = 3319{,}39\ Km \quad (51)$$

Substituyendo este valor en la función $\Delta V(H_0)$ obtenemos un impulso mínimo:

$$\Delta V = 6411{,}22\ m/s \quad (52)$$

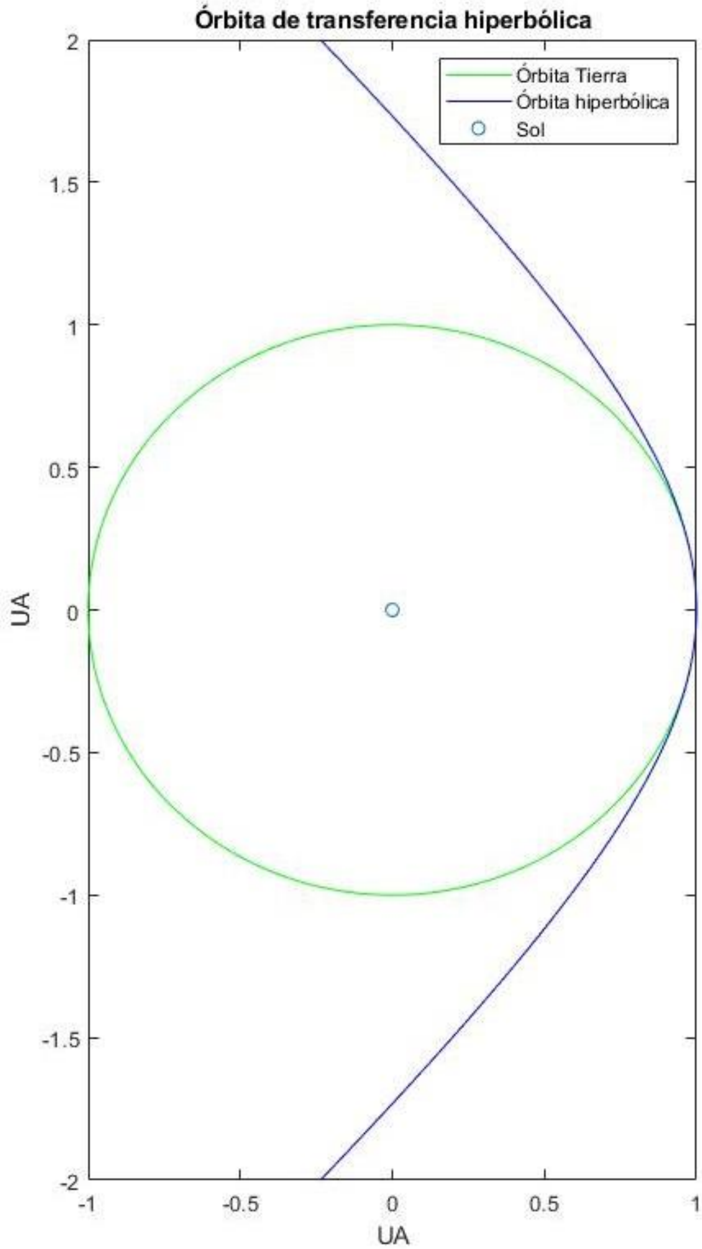


Figura 13. Esquema de la salida mediante orbita hiperbólica de la Tierra

### 2.2.2 Determinación el exceso de velocidad $V_\infty$ teniendo en cuenta que la nave se encuentra con Júpiter en el punto A.

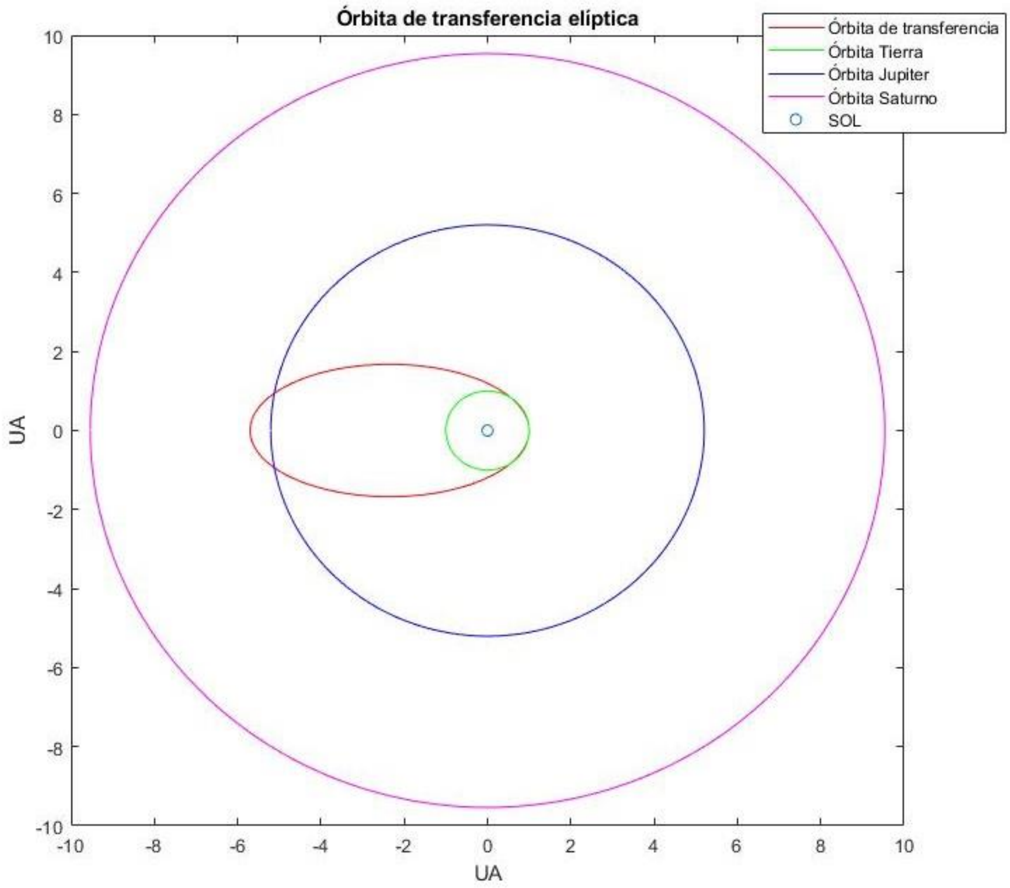


Figura 14. Órbita elíptica de encuentro con Júpiter, saliendo des de la Tierra, y respecto a la órbita de Saturno.

El problema principal será encontrar la velocidad con la que llegaremos al punto A. No obstante, como se trata de una maniobra de asistencia gravitatoria necesitaremos descomponer la velocidad en la componente radial y tangencial para trabajar con ellas adecuadamente.

Sabemos que una elipse, la velocidad del cuerpo que orbita se puede expresar como la suma vectorial de una $componente\ radial\ v_r$ y una $componente\ tangencial\ v_\theta$:

$$v_r = \frac{\mu}{h} \cdot e \cdot \sin(\theta) \tag{53}$$

$$v_\theta = \frac{\mu}{h} \cdot (1 + \mathrm{e} \cdot \cos(\theta)) \tag{54}$$

Conociendo que el momento angular $h$ se conservará a lo largo de toda la órbita.

Previamente a cualquier cálculo referido a las velocidades, en el enunciado se nos facilitan algunos datos de la órbita elíptica de transferencia hasta el punto A, a partir de los cuales encontraremos el resto de los parámetros de ésta.

- El perihelio es igual al radio de la órbita terrestre (1 UA), que es desde donde se envía la sonda.
- El afelio se encuentra a 5.7 UA del Sol.

De este modo, trabajando con $R_T$ como factor de conversión para las unidades astronómicas y dividiendo las dos expresiones de la distancia al foco en una elipse des de su periastro y su apoastro:

$$R_{afelio} = a(1 + e) \tag{55}$$

$$5{,}7 \cdot R_{orbT} = a(1 + e)$$

$$R_{per} = a(1 - e) \tag{56}$$

$$R_{orbT} = a(1 - e)$$

Donde operando nos queda

$$5{,}7 = \frac{(1+e)}{(1-e)} \qquad 5{,}7 - 5{,}7e = 1 + e$$

$$e = \frac{4{,}7}{6{,}7} = 0{,}7015 \tag{57}$$

$$\mathrm{a} = \frac{5{,}7 \cdot R_{orbT}}{1+e} = \frac{R_{orbT}}{1-e} \tag{58}$$

$$\mathrm{a} = 501\ 152\ 866\ \mathrm{km} = 3{,}35\ \mathrm{UA}$$

Una vez tenemos la elipse bien definida, será de vital importancia, conocer la $anomalía\ verdadera$ ($\theta_J$) a la que nuestra nave se encontrará con Júpiter siguiendo la trayectoria elíptica. Siendo la expresión de la distancia de un punto al foco en función del ángulo $\theta$ de una elipse:

$$r = \frac{a \cdot (1-e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)} \tag{59}$$

Como se puede observar en la Figuras 14 y 15 nuestra nave puede encontrarse con Júpiter en dos puntos, A y B, por lo que realizaremos todos los cálculos para el caso en que nuestra nave se encuentra con Júpiter en el punto A y posteriormente mostraremos los resultados análogos en el punto B, ja que lo único que variará entre estos dos será la anomalía verdadera de la elipse, y como consecuencia también los signos de las componentes de la velocidad de llegada a Júpiter.

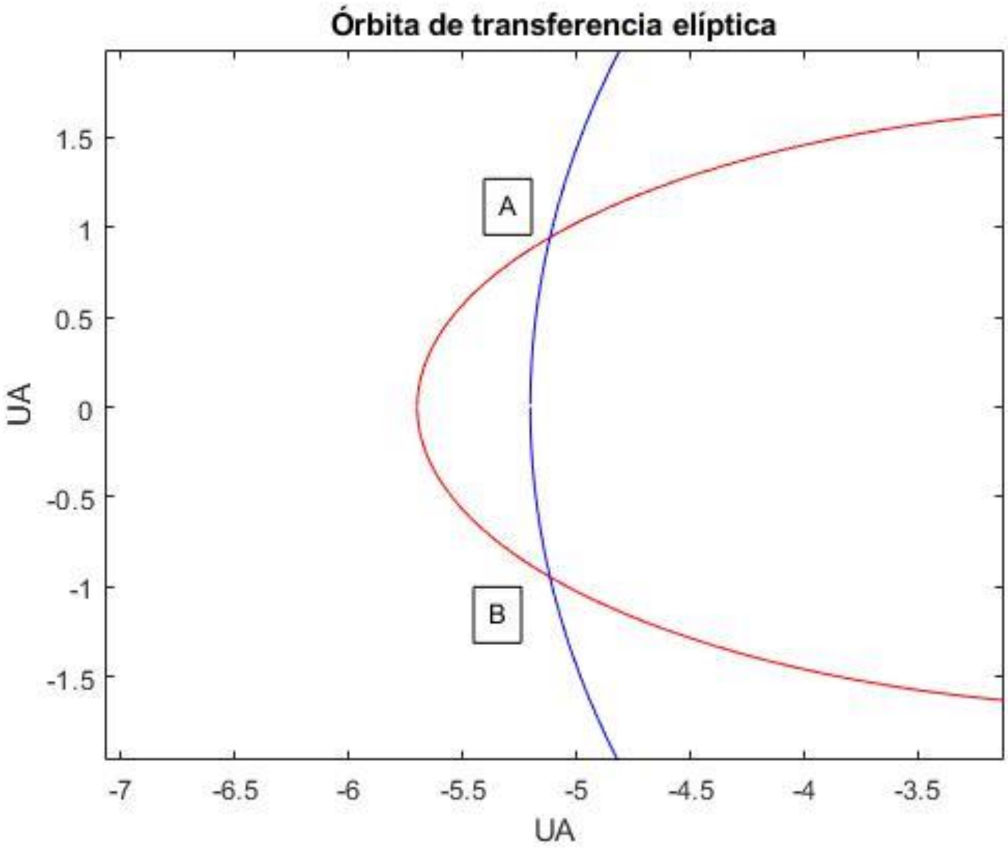


Figura 15. Esquema con las dos opciones posibles para encontrar Júpiter en la órbita elíptica definida

Obviamente en el punto A, $r = R_{orbjup}$ y conociendo tanto los valores de $a$ como de $e$ y podemos obtener el valor del $\cos(\theta)$:

$$R_{orbjup} \cdot (1 + \mathrm{e} \cdot \cos(\theta)) = \mathrm{a} \cdot (1 - e)^2 \tag{60}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a(1 - e^2) - R_{orbjup}}{R_{orbjup} \cdot e}$$

Por lo tanto, la anomalía verdadera $\theta_A$ queda es,

$$\theta_A = \arccos\left(\frac{a(1 - e^2) - R_{orbjup}}{R_{orbjup} \cdot e}\right) \tag{61}$$

$$\theta_A = 163{,}614\,°$$

Una vez conocida esta anomalía verdadera, calcular las velocidades resultará mucho más sencillo, puesto que el valor de $h$ (momento angular por unidad de masa) será:

De la ecuación (59) y la siguiente,

$$\mathrm{r} = \frac{\frac{h^2}{\mu_{Sol}}}{1 + e \cdot \cos(\theta)} \tag{62}$$

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu_{Sol}}}{1 + e \cdot \cos(\theta)} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

$$a \cdot (1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu_{Sol}}$$

Por lo tanto,

$$h = \sqrt{a \cdot (1 - e^2) \cdot \mu_{Sol}}$$

$$h = 5{,}811 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{s}$$

Substituyendo este valor de h en la expresión vectorial de las velocidades:

$$h = r \cdot v_\theta \tag{63}$$

$$v_\theta = \frac{h}{R_{orbjup}} = 7465{,}509\ m/s$$

$$v_r = \frac{\mu_{Sol}}{h} \cdot e \cdot sin(\theta) = 4517{,}936\ m/s$$

La velocidad de nuestro satélite:

$$\overrightarrow{V_{nave}} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_\theta} \tag{64}$$

$$\overrightarrow{V_{nave}} = 4517{,}936 \cdot \overrightarrow{e_r} + 7465{,}509 \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

Si estuviéramos tratando todo el rato nuestro problema bajo la influencia del mismo astro, éste estaría finalmente resuelto. Pero al aproximarnos a Júpiter llega un punto en el que dejamos de encontrarnos dentro de la esfera de influencia del Sol y pasamos a estar najo la de Júpiter. Por esto mismo a la velocidad de exceso con la que entraremos a la órbita hiperbólica ($v_\infty^-$) debemos restarle la velocidad orbital de Júpiter ($v_J$).

Como consideramos la órbita de Júpiter una órbita circular, la velocidad de esta solo tendrá componente tangencial (19),

$$v_{orbjup} = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{R_{orbjup}}} = 13055{,}288 \, \overrightarrow{e_\theta} \, \frac{m}{s}$$

Cuando la nave espacial entra en la esfera de influencia de Júpiter, debemos restar la velocidad orbital del planeta a la de la nave para determinar el exceso de velocidad $V_\infty^-$ respecto del planeta.

Luego,

$$V_\infty^- = \overrightarrow{V_{nave}} - V_{orbjup\,(\theta)} = 4517{,}9355 \, \overrightarrow{e_r} + 7465{,}5091 \, \overrightarrow{e_\theta} - 13055{,}288 \, \overrightarrow{e_\theta}$$

$$V_\infty^- = 4517{,}936 \, \overrightarrow{e_r} - 5589{,}779 \, \overrightarrow{e_\theta}$$

### 2.2.3 Determinación mediante un método numérico el radio del periapsis de la hipérbola óptimo para realizar la asistencia gravitatoria Natural.

Nuestro objetivo en este apartado es determinar el radio del periapsis de la hipérbola óptimo, cuya ecuación no es posible despejar su incógnita y habrá que usar un método numérico para la determinación de sus raíces. Este cálculo se realizará mediante programación con ordenador, usaremos el método de la bisección (véase Apéndice 1. ).

Vamos a detallar los pasos que hemos seguido para el cálculo de las raíces que se ha hecho con programación.

De nuestros cálculos tenemos que la velocidad de la nave es,

$$v_\theta = 7465{,}509 \text{ m}/s$$

$$v_r = 4517{,}936\, m/s$$

Conociendo que $v_{Jup} = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_{orbJup}}}$,

$$\vec{v} = v_r\widehat{e_r} + v_\theta\widehat{e_\theta} - v_{orbJup}\cdot\widehat{e_\theta}$$

Donde el módulo es:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_r\widehat{e_r})^2 + \left((v_\theta - v_{orbJup})\widehat{e_r}\right)^2}$$

$$e = 1 + \frac{(v_\infty^2 \cdot r_\pi)}{\mu_{Jup}}$$

El ángulo de giro $\delta$ se define como,

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{e}\right)$$

Luego, la velocidad de salida después de la asistencia gravitatoria,

$$V_{\infty}^{+} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{\infty r}^{-} \\ V_{\infty\theta}^{-} \end{pmatrix}$$

$$V_{\infty}^{+} = [V_{\infty r}^{-} \cdot \cos(\delta) - V_{\infty\theta}^{-} \cdot \sin(\delta)]\widehat{e_r} \cdot +[V_{\infty r}^{-} \cdot \sin(\delta) + V_{\infty\theta}^{-} \cdot \cos(\delta)]\widehat{e_\theta}$$

Como partimos de la esfera de influencia de Júpiter, hay que sumar la velocidad orbital de Júpiter (16),

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\infty}^{+} + \vec{v}_{orbJup}$$

$$\vec{v}_2 = [V_{\infty r}^{-} \cdot \cos(\delta) - V_{\infty\theta}^{-} \cdot \sin(\delta)]\widehat{e_r} + \left[V_{\infty r}^{-} \cdot \sin(\delta) + V_{\infty\theta}^{-} \cdot \cos(\delta) + \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_{orbJup}}}\right]\widehat{e_\theta}$$

$$v_{\theta 2} = \left[V_{\infty r}^{-} \cdot \sin(\delta) + V_{\infty\theta}^{-} \cdot \cos(\delta) + \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_{orbJup}}}\right]\widehat{e_\theta}$$

Tras el fy-by, tenemos que la energía debe ser,

$$E_2 = \frac{v_2}{2} - \frac{\mu_{sol}}{R_{orb\ jup}}$$

De $v_{\vartheta} \rightarrow h_2 = R_{orb\ jup} \cdot v_{\theta 2}$

$$De\ E_2 = -\frac{\mu_{sol}}{2a_2}$$

Donde podemos despejar $a_2$,

$$a_2 = -\frac{\mu_{sol}}{2E_2}$$

$$e_2 = \sqrt{1 - \frac{{h_2}^2}{a_2 \mu_{sol}}}$$

Finalmente, sustituyendo todas las funciones,

$$R_{Jup} = \frac{\frac{H^2}{\mu_{sol}}}{1 + e_2 \cos(\vartheta)}$$

E imponiendo la condición $r_a - r_{orbSat} = 0$,

$$\frac{\frac{H^2}{\mu_{sol}}}{1 + e_2 \cos(\vartheta)} - r_{orbSat} = 0$$

Como estamos en el afelio $\vartheta = \pi$,

$$\frac{\frac{H^2}{\mu_{sol}}}{1 - e_2} - r_{orbSat} = 0$$

De esta forma, con todas las funciones en función de $r_\pi$, podemos determinar su valor.

### 2.2.4 Determinación del ángulo girado en dicha asistencia gravitatoria Natural, y la velocidad de exceso de Salida de la hipérbola en dirección a Saturno en punto A

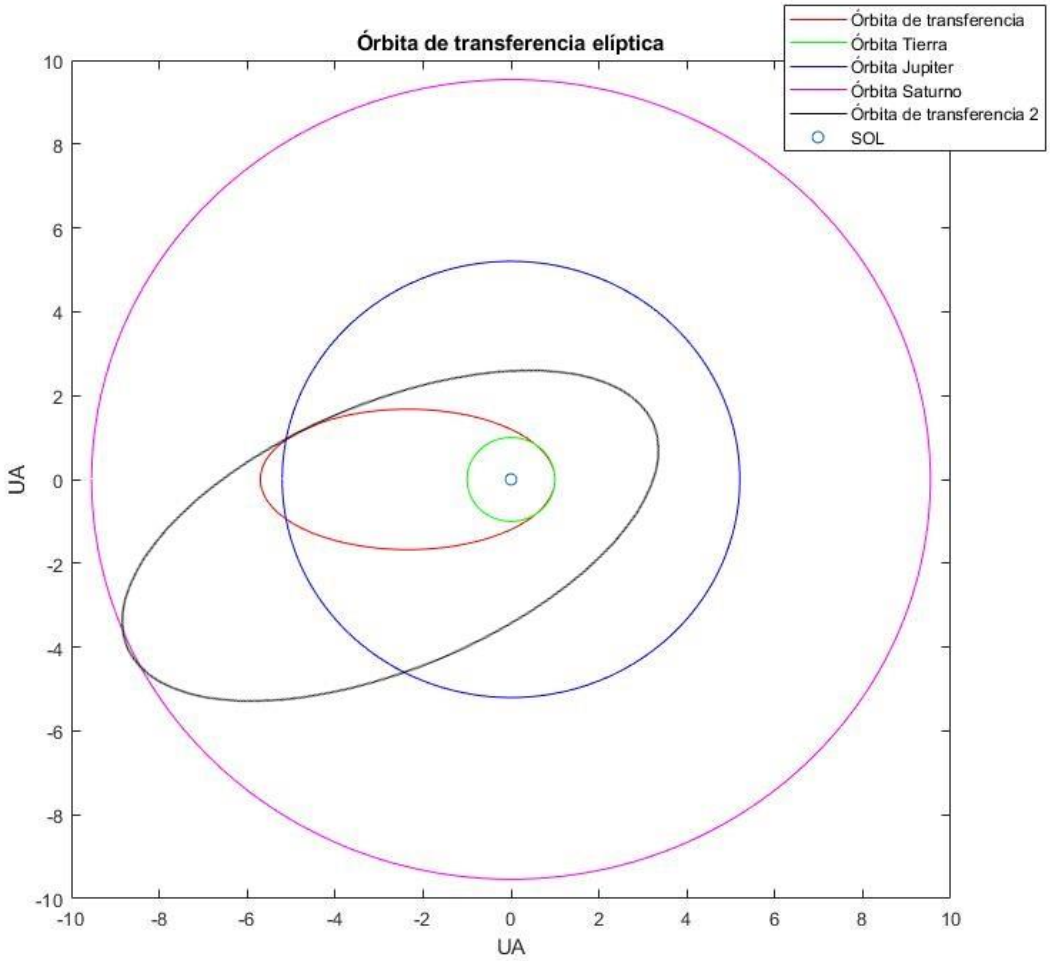


Figura 16. Esquema de la llegada a Saturno mediante la asistencia gravitatoria Natural en Júpiter, realizada en el punto A.

Para estos cálculos, han sido utilizado cálculo numérico con ordenador, los valores que tenemos son,

Para una anomalía verdadera de:

$$\theta_A = 163{,}614º$$

$$\delta_A = \arcsin\left(\frac{1}{e_{hip}}\right) = 0{,}769\ rad = 44{,}047º$$

La velocidad de exceso de salida es,

$$\vec{v}_{2\mathrm{A}} = \vec{v}_{\infty}^{+} + \vec{v}_{orbJup} = 7\ 133{,}54\widehat{e_r} + 12\ 177{,}80\widehat{e_\theta}$$

$$\|\vec{v}_{2\mathrm{A}}\| = 14\ 113{,}40\ m/s$$

En cuanto a los parámetros de la nueva elipse obtenemos los siguientes parámetros,

$$a_{2\mathrm{A}} = 9{,}363 \cdot 10^{11}\ m$$

$$e_{2\mathrm{A}} = 0{,}526$$

$$h_A = 9{,}479 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{s}$$

Y, nuestra incógnita, el radio del periapsis de la hipérbola es,

$$r_{\pi A} = 4\ 085\ 613\ 668\ m = 2{,}731 \cdot 10^{-2}\ UA$$

### 2.2.5 Determinación del ángulo girado en dicha asistencia gravitatoria Natural, y la velocidad de exceso de Salida de la hipérbola en dirección a Saturno en punto B

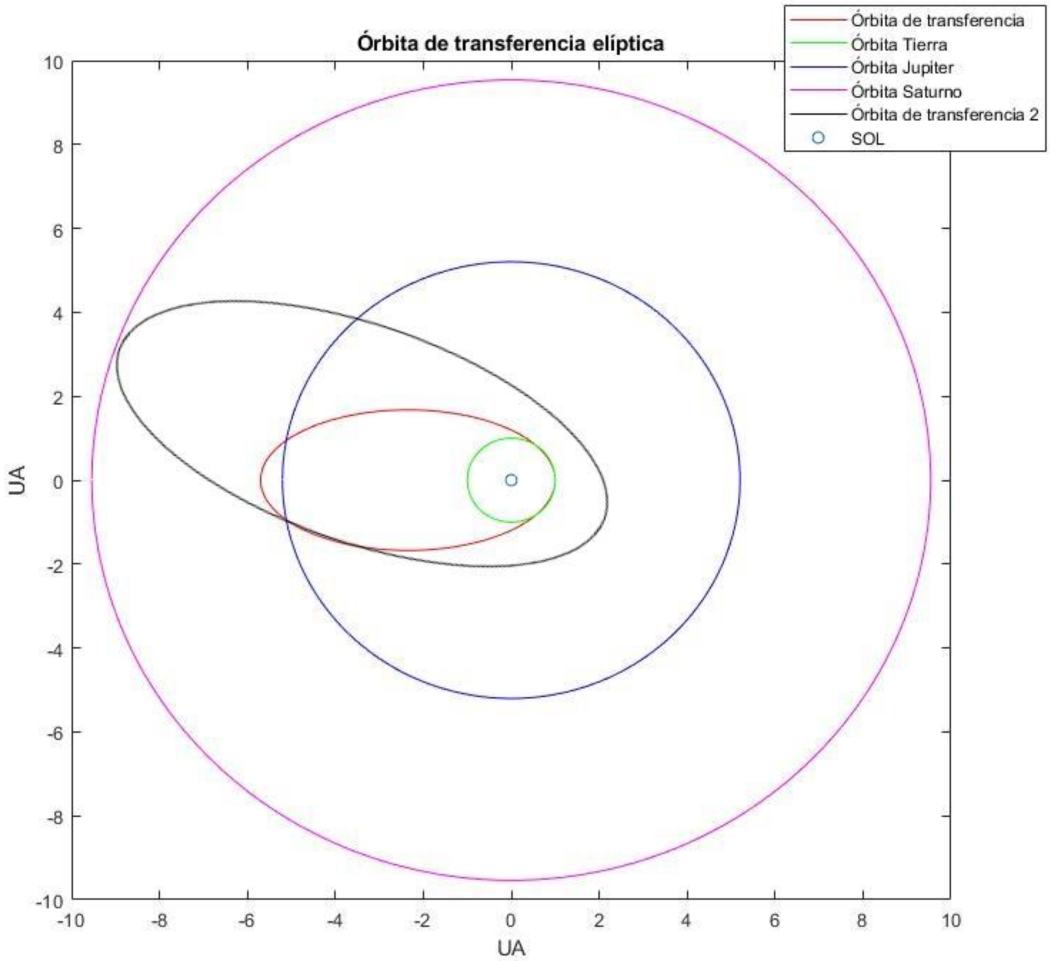


Figura 17. Esquema de la llegada a Saturno mediante la asistencia gravitatoria Natural en Júpiter, realizada en el punto B.

Este caso es análogo al anterior con la única diferencia que la anomalía verdadera es,

$$\theta_B = 196{,}386º$$

Los valores que hemos encontrado con el programa son:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{e_{hip}}\right) = 0{,}821\ rad = 47{,}026\ º$$

La velocidad de exceso de salida es,

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_\infty^{+} + \vec{v}_{orbJup} = 11\ 934{,}600 \cdot \widehat{e_r} - 4\ 238{,}62 \cdot \widehat{e_\theta}$$

$$\|\vec{v}_{2\mathrm{B}}\| = 12\ 665{,}00\ m/s$$

En cuanto a los parámetros de la nueva elipse obtenemos los siguientes parámetros,

$$a_{2\mathrm{B}} = 7{,}351 \cdot 10^{11}\ m$$

$$e_{2\mathrm{B}} = 0{,}943$$

$$h_B = -3{,}299 \cdot 10^{16}\ \frac{m^2}{s}$$

Y, nuestra incógnita, el radio del periapsis de la hipérbola es,

$$r_{\pi B} = 431\ 969\ 736\ m = 2{,}889 \cdot 10^{-3}\ UA$$

### 2.2.6 Cálculo el módulo de la velocidad heliocéntrica de salida tomando los dos ángulos de giro (positivo y negativo) y comentar el resultado. Compararlo con la velocidad de escape del Sol.

Primeramente, determinemos la velocidad de escape del Sol,

$$v_{esape} = \sqrt{2 \cdot \frac{\mu_{Sol}}{r_{Sol}}} = 617\ 652\ m/s$$

Respecto a la velocidad heliocéntrica de salida,

$$\|\vec{v}_{2\mathrm{A}}\| = 14\ 113{,}40\ m/s$$

$$\|\vec{v}_{2\mathrm{B}}\| = 12\ 665{,}00\ m/s$$

Respecto la $v_{2A}$, ésta es un 2,29 % de la velocidad de escape del Sol.

Respecto la $v_{2B}$, ésta es un 2,05 % de la velocidad de escape del Sol.

### 2.2.7 Cálculo de impulsos $\Delta v$

Encontraremos el segundo incremento de velocidad en el momento de la llegada a Saturno igualando la energía de la órbita elíptica de transferencia y la órbita de Saturno en el punto donde se encuentran.

$$\varepsilon_{elipse} = \varepsilon_{Saturno}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu_{\mathrm{Sol}}}{\mathrm{R_{orbSat}}} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu_{\mathrm{Sol}}}{\mathrm{R_{orbJup}}}$$

De aquí despejamos V que es la velocidad que tendría el satélite en la posición de Saturno siguiendo la elipse de transferencia.

$$V = \sqrt{V_\infty^2 + 2\mu_{\mathrm{Sol}}\left(\frac{1}{\mathrm{R_{orbSat}}} - \frac{1}{\mathrm{R_{orbJup}}}\right)}$$

Sabiendo que la velocidad de Saturno es (16):

$$V_{Sat} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{Sol}}}{\mathrm{R_{orbSat}}}}$$

El incremento de velocidad será:

$$\Delta \mathrm{v}_2 = V_{Sat} - V$$

- Para el punto A:

$$\Delta \mathrm{v}_2 = 2946{,}48\ m/s$$

Finalmente, el incremento total queda como la suma de $\Delta \mathrm{v}_2$ y el $\Delta \mathrm{v}_1$ que fue el impulso optimizado en su momento:

$$\Delta v_{Total} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 9357{,}70\ m/s$$

- Para el punto B:

$$\Delta v_2 = -7285{,}74\ m/s$$

Este incremento da negativo lo que significa que hay que frenar el satélite. Cogeremos el valor absoluto de $\Delta v_2$

$$\Delta v_{Total} = 13696{,}95\ m/s$$

### 2.2.8 Comparación Trasferencia de Hohmann y Asistencia Gravitatoria

A lo largo del proyecto hemos estudiado dos maneras diferentes de enviar nuestra nave no tripulada a Saturno. Cada una de ellas con sus ventajas y sus inconvenientes, que son

Para el caso de la maniobra de transferencia de Hohmann, observamos como el tiempo empleado para dicha travesía es levemente menor que el tiempo respecto a la otra maniobra. Para esta opción, el tiempo aproximado de travesía es de unos 2,73 años, un tiempo bastante largo, pero no en exceso, si lo comparamos con el de otras misiones espaciales. Esto se debe principalmente a que es una transferencia directa en dirección a Saturno, sin maniobras en exceso ni giros que aumentarían este tiempo. Pero como consecuencia, esto implica mayores incrementos y decrecimientos de velocidad por lo que los impulsos que deberá facilitar el motor deberán ser mayores y el consumo también lo será.

Por otro lado, si nos referimos a la transferencia mediante la maniobra de asistencia gravitatoria natural, observamos como el tiempo empleado para esta es sutilmente mayor que respecto a la otra. Esto principalmente es causa de que el hecho de rodear Júpiter mediante una órbita hiperbólica, realizar un giro gracias a su asistencia gravitatoria i redirigirnos hacía Saturno, conlleva un exceso de tiempo, que para la transferencia de Hohmann no era necesario. No obstante, podemos observar como los impulsos necesarios para realizar toda la transferencia mediante este método son inferiores a los de la anterior, de manera que como era previsible, el hecho de aprovechar la energía gravitatoria de otro astro del universo como impulso adicional para modificar nuestra trayectoria y dirigirnos hacia nuestro principal destino, siempre supone un ahorro considerable de energía, de modo que el coste de la misión se reduciría considerablemente.

Finalmente podemos concluir que ambos métodos presentan ciertas ventajas y desventajas, pero en función de las necesidades, y del objetivo principal de la misión, seria más conveniente tomar una u otra. Es decir, si la misión pretende llegar a Saturno simplemente para estudiar su entorno y tomar datos experimentales, tal vez sea mejor opción, la asistencia gravitatoria, mientras que si se pretende intentar llegar a Saturno en el menor tiempo posible debido a que se está estudiando realizar un rescate interplanetario a alguna de las sondas que han desaparecido…, será mejor opción la transferencia de Hohmann.

## 2.3 Cálculo del tiempo de navegación

Como cualquier misión, es muy importante calcular el tiempo necesario que va a tomar dicha misión. Para ello, en este proyecto hemos definido 2 métodos para llegar a Saturno.

### 2.3.1 Mediante Transferencia de Hohmann

Basándonos en las suposiciones anteriores del cálculo de la transferencia directa mediante una órbita de transferencia de Hohmann, podemos observar que el recorrido realizado por el satélite corresponde a media elipse heliocéntrica. Por lo tanto, teniendo en cuenta que el periodo T es el tiempo en que tarda en completar la elipse, T/2 será el tiempo que nos interesa, el tiempo para completar media elipse.

Para calcular este periodo, nos basaremos en la segunda ley de Kepler, de la cual podemos extraer la siguiente formula:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mu_{Sol}} a^3} \tag{65}$$

Que, para nuestro caso, lo podemos escribir de esta forma,

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mu_{Sol}}\left(\frac{R_{orbJup} + R_{orbT}}{2}\right)^3}$$

Substituyendo los valores y dividendo entre 2, resulta un tiempo:

$$t = \frac{T}{2} = 86\ 215\ 959\ s = 997{,}87\ días = 2{,}73\ años$$

### 2.3.2 Mediante Asistencia Gravitatoria

#### 2.3.2.1 Introducción teórica

La ecuación de Kepler, que relaciona las propiedades de la órbita de un cuerpo sujeto a una fuerza central, se define como [13]:

$$M = E - e \cdot \sin(E) \quad (66)$$

Donde $E$ es la anomalía excéntrica y $M$ es la anomalía media, y $e$ es la excentricidad de la órbita.

Sabiendo que $M$ depende del tiempo de vuelo, y está definido como:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ (t - \tau) \quad (67)$$

Donde $\tau$ es el momento en el cual el cuerpo está en el periastro.

Igualando y despejando tenemos:

$$E - esinE = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ (t - \tau)$$

$$(t - \tau) = (E - esinE)\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Estableciendo $\tau = 0$,

$$t = (E - esinE)\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Donde la $E$ y $\theta$ la anomalía verdadera:

$$cosE = \frac{e + cos\theta}{1 + ecos\theta} \qquad (68)$$

- Cálculo del tiempo

Para calcular el tiempo en este apartado utilizaremos la expresión anterior. Dividimos el tiempo en dos partes: el tiempo de vuelo desde la Tierra hasta el flyby de Júpiter y el tiempo de vuelo desde Júpiter hasta Saturno.

$$t_{Total} = t_{TJ} + t_{JS}$$

Para calcular el tiempo de vuelo desde la Tierra hasta Júpiter $t_{TJ}$ tenemos:

$$t_{TJ} = (E_1 - e_1 sinE_1)\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_S}}$$

Donde el subíndice 1 se refiere a la órbita elíptica de transferencia entre la Tierra y Júpiter, y $\theta$ toma el valor de $\theta_1$.

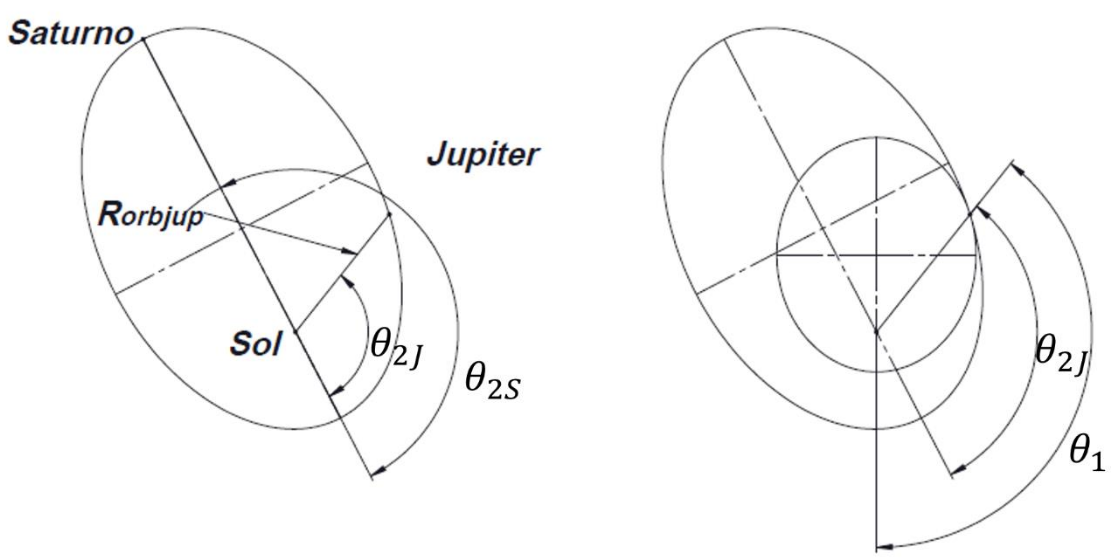


Figura 18. Representación de la elipse de transferencia, a la izquierda detalle de los ángulos respecto al Periastro de la elipse 2, a la derecha ángulo de Júpiter respecto a las elipses 1 y 2

Para calcular el tiempo de vuelo desde Júpiter hasta Saturno $t_{JS}$ calcularemos el tiempo de vuelo desde el periastro de la órbita (entre Júpiter y Saturno) hasta Saturno, y le restaremos el tiempo de vuelo entre el periastro de la misma órbita y Júpiter.

$$t_{JS} = t_{PS} - t_{PJ}$$

$$t_{JS} = (E_{2S} - e_2 sinE_{2S} - E_{2J} + e_2 sinE_{2J})\sqrt{\frac{a_2^3}{\mu_S}}$$

Donde el subíndice 2 se refiere a la órbita de transferencia entre Júpiter y Saturno, el subíndice 2J se refiere a la posición de Júpiter en esta órbita con $\theta_{2J}$ , y así mismo con el subíndice 2S, donde $\theta_{2S} = 180^o$.

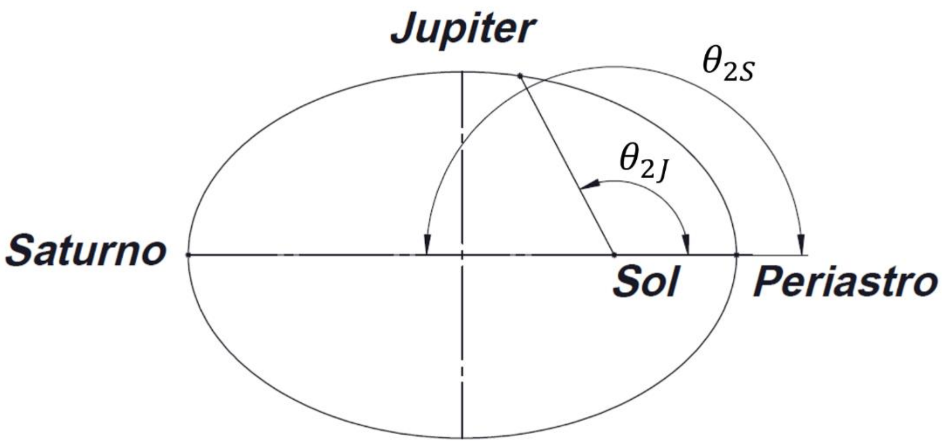


Figura 19. Detalle con los ejes centrados en la elipse de transferencia

Para calcular $\theta_{2J}$ la despejamos de la ecuación polar de la elipse:

$$\theta_{2J} = arcos\left(\frac{\frac{h^2}{R_{orbJup}\,\mu_S} - 1}{e_2}\right) \qquad (69)$$

Donde el valor de $h$, la cantidad de movimiento nos vendrá proporcionada por el programa, al igual que la excentricidad $e_2$.

Con todo esto calculamos:

$$t_{TJ} = 59\,559\,744{,}89\ s = 1{,}89\ años$$

$$t_{JS} = 62\,602\,803\ \text{s} = 1{,}99\ \text{años}$$

Por lo que el tiempo total $t_{Total}$ sería la suma de los dos tiempos:

$$t_{Total} = t_{TJ} + t_{JS} = 3{,}88\ años$$

- El cálculo del tiempo para el punto B es un procedimiento análogo,

$$t_{Total} = t_{TJ} + t_{JS} = 4{,}25 + 4{,}12 = 8{,}12\ años$$

# 3 CONCLUSIONES

Una vez terminado el proyecto, podemos extraer algunas conclusiones que nos permiten analizar y entender, des de un punto de vista mucho más experimentado, todas aquellas misiones espaciales que se han ido realizando a lo largo de la historia de la humanidad.

En el presente trabajo se ha dedicado al estudio del proceso de envío de un satélite de su órbita alrededor de la Tierra hasta una órbita circular alrededor de Saturno. Para ello, se han analizado y calculado por separado los diferentes pasos a seguir para entender mejor el proceso y de optimizar el tiempo y combustible utilizado.

Se han utilizado conocimientos claves adquiridos en clase como la transferencia de Hohmann (para cambiar de órbita mediante una órbita elíptica temporal) y la asistencia gravitacional (para aumentar la velocidad mediante la atracción gravitacional de un planeta y sin hacer uso de combustible) entre otros.

En el desarrollo del trabajo de investigación hemos logrado diferentes objetivos del trabajo como:

- Definir la velocidad necesaria para que la nave escape de la influencia de la Tierra en función de su órbita de aparcamiento.
- Ver las diferentes órbitas elípticas y el incremento de velocidad asociado que nos permiten llegar a Júpiter y Saturno desde la Tierra.
- El cálculo de cómo realizar una asistencia gravitacional al pasar por Júpiter, a fin de llegar a Saturno con un menor gasto de combustible.
- Cuantificar el tiempo que tarda la nave al llegar a Saturno según el incremento de velocidad aplicado.
- Estudiar la maniobra de inserción en la órbita de Saturno.
- Generar gráficas e imágenes que complementaran los cálculos y las explicaciones realizadas para una mejor interpretación facilitó el entendimiento del trabajo.

Primeramente, querríamos remarcar el hecho de tener varias posibilidades a la hora de lanzar una nave hacia un destino concreto hace que se deba realizar un detallado proceso de selección para tomar la decisión más adecuada. Hemos podido observar como en este proyecto, las dos opciones propuestas para hacer llegar nuestra nave a Saturno eran realmente buenas, pero una de ellas estaba por encima de la otra. Obviamente aprovechar el efecto gravitatorio de un planeta para modificar la trayectoria de nuestra nave, supone siempre un gran ahorro de combustible cosa que para el caso de la Transferencia de Hohmann no éramos capaces de conseguir. No obstante, también se ha podido ver como esta segunda manera, era a su vez, mucho más compleja que la primera, puesto para ser capaces de aprovechar dicho impulso de la forma correcta era necesario conocer las distancias a las cuales deberíamos realizar las maniobras con total exactitud.

Por lo tanto, a pesar de que es más rápido y sencillo ir directamente de la Tierra a Saturno, el no disponer del incremento de velocidad proporcionado por la asistencia gravitacional se traduce en un aumento significativo del incremento de velocidad inicial aplicado, es decir, en la necesidad de más combustible y el consecuente incremento de los costes.

A lo largo del trabajo se han ido resolviendo los diferentes cálculos necesarios relativos a las trayectorias, las velocidades, las características de las órbitas y, en general, las diferentes maniobras necesarias para la consecución del objetivo final: llegar a Saturno. gracias a la resolución de estos cálculos hemos consolidado los conocimientos adquiridos en clase y hemos visto más de cerca y de forma sencilla una de las muchas cosas en las que posiblemente acabaremos involucrados en nuestro futuro profesional.

Finalmente, remarcar la idea de que cada vez más gracias a la ayuda de los ordenadores, los humanos somos capaces de lograr cálculos y misiones espaciales más precisas por lo que, con el principal objeto de estudiar y conocer el espacio exterior que nos rodea, cada vez estamos más cerca de conocer como es exactamente aquello que está más allá de las fronteras de nuestro planeta, e incluso algún día, más allá del Sistema Solar.

# 4 REFERENCIAS


[1] Sebastián Franchini and Óscar López García. *Introducción a la ingeniería aeroespacial*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.

[2] Howard D Curtis. *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2013.

[3] "Appendix A-Physycal Data". En: *Orbital Mechanics for Engineering Students (Second Edition)*. Ed. por Howard D. Curtis. Second Edition. Aerospace Engineering. Butterworth-Heinemann, 2010, pág. 689–690. ISBN: 978-0-12-374778-5.
DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374778-5.00015-5.
URL:http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123747785000155.

[4] Howard D. Curtis. "Chapter 3 - Orbital Position as a Function of Time". En: *Orbital Mechanics for Engineering Students (Second Edition).* Ed. Por Howard D. Curtis. Second Edition. Aerospace Engineering. Boston: Butterworth-Heinemann, 2010, pp. 155 –197. ISBN: 978-0-12-374778-5.
DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374778-5.00003-9.
URL:http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123747785000039.

[5] Stephen Kemble. Interplanetary mission analysis and design. Springer Science &
Business Media, 2006.

[6] R. H. Battin. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised edition. AIAA Education Series, 1999.

[7] Varios contribuidores. Wikipedia. Anexo: *Datos de los planetas del sistema solar.* [Último acceso 30-12-2018].
URL:https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Datos_de_los_planetas_del_sistema_solar

[8] David A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Techonology Library, Springer, 2007.

[9] Bong Wie. *Space vehicle Dynamics and Control*. AIAA Education Series, 1998.

[10] Robert A. Braeunig. Basics of Space Flight: Orbital Mechanics. [Último acceso 30-12-2018]. URL: http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm.

[11] https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf11/WDS11_309_f12_Franc.pdf

[12] Varios Contribuyentes. *European Space Agency*. ESA. [Último acceso: 30/12/18].
URL:https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Cassini-Huygens_overview
URL: https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta_overview
URL: https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Ulysses_overview

[13] Aaboe, Asger. *Episodes from the Early History of Astronomy*. Springer, 2001, p. 146–147. ISBN9780387951362

# 5 APÉNDICES

# APÉNDICE 1. CÓDIGO 1 DEL PROGRAMA PARA DETERMINAR EL RADIO DEL PERIHELIO EN LA ASISTENCIA GRAVITATORIA

**Lenguaje de programación**: $C^{++}$

```
/*PROGRAMA PARA DETERMINAR EL RADIO DEL PERIAPSIS DEL ENCUENTRO CON JUPITER
PARA QUE EL AFELIO ED LA ORBITA DE SALIDA SEA IGUAL AL RADIO DE LA ORBITA DE
SATURNO*/


#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip> //setprecision
#include <stdio.h>
#include <fstream>


#define PRECISION 6


using namespace std;


void tabla(double n, double m);
double f(double x);


int main()
{
        //INICIO DEL PROGRAMA


        printf("\nCALCULO DEL RADIO DEL PERIAPSIS MEDIANTE METODO DE
BISECCION\n\n");
        cout<< setprecision(PRECISION);



        cout<<"Ingrese el intervalo inicial [n,m]"<<endl;

        double n,m,tolerancia;

        cout<<"\nn = ";
        cin>>n;
        cout<<"m = ";
        cin>>m;

        tabla(n,m);

        cout << "\nEscoja el intervalo adecuado" << endl;
        cout << "\nn = ";
        cin >> n;

   cout << "m = ";
```

```
   cin >> m;

   double xr; // punto medio del intervalo n,m

   if (f(n)*f(m)>0){

   cout << "\nNo se puede aplicar el metodo de la biseccion\n";
   cout << "porque f(" << n << ") y f(" << m << ") tienes el mismo signo" <<
endl;

   } else {

          cout << "Tolerancia = ";
      cin >> tolerancia;


          cout << "\nn\tm\tx\tf(n)\t\tf(m)\t\tf(x)\n" << endl; // encabezado
de la tabla

         // bucle del método
          do {

                xr = (n + m) / 2.0;

         cout << n << "\t" << m << "\t" << xr << "\t"; // imprimimos los
valores
         cout << f(n) << "\t" << f(m) << "\t" << f(xr) << endl;

         // Vemos si cumple o no cumple
         if (fabs(f(xr)) <= tolerancia) { // xr sería la raiz de f    // fabs
es la funcion valor absoluto

           cout << "\n\nPara una tolerancia " << tolerancia << " la raiz de
f es " << xr << endl;
           break; // para romper bucle

         } else {

                       // hay que remplazar a n o m

                       if (f(xr) * f(n) > 0) { // si la imagen de f(xr) y
f(n) tienen el mismo signo
             n = xr; // remplazamos la variable n
           } else if (f(xr) * f(m) > 0) {
             m = xr;
           }
         }

      } while (1);
   }

    cin.get();
        cin.get();
        return 0;
}
```

```
//Código de las Acciones

#define INTERVALOS 10
void tabla(double n, double m)
{
        int puntos = INTERVALOS + 1; //si tenemos 10 intervalos, el numero de
puntos sera los intervalos más 1

        double ancho = (m-n) / INTERVALOS; // el ancho de los intervalos

        cout << "\n";
        cout<<"\n\tx\tf(x)\n "; //para mostrar la tabla
        for (int i=0; i<puntos; i++){

                cout<<"\t"<< n << "\t" << f(n) <<endl; // donde a es el
valor del punto y f(a) su imagen
                n = n + ancho;

        }

        }

double f(double x)
{
        // valor que me tiene que devolver la funcion
        // nuestra funcion es: ra=((pow(h2,2))/(mu_Sol*(1-e2)));


        //Datos y constantes de los astros en SI
        double G=6.67*pow(10,-11);
        double Masa_Sol=1.9891*pow(10,30); // 1,9891*10^30
        double mu_Sol=G*Masa_Sol;

        double rorbJup=778412010000;
        double rorbT=149597870700; // = 1 UA
        double rorbSat=1426725400;

        double rJup=69911000;
        double rT=6371000;
        double rSat=58232000;

        double muJup;
        double Masa_Jup=1.898*pow(10,27);
        muJup=G*Masa_Jup;

        // Parámetros de la elipse

        double e=0.7015;
        double a=501152866845;
        double theta=163.6144056409079; // grados
        double h=5.811241928693205*pow(10,15);


        double vtheta=7465.509080073424;
        double vradial=4517.935474540212;

        double vJuptan;
        //función velocidad orbital Jupiter (órbita circular)
        vJuptan=sqrt(mu_Sol/rorbJup);
```

```
        double v_infmenos_rad=4517.935474540212;
        double v_infmenos_tan;
        v_infmenos_tan=vtheta-vJuptan;
        double v_infmenos;
        v_infmenos=sqrt(pow(v_infmenos_rad,2)+pow(v_infmenos_tan,2));
//módulo de v_infmenos


        // <<< Parametros durante flyby | FUNCIONES >>>

        double rpi; // INCÓGNITA


        //excentricidad trayectoria hiperbolica
        double e1;
        e1=1+((pow(v_infmenos,2)*rpi)/muJup);

        //delta=angulo de giro
        double delta;
        delta=2*asin(1/e1);

        //vinfmas=velocidad de la nave despues del flyby
        double v_infmas_rad;
        double v_infmas_tan;
        v_infmas_rad=(cos(delta)*v_infmenos_rad-sin(delta)*v_infmenos_tan);
        v_infmas_tan=(sin(delta)*v_infmenos_rad+cos(delta)*v_infmenos_tan);
        double v_infmas;
        v_infmas=sqrt(pow(v_infmas_rad,2)+pow(v_infmas_tan,2)); //módulo de
v_infmas

        //v2=nueva velocidad de la elipse
        double v2;
        double v2_rad;
        double v2_tan;
        v2_rad=v_infmas_rad;
        v2_tan=v_infmas_tan+vJuptan;
        v2=sqrt(pow(v2_rad,2)+pow(v2_tan,2)); //módulo de v_2

        //Energía de la elipse tras flyby (tiene que ser NEGATIVO)
        double epsilon2;
        epsilon2=(pow(v2,2)/2)-mu_Sol/rorbJup;

        //h2=momento angular 2
        double h2;
        h2=rorbJup*v2_tan;

        //a2=apoapsis 2 de la nueva elipse
        double a2;
        a2=-mu_Sol/(2*epsilon2);

        //excentricidad 2 de la nueva elipse
        double e2;
        //e2=sqrt(1-(pow(h2,2))/(a2*mu_Sol));
        e2=-1*((pow(h2,2)/(mu_Sol*rorbJup))-1);


        //Finalmente, imponemos que rafelio=rorbSat, la cual dependerá de
nuestra rpi
```

```
        double ra; //rafelio
        ra=((pow(h2,2))/(mu_Sol*(1-e2)));
        //ra= a2*(1+e2); // otra posible manera


        return ra-rorbSat;
        //return exp(-1 * x) - cos(3 * x) - 0.5; // es una funcion cualquiera
de prueba

}
```

# APÉNDICE 2. CÓDIGO 2 DEL PROGRAMA PARA DETERMINAR EL RADIO DEL PERIHELIO EN LA ASISTENCIA GRAVITATORIA

**Lenguaje de programación**: *Matlab*

- Para el **Punto A**:

```
Vradial = 4517.935474540212; %Velocidad radial inicial
VJupiter = 13061.64; %Velocidad de la orbita de Jupiter
Vtangencial = 7465.509080073424-VJupiter; %Velocidad tangencial inicial
Rorbjupiter = 778412010000; %Radio de la orbita de Jupiter
Vinfmenos = 7192,25;  %Modulo de la velocidad
muSOL = 1.328*10^20; %G * masa del sol
Mujup = 1.265966*10^17;%G * masa de Jupiter
RSaturno = 1426725400000; %Radio de la orbita de Saturno

%Determinación del periapsis en el sobrevuelo de Jupiter

syms RPI % Declaración de RPI como una variable
RPIdeA                    =                     vpasolve(RSaturno==(-
muSOL*(1+sqrt(1+((((Rorbjupiter*(Vradial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos
)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI)
)/Mujup)))+VJupiter))^2)*(((Vradial*cos(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*
RPI))/Mujup)))-
Vtangencial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup))))^2)+((Vra
dial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(
2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+VJupiter)^2)-
((2*muSOL)/Rorbjupiter)))/muSOL^2))))/(((Vradial*cos(2*asin(1/(1+((((V
infmenos)^2)*RPI))/Mujup)))-
Vtangencial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup))))^2)+((Vra
dial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(
2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+VJupiter)^2)-
((2*muSOL)/Rorbjupiter)), RPI)
```

- Para el **punto B**:

```
Vradial = -4517.935474540212; %Velocidad radial inicial
VJupiter = 13061.64; %Velocidad de la orbita de Jupiter
Vtangencial = -7465.509080073424-VJupiter; %Velocidad tangencial inicial
Rorbjupiter = 778412010000; %Radio de la orbita de Jupiter
Vinfmenos = 21018.4583;  %Modulo de la velocidad
muSOL = 1.328*10^20; %G * masa del sol
Mujup = 1.265966*10^17;%G * masa de Jupiter
RSaturno = 1426725400000; %Radio de la orbita de Saturno

%Determinación del periapsis en el sobrevuelo de Jupiter especificando
que el resultado tiene que ser positivo

syms RPI % Declaración de RPI como una variable
RPIdeB = vpasolve([RSaturno==(-
muSOL*(1+sqrt(1+((((Rorbjupiter*(Vradial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos
)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI)
)/Mujup)))+VJupiter))^2)*(((Vradial*cos(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*
RPI))/Mujup)))-
Vtangencial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup))))^2)+((Vra
dial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(
2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+VJupiter)^2)-
((2*muSOL)/Rorbjupiter)))/muSOL^2))))/(((Vradial*cos(2*asin(1/(1+((((V
infmenos)^2)*RPI))/Mujup)))-
Vtangencial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup))))^2)+((Vra
dial*sin(2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+Vtangencial*cos(
2*asin(1/(1+((((Vinfmenos)^2)*RPI))/Mujup)))+VJupiter)^2)-
((2*muSOL)/Rorbjupiter))], [RPI], [0, 10*10^15])
```