

Estructuras Aeroespaciales

Práctica 2

Alumnos: Pedro López Sancha, Yi Qiang Ji Zhang
Profesores: Daniel Yago, Juan Carlos Cante

Ingeniería en Tecnologías Aeroespaciales
Escuela Superior de Ingeniería Industrial, Aeroespacial y Audiovisual de Terrassa
Universitat Politècnica de Catalunya

2 de marzo de 2020

Índice

1. Introducción	2
2. Definición del problema	2
3. Apartado A	3
4. Apartado B	6

1. Introducció

Esta práctica tiene como objetivo el uso del cálculo matricial realizada en la práctica anterior y extrapolar los cálculos del problema bidimensional a un problema tridimensional. Análogamente al problema bidimensional, el propósito final del programa es el estudio tensional de cada elemento de la barra, ya sea tracción (+) o compresión (-).

2. Definición del problema

En la Figura 1 se ilustra una representación simplificada de la estructura de una ala delta. Esta ala delta se encuentra en un movimiento en descenso a velocidad constante. Su estructura está compuesta de barras de 2 materiales distintos, con las propiedades recogidas en la Tabla 1.

Se consideran las siguientes condiciones:

- Una masa $M = 120$ kg está sujeta a la barra inferior, y su peso W_M esta distribuida de forma equitativa entre los nodos 1 y 2.
- La masa de las barras NO es despreciable, y su peso se distribuye por igual entre los nodos de cada barra.
- La fuerza de sustentación aerodinámica total L y la fuerza de arrastre D se distribuyen uniformemente entre los nodos de la superficie superior.
- El piloto aplica una fuerza T , distribuida equitativamente entre los nodos 1 y 2, para evitar la rotación de la estructura alrededor del eje Y .

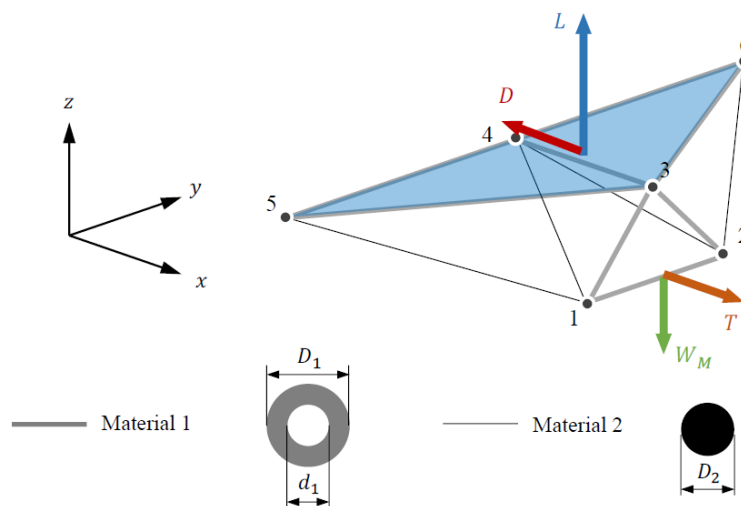


Figura 1 Estructura del ala delta y las fuerzas externas (el peso de las barras no está representado pero se deben tener en cuenta).

	Mód. de Young E (MPa)	Densidad ρ (kg/m ³)	Propiedades sección
Material 1	$7 \cdot 10^4$	2200	$D_1 = 21,0$ mm $d_1 = 5,0$ mm
Material 2	$2 \cdot 10^5$	1300	$D_2 = 2,0$ mm

Tabla 1 Propiedades de los materiales

3. Apartado A

Modifique el código MATLAB del Assignment 1 para adaptarlo al caso 3D y válidelo con el ensamblaje estructural dado en la Figura 2 (compare los resultados numéricos con los resultados analíticos).

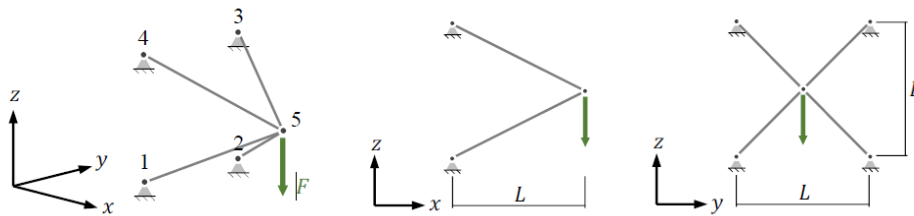


Figura 2 Problema de test para el programa con código 3D

a. Realice una breve descripción del procedimiento empleado para obtener los resultados analíticos:

Este problema de estructura tridimensionales presenta una simetría respecto del plano XY y planos XZ . Luego, aprovechando la simetría que presenta el propio problema la complejidad del ejercicio se reduce pues las incógnitas del mismo son del mismo módulo. Por añadidura, al tratarse de barras biarticuladas, el ejercicio se sintetiza al cálculo de dos fuerzas en la dirección axial de las barras que coinciden en módulo con las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo.

Analíticamente, el problema se planteará de dos maneras diferentes en las cuales conducen ambos métodos al mismo resultado.

En el primer método, se dibuja el diagrama de sólido libre de la estructura en el estado tridimensional de la Figura 1.

Sea las fuerzas de tensión de cada barra biarticulada (1), (2), (3), (4) con las reacciones F^{15} , F^{25} , F^{35} y F^{45} sobre el nodo 5 equivalente a cada barra, respectivamente. La estructura presentada en el problema está en equilibrio. Con el propósito de encontrar estas fuerzas de reacción es suficiente aplicar la segunda ley de Newton en el nodo 5, pues cualquier subdivisión de la estructura también se encuentra en equilibrio. A continuación, fijándonos en el plano XZ es fácil observar que existe una simetría en los vectores de fuerza de las barras 45 y 35 y entre las barras 15 25. Esta simetría es se explicita con respecto al plano $\hat{x}\hat{y}$. De forma que el problema se reduce a tan solo dos incógnitas de fuerzas 45 y 15. Para ello, se proyecta las componentes de los vectores de fuerza en los ejes \hat{x} y ejes \hat{z} de los ejes $\hat{x}\hat{z}$ globales equivalente al ángulo θ .

$$\theta = \arctan \frac{1}{2} = 26,565^\circ \quad (1)$$

De tal forma, se llega a la siguientes expresiones:

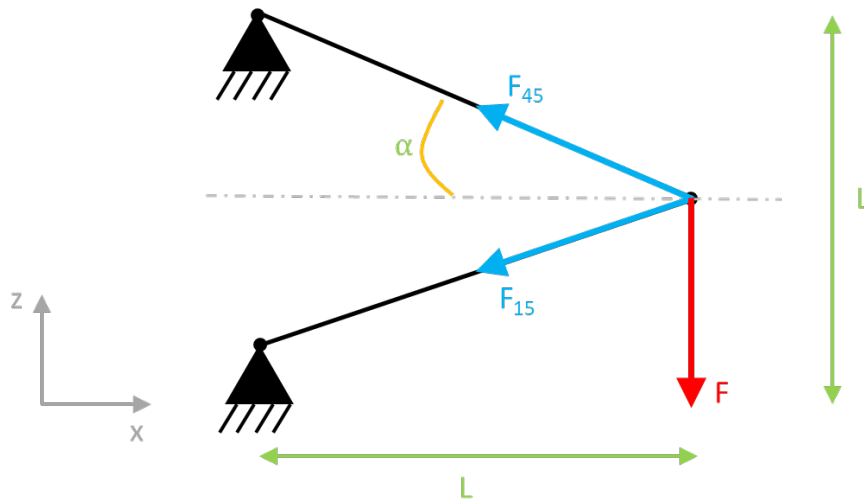


Figura 3 Proyección de las fuerzas de reacción en el plano $\hat{x}\hat{z}$.

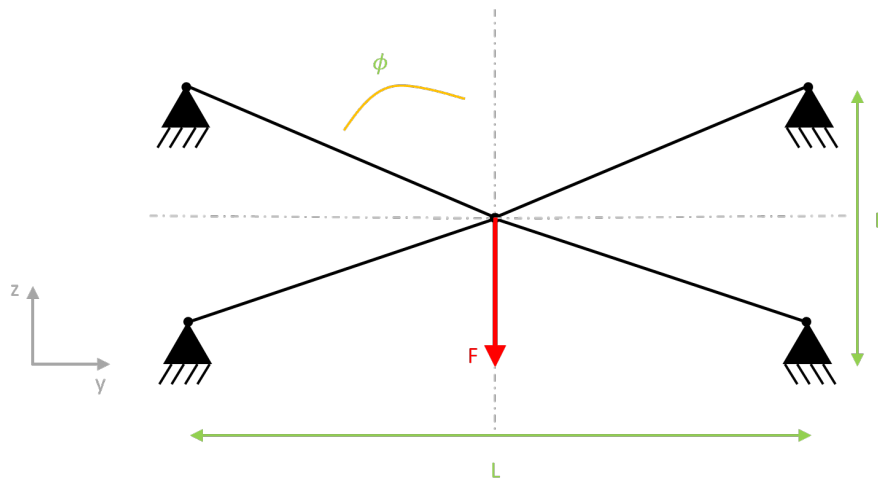


Figura 4 Proyección de las fuerzas de reacción en el plano $\hat{x}\hat{y}$.

$$\sum F_x = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (3)$$

$$-2 \cdot F_x^{45} \cdot \cos \alpha - 2 \cdot F_x^{15} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (4)$$

$$2 \cdot F_z^{45} \cdot \sin \alpha - 2 \cdot F_z^{15} \cdot \sin \alpha - F = 0 \quad (5)$$

Hasta ahora se ha podido escribir las fuerzas de las barras en la proyección sin embargo, puesto que el problema es tridimensional y las magnitudes encontradas no son las fuerzas de reacción en verdadera magnitud, en consonancia con la explicación anterior, es preciso resaltar que estas fuerzas no se encuentran referidas a los ejes ortonormales $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$. Por esta razón, se requiere la segunda proyección equivalente al ángulo ϕ .

En efecto, la segunda proyección proporcionará las componentes en verdadera magnitud de las fuerzas de las barras en las coordenadas globales [Figura 4]. El ángulo de la segunda proyección es el siguiente:

$$\phi = \arctan \frac{1}{\sqrt{5}} = 24,095^\circ \quad (6)$$

Finalmente,

$$-2 \cdot F_x^{45} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi - 2 \cdot F_x^{15} \cdot \cos \alpha \cos \phi = 0 \quad (7)$$

$$2 \cdot F_z^{45} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi - 2 \cdot F_z^{15} \cdot \sin \alpha \cos \phi - F = 0 \quad (8)$$

Cabe remarcar que se considerado $F^{45} = F^{35}$ y $F^{15} = F^{25}$ en módulo debido a la simetría del problema.

Desarrollado el sistema de ecuaciones anteriores 7, donde tenemos 2 incógnitas y 2 ecuaciones.

De la primera ecuación, es fácil ver

$$F^{45} = -F^{15} \quad (9)$$

En cuanto al sumatorio de fuerzas en eje vertical \hat{z} , se obtiene la siguiente relación:

$$F^{45} = \frac{F}{4 \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta} \quad (10)$$

Esta expresión relaciona la fuerza externa con las componentes de las reacciones de las barras. Se puede observar que la dependencia de ésta frente a la fuerza externa es lineal.

Para poder comparar el resultado analítico con el teórico, se supone una fuerza de valor arbitrario $F = 1000$ N, una fuerza de valor arbitrario (se ha definido este valor tratándose de un problema teórico, en la realidad, posteriormente, se debe estudiar el posible efecto de pandeo que pueda existir y si se supera el límite elástico del material). En consecuencia, las reacciones tomarán como referencia esta fuerza de referencia.

Sustituyendo los ángulos θ y ϕ en la expresión de la fuerza,

$$F^{45} = \frac{F}{4 \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta} \quad (11)$$

$$F^{35} = F^{45} = \frac{1}{4 \cdot \sin 26,565^\circ \cdot \cos 24,095^\circ} = 612,374 \text{ N} \quad (12)$$

Y de forma análoga, las otras fuerzas de reacción se calculan sustituyendo en la primera relación:

$$F^{15} = F^{25} = \frac{-1}{4 \cdot \sin 26,565^\circ \cdot \cos 24,095^\circ} = -612,374 \text{ N} \quad (13)$$

Suponiendo las secciones de cada barra constantes y de material 1, se obtiene que las tensiones en cada barra son:

$$\sigma_{35} = \sigma_{45} = \frac{F_{35}}{A} = \frac{F_{45}}{A} = \frac{0,613}{\frac{\pi}{4} \cdot (21^2 - 5^2)} = 1,874 \text{ MPa} \quad (14)$$

De la misma forma, para el las barras inferiores, se sustituye la fuerza correspondiente y la misma sección de área.

$$\sigma_{15} = \sigma_{25} = \frac{F_{15}}{A} = \frac{F_{25}}{A} = \frac{-0,613}{\frac{\pi}{4} \cdot (21^2 - 5^2)} = -1,874 \text{ MPa} \quad (15)$$

A continuación, este mismo problema se introduce en el código del ordenador. Empleando el código de la practica anterior extrapolando el caso 2D bidimensional al caso 3D tridimensional.

Los resultados obtenidos se recogen en la tabla 2

Elemento	Tensión (MPa)	
	Analítica	Númerica
15	-1,874	-1,874
25	-1,874	-1,874
35	1,874	1,874
45	1,874	1,874

Tabla 2 Tensiones obtenidas analítica y numéricamente para el problema A

Analizando los resultados se observa que tanto la solución analítica y la solución numérica coinciden de manera exacta, verificando y validando así ambos resultados. Cabe remarcar de los resultados, que las barras 15 y 25 reciben una compresión debido a la fuerza F externa. Por otro lado, la fuerza F induce una tracción en los elementos de barra superiores.

La figura 5 muestra la deformación de la estructura del apartado A. Como es de esperar, debido la fuerza F , el nodo 5 de la estructura tiene un desplazamiento negativo en el eje \hat{z} . Además, también se explicita las compresiones y tracciones de las barras.

4. Apartado B

B. Calcule el estado de tensión de la estructura dada en la Figura 1.

a. Realice una breve descripción de cómo se han determinado las fuerzas de sustentación y resistencia aerodinámica.

El ala delta sigue un movimiento de translación rectilínea uniforme. En particular, este ala se encuentra planeando en su trayectoria (sin embargo, tiene un empuje T propio no nulo el cual se demuestra posteriormente). Desde el punto de vista aerodinámico, el conjunto de fuerzas a la cual está sometida el ala se pueden reducir en 4 fuerzas básicas:

- Lift L
- Drag D
- Thrust T
- Weight W

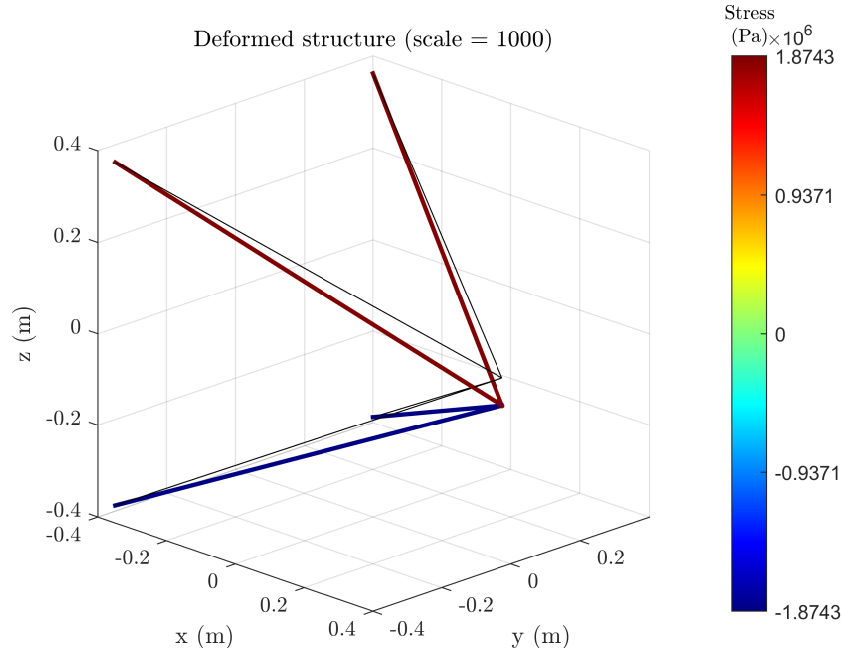


Figura 5 Deformación de la estructura del problema A (en escala 1000)

Generalmente, estas fuerzas aerodinámicas se aplican en el centro de masas de la estructura. Particularmente, en nuestra ala delta, estas fuerzas se encuentran aplicadas en puntos ajenos al centro de masas. Este desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas induce unos momentos que se deberán anular para cumplir con la condición de equilibrio.

Por consiguiente, lo dicho hasta aquí supone que se debe aplicar la segunda ley de Newton para la la dinámica de sólidos rígidos.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \sum \vec{M} = I \cdot \vec{\theta} \quad (16)$$

Como se puede apreciar en la figura 6, la sustentación L se puede calcular a partir del peso.

Otra vez, la estructura de este problema presenta una simetría en torno al plano $\hat{x}\hat{z}$. En la imagen 7, en concreto la Figura 7a la carga aerodinámica *Lift* está aplicado sobre el plano superior del ala, del mismo modo pasa para la carga *Drag*. Para hacer los cálculos posteriores es necesario encontrar la resultante de *Lift*. Sin embargo, una simplificación del problema resulta que la fuerza aerodinámica que se distribuye en cada nodo de forma equitativa y uniforme.

Por lo que al *Weight* se refiere, se consideran 2 pesos distintos. El primero W_M se trata del *payload* con la que debe cargar el ala. Por otra parte, el segundo peso que se debe considerar es el propio peso de las barras que no son despreciables.

Por último, la fuerza de empuje *Thrust* se encuentra aplicada en la barra 12, por lo que cada nodo recibe $\frac{T}{2}$.

De nuevo, aplicando la *segunda ley de Newton*:

$$\sum F_x = 0 \quad (17)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (18)$$

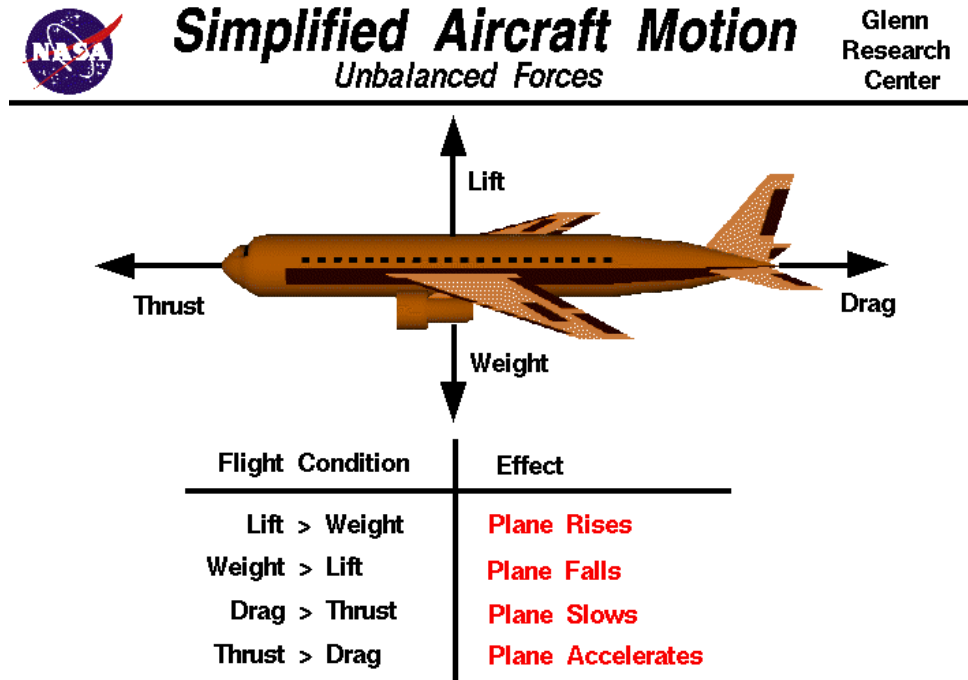


Figura 6 Representación gráfica de las 4 fuerzas básicas resultantes en un cuerpo aerodinámico. Fuente [1]

Las fuerzas que en el eje \hat{x} son el *Thrust* y el *Drag*, que actúan en sentidos opuestos. Así pues,

$$T = D \quad (19)$$

Por otra parte, las fuerzas de sustentación *Lift* y peso *Weight* se encuentran definidos únicamente en el eje vertical \hat{z} . De manera análoga al T y D , estas dos contribuciones tienen sentidos contrarios:

$$L = W \quad (20)$$

$$\frac{3L}{4} - (w_5 + w_4 + w_6) + \frac{L}{4} - w_3 - W_M - w_1 - w_2 = 0 \quad (21)$$

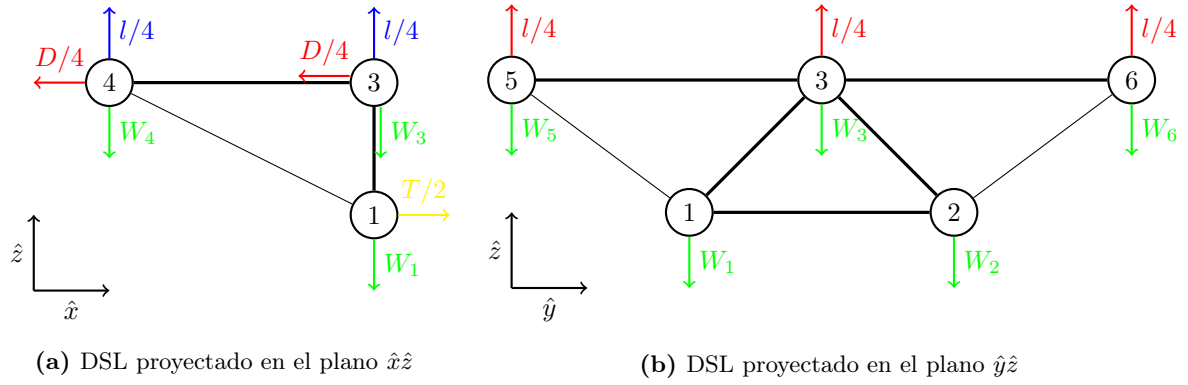
$$L = w_M + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 \quad (22)$$

Como se afirma en los puntos anteriores, avanzando en nuestro razonamiento, planteamos las ecuaciones para encontrar las fuerzas aerodinámicas. Por el momento, tenemos 2 ecuaciones y tres incógnitas (L, T, D) con la cual cosa, se de añadir una relación más. Acorde con esto, se procede a aplicar la segunda ley de Newton para los momentos. El hecho de que las fuerzas aerodinámicas no estén aplicados sobre el centro de masas induce una nueva ecuación para que el sistema esté en equilibrio. Ergo, El sumatorio de momentos respecto cualquier punto debe ser nulo.

La contribución de los momentos se muestra a continuación:

$$\sum M = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{L}{4} + w_3\right) \cdot d + T \cdot h - (w_M + w_1 + w_2) \cdot d = 0 \quad (24)$$

**Figura 7** Diagrama de Sólido Libre del ala delta

Donde d es la longitud de la barra 34 y h es la longitud de la proyección de la barra 13 al plano de simetría del ala delta.

Aislando el *Thrust* de esta ecuación se obtiene la siguiente expresión:

$$T = \frac{(w_M + w_1 + w_2) \cdot d - \left(\frac{L}{4} - w_3\right) \cdot d}{h} \quad (25)$$

Otro procedimiento, la cual se ha implementado en el programa para el cálculo de la fuerzas, se muestra a continuación:

Nodo 1

$$\vec{r}_1 = (2L, -L, 0)$$

$$\vec{r}_4 = (0, 0, H)$$

$$\vec{r}_{41} = \vec{r}_1 - \vec{r}_4 = (2L, -L, -H)$$

$$\vec{W}_1 = -m_1 g \hat{k} = -w_1 \hat{k}$$

$$\vec{T}_1 = \frac{T}{2} \hat{i}$$

$$\vec{M}_{w,1} = \vec{r}_{41} \wedge \vec{W}_1 = (LW_1, 2LW_1, 0) \vec{M}_{w,1} \quad = \vec{r}_{41} \wedge \vec{T}_1 = (0, -\frac{HT}{2}, \frac{LT}{2})$$

Nodo 2

$$\vec{r}_2 = (2L, -L, 0)$$

$$\vec{r}_4 = (0, 0, H)$$

$$\vec{r}_{42} = \vec{r}_2 - \vec{r}_4 = (2L, -L, -H)$$

$$\vec{W}_2 = -m_2 g \hat{k} = -w_2 \hat{k}$$

$$\vec{T}_2 = \frac{T}{2} \hat{i}$$

$$\vec{M}_{w,2} = \vec{r}_{42} \wedge \vec{W}_2 = (-LW_2, 2LW_2, 0) \vec{M}_{w,2} \quad = \vec{r}_{42} \wedge \vec{T}_2 = (0, -\frac{HT}{2}, \frac{LT}{2})$$

Nodo 3

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (2L, -L, 0) \\
\vec{r}_4 &= (0, 0, H) \\
\vec{r}_{43} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = (2L, -L, -H) \\
\vec{W}_3 &= -m_3 g \hat{k} = -w_3 \hat{k} \\
\vec{D}_3 &= -\frac{D}{4} \hat{i} \\
\vec{L}_3 &= \frac{L}{4} \hat{k} \\
\vec{M}_{w,3} &= \vec{r}_{43} \wedge \vec{W}_3 = (0, 2LW_3, 0) \vec{M}_{w,3} &= \vec{r}_{43} \wedge \vec{T}_3 = (0, -\frac{1}{2}Ll, 0)
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum M_i &= \frac{d}{dt} \cdot \omega = 0 \\
\begin{cases} (\hat{x}) & Lw_1 - Lw_2 = 0 \\ (\hat{y}) & 2LW_a + 2LW_2 + 2LW_3 - \frac{HT}{2} - \frac{HT}{2} - \frac{Ll}{2} = 0 \\ (\hat{z}) & \frac{LT}{2} - \frac{LT}{2} = 0 \end{cases} \\
\frac{L2}{l} + HT &= 2L(W_1 + W_2 + W_3) = 2Lg(m_1 + m_2 + m_3)
\end{aligned}$$

Análogamente, aplicando la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_i &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \\
\begin{cases} (\hat{x}) & T - D = 0 \\ (\hat{y}) & l - W = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Desarrollando las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{cases} Ll + 2HT = 4Lg \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \\ T - D = 0 \\ l = mg \end{cases}$$

En definitiva, sustituyendo cada componente en las ecuaciones correspondientes se llegan a las siguientes cargas aerodinámicas:

$$\begin{aligned}
l &= g \cdot \sum_{i=1}^6 m_i \\
T &= \frac{L}{2H} g \cdot [3(m_1 + m_2 + m_3) - (m_4 + m_5 + m_6)] \\
D &= \frac{L}{2H} g \cdot [3(m_1 + m_2 + m_3) - (m_4 + m_5 + m_6)]
\end{aligned}$$

¿Qué grados de libertad se han fijado para encontrar los desplazamientos nodales? ¿Cuáles son los valores de las reacciones calculadas en estos grados de libertad y cuál es su significado físico?

Para el cálculo de los desplazamientos los grados de libertad *DOFs* que se han prescrito una serie de grados de libertad pues por el contrario, el problema tendría excesivos grados de libertad y se comportaría como un mecanismo.

Para empezar, se debe fijar unos nodos base tales que se limita e impida los movimientos del sólido rígido. Así, fijando los nodos de la Tabla 5 el movimiento global de la estructura se restringe totalmente para su análisis.

Realizando el análisis, los valores de las reacciones calculados en los nodos en sus grados de libertad limitados han resultado dar valores casi nulos, del orden de 10^{-2} como máximo. Teniendo en cuenta la magnitud de la fuerza externa (1000 N), este valor es despreciable físicamente. En otras palabras, los valores de las reacciones presentan unos órdenes de magnitud muy inferiores a las fuerzas aerodinámicas. La interpretación física de estos valores, además de validar los resultados del ensayo dan significado a que dado que el problema está planteado en equilibrio, los nodos también cumplen el equilibrio. Las reacciones que aparecen son nulos y por lo tanto, el hecho de imponer la restricción realmente no estamos modificando el problema en recurrir a la limitación impuesta en los nodos. De manera contraria, si hubiese aparecido una reacción de un orden considerable, implicaría que la limitación de las restricciones no se ha realizado de manera correcta. Este fenómeno no se podría dar dado que en realidad el problema no presenta ninguna restricción.

Grados de libertad prescritos, valores de las reacciones y discusión adecuada de la pregunta 1.

Para resolver este problema numéricamente, se ha restringido los DOF recogidos en la tabla 3. Los desplazamientos y las reacciones se recogen en la Tabla 5 y 4, respectivamente.

Nodo	DOF	Magnitud
1	2	0
1	3	0
2	3	0
4	1	0
4	2	0
4	3	0

Tabla 3 Tabla de los Grados de Libertad restringidos en cada nodo

¿Existe riesgo de pandeo? Utilice la fórmula siguiente para evaluar la tensión crítica en cada barra:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot l^2} \quad (26)$$

El *pandeo* es un fenómeno de la inestabilidad elástica que puede darse en elementos comprimidos esbeltos, y que se manifiesta por la aparición de desplazamientos importantes transversales a la dirección

Nodo	DOF	Magnitud [m]
1	1	0
	2	$2,40 \times 10^{-13}$
	3	0
2	4	0
	5	0
	6	0
3	7	0
	8	0
	9	0
4	10	0
	11	$6,54 \times 10^{-14}$
	12	$-1,14 \times 10^{-13}$
5	13	0
	14	0
	15	0
6	16	0
	17	0
	18	0

Tabla 4 Tabla de las magnitudes de las reacciones en cada nodo restringido

Nodo	DOF	Magnitud [N]
1	1	$1,31 \times 10^{-3}$
	2	0
	3	0
2	4	$1,29 \times 10^{-3}$
	5	$4,04 \times 10^{-5}$
	6	0
3	7	$-9,55 \times 10^{-6}$
	8	$2,02 \times 10^{-5}$
	9	$-6,77 \times 10^{-6}$
4	10	0
	11	0
	12	0
5	13	$-1,46 \times 10^{-5}$
	14	$7,91 \times 10^{-5}$
	15	$1,66 \times 10^{-2}$
6	16	$-9,53 \times 10^{-5}$
	17	$-7,91 \times 10^{-5}$
	18	$1,66 \times 10^{-2}$

Tabla 5 Tabla de las magnitudes de los desplazamientos en cada nodo restringido

principal de compresión.

El cálculo del pandeo depende del material de la barra y de su longitud, siendo las barras más largas las que cuentan con una tensión crítica de pandeo menor. Esto es, las estructuras en las que la dimensión longitudinal es mucho mayor que las dimensiones perpendiculares a estas.

Si bien es sabido que el pandeo depende del material y de su geometría, también depende del momento de inercia de este, por lo tanto, de la dirección en que se aplica la fuerza. De los materiales 1 y 2, se extraen los pandeos críticos de pandeo que a su vez, dependen de la longitud de cada barra.

Fíjense en la Figura 8. Los elementos de barra del plano superior están sometidos a una tensión compresión. De entrada, pueden parecer que se tratan de valores bajos. Sin embargo, en comparación, estos son del orden de aproximadamente la mitad de la tensión de pandeo crítica de cada barra, lo que garantiza que no se comprometerá la integridad de la estructura [Tabla 6].

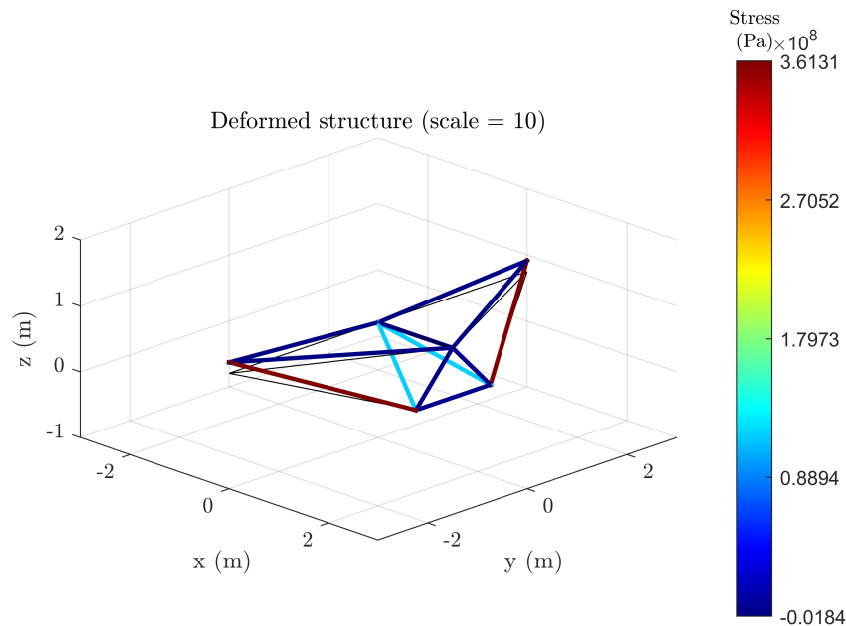


Figura 8 Tensiones y estructura deformada en el problema B1

Observando otra vez la Tabla 6, hay tres elementos de barra que claramente superan a la tensión de pandeo crítica. Estos elementos coinciden con los 4 elementos de barra del material 2. No obstante, estos valores no son representativos en comparación con la tensión crítica de pandeo pues los esfuerzos son de tracción ($\sigma > 0$) y no de compresión.

Elemento	σ (MPa)	σ_{cr} (MPa)
1	1,885	8,943
2	-0,446	8,943
3	-1,052	1,789
4	-1,845	2,236
5	-1,052	1,789
6	-1,845	2,236
7	0,626	17,886
8	0,626	17,886
9	116,685	0,146
10	116,685	0,146
11	361,31	0,063
12	361,31	0,063

Tabla 6 Tensión y tensión crítica de pandeo para cada elemento en el problema B1

¿Cuánta más fuerza necesita aplicar el piloto para evitar la rotación de la estructura alrededor del eje Y si una ráfaga produce un aumento repentino del 25 % de las cargas aerodinámicas? Calcule el nuevo estado de tensión en esta situación y reevalúe el riesgo de pandeo.

Apartado	Thrust
B1	1812,1 N
B3 (+25 % cargas)	1649,2 N

Tabla 7 Comparativa del Thrust que ejerce el ala en el caso B1 y en el caso B3 (con el aumento del 25 % de las cargas aerodinámicas)

En este apartado, se da un aumento repentino de las cargas aerodinámicas del ala, incrementándolo en un 25 %. Esto es, se aumentan en un 25 % el *Lift* y el *Drag*. Por lo que el piloto deberá incrementar la fuerza *Thrust* para compensar el momento de cabeceo que se producirá.

Retomando las ecuaciones anteriores, se obtiene que la fuerza que debe hacer el piloto es menor (*Thrust*):

Se observa que pese al aumento de las cargas aerodinámicas que genera el $\zeta Drag$ el *Thrust* requerido es menor. Con la cual cosa se deduce que la contribuyente principal en el *Thrust* de nuestra ala delta es su sustentación.

En este caso distinto, se representa la deformación de la estructura frente a este aumento de cargas. En efectivo, esto hace variar las tensiones en cada elemento de barra.

Obsérvese la Tabla 8. Globalmente, los valores de cada elemento de barra han sufrido un aumento. Asimismo, debido a este aumento de tensión resulta que se debe comprobar si se ha inducido cierto pandeo en las barras. En efectivo, el riesgo de pandeo aumenta si la carga aplicada es mayor. Por consiguiente, fíjense que de los elementos que sufren compresión (2, 3, 4, 5, 6), concretamente, los elementos 4 y 6. Tal y como se sospechaba, el aumento de carga ha causado pandeo en estas barras pues $\sigma > \sigma_{cr}$.

Trazado de la estructura deformada con el esfuerzo de cada barra tanto para el estándar condiciones y la nueva situación en cuestión 3.

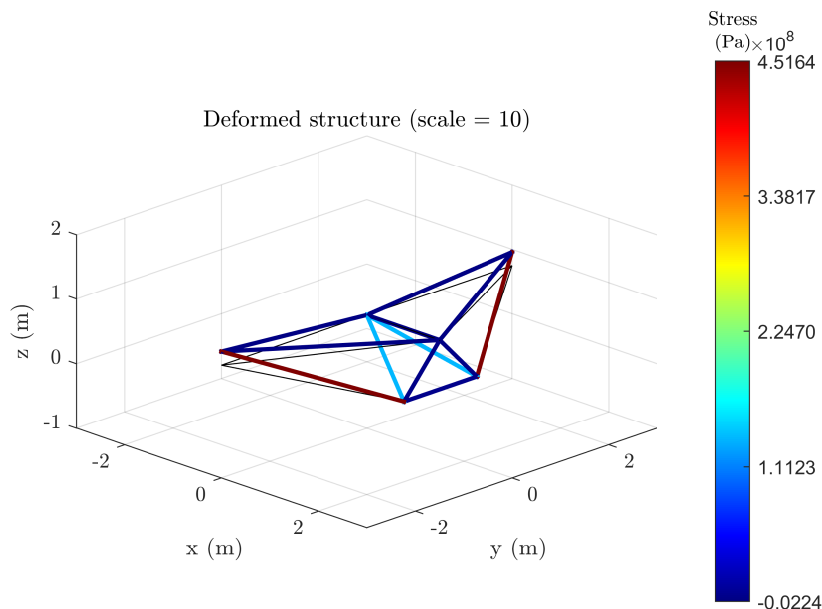


Figura 9 Tensiones y estructura deformada en el problema B3

Elemento	σ (MPa)	σ_{cr} (MPa)
1	2,395	8,943
2	-0,439	8,943
3	-1,388	1,789
4	-2,241	2,236
5	-1,388	1,789
6	-2,241	2,236
7	0,783	17,886
8	0,783	17,886
9	135,92	0,146
10	135,92	0,146
11	451,637	0,063
12	451,637	0,063

Tabla 8 Tensión y tensión crítica de pandeo para cada elemento en el problema B3

Barras con riesgo de pandeo en cada situación (si existe) junto con la propuesta solución para evitarlo (proporcionar prueba).

En el caso *B1*, se ha comprobado que no existe efecto de pandeo. No obstante, al incrementar las cargas aerodinámicas en un 25 % se puede comprobar que existe pandeo, por lo que se compromete la integridad de la estructura. En consecuencia, si se requiere solucionar el efecto del pandeo, basta con recurrir a su definición matemática y ver de qué es función la tensión crítica de Euler [Ecuación 26].

De modo que,

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cr} f(E, I, A, l) \quad (27)$$

Esto indica que para solucionar el problema, se puede alterar cualquiera de los parámetros de descritos en la parte superior.

- **Módulo de Young E :** Una propuesta sería el cambio del material utilizado en la estructura. Este debe tener un módulo elástico mayor para que el riesgo de pandeo disminuya. Sin embargo, es común en el campo de la ingeniería que no existan materiales con un módulo de Young mayor. Dicho de otra manera, materiales con más E pueden tener menores propiedades en cuando a la dureza, ductilidad etc,. La mayor desventaja es el coste económico que supone esta solución.
- **Segundo Momento de Área I :** Tratándose del segundo momento de área resulta complicado jugar con este parámetro ya que tienen en cuenta la distribución de masa del elemento y de la orientación.
- **Área A y longitud de la sección l :** La sección y longitud de los elementos de barra son el parámetro más fácil de alterar pues se sigue usando el mismo material. Si nos fijamos, la tensión crítica es inversamente proporcional al área e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud. Este rasgo ya sugiere que la longitud de la barra juega un papel clave el pandeo. En efecto, aumentar la sección reduce esta no linealidad geométrica.

La solución propuesta es aumentar la sección. En un primer intento, se ha comprobado que aumentando el diámetro de la sección exterior del material 1 en tan sólo 1 mm más, se logra evitar el efecto no lineal del pandeo.

Ejecutando de nuevo el código y sustituyendo el dato geométrico D1:

```
1 % Geometric data
2 L = 0.75;
3 B = 3;
4 H = 0.75;
5 D1 = 22e-3; % Addition of 1 mm in D1 (previous was 21e-3)
6 d1 = 5e-3;
7 D2 = 2e-3;
```

El resultado de aplicar esta nueva condición [Figura 10 y Tabla 9] muestran cómo se anula el efecto del pandeo.

La estructura en esta nueva configuración de barras y materiales (con el aumento nuevo de sección) alcanza las competencias necesarias como para evitar el riesgo a pandeo de la ala delta.

Como comentario adicional, es destacable mencionar que todas las barras del material de tipo 1 tienen propiedades parecidas al del acero, y queda demostrado que no sufrirían falla por pandeo crítico en ninguna de las situaciones analizadas anteriormente. Estas barras son las cruciales en el análisis estructural pues resisten todos los esfuerzos a compresión. Por otra parte, las barras del tipo 2 se asemeja más a un material de soporte como por ejemplo una cuerda. Este material, por el contrario, tiene la función, en general, de soportar esfuerzos de tracción.

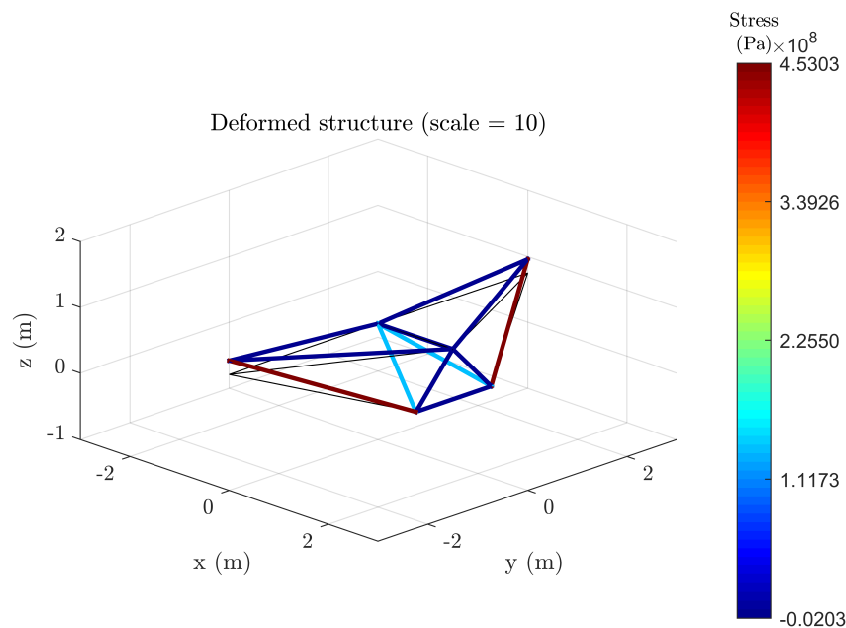


Figura 10 Representación gráfica de la deformación de la estructura ampliando la sección del material 1 para anular el efecto del pandeo

Elemento	σ (MPa)	σ_{cr} (MPa)
1	2,184	9,768
2	-0,387	9,768
3	-1,269	1,954
4	-2,030	2,442
5	-1,269	1,954
6	-2,030	2,442
7	0,708	19,536
8	0,708	19,536
9	135,205	0,146
10	135,205	0,146
11	453,026	0,063
12	453,026	0,063

Tabla 9 Tensión y tensión crítica de pandeo para cada elemento en el problema B3

Referencias

- [1] National Aviation Space Agency. *Unbalaanced Forces*. Feb. de 2020. URL: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/BGP/smotion.html>.