ESTRUCTURAS AEROESPACIALES ASIGNACIÓN 8

Estudiantes: PEDRO LÓPEZ SANCHA, YI QIANG JI ZHANG

Profesores: DANIEL YAGO, JUAN CARLOS CANTE

Ingeniería en Tecnologías Aeroespaciales Escuela Superior de Ingeniería Industrial, Aeroespacial y Audiovisual de Terrassa Universitat Politècnica de Catalunya

29 de noviembre de 2020

Índice

| 1. | Intr | coducción | 3 | | | |
|------------|--|---|----|--|--|--|
| 2 . | Cál | Cálculos previos | | | | |
| | 2.1. | Sección A | 4 | | | |
| | | 2.1.1. Cálculo de la área transversal | 4 | | | |
| | | 2.1.2. Cálculo de los segundos momentos de área | 4 | | | |
| | 2.2. | Sección B | 5 | | | |
| | | 2.2.1. Cálculo de la área transversal | 5 | | | |
| | | 2.2.2. Cálculo de los segundos momentos de área | 5 | | | |
| | 2.3. | Sección C | 6 | | | |
| | | 2.3.1. Cálculo de la área transversal | 6 | | | |
| | | 2.3.2. Cálculo de los segundos momentos de área | 6 | | | |
| | 2.4. | Cálculo de las fuerzas de reacción | 7 | | | |
| 3. | Análisis de deformaciones y esfuerzos | | | | | |
| | 3.1. | Análisis de los desplazamientos | 9 | | | |
| | 3.2. | Fuerza axil | 10 | | | |
| | 3.3. | Fuerza cortante | 10 | | | |
| | 3.4. | Momento flector | 11 | | | |
| 4. | Análisis de esfuerzos en las secciones B y C | | | | | |
| | 4.1. | Cálculo de los esfuerzos normales | 12 | | | |
| | 4.2. | Cálculo de los esfuerzos tangenciales | 12 | | | |
| | 4.3. | Sección B | 12 | | | |
| | | 4.3.1. Tramo 1–3 | 13 | | | |
| | | 4.3.2. Tramo 2–3 | 14 | | | |
| | | 4.3.3. Tramo 3–4 | 15 | | | |
| | | 4.3.4. Tramo 4–5 | 15 | | | |
| | | 4.3.5. Tramo 4–6 | 15 | | | |
| | 4.4. | Sección C | 16 | | | |
| | | 4.4.1. Tramo 1–2 | 16 | | | |
| | | 4.4.2. Tramo 2-3 | 17 | | | |
| | | 4.4.3. Contribución del momento torsor | 17 | | | |
| | 4.5. | Estudio de la sección B | 18 | | | |
| | | 4.5.1. Cálculo de los esfuerzos en el nodo 2 (elemento 2–6) $\dots \dots \dots \dots$ | 18 | | | |
| | | 4.5.2. Cálculos de los esfuerzos en el nodo 6 (elemento 2–6) | 20 | | | |

| | 4.5.3. | Distribución de esfuerzos tangenciales | 20 |
|------|--------|---|----|
| | 4.5.4. | Cálculos de los esfuerzos en el nodo 4 (elemento 4–6) | 21 |
| | 4.5.5. | Cálculo de los esfuerzos del nodo 6 (elemento 4–6) \hdots | 22 |
| 4.6. | Estudi | o de los esfuerzos de la sección C \dots | 23 |
| | 4.6.1. | Cálculos de los esfuerzos en el nodo 5 (elemento 5–6) | 23 |
| | 4.6.2. | Distribución de esfuerzos tangenciales | 24 |
| | 4.6.3. | Cálculos de los esfuerzos en el nodo 6 (elemento 5–6) | 25 |
| | 4.6.4. | Distribución de esfuerzos tangenciales | 26 |

1. Introducción

El objetivo de esta asignación 8 consiste en retomar el código de la asignación 4, incluyendo nueva sección C que sirve de soporte de unión para los puntos 5 y 6. Finalmente se quieren obtener los diagramas de esfuerzos asociados a cada elemento de la estructura. Posteriormente se comparará los resultados con la asignación 4 para analizar si el hecho de la adición del elemento (5-6) aporta una mejora en la robustez de la estructura.

La figura 1 muestra la representación esquemática del tren de aterrizaje principal de la semiala izquierda en el instante previo al aterrizaje, cuando la velocidad de la aeronave es $V=285~\rm km/h$. La estructura está constituida por un material con un módulo de Young de $E=150~\rm GPa$.

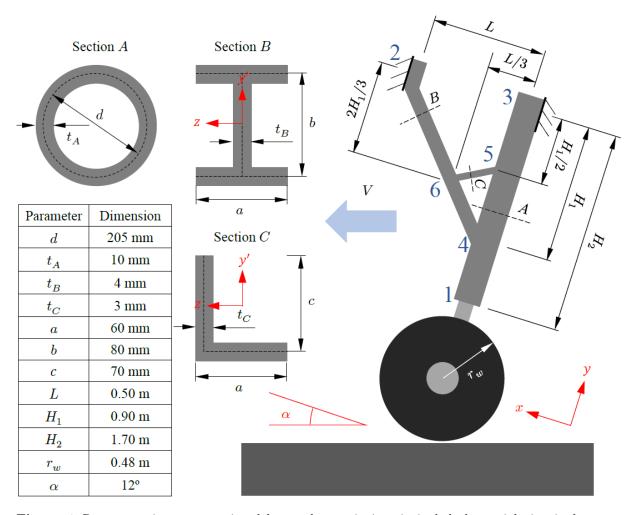


Figura 1 Representación esquemática del tren de aterrizaje principal de la semiala izquierda y sus secciones transversales. Se considera que la distancia entre el punto 1 y la pista de aterrizaje es lo suficientemente pequeña para suponer que las cargas se aplican directamente en el punto 1.

2. Cálculos previos

Suponiendo que las secciones B y C son de pared delgada ($t \ll a, b, c$) para las vigas 2-4 y 6-5, respectivamente, calcule las áreas e inercias en la dirección z de las secciones transversales. Calcular las fuerzas normal N y de fricción F, considerando que la rueda tiene un momento de inercia de $I_0 = 330~{\rm kg\,m^2}$ y que tarda un tiempo de $t = 0.95~{\rm s}$ en alcanzar su máxima velocidad de giro. Considere que el coeficiente de fricción entre el neumático y la pista es $\mu = 0.4$.

El tren de aterrizaje de la Figura 1 muestra que este está compuesto de tres secciones transversales diferentes. El elemento 1-3 pertenece a una estructura de sección transversal en forma tubular, mientras que la barra 2-4 que soporta lateralmente y se encuentra fijada en el punto 4 a la barra 1-3 tiene una sección en doble T y finalmente, se introduce una nueva barra de elemento 5-6 de apoyo la cual tiene una sección en forma de L.

Los cálculos posteriores se harán suponiendo vigas de perfil delgado, por lo que $t \ll a$, b, c, y t es el espesor de cualquiera de las vigas de las secciones. Por tanto, se despreciaran los términos con potencias de t frente a potencias de a, b i c. Todos los cálculos se realizarán respecto la línea media del perfil.

2.1. Sección A

La sección A se trata de una estructura tubular con diámetro d y espesor t_A .

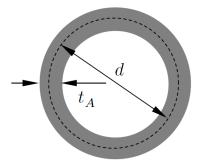


Figura 2 Sección A

2.1.1. Cálculo de la área transversal

En cuanto a las áreas de la sección circular y sección en doble T, se calcularán como diferencia de las secciones. En el primero, el área del anillo puede ser expresada como la diferencia entre la sección de la circunferencia exterior y la interior, quedando al final la sección de la parte coloreada.

$$A_{A} = \underbrace{\frac{\pi}{4} \cdot (d + t_{A})^{2}}_{\text{Circunferencia}} - \underbrace{\frac{\pi}{4} \cdot (d - t_{A})}_{\text{Circunferencia}} = \pi dt_{A}$$

$$A_{A} = 6,4403 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{2}$$

$$(1)$$

2.1.2. Cálculo de los segundos momentos de área

El momento de inercia de la sección transversal de la sección circular se puede obtener con $I_z = \frac{\pi}{4}r^4$, además, por simetría son iguales en cada eje. Por consiguiente, es fácil obtener el segundo momento de

área con la diferencia de las dos circunferencias:

$$I_{xx, A} = I_{zz, A} = \frac{\pi}{4} \left[\underbrace{\left(\frac{d + t_A}{2}\right)^2}_{\text{Circunferencia}} - \underbrace{\left(\frac{d - t_A}{2}\right)^2}_{\text{Circunferencia}} \right]$$

$$I_{xx, A} = 3,3912 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{zz, A} = 3,3912 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

2.2. Sección B

En esta sección B, se procederá a calcular la sección mediante tres rectángulos considerando su línea media dada la hipótesis de vigas de perfil delgado.

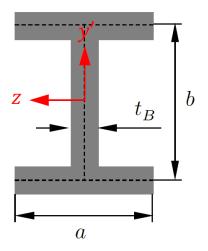


Figura 3 Sección B

2.2.1. Cálculo de la área transversal

El área transversal de la sección en doble T es:

$$A_{B} = \underbrace{2a \cdot t_{B}}_{\text{Rectángulos}} + \underbrace{bt_{B}}_{\text{Rectángulo}} = (2a + b) t_{B}$$

$$\underbrace{A_{B} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{2}}_{\text{rectángulo}}$$
(3)

2.2.2. Cálculo de los segundos momentos de área

Momento de inercia de la sección transversal de la sección en doble T se puede obtener con la suma de los momentos de inercia de las dos alas y el alma principal:

$$I_{z, \text{Ala}} = \underbrace{\frac{1}{12} t_B^3 a}_{\text{Inercia}} + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2 t_B a}_{\text{Traslado}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{12} t_B^3 a}_{\text{respecto CG}} + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2 t_B a}_{\text{por Steiner}}$$
(4)

Cabe mencionar que los términos en rojo indican que la contribución de t^3 son despreciables frente a los otros. Asimismo, esta contribución del momento de inercia es igual para ambas alas superior e inferior.

Paralelamente, la inercia del alma se determina mediante:

$$I_{z, \text{Alma}} = \frac{1}{12} b^3 t_B \tag{5}$$

De modo que la inercia total de la sección es la suma de las contribuciones de cada término

$$I_{z, B} = 2 \cdot I_{z, Ala} + I_{z, Alma}$$
 (6)

$$I_{z, B} = 9,3867 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

2.3. Sección C

Se introduce una nueva sección C que sirve de refuerzo en los puntos 5–6 de la estructura. Esta nueva sección tiene forma de L y no presenta simetría tal y como se ilustra a continuación.

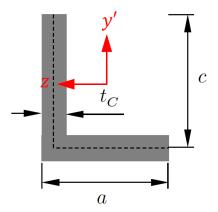


Figura 4 Sección C

2.3.1. Cálculo de la área transversal

Por último, el área de la sección en L se puede obtener como la suma de áreas de dos rectángulos. Recordemos que los cálculos se hacen a través de la línea media.

$$A_{C} = \underbrace{\left(a - \frac{t_{C}}{2}\right) t_{C}}_{\text{Rectángulo}} + \underbrace{ct_{C}}_{\text{Rectángulo}}$$

$$\text{vertical}$$

$$A_{C} = 3,855 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{2}$$

$$(7)$$

2.3.2. Cálculo de los segundos momentos de área

Seguidamente, para hallar el segundo momento de área es necesario previamente determinar el centroide de la sección pues esta sección en particular no presenta ningún tipo de simetría.

En efecto, la ubicación del centroide se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$\overline{y}\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i A_i \tag{8}$$

$$\overline{z}\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i A_i \tag{9}$$

Por tanto, aplicando las expresiones anteriores es posible hallar las coordenadas del centroide, para ello se escogerá unos ejes con origen en la unión de los dos rectángulos y respetando el sentido de la Figura 4:

$$\overline{y} = \frac{A_1 \overline{y}_1 + A_2 \overline{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\left(a - \frac{t_C}{2}\right) t_C \cdot 0 + c t_C \cdot \frac{c}{2}}{\left(a - \frac{t_C}{2}\right) t_C + c t_C} = \frac{\frac{c^2}{2}}{a - \frac{t_C}{2} + c} = 19,0661 \text{ mm}$$

$$\overline{z} = \frac{A_1 \overline{z}_1 + A_2 \overline{z}_2}{A_1 + A_2} = \frac{-\left(a - \frac{t_C}{2}\right) t_C \left(\frac{a - \frac{t_C}{2}}{2}\right) + c t_C \cdot 0}{\left(a - \frac{t_C}{2}\right) t_C + c t_C} = \frac{-\frac{1}{2} \left(a - \frac{t_C}{2}\right)^2}{a - \frac{t_C}{2} + c} = -13,3161 \text{ mm}$$

Una vez se ha hallado las coordenadas del centroide, a continuación es posible calcular los segundos momento de área. Debido a la asimetría de la pieza, es conveniente encontrar los momentos de inercia principales I_{zz} , I_{yy} e I_{zy} . De nuevo, los términos en rojo se despreciarán por hipótesis de pared delgada. El momento de inercia principal respecto del eje \hat{y} ,

$$I_{yy,C} = \underbrace{\frac{1}{12} \left(a - \frac{t_C}{2} \right)^3 t_C + (a - \overline{z})^2 \left[\left(a - \frac{t_C}{2} \right) t_C \right]}_{\text{Rectángulo horizontal}} + \underbrace{\frac{1}{12} t_C^3 c + \overline{z}^2 c t_C}_{\text{Rectángulo vertical}}$$
(10)

En cuanto al la inercia principal del eje \hat{z} ,

$$I_{zz,C} = \underbrace{\frac{1}{12} t_C^3 \left(a - \frac{t_C}{2} \right) + \overline{y}^2 \left[\left(a - \frac{t_C}{2} \right) t_C \right]}_{\text{Rectángulo horizontal}} + \underbrace{\frac{1}{12} c^3 t_C + \left(\frac{c}{2} - \overline{y} \right)^2 c t_C}_{\text{Rectángulo vertical}}$$
(11)

Y por último, el producto de inercia I_{xy} obsérvese que sóno se consideraran los términos de traslado por Steiner pues la contribución del producto de inercia respecto al propio eje de los rectángulos son nulos respecto el propio centroide.

$$I_{zy,C} = \overline{y}(a - \overline{z}) \left(a - \frac{t_C}{2}\right) t_C + \overline{y} \left(\frac{c}{2} - \overline{y}\right) ct_C$$
Rectángulo horizontal
Rectángulo vertical

2.4. Cálculo de las fuerzas de reacción

Con el objetivo de calcular las fuerzas normales N_y y de fricción F, se plantea la segunda ley de Newton de la dinámica en el centro de la rueda con el diagrama de sólido libre en la rueda de la Figura

$$\sum \vec{M} = I_0 \cdot \vec{\alpha} \tag{13}$$

En este caso, la única fuerza que genera momento es la fuerza de fricción. Particularizando, la ecuación queda

$$F_f \cdot r_w = I_0 \cdot \alpha \tag{14}$$

$$(\mu \cdot N_y) \cdot r_w = I_0 \cdot \alpha \tag{15}$$

donde α es la norma de la aceleración angular de la rueda, que se define de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{V/r_w}{\Delta t} \tag{16}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación 15 se obtienen la fuerza normal y la fuerza de fricción:

$$N_y = \frac{I_0 \frac{V}{r_w \Delta t}}{r_w \mu} = 2,9839 \cdot 10^5 \text{ N}$$
$$F = \mu \cdot N_y = 1,1936 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F = \mu \cdot N_y = 1,1936 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Por último, es interesante conocer los valores de las reacciones causadas por las fuerzas externas. Si se descomponen las fuerzas externas,

$$F_{\text{ext}, \hat{x}} = -F \cos \alpha + N \sin \alpha = -5{,}4710 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$F_{\text{ext}, \hat{y}} = F \sin \alpha + N \cos \alpha = 3{,}1669 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Una vez obtenidos las reacciones, es preciso comparar los valores de esta nueva estructura con a estructura del Assignent A04, esta se resume en la tabla 1.

La Tabla 1 muestra la evolución de los valores numéricos de las fuerzas.

| Fuerza | Assignment 4 | Assignment 8 |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--|
| Rozamiento F (N) Normal N (N) | $5,9508 \cdot 10^4 1,8596 \cdot 10^5$ | $1,1936\cdot 10^5 \\ 2,9839\cdot 10^5$ |

Tabla 1 Comparativa de las fuerzas externas

Como comentarios a esta reducción de la fuerza F, se puede observar que se debe a una reducción de la envergadura de la rueda y a a su vez, a un aumento de la inercia de la rueda. Esto se explica que para realizar el mismo momento, si se reduce la distancia del punto de aplicación la fuerza F, y debido al aumento de la inercia, con la cual cosa, más resistencia tiene el sólido a rotar induce que la fuerza de reacción normal por lo que en conjunto hace incrementar la fuerza Normal y por consiguiente la fuerza de rozamiento. También se puede atribuir una influencia del la velocidad V y el Δt .

3. Análisis de deformaciones y esfuerzos

Implemente un código en MATLAB para calcular el desplazamiento, rotación, y las distribuciones de fuerza cortante y momento flector en la estructura para las condiciones dadas en la figura 1.

A continuación, empleando el código adjunto y añadiendo todos los elementos de la estructura al programa de resolución de MATLAB se determinarán los desplazamientos de los nodos así como los esfuerzos y las distribuciones.

3.1. Análisis de los desplazamientos

La Figura 5 ilustra las deformaciones y los desplazamientos que sufre la estructura una vez aplicadas las fuerzas mencionadas anteriormente.

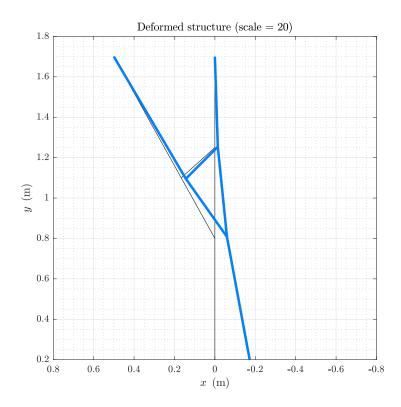


Figura 5 Representación de la estructura no deformada (negro) y deformada (azul). Escala de la deformación: 20 : 1.

Observando la figura 5 de desplazamientos, se hace evidente el desplazamiento del nodo 1 en la coordenada \hat{x} y en sentido negativo, es decir, hacia la derecha. Por añadidura, aunque no se aprecia del todo, el nodo 1 también sufre un ligero desplazamiento vertical en sentido positivo de las \hat{y} . Sin embargo, este desplazamiento es mucho menor que el horizontal, pues es casi 16 veces más pequeño que del desplazamiento en \hat{x} . Consecuentemente, este desplazamiento vertical induce un giro en el nodo 1 que a su vez, también tiene una carácter reducido pues es del orden de -5° aproximadamente.

Con respecto a las fuerzas externas, es preciso indicar que pese a que la fuerza resultante en dirección vertical \hat{y} es mayor que la resultante en la dirección \hat{x} . No obstante, la contribución mayoritaria al desplazamiento proviene de esta última pues el brazo de palanca es mayor respecto a los nodos.

| Nodo | $u_x \text{ (mm)}$ | $u_y \text{ (mm)}$ | θ (°) |
|------|--------------------|--------------------|--------------|
| 1 | -7,048 | 0,379 | -6,032 |
| 4 | -1,622 | $0,\!241$ | -3,435 |

| 1 | -10,338 | 0,660 | -5,843 |
|---|---------|-----------|------------|
| 4 | -2,990 | $0,\!398$ | $-3,\!897$ |
| | | | |

 $u_y \text{ (mm)}$

 $u_x \text{ (mm)}$

 θ (°)

Tabla 2 Desplazamiento en $x(u_x)$, en $y(u_y)$ y rotación (θ) para los nodos 1 y 4 en el Assignment A04.

Tabla 3 Desplazamiento en $x(u_x)$, en $y(u_y)$ y rotación (θ) para los nodos 1 y 4 en el Assignment A08.

Cabe recordar que el esfuerzo cortante se define como la derivada del momento flector cambiada de signo, esto es,

Nodo

$$T_y = -\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} \tag{17}$$

Los resultados del diagrama reflejan esta definición. Donde el momento flector es lineal y positivo, el cortante muestra un valor constante negativo y viceversa. En el diagrama de momento flector del elemento 2–4, no existe ningún salto, lo que indica la ausencia de momentos libres externos aplicados en el nodo 4.

Una vez obtenidos los diagramas de esfuerzo de toda la estructura, el siguiente paso del análisis es determinar qué sección es la más solicitada. En efecto, la sección más solicitada es la situada en el nodo 4, pues el momento flector presenta un máximo.

Una vez encontrada la sección más solicitada, el siguiente punto de estudio es encontrar la fibra más solicitada mediante la ecuación de Navier-Bernouilli, tomando los puntos más alejados del eje neutro.

Con la finalidad de hacer una comparativa, en la tabla 2 también se han introducido los valores de la asignación previa sin la sección C. Esta vez, se ve claramente cómo se incrementa el desplazamiento en \hat{x} , y a su vez, el desplazamiento en \hat{y} aunque el giro en el nodo 1 es menor.

Los resultados obtenidos gráficamente se pueden observar en la Figura 5. Acudiendo a los valores numéricos, estas se encuentran resumidas en la siguiente tabla 3.

3.2. Fuerza axil

En el comportamiento de los elementos 1-3 se aprecian que están sometidos a una fuerza de compresión de 316 kN aproximadamente, debido al signo negativo que aparece. Además, la fuerza de compresión se mantiene con un incremento notorio en el elemento 4-5 con un valor aproximado de -423 kN debido a una bifurcación de la sección en dos tramos distintos. Mientras, el comportamiento de los nodos 5-3 siguen la tendencia compresiva y se mantienen en un valor de -432 kN similar al tramo adyacente.

Por otra parte, de manera totalmente contraria, los elementos 2–6 con un valor de 131 kN y 6–4 están sometidos a un esfuerzo de tracción. Es importante remarcar que se trata de una fuerza de un orden de magnitud menor que la compresión, de unos 124 kN aproximadamente. Asimismo, el comportamiento global de los elementos 2–4 presentan un comportamiento uniforme y prácticamente iguales en magnitud.

Posteriormente, en el caso de la viga 5–6 existe una fuerza de compresión -7.8 kN. No obstante, esta fuerza de compresión es mucho menor que las fuerzas de los otros elementos pues no llega a los $-8 \cdot 10^3$ kN.

3.3. Fuerza cortante

Por lo que a la fuerza cortante se refiere, se puede observar que existen varios saltos de cortante y distintos cambios de signo. Por ejemplo, la viga 1-4 sufre un cortante de -55 kN pero al llegar a la bifurcación, este da un salto para llegar a los 9.2 kN, por lo que se reduce el estrés de la viga para mantenerse a ese valor constante. Lo mismo ocurre con los nodos 2-6 y 2-4, esta vez, de forma que primeramente es positivo y luego salta a un valor negativo.

Finalmente, el cortante de la sección C se mantiene en un orden de magnitud similar al tramo 2-4 y por debajo de los elementos 1-3.

3.4. Momento flector

Posteriormente, el carácter del momento flector sigue una progresión lineal en todos los elementos. Cabe destacar 2 puntos donde el momento es nulo (punto 0) y el nodo 2 donde el momento casi es nulo. Esto indica que se puede sustituir ese extremo libre por una rótula. Analizando con más detalle, el nodo sometido a más flector es la sección del nodo 4 de la barra 1–4 llegando a superar los 43 kNm. Es precisamente ese punto, el punto de máxima solicitud, no es de extrañar pues se trata del punto de bifurcación. En el elemento 2–6, se tiene a aumentar el valor del flector hasta llegar al nodo 6 en la que se produce un salto de momentos, lo que indica la existencia de momentos internos. Luego, el flector disminuye prestamente.

4. Análisis de esfuerzos en las secciones B y C

En las secciones B y C, calcule y represente las distribuciones de esfuerzo cortante (τ) y esfuerzo normal (σ) en los nodos 2, 4, 6 y 5.

4.1. Cálculo de los esfuerzos normales

El esfuerzo normal se obtiene incluyendo las contribuciones del axil N, y los momentos flectores M_z y M_y . Esta expresión se ilustra a continuación y se conoce como ecuación de Navier-Bernouilli:

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z$$
(18)

4.2. Cálculo de los esfuerzos tangenciales

Los esfuerzos tangenciales se obtienen a partir del flujo de cortadura q(s):

$$q(s) = A \int_0^s ty(s) \, ds + B \int_0^s tz(s) \, ds \tag{19}$$

donde

$$A = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \tag{20}$$

$$A = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}$$

$$B = -\frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}$$
(20)

Y por tanto,

$$q(s) = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \int_0^s ty(s) \, ds - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \int_0^s tz(s) \, ds$$
 (22)

La expresión anterior se ha adaptando por los ejes que se presentan en este ejercicio, esto es, cambiando las variables x por y, y las variables y por z.

Con fin de simplificar los cálculos, las integrales se pueden sustituir por los el producto del área por la distancia, pues representan el primer momento estático:

$$\int_0^s ty(s) \, ds = A_i \overline{y}_i \tag{23}$$

$$\int_0^s tz(s) \, ds = A_i \overline{z}_i \tag{24}$$

Como se trata de un problema 2D, de las expresiones anteriores sólo hay una contribución de S_y pues $S_z = 0$ dada la hipótesis de problema bidimensional.

A continuación, se presenta los diagramas de esfuerzo de todas las secciones de lso correspondientes elementos 6.

4.3. Sección B

La sección B presenta simetría respecto el eje \hat{y} con lo que el producto de inercia $I_{yz}=0$. De este modo, particularizando la expresión anterior, se consigue simplificar el problema.

En la Figura 7 se ilustra la sección B y el sentido del flujo de cortadura para la cual se ha calculado el flujo cortante.

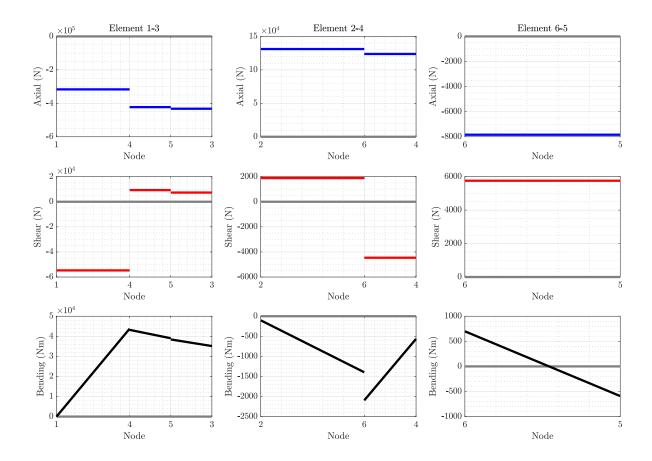


Figura 6 Distribuciones de fuerzas axil, cortante y momento flector en los elementos de la estructura.

Como la sección tiene simetría respecto del eje \hat{y} , el producto de inercia $I_{zy}=0$ es nulo. De modo que A y B se reducen a:

$$A = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = -\frac{S_y}{I_{zz}}$$
 (25)

$$A = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = -\frac{S_y}{I_{zz}}$$

$$B = -\frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = -\frac{S_z}{I_{yy}}$$
(25)

4.3.1. Tramo 1-3

El momento estático de este tramo se calcula como:

$$m_{y_{13}}(s) = \overline{z}_{12}(s)A_{12}(s) = -\left(\frac{a}{2} - \frac{s}{2}\right)st_B$$

 $m_{z_{13}}(s) = \overline{y}_{12}(s)A_{12}(s) = -\frac{b}{2}st_B$

donde \overline{z}_{12} y \overline{y}_{12} es la distancia respecto del centroide de la sección del tramo considerado a la la distancia respecto del centroide global de la sección y tomando como ejes de coordenadas los ejes locales que se muestran en la figura.

Seguidamente, la distribución flujo de cortante se expresa de la siguiente forma:

$$q_{13}(s) = \left[\frac{S_z}{I_{yy}} (a - s) + \frac{S_y}{I_{zz}} b \right] \frac{st_B}{2} \text{ para } 0 \le s \le a/2$$
 (27)

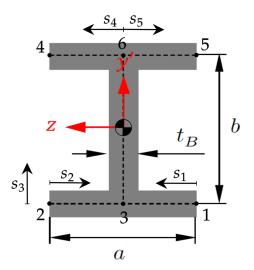


Figura 7 Sentido de avance de los flujos de cortadura en la sección B.

Luego, es posible obtener la distribución del esfuerzo cortante:

$$\tau_{13}(s) = \frac{q_{13}(s)}{t_B} \tag{28}$$

En particular, el valor de la distribución del flujo cortante en 2 es:

$$q_{13}|_{s=a/2} = \bar{q_2} = \left[\frac{S_z}{I_{yy}}\frac{a}{2} + \frac{S_y}{I_{zz}}b\right]\frac{at_B}{4}$$

4.3.2. Tramo 2-3

Por simetría, el momento estático de este tramo es idéntico al anterior, sin embargo de signo contrario porque se encuentra en sentido positivo del eje \hat{z} , mientras que en \hat{y} se mantiene igual:

$$m_{y_{23}}(s) = -m_{y_{13}}(s) = \left(\frac{a}{2} - \frac{s}{2}\right) st_B$$

 $m_{z_{23}}(s) = m_{z_{12}}(s) = -\frac{b}{2} st_B$

De forma análoga al proceso anterior la distribución de flujo de cortante obtenida es la siguiente:

$$q_{23}(s) = \left[-\frac{S_z}{I_{yy}}(a-s) + \frac{S_y}{I_{zz}}b \right] \frac{st_B}{2} \text{ para } 0 \le s \le a/2$$
 (29)

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{23}(s) = \frac{q_{23}(s)}{t_B} \tag{30}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 2 es de:

$$q_{13}|_{s=a/2} = q_2^+ = \left[-\frac{S_z}{I_{yy}} \frac{a}{2} + \frac{S_y}{I_{zz}} b \right] \frac{at_B}{4}$$

4.3.3. Tramo 3-4

Para el tramo 3–4, el momento estático en \hat{z} , esto es $m_z = 0$ directamente porque la distancia entre el centroide de la sección considerada y la total es nula.

$$m_{y_{34}}(s) = \overline{z}_{34}(s)A_{34}(s) = 0$$

$$m_{z_{34}}(s) = \overline{y}_{34}(s)A_{34}(s) = -\frac{b-s}{2}st_B$$

La distribución de flujo de cortante es la siguiente, obsérvese que se le debe añadir la contribución del flujo de los tramos 1–3 y 2–3 previamente calculados.

$$q_{34}(s) = q_2^- + q_2^+ + \frac{S_y}{I_{zz}} \frac{b-s}{2} s t_B \quad \text{para} \quad 0 \le s \le b$$
 (31)

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{34}(s) = \frac{q_{34}(s)}{t_B} \tag{32}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 4 es de:

$$q_{34}|_{s=b} = q_4 = q_2^- + q_2^+ = \frac{S_y}{I_{zz}} b \frac{at_B}{2}$$

4.3.4. Tramo 4–5

De forma similar se procede al cálculo de los momentos estáticos donde ambas distancias son positivas respecto cada eje \hat{z} y \hat{y} :

$$m_{y_{45}}(s) = \overline{z}_{45}(s)A_{45}(s) = \frac{s}{2}st_B$$

$$m_{z_{45}}(s) = \overline{y}_{45}(s)A_{45}(s) = \frac{b}{2}st_B$$

La distribución de flujo de cortante es la siguiente, obsérvese que se le debe añadir la contribución del flujo de los tramos 1–3 y 2–3 y además, la mitad del flujo en el punto 4 previamente calculados.

$$q_{45}(s) = \frac{q_4}{2} - \frac{st_B}{2} \left[\frac{S_y}{I_{zz}} b + \frac{S_z}{I_{yy}} s \right] \quad \text{para} \quad 0 \le s \le a/2$$
 (33)

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{45}(s) = \frac{q_{45}(s)}{t_B} \tag{34}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 5 es de:

$$q_{45}|_{s=\frac{a}{2}} = q_5 = 0$$

4.3.5. Tramo 4-6

Análogamente, se procede al cálculo de los momentos estáticos donde ambas distancias son negativas respecto cada eje \hat{z} y positiva respecto \hat{y} :

$$m_{y_{46}}(s) = \overline{z}_{46}(s)A_{46}(s) = -\frac{s}{2}st_B$$

$$m_{z_{46}}(s) = \overline{y}_{46}(s)A_{46}(s) = -\frac{b}{2}st_B$$

La distribución de flujo de cortante es la siguiente, obsérvese que se le debe añadir la contribución del flujo de los tramos 1–3 y 2–3 y además, la mitad del flujo en el punto 4 previamente calculados.

$$q_{46}(s) = \frac{q_4}{2} - \frac{st_B}{2} \left[\frac{S_y}{I_{zz}} b + \frac{S_z}{I_{yy}} s \right] \quad \text{para} \quad 0 \le s \le a/2$$
 (35)

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{46}(s) = \frac{q_{46}(s)}{t_B} \tag{36}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 5 es de:

$$q_{46}|_{s=\frac{a}{2}} = q_6 = 0$$

4.4. Sección C

A continuación, se evalúa la sección C presentada en la Figura 8:

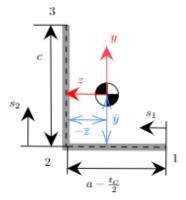


Figura 8 Sentido de avance de los flujos de cortadura en la sección C.

4.4.1. Tramo 1–2

A continuación se determina el momento estático de este tramo, de nuevo, se considera los ejes de coordenadas locales para realizar los cálculos:

$$m_{y_{12}}(s) = \overline{z}_{12}(s)A_{12}(s) = -\overline{y}st_C$$

$$m_{z_{12}}(s) = \overline{y}_{12}(s)A_{12}(s) = -\left[\left(a - \frac{t_C}{2} + \overline{z}\right) + \frac{s}{2}\right]st_C$$

Por tanto, la distribución de flujo de cortante es la siguiente:

$$q_{12}(s) = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} st_C(-\overline{y}) - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} st_C\left[-\left(a - \frac{t_C}{2} + \overline{z}\right) + \frac{s}{2}\right], \quad 0 \le s \le a - \frac{t_C}{2} \quad (37)$$

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{12}(s) = \frac{q_{12}(s)}{t_C} \tag{38}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 2 es de:

$$\left. q_{12} \right|_{s=a-\frac{t_C}{2}} = q_2 = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \left(a - \frac{t_C}{2} \right) t_C \left(-\overline{y} \right) - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \left(a - \frac{t_C}{2} \right) t_C \left(-\frac{a}{2} + \frac{t_C}{4} - \overline{z} \right) t_C \left(-\frac{a}{2} +$$

4.4.2. Tramo 2-3

Siguiendo la misma línea, el momento estático de este tramo es el siguiente:

$$m_{y_{12}}(s) = \overline{z}_{12}(s)A_{12}(s) = -\left[\overline{y} + \frac{s}{2} - \overline{z}\right]st_C$$
$$m_{z_{12}}(s) = \overline{y}_{12}(s)A_{12}(s) = -\overline{z}st_C$$

Por tanto, la distribución de flujo de cortante es la siguiente, nótese que se añade la contribución del tramo 1–2:

$$q_{23}(s) = q_{12} \Big|_{s=a-\frac{t_C}{2}} - \frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} st_C \left(-\overline{y} + \frac{s}{2} \right) - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} st_C(-\overline{z})$$
(39)

Por consiguiente, la distribución de esfuerzo cortante obtenido es:

$$\tau_{23}(s) = \frac{q_{23}(s)}{t_C} \tag{40}$$

En particular, el flujo de cortante en el punto 3 es de:

$$q_{23}\big|_{s=c} = -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} ct_C \left(-\overline{y} + \frac{c}{2}\right) - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} ct_C (-\overline{z}) + q_{12}\big|_{s=a-\frac{t_C}{2}}$$

Sustituyendo la expresión de $q\big|_{s=a-\frac{t_C}{2}}$, el flujo de cortadura resultante tiene la siguiente forma:

$$\begin{split} \left.q_{23}\right|_{s=c} &= -\frac{S_y I_{yy} - S_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} t_C \left[c \left(-\overline{y} + \frac{c}{2}\right) - \overline{y} \left(a - \frac{t_C}{2}\right)\right] \\ &\qquad \qquad - \frac{S_z I_{zz} - S_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} t_C \left[-c\overline{z} + \left(a - \frac{t_C}{2}\right) \left(-\frac{a}{2} + \frac{t_C}{4} - \overline{z}\right)\right] \end{split}$$

Cabe destacar que el flujo de cortadura en ese punto es nulo pues se trata de un extremo libre.

4.4.3. Contribución del momento torsor

En la teoría de las vigas se desprende que las cargas actúan sobre la fibra neutra, esto es, a lo largo del eje que conecta los centroides. Si el centro de cortante no coincide con el centroide, se debe incluir una carga de torsión.

Tratándose de una viga de sección abierta, hay que estudiar el centro de cortante, que se define como aquel punto sobre el cual si se aplican las cargas externas no se genera momento torsor.

En vigas cruciformes o de forma angular, el centro de cortante se sitúa en la intersección.

$$\sum M_{sc} = \int r \times \tau(s) \, dA = \int 0 \times \tau(s) \, dA = 0$$

Por tanto, el centro de cortante se localiza en la intersección de los dos tramos.

Posteriormente, el momento torsor es el siguiente:

$$M_T = S_y \xi_y = S_y(-\overline{z}) \tag{41}$$

El momento torsor y se relaciona con el momento torsor con la siguiente relación:

$$\tau_{\text{torsor}} = \pm \frac{3M_T}{st^2} \tag{42}$$

Dondes es la longitud de la línea media y t su espesor. El valor de \pm indica que puede tomar un carácter positivo o negativo aunque en módulo τ_{max} es el mismo.

4.5. Estudio de la sección B

4.5.1. Cálculo de los esfuerzos en el nodo 2 (elemento 2-6)

En la siguiente sección se analizaran los nodos 2, 6 y 4. Estos nodos pertenecen a las vigas 2–6 y 6–4. En cierto nodo en particular, se deberán estudiar el nodo de la sección perteneciente a dos elementos de barra diferentes pues hace de punto de unión en las dos partes.

4.5.1.1 Distribución de esfuerzos normales

La tensión normal se puede obtener con la ya mencionada ecuación de Navier-Bernouilli 18. Sin embargo, particularizando la ecuación para este caso, dada la simetría de la sección $I_{zy} = 0$ y teniendo en cuenta que no existe el momento flector $M_y = 0$ queda,

$$\sigma = \frac{N}{A_B} - \frac{M_z}{I_{zz}}y\tag{43}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores del área de la sección A_B , el momento de inercia I_{zz} y las fuerzas axil N y flector M_y que se pueden obtener de la Figura 9.

El eje neutro se encuentra igualando la expresión anterior a 0.

$$y_{\sigma_{\text{max}}} = 40 \text{ mm}$$

En el punto hallado es la fibra de máxima solicitación, pues se trata del punto más alejado del eje neutro.

$$\sigma_{\rm n,\ m\acute{a}x,\ 2}^{\rm B}=168,227\ \rm MPa$$

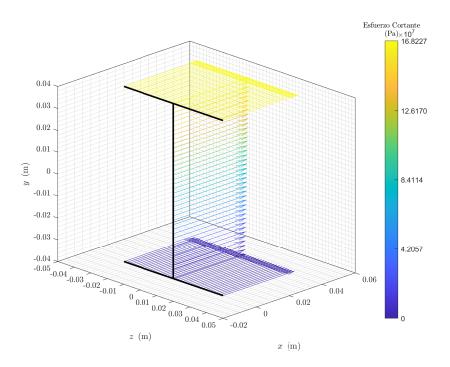


Figura 9 Distribución del esfuerzo normal en el nodo 2 del elemento 2-6

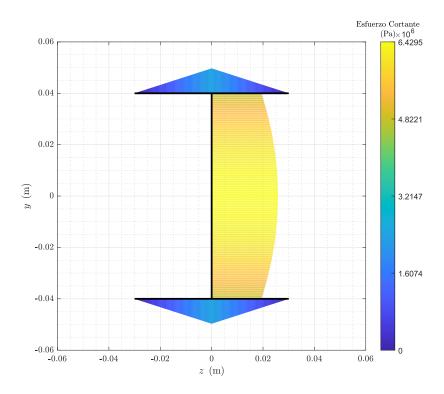
4.5.1.2 Distribución de esfuerzos tangenciales

En la sección B, siguiendo con el análisis tramo a tramo, nos encontramos con diferentes distribuciones de esfuerzo tangencial. Particularizando las expresiones para el nodo 2 del elemento 2–6 se obtiene la Figura 10

De forma teórica es elemental que el máximo de la tensión tangencial debido al flujo de cortadura se encuentra en el centroide de la pieza.

$$\tau_{\rm max,~2}^{\rm B}=6{,}4295~\rm MPa$$

Se incluye a continuación la distribución del flujo de cortante de la sección B en el punto 2 del elemento 2–6. Como se había deducido, se confirma que el máximo del esfuerzo tangencial se encuentra en el centroide. Además, las alas de la sección tienen un carácter lineal y a medida que se acercan al extremo su valor va decreciendo, pues en los extremos libres el cortante es nulo. El alma de la sección, en cambio, es de carácter parabólico y simétrico respecto al eje \hat{z} .



 ${\bf Figura~10}$ Distribución del esfuerzo cortante en el nodo 2 del elemento 2–6

4.5.2. Cálculos de los esfuerzos en el nodo 6 (elemento 2-6)

4.5.2.1 Distribución de esfuerzos normales

Análogamente, para la distribución de esfuerzos normales se acude a la ecuación de Navier-Bernouilli (18). Hay que enfatizar que pese a que el axil es constante, el momento flector varía linealmente.

Nuevamente, mediante el eje neutro se puede obtener el valor de la tensión normal máxima. El punto de máxima solicitación es:

$$y_{\sigma_{\rm max}} = 40~{\rm mm}$$

A su vez, sustituyendo en la expresión de la tensión normal se obtiene:

$$\sigma_{\text{n max, 6}}^{\text{B}} = 223,3900 \text{ MPa}$$

Una vez más, el máximo se encuentra en el punto superior pues es el punto más alejado del eje neutro. Sin embargo, la contribución del momento flector ofrece una contribución muy importante, de este modo se explica por qué la tensión normal es mayor.

La distribución de esfuerzos normales de este nodo es el siguiente:

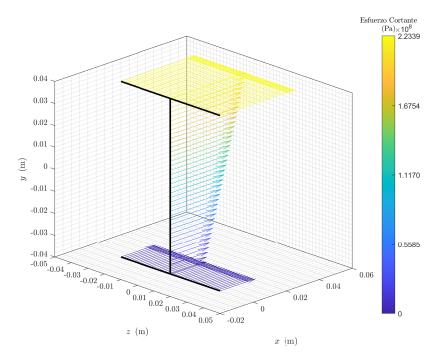


Figura 11 Distribución del esfuerzo normal en el nodo 6 del elemento 2-6

Esta gráfica corrobora las afirmaciones anteriores. A medida que se avanza en la sección se incrementa el valor de la tensión normal. En la parte superior, la cual es donde la tensión normal alcanza su máximo coincide con los puntos más alejados del eje neutro.

4.5.3. Distribución de esfuerzos tangenciales

Los valores de tensión normal en esta sección son análogos a la sección 2, pues las distribuciones de flujo cortante y, por consiguiente, de tensión tangencial son idénticos, por lo que la distribución de flujo cortante sigue siendo la de la Figura 10.

4.5.4. Cálculos de los esfuerzos en el nodo 4 (elemento 4-6)

4.5.4.1 Distribución de esfuerzos normales

La distribución de esfuerzos normales se emplea de nuevo la ecuación de Navier-Bernouilli.

La posición de la tensión máxima y la tensión máxima obtenidas mediante el eje neutro son:

$$y_{\sigma_{\text{max}}} = 40 \text{ mm}$$

A su vez, sustituyendo en la expresión de la tensión normal se obtiene:

$$\sigma_{\rm n~max,~4}^{\rm B}=178{,}7340~\rm MPa$$

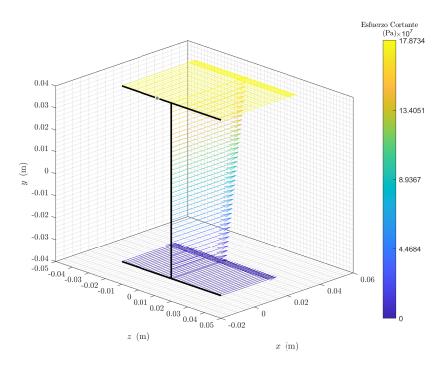


Figura 12 Distribución del esfuerzo normal en el nodo 4 del elemento 4-6

Otra vez, el punto más alejado del eje neutro es el extremo superior de la sección. La distribución del esfuerzo normal para este nodo de este elemento se presenta en la Figura 12. De nuevo, la tendencia es similar a los casos anteriores.

4.5.4.2 Distribución de esfuerzos tangenciales

En la sección B, siguiendo con el análisis tramo a tramo, nos encontramos con diferentes distribuciones de esfuerzo tangencial se presenta en la Figura 13.

De forma teórica es elemental que el máximo de la tensión tangencial debido al flujo de cortadura se encuentra en el centroide de la pieza.

$$\tau_{\mathrm{n~max,~6}}^{\mathrm{B}} = -15,2128~\mathrm{MPa}$$

La tendencia sigue siendo parabólica mientras que las alas son lineales. Sin embargo, el flujo cortante es contrario al sentido de los parámetros s del principio. Este cambio de signo se deriva del signo negativo de la tensión cortante.

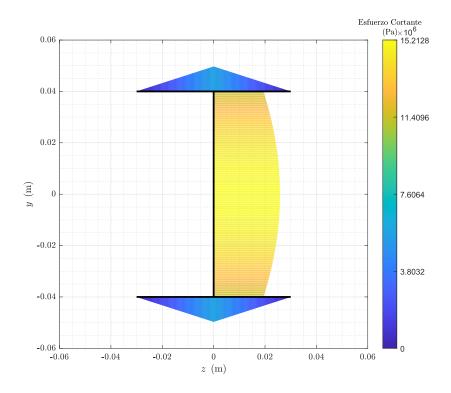


Figura 13 Distribución del esfuerzo cortante en el nodo 4 del elemento 4-6

4.5.5. Cálculo de los esfuerzos del nodo 6 (elemento 4–6)

Analizando el nodo 6 perteneciente al elemento 4–6. De modo que como el momento flector es distinto que en el elemento 2–6, la distribución de esfuerzo normal varia.

4.5.5.1 Distribución de esfuerzos normales

Acudiendo de nuevo a la ecuación de Navier-Bernouilli, y siguiendo la línea de trabajo, la posición de la tensión máxima y la tensión máxima obtenidas mediante el eje neutro son:

$$y_{\sigma_{\text{max}}} = 40 \text{ mm}$$

A su vez, sustituyendo en la expresión de la tensión normal se obtiene:

$$\sigma_{\rm n~max,~4}^{\rm B}=244~\rm MPa$$

Indiferentemente del incremento del momento flector, los puntos más alejados del eje neutro siguen coincidiendo con el área superior del ala. La distribución del esfuerzo normal para este nodo de este elemento es la siguiente 14.

La tendencia es similar a los casos anteriores. Además, cabe destacar que toda la sección se encuentra sometida a tracción.

4.5.5.2 Distribución de esfuerzos tangenciales

Como el flujo de cortante es el mismo para el nodo 4 de este elemento y el nodo 6 perteneciente al mismo elemento. La distribución de tensión tangencial es equivalente, con valores nulos en los extremos libres y el máximo en el centroide.

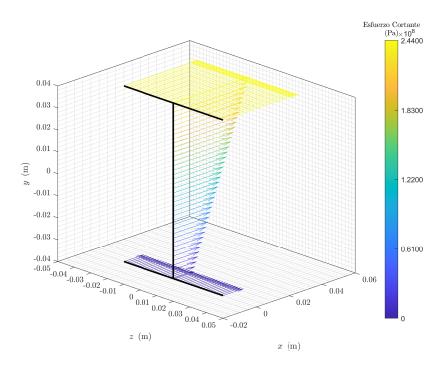


Figura 14 Distribución del esfuerzo normal en el nodo 6 del elemento 4-6

4.6. Estudio de los esfuerzos de la sección C

4.6.1. Cálculos de los esfuerzos en el nodo 5 (elemento 5-6)

Primeramente, se analizará el nodo 5 del elemento 5-6 perteneciente a la sección C.

4.6.1.1 Distribución de esfuerzos normales

Planteando la ecuación de Navier-Bernouilli (18) y teniendo en cuanta que $S_z = 0$ por tratarse de un problema bidimensional además de que no el momento flector $M_y = 0$.

$$\sigma(y,z) = \frac{N}{A_C} - \frac{M_z I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_z I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} z \label{eq:sigma_sigma}$$

Con la cual cosa, sustituyendo numéricamente por los valores de fuerzas N, M_z , las inercias I_{yy} , I_{zz} , I_{yz} , se consigue llegar a la Figura 15. La Figura que se adjunta ilustra la distribución de esfuerzos normales sobre la sección.

Igualando la expresión anterior a 0, esto es, para encontrar la expresión del eje neutro. Con la expresión del eje neutro es fácil observar que el punto más alejado es

$$y_{\sigma_{\rm max}} = 50,9339~{\rm mm}$$

$$z_{\sigma_{\rm max}} = 13,3161~{\rm mm}$$

Con esas coordenadas de la fibra más solicitada, sustituyendo de nuevo encontraremos el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{\rm n~max,~5}^{\rm C}=161,6760~\rm MPa$$

Se evidencia que la tensión máxima que soporta la fibra más solicitada se trata de una tracción. La compresión y tracción que se ve representada en la pieza es debido al momento flector.

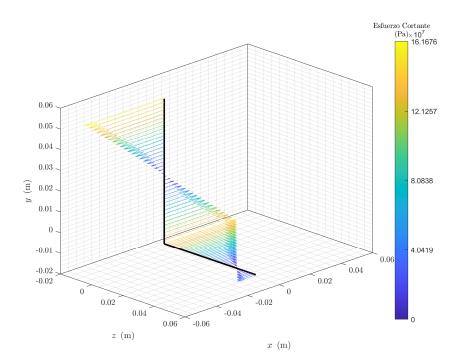


Figura 15 Distribución del esfuerzo normal en el nodo 5 del elemento 5-6

4.6.2. Distribución de esfuerzos tangenciales

Al tratarse de una sección de pared delgada abierta, la contribución a los esfuerzos tangenciales proviene no solamente de la distribución de flujo cortante sino que además, hay que añadir la contribución del efecto del momento torsor como se ha demostrado en el apartado previo.

Tomando las expresiones desarrolladas a principios de la sección en cuestión, se consigue calcular la contribución de tensión tangencial causadas por el cortante. El máximo se ubica en:

$$y_{\sigma_{\rm max}} = 9,7781~{\rm mm}$$

$$z_{\sigma_{\rm max}} = -13,3161~{\rm mm}$$

El valor asociado a ese máximo de tensión tangencial debido al cortante es

$$\tau^{\mathrm{C}}_{\mathrm{max,\ 5,\ cort}} = 36,6960\ \mathrm{MPa}$$

La distribución de los esfuerzos tangenciales debidas al cortante se ilustran en la siguiente Figura 16.

Se observa cómo el flujo cortante sigue el sentido que s había supuesto inicialmente. Además, donde τ es máximo, el esfuerzo normal σ es mínimo.

Obsérvese como, al cambiar de segmento, también cambia la concavidad de la función. La tendencia ascendente en módulo se mantiene hasta alcanzar el máximo relativo y absoluto en módulo anteriormente especificado. Una vez se ha superado esta ubicación, la función decrece hasta alcanzar nuevamente un valor nulo en el extremo, tal y como debe darse para una sección abierta.

Una vez resuelto la distribución de esfuerzos tangenciales debidas a cortante, hay que tener en cuenta los esfuerzos tangenciales debidas al momento torsor.

En particular, el valor del momento torsor es el siguiente:

$$M_T = S_y(-\overline{z}) = 76,6566 \text{ N} \cdot \text{m}$$

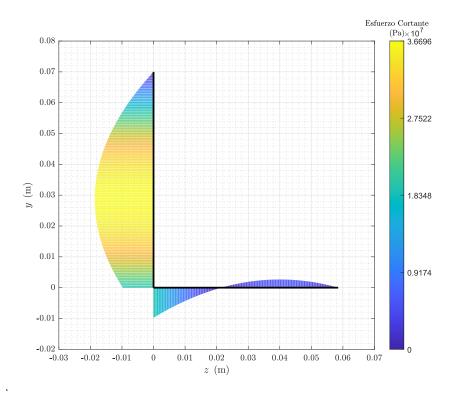


Figura 16 Distribución del esfuerzo cortante en el nodo 5 del elemento 5-6

Con el momento torsor ya calculado, es posible obtener el esfuerzo cortante con la relación del momento torsor y esfuerzo tangencial:

$$\tau_{\rm max,\ tors} = \pm \frac{3M_T}{\left(a - \frac{t_C}{2} + c\right)t_C^2} = 198,85\,{\rm MPa}$$

4.6.3. Cálculos de los esfuerzos en el nodo 6 (elemento 5-6)

4.6.3.1 Distribución de esfuerzos normales

Con la expresión de Navier, se obtiene la distribución de esfuerzo normal sustituyendo numéricamente y teniendo en cuanta que $S_z = 0$ por tratarse de un problema bidimensional además de que no el momento flector $M_y = 0$:

$$\sigma(y,z) = \frac{N}{A_C} - \frac{M_z I_{yy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_z I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2} z \label{eq:sigma_sigma}$$

Con la cual cosa, sustituyendo numéricamente por los valores de fuerzas $N,\,M_z$, las inercias $I_{yy},\,I_{zz},\,I_{yz}$ e igualando la expresión anterior a 0, esto es, para encontrar la expresión del eje neutro. Con la expresión del eje neutro es fácil observar que el punto más alejado es

$$y_{\sigma_{\rm max}} = 50,9339~{\rm mm}$$

$$z_{\sigma_{\rm max}} = 13,3161~{\rm mm}$$

Con esas coordenadas de la fibra más solicitada, sustituyendo de nuevo encontraremos el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{\rm n\ max,\ 6}^{\rm C} = 235,660 \ {\rm MPa}$$

Se observa que se trata de na fuerza de compresión y no de tracción como en el caso anterior. La Figura que se adjunta a continuación ilustra la distribución de esfuerzos normales sobre la sección.

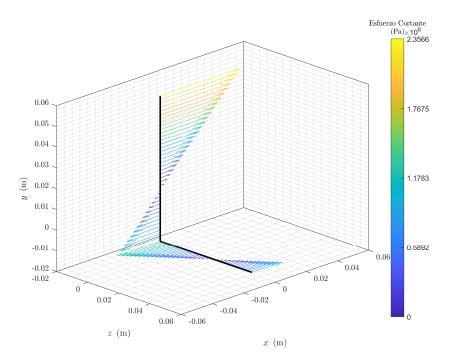


Figura 17 Distribución del esfuerzo cortante en el nodo 6 del elemento 5-6

Igual que se ha dado para el nodo 5, el módulo máximo se ubica en el extremo superior izquierdo. Es un esfuerzo compresivo, y este decrece linealmente en módulo hasta aproximadamente $y=7\,\mathrm{mm}$, valor a partir del cual el esfuerzo es de tracción y aumenta en módulo. En especial, la máxima tracción se halla en la coyuntura entre segmentos. Desde este punto, el módulo de la tracción decrece hasta un valor nulo alrededor de $z=-21\,\mathrm{mm}$. A partir de esta posición, el esfuerzo vuelve a ser compresivo y aumenta linealmente en módulo hasta el final del segmento.

4.6.4. Distribución de esfuerzos tangenciales

Como el flujo cortante mantiene la misma expresión a lo largo de el eje de la viga 5–6 y además, la sección también se mantiene constante, la distribución de esfuerzos tangenciales para esta sección permanece igual que el nodo 5 del elemento 5–6.