

Estructuras Aeroespaciales

Práctica 3

Alumnos: Pedro López Sancha, Yi Qiang Ji Zhang
Profesores: Daniel Yago, Juan Carlos Cante

Ingeniería en Tecnologías Aeroespaciales
Escuela Superior de Ingeniería Industrial, Aeroespacial y Audiovisual de Terrassa
Universitat Politècnica de Catalunya

9 de marzo de 2020

Índice

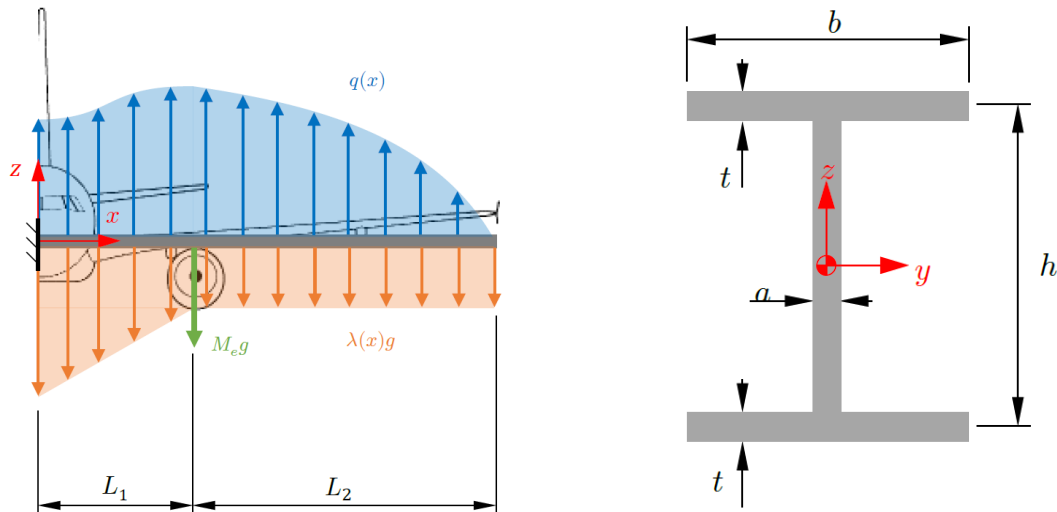
1. Introducción	2
2. Definición del Problema	2
3. Apartado 1	2
4. Apartado 2	4
5. Apartado 3	6
5.1. Comentarios	6
5.2. Análisis de convergencia	7
5.3. Alternativas en la evaluación de las distribuciones de masa	8

1. Introducció

La siguiente práctica presenta un caso en la se estudia las cargas sometidas a una semi-ala de un avión representada de manera simplificada como una viga empotrada a la cual se somete a diferentes cargas puntuales y repartidas. El objetivo principal de esta práctica es dar a conocer los desplazamientos y rotaciones que se producen a lo largo de la envergadura. Asimismo, se obtiene también los diagramas de momentos flectores M_z y las fuerzas cortantes F_y .

2. Definición del Problema

Considere la viga de un avión típico, modelado como un haz 1D con un Módulo de Young $E = 71 \text{ GPa}$ y una área de sección transversal I ilustrado en la Figura 1a. El avión vuela en equilibrio estático en la dirección vertical, por lo que la viga debe soportar el peso del todo el avión y una carga aerodinámica distribuida a lo largo de su envergadura ilustrada en la Figura 1b.



(a) Parámetros geométricos de la sección transversal del larguero

(b) Parámetros geométricos de la sección transversal del larguero

Figura 1 Diagrama de la sección longitudinal y transversal del larguero

3. Apartado 1

Calcule el momento de inercia de sección transversal para una $a = 30 \text{ mm}$, $b = 105 \text{ mm}$, $h = 900 \text{ mm}$ y $t = 6 \text{ mm}$.

El momento de inercia de la sección en doble T [Figura 1b], se puede obtener por dos métodos distintos:

- Integración directa
- Diferencia de momentos de inercia

Ambos métodos son convenientes a la hora de calcular los momentos de inercia. En nuestro análisis, se opta por la diferencia de áreas para el cálculo de la inercia de la sección en doble T .

$$I_z = \frac{1}{12} B^3 H \quad I_{z'} = I_z + BH \Delta y^2 \quad (1)$$

$$I_y = \frac{1}{12} H^3 B \quad I_{y'} = I_y + BH \Delta z^2 \quad (2)$$

El cálculo de la inercia del perfil delgado en doble T con respecto al eje \hat{y} puede calcularse mediante la diferencia entre la inercia de la sección rectangular que contiene toda la sección de estudio menos la inercia de los dos rectángulos internos más pequeños, que son adyacentes a la garganta de la sección y tangentes al rectángulo exterior. En otras palabras, la inercia pueda calcularse a partir de las contribuciones que añaden o extraen las otras formas geométricas. Sin embargo, este hecho es posible sólo si los ejes de cada contribución geométrica pasan todas por el eje del centro de masas, de manera que los ejes se superponen una encima de la otra.

En el caso que se nos plantea, como el centro de masa del perfil delgado está a la misma altura que los centros de masa de cada rectángulo definido, el eje \hat{y} pasa por todos los centros y no será necesario aplicar el *Teorema de Steiner*.

El cálculo de la inercia de un rectángulo con respecto a un eje paralelo a su base se muestra en la Figura 2.

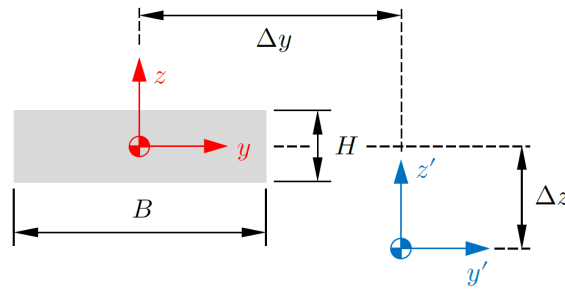


Figura 2 Parámetros para el cálculo del momento de inercia

Luego, atendiendo a los datos del problema los momentos de inercia de cada rectángulo se definen de la siguiente manera:

$$I_y^{rect,mayor} = \frac{1}{12} h^3 b \quad (3)$$

$$I_y^{rect,menor} = \frac{1}{12} \cdot (h - t)^3 \cdot (b - a) \quad (4)$$

Finalmente, la inercia de la sección en doble T será equivalente a la inercia que posee el rectángulo grande excluyendo a la inercia generada por los dos más pequeños.

$$I_y^{Total} = I_y^{rect,mayor} - I_y^{rect,menor} \quad (5)$$

$$I_y^{Total} = \left[\frac{1}{12} \cdot (900 + 6)^3 \cdot 105 \right] - \left[\frac{1}{12} \cdot (900 - 6)^3 \cdot (105 - 30) \right] \quad (6)$$

$$\boxed{I_y^{Total} = 2,041 \times 10^9 \text{ mm}^4} \quad (7)$$

4. Apartado 2

Calcule el parámetro l que hace que toda la estructura esté en equilibrio estático considerando:

- Distribución de fuerzas aerodinámicas

$$q(x) = \begin{cases} l \left[0,85 - 0,15 \cos \left(\pi \frac{x}{L_1} \right) \right], & \text{si } x < L_1 \\ -l \frac{(L_1 - L_2 - x)(L_1 + L_2 - x)}{L_2^2}, & \text{si } x \geq L_1 \end{cases}$$

- Distribución de masa

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{3M}{2L^2} (L_1 - x) + \frac{M}{4(L_1 + L_2)}, & \text{si } x < L_1 \\ \frac{M}{4(L_1 + L_2)}, & \text{si } x \geq L_1 \end{cases}$$

Donde:

- $L_1 = 6$ m
- $L_2 = 12$ m
- $M = 36000$ kg
- $M_e = 2360$ kg (A-320)
- $g = 9,81$ m/s²

En cuanto al parámetro l , se trata de una constante que aparece en la expresión de la distribución de fuerza aerodinámica. Este parámetro establece un equilibrio junto a la distribución de masa de la viga, la cual se encuentra en la misma dirección de la carga de las fuerzas aerodinámicas pero, dirigidas en sentido negativo del eje \hat{z} .

El parámetro l se puede calcular realizando un equilibrio de fuerzas en el eje \hat{z} .

$$\sum F = 0 \quad (8)$$

$$F = \int_{Upper_s} dF + \int_{Lower_s} dF + \sum F_{ext,i} = 0 \quad (9)$$

En consecuencia, la fuerza total de las cargas distribuidas se encuentra con la suma infinitesimal de la contribución de cada diferencial de barra en las cuales contribuyen de forma todos $dF = q \cdot dx$ a lo largo de la superficie alar, y a estas se le añaden las cargas puntuales externas. Cabe destacar que este análisis estático se hace con el objetivo de garantizar que, en consecuencia, la reacción vertical en el empotramiento es nula.

$$\int_0^{L_1+L_2} q(x) \cdot dx - \int_0^{L_1+L_2} \lambda(x)g \cdot dx - M_e \cdot g = 0 \quad (10)$$

Las funciones $q(x)$ y $\lambda(x)$ son funciones a tramos, esto es, tienen expresiones distintas para distintos rangos de x . Por consiguiente, se la integral de una función a tramos es la suma de la integral de cada una de los tramos. Sustituyendo las funciones de las cargas y aplicando esta identidad se obtiene:

$$\underbrace{\int_0^{L_1} l \left[0,85 - 0,15 \cos \left(\pi \frac{x}{L_1} \right) \right] \cdot dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} -l \frac{(L_1 - L_2 - x)(L_1 + L_2 - x)}{L_2^2} \cdot dx}_{q(x)} - \underbrace{\int_0^{L_1} g \cdot \left[\frac{3M}{2L_1^2} (L_1 - x) + \frac{M}{4(L_1 + L_2)} \right] \cdot dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M}{4(L_1 + L_2)} \cdot dx}_{\lambda(x)} - \underbrace{M_e \cdot g = 0}_{\text{Força externa}} = 0 \quad (11)$$

Se define cada parte de la carga aerodinámica como:

$$q_1(x) = l \left[\alpha_1 - \alpha_2 \cos \left(\pi \frac{x}{L_1} \right) \right] \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (12)$$

$$q_2(x) = -l \frac{(L_1 - L_2 - x)(L_1 + L_2 - x)}{L_2^2} \quad L_1 < x \leq L_1 + L_2 \quad (13)$$

Para simplificar los cálculos, puede reescribirse q_2 como:

$$q_2 = -\frac{l}{L_2^2} [x^2 - 2L_1x + (L_1^2 - L_2^2)] \quad (14)$$

Cada parte de las cargas aerodinámicas por separado es:

$$Q_1 = \int_0^{L_1} q_1(x) dx = l \left[\alpha_1 x - \alpha_2 \frac{L_1}{\pi} \sin \left(\pi \frac{x}{L_1} \right) \right]_0^{L_1} = \alpha_1 L_1 l \quad (15)$$

$$Q_2 = \int_{L_1}^{L_1+L_2} q_2(x) dx = -\frac{l}{L_2^2} \left[\frac{1}{3} x^3 - L_1 x^2 + (L_1^2 - L_2^2) x \right]_{L_1}^{L_1+L_2} = \frac{2}{3} L_2 l \quad (16)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = l \left(\frac{17}{20} L_1 + \frac{2}{3} L_2 \right) \quad (17)$$

Se define cada parte de la distribución de masa como:

$$\lambda_1(x) = \frac{3M}{2L_1^2} (L_1 - x) + \frac{M}{4(L_1 + L_2)}, \quad \text{si } 0 \leq x \leq L_1 \quad (18)$$

$$\lambda_2(x) = \frac{M}{4(L_1 + L_2)}, \quad \text{si } L_1 \leq x \leq L_2 \quad (19)$$

Cada parte de la distribución de masa por separado es:

$$\Lambda_1 = \int_0^{L_1} \lambda_1(x) dx = \left[\frac{3M}{2L_1^2} \left(L_1 x - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{M}{4(L_1 + L_2)} x \right]_0^{L_1} = \frac{3}{4} M + \frac{1}{4} \frac{ML_1}{L_1 + L_2} \quad (20)$$

$$\Lambda_2 = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \lambda_2(x) dx = \frac{1}{4} \frac{ML_2}{L_1 + L_2} \quad (21)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = M \quad (22)$$

La masa total de la estructura es $M + M_e$. Igualando fuerzas sobre la estructura, se obtiene:

$$-(M + M_e)g + Q = -(M + M_e)g + l \left(\frac{17}{20} L_1 + \frac{2}{3} L_2 \right) \quad (23)$$

$$l = \frac{M + M_e}{\frac{17}{20} L_1 + \frac{2}{3} L_2} \cdot g \quad (24)$$

Sustituyendo los valores anteriores en la expresión del parámetro l :

$$l = \frac{36000 + 2360}{\frac{17}{20} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 12} \cdot 9,81 = 28726,076 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \quad (25)$$

5. Apartado 3

Implementar un código MATLAB para calcular numéricamente las distribuciones de desplazamiento, rotación, esfuerzo cortante y momento flector a lo largo del larguero para la condición dada y analice la convergencia de la solución numérica a la “solución analítica” (solución con la mejor discretización) evaluando el error relativo de desviación del larguero en la punta del ala para varios elementos considerados para la discretización:

$$\epsilon_r(n_{el}) = \frac{|\hat{u}_{y,num}^{tip}(n_{el}) - u_{y,*}^{tip}|}{u_{y,*}^{tip}} \quad (26)$$

Considerar dos subdominios $x \in [0, L - 1]$ y $x \in [L_1, L_1 + L_2]$ discretizado con N_{el} elementos cada parte. Resolver para el siguiente conjunto de $n_{el} = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

Con finalidad de calcular los parámetros de los desplazamientos U_y , θ_z , F_y y M_z correspondientes a los desplazamientos, rotación, fuerzas cortantes y momento flector, respectivamente se incorpora en el análisis el código implementado en MATLAB. De manera que se ha obtenido los las diferentes gráficas en función del número de elementos usado en la discretización. Como solución analítica, se ha empleado el una partición de elementos de 128 elementos por cada dominio $[0, L_1]$ y $[L_1, L_1 + L_2]$. A continuación, se muestran las gráficas de los resultados obtenidos tras el análisis [Figura 3].

5.1. Comentarios

Por lo que a la gráficas de desplazamientos se refiere (U_y), el resultado obtenido coincide con las suposiciones previas. En $x = 0$, se muestra cómo el nodo inicial no tiene desplazamiento asociado. Resultado lógico pues el desplazamiento de ese nodo está impuesto y es fijo y es el único en que su desplazamiento vertical en \hat{y} es nulo. Además, ese punto es precisamente el mínimo relativo y absoluto de la deflexión. Queda demostrado, pues, la ecuación que relaciona las rotaciones y las deflexiones $\theta_z = \frac{dU_y}{dx}$.

Fíjense que la curva U_y presenta una tendencia lineal progresiva en las cuales el valor máximo de aproximadamente $0,060 \text{ m}$ en el caso analítico (con $n_{el} = 128$). Por contraste, se puede observar que todos los casos convergen a un valor parecido a este, con ligeras diferencias en cuanto a la precisión de los elementos. Sin embargo, el caso cuyo más error se induce, es el caso en que se considera solo 2 particiones, la cual sale es el único caso en que se sale de la tendencia global. Asimismo, las otras discretizaciones del dominio, pese a no ser un cálculo exacto “analítico” el error relativo es considerablemente pequeño tal y como se estudiará en el próximo punto.

Con respecto a la rotación de la barra, del mismo modo que en la deflexión, se observa una tendencia creciente. Esta tendencia es más pronunciada en el tramo inicial hasta una distancia de aproximadamente $x = 10$ donde la rotación coge un carácter más constante.

Finalmente, tratando los gráficos de la fuerza cortante F_y y el momento flector M_z se aprecia que para la primera, la función es continua llegando hasta un máximo relativo en $x \approx 4$. Luego, en $x = 6$

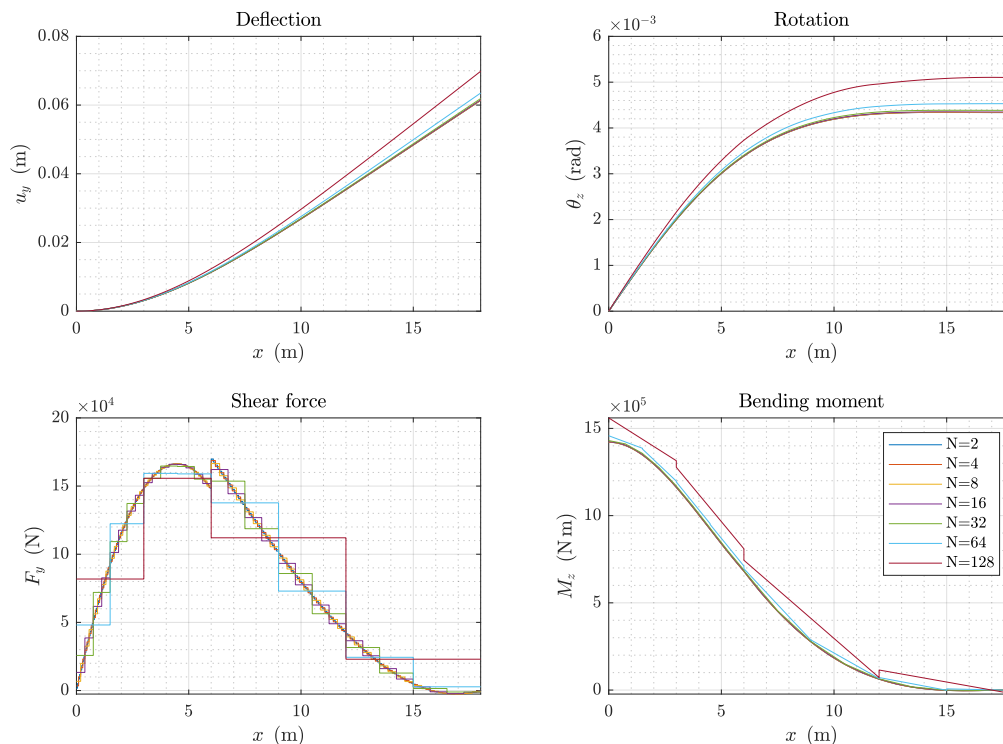


Figura 3 Gráficas de los desplazamientos, rotación, fuerzas cortantes y momento flector en función del número de elementos a lo largo de la envergadura del ala (Método 1)

esta función sigue siendo continua pero pierde su derivabilidad debido a la aparición de un salto en la fuerza cortante. Este fenómeno se justifica porque se trata de una carga puntual que se ha añadido en la estructura. En efecto, se trata de la masa M_e que se aplicaba en $x = L1 = 6$ m quedando justificado el salto de fuerza cortante. Por otra parte, la gráfica del momento flector también depende de la carga repartida. Se define como $\frac{dM_z}{dx} = -T_y$ donde T_y es el esfuerzo cortante. Como es de esperar, el momento flector máximo se encuentra en $x = 0$ m y en la punta del ala el momento es nulo pues se trata de un extremo libre.

5.2. Análisis de convergencia

Con la intención de realizar un estudio de la precisión del método numérico en comparación con los resultados analíticos, se plantea el cálculo del error relativo ε_r que existe entre el desplazamiento vertical del último nodo con su solución analítica. Esta comparativa se recoge en la Figura 4.

Esta gráfica corrobora la situación anterior. El hecho de considerar solo $n_{el} = 2$ en cada dominio (4 en total) induce un error relativo de un 14% aproximadamente. Esto da la razón a que se trata de una discretización demasiado pobre y poco precisa en comparación a la solución analítica.

Sin embargo, el error se reduce rápidamente considerando $n_{el} = 4$ (8 en total), el cual el error sólo es de 3,5% aproximadamente. Sin duda alguna, cuanto mayor es el número de elementos considerados en la discretización, menor es el error relativo. Para un valor de $n_{el} = 32$ el error ya es de $\leq 1\%$. De este

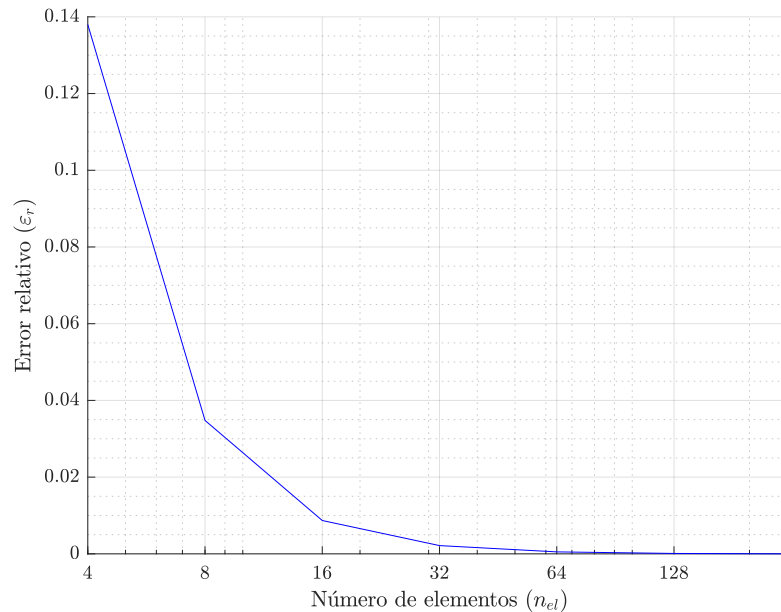


Figura 4 Gráfica de convergencia del error relativo en función del número de elementos de la discretización (Método 2)

modo, se puede concluir que empleando 32 elementos, la solución analítica y numérica se pueden dar por hecho que son iguales y los resultados numéricos son suficientemente precisos.

5.3. Alternativas en la evaluación de las distribuciones de masa

Realizado el cómputo de los desplazamientos y fuerzas y momentos flectores anteriores, se ha querido evaluar la distribución de masa de distintas formas y analizar con qué método de evaluación se obtiene una convergencia más rápida y precisa.

Las Figuras 3 y 4 son los resultados obtenidos evaluando la función de la distribución de carga en el punto medio del intervalo de los elementos. Sean estos resultados los del **método 1**.

A continuación, las Figuras 5 y 6 tratan la carga evaluando la integral por el método del trapecio y dividiendo por la longitud del intervalo (**método 2**).

Finalmente, las Figuras 7 y 8 se obtienen evaluando la integral numéricamente con la función de Matlab y dividiendo por la longitud del intervalo.

Los tres métodos se encuentran en la función:

```
1 function Fel = computeFelBar(L1, L2, l, M, g, n_i, n_ne, n_el, x, Tnod, method)
```

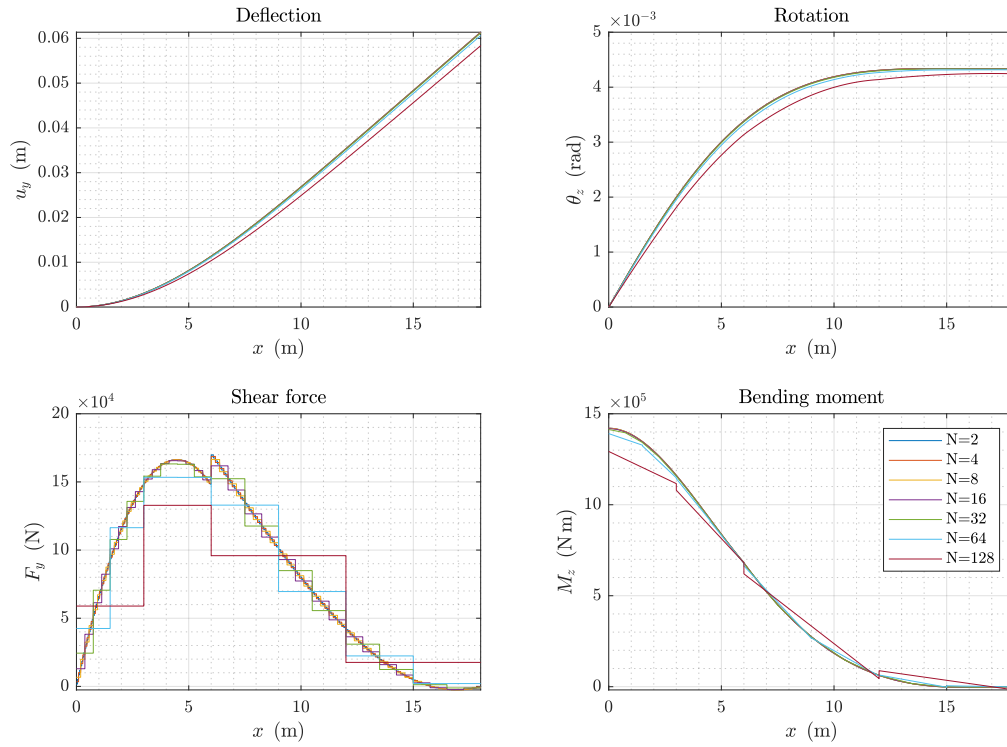


Figura 5 Gráficas de los desplazamientos, rotación, fuerzas cortantes y momento flector en función del número de elementos a lo largo de la envergadura del ala (Método 2).

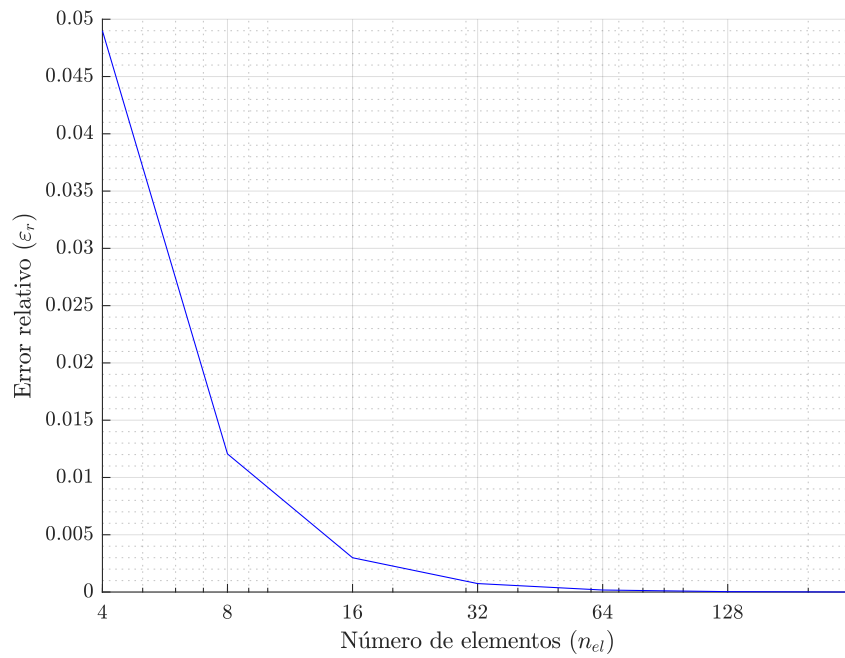


Figura 6 Gráfica de convergencia del error relativo en función del número de elementos de la discretización (Método 2).

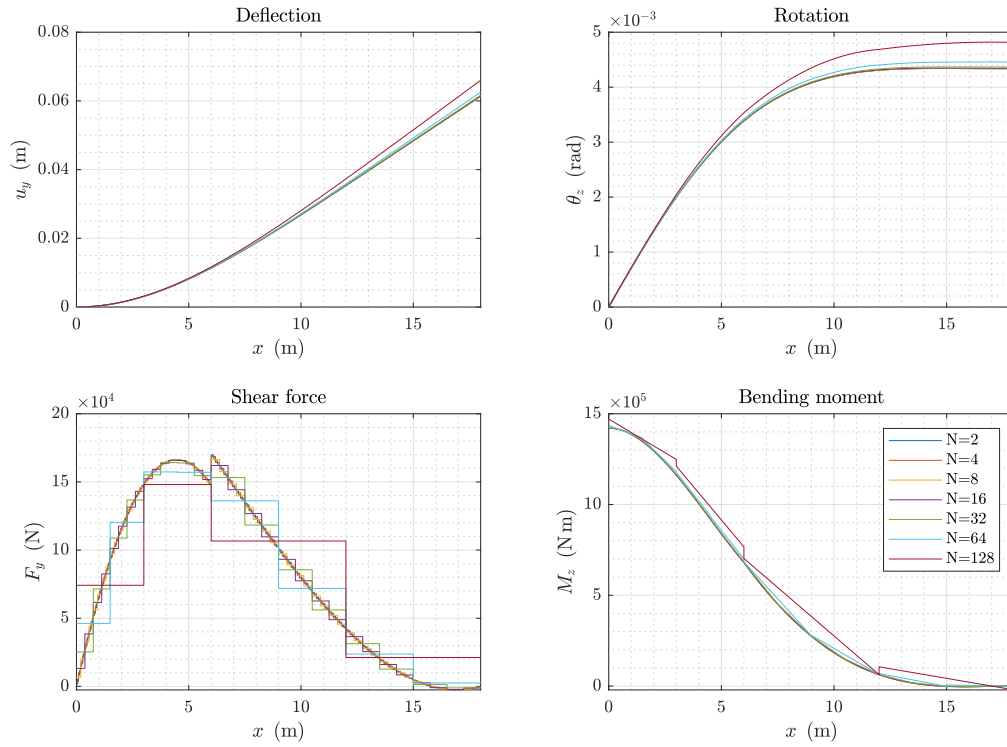


Figura 7 Gráficas de los desplazamientos, rotación, fuerzas cortantes y momento flector en función del número de elementos a lo largo de la envergadura del ala (Método 3).

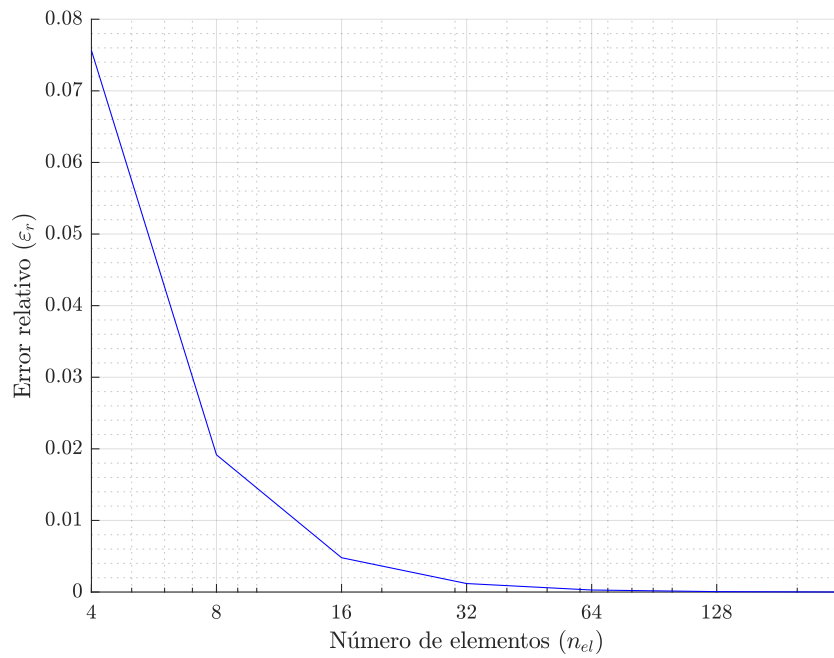


Figura 8 Gráfica de convergencia del error relativo en función del número de elementos de la discretización (Método 3).