# 2022-23学年春季学期“数理逻辑”课程作业二

**1**. 令$A$为如下一阶语言公式: $((\forall x.(P(x)\rightarrow Q(x)))\wedge(\exists x.(R(x)\wedge P(x)))\rightarrow(R(x)\rightarrow\neg Q(x))$, 其中$P,Q,R$均为一元谓词符。请回答下列问题并证明你的结论。

**(1)**$A$公式是否可满足;

**(2)**$A$是否永真;

**(3)**序贯$\vdash A$是否有效.

**2**. 请在G系统中证明下列序贯可证:

**(1)** $A\rightarrow B, A\rightarrow C\vdash A\rightarrow(B\wedge C)$;

**(2)** $\vdash(\exists x.(A\rightarrow B))\rightarrow\forall x.(A\rightarrow B)$, 其中$x\notin FV(B)$.

**3**.请使用一阶语言将下列推理过程符号化：

所有的哲学家都是大胡子，有些逻辑学家是哲学家，因此有些逻辑学家是大胡子。

并判断上述推理是否有效。如果有效则请在G系统中给出证明；反之则请给出反例。

**4**. 请判断一阶语言公式$(\forall x.(P(x,y)))[\frac{f(x,z)}{y}]$是否可满足。如果可满足则请给出语义证明；如果不满足泽清给出反例。

**5**. 令$\exists^{\geq n}$为一个“计数量词”。该量词的语法和语义定义分别如下：

语法: 对于任意一阶语言公式$A$, $\exists^{\geq n}x.A$仍为一个公式;

语义: $M\models_\sigma\exists^{\geq n}x.A(x)$ 当且仅当$M\models_{\sigma[x:=a_i]}A(x)$对于$M$中$n$个不同的元素$a_1,a_2,...a_n$成立.

**(1)** 使用计数量词，给出一个一阶语言公式$A_7$, 使得$M\models_\sigma A_7$当且仅当$|M|>7$;

**(2)** 使用计数量词，给出一个一阶语言公式$A_45$, 使得$M\models_\sigma A_45$当且仅当$|M|=23$;

**(3$^\star$)**试证明对于一个包含计数量词的公式$A$,存在一个等价的,不适用计数量词的公式$B$与之对应.