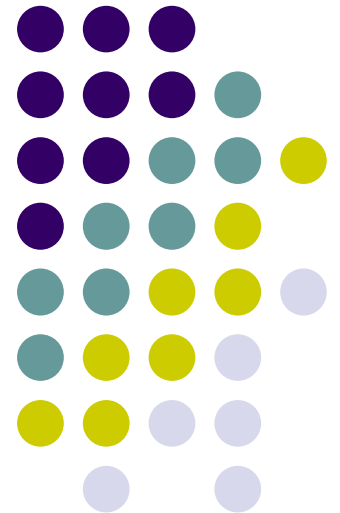




第11讲-紧性定理





- 紧性定理是符号逻辑的一个极其重要的定理；
- 本讲主要给出命题逻辑和一阶逻辑的紧性定理；
- 我们将用语义方法证明此定理。



定义11.1 设 E 为非空集, $F \subseteq \mathcal{P}(E)$

(1) F 为 E 上滤指

(a) $E \in F$

(b) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

(c) $B \supseteq A \in F \Rightarrow B \in F$

(d) $\emptyset \notin F$

(2) F 为 E 上超滤指

(a) F 为 E 上滤

(b) D 为 E 上滤且

$F \subseteq D \Rightarrow F = D$

(3) 设 $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{P}(E)$, C 有有穷交性质 ($f.i.p.$) 指

$\forall A_1, \dots, A_n \in C, A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \neq \emptyset$



命题11.2 令 $C^+ = \{A \subseteq E \mid \exists A_1 \exists A_2 \dots \exists A_n \in C. A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \subseteq A\}$, 则

- (1) $C \subseteq C^+$;
- (2) C^+ 为 E 上滤 $\Leftrightarrow C$ 有 *f.i.p.*;
- (3) 若 $C \subseteq D$ 且 D 为 E 上滤, 则 $C^+ \subseteq D$;
- (4) 若 C^+ 为滤, 则 $C^+ = \bigcap \{F \mid C \subseteq F \text{ 且 } F \text{ 为 } E \text{ 上滤}\}$,
称 C^+ 为由 C 生成的滤;

证明: (1) $C \subseteq C^+$ 易见;

(2) $\because C^+$ 满足滤定义中的 (a) ~ (c)

$\therefore C^+$ 为 E 上滤

$\Leftrightarrow \emptyset \notin C^+ \Leftrightarrow \forall A_1 \forall A_2 \dots \forall A_n \in C, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow C$ 有 *f.i.p.*



(3) 设 $C \subseteq D$ 且 D 为滤,

$$\begin{aligned}\because A \in C^+ &\Rightarrow \exists A_1 \exists A_2 \dots \exists A_n \in C. A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \subseteq A \\ &\Rightarrow \exists A_1 \exists A_2 \dots \exists A_n \in D. A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \subseteq A \\ &\Rightarrow \exists B \in D. B \subseteq A \\ &\Rightarrow A \in D\end{aligned}$$

$$\therefore C^+ \subseteq D.$$

(4) 由 (3) 知 $C^+ \subseteq \cap \{F \mid C \subseteq F \text{ 且 } F \text{ 为 } E \text{ 上滤} \}$

$\therefore C^+$ 为滤,

$\therefore C^+ \ni \{F \mid C \subseteq F \text{ 且 } F \text{ 为 } E \text{ 上滤}\}$, 从而

$$C^+ \supseteq \cap \{F \mid C \subseteq F \text{ 且 } F \text{ 为 } E \text{ 上滤}\}$$

因此等式成立.

□



命题11.3 设 $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{P}(E)$ 且 U 有 *f.i.p.* , 我们有

U 为 E 上超滤 $\Leftrightarrow \forall X \subseteq E, X \in U \leftrightarrow (E - X) \notin U$.

证明: “ \Rightarrow ”: 设 U 为 E 上超滤,

(1) 设 $X \in U$, 欲证 $E - X \notin U$, 反设 $E - X \in U$,
从而 $\emptyset = X \cap (E - X) \in U$ 矛盾!

(2) 设 $E - X \notin U$, 欲证 $X \in U$, 令 $C = U \cup \{X\}$,
从而 C 有 *f.i.p.*,

这是因为对于 $Y \in U$, 若 $Y \cap X = \emptyset$, 则 $Y \subseteq E - X$,
从而 $E - X \in U$ 矛盾。因此 C^+ 为 E 上滤, 且 $C^+ \supseteq U$,
从而 $C^+ = U$ (U 为超滤). 故 $X \in U$.



“ \Leftarrow ” 设 $X \in U \leftrightarrow (E - X) \notin U$ 对任何 $X \subseteq E$ 成立。

欲证 U 为超滤。

(1) $\because U$ 有 *f.i.p.* $\therefore \emptyset \notin U$.

(2) $\because E \in U \leftrightarrow E - E \notin U \leftrightarrow \emptyset \notin U \therefore E \in U$.

(3) 设 $X, Y \in U$,

$$\because X \cap Y \cap [(E - X) \cup (E - Y)] = \emptyset$$

$$\therefore (E - X) \cup (E - Y) \notin U,$$

从而 $E - (X \cap Y) \notin U$, 故 $X \cap Y \in U$.



(4) 设 $\mathbb{X} \in U$ 且 $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$,

$\therefore \mathbb{X} \cap (E - \mathbb{Y}) = \emptyset, \therefore E - \mathbb{Y} \notin U$, 故 $\mathbb{Y} \in U$.

从 (1) – (4) 知 U 为滤。

(5) 对于 $U \subseteq D$ 且 D 为 E 上滤,

欲证 $U = D$, 只需证若 $\mathbb{X} \in D$ 则 $\mathbb{X} \in U$,

$\therefore (E - \mathbb{X}) \cap \mathbb{X} = \emptyset, \therefore E - \mathbb{X} \notin D$.

反设 $\mathbb{X} \notin U$ 则 $E - \mathbb{X} \in U$, 从而 $E - \mathbb{X} \in D$ 矛盾!

因此 $\mathbb{X} \in U$.

□



在以下命题中我们需要用到 *Zorn* 引理，亦即用到 *AC*，它们两者是等价的（参见文献[7]）。

***Zorn* 引理:**

设 S 为偏序集，若 S 中的每个链皆有界，则 S 有极大元。

命题11.4. 设 E 为非空集且 $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{P}(E)$,

若 C 有 *f.i.p.*，则存在一个包含 C 的超滤 U 。

证明: 令 $S = \{F \mid C \subseteq F \text{ 且 } F \text{ 为 } E \text{ 上滤}\}$,

从而 $C^+ \in S$ ，故 $S \neq \emptyset$ 。

设 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots$ 为 S 中的任何链，
以下证 $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有界。



令 $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, 欲证 D 为 $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的上界:

(1) $C \subseteq D$ 易见;

(2) $E \in D$ 易见;

(3) $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in D \Rightarrow$ 有 m 使 $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in D_m$
 \Rightarrow 有 m 使 $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \in D_m \Rightarrow \mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \in D$;

(4) $\mathbb{X} \in D$ 且 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} \Rightarrow$ 有 m 使 $\mathbb{X} \in D_m$ 且 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$
 $\Rightarrow \mathbb{Y} \in D_m \Rightarrow \mathbb{Y} \in D$;

(5) $\emptyset \notin D_n (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \emptyset \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ 。

因此 $D \in S$ 且 $D_n \subseteq D$ 故 D 为 $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 的上界。

由 *Zorn* 引理指知存在极大元 $U \in S$,

从而有 E 上超滤 U 使 $U \supseteq C$.

□



定义11.5. 设 I 为非空集, $V = \{v_i \mid i \in I\}$ 为赋值集。

令 U 为 I 上滤, 定义赋值 v 如下:

对于任何 $P \in PS, v(P) = T \Leftrightarrow \{i \mid v_i(P) = T\} \in U$.

命题11.6. 若 U 为超滤, 则

(1) $v(P) = F \Leftrightarrow \{i \mid v_i(P) = F\} \in U$;

(2) 对于命题 $A, v \models A \Leftrightarrow \{i \mid v_i \models A\} \in U$.

证明: (1) 易见;

(2) 对 A 的结构作归纳证明 $v \models A \Leftrightarrow \{i \mid v_i \models A\} \in U$:

(i) $A \equiv P$

$v \models A \Leftrightarrow v(P) = T \Leftrightarrow \{i \mid v_i \models P\} \in U$;



(ii) $A \equiv \neg B$

$$\begin{aligned} v \models \neg B &\Leftrightarrow v(B) = F \\ &\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \notin U \\ &\Leftrightarrow I - \{i \mid v_i \models B\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \mid \nexists v_i \models B\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models \neg B\} \in U; \end{aligned}$$

(iii) $A \equiv B \wedge C$

$$\begin{aligned} v \models B \wedge C &\Leftrightarrow v(B) = v(C) = T \\ &\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \in U \text{ and } \{i \mid v_i \models C\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \cap \{i \mid v_i \models C\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B \wedge C\} \in U. \end{aligned}$$

当 $A \equiv B \vee C$ 或 $A \equiv B \rightarrow C$ 时，同理可证。

□



定义11.7. 设 Γ 为命题集且任何 Γ 的有穷子集 Δ 可满足, 令

$$I = \{\Delta \mid \Delta \text{ 有穷且 } \Delta \subseteq \Gamma\}$$

对于 $i \in I$, v_i 为满足 i 的赋值, 即 $v_i \models i (i \in I)$ 。

令 $A^* = \{i \in I \mid A \in i\}$, $C = \{A^* \mid A \in \Gamma\}$ 。

命题11.8. C 有 *f.i.p.*。

证明: $\because \{A_1, \dots, A_n\} \in A_i^* \cap A_2^* \cap \dots \cap A_n^*$

$\therefore C$ 有 *f.i.p.*。

□

从而我们有超滤 $U \supseteq C$, 对于 $A^* \in U$

$$\because i \in A^* \Leftrightarrow A \in i \Rightarrow v_i \models A$$

$$\therefore A \in \Gamma \Rightarrow A^* \subseteq \{i \in I \mid v_i \models A\}.$$



命题11.9. 若 $A \in \Gamma$, 则 $\{i \in I \mid v_i \models A\} \in U$

证明: $\because A \in \Gamma \Rightarrow A^* \in U$ 又 $A^* \subseteq \{i \in I \mid v_i \models A\}$

$\therefore \{i \in I \mid v_i \models A\} \in U.$

□

定理11.10. 对于以上的超滤 U 和 I , 定义赋值 v 如下:

$$v(P) = T \Leftrightarrow \{i \in I \mid v_i(P) = T\} \in U$$

我们有 $v \models \Gamma$.

证明: 对于任何命题 A , 我们有:

(1) $v \models A \Leftrightarrow \{i \in I \mid v_i \models A\} \in U;$

(2) 对于 $A \in \Gamma, \{i \in I \mid v_i \models A\} \in U.$

故 $v \models A$, 从而 $v \models \Gamma$. v 为 Γ 的模型。 □



下面我们将给出一阶逻辑的紧性定理。

定义11.12. 设 $I \neq \emptyset$, D 为 I 上的滤, $(A_i)_{i \in I}$ 为一簇非空集, 令

$$(1) \ C = \prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I)(f(i) \in A_i)\},$$

有时记 f 为 $\langle f(i) \mid i \in I \rangle$;

(2) C 上二元关系 $=_D$ 被定义为:

$$\forall f, g \in C, f =_D g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D.$$



命题11.13. $=_D$ 为 C 上的等价关系。

证明:(1) 自反性 $f =_D f$ (因为 $I \in D$) ;

(2) 对称性 $f =_D g \Rightarrow g =_D f$ 易见;

(3) 传递性 $f =_D g \ \& \ g =_D h \Rightarrow f =_D h$ 。

$$\because f =_D g \ \& \ g =_D h$$

$$\Rightarrow A = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D \ \&$$

$$B = \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in D$$

$$\Rightarrow \{i \in I \mid f(i) = h(i)\} \supseteq A \cap B \in D$$

$$\Rightarrow f =_D h.$$

\therefore 传递性为真。

□



定义11.14. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, 对于 $i \in I$, \mathcal{A}_i 为 \mathcal{L} -结构, $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ 关于模 D 的积 \mathcal{B} 为一个 \mathcal{L} 结构。其定义如下:

(1) \mathcal{B} 的论域 $B = \{[f]_D \mid f \in \prod_{i \in I} A_i\}$,

这里 $[f]_D$ 为 f 关于 $=_D$ 的等价类, 有时简记为 $[f]$ 。

事实上, $B = (\prod_{i \in I} A_i) / \sim_D$, 有时记 B 为 $\prod_D (A_i)_{i \in I}$;

(2) 对于常元 C , $C_B = [\langle C_{A_i} \mid i \in I \rangle]_D$;

(3) 对于 n 元函数 f 且 $n > 0$, 任给 $[g_j] (j \leq n) \in B$
 $f_B([g_1], \dots, [g_n]) = [\langle f_{A_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle]_D$

(4) 对于 n 元谓词 p , 任给 $[g_j] (j \leq n) \in B$
 $p_B([g_1], \dots, [g_n]) = T \Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) = T\} \in D$
 当 D 为超积时, 称 $\prod_D (A_i)_{i \in I}$ 为 $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ 的超积。



下面命题说明 \mathcal{B} 的定义是合法的。

命题11.15. $=_D$ 为同余关系。

证明: (1) 设 f 为一元函数 (对于多元函数同理可证),
设 $g =_D h$, 欲证 $f_B([g]) = f_B([h])$.

$$\because f_B([g]) = f_B([h])$$

$$\Leftrightarrow \langle f_{A_i}(g(i)) \mid i \in I \rangle =_D \langle f_{A_i}(h(i)) \mid i \in I \rangle$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid f_{A_i}(g(i)) = f_{A_i}(h(i))\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in D$$

$$\Leftrightarrow g =_D h$$

\therefore 命题得证



(2) 设 p 为一元谓词, 设 $g =_D h$,

欲证 $p_B([g]) = T \Leftrightarrow p_B([h]) = T$,

只需证 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D \Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$,

只需证 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D \Rightarrow \{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$ 。

令 $A = \{i \mid p_{A_i}(g(i)) = p_{A_i}(h(i))\}$, 从而 $A \in D$,

故若 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D$, 则

$\{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \supseteq \{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \cap A \in D$,

从而 $\{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$ 。

□



约定：为了以下叙述方便，我们采用一些简记方式。
设 t 为项， A 为公式且 $FV(t), FV(A) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$,
令赋值为 σ , $\sigma(y_i) = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), \mathcal{B} 为结构.

- (1) $t_{B[\sigma]}$ 简记为 $t_B[a_1, \dots, a_n]$;
- (2) $A_{B[\sigma]}$ 简记为 $A_B[a_1, \dots, a_n]$;
- (3) $\mathcal{B} \models_{\sigma} A$ 简记为 $\mathcal{B} \models A[a_1, \dots, a_n]$.



命题11.16. 设 t 为项且 $FV(t) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$,

对于任何 $[g_j] \in B$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 有

$$t_B[[g_1], \dots, [g_n]] = [\langle t_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D \quad \dots\dots(*)$$

证明: 对 t 的结构归纳证明(*).

情况1. t 为常元 C , 易见(*)成立;

情况2. t 为 y_1 , $LHS \equiv [g_1]$, $RHS \equiv [\langle g_1(i) \mid i \in I \rangle]_D = [g_1]$;

情况3. t 为 $f(s)$, 且 $FV(s) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\begin{aligned} LHS &\equiv (f(s))_B[[g_1], \dots, [g_n]] \\ &= f_B(s_B[[g_1], \dots, [g_n]]) \\ &= f_B([\langle s_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D) \quad (\text{这里用 } I.H.) \\ &= [\langle f_{A_i}(s_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)]) \mid i \in I \rangle]_D \\ &= [\langle t_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D \end{aligned}$$

□



命题11.17. 设 A 为公式且 $FV(A) = \{y_1, \dots, y_n\}$,

对于任何 $[g_j](j = 1, 2, \dots, n) \in B$, 有

$$\mathcal{B} \models A[[g_1], \dots, [g_n]] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D \quad \dots (*)$$

证明: 对 A 的结构作归纳证明(*)

情况1. A 为 $t \doteq s$

$$\mathcal{B} \models (t \doteq s)[[\vec{g}_j]]$$

$$= t_B[[\vec{g}_j]] = s_B[[\vec{g}_j]]$$

$$\Leftrightarrow [\langle t_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D = [\langle s_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid t_{A_i}[\vec{g}(i)] = s_{A_i}[\vec{g}(i)]\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models (t \doteq s)[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$$

(n 元情况同理可证) .



情况2. A 为 $p(t)$

$$\mathcal{B} \models p(t)[[\vec{g}]]$$

$$\Leftrightarrow p_B(t_B[[\vec{g}]]) = T$$

$$\Leftrightarrow p_B([\langle t_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D) = T$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(t_{A_i}[g_1(i), \dots, g_n(i)]) = T\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid \mathcal{A}_i \models A[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$$

情况3. A 为 $\neg H$

$$\mathcal{B} \models \neg H[[\vec{g}]] \Leftrightarrow \mathcal{B} \not\models H[[\vec{g}]]$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models H[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \notin D$$

$$\Leftrightarrow I - \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models H[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D \quad (\text{因为 } D \text{ 为超滤})$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \neg H[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$$

情况4. A 为 $E \wedge H$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \models A[[\vec{g}]] &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models E[[\vec{g}]] \text{ 且 } \mathcal{B} \models H[[\vec{g}]] \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models E[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D \text{ 且 } \\ &\quad \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models H[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D \quad (I.H.) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models E[\vec{g}(i)]\} \cap \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models H[\vec{g}(i)]\} \in D \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A[\vec{g}(i)]\} \in D\end{aligned}$$

情况5. A 为 $E \vee H$, $E \rightarrow H$, 与上同理可证。

情况6. A 为 $\exists x.E$

$$\begin{aligned}\text{因为 } \mathcal{B} \models \exists x.E[[g_1], \dots, [g_n]] \\ \Leftrightarrow \text{存在 } g \in B \text{ 使 } \mathcal{B} \models E[[g], [g_1], \dots, [g_n]]\end{aligned}$$



\Leftrightarrow 存在 $g \in B$ 使 $\mathcal{B} \models E[[g], [g_1], \dots, [g_n]]$

\Leftrightarrow 存在 $g \in B$ 使 $\mathbb{X} = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models [g(i), g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$

以及 $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A[g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$

$\mathbb{Y} = \{i \in I \mid \text{存在 } a_i \in A_i \text{ 使 } \mathcal{A}_i \models E[a_i, g_1(i), \dots, g_n(i)]\} \in D$

故余下只需证存在 $[g] \in B$ 使 $\mathbb{X} \in D \Leftrightarrow \mathbb{Y} \in D$

“ \Rightarrow ”部分：设存在 $[g] \in B$ 使 $\mathbb{X} \in D$,

令 $a_i = g(i)$, 从而 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$, 因此 $\mathbb{Y} \in D$.

“ \Leftarrow ”部分：设 $\mathbb{Y} \in D$,

令 $G = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I \text{ 且 } x \in A_i \text{ 且 } \mathcal{A}_i \models E[x, \vec{g}(i)]\}$

由AC知, 存在 $[g] \in B$ 使 $\langle i, g(i) \rangle \in G$ 对任何 $i \in I$ 成立。

故 $\mathbb{X} \in D$ 。因此得证。

情况7. A 为 $\forall x.E$, 与上同理可证。

□



推论11.18. 设 A 为句子, $\mathcal{B} \models A \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A\} \in D$ 。
这里 D 为超滤。

定理11.19. (一阶逻辑的紧性定理) 设 Γ 为句子集,
若 Γ 的任何有穷子集可满足, 则 Γ 可满足。

证明: 令 $I = \{\Delta \subseteq \Gamma \mid \Delta \text{ 有穷}\}$, 且对于 $i \in I$

令 \mathcal{A}_i 为满足 i 的结构, 即 $\mathcal{A}_i \models i$ 。

对于 $A \in \Gamma$, 令 $A^* = \{i \in I \mid A \in i\}$, 令 $C = \{A^* \mid A \in \Gamma\}$,

从而 C 有 *f.i.p.*, 这是因为对于任何 $A_1^*, \dots, A_n^* \in C$,

$$A_1^* \cap A_2^* \dots \cap A_n^* = \bigcap_{k=1}^n \{i \in I \mid A_k \in i\} = \{i \in I \mid A_1, \dots, A_n \in i\}$$

从而 $\{A_i, \dots, A_n\} \in A_1^* \cap \dots \cap A_n^*$ 。



由 *Zorn* 引理知, 存在超滤 $U \supseteq C$,

从而对于任何 $A \in \Gamma$, 有 $A^* \in U$ 。

$$\because i \in A^* \Rightarrow A \in i \Rightarrow \mathcal{A}_i \models A$$

$$\therefore \text{对于每个 } A \in \Gamma, A^* \subseteq \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A\}$$

$\therefore U$ 为滤

$$\therefore \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A\} \in U$$

$$\text{令 } \mathcal{B} = \prod_U (A_i)_{i \in I}, \text{ 从而 } \mathcal{B} \models A \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A\} \in U,$$

又因为对于每个 $A \in \Gamma$ 有 $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models A\} \in U$,

因此 $\mathcal{B} \models A$ 对于每个 $A \in \Gamma$ 成立。

故 $\mathcal{B} \models \Gamma$, 即 Γ 可满足。

□



定理11.20. 设 Γ 为公式集,

若 Γ 的每个有穷子集皆可满足, 则 Γ 可满足。

证明: 设 Γ 为 \mathcal{L} -公式集且 $FV(\Gamma) = \{y_j \mid j \in J\}$ 。

令 $\{c_j \mid j \in J\}$ 为新常元符, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \{c_j \mid j \in J\}$ 。

若 $A \in \Gamma$, 则令 $A' \equiv A[\frac{c_j}{y_j}]$, $\Gamma' = \{A' \mid A \in \Gamma\}$ 。

若 Γ 的每个有穷子集皆可满足, 则 Γ' 亦然。

这是因为设 $\Delta' \subseteq \Gamma'$ 且 Δ' 有穷, 从而 $\Delta \subseteq \Gamma$ 有穷,

故有 \mathcal{L} -模型 \mathbb{M} 和赋值 σ 使 $\mathbb{M} \models_{\sigma} \Delta$,

在 \mathcal{L}' 中, 令 $(c_j)_M = \sigma(y_j)$, \mathbb{M}' 为 \mathbb{M} 的扩展,

从而 $\mathbb{M}' \models \Delta'$ 即 Δ' 可满足, 由上定理知 Γ' 可满足,

即有 \mathcal{L} -模型 \mathbb{M}' 使 $\mathbb{M}' \models \Gamma'$, 令 $\mathbb{M} = \mathbb{M}' \upharpoonright \mathcal{L}$

且令 $\sigma(y_j) = (c_j)_{M'}$, 从而 $\mathbb{M} \models_{\sigma} \Gamma$ 即 Γ 可满足。 □



以上我们给出紧性定理的语义证明，在此用到 AC 。
事实上，绝大多数教科书中紧性定理的证明是利用到 $Gödel$ 的完备性定理给出的。

证明: 设 Γ 为公式集，我们有 $con(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma$ 可满足；

若 Γ 的每个有穷子集可满足，则 Γ 的每个有穷子集协调；

反设 Γ 不可满足，从而 Γ 不协调，因此 $\Gamma \vdash \perp$ ，

这样存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vdash \perp$ ，与 $con(\Delta)$ 矛盾。 \square



The End of Lecture 11