南京大学
Nanjing University

第9讲-一阶逻辑的永真推理系统

内容概要

公理 | 规则 | 一些上层定理

与*G*的等价定理

定义9.1. 设 $\mathscr{L}$ 为一阶语言， A 为 $\mathscr{L}$ 公式，
$x_1, ..., x_n$ 为变元,则称 $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n.A$为 A 的全称化,
这里 $n = 0$ 时, $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n.A$ 为 A。

定义9.2. 一阶逻辑的 $Hilbert$ 系统 PK 由以下公理与规则组成：

第一组：命题演算公理 $A01 - A12$,这里 A, B, C 为任何公式；

第二组：

$A13.\ \forall x A \to A[\frac{t}{x}]$

$A14.\ A[\frac{t}{x}] \to \exists x A$

$A15.\ A \to \forall x A$,这里 $x \notin FV(A)$

$A16.\ \exists x A \to A$,这里 $x \notin FV(A)$

$A17.\ \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$

$A18.\ \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$

第三组：等词定理。

A19. $x \doteq x$

A20. $(x_1 \doteq y_1) \to ...((x_n \doteq y_n) \to (f(x_1, ..., x_n) \doteq f(y_1, ..., y_n)))$,

这里 f 为任何 n 元函数。

A21. $(x_1 \doteq y_1) \to ...((x_n \doteq y_n) \to (P(x_1, ..., x_n) \to P(y_1, ..., y_n)))$,

这里 P 为任何 n 元谓词。

第四组：前面各组中公理的全称化。

规则：$MP \ \dfrac{A \to B \quad A}{B}$

约定：若 $\mathscr{L}$ 中含等词 $\doteq$，则 PK 中有第三组公理且有时记

PK 为 PK_e 或 $PK_{\doteq}$ 。

定义9.3. 设 A 为公式，Γ 为公式集，

(1) 在 PK 中由 Γ 推导 A （记为 $\Gamma \vdash_{PK} A$，简记 $\Gamma \vdash A$ ）指存在序列 $A_1, ..., A_n$ 使 A 为 A_n 且对任何 $i \leqslant n$ 有

(a) A_i 为公理

或(b) $A_i \in \Gamma$

或(c) 存在 $j, k < i$ 使 A_j 为 $A_k \to A_i$，
这时称 A_i 由其前 A_j 和 A_k 实施 MP 而得。

(2) 称以上的 $A_1, ..., A_n$ 为 $\Gamma \vdash A$ 的证明过程其长为 n。

(3) 当 $\Gamma \vdash A$ 可证时,称 A 为 Γ- 定理,若 $\Gamma = \varnothing$,则称A为定理。

(4) $Th(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$

在命题逻辑中的一些结果在 PK 中同样成立。
PK 的推理定理也同理可证。

定理9.4 若 $\Gamma, C \vdash A$，则 $\Gamma \vdash C \to A$。

在PK中进行推理时,我们需要证明一些上层定理(Metatheorem)。

定理9.5. 设 $x \notin FV(\Gamma)$，若 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \vdash \forall x A$

证明：设$\Gamma \vdash A$的证明过程为$A_1, ..., A_n$,对n归纳证明$\Gamma \vdash \forall x A$如下：

情况1. A_n 为公理，从而 $\forall x A_n$ 亦然，故 $\Gamma \vdash \forall x A$。

情况2. $A_n \in \Gamma$，从而 $x \notin FV(A_n)$，

由 $A15$ 知 $A_n \to \forall x A_n$，故 $\Gamma \vdash \forall x A$。

情况3. A_n 由 A_i(其为 $A_j \to A_n$)与 A_j 实施MP而得且 $i, j < n$。

由 $I.H.$ 知 $\Gamma \vdash \forall x(A_j \to A_n), \Gamma \vdash \forall x A_j$。

又由 $A17$ 知，$\Gamma \vdash \forall x(A_j \to A_n) \to (\forall x A_j \to \forall x A_n)$，

故 $\Gamma \vdash \forall x A$。

□

定理9.6. 设常元 c 不在 Γ, A 中出现,若 $\Gamma \vdash A[\frac{c}{x}]$,则 $\Gamma \vdash \forall x A$。并且在 $\Gamma \vdash \forall x A$ 的证明过程中可不出现 c。

证明留作习题。

定理9.7. 设常元 c 不在 Γ, A, B 中出现且 $x \notin FV(B)$，

若 $\Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$，则 $\Gamma, \exists x A \vdash B$。

并且在 $\Gamma, \exists x A \vdash B$ 的证明过程中可不出现 c。

证明：因为 $\Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B$

$\Rightarrow \Gamma \vdash A[\frac{c}{x}] \to B$ （推理定理）

$\Rightarrow \Gamma \vdash \forall x(A \to B)$ (定理 9.6)

$\Rightarrow \Gamma \vdash \exists x A \to \exists x B$ (A18)

$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash \exists x B$ （$A16: \exists x B \to B$）

$\Rightarrow \Gamma, \exists x A \vdash B$

所以 $\Gamma, \exists x A \vdash B$ 成立。 $\square$

命题9.8. 设 $x \notin FV(\Gamma)$，

(1) $\vdash \neg\forall x A \to \exists x \neg A$

(2) $\vdash \neg\exists x A \to \forall x \neg A$

(3) $\vdash \forall x \neg A \to \neg\exists x A$

(4) $\vdash \exists x \neg A \to \neg\forall x A$

证明：(1) 采用倒推法

$\vdash \neg\forall x A \to \exists x \neg A$

$\Leftarrow \ \vdash \neg\exists x \neg A \to \forall x A$

$\Leftarrow \ \neg\exists x \neg A \vdash \forall x A$

$\Leftarrow \ \neg\exists x \neg A \vdash A[\frac{c}{x}]$ (定理 9.6)

$\Leftarrow \ \neg A[\frac{c}{x}] \vdash \exists x \neg A$

$\Leftarrow \ \vdash \neg A[\frac{c}{x}] \to \exists x \neg A$ (A14)

(2) 与(1)同理。

(3) $\vdash \forall x \neg A \to \neg\exists x A$

$\Leftarrow \ \forall x \neg A \vdash \neg\exists x A$

$\Leftarrow \ \exists x A \vdash \neg\forall x \neg A$

$\Leftarrow A[\frac{c}{x}] \vdash \neg\forall x \neg A$ (c为新变元)

$\Leftarrow \ \forall x \neg A \vdash \neg A[\frac{c}{x}]$

$\Leftarrow \ \vdash \forall x \neg A \to \neg A[\frac{c}{x}]$ (A13)

(4) 与(3)同理。 $\square$

事实上，我们有

$\vdash \forall x.A \leftrightarrow \neg\exists x \neg A$ 与

$\vdash \exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$，

$\forall, \exists$ 为对偶。

定理9.9. 设 A 为公式,若 $\vdash_{PK} A$ 可证,则 $\vdash A$ 在 G 中可证。

证明:设 $\vdash_{PK} A$ 可证,对$\vdash_{PK} A$的证明长度归纳来证$\vdash A$ 在G中可证。

情况1. A 为公理。

(1.1) A 为 $A01 - A12$，如前处理。

(1.2) 当 A 为 $A13$ 时：

$$\cfrac{\cfrac{A[\frac{t}{x}], \forall x A \vdash A[\frac{t}{x}]}{\forall x A \vdash A[\frac{t}{x}]}\ \forall L}{\vdash \forall x A \to A[\frac{t}{x}]}\ \to R$$

故 $\vdash A$ 在 G 中可证。

(1.3) 当 A 为 $A14$ 时，与(1.2)同理。

(1.4) 当 A 为 $A15$ 时，这里 $x \notin FV(A)$

$$\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A \vdash \forall x A}\ \forall R}{\vdash A \to \forall x A}\ \to R$$

(1.5) 当 A 为 $A16$ 时，与(1.4)同理可证。

(1.6) 当 A 为 $A17$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{B, A \vdash B \quad A \vdash A, B}{A \to B, A \vdash B} \to L}{\forall x(A \to B), \forall x A, A \to B, A \vdash B}}{\forall x(A \to B), \forall x A \vdash B}\ \forall L\text{两次}}{\cfrac{\forall x(A \to B), \forall x A \vdash \forall x B}{\vdash \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)} \to R\text{两次}}\ \forall R
$$

(1.7) 当 A 为 $A18$，与 $A17$ 同理可证（习题）

(1.8) 当 A 为 $A19-21$ ，在 $G_{\doteq}$ 中显而易见 A 可证。

情况2. 当 A 由 $B \to A$ 和 B 实施 MP 而得，如前处理。 □

与上讲定理8.5类似，我们有

定理9.10. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G 中可证，则 $\Gamma \vdash \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

证明：对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明结构作归纳来证明 $\Gamma \vdash \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

情况1. $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理。如前处理。

情况2. $\Gamma \vdash \Delta$ 由实施规则而得。

(2.1) 对于命题演算的规则，如前处理。

(2.2) 设 $\forall L: \dfrac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}$

由 $I.H.$ 知 $\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x A \vdash \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

$\because \forall x A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 在 PK 中可证

$\therefore \Gamma, \forall x A \vdash \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

(2.3) 设 $\forall R: \dfrac{\Gamma \vdash A[\frac{y}{x}], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}$

由 $I.H.$ 知 $\Gamma \vdash A[\frac{y}{x}] \vee \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

从而 $\Gamma, \neg\overline{\Delta} \vdash A[\frac{y}{x}]$，故由定理 9.6 $\Gamma, \neg\overline{\Delta} \vdash \forall x.A$ 可证，

因此 $\Gamma \vdash (\forall x.A) \vee \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

(2.4) $\exists L: \dfrac{\Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}$

由 $I.H.$ 可知 $\Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash \overline{\Delta}$ 可证从而 $\Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash \overline{\Delta}$ 可证，

这里 c 为新常元，

由定理9.7知 $\Gamma, \exists x A \vdash \overline{\Delta}$ 在 PK 中可证。

(2.5) $\exists R: \dfrac{\Gamma \vdash A[\frac{t}{x}], \exists x A, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}$

与(2.2)同理可证。 □

由以上两个命题即得

定理9.11. 设 A 为公式，

$$\vdash A \text{ 在 } G \text{ 中可证} \Leftrightarrow A \text{ 在 } PK \text{ 中可证},$$

从而 G 与 PK 等价。

本讲小结

- 公理和规则；
- 一些上层定理；
- PK 与 G 的定价性。

The End of Lecture 9