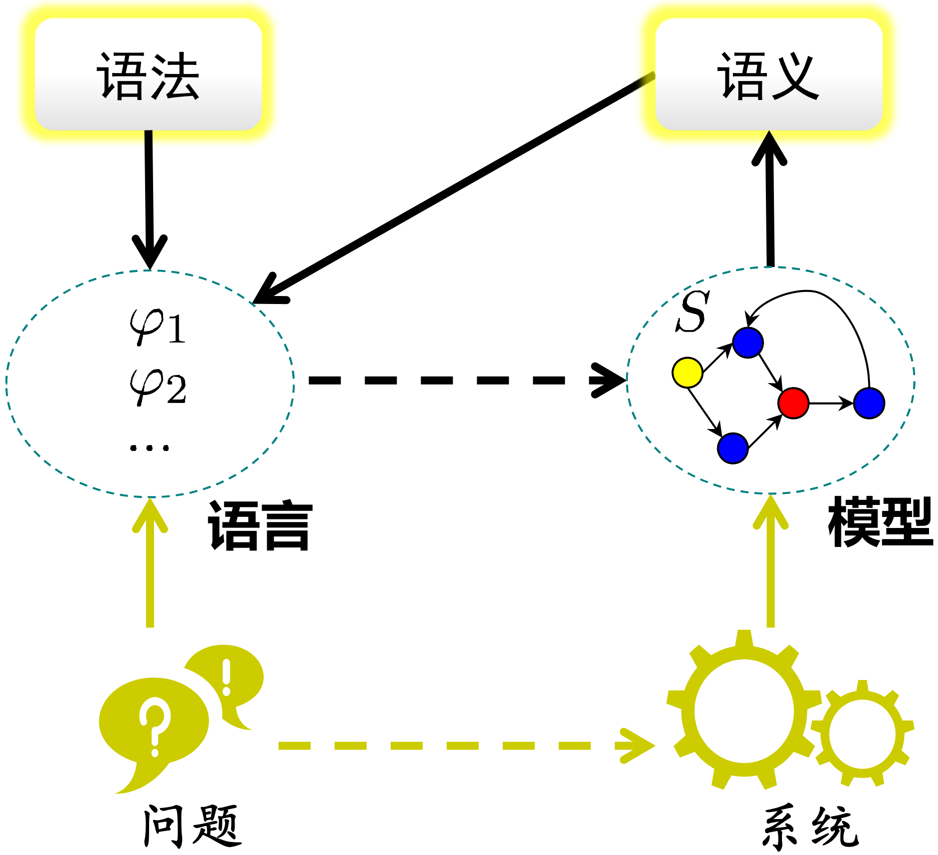
第一讲 命题逻辑

内容提要

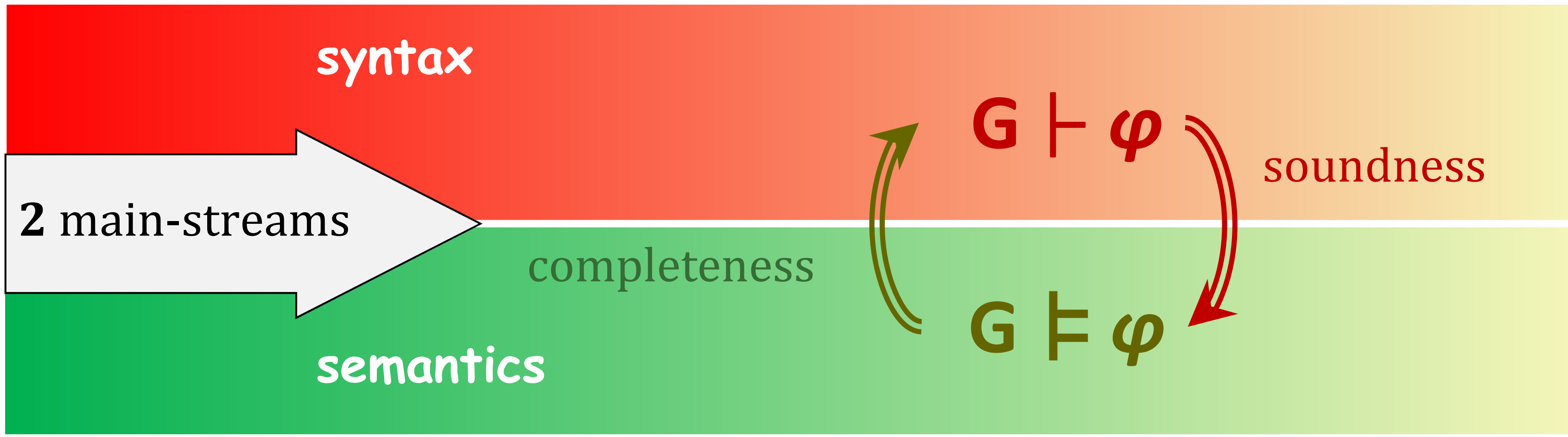
- 命题逻辑的语法
  - 符号表
  - 命题的定义
  - 结构归纳法
- 命题逻辑的语义
  - 什么是语义
  - 析合/合析范式 | 逻辑等价
- 自然推理系统及性质
  - 公理与规则
  - 可靠性| 完备性| 紧致性

语法和语义



语法和语义

- 语法（Syntax）与语义（Semantics）是数理逻辑的两个基本要素。



考虑下述C++程序

```
#include <iostream>
#include<string.h>
using namespace std;
int main()
{
    int a, b, sum;      //定义两个整型变量
    cin>>a;             //输入两个变量并赋值
    cin>>b;
    sum = a + b;        //计算两个变量的和
    cout<< sum ;        //输出两个变量的和
    return 0;
}
```

如何验证C++程序的正确性？

- 两条路径：
  - 程序正确性证明：霍尔逻辑
    - 使用公理描述程序语句对于计算状态的改变
  - 可执行文件正确性验证：软件测试
    - 验证输入输出是否满足程序规约要求

- 两者之间的联系
  - Soundness (可靠性)： 程序正确 ⟹ 程序执行正确
  - Completeness (完备性)： 程序执行正确 ⟹ 程序正确

字母表

定义1.1 (字母表). 字母表由以下成份组成：

1. 命题符：$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots, n \in \mathbf{N}$，记 $PS = \{P_n \mid n \in \mathbf{N}\}$
2. 联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$
3. 辅助符：“(”，“)”

注：

1. 本讲义中，命题符之集 PS 为可数无穷集，i.e. $|PS| = \aleph_0$。
2. 有些教科书还引入其他一些联结词，如 $\leftrightarrow$ 等。
3. 为了表达更清楚，我们可再引入一些辅助符，如 [，] 等。

命题的定义

定义1.2 (命题).

1. 命题符为命题;
2. 若 A, B 为命题, 则
   $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ 和 $(A \rightarrow B)$ 为命题;
3. 命题仅限于此。

也可以用Bacus-Naur Form定义命题为:

$$\varphi ::= P \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$$

其中 $P \in PS$.

用封包法也可定义命题：

令 $C_\neg$，$C_\wedge$，$C_\vee$，$C_\to$ 为所有字母表符号串之集上的函数：

$$C_\neg(A) = (\neg A)$$

$$C_*(A, B) = (A * B)$$

这里 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

定义1.3 (命题集). 所有命题的集合 $PROP$ 是满足以下条件的最小集合：

1. $PS \subseteq PROP$；
2. 若 $A \in PROP$，则 $C_\neg(A) \in PROP$；
3. 若 $A, B \in PROP$，则
   $\mathrm{C}_\wedge(A, B)$，$C_\vee(A, B)$ 和 $C_\to(A, B) \in PROP$；

即 $PROP$ 为在函数 $C_\neg$，$C_\wedge$，$C_\vee$ 和 $C_\to$ 下 PS 的归纳闭包。

括号引理（Parenthesis Lemma）

引理1.4 (括号引理). 若 A 为命题，则 A 中所有左括号的个数等于右括号的个数。

构造序列

引理1.5 $A \in PROP$等价于存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A 为 A_n 且对任何 $i \le n$，

或(a) $A_i \in PS$

或(b) 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$

或(c) 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$，

这里 $*$ 为 $\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$ 之一。

以上序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 被称为 A 的构造序列。

证明：令 $PROP' = \{A \mid$ 存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A_n 为 A 且对任何 $i \le n$ 或 (a) $A_i \in PS$ 或 (b) 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$ 或 (c) 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$, 这里 $*$ 为 $\wedge, \vee, \rightarrow$ 之一。$\}$

欲证 $PROP = PROP'$，只需证

(1) $PROP' \subseteq PROP$ 和 (2) $PROP \subseteq PROP'$

(1) 设 $A \in PROP'$，从而有 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 满足对任何 $i \leq n$ 有(a) 或 (b) 或 (c)。对 i 归纳证明 $A_i \in PROP$。

Basis $i = 0$，易见 $A_0 \in PS$ 从而 $A_0 \in PROP$

I.H. 设对任何 $k < i$ 有 $A_k \in PROP$

Ind. Step 对于i

Case(a) $A_i \in PS$ 从而 $A_i \in PROP$

Case(b) A_i 为 $(\neg A_k)$，这里 $k < i$，从而由 I.H.知$A_k \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$

Case(c) A_i 为 $(A_k * A_l)$，这里 $k, l < i$，从而由 I.H.知 $A_k, A_l \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$

归纳完成，故 $A_n \in PROP$，因此 $PROP' \subseteq PROP$。

(2) 由于 $PROP$ 为满足定义 1.3 中条件 (1)-(3) 的最小集合，

故只需证 $PROP'$ 满足定义1.3中条件 (1)-(3)。

易见 $PS \subseteq PROP'$，又当 $A, B \in PROP'$ 时

A, B 有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 和 $B_0, B_1, \cdots, B_m$，从而

$(\neg A)$有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, (\neg A)$，且

$(A * B)$有构造序列$A_0, A_1, \cdots, A_n, B_0, B_0, \cdots, B_m, (A * B)$，

从而 $PROP'$ 满足定义 1.3 中的条件，故 $PROP \subseteq PROP'$。

□

结构归纳

- 每个命题皆有构造过程，构造过程不一定唯一。
- 若 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 为 A 的最短构造过程，
  则称 n 为 A 的构造长度。
- 下面常常会对 A 的结构作归纳证明一些性质，
  事实上是对 A 的构造长度作归纳，而这是自然数上的归纳。

命题的语义

- 什么是命题的语义？

  对于任意的**赋值** $v: PS \to \{T, F\}$，定义一个**解释**

$$\hat{v}: PROP \to \{T, F\}$$

联结词定义的布尔函数

定义1.6. 令真值集 $\mathbf{B} = \{T, F\}$，

- 联结词 $\neg$ 被解释为一元函数 $H_\neg : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$；
- 联结词 $*$ 被解释为二元函数 $H_* : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}$，这里$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$；
- $H_\neg$，$H_\wedge$，$H_\vee$，$H_\to$ 定义如下：

P	Q	$H_\neg(P)$	$H_\wedge(P,Q)$	$H_\vee(P,Q)$	$H_\to(P,Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

这就是所谓的真值表。

命题的语义的归纳定义

定义1.7 (命题的语义).

- v 为一个赋值指它为函数 $v: PS \to \mathbf{B}$，从而对任何命题符 P_i，$v(P_i)$ 为T或F。
- 对于任何赋值 v，定义 $\hat{v}: PROP \to \mathbf{B}$ 如下：

$$\hat{v}(P_n) = v(P_n)，\ n \in \mathbf{N};$$

$$\hat{v}(\neg A) = H_{\neg}(\hat{v}(A));$$

$$\hat{v}(A * B) = H_{*}(\hat{v}(A), \hat{v}(B))，这里\ * \in \{\wedge, \vee, \to\}。$$

对于命题 A，它的解释 $\hat{v}(A)$ 为 T 或 F。

事实上，真值 $\hat{v}(A)$ 仅与 A 中出现的命题符有关。

另一种等价的语义定义

给定一个模型（赋值）$v : PS \to \mathbf{B}$，对于任意 $\varphi \in PROP$

$v \vDash \varphi$ 定义如下：

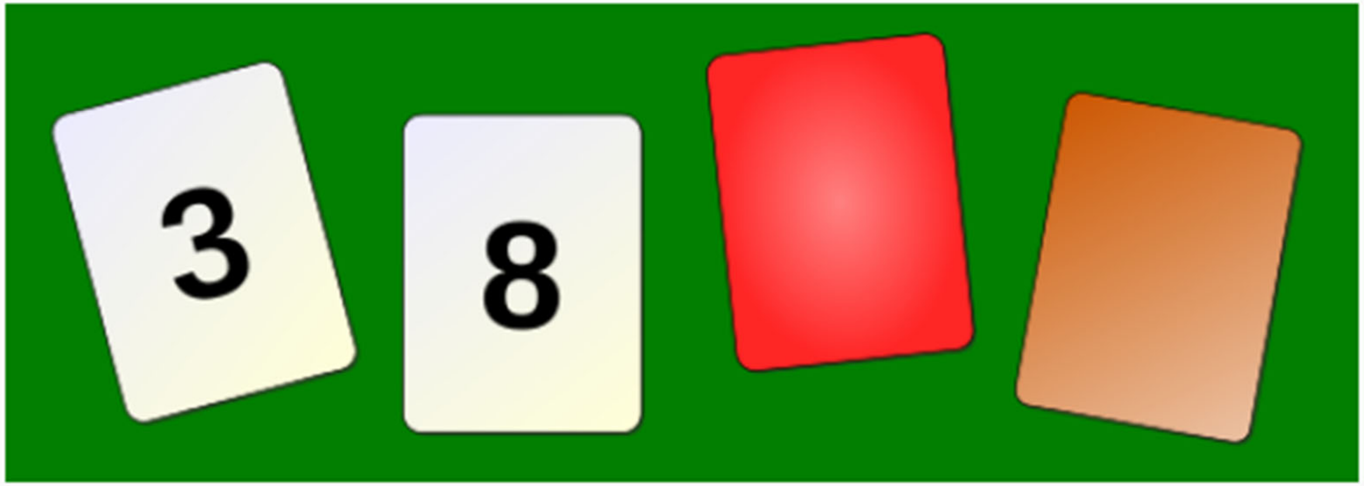
- $v \vDash P$ iff $v(P) = T$
- $v \vDash \neg\varphi$ iff $v \nvDash \varphi$
- $v \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ iff $v \vDash \varphi_1$ and $v \vDash \varphi_2$
- $v \vDash \varphi_1 \vee \varphi_2$ iff $v \vDash \varphi_1$ or $v \vDash \varphi_2$
- $v \vDash \varphi_1 \to \varphi_2$ iff not （$v \vDash \varphi_1$ and $v \nvDash \varphi_2$) iff $v \nvDash \varphi_1$ or $v \vDash \varphi_2$

此外，还可以定义：

$\vDash \varphi$ iff $\forall v : v \vDash \varphi$

Wason测试

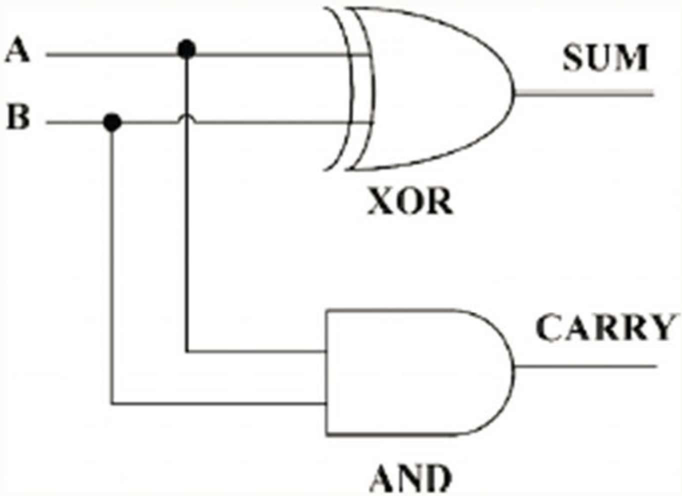
桌面上有四张牌，每张牌一面是数字，一面是颜色, 能看到的情况如下。现在有人宣称: (对这些牌来说) 如果一面是偶数, 那么另一面一定是红色的. 请问你要翻开什么牌才能完全验证他说的是不是真话?



数字电路与命题逻辑

电路中的逻辑门可通过晶体管实现: 根据输入的高/低电平输出高/低电平 (布尔函数).

二进制加法之半加器 (half adder)

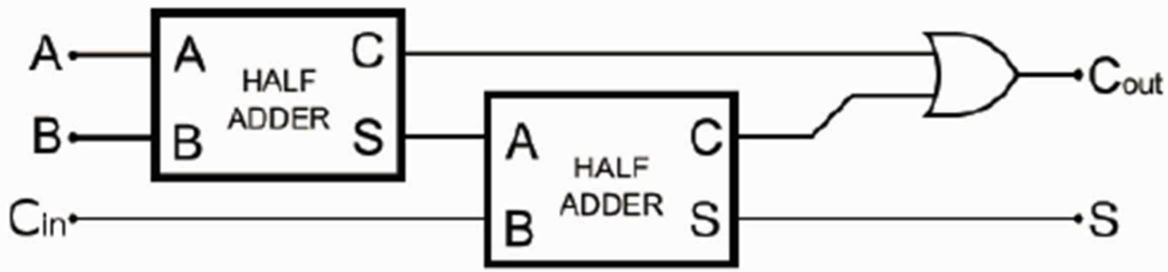


$$SUM = A \text{ XOR } B, CARRY = A \wedge B$$

A	B	SUM	CARRY
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

数字电路与命题逻辑

二进制加法之全加器 (full adder):

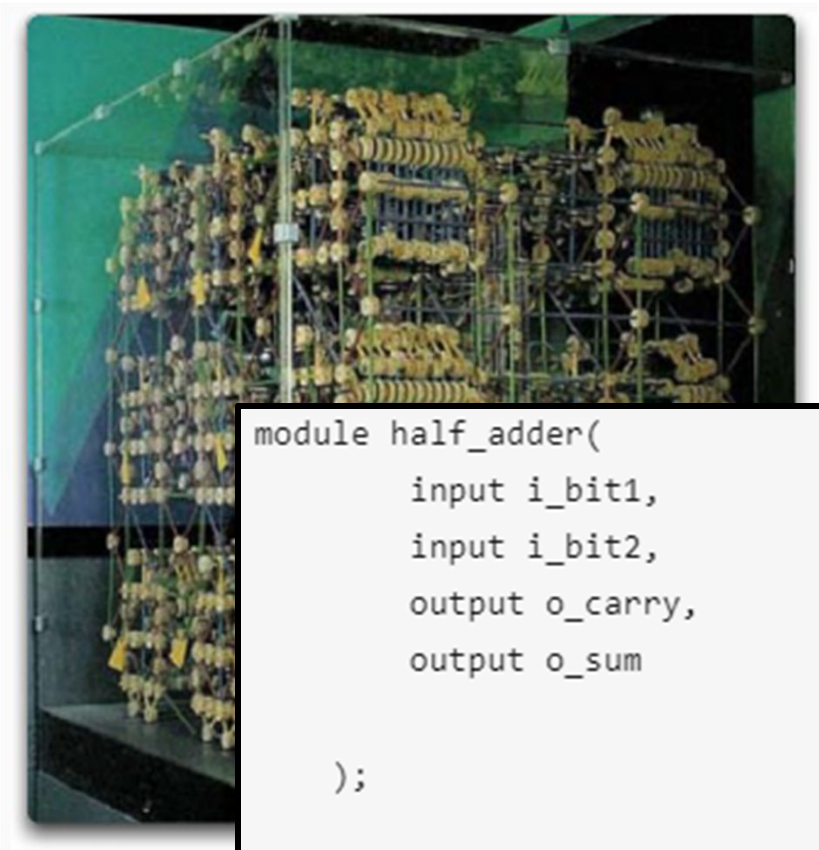


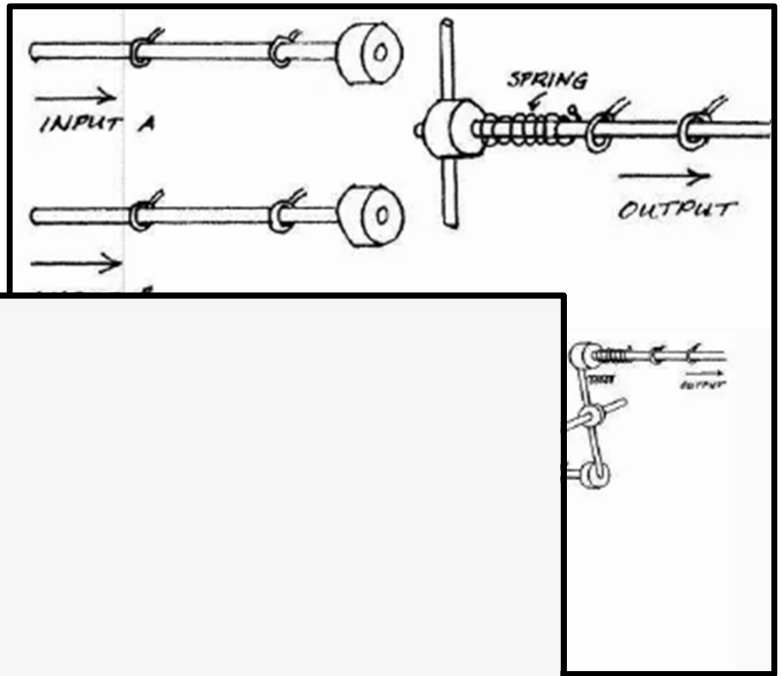
$$C_{out} = (A \wedge B) \vee ((A \text{ XOR } B) \wedge C_{in}) = (A \wedge B) \text{ XOR } ((A \text{ XOR } B) \wedge C_{in})$$

$$S_{out} = (A \text{ XOR } B) \text{ XOR } C_{in}$$

逻辑电路可以被写成命题逻辑的公式! 两个电路输出是否等价可以被转化为两个公式是否等价 $\varphi \leftrightarrow \psi$ (电路优化).

集成电路与命题逻辑






```
module half_adder(
        input i_bit1,
        input i_bit2,
        output o_carry,
        output o_sum

    );

        assign o_carry = i_bit1 & i_bit2; //bitwise and
        assign o_sum = i_bit1 ^ i_bit2;   //bitwise xor

endmodule
```

Meta-language

注意 $\models$ 不是语言中的符号, 而是在上层语言(meta-language)中。

在上层语言中, 人们也需要用联结词如not, and, or, imply 等,

例如我们有

- $v \models \neg A$ iff not $v \models A$
- $v \models (A \wedge B)$ iff $(v \models A)$ and $(v \models B)$
- $v \models (A \vee B)$ iff $(v \models A)$ or $(v \models B)$
- $v \models (A \rightarrow B)$ iff $(v \models A)$ implies $(v \models B)$

设 A 为命题，令 $FV(A) = \{ P \in PS \mid P$ 出现于 A 中 $\}$。

引理1.8. 设 A 为命题，v_1, v_2 为赋值，

若 $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$，则 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$。

证明: 设 $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$，即对于 $P \in FV(A)$，

$v_1(P) = v_2(P)$。以下对 A 的结构作归纳证明 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A) \ldots (*)$。

Basis 当 $A \in PS$ 时，易见 (*) 成立。

I.H. 设 A为B，C 时 (*) 成立。

Ind. Step

情况$\neg$： A 为 $\neg B$，

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(\neg B) = H_\neg(\hat{v}_1(B)) \stackrel{I.H.}{=} H_\neg(\hat{v}_2(B)) = \hat{v}_2(\neg B) = \hat{v}_2(A)$$

情况$*$： $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$，$A$ 为 $B * C$。

$$\begin{aligned}\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(B * C) = H_*(\hat{v}_1(B), \hat{v}_1(C)) &\stackrel{I.H.}{=} H_*(\hat{v}_2(B), \hat{v}_2(C)) \\ &= \hat{v}_2(B * C) = \hat{v}_2(A)\end{aligned}$$

□

例1.1. 设 A 为 $(\neg((P \to Q) \land (Q \to P)))$，$v$ 为赋值且 $P, Q \in PS$。若 $v(P) = T, v(Q) = F$，则计算 $\hat{v}(A)$ 如下表：

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \land (Q \to P)$	A
T	F	F	T	F	T

Semantic Consequence

定义1.9. 设 A 为命题，v 为赋值。

1. v 满足 A，记为 $v \vDash A$，指 $\hat{v}(A) = T$；
2. A 为永真式 (tautology)，记为 $\vDash A$，
   指对任何 v 有 $\hat{v}(A) = T$；
3. A 可满足指有 v 使 $v \vDash A$；
4. 设 Γ 为命题集，A 为 Γ 的语义结论，记为 $\Gamma \vDash A$，
   指对所有 v，若对任何 $B \in \Gamma$ 有 $\hat{v}(B) = T$ 则 $\hat{v}(A) = T$。

例1.2. $A \to A$，$\neg\neg A \to A$，$(A \wedge B) \to (B \wedge A)$ 为永真式。

例1.3. 证明$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 为永真式。

证明：用下列的真值表法

A	B	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$\square$

命题与真值函数

定义1.10. 设 A 为命题，$FV(A)=\{Q_1,\cdots,Q_n\}$。

n 元函数 $H_A:\mathbf{B}^n\mapsto\mathbf{B}$ 定义如下：

对于任何 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{B}^n$，$H_A(a_1,\cdots,a_n)=\hat{v}(A)$，

这里赋值 v 满足 $v(Q_i)=a_i(1\le i\le n)$。

下面称 $f:\mathbf{B}^n\mapsto\mathbf{B}$ 为n元真值函数，称H_A为由A定义的真值函数。

例1.4. 设 A 为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$，由下列真值表知 $H_A : \mathbf{B}^2 \mapsto \mathbf{B}$ 为不可兼或运算。

P	Q	A	$H_A(P, Q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

由 A 可定义真值函数 H_A，反之给定真值函数 $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$，是否存在命题 A 使 $f = H_A$ ？

答案是肯定的！

析合范式 -合析范式

定义1.11.

1. 命题 A 为析合范式 ($\vee\wedge$-nf) 指 A 呈形 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$，
   这里 $P_{i,k}$ 为命题符或命题符的否定(即呈形 $\neg P_i$)。
2. 命题 A 为合析范式 ($\wedge\vee$-nf) 指 A 呈形 $\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n} Q_{j,k})$，
   这里 $Q_{j,k}$ 为命题符或命题符的否定。

以上

- $\bigwedge_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3) \ldots \wedge B_n) \ldots)$ 的简写；
- $\bigvee_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \vee B_2) \vee B_3) \ldots \vee B_n) \ldots)$ 的简写。

任意真值函数均可表示为范式

定理1.12. 设 $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$。

1. 存在命题 A 其为 $\vee\wedge$-nf 使 $f = H_A$；
2. 存在命题A' 其为 $\wedge\vee$-nf 使 $f = H_{A'}$。

Proof. 设$f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$，令

- $T_f = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = T\}$
- $F_f = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = F\}$

$\because T_f$ 和 F_f 皆为有穷集，$\therefore$ 可设

- $T_f = \{(a_{i1}, \cdots, a_{in}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq i \leq m\}$
- $F_f = \{(b_{j1}, \cdots, b_{jn}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq j \leq l\}$

这里 $m+l=2^n$。令

$$P^*_{i,k}=\begin{cases}P_k, & 若\ a_{ik}=T,\\ \neg P_k, & 若\ a_{ik}=F.\end{cases}$$

$$A=\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n}P^*_{i,k})$$

又令

$$Q^*_{j,k}=\begin{cases}\neg P_k, & 若\ b_{jk}=T,\\ P_k, & 若\ b_{jk}=F.\end{cases}$$

$$A'=\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n}Q^*_{jk})$$

易见 $FV(A)=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$。
欲证 $H_A=f$，
只需证　令 $v(P_i)=x_i$，我们有 $f(x_1,\ldots,x_n)=\hat{v}(A)$
只需证　$\hat{v}(A)=T$ iff $(x_1,\ldots,x_n)\in T_f$，i.e. $v\vDash A$ iff $(x_1,\ldots,x_n)\in T_f$

$\because$

$$P_{i,k}^{*}=\begin{cases}P_k, & 若\ a_{ik}=T,\\ \neg P_k, & 若\ a_{ik}=F.\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
v\vDash A \text{ iff } & v\vDash\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{k=1}^{n}P_{i,k}^{*}\right)\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad v\vDash\left(\bigwedge_{k=1}^{n}P_{i,k}^{*}\right)\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad 对所有\ k\le n\ 有\quad v\vDash P_{i,k}^{*}\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad 对所有\ k\le n\ 有\quad \hat{v}(P_{i,k}^{*})=T\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad 对所有\ k\le n\ 有\quad v(P_k)=a_{ik}\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad 对所有\ k\le n\ 有\quad x_k=a_{ik}\\
\text{iff } & 有\ i\le m\ 使\quad (x_1,\ldots,x_n)=(a_{i1},\ldots,a_{in})\\
\text{iff } & (x_1,\ldots,x_n)\in T_f
\end{aligned}
$$

$\therefore H_A=f$，同理可证 $H_{A'}=f$。 $\square$

例1.5. 求 $((P \wedge Q) \to R) \wedge P$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

Solution. 不妨设 $P, Q, R \in PS$
先计算出下列真值表

P	Q	R	$((P \wedge Q) \to R) \wedge P$	$\vee\wedge$-nf	$\wedge\vee$-nf
T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	
T	T	F	F		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	F	T	T	$P \wedge \neg Q \wedge R$	
T	F	F	T	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	
F	T	T	F		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
F	T	F	F		$P \vee \neg Q \vee R$
F	F	T	F		$P \vee Q \vee \neg R$
F	F	F	F		$P \vee Q \vee R$

它的 $\vee\wedge$-nf:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

它的 $\wedge\vee$-nf:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

$\square$

逻辑等价

定义1.13. 设 A，B 为命题，A 与 B 逻辑等价，记为 $A \simeq B$，指对任何赋值 v，

$$v \vDash A \text{ iff } v \vDash B$$

命题1.14.

1. $A \simeq A$;
2. 若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$;
3. 若 $A \simeq B$ 且 $B \simeq C$，则 $A \simeq C$;
4. 若 $A \simeq B$，则 $(\neg A) \simeq (\neg B)$;
5. 若 $A_1 \simeq B_1$ 且 $A_2 \simeq B_2$，则 $(A_1 * A_2) \simeq (B_1 * B_2)$
   这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

任意两个具有相同命题符集的命题，它们逻辑等价 iff 它们定义的真值函数相等

命题1.15. 设 $FV(A \wedge B) = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ 且 $H_A : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$，$H_B : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$。我们有 $A \simeq B$ iff $H_A = H_B$。

命题1.16. 若 A 为命题，则存在 $\wedge\vee$-nf B 和 $\vee\wedge$-nf B' 使 $A \simeq B$ 且 $A \simeq B'$，这时称 B 和 B' 分别为 A 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

任意命题均有逻辑等价的范式

证明： 由定理1.12 和命题1.15 即得。

任意真值函数均可表示为范式

联结词的完全组

由定理1.12 知，对于任何 n 元真值函数 f，存在命题 A 其中仅用联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 使 $f = H_A$。

这就说明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是所谓联结词的函数完全组。

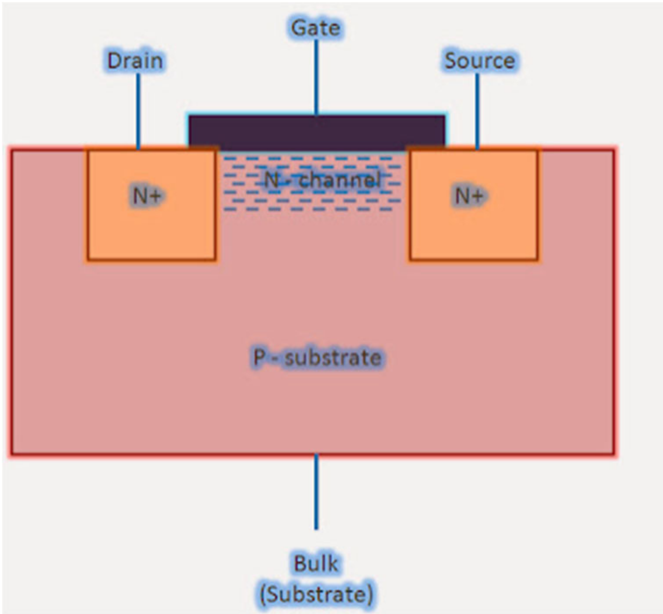
又由于

- $A \wedge B \simeq \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \vee B \simeq \neg(\neg A \wedge \neg B)$

故 $\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$ 亦为联结词的函数完全组。

CMOS

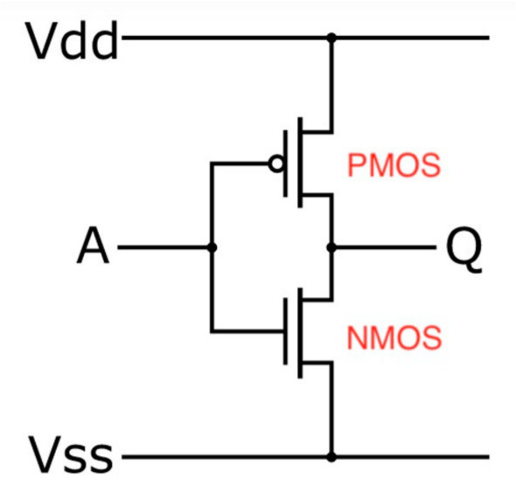
- CMOS: Complementary Metal Oxide Semiconductor（互补金属氧化物半导体）



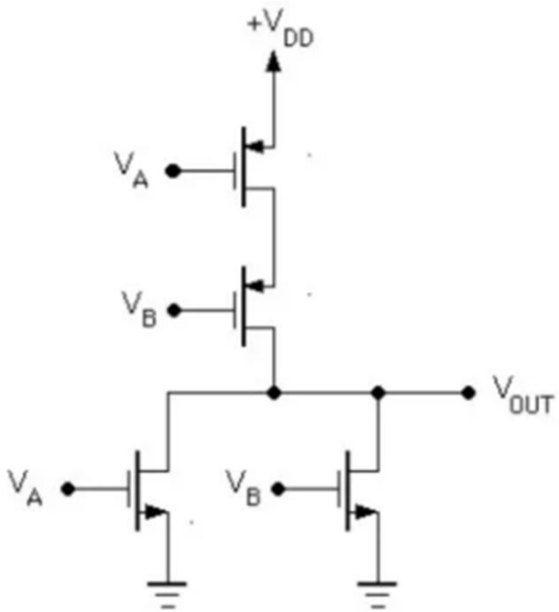
- PMOS: positive channel Metal Oxide Semiconductor
  - ➢ 低通晶体管
- NMOS: negative channel Metal Oxide Semiconductor
  - ➢ 高通晶体管

CMOS与VLSI芯片

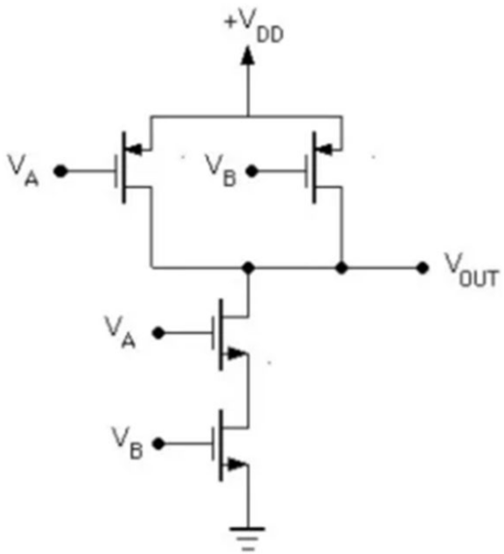
- VLSI: very-large-scale integration，超大规模集成电路



非门（反相器）



或非门



与非门

例1.6. 求 $\neg((P \wedge Q) \to R)$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

Solution.

$$
\begin{aligned}
&\because \neg((P \wedge Q) \to R) \\
&\simeq \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) \\
&\simeq \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \\
&\simeq \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\simeq (\neg\neg P) \wedge (\neg\neg Q) \wedge \neg R \\
&\simeq P \wedge Q \wedge \neg R
\end{aligned}
$$

$\therefore P \wedge Q \wedge \neg R$ 既为原式的 $\wedge\vee$-nf 又为 $\vee\wedge$-nf。

定义1.17. 一个 sequent 是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$，这里Γ, Δ为命题的有穷集合（可为空）,称Γ为前件,Δ为后件。命题逻辑的自然推理系统 G' 由以下 公理 和 规则 组成,
$\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合，A, B 表示任何命题。

- 公理： $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

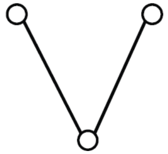
$$\rightarrow L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

树状推理模式

系统 G' 中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，呈形 $\dfrac{S'}{S}$ 或 $\dfrac{S_1, S_2}{S}$，这可以被看作树

或



规则的upper sequent S_1, S_2 被称为前提,lower sequent被称为结论。G' 中规则被称为推理规则，规则中被作用的命题被称为主命题，而不变的命题被称为辅命题。

每个公理和规则是模式（schema），它们可有无穷多个实例。

例1.7. $\dfrac{A, B \vdash P, D \qquad A, Q, B \vdash D}{A, P \to Q, B \vdash D}$ 为 $\to L$ 的实例。

G'的一些基本概念

定义1.18. 设 Γ 为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$\Delta$ 为 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable）指存在赋值 v 使 $v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$ 这时称 v 反驳 $\Gamma \vdash \Delta$。
2. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效（valid）指对任何赋值 v，$v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ 这时称 v 满足 $\Gamma \vdash \Delta$。
3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。
4. 当 $m = 0$ 时，$\vdash B_1, \cdots, B_n$ 有反例指 $(\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$ 可满足；$\vdash B_1, \cdots, B_n$ 有效指 $(B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ 永真。
5. 当 $n = 0$ 时，$A_1, \cdots, A_n \vdash$ 有反例指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 可满足；$A_1, \cdots, A_m \vdash$ 有效指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 不可满足。
6. 约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效。

命题1.19. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效 iff $\Gamma \vdash \Delta$ 无反例。

G'的一些性质

引理1.20. 对于 G' 系统的每条异于 cut 的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论 iff v 至少反驳规则的一个前提；
2. v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提。
3. 对于 G' 中的每条异于 cut 的规则，每个前提有效 iff 结论有效。

注：若 v 反驳 cut 的结论，则 v 至少反驳 cut 的一个前提，反之不然。

反例：

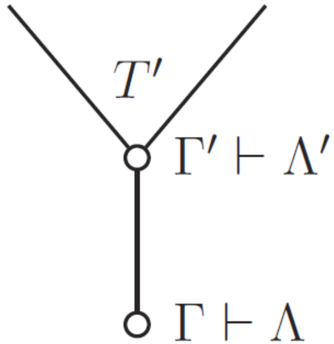
$$\frac{P_1 \vdash P_2 \qquad P_2 \vdash P_3}{P_1 \vdash P_3}\ \text{cut}$$

取 $v(P_1) = v(P_3) = T$，$v(P_2) = F$ 即可。

证明树

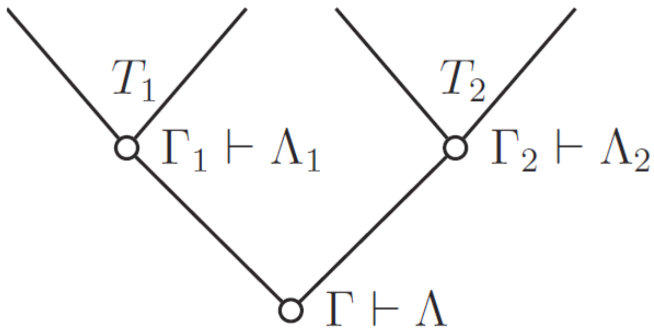
定义1.21. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 sequent，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

1. 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 $\mathbf{G}'$ 公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树。
2. 当 $\dfrac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\mathbf{G}'$ 规则，若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，则树 T:



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

3. 当 $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_1 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\mathbf{G}'$ 规则，若T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树 $(i = 1, 2)$，树 T:



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

可证

定义1.22. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 sequent，$\Gamma \vdash \Lambda$ 可证（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例1.8. 证明

1. $\vdash A \to A$
2. $\vdash A \vee \neg A$
3. $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

可证。

证明:

1.

$$\dfrac{\overset{Ax}{A \vdash A}}{\vdash A \to A}\ {\to}R$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{Ax}{A \vdash A}}{\vdash A, \neg A}\ \neg R}{\vdash A \vee \neg A}\ \vee R$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{Ax}{A \vdash A}}{A, \neg A \vdash}\ \neg L}{A \wedge \neg A \vdash}\ \wedge L}{\vdash \neg(A \wedge \neg A)}\ \neg R$$

$\square$

G'的Soundness

定理1.23 (G' 的 Soundness). 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

证明: 下面对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构归纳证明 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，即 $\Gamma \vDash \Delta$。

$\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，易见 $\Gamma \vDash \Delta$。先设下面的 (R_1) 和 (R_2) 不是规则 cut。

情形1: $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}(R_1)$$ 由 I.H.知 $\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，从而由引理1.20 知 $\Gamma \vDash \Delta$。

情形2: $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}(R_2)$$ 由 I.H. 知$\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，$\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，从而由引理1.20知$\Gamma \vDash \Delta$。

情形3: 设 Γ 为 Γ_1, Γ_2 且 Δ 为 Δ_1, Δ_2， $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}(cut)$$

由 I.H.知$\Gamma_1 \vDash \Delta_1, A$ 且 $\Gamma_2, A \vDash \Delta_2$。反设非 $\Gamma \vDash \Delta$，即有 v 反驳$\Gamma \vDash \Delta$。

1. 当 $v(A) = T$ 时，v 反驳 $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$，矛盾！
2. 当 $v(A) = F$ 时，v 反驳 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$，矛盾！

故 $\Gamma \vDash \Delta$.

□

G'的Completeness

定理1.24 (G'的completeness).若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证。

*证明:*设 m 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 中联结词出现的个数，以下对 m 作归纳证明

(*):在 G' 中存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的一个无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^m$.

当 $m = 0$ 时，$\Gamma \vdash \Delta$ 中无联结词，故呈形 $P_1, \cdots, P_n \vdash Q_1, \cdots, Q_n$, P_i, Q_j 均为命题符，$\because \Gamma \vDash \Delta$，$\therefore$ 必有一个 P 同时出现于 $\Gamma \vdash \Delta$ 的左右两边，从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，它有证明树，其中无规则。故(*)成立.

对于 $m > 0$，我们将按照联结词在 Γ, Δ 中最外位置的情形来证明(*)

情形1. 设 Γ 为 $\neg A, \Gamma'$. 我们可作 $\Gamma \vdash \Delta$ 的推理如下：

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

$\because \Gamma \vDash \Delta$,

$\therefore$ 由引理 1.20，$\Gamma' \vDash \Delta, A$，而 $\Gamma' \vDash \Delta, A$ 中联结词出现的个数 $\leq m-1$，
从而由 I.H.知 $\Gamma' \vDash \Delta, A$ 有一个无 cut 证明，其中规则个数 $< 2^{m-1}$,
因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无cut证明，其中规则个数 $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$.

情形2. 设 Δ 为 $\neg B, \Delta'$.与情形 1 同理.

情形3. 设 Γ 为 $A \wedge B, \Gamma' \models \Delta$，我们有推理

$$\frac{A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

从而由引理1.20，$A, B, \Gamma' \models \Delta$，

由 I.H.知 $A, B, \Gamma' \models \Delta$ 有无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^{m-1}$，

因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$.

情形4. 设 Δ为$\Delta', A \wedge B$，我们有推理

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta', A \qquad \Gamma \vdash \Delta', B}{\Gamma \vdash \Delta', A \wedge B}$$

$\therefore$ 由引理 1.20，$\Gamma \models \Delta', A$ 且 $\Gamma \models \Delta', B$。

而 $\Gamma \vdash \Delta', A$ 与 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 中的联结词出现的个数 $\leq m-1$，

故由 I.H. 知 $\Gamma \vdash \Delta', A$ 和 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 皆有一个无 cut 证明，其中规则数 $< 2^{m-1}$，

从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 有无 cut 证明，其中规则数 $\leq (2^{m-1} - 1) + (2^{m-1} - 1) + 1 < 2^m$.

其余情况同理可证.归纳完成. $\square$

一些推论

系1.25 $\Gamma \vdash \Delta$ 可证 iff $\Gamma \vdash \Delta$ 有效.

定理1.26 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中有一个无 cut 证明.

证明: 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 可证，则 $\Gamma \vDash \Delta$,

由定理1.24 知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无 cut 证明. $\square$

紧致性(Compactness)定理

定理1.27(G'的compactness).设 Γ 为命题的集合,若 Γ 的任何有穷子集可满足，则 Γ 可满足。

定义1.28 称 Δ 为有穷可满足指 Δ 的任何有穷子集可满足。

引理1.29 所有命题可被排列为 $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots \quad (n \in \mathbf{N})$。

引理1.30 设 Δ 为有穷可满足，A 为命题。若 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，则 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 为有穷可满足。

证明: 设 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，反设 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 也不为有穷可满足，从而存在 $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ 使 Δ_1, Δ_2 皆有穷且 $\Delta_1 \cup \{A\}$ 与 $\Delta_2 \cup \{\neg A\}$ 皆不可满足。由于 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 为 Δ 的有穷子集，故有 v 使 $v \vDash \Delta_1 \cup \Delta_2$，然

(1) 当 $v \vDash A$ 时，$v \vDash \Delta_1 \cup \{A\}$，从而矛盾。

(2) 当 $v \nvDash A$ 时，$v \vDash \Delta_2 \cup \{\neg A\}$，从而矛盾。

故 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 有穷可满足。 $\square$

紧致性定理的证明

证明：令

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\} & ，若 \Gamma_n \cup \{A_n\} 有穷可满足， \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_n\} & ，否则。 \end{cases}$$

先对 n 归纳证明 Γ_n 有穷可满足......(*)。

Basis $n = 0$ 时，易见 (*) 成立。

I.H. 设 Γ_n 有穷可满足。

Ind. Step 若 $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ 有穷可满足，则 Γ_{n+1} 有穷可满足，否则由引理 1.30 知 $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ 有穷可满足，即 Γ_{n+1} 有穷可满足。归纳完成。

令 $\Delta = \bigcup\{\Gamma_n | n \in \mathbf{N}\}$，我们有 Δ 为有穷可满足。

设 Φ 为 Δ 的有穷子集，从而有 k 使 $\Phi \subseteq \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$，故 $\Phi \subseteq \Gamma_{k+1}$，因此 Δ 有穷可满足。

对任何命题变元 p_i，$p_i \in \Delta$ 或 $\neg p_i \in \Delta$ 且恰具其一。

设 p_i 为 A_l。若 $p_i \notin \Delta$，则 $A_l \notin \Delta$，从而 $\Gamma_l \cup \{A_l\}$ 不为有穷可满足，因此 $\neg A_l \in \Gamma_{l+1}$，故 $\neg p_i \in \Delta$。

又反设 $p_i, \neg p_i \in \Delta$，从而 Δ 的子集 $\{p_i, \neg p_i\}$ 不可满足，故 Δ 不为有穷可满足。

令

$$v(p_i) = \begin{cases} T & ，若\ p_i \in \Delta \\ F & ，若\ \neg p_i \in \Delta \end{cases}$$

以下对 A 的结构归纳证明：若 $A \in \Delta$ 则 $v \vDash A$，否则 $v \nvDash A$......(*)。

情形 1. A 为命题变元 p_i，由上知 (*) 成立。

情形 2. A 为 $\neg B$。

1. 当 $A \in \Delta$ 时，Δ 为有穷可满足，所以 $B \notin \Delta$，从而由 I.H.知 $v \nvDash B$，从而 $v \vDash \neg B$。
2. 当 $A \notin \Delta$ 时，即 $\neg B \notin \Delta$，设 B 为 A_l，从而 $\Gamma_l \cup \{B\}$ 有穷可满足(若不然,有 $\neg B \in \Gamma_{l+1}$，与 $\neg B \notin \Delta$ 矛盾)。故 $B \in \Delta$，由 I.H. 知 $v \vDash B$，从而 $v \nvDash A$。

情形 3. A 为 $B \wedge C$。

1. 当 $A \in \Delta$ 时，有 $B \in \Delta$。
   反设 $B \notin \Delta$，从而 $\neg B \in \Delta$，但 $\{A, \neg B\}$ 不可满足，矛盾。
   因此 $B \in \Delta$，同理 $C \in \Delta$。
   由 I.H.知 $v \vDash B, v \vDash C$，从而 $v \vDash B \wedge C$，即 $v \vDash A$。

2. 当 $A \notin \Delta$ 时，有 $B \notin \Delta$ 或 $C \notin \Delta$。
   反设 $B \in \Delta$ 且 $C \in \Delta$，从而由 $A \notin \Delta$ 知 $\neg A \in \Delta$，
   然 $\{\neg A, B, C\}$ 不可满足，故矛盾。
   因此 $B \notin \Delta$ 或 $C \notin \Delta$。
   不妨设 $B \notin \Delta$，从而 $v \nvDash B$，因此 $v \nvDash A$。

其他情形同理可证 (*) 成立。

因此我们有 $v \vDash \Delta$，故 Δ 可满足，从而 Γ 可满足。 $\square$

本讲小结

- 命题逻辑的语法
- 命题逻辑的语义
- 自然推理系统G’
- 3个重要的定理
  - Soundness
  - Completeness
  - Compactness