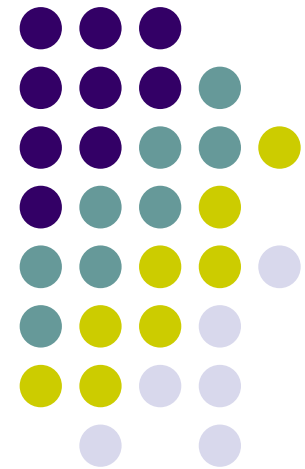




南京大学
Nanjing University

第10讲-Gentzen的 Hauptsatz





本讲将给出一阶逻辑 Gentzen 系统的 Hauptsatz (德文意为主要定理)。在证明Hauptsatz之前，我们先给出一阶逻辑的 Gentzen系统 LK，这里的LK与以前讲述的G系统是等价的，但在表述上两点不同，

- 一是在一阶语言中区分自由变元与约束变元，
- 二是在矢列中前件与后件为有穷序列，以前把它们看作有穷集合是为了规则简化。

Hauptsatz 首先由 Gentzen 证明，后有一些修改的证法，本讲采用Buss的证法(参见[6])，该方法较为简洁。



定义10.1. 一阶语言的字母表由以下成分组成:

(1) 逻辑符集合:

(a) 自由变元集 $FV = \{a, a', a'', \dots\}$

(b) 约束变元集 $BV = \{x, x', x'', \dots\}$

在本讲中, 我们采取 FV 与 BV 皆为可数无穷集, 且
自由变元由 a, b, c, \dots 等表示, 约束变元由 x, y, z, \dots 等表示。

(c) 联结词: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

(d) 量词: \forall, \exists

(e) 辅助符: $(,)$ 和,



(2) 非逻辑符集合 \mathcal{L} :

- (a) 常元符: $\mathcal{L}_c = \{c_0, c_1, \dots\}$, 这里 \mathcal{L}_c 为可数集, 可为空集。
- (b) 函数符: $\mathcal{L}_f = \{f_0, f_1, \dots\}$, 这里 \mathcal{L}_f 为可数集, 对于每个函数 f , 赋于一个正整数 $\mu(f)$, 其为 f 的元数(*arity*)。
- (c) 谓词符: $\mathcal{L}_p = \{p_0, p_1, \dots\}$, 这里 \mathcal{L}_p 为可数集, 对于每个谓词 p , 赋于一个非负整数 $\mu(p)$, 其为 p 的元数, 当 $\mu(p)$ 为 0 时, 我们称 p 为命题。

以后记 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c \cup \mathcal{L}_f \cup \mathcal{L}_p$ 。



定义10.2 (项).

- (1) 每个自由变元为项;
- (2) 每个常元为项;
- (3) 若 f 为 n 元函数且 t_1, \dots, t_n 为项, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 为项;
- (4) 项仅限于此。



定义10.3 (公式).

若 P 为 n 元谓词, t_1, \dots, t_n 为项, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 被称为原子公式。
以下归纳定义公式:

- (1) 每个原子公式为公式;
- (2) 若 A, B 为公式, 则 $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B)$ 和 $(A \rightarrow B)$ 为公式;
- (3) 若 A 为公式, a 为自由变元且 x 为约束变元其不出现于 A 中, 则 $\forall x A'$ 和 $\exists x A'$ 为公式, 这里 A' 由在 A 中将 x 替代 a 的所有出现而得。

我们将用 A, B, C 等表示公式。没有自由变元的公式被称为句子。
当 \mathcal{L} 确定时, 项与公式皆由此而定, 有时把 \mathcal{L} 中的公式和项写为 \mathcal{L} -公式和 \mathcal{L} -项。



定义10.4 (公式的度).

设 A 为公式, 它的度 $d(A)$ 定义如下:

(1) $d(A) = 0$, 当 A 为原子公式时;

(2) $d(\neg A) = d(A) + 1$;

(3) $d(A \wedge B) = d(A \vee B) = d(A \rightarrow B) = \max \{d(A), d(B)\} + 1$;

(4) $d(\forall x A) = d(\exists x A) = d(A) + 1$

$d(A)$ 反映 A 的复杂度, 以下对 A 的结构作归纳就是对 $d(A)$ 归纳。



定义10.5 (子公式).

设 A 为公式, 对 A 的结构归纳定义 A 的子公式集 $sub(A)$ 如下:

- (1) 当 A 为原子公式时, $sub(A) = \{A\}$;
- (2) 当 A 为 $\neg B$ 时, $sub(A) = sub(B) \cup \{A\}$;
- (3) 当 A 为 $B \wedge C$ 或 $B \vee C$ 或 $B \rightarrow C$ 时,
$$sub(A) = sub(B) \cup sub(C) \cup \{A\};$$
- (4) 当 A 为 $\forall x B(x)$ 或 $\exists x B(x)$ 时,
$$sub(A) = (\cup \{sub(B(t)) | t \text{ 为项}\}) \cup \{A\};$$

例:

- (1) $\forall y(A(y) \wedge \exists x B(x))$ 为公式。
- (2) $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$ 不为公式。
- (3) $A(x) \wedge \exists x B(x)$ 也不为公式。
- (4) $A(a) \wedge \exists x B(x)$ 为公式。



把变元分成自由和约束变元两类后，给我们带来许多技术上的方便。例如在定义代入时可以直接代入，无需进行改名。

约定： 设 $a \in FV$ ， t 为项且 A 为公式， $A\left[\frac{t}{a}\right]$ 为在 A 中将 t 替代 a 的所有出现而得。

(1) 当 $A(a)$ 表示 A 时， $A(t)$ 表示 $A\left[\frac{t}{a}\right]$;

(2) 当 $A(t)$ 和 $A(s)$ 出现在同一个上下文中，

$A(t)$ 表示 $A\left[\frac{t}{a}\right]$ 和 $A(s)$ 表示 $A\left[\frac{s}{a}\right]$ 。



定义10.6 (矢列).

(1) 设 Γ, Δ 为公式的有穷序列(可为空), $\Gamma \vdash \Delta$ 被称为矢列,
 Γ 和 Δ 分别被称为前件和后件。

若 Γ 为 A_1, \dots, A_n 且 Δ 为 B_1, \dots, B_m 时,

- $\Gamma \vdash \Delta$ 为 $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ 。
- $\Gamma, A \vdash \Delta$ 为 $A_1, \dots, A_n, A \vdash B_1, \dots, B_m$ 。
- $\Gamma \vdash \Delta, B$ 为 $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m, B$ 。

有些教科书中, 矢列被表示为 $\Gamma \rightarrow \Delta$ 。

(2) 一个推理为如下的表达形式:

$$\frac{S_1}{S} \text{ 或 } \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

这里 S, S_1, S_2 为矢列, 这时 S_1, S_2 被称为此推理的上矢列,
 S 被称为此推理的下矢列。

直觉地, 一个推理表达由上到下的推导。



下面给出Gentzen的矢列演算 LK,
其由以下的公理和规则构成:

公理: $A \vdash A$ 这里 A 为原子公式

规则:

(1) 结构规则

(a) 弱(Weakening)

$$WL: \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$WR: \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

(b) 凝(Contraction)

$$CL: \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$CR: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$



(c) 换(Exchange)

$$EL: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi} \quad ER: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}$$

以上的规则被称为弱规则。

(d) 切(Cut)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

其中 A 被称为切公式， $d(A)$ 被称为该切规则的度。



(2) 逻辑规则

以下规则被称为强规则

(a)

$$\neg L : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\neg R : \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

其中 A 和 $\neg A$ 被分别称为该推理的辅公式和主公式。

(b)

$$\wedge L : \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\wedge R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

其中 A, B 被称为该推理的辅公式, $A \wedge B$ 被称为该推理的主公式。

(c)

$$\vee L : \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\vee R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

其中 A, B 被称为该推理的辅公式, $A \vee B$ 被称为该推理的主公式。



(d)

$$\rightarrow L : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \quad \rightarrow R : \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}$$

其中 A, B 被称为该推理的辅公式, $A \rightarrow B$ 被称为该推理的主公式。

(e)

$$\forall L : \frac{A(t), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \vdash \Delta} \quad \forall R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(b)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A(x)}$$

其中 $A(t), A(b)$ 被称为该推理的辅公式, $\forall x A(x)$ 被称为该推理的主公式。

(f)

$$\exists L : \frac{A(b), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \vdash \Delta} \quad \exists R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A(x)}$$

其中 $A(b), A(t)$ 被称为该推理的辅公式, $\exists x A(x)$ 被称为该推理的主公式。



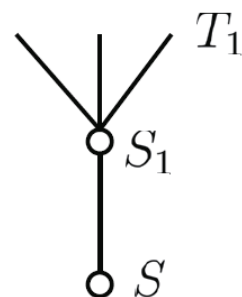
在量词规则中， A 为任何公式， t 为任何项，在 $\forall R$ 和 $\exists L$ 中，自由变元 b 被称为该推理的特征变元(eigenvariable)，其必不出现在 Γ, Δ 中。这就是所谓的特征变元限制。

以上完成了 LK 的构造。

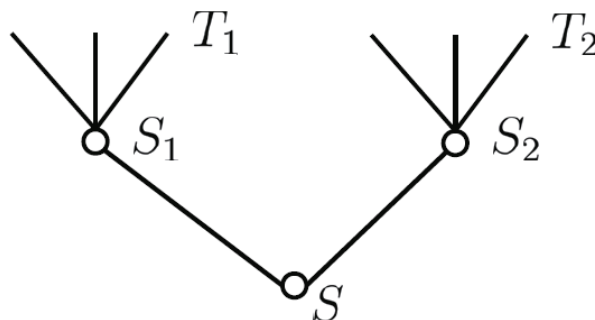


定义10.7 (证明树). 设 S, S_1 和 S_2 为矢列

- (1) 若 S 为公理, 则以 S 为结点的单点树为其证明树;
- (2) 若有 LK 规则使 $\frac{S_1}{S}$, 且 S_1 有证明树 T_1 , 则 S 的证明树为



- (3) 若有LK规则使 $\frac{S_1 S_2}{S}$ 且 $S_i (i = 1, 2)$ 有证明树 $T_i (i = 1, 2)$, 则 S 的证明树为



以下我们也把证明树简称为证明。



在 LK 中，若 S 有证明树，则称 S 在 LK 中可证。事实上， S 的证明树的最顶上的矢列为公理，它被称为初矢列，最下的矢列为 S ，它被称为终矢列。

以下定义给出一些术语。



定义10.8.

- (1) 在 LK 的规则中, 除主辅公式以外, 在前后件 Γ, Δ, Π 或 Λ 中的公式被称为旁公式(side formula);
- (2) 立接后辈
 - (a) 设 C 为推理规则 J 中的旁公式, 若 C 为在 J 的上矢列的前后件中出现于某个位置, 则在 J 的下矢列的前后件相同位置上出现的唯一的 C 被称为上面 C 的立接后辈。
 - (b) 设 C 为推理规则 J (其不为换和切) 中的辅公式, 那么相应的主公式为 C 的立接后辈。
 - (c) 在换规则中, 上矢列中的 A 和 B 的立接后辈分别为下矢列中的 A 和 B 。
 - (d) 在 Cut 中, Cut 公式没有立接后辈。



- (3) C 为 D 的立接前辈指 D 为 C 的立接后辈。
- (4) C 为 D 的前辈指存在 C_0, C_1, \dots, C_n 使 C 为 C_0, C_n 为 D 且对任何 $i < n$, C_i 为 C_{i+1} 的立接前辈。
注意当 $n = 0$ 时, C 为 C 的前辈。
- (5) C 为 D 的直接前辈指 C 为 D 的前辈且 C 与 D 相同。
- (6) 后辈与直接后辈同样定义。



定义10.9. 设 P 为证明树, a 为自由变元, t 为项,
 $P(t)$ 由在 P 任何公式中每个 a 的自由出现被 t 替代而得。

命题10.10. 若 $P(a)$ 为证明树, 且 a 与 t 中任何自由变元都不曾用作为 $P(a)$ 中的特征变元, 则 $P(t)$ 为证明树。

证明留作习题。



定义10.11. 设 P 为LK-证明树, P 为正则的指对于 P 中出现的任何自由变元 a , 有

- (1) 若 a 出现于 P 的终矢列中, 则 a 不曾被用作 P 的特征变元;
- (2) 若 a 不出现于 P 的终矢列中, 则 a 恰被用作 P 的某个规则 J 的特征变元一次, 且 a 仅出现于推理 J 之上的矢列中。

命题10.12. 若 P 为证明树,其终于 $\Gamma \vdash \Delta$, 则存在正则的证明树 P' , 其终于 $\Gamma \vdash \Delta$ 。

证明留作习题。



定义10.13. 设 P 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明, 若 P 中无切规则出现, 则称 P 为无切证明, 这时称 $\Gamma \vdash \Delta$ 有无切证明。

约定10.14. 设从 S_1 或 S_1, S_2 经有穷次结构推理规则得 S , 我们采用记号

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{或} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S} .$$

下面给出 *Gentzen* 系统的 *Hauptsatz*:

定理10.15. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 LK 中有一证明, 则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 LK 中有一无切证明。



我们先证明一些引理：

引理10.16. 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P 呈形于

$$\frac{\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \vdash \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ A, \Gamma \vdash \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} Q \\ R \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

若 A 为原子公式 且 Q 与 R 分别为 $\Gamma \vdash \Delta, A$ 与 $A, \Gamma \vdash \Delta$ 的无切证明，则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的一个无切证明。

证：情况1: $A \in \Delta$ ，设 Δ 为 Δ_1, A, Δ_2 从而

$$\frac{\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \vdash \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} Q \end{array}}{\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, A, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}}$$

它为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的无切证明。



情况2: $A \in \Gamma$, 与情况1同理可证。

情况3: $A \notin \Gamma$ 且 $A \notin \Delta$, 在 R 中将所有的 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi^-, \Gamma \vdash \Lambda, \Delta$ 替代而得 R' , 这里 Π^- 为在 Π 中删去所有的 A 中直接前辈而得。
除了初矢列外, R' 将成为一个终于 $\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta$ 的证明。

对于初矢列 $B \vdash B$, 我们分情况讨论:

(1) B 不是 A 的直接前辈

从而在 R' 中, $B \vdash B$ 变成 $B, \Gamma \vdash \Delta, B$

从而

$$\frac{B \vdash B}{B, \Gamma \vdash \Delta, B}$$

为 $B, \Gamma \vdash \Delta, B$ 的无切证明。

(2) B 为 A 的直接前辈, 即 B 为 A

从而在 R' 中 $B \vdash B$ 变成 $\Gamma \vdash \Delta, A$, 而它有无切证明 Q 。

因此我们可将 R' 变成证明 P^* 其中无切且终于 $\Gamma \vdash \Delta$ 。 \square



引理10.17. 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P 呈形

$$\frac{\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \vdash \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ A, \Gamma \vdash \Delta \end{array} \quad \begin{array}{c} Q \quad R \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{Cut}$$

若 $d(A) = d$ 且在证明 Q 与 R 中所有Cut的度皆小于 d ，则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^* ，其中所有Cut的度皆小于 d 。

证明：首先我们可假定 P 是正则的，这是因为可进行有穷次的变元改名把 P 变为正则证明。

其次我们可假定 Q 与 R 皆含至少一个强推理规则，这是因为

- 若 Q 中仅含弱推理，则 $A \in \Gamma$ 或有 B 使 $B \in \Gamma$ 且 $B \in \Delta$ ，从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 可有无切证明。
- 若 R 中仅含弱推理，则同理 $\Gamma \vdash \Delta$ 可有无切证明。

在以上两个假定下，我们对 $d(A)$ 归纳来证明。



情况1: A 为原子的。由引理10.16知结论成立。

情况2: A 为 $\neg B$ 。

我们将构造 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 Q^* , $\Gamma \vdash \Delta, B$ 的证明 R^* , 从而

$$\frac{\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad R^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad Q^* \end{array}}{\frac{\Gamma \vdash \Delta, B \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{Cut}}$$

得 P^* , 其中最后Cut的度为 $d(A) - 1$ 。

(2.1) 构造 Q^* 如下:

在 Q 中将每个 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi, B \vdash \Lambda^-$ 替代而得 Q' , 其中 Λ^- 由在 Λ 中删所有切公式 A 的直接前辈而得。

这时 Q' 还不是一个合法的证明, 问题在于两点:



(a) Q 中 $\neg R$ 的推理: $\frac{B, \Pi \vdash \Lambda}{\Pi \vdash \Lambda, \neg B}$

变成 Q' 中的 $\frac{B, \Pi, B \vdash \Lambda^-}{\Pi, B \vdash \Lambda^-}$

然而只需要变成 $\frac{B, \Pi, B \vdash \Lambda^-}{\Pi, B \vdash \Lambda^-}$ 就合法了。

(b) 对于 Q 中的初矢列 $C \vdash C$ (C 为原子的), 在 Q' 中变为 $B, C \vdash C$, 而这可由

$$\frac{C \vdash C}{B, C \vdash C} \text{ WL}$$

而得。这样我们可构造 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 Q^* 其中任何Cut的度未变。

(2.2) 同理构造 $\Gamma \vdash \Delta, B$ 的证明 R^* 其中任何Cut的度未变。



情况3: A 为 $B \vee C$

(3.1) 从 Q 构造 $\Gamma \vdash \Delta, B, C$ 的证明 Q^* 。在 Q 中将每个 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi \vdash \Lambda^-, B, C$ 替代而得 Q' ，这里 Λ^- 由在 Λ 中删去所有切公式的直接前辈而得。这时 Q' 还不是一个合法的证明，问题在于两点：

(a) Q 中的 $\vee R$ 推理 $\frac{\Pi \vdash \Lambda, B, C}{\Pi \vdash \Lambda, B \vee C} \vee R$

变成 Q' 中的 $\frac{\Pi \vdash \Lambda^-, B, C}{\Pi \vdash \Lambda^-, B, C}$

我们删去此推理。

(b) 对于初矢列 $E \vdash E$ (E 为原子的)

在 G' 中变成 $E \vdash E, B, C$ ，而这可修正为 $\frac{E \vdash E}{E \vdash E, B, C}$

这样我们可构造 $\Gamma \vdash \Delta, B, C$ 的证明 Q^*

其中任何Cut的度未变。



(3.2) 从 R 构造 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_B 。

在 R 中将每个 $\Pi \vdash \Delta$ 由 $B, \Pi^- \vdash \Delta$ 替代而得 R'_B ，这里 Π^- 由在 Π 中删去所有切公式 A 的直接前辈而得。

这时 R'_B 还不是一个合法的证明，问题在于两点：

(a) R 中的 $\vee L$ 推理：
$$\frac{B, \Pi \vdash \Lambda \quad C, \Pi \vdash \Lambda}{B \vee C, \Pi \vdash \Lambda}$$

变成 R'_B 中的
$$\frac{B, \Pi^- \vdash \Lambda \quad B, C, \Pi^- \vdash \Lambda}{B, \Pi^- \vdash \Lambda}$$

而这可删去以 $B, C, \Pi^- \vdash \Lambda$ 为根的子树。

(b) 对于初矢列 $E \vdash E$ ，在 R'_B 变成 $B, E \vdash E$ ，而这由 $E \vdash E$ 即得。这样我们可从 R'_B 构造合法的 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_B 其中任何 Cut 的度未变。



(3.3) 同理可构造 $C, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_C 其中任何Cut的度未变。

(3.4) 构造 P^* 如下：

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \Gamma \vdash \Delta, B, C \end{array} Q^* \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \frac{C, \Gamma \vdash \Delta}{C, \Gamma \vdash \Delta, B} WR \end{array} R_C \\
 \hline
 \Gamma \vdash \Delta, B \quad \text{cut} \\
 \hline
 \Gamma \vdash \Delta, B \\
 \hline
 \Gamma \vdash \Delta \quad \text{cut}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \diagup \quad \diagdown \\ B, \Gamma \vdash \Delta \end{array} R_B$$

这样 P^* 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明且 P^* 中Cut的度皆小于 $d(A)$ 。

情况4: 当 A 为 $B \wedge C, B \rightarrow C$ 时，同理可证。



情况5: 当 A 为 $\exists x.B(x)$:

(5.1) 在 Q 中, $\exists x.B(x)$ 的引入只能有两种方式: 由弱规则和 $\exists R$ 规则。设在 Q 中总共存在 $k(\geq 0)$ 个 $\exists R$ 推理规则使它们的主公式为切公式 $\exists x.B(x)$ 的直接前辈, 令它们为

$$\frac{\Pi_i \vdash \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i \vdash \Lambda_i, \exists x B(x)}$$

$i = 1, 2, \dots, k$ 。

(5.2) 同样, 设在 R 中总共存在 $l(\geq 0)$ 个 $\exists L$ 推理规则使它们的主公式为切公式 $\exists x.B(x)$ 的直接前辈, 令它们为

$$\frac{B(a_j), \Pi'_j \vdash \Lambda'_j}{\exists x B(x), \Pi'_j \vdash \Lambda'_j}$$

$j = 1, 2, \dots, l$ 。



(5.3) 对于每个 $i \leq k$, 构作 $B(t_i), \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_i 。

在 R 中进行如下操作:

- (a) 在 R 中 $a_j (j \leq l)$ 的每个出现皆由 t_i 替代;
- (b) 在 R 中切公式 $\exists x B(x)$ 的每个直接前辈由 $B(t_i)$ 替代;
- (c) 删去这些 l 个 $\exists L$ 推理。这样就得到 R_i 。 P 的正则性保证以上操作不影响 R 中的特征变元条件。

(5.4) 在 Q 中每个 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda^-$ 替代, 这里 Λ^- 由在 Λ 中删去所有切公式 A 的直接前辈而得。这样构作了树 Q' , 这时 Q' 并非为合法的证明。

对 Q' 作如下操作后, 其成为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^* :

- (a) 对于 Q' 的初矢列 $E, \Gamma \vdash \Delta, E$, 只需加上

$$\frac{\frac{E \vdash E}{\Gamma \vdash E}}{\Gamma \vdash \Delta, E}$$

就是合法证明;



(b) 对于 Q 中的第 i 个 $\exists R$ 推理, 它在 Q' 变为

$$\frac{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i}$$

而这可由以下推理替代成合法证明

$$\frac{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i, B(t_i) \quad \frac{\frac{\quad \quad \quad R_i}{B(t_i), \Gamma \vdash \Delta}}{B(t_i), \Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i}}{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i} cut$$

注意: 此Cut的度为 $d(A) - 1$.



(c) Q' 的终矢列 为 $\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta$ ，这只需要加上

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

就是合法证明。

这样的 P^* 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明，其中所有的切公式的度皆小于 $d(A)$ 。归纳完成。

□



引理10.18. 若 P 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明, 其中所有Cut的度 $\leq d$, 则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^* 其中所有Cut的度 $< d$ 。

证明: 令 k 为 P 中度为 d 的Cut的个数。对 k 归纳证明结论如下:

奠基: $k = 0$, 易见结论真。

归纳假定(*I.H.*): 设 $k \leq n$ 时, 结论成立。

归纳步骤: $k = n + 1$, 不妨设 P 终于度为 d 的Cut推理:

$$\frac{\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \quad Q \\ \Gamma \vdash \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \quad R \\ A, \Gamma \vdash \Delta \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}$$



因为 Q 和 R 中度为 d 的 Cut 的个数各自皆 $\leq n$ ，故由 *I.H.* 知存在 $\Gamma \vdash \Delta, A$ 的证明 Q^* 和 $A, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R^* 其中所有 Cut 的度 $< d$ ，从而构作 P' 为

$$\begin{array}{ccc}
 \swarrow & \downarrow & \searrow Q^* \\
 & \Gamma \vdash \Delta, A & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow R^* \\
 & A, \Gamma \vdash \Delta & \\
 \hline
 & \Gamma \vdash \Delta &
 \end{array}$$

再由引理10.17知结论成立。

□



Hauptsatz 的证明:

设 P 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明, 令

$$d(P) = \max\{d(A) \mid A \text{ 为 } P \text{ 中出现的切公式}\}.$$

对于 $d(P)$ 归纳来证 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

奠基: $d(P) = 0$, 从而 P 中所有的切公式皆为原子的,

由引理 10.16 知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

归纳假定: $d(P) \leq l$ 时结论成立。

归纳步骤: $d(P) = l + 1$, 由引理 10.18 知存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^*
且 $d(P^*) \leq l$, 从而由 *I.H.* 知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

□

这样就完成 *Hauptsatz* 的证明, 该定理有许多重要的推论,
如 *Craig* 定理, *Robinson* 定理等(参见文献[8])。



The End of Lecture 10