南京大学
Nanjing University

第10讲-Gentzen的Hauptsatz

本讲将给出一阶逻辑 Gentzen 系统的 Hauptsatz (德文意为主要定理)。在证明Hauptsatz之前，我们先给出一阶逻辑的Gentzen系统 LK，这里的LK与以前讲述的G系统是等价的，但在表述上有两点不同，

- 一是在一阶语言中区分自由变元与约束变元，
- 二是在矢列中前件与后件为有穷序列，以前把它们看作有穷集合是为了规则简化。

Hauptsatz 首先由 Gentzen 证明，后有一些修改的证法，本讲采用Buss的证法(参见[6])，该方法较为简洁。

定义10.1. 一阶语言的字母表由以下成分组成：

(1) 逻辑符集合：

(a) 自由变元集$FV = \{a, a', a'', ...\}$

(b) 约束变元集$BV = \{x, x', x'', ...\}$
在本讲中，我们采取FV与BV皆为可数无穷集，且
自由变元由$a, b, c, ...$等表示，约束变元由$x, y, z, ...$等表示。

(c) 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \to$

(d) 量词：$\forall, \exists$

(e) 辅助符：$($, $)$和$,$

(2) 非逻辑符集合$\mathscr{L}$：

(a) 常元符：$\mathscr{L}_c = \{c_0, c_1, ...\}$,这里 $\mathscr{L}_c$ 为可数集，可为空集。

(b) 函数符：$\mathscr{L}_f = \{f_0, f_1, ...\}$,这里 $\mathscr{L}_f$ 为可数集，对于每个函数f，赋于一个正整数 $\mu(f)$，其为 f 的元数($arity$)。

(c) 谓词符：$\mathscr{L}_p = \{p_0, p_1, ...\}$,这里 $\mathscr{L}_p$ 为可数集，对于每个谓词p，赋于一个非负整数 $\mu(p)$，其为 p 的元数，当 $\mu(p)$ 为 0 时，我们称 p 为命题。

以后记$\mathscr{L} = \mathscr{L}_c \cup \mathscr{L}_f \cup \mathscr{L}_p$。

定义10.2 (项).

(1) 每个自由变元为项；

(2) 每个常元为项；

(3) 若 f 为 n 元函数且 $t_1,...,t_n$ 为项，则 $f(t_1,...,t_n)$ 为项；

(4) 项仅限于此。

定义10.3 (公式).

若 P 为n元谓词，$t_1, ..., t_n$为项，则$P(t_1, ..., t_n)$被称为原子公式。以下归纳定义公式：

(1) 每个原子公式为公式；

(2) 若A, B为公式，则$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B)$和$(A \to B)$为公式；

(3) 若A为公式，a为自由变元且 x 为约束变元其不出现于A中，则$\forall x A'$ 和 $\exists x A'$ 为公式，这里 A' 由在 A 中将 x 替代 a的所有出现而得。

我们将用A, B, C等表示公式。没有自由变元的公式被称为句子。当$\mathscr{L}$确定时，项与公式皆由此而定，有时把$\mathscr{L}$中的公式和项写为 $\mathscr{L}$-公式和 $\mathscr{L}$-项。

定义10.4 (公式的度).

设 A 为公式，它的度 $d(A)$ 定义如下：

(1) $d(A) = 0$, 当A为原子公式时；

(2) $d(\neg A) = d(A) + 1$；

(3) $d(A \wedge B) = d(A \vee B) = d(A \rightarrow B) = max\{d(A), d(B)\} + 1$；

(4) $d(\forall x A) = d(\exists x A) = d(A) + 1$

$d(A)$反映A的复杂度，以下对A的结构作归纳就是对 $d(A)$ 归纳。

定义10.5 (子公式).

设A为公式，对A的结构归纳定义A的子公式集$sub(A)$如下：

(1) 当A为原子公式时，$sub(A) = \{A\}$;

(2) 当A为$\neg B$时,$sub(A) = sub(B) \cup \{A\}$;

(3) 当A为 $B \wedge C$ 或 $B \vee C$ 或 $B \to C$ 时，

$$sub(A) = sub(B) \cup sub(C) \cup \{A\};$$

(4) 当A为 $\forall x B(x)$ 或 $\exists x B(x)$ 时，

$$sub(A) = (\cup \left\{ sub(B(t)) | t\text{为项} \right\}) \cup \{A\};$$

例：

(1) $\forall y(A(y) \wedge \exists x B(x))$为公式。

(2) $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$不为公式。

(3) $A(x) \wedge \exists x B(x)$也不为公式。

(4) $A(a) \wedge \exists x B(x)$为公式。

把变元分成自由和约束变元两类后，给我们带来许多技术上的方便。例如在定义代入时可以直接代入，无需进行改名。

约定：设 $a \in FV$，t 为项且 A 为公式，$A\left[\frac{t}{a}\right]$ 为在 A 中将 t 替代 a 的所有出现而得。

(1) 当 $A(a)$ 表示 A 时，$A(t)$ 表示 $A[\frac{t}{a}]$;

(2) 当 $A(t)$ 和 $A(s)$ 出现在同一个上下文中，

$$A(t) \text{ 表示 } A\left[\frac{t}{a}\right] \text{ 和 } A(s) \text{ 表示 } A\left[\frac{s}{a}\right]。$$

定义10.6 (矢列).

(1) 设Γ, Δ为公式的有穷序列(可为空)，$\Gamma \vdash \Delta$被称为矢列，Γ和Δ分别被称为前件和后件。

若 Γ 为 $A_1, ..., A_n$ 且 Δ 为 $B_1, ..., B_m$ 时，

- $\Gamma \vdash \Delta$ 为 $A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m$。
- $\Gamma, A \vdash \Delta$ 为 $A_1, ..., A_n, A \vdash B_1, ..., B_m$。
- $\Gamma \vdash \Delta, B$ 为 $A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m, B$。

有些教科书中，矢列被表示为 $\Gamma \rightarrow \Delta$。

(2) 一个推理为如下的表达形式：

$$\frac{S_1}{S} \text{ 或 } \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

这里S, S_1, S_2为 矢列，这时S_1, S_2 被称为此推理的上矢列，S 被称为此推理的下矢列。
直觉地，一个推理表达由上到下的推导。

下面给出Gentzen的矢列演算 LK，
其由以下的公理和规则构成：

公理： $A \vdash A$ 这里A为原子公式

规则：

(1) 结构规则

(a) 弱(Weakening)

$$WL: \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad WR: \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

(b) 凝(Contraction)

$$CL: \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad CR: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

(c) 换(Exchange)

$$EL: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi} \qquad ER: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}$$

以上的规则被称为弱规则。

(d) 切(Cut)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

其中A被称为切公式，$d(A)$被称为该切规则的度。

(2) 逻辑规则

以下规则被称为强规则

(a)

$$\neg L: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \neg R: \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

其中A和$\neg A$被分别称为该推理的辅公式和主公式。

(b)

$$\wedge L: \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

其中A, B被称为该推理的辅公式,$A \wedge B$被称为该推理的主公式。

(c)

$$\vee L: \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

其中A, B被称为该推理的辅公式,$A \vee B$被称为该推理的主公式。

(d)

$$\to L: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \to R: \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}$$

其中A, B被称为该推理的辅公式,$A \to B$被称为该推理的主公式。

(e)

$$\forall L: \frac{A(t), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \vdash \Delta} \qquad \forall R: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(b)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A(x)}$$

其中 $A(t), A(b)$ 被称为该推理的辅公式, $\forall x A(x)$ 被称为该推理的主公式。

(f)

$$\exists L: \frac{A(b), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \vdash \Delta} \qquad \exists R: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A(x)}$$

其中 $A(b), A(t)$ 被称为该推理的辅公式, $\exists x A(x)$ 被称为该推理的主公式。

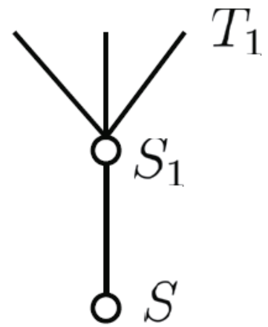
在量词规则中，A 为任何公式，t 为任何项，在 $\forall R$ 和 $\exists L$ 中，自由变元 b 被称为该推理的特征变元(eigenvariable)，其必不出现在 Γ, Δ 中。这就是所谓的特征变元限制。

以上完成了 LK 的构造。

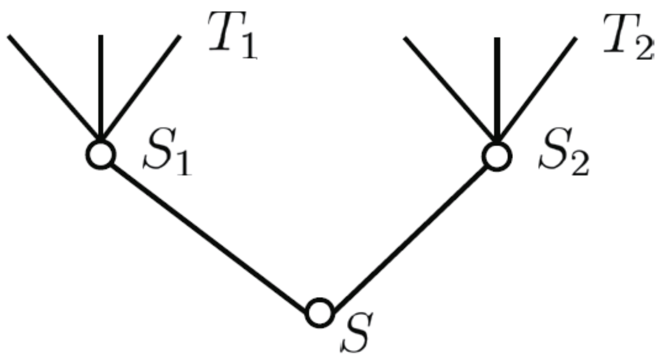
定义10.7 (证明树). 设S, S_1和S_2为矢列

(1) 若S为公理，则以S为结点的单点树为其证明树；

(2) 若有 LK 规则使$\frac{S_1}{S}$，且S_1有证明树T_1,则S的证明树为



(3) 若有LK规则使$\frac{S_1 S_2}{S}$且$S_i(i=1,2)$有证明树$T_i(i=1,2)$,则S的证明树为



以下我们也把证明树简称为证明。

在 LK 中，若 S 有证明树，则称 S 在 LK 中可证。事实上，S 的证明树的最顶上的矢列为公理，它被称为初矢列，最下的矢列为 S，它被称为终矢列。

以下定义给出一些术语。

定义10.8.

(1) 在 LK 的规则中，除主辅公式以外，在前后件 Γ, Δ, Π或Λ中的公式被称为旁公式(side formula)；

(2) 立接后辈

(a) 设C为推理规则J中的旁公式,若C为在J的上矢列的前后件中出现于某个位置,则在J的下矢列的前后件相同位置上出现的唯一的C 被称为上面C的立接后辈。

(b) 设C为推理规则J(其不为换和切)中的辅公式，那么相应的主公式为C的立接后辈。

(c) 在换规则中，上矢列中的A和B的立接后辈分别为下矢列中的A和B。

(d) 在Cut中，Cut公式没有立接后辈。

(3) C为D的立接前辈指D为C的立接后辈。

(4) C为D的前辈指存在$C_0, C_1, \ldots, C_n$使C为C_0,C_n为D且对任何$i < n$，C_i为C_{i+1}的立接前辈。
注意当$n = 0$时，C 为C的前辈。

(5) C为D的直接前辈指C为D的前辈且C与D相同。

(6) 后辈与直接后辈同样定义。

定义10.9. 设P为证明树, a为自由变元, t为项，$P(t)$由在P任何公式中每个a的自由出现被t替代而得。

命题10.10. 若$P(a)$为证明树，且a与t中任何自由变元都不曾用作为$P(a)$中的特征变元，则$P(t)$为证明树。

证明留作习题。

定义10.11. 设P为LK-证明树，P为正则的指对于P中出现的任何自由变元a，有

(1) 若a出现于P的终矢列中，则a不曾被用作P的特征变元；

(2) 若a不出现于P的终矢列中，则a恰被用作P的某个规则J的特征变元一次，且 a 仅出现于推理J之上的矢列中。

命题10.12. 若P为证明树,其终于$\Gamma \vdash \Delta$, 则存在正则的证明树P', 其终于$\Gamma \vdash \Delta$。

证明留作习题。

定义10.13. 设P为$\Gamma \vdash \Delta$的证明，若P中无切规则出现，则称P为无切证明，这时称$\Gamma \vdash \Delta$有无切证明。

约定10.14. 设从 S_1 或 S_1, S_2 经有穷次结构推理规则得S, 我们采用记号

$$\frac{S_1}{\overline{\overline{\quad S \quad}}} \quad \text{或} \quad \frac{S_1 \quad S_2}{\overline{\overline{\quad S \quad}}}\ 。$$

下面给出 *Gentzen* 系统的 *Hauptsatz*:

定理10.15. 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 LK 中有一证明，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 LK 中有一无切证明。

我们先证明一些引理：

引理10.16. 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明P呈形于

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\; Q}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad \dfrac{\vdots\; R}{A, \Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

若 A 为原子公式且 Q 与 R 分别为 $\Gamma \vdash \Delta, A$ 与 $A, \Gamma \vdash \Delta$ 的无切证明，则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的一个无切证明。

证: 情况1: $A \in \Delta$ ，设 Δ 为 Δ_1, A, Δ_2 从而

$$\begin{array}{c} \vdots\; Q \\ \Gamma \vdash \Delta, A \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta_1, A, A, \Delta_2 \\ \hline\hline \Gamma \vdash \Delta_1, A, \Delta_2 \end{array}$$

它为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的无切证明。

情况2：$A \in \Gamma$,与情况1同理可证。

情况3：$A \notin \Gamma$ 且 $A \notin \Delta$,在R中将所有的 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi^-, \Gamma \vdash \Lambda, \Delta$ 替代而得 R'，这里 Π^- 为在 Π 中删去所有的A中直接前辈而得。除了初矢列外， R' 将成为一个终于 $\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta$ 的证明。

对于初矢列 $B \vdash B$,我们分情况讨论：

(1) B 不是 A 的直接前辈

从而在 R' 中， $B \vdash B$ 变成 $B, \Gamma \vdash \Delta, B$

从而

$$\frac{B \vdash B}{\overline{B, \Gamma \vdash \Delta, B}}$$

为 $B, \Gamma \vdash \Delta, B$ 的无切证明。

(2) B 为 A 的直接前辈，即 B 为 A

从而在 R' 中 $B \vdash B$ 变成 $\Gamma \vdash \Delta, A$,而它有无切证明 Q。

因此我们可将 R' 变成证明 P^* 其中无切且终于 $\Gamma \vdash \Delta$ 。 $\square$

引理10.17. 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P 呈形

$$\dfrac{\overset{\bigvee Q}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad \overset{\bigvee R}{A, \Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}\ Cut$$

若 $d(A) = d$ 且在证明 Q 与 R 中所有Cut的度皆小于 d，则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^*，其中所有Cut的度皆小于 d。

证明：首先我们可假定 P 是正则的，这是因为可进行有穷次的变元改名把 P 变为正则证明。

其次我们可假定 Q 与 R 皆含至少一个强推理规则，这是因为

- 若Q 中仅含弱推理，则 $A \in \Gamma$ 或有 B 使 $B \in \Gamma$ 且 $B \in \Delta$，从而$\Gamma \vdash \Delta$ 可有无切证明。
- 若 R 中仅含弱推理，则同理 $\Gamma \vdash \Delta$可有无切证明。

在以上两个假定下，我们对 $d(A)$ 归纳来证明。

情况1: A 为原子的。由引理10.16知结论成立。

情况2: A 为 $\neg B$。

我们将构作 $B,\Gamma\vdash\Delta$ 的证明 Q^*,$\Gamma\vdash\Delta,B$ 的证明 R^*,从而

$$\dfrac{\overset{R^*}{\Gamma\vdash\Delta,B} \qquad\qquad \overset{Q^*}{B,\Gamma\vdash\Delta}}{\Gamma\vdash\Delta}\ Cut$$

得 P^*，其中最后Cut的度为 $d(A)-1$。

(2.1) 构作 Q^* 如下：

在 Q 中将每个 $\Pi\vdash\Lambda$ 由 $\Pi,B\vdash\Lambda^-$ 替代而得 Q'，其中 Λ^- 由在 Λ 中删所有切公式A的直接前辈而得。

这时 Q' 还不是一个合法的证明，问题在于两点:

(a) Q 中 $\neg R$ 的推理： $\dfrac{B, \Pi \vdash \Lambda}{\Pi \vdash \Lambda, \neg B}$

变成 Q' 中的 $\dfrac{B, \Pi, B \vdash \Lambda^-}{\Pi, B \vdash \Lambda^-}$

然而只需要变成 $\dfrac{B, \Pi, B \vdash \Lambda^-}{\overline{\Pi, B \vdash \Lambda^-}}$ 就合法了。

(b) 对于 Q 中的初矢列 $C \vdash C$ (C 为原子的)，在 Q' 中变为 $B, C \vdash C$，而这可由

$$\frac{C \vdash C}{B, C \vdash C}\ WL$$

而得。这样我们可构作 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 Q^* 其中任何Cut的度未变。

(2.2) 同理构作 $\Gamma \vdash \Delta, B$ 的证明 R^* 其中任何Cut的度未变。

情况3: A为 $B \vee C$

(3.1) 从Q构作 $\Gamma \vdash \Delta, B, C$ 的证明 Q^*。在 Q 中将每个 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi \vdash \Lambda^-, B, C$ 替代而得 Q'，这里 Λ^- 由在 Λ 中删去所有切公式的直接前辈而得。这时 Q' 还不是一个合法的证明，问题在于两点：

(a) Q 中的 $\vee R$ 推理 $\dfrac{\Pi \vdash \Lambda, B, C}{\Pi \vdash \Lambda, B \vee C} \vee R$

变成 Q' 中的 $\dfrac{\Pi \vdash \Lambda^-, B, C}{\Pi \vdash \Lambda^-, B, C}$

我们删去此推理。

(b) 对于初矢列 $E \vdash E$ (E 为原子的)

在 G' 中变成 $E \vdash E, B, C$ ，而这可修正为 $\dfrac{E \vdash E}{\overline{E \vdash E, B, C}}$

这样我们可构作 $\Gamma \vdash \Delta, B, C$ 的证明 Q^*

其中任何Cut的度未变。

(3.2) 从 R 构作 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_B。

在 R 中将每个 $\Pi \vdash \Delta$ 由 $B, \Pi^- \vdash \Delta$ 替代而得 R'_B，这里 Π^- 由在 Π 中删去所有切公式 A 的直接前辈而得。

这时 R'_B 还不是一个合法的证明，问题在于两点：

(a) R 中的 $\vee L$ 推理： $\dfrac{B, \Pi \vdash \Lambda \qquad C, \Pi \vdash \Lambda}{B \vee C, \Pi \vdash \Lambda}$

变成 R'_B 中的 $\dfrac{B, \Pi^- \vdash \Lambda \qquad B, C, \Pi^- \vdash \Lambda}{B, \Pi^- \vdash \Lambda}$

而这可删去以 $B, C, \Pi^- \vdash \Lambda$ 为根的子树。

(b) 对于初矢列 $E \vdash E$，在R'_B变成 $B, E \vdash E$，而这由 $E \vdash E$ 即得。这样我们可从 R'_B 构作合法的 $B, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明R_B 其中任何Cut的度未变。

(3.3) 同理可构作 $C, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_C 其中任何Cut的度未变。

(3.4) 构作 P^* 如下：

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c} \vdots\, Q^* \\ \Gamma \vdash \Delta, B, C \end{array}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, R_C \\ C, \Gamma \vdash \Delta \end{array}}{C, \Gamma \vdash \Delta, B}\, WR
}{\Gamma \vdash \Delta, B}\, cut
\qquad
\begin{array}{c} \vdots\, R_B \\ B, \Gamma \vdash \Delta \end{array}
}{\Gamma \vdash \Delta}\, cut
$$

这样 P^* 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明且 P^* 中Cut的度皆小于 $d(A)$ 。

情况4: 当 A 为 $B \wedge C, B \rightarrow C$ 时，同理可证。

情况5: 当 A 为 $\exists x.B(x)$ ：

(5.1) 在 Q 中， $\exists x.B(x)$ 的引入只能有两种方式：由弱规则和 $\exists R$ 规则。设在 Q 中总共存在 $k(\geq 0)$ 个 $\exists R$ 推理规则使它们的主公式为切公式 $\exists x.B(x)$ 的直接前辈，令它们为

$$\frac{\Pi_i \vdash \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i \vdash \Lambda_i, \exists x B(x)}$$

$i = 1, 2, \cdots, k$。

(5.2) 同样，设在 R 中总共存在 $l(\geq 0)$ 个 $\exists L$ 推理规则使它们的主公式为切公式 $\exists x.B(x)$ 的直接前辈，令它们为

$$\frac{B(a_j), \Pi'_j \vdash \Lambda'_j}{\exists x B(x), \Pi'_j \vdash \Lambda'_j}$$

$j = 1, 2, \cdots, l$。

(5.3) 对于每个 $i \le k$ ，构作 $B(t_i), \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R_i 。

在 R 中进行如下操作：

(a) 在 R 中 $a_j(j \le l)$ 的每个出现皆由 t_i 替代；

(b) 在 R 中切公式 $\exists x B(x)$ 的每个直接前辈由 $B(t_i)$ 替代；

(c) 删去这些 l 个 $\exists L$ 推理。这样就得到 R_i 。P 的正则性保证以上操作不影响 R 中的特征变元条件。

(5.4) 在 Q 中每个 $\Pi \vdash \Lambda$ 由 $\Pi, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda^-$ 替代，这里 Λ^- 由在 Λ 中删去所有切公式 A 的直接前辈而得。这样构作了树 Q' ，这时 Q' 并非为合法的证明。

对 Q' 作如下操作后，其成为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^* ：

(a) 对于 Q' 的初矢列 $E, \Gamma \vdash \Delta, E$ ，只需加上

$$\frac{E \vdash E}{\overline{\overline{E, \Gamma \vdash \Delta, E}}}$$

就是合法证明；

(b) 对于 Q 中的第 i 个 $\exists R$ 推理，它在 Q' 变为

$$\frac{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i}$$

而这可由以下推理替代成合法证明

$$\dfrac{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i, B(t_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\; R_i}{B(t_i), \Gamma \vdash \Delta}}{B(t_i), \Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i}}{\Pi_i, \Gamma \vdash \Delta, \Lambda_i}\; cut$$

注意：此Cut的度为 $d(A) - 1$.

(c) Q' 的终矢列 为 $\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta$，这只需要加上

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

就是合法证明。

这样的 P^* 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明，其中所有的切公式的度皆小于 $d(A)$。归纳完成。 $\square$

引理10.18. 若 P 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明，其中所有Cut的度 $\leqslant d$ ，则存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^* 其中所有Cut的度 $< d$ 。

证明: 令k为P中度为 d 的Cut的个数。对 k 归纳证明结论如下：

奠基： $k = 0$ ，易见结论真。

归纳假定($I.H.$): 设 $k \leqslant n$ 时，结论成立。

归纳步骤： $k = n + 1$ ，不妨设 P 终于度为 d 的Cut推理：

$$\dfrac{\begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \Delta, A \end{array} \qquad \begin{array}{c} R \\ \vdots \\ A, \Gamma \vdash \Delta \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

因为 Q 和 R 中度为d的Cut的个数各自皆 $\leqslant n$ ，故由 $I.H.$ 知存在 $\Gamma \vdash \Delta, A$ 的证明 Q^* 和 $A, \Gamma \vdash \Delta$ 的证明 R^* 其中所有Cut的度 $< d$ ，从而构作 P' 为

$$\frac{\overset{Q^*}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad \overset{R^*}{A, \Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

再由引理10.17知结论成立。 $\square$

***Hauptsatz* 的证明:**

设 P 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明，令

$$d(P) = max\{d(A) | \ A \text{ 为 } P \text{ 中出现的切公式 }\}。$$

对于 $d(P)$ 归纳来证 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

奠基：$d(P) = 0$，从而 P 中所有的切公式皆为原子的，

由引理 10.16 知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

归纳假定：$d(P) \leqslant l$ 时结论成立。

归纳步骤：$d(P) = l + 1$，由引理 10.18 知存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明 P^*

且 $d(P^*) \leqslant l$，从而由$I.H.$知 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无切证明。

□

这样就完成 *Hauptsatz* 的证明，该定理有许多重要的推论，

如 *Craig* 定理， *Robinson* 定理等(参见文献[8])。

The End of Lecture 10