南京大学
Nanjing University

第3讲-一阶逻辑的语言

内容提要

- 一阶逻辑的语法
  - 符号表|项
  - 原子公式|公式
- 一阶逻辑的语义
  - 结构|模型
  - 项的解释| 公式的解释
  - 满足| 语义结论
- 相关结论
  - Gödel编码
  - 替换引理
  - Hintikka集

一阶语言的字母表

定义3.1 一阶语言的字母表 ($alphabet$) 由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合:

变元集V： 可数无穷集$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

联结词： $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

量词： $\forall$ $\exists$ 等词： $\doteq$

辅助符：) ( ] [,

(2) 非逻辑符集合 $\mathscr{L}$ 其由以下组成:

(i) $\mathscr{L}_c$ 由可数（包括 0 个）常元符组成，$\mathscr{L}_c = \{c_0, c_1, \ldots\}$

(ii) $\mathscr{L}_f$（函数集）由可数（包括 0 个）函数符组成，$\mathscr{L}_f = \{f_0, f_1, \ldots\}$

(iii) $\mathscr{L}_P$（谓词集）由可数（包括 0 个）谓词符组成，$\mathscr{L}_P = \{P_0, P_1, \ldots\}$

对每个函数符 f,每个谓词符 P 赋予正整数 $\mu(f)$, $\mu(P)$ 为 f ,P 的 $arity$(元数).

关于字母表的一些说明

(1) 变元集的势为 $\aleph_0$.
事实上，$V ::= v|V'$ 可定义 V.

(2) 联结词集：有些书(e.g. Hilbert的书)只讨论某个完全子集，如 $\{\neg, \to\}$.

(3) $\doteq$ 是特别的常谓词.
$\mathscr{L}_e$ 表示带 $\doteq$ 的一阶语言.

(4) 函数与谓词皆有 $arity$. 对于谓词P,当 $\mu(P) = 0$ 时，我们称 P 为命题符.

(5) 每个一阶语言的逻辑符集皆相同，
不同的是一阶语言的非逻辑符号集合.

(6) 以后记 $\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{L}_c \cup \mathscr{L}_f \cup \mathscr{L}_P$.

两个例子

例3.1. 初等算术语言 $\mathscr{A}$

常元符集为 $\{\ 0\ \}$.

函数符集为 $\{\ S, +, \cdot\ \}$.

谓词符集为 $\{\ <\ \}$.

例3.2. 群论语言 $\mathfrak{G}$

常元符集为 $\{\ e\ \}$.

函数符集为 $\{\ \cdot$ （二元）$,{}^{-1}$ （一元） $\}$.

项（term）

定义3.2（项的定义）

(a) **归纳定义法**

(1) 每个变元符为项.

(2) 每个常元符为项.

(3) 若 f 为 n 元函数符，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 为项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为项.

(4) 项仅限于此.

(b) **闭包定义法**

全体项的集合T为满足以下条件的最小集合:

(1) $V \subseteq T$.

(2) $\mathscr{L}_c \subseteq T$

(3) 若 f 为 n 元函数，$t_1, \ldots, t_n \in T$，则 $f(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

(c) In ***BNF***,

$$t ::= x|c|f(t_1, \ldots, t_n)$$

公式（formula）

定义3.3（公式的定义）

(a) **归纳定义法**

(1) 若 s 和 t 为项，则 $s \doteq t$ 为公式；

(2) 若 R 为 n 元谓词符，并且 $t_1, \ldots, t_n$ 为项，则 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为公式；

(3) 若 A 为公式，则 $\neg A$ 为公式.

(4) 若 A，B 为公式，则 $(A * B)$ 为公式.
这里 $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$；

(5) 若 A，B 为公式且 x 为变元，则
$\forall x.A$ 和 $\exists x.B$ 为公式.

(6) 公式仅限于此.

仅由（1）和（2）所得到的公式被称为原子公式（atomic formula）.

(b) **闭包定义法**

全体公式的集合F为满足以下条件的最小集合:

(1) 若 $s,t \in F$，则 $s \doteq t \in F$.

(2) 若 R 为 n 元谓词，且 $t_1,\ldots,t_n \in T$，则 $R(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in F$;

(3) 若 $A,B \in F$ 则 $(\neg A),(A * B) \in F$; 这里 $* \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$;

(4) 若 $A \in F$ 且 $x \in V$，则 $(Qx.A) \in F$, 这里 $Q \in \{\forall,\exists\}$.

(c) In ***BNF***,

$$A ::= t_1 \doteq t_2 | R(t_1,\ldots,t_n) | \neg A | A \vee B | A \wedge B | A \rightarrow B | A \leftrightarrow B | \forall x.A | \exists x.A$$

联结词及量词的读法

$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
not A	A and B	A or B	A implies B	A is eq to B
Negation of A	Conjunction of A and B	disjunction of A and B	implication A and B	Equivalence of A and B

$\forall$	$\exists$
for all	for some

例3.3 群论语言$\mathfrak{G}$的项和公式

$\mathfrak{G} = \{\, e, \cdot, ^{-1} \,\}$. 例如，$x \cdot e$, $x \cdot x \cdot e$, $(x^{-1})^{-1} \cdot e$ 为项.

群论公理可表达为(informally)：

结合律 $\forall x \forall y \forall z.(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

幺公理 $\forall x.(x \cdot e = e \cdot x = x)$

逆公理 $\forall x.(x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e)$

formally

$\mathfrak{G} \triangleq \{$ e（常元），m（二元函数），i（一元函数） $\}$

(1) 结合律.

$$\forall x.(\forall y.(\forall z.(m(x, m(y, z)) \doteq m(m(x, y), z))))$$

(2) 幺公理.

$$\forall x.(m(x, e) \doteq x \wedge m(e, x) \doteq x)$$

(3) 逆公理.

$$\forall x.(m(x, i(x)) \doteq e \wedge m(i(x), x) \doteq e)$$

项的自由变元

定义3.4 (项的自由变元).

设t为项，对t结构归纳定义$FV(t)$如下：

(1) $FV(x) = x$，这里 $x \in V$

(2) $FV(c) = \emptyset$，这里 $c \in \mathscr{L}_c$

(3) $FV(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$，这里 f 为 n 元函数.

x 为 t 的自由变元指 $x \in FV(t)$.

t 为 closed term 指 $FV(t) = \emptyset$.

公式的自由变元

定义3.5 (公式的自由变元).

设 A 为公式，对 A 的结构归纳定义 $FV(A)$ 如下：

(1) $FV(t_1 \doteq t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$.

(2) $FV(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

(3) $FV(\neg A) = FV(A)$.

(4) $FV(A * B) = FV(A) \cup FV(B)$，这里$* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(5) $FV(QxA) = FV(A) - \{x\}$，这里$Q \in \{\forall, \exists\}$.

x 为 A 的自由变元指 $x \in FV(A)$；

A 为 sentence 指 $FV(A) = \emptyset$.

例3.4 设公式 A 为

$$\exists x((P(x,\ y\ ) \wedge \forall\ y\ R(x,\ y\ )) \to Q(x,z))$$

第一个出现 自由　　第二个出现 约束　　第三个出现 约束

注：

(1) 定义在 A 中 x 的第 i 个出现（occur）是约束的（bounded）指存在 A 的子公式 $Qx.B$ 使 A 中 x 的第 i 个出现在 $Qx.B$ 中.
在 A 中 x 的第 i 个出现是自由的指它不是约束的.

(2) 一个变元既有自由出现又有约束出现.

项的替换

定义3.6 (项的替换).

设 s 和 t 为项，x 为变元，对 s 的结构作归纳定义 $s\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right]=t$

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right]=y$，这里 y 为异于 x 的变元.

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right]=c$，这里 c 为常元.

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right]=f\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$

公式的替换

定义3.7 (公式的替换).

设 A 为公式，t 为项，x 为变元，对 A 的结构作归纳定义 $A\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = (t_1[\frac{t}{x}] \doteq t_2[\frac{t}{x}])$

(2) $R(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = R\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$.

(3) $(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = \neg\left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right)$.

(4) $(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = \left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right) * \left(B\left[\frac{t}{x}\right]\right)$

这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(5) $(Qx.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qx.A$

这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$

(6) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qy.\left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right)$

if y 为异于 x 的变元且 $y \notin FV(t)$. 这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$

(7) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qz.\left(A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]\right)$

if y 为异于 x 的变元 $y \in FV(t)$.

这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$，$z$ 为满足 $z \notin FV(t)$ 且 z 不出现于 A 中的足标最小的变元.

几点注解

(1) 改名 $\forall x A \twoheadrightarrow \forall y.A[\frac{y}{x}]$

(2) 先改名后替代

(3) 不改变约束关系

(4) 盲目替代会出错

(5) 定义3.7(7)中的 z 为 fresh 变元。

Part2- 一阶逻辑语义

结构（Structure）

定义3.8 （结构（Structure））

设 $\mathscr{L}$ 为一阶语言，$\mathscr{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称之为论域 (domain).

(2) I 为定义域为 $\mathscr{L}$ 的 mapping，其满足：

(2.1) 对任何 $\mathscr{L}$ 的常元 c，$I(c) \in M$;

(2.2) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 n 元 $(n > 0)$ 函数 f，$I(f) : M^n \to M$;

(2.3) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 0 元谓词 P，$I(P) \in Bool = \{T, F\}$;

(2.4) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 n 元 $(n > 0)$ 谓词 P，$I(P) \subseteq M^n$;

人们习惯上用论域 M 代表结构 $\mathbb{M}$，即对 M 和 $\mathbb{M}$ 不加以区分.

约定：we write c_M for I(c), f_M for $I(f)$, and P_M for $I(P)$.

$\mathscr{L}$ 的结构对 $\mathscr{L}$ 的元素给出解释。

例子- $\mathscr{A}$ 的结构

例3.5 对于$\mathscr{A}$，令$\mathbb{N} = (N, I)$,

$$
\begin{aligned}
N &= \{0, 1, 2, \ldots\}, \\
I(0) &= 0, \\
I(S) &= s, \\
I(+) &= +, \\
I(\cdot) &= *, \\
I(<) &= <.
\end{aligned}
$$

$s(n) = n+1$

称 (N, I) 为初等算术的 standard model.

赋值与模型

定义 3.9. 设$V=\{x_0,x_1,...,x_n,...|n\in|\mathbb{N}\}$为一阶语言$\mathscr{L}$的变元集，$\mathbb{M}$为一个$\mathscr{L}$–结构.

(1) 一个M上的赋值σ为从$\mathcal{V}$到M的映射，即$\sigma:\mathcal{V}\to M$;

(2) $\mathscr{L}$的一个模型为二元组(M,σ)，

这里M为$\mathscr{L}$-结构且σ为M上的赋值.

实质上为$(\mathbb{M},\sigma)$

例3.6 （$\mathscr{A}$之模型）

令$\mathbb{N} = (N, I)$,

$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$I(0) = 0$,

$I(S) = s$,

$I(+) = +$,

$I(\cdot) = *$,

$I(<) =<$.

令 $\sigma(x_n) = n$,

$(\mathbb{N}, \sigma)$ 为 $\mathscr{A}$ 之模型.

有时也可记为(N, σ)

记号: $\sigma[x_i := a]$

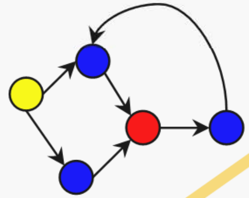
$$(\sigma[x_i := a])(x_j) = \begin{cases} \sigma(x_j) & \text{if } i \neq j \\ a & \text{if } i = j \end{cases}$$

一阶逻辑 — 模型&语言

model

$R_1, R_2, R_3, \cdots$ (关系)

$f_1, f_2, f_3, \cdots$ (函数)



M (论域)

$$(M, I, \sigma)$$

language

$$c \in \mathcal{L}_c,\ \ f \in \mathcal{L}_f,\ \ P \in \mathcal{L}_P,\ \ x \in V.$$

$$t ::= c \mid x \mid f(t_1, \cdots, t_n)$$

$$A ::= t_1 \doteq t_2 \mid P(t_1, \cdots, t_n) \mid$$
$$\neg A \mid A_1 \wedge A_2 \mid A_1 \vee A_2 \mid A_1 \to A_2 \mid \exists x A$$

项的解释

定义3.10 （项的解释）.设(M,σ)为一个$\mathscr{L}$–模型，t为项，项t 的解释$t_{M[\sigma]}$被归纳地定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]}=\sigma(x)$，这里 $x\in V$；

(2) $c_{M[\sigma]}=c_M$，这里 $c\in\mathscr{L}$；

(3) $\big(f(t_1,...,t_n)\big)_{M[\sigma]}=f_M\Big((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_1)_{M[\sigma]}\Big)$

引理3.11 $t_{M[\sigma]}\in M$

例3.7 对上面模型(N,σ)，求$(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

解: $(+(x_1,S(x_7)))_{N[\sigma]}$
$=(x_1)_{N[\sigma]}+(S(x_7))_{N[\sigma]}$
$=\sigma(x_1)+suc(\sigma(x_7))$
$=1+suc(7)=1+(7+1)=9$ $\square$

命题的解释

上面把命题 P 解释为 $Bool = \{ T, F \}$ 中的元素，这里我们承认 Classical Logic 中的排中律 (Law of excluded middle).

论域M中的每个命题要么为真，要么为假，别无它选。

联结词的解释

我们把 connectives 解释为 Bool 上函数.

① 对$\neg$的解释$B_\neg : Bool \to Bool$

$\mathbf{X}$	T	F
$B_\neg(\mathbf{X})$	F	T

② 对$\wedge$的解释$B_\wedge$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\wedge(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

③ 对$\vee$的解释$B_\vee$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\vee(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

④ 对$\to$的解释$B_\to$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\to(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤ 对$\leftrightarrow$的解释$B_\leftrightarrow$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\leftrightarrow(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

公式的解释

定义3.12 (公式的解释) 设 (M,σ) 为一个 $\mathscr{L}$-模型，A 为公式，公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 被归纳地定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若\langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, 若\langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若 (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]} \\ F, 否则. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(5) $(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若对所有 a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, 否则. \end{cases}$

(6) $(\exists x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若对某个 a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, 否则. \end{cases}$

引理3.13 对任何公式 A, $A_{M[\sigma]} \in \{T, F\}$.

一个等价的语义定义

设 (M,σ) 为一个 $\mathscr{L}$-模型，A 为公式，$M \vDash_\sigma A$ 定义如下：

- $M \vDash_\sigma t_1 \doteq t_2 \quad \text{iff} \quad (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}$;
- $M \vDash_\sigma P(t_1,\ldots,t_n) \quad \text{iff} \quad \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M$;
- $M \vDash_\sigma \neg A \quad \text{iff} \quad not\ M \vDash_\sigma A$;
- $M \vDash_\sigma A * B \quad \text{iff} \quad M \vDash_\sigma A\ [*]\ M \vDash_\sigma B$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- $M \vDash_\sigma \forall x.A \quad \text{iff}$ 对所有 $a \in M$，$M \vDash_{\sigma[x:=a]} A$;
- $M \vDash_\sigma \exists x.A \quad \text{iff}$ 对某个 $a \in M$，$M \vDash_{\sigma[x:=a]} A$.

可满足（Satisfiable）

定义3.14 设$\mathscr{L}$为一阶语言，A为$\mathscr{L}-$公式，Γ为$\mathscr{L}-$公式集，(M,σ)为$\mathscr{L}-$模型.

(1) A 对于 (M,σ) 可满足(satisfiable)，
记为 $M \models_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$.

(2) A 可满足指存在 (M,σ) 使 $M \models_\sigma A$.

(3) $M \models A$ 指 $M \models_\sigma A$ for all σ on M.

(4) Γ 对于 (M,σ) 可满足，记为 $M \models_\sigma \Gamma$ 指

$$M \models_\sigma A \text{ for all } A \in \Gamma.$$

(5) Γ 可满足指存在 (M,σ) 使 $M \models_\sigma \Gamma$.

(6) $M \models \Gamma$ 指 $M \models_\sigma \Gamma$ for all σ on M.

(7) A 永真 (valid)，记为 $\models A$，
指对任何模型 (M, σ) 有 $M \models_\sigma A$.

(8) Γ 永真，记为 $\models \Gamma$，
指对任何模型 (M, σ) 有 $M \models_\sigma \Gamma$.

(9) A 为Γ 的语义结论，记为$\Gamma \models A$，指对于任何模型 (M, σ)，
若 $M \models_\sigma \Gamma$，则 $M \models_\sigma A$.

形式逻辑的基本定律

例3.8（形式逻辑基本定律）.

1. $\models A \vee \neg A$　　排中律

2. $\models \neg(A \wedge \neg A)$　　矛盾律

3. $\models (\forall x(x \doteq x))$　　同一律

引理3.15 若$\Gamma \models A$，则$\Gamma \cup \{\neg A\}$不可满足.

Part3- 语法对象的Gödel编码

序列数

定义3.16 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集， $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$。

令 $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \triangleq \prod_{i=0}^{n} P_i^{a_i}$，

这里 P_i 为第 i 个素数，$e.g.\ P_0 = 2, P_1 = 3, \ldots$

命题3.17 设 $a_0, \ldots, a_n,\ b_0, \ldots b_m \in \mathbb{N}$。

若 $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \langle b_0, \ldots, b_m \rangle$

则 $n = m$ 且 $(\forall i \leq n)(a_i = b_i)$

证明：由算术基本定理即得。 $\square$

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

前168个素数

序列数的第i个元素

定义3.18 函数 $ep:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 如下：

$ep(x,n)\triangleq x$的素因子分解式中P_n的幂次，

设 $x=2^2\cdot 3\cdot 11$，

$x=132=2^{2}\cdot 3^{1}\cdot 5^{0}\cdot 7^{0}\cdot 11^{1}$

$ep(x,0)=2$,
$ep(x,1)=1$,
$ep(x,2)=0$,
$ep(x,4)=1$.

约定：$ep(x,n)$ 简记为 $ep_n(x)$.

命题3.19 $ep_i\langle a_0,\ldots,a_n\rangle=a_i(i\leqslant n)$.

一阶语言的符号集

定义3.20 设一阶语言$\mathscr{L}$由以下组成：

I. 逻辑符

$V \triangleq \{\ x_n | n \in \mathbb{N}\ \}$;

$C \triangleq \{\ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\ \}$; $Q \triangleq \{\ \forall, \exists\ \}$;

$E \triangleq \{\ \doteq\ \}$; $P \triangleq \{\ (\ ,\ )\ , \cdot\ \}$

II. 非逻辑符

$\mathscr{L}_f = \{f_{ij} | i \in \mathbb{N}$ 且 $j \in I_i\}$

这里 i 为 f_{ij} 的 arity， I_i 呈形 $\{0, \ldots, k\}$ 或 $\mathbb{N}$.

注意当 $i = 0$ 时 f_{0j} 为常元符.

$\mathscr{L}_P = \{P_{ij} | i \in \mathbb{N}$ 且 $j \in J_i\}$.

这里 i 为 P_{ij} 的 arity， J_i 呈形 $\{0, \ldots, k\}$ 或 $\mathbb{N}$.

注意当 $i = 0$ 时 P_{0j} 为命题符.

一阶语言的Gödel码

定义3.21 (Gödel码)设X为$\mathscr{L}$的符号，项或公式，以下定义X的Gödel 码$\sharp X$：

I. 逻辑符

(1) $\#(x_n) = \langle 0, n \rangle$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(2)
$$\begin{aligned} \#(\neg) &= \langle 1, 0 \rangle \\ \#(\wedge) &= \langle 1, 1 \rangle \\ \#(\vee) &= \langle 1, 2 \rangle \\ \#(\to) &= \langle 1, 3 \rangle \\ \#(\leftrightarrow) &= \langle 1, 4 \rangle \end{aligned}$$

(3) $\#(\forall) = \langle 2, 0 \rangle$, $\#(\exists) = \langle 2, 1 \rangle$

(4) $\#(\doteq) = \langle 3, 0 \rangle$

(5) $\#(() = \langle 4, 0 \rangle$, $\#()) = \langle 4, 1 \rangle$, $\#(\cdot) = \langle 4, 2 \rangle$

II. 非逻辑符

$\#(f_{ij}) = \langle 5, i, j \rangle$ for all $i \in \mathbb{N}$ 且 $j \in I_i$.

$\#(P_{ij}) = \langle 6, i, j \rangle$ for all $j \in \mathbb{N}$ 且 $j \in J_i$.

III. 项. 对项 t 的结构作归纳定义 $\#t$ 如下：

(1) t 为个体变元或常元时，$\#t$ 已被定义.

(2) 设 t 为 $f_{i,j}(t_1, \ldots, t_i)$,
$\#(t) = \langle \#f_{ij}, \#t_1, \ldots, \#t_i \rangle$
特别地，$\#(f_{0,j})$ 已被定义.

IV. 公式. 对公式 A 的结构作归纳定义 $\#A$ 如下：

(1) $\#(t \doteq s) = \langle \#(\doteq), \#t, \#s \rangle$

(2) $\#(P_{ij}(t_1, \ldots, t_i) = \langle \#(P_{ij}), \#t_1, \ldots, \#t_i \rangle$
特别地，$\#(P_{0,j})$ 已被定义.

(3) $\#(\neg A) = \langle \#(\neg), \#A \rangle$
$\#(A * B) = \langle \#(*), \#A, \#B \rangle$
这里 $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

(4) $\#(\forall x.A) = \langle \#(\forall), \#(x), \#A \rangle$
$\#(\exists x.A) = \langle \#(\exists), \#(x), \#A \rangle$

Gödel码——对应于语法对象

定理3.22 $\mathscr{L}$中的符号，项和公式皆赋予唯一的数，即它的$Gödel$码，且从$Gödel$码能能行的找出原来的$\mathscr{L}$的语法对象。

一个例子

$$
\begin{aligned}
&\#(\forall x_0 P_{2,6}(x_0, x_1)) \\
&= \langle \#(\forall), \#(x_0), \#(P_{2,6}(x_0, x_1)) \rangle \\
&= \langle \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle \#(P_{2,6}), \#(x_0), \#(x_1) \rangle \rangle \\
&= \langle \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle \langle 6, 2, 6 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \rangle \rangle \\
&= \langle \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 9000000, 1, 3 \rangle \rangle \\
&= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^{2^{9000000} \cdot 3 \cdot 5^3}
\end{aligned}
$$

Part4- 替换引理

替换引理-项

设(M,σ)为一阶语言$\mathscr{L}$的模型，t，s为$\mathscr{L}$-项，A为$\mathscr{L}$-公式.

引理3.23 $(t[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$.

证：对t的结构归纳证明$LHS = RHS$如下：

t	LHS	RHS
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$	$(f(u)[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]} =$ $f_M((u[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]}) =$ $f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$	$(f(u))_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]} =$ $f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$
$f(t_1,t_2,...,t_n)$同理		

Q.E.D.

替换引理-公式

引理3.24 $(A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$.

证：令ρ为$\sigma[x := t_{M[\sigma]}]$，欲证$(A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\rho]}$，

只需证 $M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$ iff $M \models_\rho A$ ...(*)

下面对A的结构作归纳证明(*).

当A为原子公式

Case1. A为$u \doteq v$，这里$u, v \in T$

$$
\begin{aligned}
M \models_\rho A[\tfrac{t}{x}] &\text{ iff } M \models_\sigma u[\tfrac{t}{x}] \doteq v[\tfrac{t}{x}] \\
&\text{ iff } (u[\tfrac{t}{x}])_{M[\sigma]} = (v[\tfrac{t}{x}])_{M[\sigma]} \\
&\text{ iff } u_{M[\rho]} = v_{M[\rho]} \ (by\ \text{引理3.23}) \\
&\text{ iff } M \models_\rho u \doteq v \text{ iff } M \models_\rho A.
\end{aligned}
$$

Case2. A为$P(t_1, ..., t_n)$.

$$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$$

iff $M \models_\sigma P(t_1[\frac{t}{x}], ..., t_n[\frac{t}{x}])$

iff $((t_1[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]}, ..., (t_1[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]}) \in P_M$

iff $((t_1)_{M[\rho]}, ..., (t_n)_{M[\rho]}) \in P_M$ $(by$ 引理3.23)

iff $M \models_\rho P(t_1, ..., t_n)$.

当A为复合公式

Case3. A为$\neg B$.

$$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$$

iff $M \models_\sigma \neg(B[\frac{t}{x}])$

iff 非$M \models_\sigma B[\frac{t}{x}]$

iff 非$M \models_\rho B$ (by I.H.)

iff $M \models_\rho \neg B$

iff $M \models_\rho A$.

Case4. A为$B \wedge C$.

$$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\sigma (B[\frac{t}{x}]) \wedge (C[\frac{t}{x}])$$

$$\text{iff } M \models_\sigma B[\frac{t}{x}] \text{ and } M \models_\sigma C[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\rho B \text{ and } M \models_\rho C \text{ (by I.H.)}$$

$$\text{iff } M \models_\rho B \wedge C$$

$$\text{iff } M \models_\rho A.$$

这里利用$M \models_\sigma (A \wedge B)$ iff $(M \models_\sigma A$ and $M \models_\sigma B)$.

Case5. A为$B \vee C$，$B \to C$，$B \leftrightarrow C$，同理可证.

Case6. A为$\forall y.B$

Subcase6.1 $y \equiv x$.

我们有$\{\sigma[x := a] | a \in M\} = \{\rho[x := a] | a \in M\}$

$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma \forall x.B$ iff $(\forall x.B)_{M[\sigma]} = T$

iff $B_{M[\sigma[x:=a]]} = T$ for all $a \in M$

iff $B_{M[\rho[x:=a]]} = T$ for all $a \in M$

iff $M \models_\rho \forall x.B$ iff $M \models_\rho A$.

Subcase6.2 $y \not\equiv x$且$y \notin FV(t)$.

$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma (\forall y.B)[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma \forall y.(B[\frac{t}{x}])$

iff $M \models_{\sigma[y:=a]} B[\frac{t}{x}]$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma[y:=a]]}]} B$ for all $a \in M$ (by I.H.)

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma]}]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \notin FV(t)$)

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma]}]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \notin FV(t)$)

iff $M \models_{\sigma[x:=t_{M[\sigma]}][y:=a]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \not\equiv x$)

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ for all $a \in M$.

iff $M \models_{\rho} \forall y.B$ iff $M \models_{\rho} A$.

Subcase6.3 $y \not\equiv x$且$y \in FV(t)$，设z为fresh variable.

$$A[\tfrac{t}{x}] \equiv (\forall y.B)[\tfrac{t}{x}] \equiv (\forall z.B[\tfrac{z}{y}])[\tfrac{t}{x}] \equiv \forall z.B[\tfrac{z}{y}][\tfrac{t}{x}]$$

$M \models_{\sigma} A[\tfrac{t}{x}]$

iff $M \models_{\sigma} (\forall z.B[\tfrac{z}{y}])[\tfrac{t}{x}]$

iff $M \models_{\rho} \forall z.B[\tfrac{z}{y}]$ (by Subcase6.2)

iff $M \models_{\rho[z:=a]} B[\tfrac{z}{y}]$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\rho} \forall y.B$.

Case7. A为$\exists y.B$与Case6同理可证. Q.E.D.

例子

Ex.1. $M \models_{\rho[z:=a]} B[\frac{z}{y}]$

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ 这里 z is fresh.

Part5- Hintikka集

Hintikka集-定义

定义3.25 设$\mathscr{L}$为一阶语言，Ψ为$\mathscr{L}$的公式集.令T为全体$\mathscr{L}$项之集。Ψ为Hintikka集指：

1. 若公式A为原子的，则A和$\neg A$不能都属于Ψ.
2. 若$\neg\neg A \in \Psi$，则$A \in \Psi$.
3. 若$A \to B \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$B \in \Psi$.
4. 若$\neg(A \to B) \in \Psi$，则$A \in \Psi$且$\neg B \in \Psi$.
5. 若$A \wedge B \in \Psi$，则$A \in \Psi$且$B \in \Psi$.
6. 若$\neg(A \wedge B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$\neg B \in \Psi$.
7. 若$A \vee B \in \Psi$，则$A \in \Psi$或$B \in \Psi$.
8. 若$\neg(A \vee B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$且$\neg B \in \Psi$.
9. 若$A \leftrightarrow B \in \Psi$，则$A \in \Psi$ iff. $B \in \Psi$.
10. 若$\neg(A \leftrightarrow B) \in \Psi$，则$A \in \Psi$ iff. $\neg B \in \Psi$.

11. 若$\forall x.A \in \Psi$，则$A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for all $t \in T$.

12. 若$\neg\forall x.A \in \Psi$，则$\neg A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for some $t \in T$.

13. 若$\exists x.A \in \Psi$，则$A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for some $t \in T$.

14. 若$\neg\exists x.A \in \Psi$，则$\neg A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for all $t \in T$.

15. $t \doteq t \in \Psi$ for all $t \in T$.

16. $t \doteq s \rightarrow s \doteq t \in \Psi$ for all $t, s \in T$.

17. $t \doteq s \rightarrow (s \doteq u \rightarrow t \doteq u) \in \Psi$ for all $t, s, u \in T$.

18. 若f为n元函数，$t_1, \ldots, t_n$，$s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$(\wedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \rightarrow f(\overrightarrow{t}) \doteq f(\overrightarrow{s}) \in \Psi.$$

19. 若p为n元谓词，$t_1, \ldots, t_n$，$s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{s} \rightarrow (p(\overrightarrow{t}) \rightarrow p(\overrightarrow{s})) \in \Psi$$

定理3.26. 若Ψ为Hintikka集，则Ψ可满足.

下面我们来证明该定理.

定义3.27 定义T上的二元关系$\sim$如下：

$$s \sim t \text{指} s \doteq t \in \Psi$$

命题3.28 $\sim$为等价关系.(证明留作习题)

命题3.29 设$t \in T$，令$[t]$为t关于$\sim$的等价类，从而

$$[s] = [t] \quad iff \quad s \sim t.$$

引理3.30 设$[t_i]=[s_i](i=1,2,...,n)$,则

1. 对任何n元函数$f,[f(\overrightarrow{t})]=[f(\overrightarrow{s})]$
2. 对任何n元谓词p,若$p(\overrightarrow{t})\in\Psi$则$p(\overrightarrow{s})\in\Psi$

证 由定义直接证明.

1. 设$t\sim s$且f为一元函数，欲证$f(t)\sim f(s)$，
   即$f(t)\doteq f(s)\in\Psi$,
   $\because t\doteq s\in\Psi$且$t\doteq s\rightarrow f(t)\doteq f(s)\in\Psi$
   $\therefore f(t)\doteq f(s)\in\Psi$, n元函数同理可证.
2. 与1同理. $\square$

Hintikka集的模型

定义3.31 模型$\mathbb{H} = (H, \sigma)$定义如下:$H = \{[t] \mid t$为$\mathscr{L}$之项$\}$.

1. c为常元,$c_H = [c]$。
2. f为n元函数,$f_H([t_1], ..., [t_n]) = [f(t_1, ...t_n)]$。
3. p为n元谓词,$p_H([t_1], ..., [t_n])$真 *iff* $p(t_1, ..., t_n) \in \Psi$。
4. $\sigma(x) = [x]$，当x为变元。

引理3.30保证定义的合法性.

引理3.32 对任何t，$t_{H[\sigma]} = [t]$.

证明: 对t的结构归纳即可。 $\square$

引理3.33 $H \models_\sigma \Psi$，即Ψ可满足.

证 对公式A的结果作归纳证明.

(a) 若$A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = T$； (b) 若$\neg A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = F$.

Case. Atom. (1.1) A为$p(t)$（n元同理）.

$\because A \in \Psi \Rightarrow p(t) \in \Psi \Rightarrow p_H([t])$真$\Rightarrow [p(t)]_{H[\sigma]} = T \quad \therefore$(a)成立.

$\because \neg A \in \Psi \Rightarrow p(t) \notin \Psi \Rightarrow P_H([t])$假$\Rightarrow [p(t)]_{H[\sigma]} = F \quad \therefore$(b)成立.

(1.2) A为$s \doteq t$

$$\because s \doteq t \in \Psi \Rightarrow [s] = [t] \Rightarrow s_{H[\sigma]} = t_{H[\sigma]}$$
$$\Rightarrow (s \doteq t)_{H[\sigma]} = T \quad \therefore \text{(a)成立.}$$

$$\because \neg(s \doteq t) \in \Psi \Rightarrow (s \doteq t) \notin \Psi \Rightarrow [s] \neq [t] \Rightarrow s_{H[\sigma]} \neq t_{H[\sigma]}$$
$$\Rightarrow (\neg s \doteq t)_{H[\sigma]} = T \quad \therefore \text{(b)成立.}$$

Case. $\neg$. A为$\neg B$.

$$A \in \Psi \Rightarrow \neg B \in \Psi \quad \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = F \quad \Rightarrow [A]_{H[\sigma]} = T.$$

$$\neg A \in \Psi \Rightarrow \neg\neg B \in \Psi \Rightarrow B \in \Psi \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \Rightarrow [A]_{H[\sigma]} = F.$$

Case. $\wedge$. A为$B \wedge C$.

$$B \wedge C \in \Psi \quad \Rightarrow B, C \in \Psi \quad \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = [C]_{H[\sigma]} = T$$
$$\Rightarrow [B \wedge C]_{H[\sigma]} = T.$$

$$\neg(B \wedge C) \in \Psi \quad \Rightarrow \neg B \in \Psi \text{或} \neg C \in \Psi$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = F \text{或} [C]_{H[\sigma]} = F$$
$$\Rightarrow [B \wedge C]_{H[\sigma]} = F.$$

Case. $\vee$. 同理

Case. $\rightarrow$. 同理

Case. $\leftrightarrow$. A为$B \leftrightarrow C$.

$$
\begin{aligned}
B \leftrightarrow C \in \Psi &\Rightarrow B \in \Psi \text{ iff. } C \in \Psi \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \text{ iff. } [C]_{H[\sigma]} = T \\
&\Leftrightarrow [B \leftrightarrow C]_{H[\sigma]} = T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg(B \leftrightarrow C) \in \Psi &\Rightarrow B \in \Psi \text{ iff. } \neg C \in \Psi \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \text{ iff. } [C]_{H[\sigma]} = F \\
&\Leftrightarrow [B \leftrightarrow C]_{H[\sigma]} = F
\end{aligned}
$$

Case. $\forall$. A为$\forall x.B$.

$$
\begin{aligned}
\forall x.B \in \Psi &\Rightarrow B[\tfrac{t}{x}] \in \Psi \text{ for all } t \in T \\
&\Rightarrow [B[\tfrac{t}{x}]]_{H[\sigma]} = T \text{ for all } t \in T \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=t_{H[\sigma]}]]} = T \text{ for all } t \in T \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = T \text{ for all } t \in T \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=u]]} = T \text{ for all } u \in H \\
&\Rightarrow [\forall x.B]_{H[\sigma]} = T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x.B \in \Psi &\Rightarrow \neg B[\tfrac{t}{x}] \in \Psi \text{ for some } t \in T \\
&\Rightarrow [\neg B[\tfrac{t}{x}]]_{H[\sigma]} = T \text{ for some } t \in T \\
&\Rightarrow [\neg B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = T \text{ for some } t \in T \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = F \text{ for some } t \in T \\
&\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=u]]} = F \text{ for some } u \in H \\
&\Rightarrow [\forall x.B]_{H[\sigma]} = F
\end{aligned}
$$

Case. ∃. 同理可证. Q.E.D.

注意：在情况∀中，我们用到替换引理。
由此定理知，定理3.26得证。
它在以后证明一阶逻辑的完全性时将被用到。

The End of Lecture 3