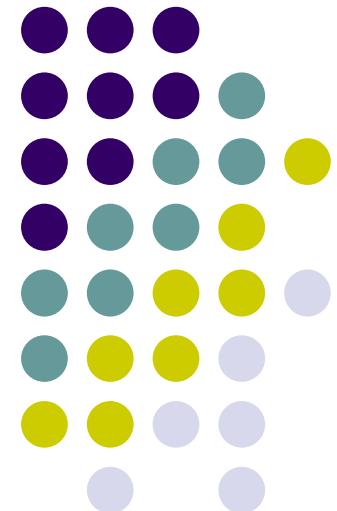




# 第一讲 命题逻辑



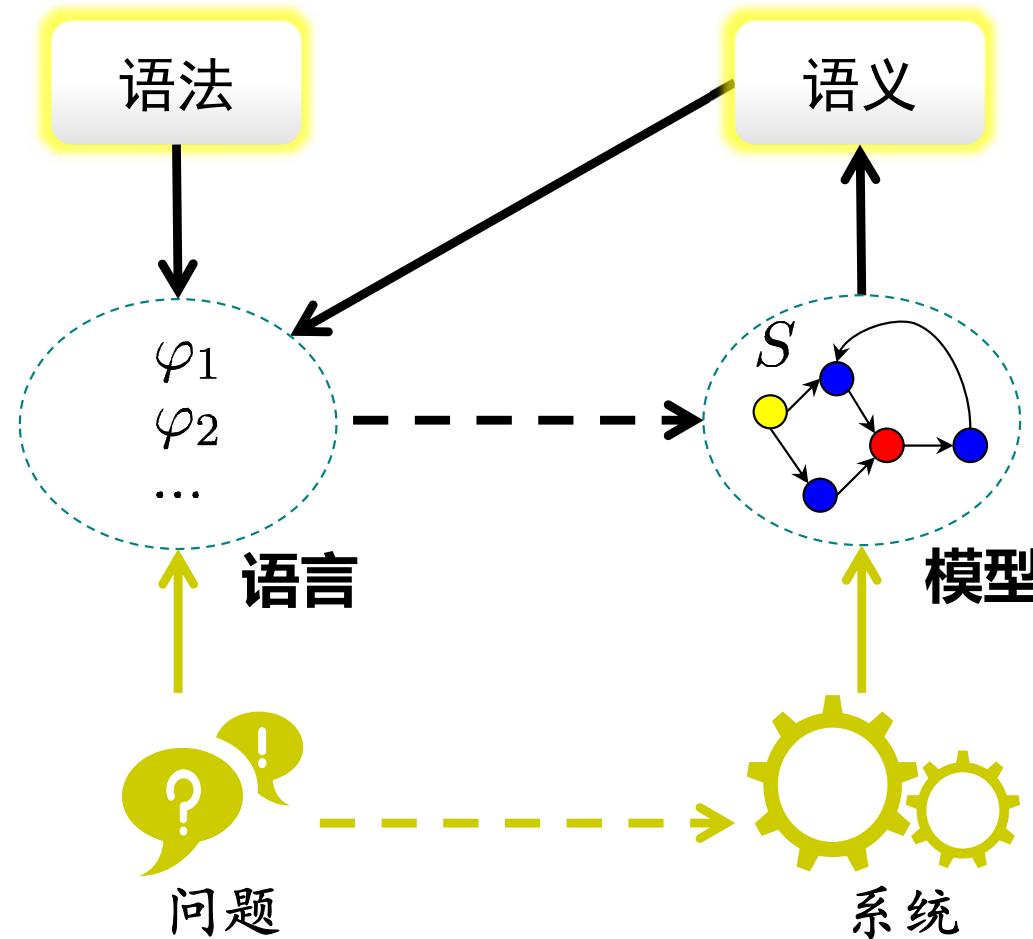


# 内容提要

- 命题逻辑的语法
  - 符号表
  - 命题的定义
  - 结构归纳法
- 命题逻辑的语义
  - 什么是语义
  - 析合/合析范式 | 逻辑等价
- 自然推理系统及性质
  - 公理与规则
  - 可靠性 | 完备性 | 紧致性



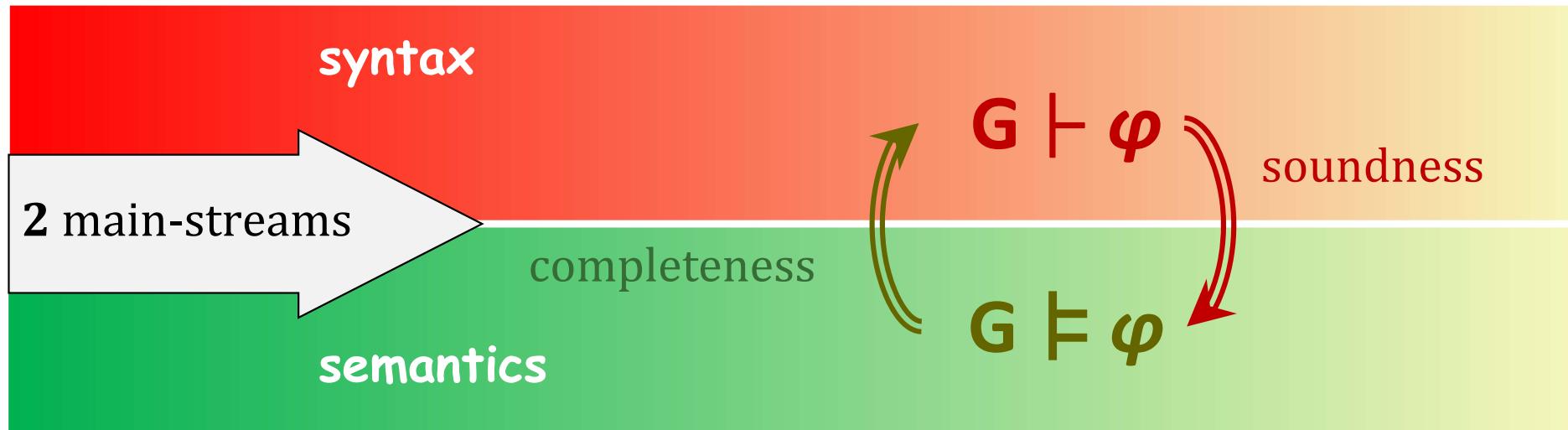
# 语法和语义





# 语法和语义

- 语法 (Syntax) 与语义 (Semantics) 是数理逻辑的两个基本要素。





# 考慮下述C++程序

```
#include <iostream>
#include<string.h>
using namespace std;
int main( )
{
    int a, b, sum;          //定义两个整型变量
    cin>>a;                //输入两个变量并赋值
    cin>>b;
    sum = a + b;            //计算两个变量的和
    cout<< sum ;           //输出两个变量的和
    return 0;
}
```



# 如何验证C++程序的正确性？

- 两条路径：

- 程序正确性证明：霍尔逻辑
  - 使用公理描述程序语句对于计算状态的改变
- 可执行文件正确性验证：软件测试
  - 验证输入输出是否满足程序规约要求

- 两者之间的联系

- Soundness (可靠性): 程序正确 → 程序执行正确
- Completeness (完备性): 程序执行正确 → 程序正确
- Compactness (紧致性): 有限次执行 → 程序执行全正确



# 字母表

定义1.1 (字母表). 字母表由以下成份组成:

1. 命题符:  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, n \in \mathbf{N}$ , 记  $PS = \{P_n \mid n \in \mathbf{N}\}$
2. 联结词:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
3. 辅助符: “(”, “)”

注:

1. 本讲义中, 命题符之集  $PS$  为可数无穷集, i.e.  $|PS| = \aleph_0$ 。
2. 有些教科书还引入其他一些联结词, 如  $\leftrightarrow$  等。
3. 为了表达更清楚, 我们可再引入一些辅助符, 如  $[, ]$  等。



# 命题的定义

定义1.2 (命题).

1. 命题符为命题;
2. 若  $A, B$  为命题, 则  
 $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  和  $(A \rightarrow B)$  为命题;
3. 命题仅限于此。

也可以用Bacus-Naur Form定义命题为:

$$\varphi ::= P \mid (\neg \varphi) \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$$

其中  $P \in PS$ .



用封包法也可定义命题：

令  $C_{\neg}$ ,  $C_{\wedge}$ ,  $C_{\vee}$ ,  $C_{\rightarrow}$  为所有字母表符号串之集上的函数：

$$C_{\neg}(A) = (\neg A)$$

$$C_*(A, B) = (A * B)$$

这里  $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。



定义1.3 (命题集). 所有命题的集合  $PROP$  是满足以下条件的最小集合:

1.  $PS \subseteq PROP$ ;
2. 若  $A \in PROP$ , 则  $C_{\neg}(A) \in PROP$ ;
3. 若  $A, B \in PROP$ , 则  
 $C_{\wedge}(A, B)$ ,  $C_{\vee}(A, B)$  和  $C_{\rightarrow}(A, B) \in PROP$ ;

即  $PROP$  为在函数  $C_{\neg}$ ,  $C_{\wedge}$ ,  $C_{\vee}$  和  $C_{\rightarrow}$  下  $PS$  的归纳闭包。



# 括号引理 (Parenthesis Lemma)

引理1.4 (括号引理). 若  $A$  为命题, 则  $A$  中所有左括号的个数等于右括号的个数。



# 构造序列

引理1.5  $A \in PROP$  等价于存在有穷序列  $A_0, A_1, \dots, A_n$

使  $A$  为  $A_n$  且对任何  $i \leq n$ ,

或(a)  $A_i \in PS$

或(b) 存在  $k < i$  使  $A_i$  为  $(\neg A_k)$

或(c) 存在  $k, l < i$  使  $A_i$  为  $(A_k * A_l)$ ,

这里 \* 为  $\wedge, \vee, \rightarrow$  之一。

以上序列  $A_0, A_1, \dots, A_n$  被称为  $A$  的构造序列。



证明：令  $PROP' = \{A \mid \text{存在有穷序列 } A_0, A_1, \dots, A_n \text{ 使 } A_n \text{ 为 } A \text{ 且对任何 } i \leq n \text{ 或 (a) } A_i \in PS \text{ 或 (b) 存在 } k < i \text{ 使 } A_i \text{ 为 } (\neg A_k) \text{ 或 (c) 存在 } k, l < i \text{ 使 } A_i \text{ 为 } (A_k * A_l), \text{ 这里 } * \text{ 为 } \wedge, \vee, \rightarrow \text{ 之一。}\}$

欲证  $PROP = PROP'$ , 只需证

- (1)  $PROP' \subseteq PROP$  和 (2)  $PROP \subseteq PROP'$



(1) 设  $A \in PROP'$ , 从而有  $A_0, A_1, \dots, A_n$  满足对任何  $i \leq n$  有(a) 或 (b) 或 (c)。对  $i$  归纳证明  $A_i \in PROP$ 。

**Basis**  $i = 0$ , 易见  $A_0 \in PS$  从而  $A_0 \in PROP$

**I.H.** 设对任何  $k < i$  有  $A_k \in PROP$

**Ind. Step** 对于  $i$

**Case(a)**  $A_i \in PS$  从而  $A_i \in PROP$

**Case(b)**  $A_i$  为  $(\neg A_k)$ , 这里  $k < i$ , 从而

由 I.H. 知  $A_k \in PROP$ , 因此  $A_i \in PROP$

**Case(c)**  $A_i$  为  $(A_k * A_l)$ , 这里  $k, l < i$ , 从而由

I.H. 知  $A_k, A_l \in PROP$ , 因此  $A_i \in PROP$

归纳完成, 故  $A_n \in PROP$ , 因此  $PROP' \subseteq PROP$ 。



(2) 由于  $PROP$  为满足定义 1.3 中条件 (1)-(3) 的最小集合，故只需证  $PROP'$  满足定义 1.3 中条件 (1)-(3)。

易见  $PS \subseteq PROP'$ , 又当  $A, B \in PROP'$  时

$A, B$  有构造序列  $A_0, A_1, \dots, A_n$  和  $B_0, B_1, \dots, B_m$ , 从而

$(\neg A)$  有构造序列  $A_0, A_1, \dots, A_n, (\neg A)$ , 且

$(A * B)$  有构造序列  $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_m, (A * B)$ ,

从而  $PROP'$  满足定义 1.3 中的条件, 故  $PROP \subseteq PROP'$ 。

□



# 结构归纳

- 每个命题皆有构造过程，构造过程不一定唯一。
- 若  $A_0, A_1, \dots, A_n$  为  $A$  的最短构造过程，  
则称  $n$  为  $A$  的构造长度。
- 下面常常会对  $A$  的结构作归纳证明一些性质，  
事实上是对  $A$  的构造长度作归纳，而这是自然数上的归纳。



# 命题的语义

- 什么是命题的语义？

对于任意的**赋值**  $v : PS \rightarrow \{T, F\}$ , 定义一个**解释**

$$\hat{v} : PROP \rightarrow \{T, F\}$$



# 联结词定义的布尔函数

定义1.6. 令真值集  $B = \{T, F\}$ ,

- 联结词  $\neg$  被解释为一元函数  $H_{\neg} : B \rightarrow B$ ;
- 联结词  $*$  被解释为二元函数  $H_* : B^2 \rightarrow B$ ,  
这里  $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ;
- $H_{\neg}$ ,  $H_{\wedge}$ ,  $H_{\vee}$ ,  $H_{\rightarrow}$  定义如下:

$P$	$Q$	$H_{\neg}(P)$	$H_{\wedge}(P, Q)$	$H_{\vee}(P, Q)$	$H_{\rightarrow}(P, Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

这就是所谓的真值表。



# 命题的语义的归纳定义

定义1.7 (命题的语义).

- $v$  为一个赋值指它为函数  $v : PS \rightarrow \mathbf{B}$ ,  
从而对任何命题符  $P_i$ ,  $v(P_i)$  为T或F。
- 对于任何赋值  $v$ , 定义  $\hat{v} : PROP \rightarrow \mathbf{B}$  如下:

$$\hat{v}(P_n) = v(P_n), \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\hat{v}(\neg A) = H_{\neg}(\hat{v}(A));$$

$$\hat{v}(A * B) = H_*(\hat{v}(A), \hat{v}(B)), \text{ 这里 } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}.$$

对于命题  $A$ , 它的解释  $\hat{v}(A)$  为 T 或 F。

事实上, 真值  $\hat{v}(A)$  仅与  $A$  中出现的命题符有关。



# 另一种等价的语义定义

给定一个模型（赋值） $v : PS \rightarrow \mathbf{B}$ , 对于任意  $\varphi \in PROP$   
 $v \models \varphi$  定义如下：

- $v \models P$                       iff       $v(P) = T$
- $v \models \neg\varphi$                   iff       $v \not\models \varphi$
- $v \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$       iff       $v \models \varphi_1$  and  $v \models \varphi_2$
- $v \models \varphi_1 \vee \varphi_2$         iff       $v \models \varphi_1$  or  $v \models \varphi_2$
- $v \models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$       iff      not  $(v \models \varphi_1 \text{ and } v \not\models \varphi_2)$   
    iff       $v \not\models \varphi_1$  or  $v \models \varphi_2$

此外，还可以定义：

$$\models \varphi \qquad \text{iff} \qquad \forall v : v \models \varphi$$



# Meta-language

注意  $\models$  不是语言中的符号, 而是在上层语言(meta-language)中。

在上层语言中, 人们也需要用联结词如not, and, or, imply 等,  
例如我们有

- $v \models \neg A$  iff not  $v \models A$
- $v \models (A \wedge B)$  iff  $(v \models A)$  and  $(v \models B)$
- $v \models (A \vee B)$  iff  $(v \models A)$  or  $(v \models B)$
- $v \models (A \rightarrow B)$  iff  $(v \models A)$  implies  $(v \models B)$

# Rain(R) and Shopping(S)



	$v_1 \vDash R$ $v_1 \vDash \neg S$  $v_1 \vDash \neg R \rightarrow S$ $v_1 \vDash \neg R \rightarrow \neg S$		$v_2 \vDash \neg R$ $v_2 \vDash S$  
	$v_3 \vDash R$ $v_3 \vDash S$  		$v_4 \vDash \neg R$ $v_4 \vDash \neg S$  

$\neg R \rightarrow S$        $\xapprox{?}$       如果不下雨，那么就去逛街。



# Love her, treat her Haagen-Dazs!



love	treat	love → treat
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

\*Strategy 1: ... treat her Haagen-Dazs 中策

$$v \models love \rightarrow treat, \quad v \models treat \Rightarrow v \models love$$

\*Strategy 2: ... refuse to treat her Haagen-Dazs 下策

$$v \models love \rightarrow treat, \quad v \not\models treat \Rightarrow v \models \neg love$$

\*Strategy 3: ... deny the AD and refuse to treat her Haagen-Dazs 上策

$$v \not\models love \rightarrow treat, \quad v \not\models treat \Rightarrow v \models love$$

\*Strategy 4: ... deny the AD but actually treat her Haagen-Dazs 下下策

$$v \not\models love \rightarrow treat, \quad v \models treat \Rightarrow v \models love \wedge \neg treat \wedge treat$$

Inconsistent!



设  $A$  为命题，令  $FV(A) = \{ P \in PS \mid P \text{ 出现于 } A \text{ 中} \}$ 。

**引理1.8.** 设  $A$  为命题， $v_1, v_2$  为赋值，

若  $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$ ，则  $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$ 。

**证明:** 设  $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$ ，即对于  $P \in FV(A)$ ,

$v_1(P) = v_2(P)$ 。以下对  $A$  的结构作归纳证明  $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A) \dots (*)$ 。

**Basis** 当  $A \in PS$  时，易见  $(*)$  成立。

**I.H.** 设  $A$  为  $B, C$  时  $(*)$  成立。

**Ind. Step**

**情况  $\neg$ :**  $A$  为  $\neg B$ ，

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(\neg B) = H_{\neg}(\hat{v}_1(B)) \stackrel{I.H.}{=} H_{\neg}(\hat{v}_2(B)) = \hat{v}_2(\neg B) = \hat{v}_2(A)$$

**情况  $*$ :**  $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ， $A$  为  $B * C$ 。

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(A) &= \hat{v}_1(B * C) = H_*(\hat{v}_1(B), \hat{v}_1(C)) \stackrel{I.H.}{=} H_*(\hat{v}_2(B), \hat{v}_2(C)) \\ &= \hat{v}_2(B * C) = \hat{v}_2(A) \end{aligned}$$





例1.1. 设  $A$  为  $(\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)))$ ,  $v$  为赋值且  $P, Q \in PS$ 。  
若  $v(P) = T, v(Q) = F$ , 则计算  $\hat{v}(A)$  如下表:

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$A$
T	F	F	T	F	T



# Semantic Consequence

定义1.9. 设  $A$  为命题,  $v$  为赋值。

1.  $v$  满足  $A$ , 记为  $v \models A$ , 指  $\hat{v}(A) = T$ ;
2.  $A$  为永真式 (tautology), 记为  $\models A$ ,  
指对任何  $v$  有  $\hat{v}(A) = T$ ;
3.  $A$  可满足指有  $v$  使  $v \models A$ ;
4. 设  $\Gamma$  为命题集,  $A$  为  $\Gamma$  的语义结论, 记为  $\Gamma \models A$ ,  
指对所有  $v$ , 若对任何  $B \in \Gamma$  有  $\hat{v}(B) = T$  则  $\hat{v}(A) = T$ 。



例1.2.  $A \rightarrow A$ ,  $\neg\neg A \rightarrow A$ ,  $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$  为永真式。

例1.3. 证明 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  为永真式。

证明：用下列的真值表法

$A$	$B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

□



# 命题与真值函数

定义1.10. 设  $A$  为命题,  $FV(A) = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ 。

$n$  元函数  $H_A : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$  定义如下:

对于任何  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n$ ,  $H_A(a_1, \dots, a_n) = \hat{v}(A)$ ,

这里赋值  $v$  满足  $v(Q_i) = a_i (1 \leq i \leq n)$ 。

下面称  $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$  为  $n$  元真值函数, 称  $H_A$  为由  $A$  定义的真值函数。



例1.4. 设  $A$  为  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ , 由下列真值表知  
 $H_A : \mathbf{B}^2 \mapsto \mathbf{B}$  为不可兼或运算。

$P$	$Q$	$A$	$H_A(P, Q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

由  $A$  可定义真值函数  $H_A$ , 反之给定真值函数  $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$ ,  
是否存在命题  $A$  使  $f = H_A$  ?

**答案是肯定的!**



# 析合范式 - 合析范式

定义1.11.

1. 命题  $A$  为析合范式 ( $\vee\wedge$ -nf) 指  $A$  呈形  $\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{k=1}^n P_{i,k})$ ,

这里  $P_{i,k}$  为命题符或命题符的否定(即呈形  $\neg P_i$ )。

2. 命题  $A$  为合析范式 ( $\wedge\vee$ -nf) 指  $A$  呈形  $\bigwedge_{j=1}^l (\bigvee_{k=1}^n Q_{j,k})$ ,

这里  $Q_{j,k}$  为命题符或命题符的否定。

以上

- $\bigwedge_{k=1}^n B_k$  为  $(\dots(((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3) \dots \wedge B_n) \dots)$  的简写;

- $\bigvee_{k=1}^n B_k$  为  $(\dots(((B_1 \vee B_2) \vee B_3) \dots \vee B_n) \dots)$  的简写。



# 任意真值函数均可表示为范式

定理1.12. 设  $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$ 。

1. 存在命题  $A$  其为  $\vee\wedge$ -nf 使  $f = H_A$ ;
2. 存在命题  $A'$  其为  $\wedge\vee$ -nf 使  $f = H_{A'}$ 。

*Proof.* 设  $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$ , 令

- $T_f = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = T\}$
- $F_f = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = F\}$

$\because T_f$  和  $F_f$  皆为有穷集,  $\therefore$  可设

- $T_f = \{(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq i \leq m\}$
- $F_f = \{(b_{j1}, \dots, b_{jn}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq j \leq l\}$



这里  $m + l = 2^n$ 。令

$$P_{i,k}^* = \begin{cases} P_k, & \text{若 } a_{ik} = T, \\ \neg P_k, & \text{若 } a_{ik} = F. \end{cases}$$

$$A = \bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{k=1}^n P_{i,k}^*)$$

又令

$$Q_{j,k}^* = \begin{cases} \neg P_k, & \text{若 } b_{jk} = T, \\ P_k, & \text{若 } b_{jk} = F. \end{cases}$$

$$A' = \bigwedge_{j=1}^l (\bigvee_{k=1}^n Q_{j,k}^*)$$

易见  $FV(A) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 。

欲证  $H_A = f$ ,

只需证 令  $v(P_i) = x_i$ , 我们有  $f(x_1, \dots, x_n) = \hat{v}(A)$

只需证  $\hat{v}(A) = T$  iff  $(x_1, \dots, x_n) \in T_f$ , i.e.  $v \models A$  iff  $(x_1, \dots, x_n) \in T_f$



∴

$$v \models A \text{ iff } v \models \bigvee_{i=1}^m \left( \bigwedge_{k=1}^n P_{i,k}^* \right)$$

$$P_{i,k}^* = \begin{cases} P_k, & \text{若 } a_{ik} = T, \\ \neg P_k, & \text{若 } a_{ik} = F. \end{cases}$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 } v \models \left( \bigwedge_{k=1}^n P_{i,k}^* \right)$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 对所有 } k \leq n \text{ 有 } v \models P_{i,k}^*$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 对所有 } k \leq n \text{ 有 } \hat{v}(P_{i,k}^*) = T$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 对所有 } k \leq n \text{ 有 } v(P_k) = a_{ik}$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 对所有 } k \leq n \text{ 有 } x_k = a_{ik}$$

$$\text{iff 有 } i \leq m \text{ 使 } (x_1, \dots, x_n) = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

$$\text{iff } (x_1, \dots, x_n) \in T_f$$

$\therefore H_A = f$ , 同理可证  $H_{A'} = f$ . □



例1.5. 求  $((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge P$  的  $\wedge\vee$ -nf 和  $\vee\wedge$ -nf。

**Solution.** 不妨设  $P, Q, R \in PS$

先计算出下列真值表

$P$	$Q$	$R$	$((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge P$	$\vee\wedge$ -nf	$\wedge\vee$ -nf
$T$	$T$	$T$	$T$	$P \wedge Q \wedge R$	
$T$	$T$	$F$	$F$		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
$T$	$F$	$T$	$T$	$P \wedge \neg Q \wedge R$	
$T$	$F$	$F$	$T$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	
$F$	$T$	$T$	$F$		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
$F$	$T$	$F$	$F$		$P \vee \neg Q \vee R$
$F$	$F$	$T$	$F$		$P \vee Q \vee \neg R$
$F$	$F$	$F$	$F$		$P \vee Q \vee R$

它的  $\vee\wedge$ -nf:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

它的  $\wedge\vee$ -nf:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$





# 逻辑等价

**定义1.13.** 设  $A, B$  为命题,  $A$  与  $B$  逻辑等价, 记为  $A \simeq B$ ,  
指对任何赋值  $v$ ,

$$v \models A \text{ iff } v \models B$$

## 命题1.14.

1.  $A \simeq A$ ;
2. 若  $A \simeq B$ , 则  $B \simeq A$ ;
3. 若  $A \simeq B$  且  $B \simeq C$ , 则  $A \simeq C$ ;
4. 若  $A \simeq B$ , 则  $(\neg A) \simeq (\neg B)$ ;
5. 若  $A_1 \simeq B_1$  且  $A_2 \simeq B_2$ , 则  $(A_1 * A_2) \simeq (B_1 * B_2)$

这里  $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。



任意两个具有相同命题符集的命题，它们逻辑等价 iff 它们定义的真值函数相等

**命题1.15.** 设  $FV(A \wedge B) = \{Q_1, \dots, Q_n\}$  且  $H_A : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ ,  $H_B : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$ 。我们有  $A \simeq B$  iff  $H_A = H_B$ 。

**命题1.16.** 若  $A$  为命题，则存在  $\wedge\vee$ -nf  $B$  和  $\vee\wedge$ -nf  $B'$  使  $A \simeq B$  且  $A \simeq B'$ ，这时称  $B$  和  $B'$  分别为  $A$  的  $\wedge\vee$ -nf 和  $\vee\wedge$ -nf。

证明：由定理1.12 和命题1.15 即得。

任意命题均有逻辑等价的范式

任意真值函数均可表示为  
范式



# 联结词的完全组

由定理1.12 知, 对于任何  $n$  元真值函数  $f$ , 存在命题  $A$  其中仅用联结词  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  使  $f = H_A$ 。

这就说明  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  是所谓联结词的函数完全组。

又由于

- $A \wedge B \simeq \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \vee B \simeq \neg(\neg A \wedge \neg B)$

故  $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \rightarrow\}$  亦为联结词的函数完全组。



例1.6. 求  $\neg((P \wedge Q) \rightarrow R)$  的  $\wedge\vee$ -nf 和  $\vee\wedge$ -nf。

Solution.

$$\begin{aligned}\therefore \neg((P \wedge Q) \rightarrow R) \\ &\simeq \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) \\ &\simeq \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \\ &\simeq \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\ &\simeq (\neg\neg P) \wedge (\neg\neg Q) \wedge \neg R \\ &\simeq P \wedge Q \wedge \neg R\end{aligned}$$

$\therefore P \wedge Q \wedge \neg R$  既为原式的  $\wedge\vee$ -nf 又为  $\vee\wedge$ -nf。



**定义1.17.** 一个 sequent 是一个二元组  $(\Gamma, \Delta)$ , 记为  $\Gamma \vdash \Delta$ , 这里  $\Gamma, \Delta$  为命题的有穷集合 (可为空), 称  $\Gamma$  为前件,  $\Delta$  为后件。命题逻辑的自然推理系统  $G'$  由以下 公理 和 规则 组成,  $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$  表示任何命题有穷集合,  $A, B$  表示任何命题。

- 公理:  $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

- 规则:  $\neg L : \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$

$$\vee L : \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\wedge L : \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\rightarrow L : \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\text{Cut: } \frac{\Gamma \vdash \Lambda, \textcolor{red}{A} \quad \Delta, \textcolor{red}{A} \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

$$\neg R : \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\rightarrow R : \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$



# 树状推理模式

系统  $G'$  中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，

呈形  $\frac{S'}{S}$  或  $\frac{S_1, S_2}{S}$ ，这可以被看作树



规则的upper sequent  $S_1, S_2$  被称为前提,lower sequent被称为结论。  
 $G'$  中规则被称为推理规则，规则中被作用的命题被称为主命题，  
而不变的命题被称为辅命题。



每个公理和规则是模式（schema），它们可有无穷多个实例。

例1.7. 
$$\frac{A, B \vdash P, D \quad A, Q, B \vdash D}{A, P \rightarrow Q, B \vdash D}$$
 为  $\rightarrow L$  的实例。



# $G'$ 的一些基本概念

定义1.18. 设  $\Gamma$  为  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,  $\Delta$  为  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ,

1.  $\Gamma \vdash \Delta$  有反例 (falsifiable) 指存在赋值  $v$  使  $v \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \dots \wedge \neg B_n)$  这时称  $v$  反驳  $\Gamma \vdash \Delta$ 。
2.  $\Gamma \vdash \Delta$  有效 (valid) 指对任何赋值  $v$ ,  $v \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)$  这时称  $v$  满足  $\Gamma \vdash \Delta$ 。
3.  $\Gamma \vdash \Delta$  有效也被记为  $\Gamma \models \Delta$ 。
4. 当  $m = 0$  时,  $\vdash B_1, \dots, B_n$  有反例 指  $(\neg B_1 \wedge \dots \wedge \neg B_n)$  可满足;  $\vdash B_1, \dots, B_n$  有效 指  $(B_1 \vee \dots \vee B_n)$  永真。
5. 当  $n = 0$  时,  $A_1, \dots, A_n \vdash$  有反例 指  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$  可满足;  $A_1, \dots, A_m \vdash$  有效 指  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$  不可满足。
6. 约定  $\{\} \vdash \{\}$  非有效。

命题1.19.  $\Gamma \vdash \Delta$  有效 iff  $\Gamma \vdash \Delta$  无反例。



# $G'$ 的一些性质

引理1.20. 对于  $G'$  系统的每条异于 cut 的规则,

1. 赋值  $v$  反驳规则的结论 iff  $v$  至少反驳规则的一个前提;
2.  $v$  满足规则的结论 iff  $v$  满足规则的所有前提。
3. 对于  $G'$  中的每条异于 cut 的规则, 每个前提有效 iff 结论有效。

注: 若  $v$  反驳 cut 的结论, 则  $v$  至少反驳 cut 的一个前提, 反之不然。

反例:

$$\frac{P_1 \vdash P_2 \quad P_2 \vdash P_3}{P_1 \vdash P_3} \text{ cut}$$

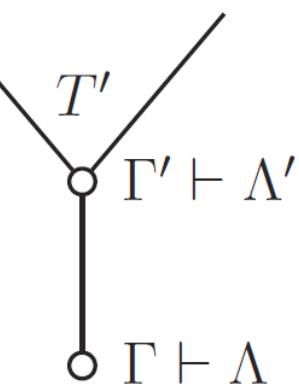
取  $v(P_1) = v(P_3) = T, v(P_2) = F$  即可。



# 证明树

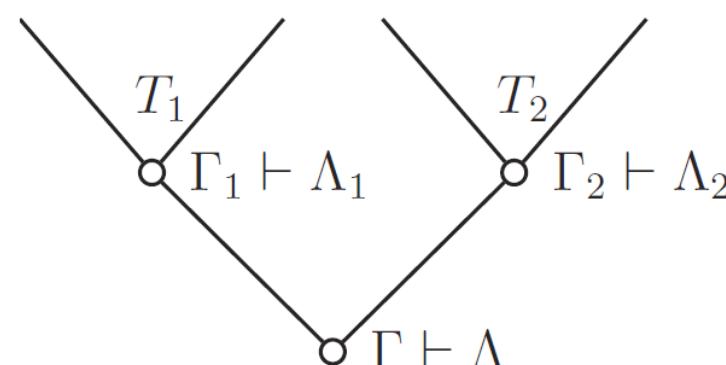
定义1.21. 设  $\Gamma \vdash \Lambda$  为 sequent, 树  $T$  为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树指

1. 当  $\Gamma \vdash \Lambda$  为  $\mathbf{G}'$  公理, 以  $\Gamma \vdash \Lambda$  为节点的单点树  $T$  为其证明树。
2. 当  $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$  为  $\mathbf{G}'$  规则, 若  $T'$  为  $\Gamma' \vdash \Lambda'$  的证明树, 则树  $T$ :



为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。

3. 当  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$  为  $\mathbf{G}'$  规则, 若  $T_i$  为  $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$  的证明树 ( $i = 1, 2$ ),  
树  $T$ :



为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。



# 可证

定义1.22. 设  $\Gamma \vdash \Lambda$  为 sequent,  $\Gamma \vdash \Lambda$  可证 (provable) 指存在  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。

例1.8. 证明

$$1. \vdash A \rightarrow A$$

$$2. \vdash A \vee \neg A$$

$$3. \vdash \neg(A \wedge \neg A)$$

可证。

证明:

$$1. \quad Ax$$

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow R$$

$$2. \quad Ax$$

$$\frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R}{\vdash A \vee \neg A} \vee R$$

$$3. \quad Ax$$

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A \vdash} \neg L}{\vdash A \wedge \neg A \vdash} \wedge L}{\vdash \neg(A \wedge \neg A)} \neg R$$

□



# $G'$ 的Soundness

定理1.23 ( $G'$  的 Soundness). 若  $\Gamma \vdash \Delta$  在  $G'$  中可证，则  $\Gamma \vdash \Delta$  有效。

证明: 下面对  $\Gamma \vdash \Delta$  的证明树的结构归纳证明  $\Gamma \vdash \Delta$  有效，即  $\Gamma \vDash \Delta$ 。

$\Gamma \vdash \Delta$  为公理，易见  $\Gamma \vDash \Delta$ 。先设下面的  $(R_1)$  和  $(R_2)$  不是规则 cut。

**情形1:**  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta} (R_1)$  由 I.H. 知  $\Gamma_1 \vDash \Delta_1$ ，从而由引理1.20 知  $\Gamma \vDash \Delta$ 。

**情形2:**  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta} (R_2)$  由 I.H. 知  $\Gamma_1 \vDash \Delta_1$ ,  $\Gamma_2 \vDash \Delta_2$ ，从而由引理1.20 知  $\Gamma \vDash \Delta$ 。

**情形3:** 设  $\Gamma$  为  $\Gamma_1, \Gamma_2$  且  $\Delta$  为  $\Delta_1, \Delta_2$ ,  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta} (cut)$

由 I.H. 知  $\Gamma_1 \vDash \Delta_1, A$  且  $\Gamma_2, A \vDash \Delta_2$ 。反设非  $\Gamma \vDash \Delta$ ，即有  $v$  反驳  $\Gamma \vDash \Delta$ 。

1. 当  $v(A) = T$  时， $v$  反驳  $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$ ，矛盾！
2. 当  $v(A) = F$  时， $v$  反驳  $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$ ，矛盾！

故  $\Gamma \vDash \Delta$ .

□



# $G'$ 的Completeness

定理1.24 ( $G'$ 的completeness). 若  $\Gamma \vdash \Delta$  有效, 则  $\Gamma \vdash \Delta$  在  $G'$  中可证。

证明: 设  $m$  为  $\Gamma \vdash \Delta$  中联结词出现的个数, 以下对  $m$  作归纳证明

(\*): 在  $G'$  中存在  $\Gamma \vdash \Delta$  的一个无 cut 证明树, 其中规则个数  $< 2^m$ .

当  $m = 0$  时,  $\Gamma \vdash \Delta$  中无联结词, 故呈形  $P_1, \dots, P_n \vdash Q_1, \dots, Q_n$ ,  $P_i, Q_j$  均为命题符,  $\because \Gamma \vDash \Delta$ ,  $\therefore$  必有一个  $P$  同时出现于  $\Gamma \vdash \Delta$  的左右两边, 从而  $\Gamma \vdash \Delta$  为公理, 它有证明树, 其中无规则。故(\*)成立。

对于  $m > 0$ , 我们将按照联结词在  $\Gamma, \Delta$  中最外位置的情形来证明(\*)

**情形1.** 设  $\Gamma$  为  $\neg A, \Gamma'$ . 我们可作  $\Gamma \vdash \Delta$  的推理如下:

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

$\because \Gamma \vDash \Delta$ ,

$\therefore$  由引理 1.20,  $\Gamma' \vDash \Delta, A$ , 而  $\Gamma' \vDash \Delta, A$  中联结词出现的个数  $\leq m - 1$ ,

从而由 I.H. 知  $\Gamma' \vDash \Delta, A$  有一个无 cut 证明, 其中规则个数  $< 2^{m-1}$ ,

因此  $\Gamma \vdash \Delta$  有一个无 cut 证明, 其中规则个数  $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$ .



**情形2.** 设  $\Delta$  为  $\neg B, \Delta'$ . 与情形 1 同理.

**情形3.** 设  $\Gamma$  为  $A \wedge B, \Gamma' \models \Delta$ , 我们有推理

$$\frac{A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

从而由引理1.20,  $A, B, \Gamma' \vdash \Delta$ ,

由 I.H. 知  $A, B, \Gamma' \vdash \Delta$  有无 cut 证明树, 其中规则个数  $< 2^{m-1}$ ,

因此  $\Gamma \vdash \Delta$  有无 cut 证明树, 其中规则个数  $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$ .

**情形4.** 设  $\Delta$  为  $\Delta', A \wedge B$ , 我们有推理

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta', A \quad \Gamma \vdash \Delta', B}{\Gamma \vdash \Delta', A \wedge B}$$

$\therefore$  由引理 1.20,  $\Gamma \vdash \Delta', A$  且  $\Gamma \vdash \Delta', B$ .

而  $\Gamma \vdash \Delta', A$  与  $\Gamma \vdash \Delta', B$  中的联结词出现的个数  $\leq m - 1$ ,

故由 I.H. 知  $\Gamma \vdash \Delta', A$  和  $\Gamma \vdash \Delta', B$  皆有一个无 cut 证明,  
其中规则数  $< 2^{m-1}$ ,

从而  $\Gamma \vdash \Delta$  有无 cut 证明,

其中规则数  $\leq (2^{m-1} - 1) + (2^{m-1} - 1) + 1 < 2^m$ .

其余情况同理可证. 归纳完成. □



# 一些推论

系1.25  $\Gamma \vdash \Delta$  可证 iff  $\Gamma \vdash \Delta$  有效.

定理1.26 若  $\Gamma \vdash \Delta$  在  $G'$  中可证, 则  $\Gamma \vdash \Delta$  在  $G'$  中有一个无 cut 证明.

证明: 若  $\Gamma \vdash \Delta$  可证, 则  $\Gamma \vDash \Delta$ ,

由定理1.24 知  $\Gamma \vdash \Delta$  有一个无 cut 证明.  $\square$



# 紧致性(Compactness)定理

定理1.27( $G'$ 的compactness). 设  $\Gamma$  为命题的集合, 若  $\Gamma$  的任何有穷子集可满足, 则  $\Gamma$  可满足。

定义1.28 称  $\Delta$  为有穷可满足指  $\Delta$  的任何有穷子集可满足。

引理1.29 所有命题可被排列为  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  ( $n \in \mathbf{N}$ )。

引理1.30 设  $\Delta$  为有穷可满足,  $A$  为命题。若  $\Delta \cup \{A\}$  不为有穷可满足, 则  $\Delta \cup \{\neg A\}$  为有穷可满足。

证明: 设  $\Delta \cup \{A\}$  不为有穷可满足, 反设  $\Delta \cup \{\neg A\}$  也不为有穷可满足, 从而存在  $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$  使  $\Delta_1, \Delta_2$  皆有穷且  $\Delta_1 \cup \{A\}$  与  $\Delta_2 \cup \{\neg A\}$  皆不可满足。由于  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  为  $\Delta$  的有穷子集, 故有  $v$  使  $v \models \Delta_1 \cup \Delta_2$ , 然

- (1) 当  $v \models A$  时,  $v \models \Delta_1 \cup \{A\}$ , 从而矛盾。
- (2) 当  $v \not\models A$  时,  $v \models \Delta_2 \cup \{\neg A\}$ , 从而矛盾。

故  $\Delta \cup \{\neg A\}$  有穷可满足。 □



# 紧致性定理的证明

证明：令

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\} & , \text{ 若 } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ 有穷可满足,} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_n\} & , \text{ 否则。} \end{cases}$$

先对  $n$  归纳证明  $\Gamma_n$  有穷可满足……(\*)。

**Basis**  $n = 0$  时，易见 (\*) 成立。

**I.H.** 设  $\Gamma_n$  有穷可满足。

**Ind. Step** 若  $\Gamma_n \cup \{A_n\}$  有穷可满足，则  $\Gamma_{n+1}$  有穷可满足，否则由引理 1.30 知  $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$  有穷可满足，即  $\Gamma_{n+1}$  有穷可满足。归纳完成。

令  $\Delta = \bigcup \{\Gamma_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ，我们有  $\Delta$  为有穷可满足。

设  $\Phi$  为  $\Delta$  的有穷子集，从而有  $k$  使  $\Phi \subseteq \{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ ，故  $\Phi \subseteq \Gamma_{k+1}$ ，因此  $\Delta$  有穷可满足。



对任何命题变元  $p_i$ ,  $p_i \in \Delta$  或  $\neg p_i \in \Delta$  且恰具其一。

设  $p_i$  为  $A_l$ 。若  $p_i \notin \Delta$ , 则  $A_l \notin \Delta$ , 从而  $\Gamma_l \cup \{A_l\}$  不为有穷可满足, 因此  $\neg A_l \in \Gamma_{l+1}$ , 故  $\neg p_i \in \Delta$ 。

又反设  $p_i, \neg p_i \in \Delta$ , 从而  $\Delta$  的子集  $\{p_i, \neg p_i\}$  不可满足, 故  $\Delta$  不为有穷可满足。

令  $v(p_i) = \begin{cases} T & , \text{ 若 } p_i \in \Delta \\ F & , \text{ 若 } \neg p_i \in \Delta \end{cases}$

以下对  $A$  的结构归纳证明: 若  $A \in \Delta$  则  $v \models A$ , 否则  $v \not\models A$ .....(\*)。

**情形 1.**  $A$  为命题变元  $p_i$ , 由上知 (\*) 成立。

**情形 2.**  $A$  为  $\neg B$ 。

1. 当  $A \in \Delta$  时,  $\Delta$  为有穷可满足, 所以  $B \notin \Delta$ ,

从而由 I.H. 知  $v \not\models B$ , 从而  $v \models \neg B$ 。

2. 当  $A \notin \Delta$  时, 即  $\neg B \notin \Delta$ , 设  $B$  为  $A_l$ ,

从而  $\Gamma_l \cup \{B\}$  有穷可满足(若不然, 有  $\neg B \in \Gamma_{l+1}$ , 与  $\neg B \notin \Delta$  矛盾)。

故  $B \in \Delta$ , 由 I.H. 知  $v \models B$ , 从而  $v \not\models A$ 。



情形 3.  $A$  为  $B \wedge C$ 。

1. 当  $A \in \Delta$  时, 有  $B \in \Delta$ 。

反设  $B \notin \Delta$ , 从而  $\neg B \in \Delta$ , 但  $\{A, \neg B\}$  不可满足, 矛盾。

因此  $B \in \Delta$ , 同理  $C \in \Delta$ 。

由 I.H. 知  $v \models B, v \models C$ , 从而  $v \models B \wedge C$ , 即  $v \models A$ 。

2. 当  $A \notin \Delta$  时, 有  $B \notin \Delta$  或  $C \notin \Delta$ 。

反设  $B \in \Delta$  且  $C \in \Delta$ , 从而由  $A \notin \Delta$  知  $\neg A \in \Delta$ ,

然  $\{\neg A, B, C\}$  不可满足, 故矛盾。

因此  $B \notin \Delta$  或  $C \notin \Delta$ 。

不妨设  $B \notin \Delta$ , 从而  $v \not\models B$ , 因此  $v \not\models A$ 。

其他情形同理可证 (\*) 成立。

因此我们有  $v \models \Delta$ , 故  $\Delta$  可满足, 从而  $\Gamma$  可满足。 □



# 本讲小结

- 命题逻辑的语法
- 命题逻辑的语义
- 自然推理系统 $G'$
- 3个重要的定理
  - Soundness
  - Completeness
  - Compactness