

2024-25学年春季学期“数理逻辑”期中作业

1. 平面几何是关于点和线的学说,
 - (1) 请基于你自己的理解, 给出平面几何的一阶语言 G .(10分)
 - (2) 请基于所给出的 G , 表述欧氏几何第一公理, “两点唯一地确定一条直线”.(10分)
2. 设 Φ 为一极大协调的公式集, 证明:
 - (1) 若 $A \in \Phi$ 且 $A \rightarrow B \in \Phi$, 则 $B \in \Phi$; (10分)
 - (2) 若 $\forall x A \in \Phi$, 则对任何项 t , 有 $A[\frac{t}{x}] \in \Phi$. (10分)
3. 请判断下列序贯在 G 系统中是否可证, 如可证则请给出对应的 G 系统内的证明, 反之则请证明为何其在 G 系统中不可证:
 - (1) $\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$; (10分)
 - (2) $\vdash (\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.(Q(x))) \rightarrow \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$; (10分)
 - (3) $\vdash \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x.(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \exists x.(P(x) \wedge R(x))$; (10分)
4. 对于一阶语言公式 $\varphi: (\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x)))$, 其中 P, Q 为一元谓词符, 请回答下列问题并证明你的结论.
 - (1) φ 是否可满足;(10分)
 - (2) φ 是否永真;(10分)
5. 设 L 为一阶语言, 请证明不存在 L 的公式集合 Γ , 使得对于任何一阶语言结构 M , $M \models \Gamma \Leftrightarrow M$ 的论域为有穷集.(10分)