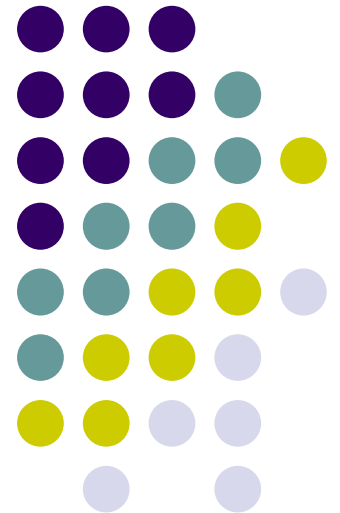




第6讲-完全性定理





一阶逻辑的完全性定理是数理逻辑的基本定理之一，非常重要。它由 *K. Gödel* 于20世纪30年代证明。

本讲中我们给出带等词的一阶谓词演算的完全性定理，证明方法采用Henkin在20世纪50年代给出的方法，这里利用极大协调集的方法，故我们

- 首先引入无穷公式集的协调性和极大协调性，
- 然后定义带等词的一阶谓词演算 Ge ，
- 最后证明完全性定理。



设 \mathcal{L} 为一阶语言，我们采用的语言是可数语言，即变元集为可数无穷集，从而全体项之集和全体公式之集皆为可数无穷集。

定义6.1 设 Γ 为公式集

- 1) Γ 矛盾指存在 Γ 的有穷集 Δ 使 $\Delta \vdash$ 在 G 中可证；
- 2) Γ 协调指 Γ 不矛盾；
- 3) Γ 协调（consistent）记为 $Con(\Gamma)$, Γ 矛盾记为 $Incon(\Gamma)$.



命题6.2. 以下四点等价:

- 1) $Incon(\Gamma)$;
- 2) 存在公式 A ,存在 Γ 的有穷子集 Δ ,使 $\Delta \vdash A$ 和 $\Delta \vdash \neg A$ 可证;
- 3) 对任何公式 A ,存在 Γ 的有穷子集 Δ ,使 $\Delta \vdash A$;
- 4) 对任何公式 A ,存在 Γ 的有穷子集 Δ ,使 $\Delta \vdash A$ 和 $\Delta \vdash \neg A$ 可证。

证明:

(1) \Rightarrow (2): 因为 $\Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证;

(2) \Rightarrow (3):

因为 $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash B$ 可证;

(3) \Rightarrow (4) 易见;

(4) \Rightarrow (1): 因为 $\Delta \vdash A$, $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash$ 可证。 □



我们同理可证：

命题6.3. 设 Γ 为公式集，以下四点等价：

- 1) $Con(\Gamma)$;
- 2) 对任何 Γ 的有穷子集 Δ , $\Delta \vdash$ 在 G 中不可证;
- 3) 对任何公式 A ,对任何 Γ 的有穷子集 Δ ,
 $\Delta \vdash A$ 不可证或 $\Delta \vdash \neg A$ 不可证;
- 4) 存在公式 A ,使对任何 Γ 的有穷子集 Δ , $\Delta \vdash A$ 不可证。



定义6.4. 设 Γ 为公式集, Γ 为极大协调的(*maximally consistent*)指

1) $Con(\Gamma)$ 和

2) 对任何公式集 Δ , 若 $Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$ 则 $\Gamma = \Delta$.



命题6.5. Γ 为极大协调的 iff

1) $Con(\Gamma)$ 和

2) 对任何公式 A , 若 $Con(\Gamma \cup \{A\})$ 则 $A \in \Gamma$.

证明:

“ \Rightarrow ” 设 Γ 为极大协调, 从而 $Con(\Gamma)$, 现设 $Con(\Gamma \cup \{A\})$, 因为 $\Gamma \cup \{A\} \supseteq \Gamma$, 故 $\Gamma \cup \{A\} = \Gamma$, 因此 $A \in \Gamma$.

“ \Leftarrow ” 设 $Con(\Gamma)$ 且对任何 A 有 $Con(\Gamma \cup \{A\}) \Rightarrow A \in \Gamma$, 现设 $Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$, 反设 $\Gamma \neq \Delta$, 从而有 $A \in \Delta - \Gamma$; $\therefore \Gamma \cup \{A\} \subseteq \Delta$, 从而 $Con(\Gamma \cup \{A\})$, 故 $A \in \Gamma$ 矛盾。

□



命题6.6. 设 Γ 为极大协调的 iff

- 1) $Con(\Gamma)$ 和
- 2) 对任何公式 A , $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$.

证明:

“ \Rightarrow ”: 设 Γ 极大协调, 1)易见; 2)对于 A , 反设 $A \notin \Gamma$ 且 $\neg A \notin \Gamma$.

从而由命题6.5 知 $Incon(\Gamma \cup \{A\})$ 且 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$

从而存在 Δ_1 和 Δ_2 ,其为 Γ 的有穷子集使 $\Delta_1, A \vdash$ 和 $\Delta_2, \neg A \vdash$ 可证,
从而 $\Delta_1, \Delta_2 \vdash$ 可证, 因此 $Incon(\Gamma)$ 矛盾!

“ \Leftarrow ”: 设 1)和2),由命题6.5 我们只需证若 $Con(\Gamma \cup \{A\})$,则 $A \in \Gamma$,
由2)知 $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$ 成立, 而 $\neg A \in \Gamma$ 与 $Con(\Gamma \cup \{A\})$ 矛盾,
故 $\neg A \notin \Gamma$,因此 $A \in \Gamma$.

□



命题6.7. 设 Γ 为极大协调集, A 为公式,

存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A$ 可证 iff $A \in \Gamma$.

证明: “ \Rightarrow ”: 设 $\Delta \vdash A$ 可证, 从而 $Con(\Gamma \cup \{A\})$,
若不然 $Incon(\Gamma \cup A)$, 则存在 Γ 的有穷子集 Δ' 使 $\Delta', A \vdash$ 可证,
故 $\Delta, \Delta' \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾! 故 $A \in \Gamma$.

“ \Leftarrow ”: 易见。

□



命题6.8.

- 1) 若 Γ 可满足, 则 $Con(\Gamma)$;
- 2) 若 Γ 矛盾, 则 Γ 不可满足.

证明: 1) 设 Γ 可满足, 从而有 \mathbb{M} 和 σ 使 $\mathbb{M} \models_{\sigma} \Gamma$, 反设 $Incon(\Gamma)$, 从而存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$ 可证。

$\because \mathbb{M} \models_{\sigma} \Gamma, \therefore \mathbb{M} \models_{\sigma} \Delta$, 从而 $\mathbb{M} \models_{\sigma} A \wedge \neg A$ 矛盾。

2) 为1)的逆否命题。

□



命题6.9. 设 Γ 为有穷公式集且 $Con(\Gamma)$

- 1) 若 $\Gamma \vdash A$ 可证, 则 $Con(\Gamma \cup \{A\})$;
- 2) 若 $\Gamma \vdash A$ 不可证, 则 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$.

证明:

- 1) 设 $\Gamma \vdash A$ 且 $Con(\Gamma)$, 反设 $Incon(\Gamma \cup \{A\})$, 从而 $\Gamma, A \vdash$ 可证, 故 $\Gamma \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾!
- 2) 若 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$ 则 $\Gamma, \neg A \vdash$ 可证, 从而 $\Gamma \vdash A$ 可证。 \square



在以前给出一阶谓词演算的 G 系统中没有出现等词 \doteq ，现在我们给出带等词的一阶谓词演算 Ge （有些教科书中记为 $G_{=}$ ）

定义6.10. Gentzen系统 Ge 由 G 加上3个等词公理组成：

- 1) 若 $\vdash s \doteq s$, 这里 s 为任何项;
- 2) 若 $s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n \vdash f(s_1, \dots, s_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)$,
这里 f 为任何 n 元函数 ($n = 1, 2, \dots$) ,
对于 $i \leq n$, s_i 和 t_i 为任何项;
- 3) $s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n, \quad p(s_1, \dots, s_n) \vdash p(t_1, \dots, t_n)$,
这里 p 为任何 n 元谓词（含等词） ($n = 1, 2, \dots$) ,
对于 $i \leq n$, s_i 和 t_i 为任何项。



约定6.11.

- 1) \vec{t} 表示 $(t_1 \cdots t_n)$, \vec{s} 表示 $(s_1 \cdots s_n)$, 即采用矢量记法;
- 2) $f(\vec{t})$ 表示 $f(t_1 \cdots t_n)$, 当 f 为 n 元函数;
- 3) $p(\vec{t})$ 表示 $p(t_1 \cdots t_n)$, 当 p 为 n 元谓词;
- 4) $(\vec{s} \doteq \vec{t})$ 表示 $(\cdots((s_1 \doteq t_1) \wedge (s_2 \doteq t_2)) \wedge \cdots \wedge (s_n \doteq t_n) \cdots)$ 。



命题6.12. 以下 矢列 在 Ge 中可证

- 1) $\vdash (s \dot{=} s);$
- 2) $\vdash (s \dot{=} t) \rightarrow (t \dot{=} s);$
- 3) $\vdash (s \dot{=} t) \rightarrow (t \dot{=} u \rightarrow s \dot{=} u);$
- 4) $\vdash (\vec{s} \dot{=} \vec{t}) \rightarrow f(\vec{s}) \dot{=} f(\vec{t});$
- 5) $\vdash (\vec{s} \dot{=} \vec{t}) \rightarrow (p(\vec{s}) \rightarrow p(\vec{t})).$

这里 s, t, u 为任何项, f 为任何 n 元函数, \vec{s}, \vec{t} 的长度为 n , 以及 p 为任何 n 元谓词。

证明: 1) 易见;

2) 和 3) 可由 1) 和 5) 在 G 中推出 (证明留作习题);

4) 由等词公理 2) 即得; 5) 由等词公理 3) 即得. \square



命题6.13. 令 Γ_e 为以下句子组成的集合:

$\forall x(x \doteq x), \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \rightarrow f(\vec{x}) \doteq f(\vec{y}))$, 这里 f 为任何函数,

$\forall \vec{x} \forall \vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \rightarrow (p(\vec{x}) \rightarrow p(\vec{y})))$, 这里 p 为任何谓词。

我们有 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G_e 中可证 $\Leftrightarrow \Gamma_e, \Gamma \vdash \Delta$ 在 G 中可证。

证明: 留作习题。 □

定理6.14(Soundness). 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G_e 中可证, 则 $\Gamma \models \Delta$.

证明: 只需证3条等词公理是永真的, 而这是易见的。 □

以下将证明完全性定理:

若 $\Gamma \models \Delta$, 则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G_e 中可证。



定义6.15(Henkin集). 设 Γ 为公式集, Γ 为 Henkin 集指

- 1) Γ 极大协调;
- 2) 若 $\exists x.A \in \Gamma$ 则有项 t 使 $A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$ 。



定义6.16. 设 \mathcal{L} 为一阶语言且 $\|\mathcal{L}\| = \aleph_0$, 令 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定理6.17. 设 Φ 为公式集且 $Con(\Phi)$, 则存在 \mathcal{L}' 公式集 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Phi$ 且 Ψ 为 \mathcal{L}' 的Henkin集。

证明: 设 \mathcal{L} 的全体公式为 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots (n \in \mathbb{N})$ 。令

$$\begin{cases} \Psi_0 = \Phi \\ \Psi_{n+1} = \begin{cases} \Psi_n & , \text{若 } Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n\} & , \text{若 } Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{ 且 } \varphi_n \text{ 不呈形 } \exists x.A \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\} & , \text{若 } Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{ 且 } \varphi_n \text{ 呈形 } \exists x.A \end{cases} \end{cases}$$

这里 c 为 $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中不曾使用过的新常元。

而令

$$\Psi = \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$



我们有：

- (1) $\Phi \subseteq \Psi$;
- (2) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $Con(\Psi_n)$;
- (3) $Con(\Psi)$;
- (4) 在 Ψ_n 中出现的新常元是有穷的;
- (5) Ψ 极大协调;
- (6) Ψ 为 Henkin 集。

证明如下：

- (1) $\Phi \subseteq \Psi$ 易见;
- (2) 对 n 归纳证明 $Con(\Psi_n)$ 如下：



奠基: $n = 0 \therefore \Psi_0 = \Phi \therefore Con(\Psi_0)$

归纳假设: 设 $Con(\Psi_n)$

归纳步骤: 欲证 $Con(\Psi_{n+1})$

情况1. $Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $\Psi_{n+1} = \Psi_n$,
故由 I.H. 知 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况2. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 且 φ_n 不呈形 $\exists x.A$, 从而 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况3. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 且 φ_n 呈形 $\exists x.A$,

这时可设 $\varphi_n \equiv \exists x.A$, $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\}$,

反设 $Incon(\Psi_{n+1})$, 从而存在有穷集 $\Delta' \subseteq \Psi_{n+1}$ 使 $\Delta' \vdash$ 可证,

从而存在有穷集 $\Delta \subseteq \Psi_n$ 使 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{c}{x}] \vdash$ 可证,

使其证明树为 T , 在 T 中将 c 替换成新变元 y ,

从而 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{y}{x}] \vdash$ 可证。因此由 $\exists L$ 知 $\Delta, \exists x.A \vdash$ 可证,

与 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 矛盾。



- (3) 欲证 $Con(\Psi)$ 反设 $Incon(\Psi)$,
从而存在 Ψ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash$ 可证。
 $\therefore \Delta$ 有穷, 不妨设 $\Delta = \{A_1, \dots, A_k\}$
 $\therefore A_i (i = 1, 2, \dots, k) \in \Psi = \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
故对每个 $i \leq k$, 有 n_i 使 $A_i \in \Psi_{n_i}$,
因此有 l 使对每个 $i \leq k$, $A_i \in \Psi_l$, 从而 $\Delta \subseteq \Psi_l$,
然而 $Con(\Psi_l)$, 与 $\Delta \vdash$ 可证矛盾。
- (4) 对 n 归纳证明即可。



(5) 欲证 Ψ 极大协调, 由于已证 Ψ 协调, 现只需证极大性。

由前命题知, 只需证若 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$, 则 $\varphi_n \in \Psi$.

设 $Con(\Psi \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

从而 $\varphi_n \in \Psi_{n+1}$, 因此, $\varphi_n \in \Psi$;

(6) Ψ 为Henkin集, 对于公式 $\exists x.A \in \Gamma$, 设 $\exists x.A$ 为 φ_n ,

$\because \varphi_n \in \Psi \therefore Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

故 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi_{n+1}$, 从而 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi$ 。

□



定理6.18. 若 Γ 为Henkin集, 则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集, 对照Hintikka集的定义逐条验证如下:

- (1) 这里因为 $Con(\Gamma)$;
- (2) 设 $\neg\neg A \in \Gamma$, $\therefore \neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore \Gamma \vdash A$ 可证,
又 $\therefore \Gamma$ 极大协调, $\therefore A \in \Gamma$;
- (3) 设 $A \rightarrow B \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$ 且 $B \notin \Gamma$, 由命题6.6, $A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$,
 $\therefore A, A \rightarrow B \vdash B$ 可证, $\therefore B \in \Gamma$ 矛盾;
- (4) 设 $\neg(A \rightarrow B) \in \Gamma$, $\therefore \neg(A \rightarrow B) \vdash A, \neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$ 可证,
 $\therefore A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);
- (5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\therefore A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证, $\therefore A, B \in \Gamma$;



- (6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$ 且 $\neg B \notin \Gamma$, 从而由命题6.6知
 $A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$, $\therefore A, B \vdash A \wedge B$ 可证,
 $\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与 $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;
- (7)~(8) 同理可证;
- (9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\therefore \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;
- (10) 设 $\neg\forall x.A \in \Gamma$, $\therefore \neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$ 可证, $\therefore \exists x.\neg A \in \Gamma$,
 又 $\therefore \Gamma$ 为Henkin集, \therefore 有 t 使 $\neg A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;
- (11)~(12) 同理可证;
- (13)~(17)由命题 6.7 即得。

□



定理6.19. 若 Γ 协调, 则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

- \Rightarrow 存在Henkin集 $\Psi \supseteq \Gamma$
- \Rightarrow 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 为Hintikka集
- \Rightarrow 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 可满足
- \Rightarrow Γ 可满足.

□

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$

证明: “ \Rightarrow ”为Soundness;

“ \Leftarrow ” 设 $\Gamma \models A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证;

情况2. $Con(\Gamma)$, 反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证, 从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,
故有 \mathbb{M} 和 σ 使 $\mathbb{M} \models_{\sigma} \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \models_{\sigma} A$ 矛盾。

□



定理6.21 (Compactness). 设 Γ 为公式集, 若对任何 Γ 的有穷子集 Δ , 有 Δ 可满足, 则 Γ 可满足。

证明: 反设 Γ 不可满足, 则 $Incon(\Gamma)$,

从而存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$,

从而 Δ 不可满足, 矛盾。

□

我们将在第十四讲给出Compactness(紧性)定理的纯语义证明, 一个直接证明。



The End of Lecture 6