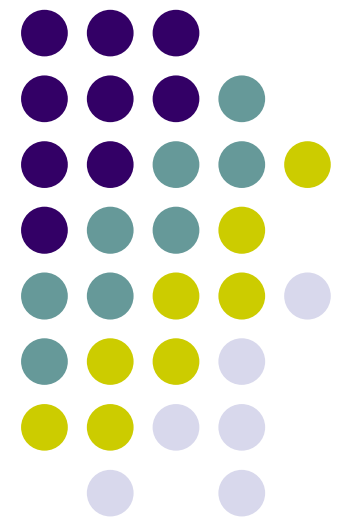




第4讲

一阶逻辑的自然推理系统





内容提要

- G系统的公理和规则
 - 公理|规则
- 证明树与可证
 - 证明树|可证
- 一些导出规则
 - 反证法规则 | 分情况规则 | 逆否推演 | 矛盾规则 |
 - MP规则 | 三段论
- G系统的上层理论
 - 可靠性|完全性



Gentzen的自然推理系统

- 人们经过二百年的努力，建立多个一阶逻辑的推理系统，为实现Leibniz的梦想（建立一种通用语言，使其表达全部的数学问题）作出巨大的贡献；
- 这些系统可分为自然推理和永真推理类型；
- 本讲介绍Gentzen的自然推理系统。

G系统的公理和规则

定义4.1 Γ, Δ 为公式的有穷集合。 $\Gamma \vdash \Delta$ 称为 *sequent*。
 Γ 为其前件， Δ 为其后件。**G** 由以下公理和规则组成：

公理： $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

规则： $\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \quad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$

$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \quad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$

$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \quad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$



$$\rightarrow L : \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda} \quad \rightarrow R : \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\forall L : \frac{\Gamma, A[t/x], \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \quad \forall R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[y/x], \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \forall x A(x), \Theta}$$

$$\exists L : \frac{\Gamma, A[y/x], \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \exists x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \quad \exists R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[t/x], \exists x A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x A(x), \Theta}$$

$$Cut : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

在 $\forall R$ 规则和 $\exists L$ 规则中, 变元 y 是一个新变元



定理4.2 Cut规则可用其他规则导出.

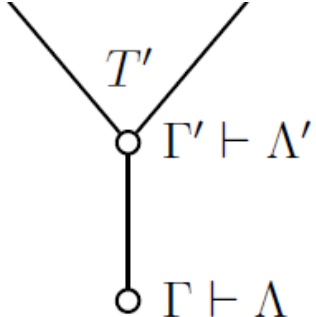
该定理将由Gentzen的Hauptsatz（见第十讲）而得.

证明树

定义4.3 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为sequent, 树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

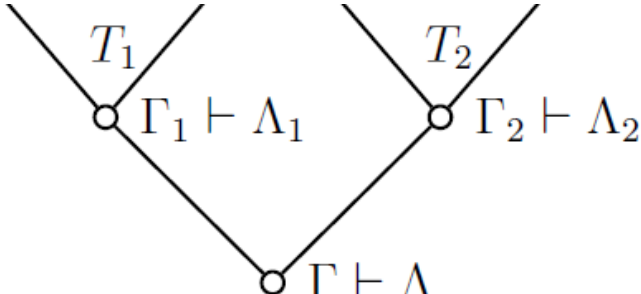
(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 **G** 公理, 以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为结点的单点树 T 为其证明树。

(2) 当 $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 **G** 规则。若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树,

则树 T :  为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。

(3) 当 $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 **G** 规则。

若树 T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树($i = 1, 2$), 则树 T :

 为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。



可证

定义4.4 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 *sequent*, $\Gamma \vdash \Lambda$ 可证 (*provable*) 指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例4.1 证明下列sequent可证:

$$(1) \vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(2) \vdash \alpha \vee \alpha$$

$$(3) \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$



例4.2 证明下列sequent可证。

$$(1) \vdash \forall x A(x) \rightarrow A(t)$$

$$(2) \vdash A(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$(3) \vdash (\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)$$

这里 $A(t)$ 为 $A[\frac{t}{x}]$ 的简写.

证. (1)

Axiom

$$\frac{\frac{A(t), \forall x A(x) \vdash A(t)}{\forall x A(x) \vdash A(t)} \forall L}{\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(t)} \rightarrow R$$

(2)

Axiom

$$\frac{A(t) \vdash A(t), \exists x A(x)}{A(t) \vdash \exists x A(x)} \exists R$$

$$\frac{A(t) \vdash \exists x A(x)}{\vdash A(t) \rightarrow \exists x A(x)} \rightarrow R$$

(3)

Axiom

Axiom

$$\frac{P(t), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash P(t), Q(t) \quad Q(t), P(t), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(t)}{P(t) \rightarrow Q(t), P(t), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(t)} \rightarrow L$$

$$\frac{P(t) \rightarrow Q(t), P(t), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(t)}{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash Q(t)} \forall L$$

$$\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash Q(t)}{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t) \vdash Q(t)} \wedge L$$

$$\frac{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t) \vdash Q(t)}{\vdash (\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)} \rightarrow R$$

□



例4.3 证明 $\forall x R(x) \wedge \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)$ 可证。

证. y_1 为新变元。

$$\begin{array}{c}
 \text{Axiom} \\
 \frac{P(f(v)), \forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))} \text{Axiom} \quad \frac{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash Q(y_1), \exists z Q(z)}{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash \exists z Q(z)} \exists R \\
 \frac{\quad}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash \exists z Q(z)} \exists L \quad \frac{\quad}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)} \wedge L \\
 \frac{\quad}{\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)} \wedge R
 \end{array}$$

□

例4.4 证明 $\Gamma_1 \vdash A, A \vdash \Gamma_3$ 可证, 则 $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$ 可证。

证. 用 Cut 规则即可。

□



命题4.5 $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ 可证 $\iff \bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i$ 可证。

证. " \implies " 设 $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ 可证

\therefore

$$\frac{\frac{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n}{\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash B_1, \dots, B_n} \wedge L}{\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i} \vee R$$

\therefore O.K.



“ \Leftarrow ” 设 $\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^m B_i$ 可证

\therefore ① $A_1, \dots, A_n \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i$ 可证

② $\therefore \frac{\{B_i \vdash B_1, \dots, B_m \mid i = 1, 2, \dots, m\}}{\bigvee_{i=1}^m B_i \vdash B_1, \dots, B_m} \vee L$

$\therefore \bigvee_{i=1}^m B_i \vdash B_1, \dots, B_m$ 可证

③ $\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^m B_i$ 可证

\therefore O.K.





一些导出规则

①反证法规则:
$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

证. 证明树如下:

$$\frac{\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg \neg B} \neg L, \neg R \quad \frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg \neg B \vdash} \neg L}{\neg A, \Gamma, \neg \neg B \vdash} \text{Cut} \quad \frac{\frac{\text{Axiom } A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R}{\neg \neg A \vdash A} \neg L}{\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg \neg A} \neg R}{\Gamma \vdash A}}$$

□



②分情况规则: $\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下:

$$\frac{\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B, \neg \neg A} \neg R \quad \neg \neg A, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B, A} \text{Cut} \quad A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$

□



③逆否推演: $\frac{A, \Gamma \vdash B}{\neg B, \Gamma \vdash \neg A}, \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$

证. 证明树如下:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \text{Cut}$$

这里:

$$\frac{\frac{\frac{A, A \rightarrow B \vdash B}{\neg B, A, A \rightarrow B \vdash}}{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A}}{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$$





④矛盾规则: $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A, B}}{\neg A, \Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \neg A, B}}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$





$$\textcircled{5}\text{MP: } \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

证.

$$\text{Lemma 1.} \quad \because \frac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B}$$

$\therefore A, A \rightarrow B \vdash B$ 可证。

Lemma 2.

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, A \rightarrow B \vdash B}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash B} \text{Cut, Lemma 1}}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$

□



⑥三段论:
$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x(A(x) \rightarrow B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

证. 证明树如下:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \quad \frac{A(t) \rightarrow B(t), \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)}{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \text{Cut}}{\Gamma \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \quad \Gamma \vdash A(t) \quad \frac{\Gamma \vdash A(t) \rightarrow B(t) \quad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash B(t)}$$

□

这些导出规则在以后的证明中皆可被运用。



有效与有反例

定义4.6 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 为 *sequent*, Γ 为 $\{A_1, \dots, A_n\}$, Δ 为 $\{B_1, \dots, B_m\}$ 。 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效 (记为 $\Gamma \models \Delta$) 指

$$\models \left(\bigwedge_{i=1}^n A_i \right) \rightarrow \left(\bigvee_{j=1}^m B_j \right)。$$

这里

(1) 当 $n = 0, m \neq 0$ 时, 即 Γ 空且 Δ 非空时, $\models \Delta$ 指 $\models \left(\bigvee_{j=1}^m B_j \right)$

(2) 当 $n \neq 0, m = 0$ 时, 即 Δ 空时, $\Gamma \models$ 指 $\models \neg \left(\bigwedge_{i=1}^n A_i \right)$

(3) 当 $n = 0, m = 0$ 时, 即 Γ, Δ 皆空, 约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效。

$\Gamma \vdash \Delta$ 有反例指 $\Gamma \vdash \Delta$ 非有效。



命题4.7 (1) $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ 有效

iff 对任何 \mathfrak{M} 和 σ , $M \models_\sigma \neg A_i$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$
或 $M \models_\sigma B_j$ for some $j \in \{1, \dots, m\}$

(2) $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ 有反例

iff 存在 \mathfrak{M} 和 σ 使 $\mathfrak{M} \models_\sigma A_i$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$
且 $\mathfrak{M} \models_\sigma \neg B_j$ for all $j \in \{1, \dots, m\}$



G 公理的有效性

引理4.8 G 的公理有效
证. 易见。





G规则保持有效

引理4.9 对于除 *cut* 外 **G** 的规则, 所有 *upper sequent* 有效
iff 相应的 *lower sequent* 有效。

证. 只需证对规则 R, the lower sequent 有反例
iff 至少有一个 upper sequent 有反例。

$$\text{case } \neg L: \frac{\Gamma \vdash A, \Lambda}{\Gamma, \neg A \vdash \Lambda}$$

设 Γ 为 $\{A_1, \dots, A_m\}$, Λ 为 $\{B_1, \dots, B_n\}$ 。

$\Gamma, \neg A \vdash \Lambda$ 有反例

\iff 存在 \mathfrak{M} 和 σ 使 $\mathfrak{M} \models_{\sigma} A_i$ for all $i \leq m$
且 $\mathfrak{M} \models_{\sigma} \neg B_j$ for all $j \leq n$ 且 $\mathfrak{M} \models_{\sigma} \neg A$

$\iff \Gamma \vdash A, \Lambda$ 有反例。

其他情况同理可证

□



引理4.10 对于 cut : $\frac{\Gamma \vdash A, \Lambda \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$,

若 $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 和 $\Delta, A \vdash \Theta$ 有效, 则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有效。反之不然。

证. $\because \Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有反例

\implies 有 \mathfrak{M} 和 σ 使, Γ, Δ 中公式皆真, 而 Λ, Θ 中公式皆假

\implies 当 $\mathfrak{M} \models_{\sigma} A$ 时, $\Delta, A \vdash \Theta$ 有反例

\implies 当 $\mathfrak{M} \models_{\sigma} \neg A$ 时, $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 有反例

\implies upper sequents 之一有反例

\therefore 2个 upper sequents 皆有效 \implies the lower sequent 有效。

反之不然, 反例: $\frac{\vdash \neg(A \vee \neg A) \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash (A \vee \neg A)}{\vdash A \vee \neg A} cut$

$\vdash A \vee \neg A$ 有效, 但 $\vdash \neg(A \vee \neg A)$ 不然。

□

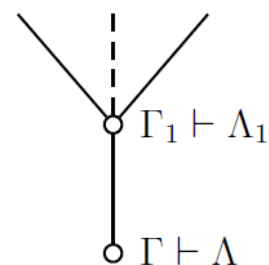
Soundness

定义4.11 (Soundness). 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 则 $\Gamma \models \Delta$, 从而 $\vdash A \Rightarrow \models A$.

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构作归纳。证明 $\Gamma \vdash \Delta \cdots (*)$

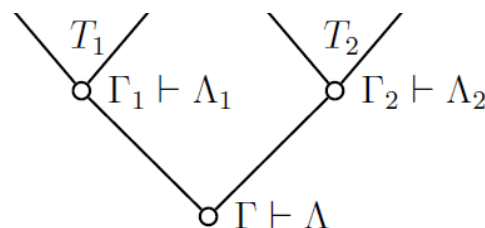
(1) $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理, 则易见 $\Gamma \models \Delta$ (by 引理4.8)

(2) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形:



由 I.H. 知, $\Gamma_1 \models \Delta_1$ 从而 $\Gamma \models \Delta$ (by 引理4.9)

(3) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形:



由 I.H. 知, $\Gamma_1 \models \Delta_1$, $\Gamma_2 \models \Delta_2$ 从而 $\Gamma \models \Delta$ (by 引理4.9)

故 $\Gamma \models \Delta$.

□



命题4.12 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 则 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 。

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明结构作归纳。

Basis. $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理, 从而 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 亦然。

I.H. 设(1) $\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} R_1$ 或(2) $\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta} R_2$

且 $\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi$, $\Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi$ 可证,

这里 R_1 和 R_2 为 **G** 规则。

Ind. Step. $\therefore \frac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_1$
或 $\frac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi \quad \Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_2$

由 I.H.知 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 可证。

□



本讲小结

- G系统的公理和规则
- 证明树与可证
- 一些导出规则
- soundness



The End of Lecture 4