

2024-25学年春季学期“数理逻辑”课程作业二

1. 对于一阶语言公式 $\varphi: (\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x.(R(x) \wedge P(x))) \rightarrow (R(x) \rightarrow \neg Q(x))$, 其中 P, Q, R 为一元谓词符, 请回答下列问题并证明你的结论.

(1) φ 是否可满足;(5分)

(2) φ 是否永真;(5分)

(3) $\vdash \varphi$ 是否有效;(5分)

2. 请在G系统中证明下列序贯可证:

(1) $A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$;

(2) $\vdash (\exists x.(A \rightarrow B)) \rightarrow \forall x.(A \rightarrow B)$, 其中 $x \notin FV(B)$.

3. 请使用一阶语言将下列推理过程符号化:

所有的哲学家都是大胡子, 有些逻辑学家是哲学家, 因此有些逻辑学家是大胡子。

并判断上述推理是否有效。如果有效则请在G系统中给出证明; 反之则请给出反例。

4. 令 A 为如下一阶语言公式

$$\forall x.(P(x, y) \wedge \forall y.\exists z.(y \doteq f(z)) \vee (y \doteq x))$$

(1) 试求 $FV(A)$.

(2) 试求 $A[\frac{f(x)}{x}]$ 和 $A[\frac{f(x)}{y}]$.

5. 令 $\exists^{\geq n}$ 为一个“计数量词”。该量词的语法和语义定义分别如下:

语法: 对于任意一阶语言公式 A , $\exists^{\geq n}x.A$ 仍为一个公式;

语义: $M \models_{\sigma} \exists^{\geq n}x.A(x)$ 当且仅当 $M \models_{\sigma[x:=a_i]} A(x)$ 对于 M 中 n 个不同的元素 a_1, a_2, \dots, a_n 成立.

(1) 使用计数量词, 给出一个一阶语言公式 A_7 , 使得 $M \models_{\sigma} A_7$ 当且仅当 $|M| > 7$;

(2) 使用计数量词, 给出一个一阶语言公式 A_{45} , 使得 $M \models_{\sigma} A_{45}$ 当且仅当 $|M| = 23$;