

2023-24学年春季学期“数理逻辑”课程作业一

1. 证明命题逻辑中所有命题的个数与自然数的个数相同，即 $|PROP| = \aleph_0$.

2. 使用真值表判断下列命题是否为永真式或永假式:

(1) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(2) $((p \rightarrow q) \vee q) \rightarrow ((q \vee r) \vee q)$

(3) $((\neg(q \rightarrow p)) \vee (\neg p)) \vee (p \vee r)$

(4) $((\neg(p \vee q)) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee \neg q) \vee r)$

3. 设有一命题符集合 $S : \{P_0, P_1, \dots, P_{100}\}$, 设真值函数集合 $R : \{H_A | H_A \text{ 为命题 } A \text{ 的真值函数且 } FV(A) = S\}$, 试求 $|R|$.

4. 请用G'系统证明下列序贯可证:

(1) $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

(2) $\vdash (\neg(A \vee B)) \rightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$

5. 设 $ifte$ 为一个三元的逻辑连接词，真值函数定义如下:

A	B	C	$ifte(A, B, C)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

$ifte(A, B, C)$ 的直观含义为“如果A则B否则C”，请:

(1) 证明如果允许对 $ifte(A, B, C)$ 的参数使用缺省的‘T’和‘F’值，则 $\{ifte\}$ 为逻辑连接词完全组。

(2*) 尝试在 G' 系统中添加 $ifte\ L$ 和 $ifte\ R$ 规则, 使得在保持系统可靠性和完全性的前提下, 可以处理包含 $ifte$ 的命题逻辑命题, 并证明该新系统的可靠性和完全性(可以引用 G' 的可靠性和完全性证明)。