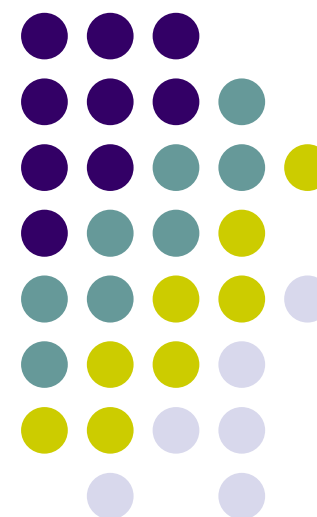




南京大學

# 数理逻辑

主讲人：秦逸



# 自我介绍

- 姓名： 秦逸
  - 电子邮件： [yiqinics@nju.edu.cn](mailto:yiqinics@nju.edu.cn)
  - 办公室： 计算机系楼501
  - Office Hour: 每周四下午2:00 ~ 4:00

# 关于本课程

- 目的：
  - 数理逻辑的**基本概念**、**基本定理**和**基本方法**
- 计划：
  - 上课时间：2022年2月15日 ~ 6月21日  
(共16周, **16次课**) ;
  - 考试时间：2021年6月21日 ~ 7月4日 ;
- 计分方式：

总成绩 = 平时成绩 (**10%**) + 期中考试 (**20%**) +  
期末考试 (**70%**) ;



南京大學

# 教材

- 宋方敏, 吴骏. 《数理逻辑十二讲》, 机械工业出版社, 2017.

注意选择第二次印刷版本



# 主要内容

第一讲 命题逻辑

第二讲 Boole代数

第三讲 一阶逻辑语言

第四讲 一阶逻辑的自然推理系统

第五讲 集合论的公理系统

第六讲 完全性定理

第七讲 Herbrand定理

第八讲 命题逻辑的永真推理系统

第九讲 一阶逻辑的永真推理系统

第十讲 Gentzen的Hauptsatz

第十一讲 紧性定理

第十二讲 模态逻辑概述

- **基本概念**：命题逻辑，一阶逻辑
- **基本定理**：完全性定理，Herbrand定理，紧性定理，Gentzen系统基本定理
- **基本方法**：一阶逻辑的自然推理系统
- **基本素质**：永真推理系统，模态逻辑

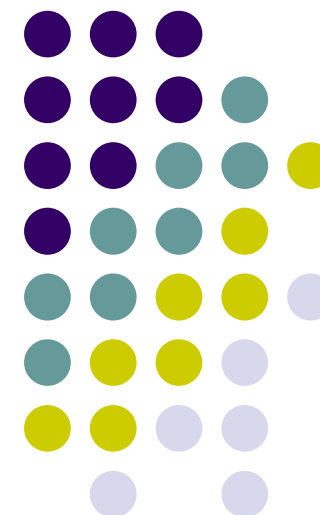
# 本课程线上教学相关

- 课程教学网站：
  - <https://yiqinnju.github.io/course/MathLogic/MathLogic.html>
- 课程邮箱： [mathlogic@163.com](mailto:mathlogic@163.com)
  - 用于提交作业



南京大學

# 引子 - 什么是数理逻辑?



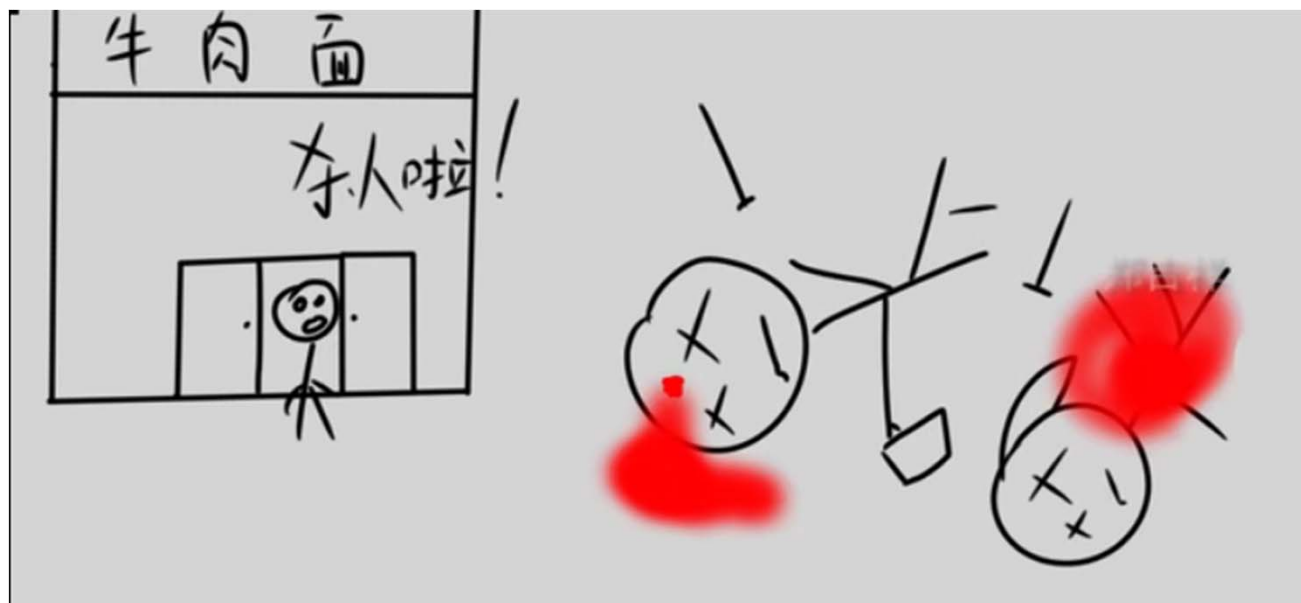
# 内容提要

- 什么是逻辑
- 逻辑学的发展
- 现代逻辑学的产生
- 计算机科学中的数理逻辑



# 什么是逻辑

- 1. 逻辑能够告诉我们真假？
- 2. 逻辑能够帮助我们证明？
- 3. 逻辑能够指导我们推理？



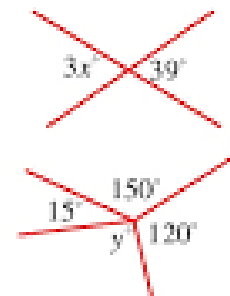
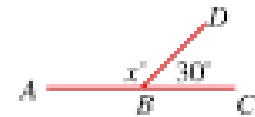
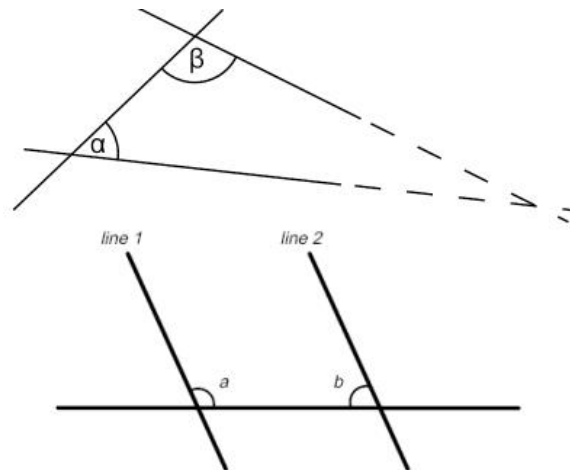
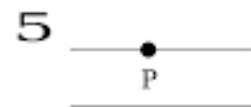
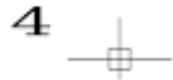
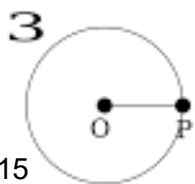
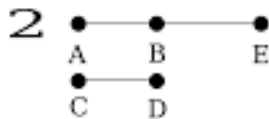
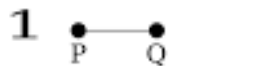
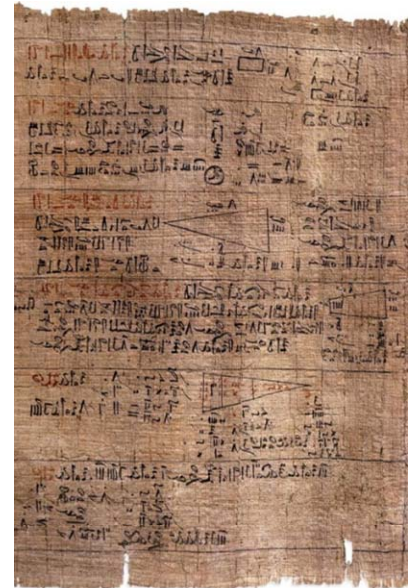
# 逻辑学

- 逻辑：推理的思想过程
- 逻辑学：研究 “有效推理的标准” 的一门学科
- Logic 一词来自古希腊语 λογική
  - 字根源于希腊语 λόγος
    - 词语、思想、概念、推理
  - 严复翻译为 “名学”
  - 孙中山翻译为 “理则”



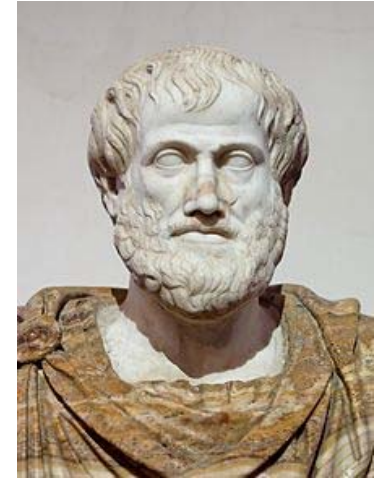
# (西方)逻辑的起源：古典几何

- 古埃及文明
  - 如何在尼罗河泛滥期间保持原有的土地边界
  - geo(地球) + metry (测量)
- 欧几里得
  - $\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$ , *Stoicheia*, 几何原本
  - **定义+公理 (公设) + 定理**的理论体系



# (西方)逻辑的起源：三段论

- 亚里士多德
  - 所有前提都是直言命题的演绎推理
- 大前提：所有M是P  
小前提：所有S是M  
结论：所有S是P
- 前提中加入不同的语气？
  - 全称，特称，肯定，否定
- 扬·卢卡西维茨
  - 《亚里士多德的三段论》
  - 19个有效论式子，结论弱化的5个论式
  - “波兰表示法” 和 “逆波兰表示法”



# (西方)逻辑的起源：本体论

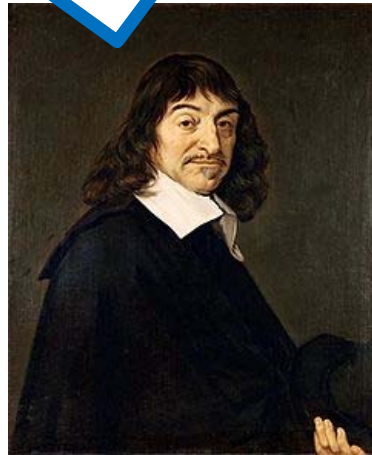
- 如何证明上帝的存在....

- 安瑟莫

- “我思故我在”  
“我”和“思”  
来自于上帝

单子论  
(monism)  
上帝是第一位

基于模态逻辑的  
本体论证明





# 中国古代的逻辑

- 墨家·墨辩
  - 世界**三大古典逻辑**体系之一
  - 三表说 -> 三物论

墨辩	三段论	因明学三支作法
孔子必有死， 因孔子是人。	凡人皆有死， 孔子是一个人， 故孔子必有死。	孔子必有死， 因孔子是一个人。 凡人皆有死，例如舜。

- 名家·公孙龙
  - **白马非马**：概念集合的相等和包含
  - **离坚白**：物体和物体属性的联系



# 基于自然语言的逻辑学

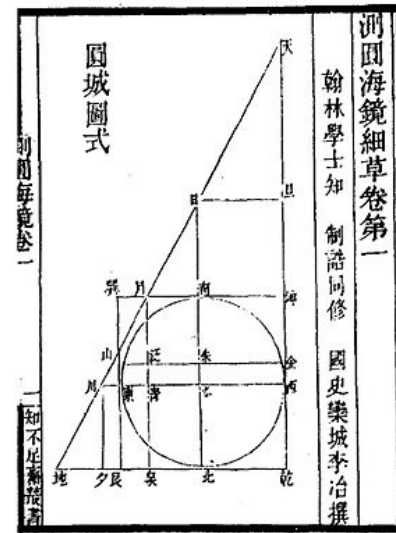
- 再论 “白马非马”

“白马” 非 “马”，非 “白-马” 非 “马”

- 公孙龙的推理犹以混淆了作为一个整体的 “白马” 和作为一个复合词的 “白-马”
- 自然语言可能存在的歧义影响了对于逻辑学的研究

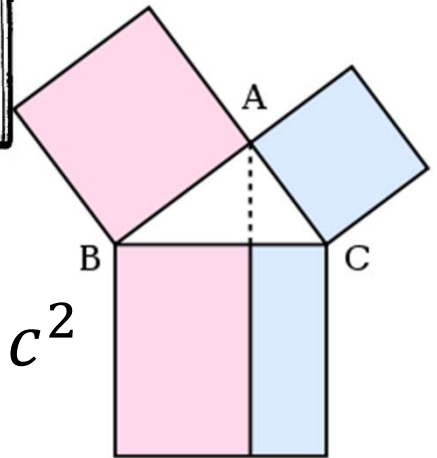
# 现代逻辑学的诞生

- 通过抽象符号描述对象和命题
  - 符号逻辑 (Symbolic Logic)
  - 语义+语法



- 抽象代数、集合论理论的发展

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- 萌芽时代→代数时代→逻辑主义时代→元数学时代→  
...





南京大學

# 现代逻辑-萌芽时代

- 通用语言&通用数学

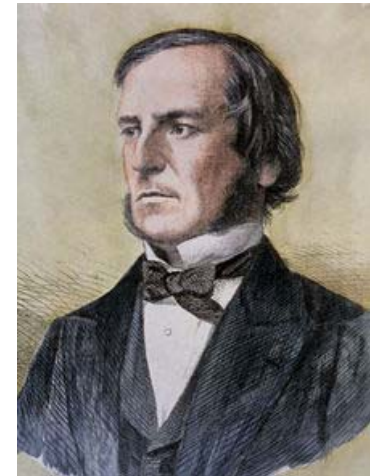
*The only way to rectify our reasonings is to **make them as tangible as those of the Mathematicians**, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: **Let us calculate** , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)



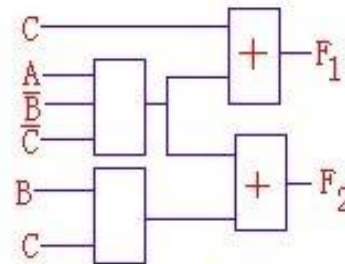
# 现代逻辑-代数时代

- **伽罗华**：开创研究抽象的公理化代数系统的抽象代数（1832）
  - 彻底解决了用根式求解代数方程的可能性问题
  - 解方程→代数结构的性质
- **布尔**：建立描述人类思维代数规律的布尔代数（1847-1854）



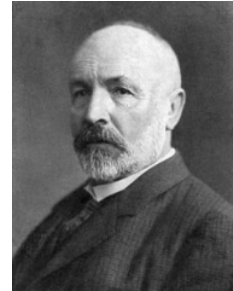
AE	00	01	11	10
C	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	1	1	1	1

AE	00	01	11	10
C	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0





京大

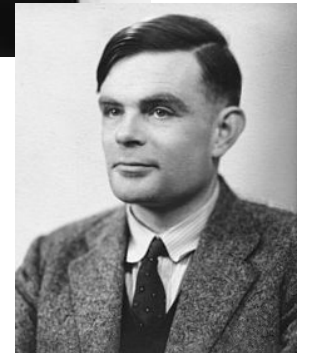


# 现代逻辑-逻辑主义时代

- **康托**: 建立**集合论**, 可用于表达整个数学的形式语言 (1872-1874)
- **弗雷格**: 严格建立第一个**人工的形式语言**概念文字 (1879)
- **皮亚诺**: 建立**算术的形式语言**皮亚诺算术 (1889)
- **策梅洛**: 建立第一个**公理化集合论**策梅洛集合论 (1908)
- **罗素**: 《数学原理》 (1910-1913)
  - 表述**所有数学真理**在一组数理逻辑内的公理和推理规则下, 原则上都是可以证明的



南京大学



# 现代逻辑-元数学时代

- **希尔伯特**：《几何基础》，《数学基础》，建立几何和数学的形式语言
  - 希尔伯特的23问
- **哥德尔**：哥德尔不完备定理
  - 包含皮亚诺算术的形式系统的不完备性
  - 包含皮亚诺算术的形式系统的兼容性，在该系统内不可被证明
- **邱奇**：什么是可计算的
  - 基于λ演算定义的可计算函数
- **图灵**：可对输入进行运算的理论机器模型图灵机

# 数理逻辑与计算机科学

- 数理逻辑的研究孕育了计算机科学...
  - 1928年，希尔伯特提出**判定性问题**：
    - 求一个算法，输入一个形式语言及其描述的一个数学陈述，输出对该陈述的正确判定
  - 1931年，哥德尔提出**不完全定理**
  - 1936年，图灵提出**图灵机**
  - 1937年，邱奇-图灵问题，**可计算性**
  - 1940年代，冯诺依曼提出**存储程序计算机结构**
  - 1946年2月14日，第一台图灵完全的电子计算机**ENIAC**正式公布

# 数理逻辑与计算机科学

- 对编程语言的影响：
  - $\lambda$ 演算  $\rightarrow$  函数式编程语言 Lisp, Haskell
  - 一阶谓词逻辑  $\rightarrow$  陈述式编程语言 Prolog, Datalog
  - 集合论  $\rightarrow$  关系数据库查询语言 SQL
- 对软件系统理论的影响
  - 集合论  $\rightarrow$  关系代数  $\rightarrow$  现代数据库, 科德, 1981年图灵奖
  - 谓词逻辑  $\rightarrow$  时序逻辑  $\rightarrow$  现代分布式系统, 兰波特, 2013年图灵奖
- 对人工智能理论的影响
  - 基于推理: 专家系统, 费根鲍姆, 1994年图灵奖
  - 基于统计: 贝叶斯网络, 珀尔, 2011年图灵奖