

大连理工大学本科毕业设计（论文）

标量-矢量-张量引力理论中的引力波辐射

Gravitational Waves in Scalar-Vector-Tensor Gravity

学院（系）：物理学院

专业：应用物理学

学生姓名：邱弋

学号：201721011

指导教师：徐立昕

评阅教师：李伟佳

完成日期：2021年6月15日

大连理工大学

Dalian University of Technology

原创性声明

本人郑重声明：本人所呈交的毕业设计（论文），是在指导老师的指导下独立进行研究所取得的成果。毕业设计（论文）中凡引用他人已经发表或未发表的成果、数据、观点等，均已明确注明出处。除文中已经注明引用的内容外，不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究成果做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本声明的法律责任由本人承担。

作者签名： 

日 期：2021年6月19日

关于使用授权的声明

本人在指导老师指导下所完成的毕业设计（论文）及相关的资料（包括图纸、试验记录、原始数据、实物照片、图片、录音带、设计手稿等），知识产权归属大连理工大学。本人完全了解大连理工大学有关保存、使用毕业设计（论文）的规定，本人授权大连理工大学可以将本毕业设计（论文）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用任何复制手段保存和汇编本毕业设计（论文）。如果发表相关成果，一定征得指导教师同意，且第一署名单位为大连理工大学。本人离校后使用毕业设计（论文）或与该论文直接相关的学术论文或成果时，第一署名单位仍然为大连理工大学。

论文作者签名： 邱弋 日 期：2021年 6月19日
指导老师签名： 陈伟平 日 期：2021年 6月19日

摘要

广义相对论和引力波的理论提出已逾百年。为解释新的现象，各种修改引力理论应运而生。在当下引力波探测蓬勃发展的时期，我们不禁发问：修改引力下的引力波和广义相对论有哪些主要区别？我们能否用引力波数据检验引力模型并判断哪个是更好的理论？首先，本文回顾了广义相对论下引力波的理论基础，简述了修改引力的提出背景和标量-矢量-张量这一具体分支的发展历史，并介绍了 LIGO/Virgo 的探测方法和迄今为止的三轮观测结果。接下来，本文在线性引力假设上推导标量-矢量-张量引力下双黑洞合并旋进阶段的引力波波形，对比 MOG 推断的双黑洞合并前后质量与广义相对论下的结果；在双黑洞合并铃荡阶段（由黑洞微扰的 Quasi-Normal Mode 模型描述），观察考虑不同 overtones 数量的引力波波形拟合和数值相对论模拟结果的偏差，并与广义相对论结果对比。根据拟合的 AIC, AICc, BIC 等参数，给出 MOG 标量-矢量-张量引力中参数 α 的上限 ($\alpha \leq 0.141^{+0.042}_{-0.043}$)，并分析了其他的可能性。最后得出结论：在现阶段引力波的观测数据下，相比标量-矢量-张量引力，广义相对论将是更好的理论。

关键词：引力波；标量-矢量-张量修改引力；黑洞准正模

Gravitational Waves in Scalar-Vector-Tensor Gravity

Abstract

The general relativity (GR) and gravitational waves have been found for over 100 years, To explain different novel phenomena, modified gravity theories came into being. Now, in the great era of gravitational waves detection, shall we wonder: what's the main differences between gravitational waves in GR and in other theories of gravity? Can we test these models with gravitational waves data and judge who is the better? Firstly, this thesis reviews the basic theory of gravitational waves in GR, talks about the background and history of modified gravity and specifically scalar-vector-tensor gravity, introduces the detection methods and 3 runs of LIGO/Virgo's observation and the outcomes so far. Then, the radiation and waveforms of gravitational waves emitted in the inspiral phase of binary black hole coalescence with linearized gravity theory in MOdified Gravity (MOG) scalar-vector-tensor gravity has been derived. Besides, the thesis also compares the black hole masses inferred by MOG and GR before and after the merger phase. In the ringdown regime of binary black hole coalescence which is well described by the Quasi-Normal-Mode model in the black hole perturbation theory, this thesis fits the numerical relativity data with both MOG and GR with different numbers of overtones included. Then, the upper constraint ($\alpha \leq 0.141^{+0.042}_{-0.043}$) of parameter α in MOG has been given by the AIC, AICc and BIC estimators of the fitting. Finally, this thesis concludes: based on nowadays' gravitational waves observations, GR is better than MOG as a gravity theory.

Key Words: Gravitational Waves; Modified Gravity; Quasi-Normal-Mode

目 录

摘要	I
Abstract	II
引言	1
1 广义相对论导出引力波	5
1.1 引力波基础	5
1.2 引力波辐射	6
1.2.1 线性化引力波辐射	6
1.2.2 引力波辐射能量计算	9
1.2.3 致密双星旋进的引力波辐射	11
1.3 能量-动量赝张量	14
2 修改引力	16
2.1 新的宇宙学观测事实	16
2.1.1 暗物质	16
2.1.2 暗能量	17
2.2 修改引力理论	18
2.2.1 MOND 和 TeVeS	18
2.2.2 MOG 标量-矢量-张量引力	19
2.2.3 Generalized Scalar-Vector-Tensor Gravity	20
2.2.4 标量-矢量-张量引力研究现状	22
3 引力波观测	23
3.1 LIGO-Virgo 介绍	23
3.1.1 LIGO 与 GW150914	24
3.1.2 LIGO 与 GW170817	25
3.1.2 LIGO 的三轮探测	26
3.3 其他引力波探测计划	26
3.4 引力波探测与模型检验	27
4 标量-矢量-张量引力理论中的引力波辐射	28
4.1 MOG 标量-矢量-张量引力理论物理意义	28
4.2 双黑洞合并旋进阶段的引力波辐射	29
4.3 双黑洞合并铃荡阶段的引力波辐射	31
5 黑洞似正规模与标量-矢量-张量引力	35

5.1	似正规模对比	35
5.1.1	MOG 下的似正规模	35
5.1.2	频率	35
5.1.3	耗散时间	38
5.2	数值相对论数据拟合	40
5.2.1	拟合建立	40
5.2.2	拟合算法	40
5.2.3	拟合示例	41
5.2.4	$\alpha = 0$	41
5.2.5	$\alpha = 1$	43
5.2.6	$\alpha = 4$	45
5.2.7	$\alpha = 9$	47
5.2.8	拟合结果讨论	50
5.3	似正规模限制 MOG 中有效参数 α	51
5.3.1	AIC 简介	51
5.3.2	参数限制	51
5.3.3	评估稳定性	53
5.4	MOG 标量-矢量-张量引力和广义相对论对比评价	56
结	论	58
参	考 文 献	59
附录 A	拟合使用的 MOG 模型似正规模数据	65
附录 B	Mathematica 代码简单展示	66
修改记录	68
致	谢	69

引　　言

引力波的研究历史始于 20 世纪。

1905 年，亨利·庞加莱最先提出，如同有加速度的电荷会生成电磁波，有加速度的质量在引力的相对论场中运动也会生成引力波。

1915 年，阿尔伯特·爱因斯坦首次构建了广义相对论的基础^[1]。

1916 年，爱因斯坦又依据广义相对论给出引力辐射（引力波）的形式并预言其传播速度为光速^[2]。

1956 年，英国物理学者菲立克斯·皮拉尼使用黎曼曲率张量来表示引力波^[3]，此方法能够回避因坐标系产生的难题。

1957 年，在北卡罗莱纳大学教堂山分校举办的“第一次广义相对论会议”^[4]中，理查德·费曼提出思想实验说明引力波传播能量。

由于引力波与物质之间的相互作用非常弱（相比强相互作用 10^{-40} ），引力波极不容易被传播途中的物质所影响，是优良的信息载体，使人类能够观测从宇宙深处传来的宝贵信息。在广义相对论会议之后，物理学家开始了观测引力波的探索：

1969 年，Joseph Weber 声称其设计的引力波探测器首次探测到了引力波信号，但之后被证明为不实^[5]。

1974 年，拉塞尔·赫尔斯和约瑟夫·泰勒发现了赫尔斯—泰勒脉冲双星^[6]（Hulse-Taylor binary pulsar）。双星在周期性绕转时，将会以辐射引力波的形式逐渐损失系统能量，从而轨道变小，距离靠近。这是引力波可能存在的第一个证据（间接）。

1990 年，由美国 Caltech 与 MIT 的几位物理学家：Rainer Weiss, Kip Thorne 和 Barry C. Barish（三位正是 2017 诺贝尔物理学奖获得者）带领建设的激光干涉引力波天文台^[7]（Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory, LIGO）开始获得美国国家科学基金会（NSF）资助。

从 2002 到 2010 年，第一代 LIGO 持续工作。虽然也进行了无数探测，但其并未能直接从数据中检验到引力波。

2010 年，LIGO 停止运作，并进入系统升级阶段，以期提升探测灵敏度和精度。

从 2015 年开始，改进而成的 Advanced LIGO 开始了新一轮引力波探测。

2016 年 2 月 11 日，LIGO 科学团队与 Virgo（意大利室女座干涉仪 Virgo interferometer）团队共同宣布，已于 2015 年 9 月 14 日探测到引力波^[8]。这是历史上第一次直接探测到双黑洞合并事件的引力波。

2017 年 8 月 17 日，LIGO 和 Virgo 科学合作团体宣布观测到首次双中子星合并事件^[9]的引力波信号，仅仅 1.7s 之后，费米伽马射线空间望远镜（Fermi）宣布观测到伽马射线暴 GRB170817A。这同时也是引力波与电磁波的首次一起被观测到，象征着多信使引力波天文学的新时代^[10]已经来临。

LIGO 采用激光干涉仪探测引力波振幅，并使用广义相对论预言下，考虑双星动力学性质（如双中子星的潮汐力和进动、双黑洞合并和铃声等效应）的波形模型优化匹配滤波算法（matched filtering），最终通过蒙特卡洛法/贝叶斯分析^[11]推断出引力波源的参数分布。

目前像 Advanced LIGO，意大利的 Advanced Virgo 这样的地面激光干涉引力波探测器还有：日本的 TAMA300，KAGRA 和德国的 GEO600。另外在太空运行的还有筹备中的激光干涉空间引力波天线（Laser Interferometer Space Antenna，LISA）和中国中山大学的天琴计划^[12]等，主要关注频段覆盖 $10^{-1} - 10^{-6}$ Hz。

总结来说：除了双星系统和脉冲星之外，还有引力坍缩，伽马射线暴，恒星质量黑洞，超大质量黑洞（星系合并，极端质量比例旋）和大爆炸时代等等引力波源。不同引力波信号分布在不同频段。

另一方面，自爱因斯坦的广义相对论成功之后，人们并未停止提升建立额外的引力理论。早期的工作^[13]包括 Eddington 的联络理论，Hermann Weyl 的标度独立理论和 Kaluza 和 Klein 提出的高维引力。之后，为了解决原始的广义相对论与新的宇宙学观测事实（宇宙微波背景辐射^[14]，弱引力透镜^[15]，Ia 超新星^{[16][17]}，星系旋转曲线和星系光度质量比异常——暗物质^[18]，大尺度结构形成^[19]等等问题）之间的偏差，人们提出了许多新的修改引力理论：

1960 年 Brans 和 Dicke 提出标量-张量引力理论^[20]以反映牛顿常数的变化。

1974 年 Gregory Horndeski 提出 Horndeski 理论^[21]。这一理论框架可以用来描述广义相对论，Brans-Dicke 理论和 Galileon 理论等等。

2004 年 Bekenstein 提出的相对论性 MOND^{[22][23]}（Modified Newtonian dynamics）——Tensor-vector-scalar gravity^[24]（TeVeS）。

2006 年 J.W. Moffat 提出 Scalar-tensor-vector gravity^[25]（STVG），又称为 Modified Gravity (MOG) 理论。像 TeVeS 和 MOG 以及 2018 年 Lavinia Heisenberg 提出的 Scalar-Vector-Tensor Gravity Theories^[26]等等修改引力理论由于除了原本的张量场外，还包含了额外的标量-矢量引力场，因此统称为标量-矢量-张量引力理论。

除此之外，修改引力还包括对爱因斯坦-希尔伯特作用量中里奇标量作任意函数修改的 $f(R)$ 引力^{[27][28]} 和 Gauss - Bonnet gravity 等等。几篇综述^{[13][29][30]} 对这些修改引力理论作了一定的归纳总结。

除了上文提到的其他宇宙学观测事实，在修改引力理论下，引力波的传播及辐射性质也将与广义相对论所预测结果不同。标量-矢量-张量引力理论预测了额外的引力波极化模式，不同的引力波传播速度以及不同的辐射能量。对于引力波极化张量，广义相对论只预言了两个独立的极化模式： h_+ 和 h_\times ，但在修改引力理论中会出现最多 6 个极化模式^[31]。对于引力波传播速度，在高维引力理论及有质量引力理论中，引力波传播速度不一定为光速^[32]。对于引力波传播携带的能量一般不是考虑引力场的总能量-动量张量，而是能量-动量赝张量。这是因为根据爱因斯坦的等效原理，引力场的能量不是局域的^[33]。历史上，基于总能量，动量守恒和对称性等物理定义了许多不同的引力场能量-动量赝张量^{[34][35]}，比较通用的一般是 Landau-Lifshitz 形式。

对引力波辐射能量的计算，一般需要用到多极矩展开。广义相对论的线性引力辐射由四极矩主导。而标量-矢量引力将会出现额外等量级的单极/偶极/八极矩等等辐射部分。在双星旋进引力辐射模型中，除了一般的圆轨道旋进辐射之外，我们还可以考虑椭圆轨道以及引力辐射的反作用^{[36][37]}，以至参考系拖曳等等效应，从而讨论预测特殊的情况。

利用目前大量的引力波的观测数据，我们将可以以多种方法检验现有的修改引力理论。目前较常使用的有参数化后牛顿形式^{[38][39][40][41]} (Parameterized post-Newtonian formalism, PPN) 或参数化后爱因斯坦框架^[42] (Parametrized post-Einsteinian, PPE) 等，它们都属于不依赖于具体理论模型的方法，因为修改引力相对于广义相对论的偏移程度由将多个参数来刻画，通过对其取值选取，我们可以对应到具体的修改引力模型上。另一方法是：我们可以单独计算某一特定引力理论下的引力波辐射/传播表达式，并通过导出的波形/能量等等与已探测的引力波数据进行对比拟合。这种方式优点在于关注了具体修改引力理论的物理本质。

目前结合观测结果对标量-矢量-张量引力理论中引力辐射的计算，及相应的模型检验工作包括如下：

- TeVeS 理论中的引力波传播速度^{[43][44]} 和极化模式^{[44][45]} 被计算。
- 在 Sibel Boran 计算下，TeVeS 和 STVG 等修改引力理论中预测的引力波速度与 GW170817 结果相差 10^3 倍^[46]。
- J. W. Moffat 根据线性引力理论计算出 STVG 理论下引力波速度和辐射能量^{[47][48]}，并称其与广义相对论结果一致。

- STVG 中的引力波极化和能量-动量赝张量被计算出^[49]。
- 利用参数估计的方法可以计算下一代引力波探测器(如 LISA)对相关物理量(如引力子质量, 引力波传播速度等)的限制能力潜在提升量级。
- 利用数值相对论中的 Grid and Bubble Evolver (GABE)^[50]分析标量辐射的 Vainshtein Mechanism^[51]。

目前的引力波观测中发现并没有找到引力波矢量/标量模式^{[52][53]}, GW170817 事件的电磁/引力波信号 Shapiro 延迟也与许多修改引力预测结果相悖。但是由于很多计算只考虑最低级近似^[48], 并不能精确一些强引力下的情况及双星合并, 铃铛等等部分的动力学过程。这一部分还需要通过以特定理论为基础^{[54][55]}, 并建立相对论数值模拟来比对与观测区别, 才能真正准确地检验相应模型。针对铃铛部分, Teukolski 给出的方程一直是计算末态黑洞黑洞的有效途径, SXS^{[56][57]} (Simulating eXtreme Spacetimes) 对黑洞波形的计算也相当精确, 覆盖质量相等、不同的多种双黑洞类型, 也可以很好地作为目前的数据标准。

除了引力辐射之外, 引力波的其他可观测效应还包括引力波记忆信号^[58]和引力波回声效应^[59]等等。反之, 引力波也可以用来检验爱因斯坦强等效原理和宇宙守恒^[60], 推断引力子质量^[61], 局域洛伦兹不变性破坏的参数界限^[62]和额外维度数量^[63]等等超出标准模型的问题。

综合上述介绍, 目前的先进观测技术使引力波天文研究进入黄金时期, 大量的数据也使得利用引力波辐射检验修改引力理论的方法变得可能。本文针对标量-矢量-张量引力理论计算引力波辐射, 与观测结果对比, 检验相应的预测情况。工作如下: 第一章介绍广义相对论下引力波的理论导出和基本内容; 第二章综述广义相对论后的新宇宙学观测事实以及对应的修改引力理论; 第三章综述引力波的观测; 第四章推导标量-矢量-张量引力理论中的引力波辐射; 第五章通过铃铛部分的拟合, 分析, 预测标量-矢量-张量引力理论下可能的参数限制; 第六章总结全文内容, 并给出对广义相对论和 MOG 标量-矢量-张量引力的对比评价。

1 广义相对论导出引力波

1.1 引力波基础

引力波的简单定义为对平直的时空施加的线性扰动，则闵可夫斯基时空度规加上扰动项：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (1.1)$$

带入联络和里奇张量后，易得：

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (1.2)$$

由洛伦兹规范： $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ，可将场方程化为：

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

研究引力波传播时，在波源之外 $T_{\mu\nu} = 0$ ，因此场方程变为： $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ， $\bar{h}_{\mu\nu}$ 有六个独立分量，当我们设定：

$$h^{0\mu} = 0, \quad h_i^i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0, \quad (1.4)$$

时，称此种满足横向无迹（ $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ ）。假设描述向 z 方向传播的引力波，当使用横向无迹（TT）规范时，引力波可写为：

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad (1.5)$$

其中 h_+ 和 h_x 分别代表“plus”和“cross”的极化部分。时空线元变为：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \left\{ 1 + h_+ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \right\} dx^2 + \left\{ 1 - h_+ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \right\} dy^2 + 2h_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] dxdy. \quad (1.6)$$

当传播方向为 \vec{n} 时，我们可以利用横向，对称，迹为 2 的投影算符 $P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j$ ，构建 Lambda 张量：

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = & \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} \\ & + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l, \end{aligned} \quad (1.7)$$

则 TT 规范下引力波项可简单写为：

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}. \quad (1.8)$$

1.2 引力波辐射

1.2.1 线性化引力波辐射

针对辐射能量，我们可以利用格林函数法：

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x'), \quad (1.9)$$

之后有：

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'), \quad (1.10)$$

利用 $h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}$, $|\mathbf{x}| = r$ 和三个近似条件：

$$\begin{cases} r \gg d, & (\text{远离源}) \\ v \ll c, & (\text{低速}) \\ \frac{\omega}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \ll 1, & (\text{低频}) \end{cases} \quad (1.11)$$

可以得到：

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (1.12)$$

以及傅里叶展开：

$$T_{kl}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.13)$$

最终得到：

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{T}_{kl}\left(\omega, \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}\right) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}. \quad (1.14)$$

若我们对 $T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}'\right)$ 的 e 指数部分作多级展开，可以得到：

$$e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}\right)} = e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \times \left[1 - i \frac{\omega}{c} x'^i n^i + \frac{1}{2} \left(-i \frac{\omega}{c}\right)^2 x'^i x'^j n^i n^j + \dots \right]. \quad (1.15)$$

$$T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}'\right) \simeq T_{kl}\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_0 T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_0^2 T_{kl} + \dots \quad (1.16)$$

之后我们定义：

$$\begin{aligned} S^{ij}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}), \\ S^{ij,k}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k, \\ S^{ij,kl}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k x^l, \end{aligned} \quad (1.17)$$

则得到：

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \times \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]. \quad (1.18)$$

利用能量密度 T^{00} 项，我们可以定义出引力波辐射的质量单极，偶极，四级，八级矩：

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}), \\ M^i &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i, \\ M^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j, \\ M^{ijk} &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j x^k, \end{aligned} \quad (1.19)$$

利用动量密度的 T^{0i} 项，我们还可以定义出动量的矩：

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}), \\ P^{i,j} &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j, \\ P^{i,j,k} &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k. \end{aligned} \quad (1.20)$$

在简单的线性化引力理论中，我们利用守恒 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ，可以计算：

$$c\dot{M} = \int_V d^3x \partial_0 T^{00} = - \int_V d^3x \partial_i T^{0i} = - \int_{\partial V} dS^i T^{0i} = 0, \quad (1.21)$$

同理，我们可以得到如下关系：

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 0, & \dot{P}^i &= 0, \\ \dot{M}^i &= P^i, & \dot{P}^{i,j} &= S^{ij}, \\ \dot{M}^{ij} &= P^{i,j} + P^{j,i}, & \dot{P}^{i,j,k} &= S^{ij,k} + S^{ik,j}, \\ \dot{M}^{ijk} &= P^{i,jk} + P^{jk,i} + P^{ki,j} \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中 $\dot{M} = 0$ 和 $\dot{P}^i = 0$ 分别代表了辐射源的质量和总动量守恒关系。之后我们利用质量四极矩的不可约表示 $M^{kl} = (M^{kl} - \frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii}) + \frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii}$ 在Lambda张量投影作用下，将投影到使引力波表示为横向无迹的超曲面上，我们引入：

$$Q^{ij} \equiv M^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}M_{kk} = \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3}r^2 \delta^{ij} \right), \quad (1.23)$$

上式中 Q_{ij} 和 M_{ij} 可等价替换，之后为了推导方便，我们仍采用 M_{ij} 。

考虑沿z轴传播($\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$)的引力波，由 $\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$ ， $P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j$ ，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

代入 $\Lambda_{ij,kl}M^{kl} = [P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}]M^{kl}$, 解出:

$$\Lambda_{ij,kl}M^{kl} = \begin{pmatrix} \frac{(M^{11} - M^{22})}{2} & M^{12} & 0 \\ M^{21} & -\frac{(M^{11} - M^{22})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad (1.26)$$

此时, 引力波两个独立的极化分量为:

$$h_+ = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} (M^{11} - M^{22}), h_\times = \frac{4}{r} \frac{G}{c^4} M^{12}. \quad (1.27)$$

上述推导特殊针对 z 方向传播引力波的 TT 规范形式, 若考虑任意方向传播引力波, 由 TT 规范下引力波的洛伦兹不变性, 我们可以使用坐标主动变换, 变换前坐标系 (x, y, z) , 变换后坐标系 (u, v, n) 满足如下图所示关系:

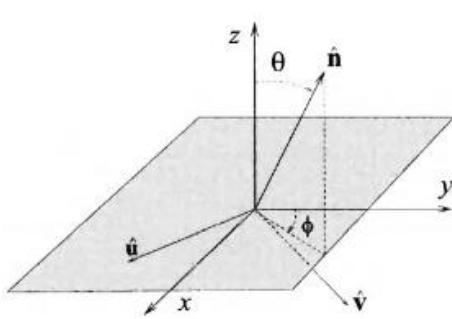


图 1.1 坐标系 (x, y, z) 和坐标系 (u, v, n) 位置关系图, 此图来源于^[36]第 3 章

观察上图, 变换前 $n'_j = (0, 0, 1)$, 变换后 $n_i = (\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$, 可得变换矩阵 \mathcal{R}_{ij} 满足:

$$n_i = \mathcal{R}_{ij} n'_j, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

由于是坐标系的主动变换, 质量四级辐射在变换前后关系为:

$$M'_{ij} = (\mathcal{R}^T M \mathcal{R})_{ij}, \quad (1.29)$$

带入变换前的形式: $h_+ = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} (M'^{11} - M'^{22}), h_\times = \frac{4}{r} \frac{G}{c^4} M'^{12}$, 则可以得到:

$$\begin{aligned}
 h_+(t; \theta, \phi) = & \frac{1}{r c^4} [\ddot{M}^{11} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\
 & + \ddot{M}^{22} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\
 & - \ddot{M}^{33} \sin^2 \theta \\
 & - \ddot{M}^{12} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\
 & + \ddot{M}^{13} \sin \phi \sin 2\theta \\
 & + \ddot{M}^{23} \cos \phi \sin 2\theta],
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
 h_\times(t; \theta, \phi) = & \frac{1}{r c^4} [(\ddot{M}^{11} - \ddot{M}^{22}) \sin 2\phi \cos \theta \\
 & + 2\ddot{M}^{12} \cos 2\phi \cos \theta \\
 & - 2\ddot{M}^{13} \cos \phi \sin \theta \\
 & + 2\ddot{M}^{23} \sin \phi \sin \theta].
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

以上推导证明了 TT 参考系下引力波振幅领头阶与质量四极矩的时间二阶导成正比。除了上述对格林函数解泰勒展开法外，还可以直接用系统的多极矩展开方式推导出引力波质量四级辐射为领头阶（参考 Kip Throne (1980)）。

1.2.2 引力波辐射能量计算

前文计算都是在线性引力下，在计算能量时，我们先不假设时空是平坦的，此时度规：

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1.32}$$

其中 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 表示背景时空，但不一定是没有起伏的。则对应的里奇张量可以展开为：

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \tag{1.33}$$

$\bar{R}_{\mu\nu}$ 表示仅包含 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 的部分， $R_{\mu\nu}^{(1)}$ 表示 $h_{\mu\nu}$ 一阶部分，而 $R_{\mu\nu}^{(2)}$ 表示 $h_{\mu\nu}$ 的二阶部分，则我们也可以将场方程作相应分离：仅包含 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 的 $\bar{R}_{\mu\nu}$ 应该属于低频部分，而 $R_{\mu\nu}^{(1)}$ 属于高频部分， $R_{\mu\nu}^{(2)}$ 则兼具高频和低频部分，可写出：

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{Low}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{Low}}, \tag{1.34}$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{High}} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{High}}, \tag{1.35}$$

我们认为时空中高频部分的能量表征引力波部分，则给出引力波对应的能动张量为：

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \right\rangle. \tag{1.36}$$

其中， $\langle \dots \rangle$ 表示在总体时空上做平均。根据：

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} \right. \\
 & + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\mu} \\
 & + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} \\
 & \left. + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} \right], \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

及第 1 节中限定的引力波规范，可以将 $R_{\mu\nu}^{(2)}$ 化简为：

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle, \tag{1.38}$$

则得到：

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \tag{1.39}$$

在 TT 规范下，及 $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$ ，得到：

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \tag{1.40}$$

考虑在体积 V 内的引力波能量：

$$E_V = \int_V d^3x t^{00}, \tag{1.41}$$

根据能量守恒定理： $\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0$ ，代入上式：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} &= - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} \\
 &= - \int_S dA n_i t^{0i}, \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

若取 $\hat{n} = \hat{r}$ ，则上式变为：

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{0r}, \tag{1.43}$$

由 $h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) \sim f_{ij}(t - r/c)$ ，即 h_{ij}^{TT} 正比于一个在 t_{ret} 的函数 $f_{ij}(t - r/c)$ ，所以：

$$\frac{\partial}{\partial r} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right), \tag{1.44}$$

即 $t^{0r} = +t^{00}$ ，则可将上式化为：

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00}, \tag{1.45}$$

若将引力波领头阶（四级）部分化为：

$$[h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x})]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \tag{1.46}$$

由此可以计算辐射能量：

$$\frac{dE}{dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\dot{h}_+^2 + \dot{h}_{\times}^2), \quad (1.47)$$

令 $dA = r^2 d\Omega$, 可以得到:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}}, \quad (1.48)$$

$$\left(\frac{dE}{d\Omega} \right)_{\text{quad}} = \frac{G}{8\pi^2 c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^{\infty} d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{kl}^*(\omega), \quad (1.49)$$

$$\left(\frac{dE}{d\omega} \right)_{\text{quad}} = \frac{G}{5\pi c^5} \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega), \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{quad}} &= \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle \\ &= \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle. \end{aligned} \quad (1.51)$$

上述计算我们都保留了光速 c , 到此处就可以看出辐射能量 $\sim c^{-5}$, 是非常小的量。

之后还可以对辐射角动量作计算, 方法也类似, 首先分成轨道和自旋两部分:

$$\frac{dJ^i}{dt} = \frac{dL^i}{dt} + \frac{dS^i}{dt}, \quad (1.52)$$

之后忽略计算过程, 直接给出结果:

$$\left(\frac{dJ^i}{dt} \right)_{\text{quad}} = \frac{2G}{5c^5} \epsilon^{ikl} \langle \ddot{Q}_{ka} \ddot{Q}_{la} \rangle. \quad (1.53)$$

1.2.3 致密双星进的引力波辐射

考虑在圆轨道上旋转的双星系统, 不考虑轨道变化和强引力情况, 则可以根据上面的线性引力辐射理论, 给出:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= R \cos \left(\omega_s t + \frac{\pi}{2} \right), \\ y_0(t) &= R \sin \left(\omega_s t + \frac{\pi}{2} \right), \\ z_0(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.54)$$

上式中 ω_s 为源的频率, 取相位角为 $\pi/2$ 是为了初始时间定义方便。由双星约化质量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, 代入引力波质量四极矩表达式, 得到:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu R^2 \frac{1 - \cos 2\omega_s t}{2}, \\ M_{22} &= \mu R^2 \frac{1 + \cos 2\omega_s t}{2}, \\ M_{12} &= -\frac{1}{2} \mu R^2 \sin 2\omega_s t, \end{aligned} \quad (1.55)$$

则对时间求二阶导:

$$\begin{aligned}\ddot{M}_{11} &= -\ddot{M}_{11} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \cos 2\omega_s t, \\ \ddot{M}_{12} &= 2\mu R^2 \omega_s^2 \sin 2\omega_s t,\end{aligned}\quad (1.56)$$

最终得到引力波两个极化模式振幅表达式:

$$\begin{aligned}h_+(t; \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi). \\ h_\times(t; \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos \theta \sin(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi).\end{aligned}\quad (1.57)$$

从上式可以看出, 四级辐射的探测频率 ω_{gw} 为源的频率的 2 倍。

接下来, 我们讨论上式中的各变量该如何对应观测结果。首先, 对于足够远的天体源, r 可视为常数。我们在引力波探测中常用的表示探测方位和法线夹角 ι 可以替换 θ , 而 $2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi$ 可换为 $2\omega_s t + 2\alpha$, 其中 $\alpha = \phi - \omega_s r/c$, 这里的 α 也是可以通过我们任意设定初始时间来使其为 2π 的整数倍, 则表达式变为:

$$\begin{aligned}h_+(t) &= \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega_s t). \\ h_\times(t) &= \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos \iota \sin(2\omega_s t).\end{aligned}\quad (1.58)$$

另外, 在观测中, 我们还一般用 $f_{\text{gw}} = \omega_{\text{gw}}/(2\pi)$ 表示观测到的频率, 并且引入引力波数据处理中常用的啁啾质量 (chirp mass) 替换 R 和 μ 。根据运动方程 $v^2/R = Gm/R^2$ 及 $v = \omega_s R$ 得到开普勒定律:

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3}, \quad (1.59)$$

上式中 $m = m_1 + m_2$ 。根据上式关系, 定义啁啾质量:

$$M_c = \mu^{\frac{3}{5}} m^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}, \quad (1.60)$$

使得:

$$\begin{aligned}h_+(t) &= \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\pi f_{\text{gw}} t). \\ h_\times(t) &= \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos \iota \sin(2\pi f_{\text{gw}} t).\end{aligned}\quad (1.61)$$

实际情况下, 随着双星旋进辐射引力波, 系统将会逐渐损失总能量, 使得双星轨道半径逐渐变小, 频率升高, 由开普勒方程两边对时间求导后化简得:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= -\frac{2}{3}R \frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s} \\ &= -\frac{2}{3}(\omega_s R) \frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s^2},\end{aligned}\tag{1.61}$$

如果满足 $\omega_s^2 \gg \dot{\omega}_s$, 则 R 的变化可视为小量, 则运动方程还可以当作近似圆轨道处理, 表达式中啁啾质量和约化质量等等也仍适用。在此情况下, 双星随着绕转旋进, 轨道半径减小到一定值时, 开始双星合并 (coalescence) 阶段, 此时绕转频率接近无限大。因此, 我们设合并时间 t_{coal} 为观测结束时间, 满足: $t \in [t_0, t_{\text{coal}}]$, 且 $t - t_0 = t_{\text{ret}} - (t_0)_{\text{ret}}$ 。利用:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 2 \int_{t_0}^t dt' \omega_s(t') \\ &= \int_{t_0}^t dt' \omega_{\text{gw}}(t'),\end{aligned}\tag{1.62}$$

可以将引力波两个独立极化分量表示为:

$$\begin{aligned}h_+(t) &= A(t) \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos[\Phi(t)]; \\ h_\times(t) &= -2A(t) \cos \iota \sin[\Phi(t)].\end{aligned}\tag{1.63}$$

其中:

$$A(t) = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}} t}{c} \right)^{\frac{2}{3}}\tag{1.64}$$

表示引力波的振幅, $\Phi(t)$ 表示引力波的相位。

同时, 我们还可以根据引力波辐射部分推导的结果计算致密双星旋进的辐射量:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2}{\pi} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{\text{gw}}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}} \left[\left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta \right],\tag{1.65}$$

上式的计算利用了 $\langle \cos^2(2\omega t + 2\phi) \rangle = 1/2$, 因此辐射与角度 ϕ 且通过积分:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta \right] = \frac{4}{5},\tag{1.66}$$

其中利用了 $d\Omega = d\cos\theta d\phi$, 我们得到:

$$P = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{\text{gw}}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}}.\tag{1.67}$$

根据双星系统能量: $E_{\text{orbit}} = -\frac{Gm_1 m_2}{2R} = -(G^2 M_c^5 \omega_{\text{gw}}^2 / 32)^{1/3}$, 且系统能量损失 $-dE_{\text{orbit}}/dt$ 等于引力波辐射能量 P , 满足:

$$\dot{\omega}_{\text{gw}} = \frac{12}{5} 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} \omega_{\text{gw}}^{\frac{11}{3}}, \quad \dot{f}_{\text{gw}} = \frac{96}{5} \pi^{\frac{8}{3}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} f_{\text{gw}}^{\frac{11}{3}}, \quad (1.68)$$

通过对上式积分可以发现，双星旋转频率会在某时刻发散，此时刻称为合并时间 t_{coal} ，若定义 $\tau = (t_{\text{coal}})_{\text{ret}} - t_{\text{ret}} = t_{\text{coal}} - t$ ，则 τ 时刻频率为：

$$f_{\text{gw}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{8}}. \quad (1.69)$$

利用探测的引力波频率，我们可以反求出啁啾质量：

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{c^3}{G} \left[\frac{5}{96} \pi^{-\frac{8}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \dot{f} \right]^{\frac{3}{5}}. \quad (1.70)$$

总的来说，这里对质量四极矩的计算方法都是考虑线性化的张量辐射部分，后面针对矢量和标量部分，我们也将利用多级展开的一般方法，给出具体推导，不再只是四极矩部分。

1.3 能量-动量赝张量

接下来讨论能量-动量赝张量的推导，若只考虑引力波对里奇张量的一阶贡献：

$$R_{\mu\kappa}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\kappa}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right), \quad (1.71)$$

可将场方程写为：

$$R_{\mu\kappa}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}_\lambda = -8\pi G [T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}], \quad (1.72)$$

其中：

$$t_{\mu\kappa} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left[R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R^\lambda_\lambda - R_{\mu\kappa}^{(1)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}_\lambda \right], \quad (1.73)$$

我们可以看出， $\tau^{\nu\lambda} \equiv \eta^{\nu\mu} \eta^{\lambda\kappa} [T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}]$ 表示结合了物质和引力场的总的能动张量，而其中引力波的部分我们一般称之为能量-动量赝张量，由 Landau 和 Lifshitz 在 1947 年计算^[34]（根据守恒律对协变导数下的变化导出）：

$$\begin{aligned} t^{ik} &= \frac{c^4}{16\pi G} \{ (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^n \Gamma_{mp}^p) (g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) + \\ &\quad + g^{il} g^{mn} (\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) + \\ &\quad + g^{kl} g^{mn} (\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) + \\ &\quad + g^{lm} g^{np} (\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

而总的能动张量满足守恒律满足 $\partial_k(T^{ik} + t^{ik}) = 0$ 。上述关于引力波基础等推导主要参考 Maggiore 教科书^[36]，能量-动量赝张量，（引力子螺旋度为 2）等等推导主要参考 Weinberg 的宇宙学课本^[35]。

2 修改引力

2.1 新的宇宙学观测事实

2.1.1 暗物质

在 1932 年, Jan Hendrik Oort 通过对太阳系附近其他恒星运动速度观测, 首次报告了可见物质质量分布不能解释的物理现象。1960 年代, 美国卡耐基天文台的 Vera Rubin^[64]观测旋涡星系旋转速度随半径变化曲线时, 也发现在星系外侧有可见质量分布无法解释的旋转速度。

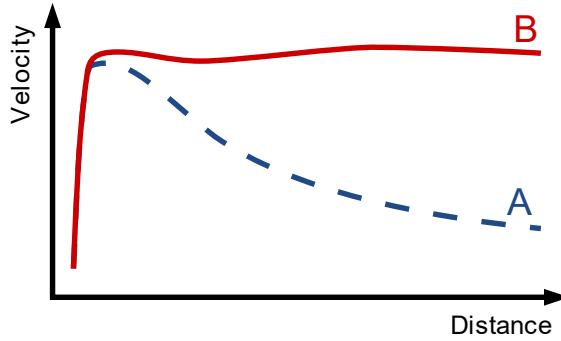


图 2.1 星系旋转曲线^[65]速度-半径图, A 为理论值, B 为观测值

从上图可以看出, 不同于开普勒定律等等理论预测 ($v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$), 在星系外侧旋转线速度竟然近似常数。这一点却在我们假设一个:

$$\rho(r) = \frac{K}{r^2}, \quad (2.1)$$

的质量分布之后可以解释(其中 K 为常数), 因为此时:

$$M(< r) = \int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho(r'), \quad (2.2)$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 dr' \frac{K}{r'^2}, \quad (2.3)$$

则可以解出 $v = \sqrt{4\pi GK}$ 。

除了星系旋转曲线的疑难外, 假设暗物质存在可以解释的其他观测事实还包括星系团^[66] X-Ray 发射, 透镜星系, 宇宙微波背景辐射, 宇宙大爆炸后大尺度均匀结构形成等等。

上述只是一个简单的暗物质分布假设。暗物质候选者包括 Cold Dark Matter 冷暗物质（非重子），简称 CDM；热暗物质；混合暗物质等等。在实际情况中，有更多可能的理论来解释这些与暗物质相关的观测事实。其中就包括我们接下来在 2.2 节即将介绍的 MOND 理论和 MOG 标量-矢量-张量引力。

2.1.2 暗能量

爱因斯坦曾经在其场方程中引入一个宇宙学常数项 Λ 使得理论上的宇宙能存在一个静态解。可惜，他之后又否定了这个想法。而目前的宇宙学观测事实却一步步又将我们拉回这个常数和其物理意义的思考中。

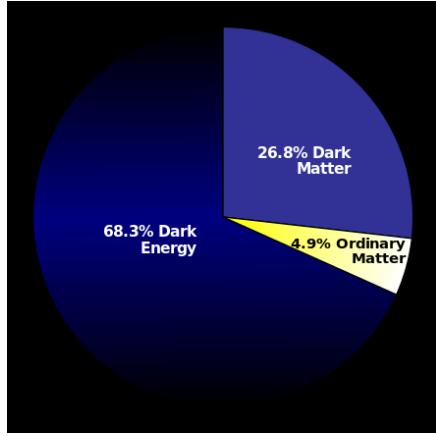
宇宙学观测中有一种特殊的超新星——Type Ia 超新星，其特别之处在于其爆炸时，其中一个白矮星 (White Dwarf) 的质量会逼近 Chandrasekhar limit^[67]，因此他们的爆炸辐射谱峰值光度相同。1999 年，Supernova Cosmology Project^[17] 根据对不同位置 Type Ia 超新星的光度曲线-红移关系（通过绝对星等-视星等关系得出）观测对比，发现宇宙在加速膨胀。

除了超新星的观测结果以外，目前宇宙物质密度和大爆炸临界密度差值以及宇宙微波背景辐射，哈勃常数等等的测量也都证明了宇宙加速膨胀的事实，以及作为为宇宙提供均匀负压的暗能量本身存在的可能。

在宇宙学模型中，宇宙膨胀历史完全由以下四个无量纲常数^[68]决定，他们满足：

$$\Omega_{M0} + \Omega_{R0} + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{K0} = 1. \quad (2.4)$$

其中 Ω_{M0} 表示所有包括重子和暗物质等等的质量项， Ω_{R0} 表示 3K 的宇宙微波背景辐射， $\Omega_{\Lambda0}$ 表示暗能量项， Ω_{K0} 表示时空曲率项，这某种程度上也可以理解为宇宙的组成成分。目前我们已经能验证 $\Omega_{M0} + \Omega_{R0}$ 值接近 0.3，而时空又是大尺度平坦即 $\Omega_{K0} = 0$ ，最后像 WMAP 和 Planck 等等探测结果也基本将 $\Omega_{\Lambda0}$ 约束到 0.68 附近。

图 2.2 宇宙物质组分占比图^[69]

当然，除了将大尺度均匀分布的能量密度补充于爱因斯坦场方程中这种理论，暗能量还有另外的可能形式：一个含时演化的标量场。这也是我们接下来即将在修改引力理论中可以看到的。

2.2 修改引力理论

2.2.1 MOND 和 TeVeS

当使用牛顿定律解决小加速度情况时，星系和太阳系/实验室的验证结果有几个量级的差异，因此出现 hidden mass hypothesis (HMH)，在 1983 年，为了解释星系和星系团 (Galaxy clusters) 的 hidden mass (暗物质) 自引力束缚问题，M. Milgrom 提出了 MOND^[22]的修改理论：

$$m_g \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) a = F. \quad (2.5)$$

其中 μ 和 a_0 都是在近似牛顿时=1 的常数。这种假设的物理解释有几点，同时作者也自称这只是一个有效公式，并不能构成理论。MOND 的成功在于可以不用假设 hidden mass 的存在而解决星系旋转曲线问题^[70]。1984 年，Milgrom 和 Bekenstein^[23]一起给出 MOND 的拉氏量及 AQUAL 形式作用量。

2004 年，Jacob D. Bekenstein^[24]给出完整的相对论形式 MOND，称为 TeVeS (张量-矢量-标量引力) (tensor-vector-scalar theory of gravity)，在此之前其他 MOND 的相对论性理论主要失败在无法满足 1. 后牛顿时代引力检验 (如水星进动，光线偏折等) 2. 导出量级接近的引力透镜 3. 允许超光速的标量波存在。

TeVeS 理论中，有三个动态场：矢量 \mathbf{U}_α ，标量 ϕ ，和度规张量 $g_{\mu\nu}$ ，及一个非动态标量场 σ ，其中类时 4-矢量 \mathbf{U}_α 满足：

$$g^{\alpha\beta}\mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta = -1, \quad (2.6)$$

物理意义上的度规张量则参考 R. H. Sanders 在 1996 年根据 stratified theory^[71]思想提出的度规，改写为：

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + \mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta) - e^{2\phi}\mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta \\ &= e^{-2\phi}g_{\alpha\beta} - 2\mathfrak{U}_\alpha\mathfrak{U}_\beta \sinh(2\phi), \end{aligned} \quad (2.7)$$

则：

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi}g^{\alpha\beta} + 2\mathfrak{U}^\alpha\mathfrak{U}^\beta \sinh(2\phi). \quad (2.8)$$

几何部分作用量：

$$S_g = (16\pi G)^{-1} \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (2.9)$$

两个标量场的作用量取 PCG^[72]形式：

$$S_s = -\frac{1}{2} \int \left[\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2} G \ell^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2) \right] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (2.10)$$

其中 $h^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} - \mathfrak{U}^\alpha\mathfrak{U}^\beta$, F 是一个无量纲函数, k 和 ℓ 是两个正常数。

矢量场作用量：

$$S_v = -\frac{K}{32\pi G} \int \left[g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \mathfrak{U}_{[\alpha,\mu]} \mathfrak{U}_{[\beta,\nu]} - 2\left(\frac{\lambda}{K}\right) (g^{\mu\nu} \mathfrak{U}_\mu \mathfrak{U}_\nu + 1) \right] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (2.11)$$

其中 λ 是依赖于时空的拉格朗日乘子。

质量作用量：

$$S_m = \int \mathcal{L}(-\tilde{g})^{\frac{1}{2}} d^4x. \quad (2.12)$$

之后可以根据对 $S = S_g + S_s + S_v + S_m$ 关于 $g^{\alpha\beta}, \phi, \sigma$ 和 \mathfrak{U}_α 的变分得到各个运动方程。

然而，在 GW170817/GRB170817A 后，MOND 类似的修改引力模型也被排除。因为其错误预测：引力波将会在伽马射线到达的 1000 天后被观测到。

2.2.2 MOG 标量-矢量-张量引力

2005 年，John Moffat^[25]提出了可以符合太阳系观测结果和星系旋转曲线（不用假设暗物质）的标量-矢量-张量引力理论。其形式如下：

$$S = S_{\text{Grav}} + S_\phi + S_S + S_M, \quad (2.13)$$

$$S_{\text{Grav}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \right], \quad (2.14)$$

$$S_\phi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\omega \left(\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + V(\phi) \right) \right], \quad (2.15)$$

$$S_S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu G \nabla_\nu G - V(G) \right) \right] \quad (2.16)$$

$$+ \frac{1}{G} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega - V(\omega) \right) + \frac{1}{\mu^2 G} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \mu \nabla_\nu \mu - V(\mu) \right) \right].$$

其中 $V(\phi)$ 代表矢量场 ϕ 的势能，且：

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu, \quad (2.17)$$

而 $V(G)$, $V(\omega)$, $V(\mu)$ 则表示三个标量场的势能，三个标量场具有不同物理意义， $\omega(x)$ 代表矢量场的耦合常数， $\mu(x)$ 则是矢量场质量，这三个“常数”会随空间变化是因为该理论还是一个“有效”理论。通过上述描述可以导出运动方程等等的理论结果并和相关的观测结果作验证。

Moffat 的修改引力理论还在之后被验证符合星系团^[73]和 GW170817 的观测结果。并且有研究者利用待测粒子法给出 STVG 下引力波极化^[49]，用微扰法算出能量-动量赝张量。

2.2.3 Generalized Scalar-Vector-Tensor Gravity

2018 年，Lavinia Heisenberg 提出的标量-矢量-张量理论建立在标量-张量理论的 Horndeski 形式^[21]和矢量-张量引力理论结合上，是一种概括性的标量-矢量-张量理论，可以讨论规范对称和规范对称自发破缺两种情况，也能包含前两种著名的标量-矢量-张量理论 TeVeS 和 MOG。接下来我们简要介绍这种引力理论是怎么提出的。

(1) Horndeski 形式

考虑到标量-张量理论中的作用量一般包含度规和标量场的各阶导数，标准的 Horndeski 形式试图将其完全描述：

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi] + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi_M] \right], \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), \\ \mathcal{L}_3 &= G_3(\phi, X) \square \phi, \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4,X}(\phi, X)[(\square \phi)^2 - \phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\phi^{;\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5,X}(\phi, X)[(\square \phi)^3 + 2\phi_{;\mu}^\nu\phi_{;\nu}^\alpha\phi_{;\alpha}^\mu - 3\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu} \square \phi].$$

其中 $X = -\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi / 2$ ，Horndeski 形式属于一个修改引力模型空间，包含 General relativity, Brans-Dicke theory, Quintessence, Dilaton, Chameleon 和 covariant Galileon 等等理论。比如，使 $G_2 = G_3 = G_5 = 0, G_4 = 1/16\pi G$ ，则变为广义相对论；使 $G_3 = G_5 = 0, G_2 = 2\omega X/\phi, G_4 = \phi$ ，则变为 Brans-Dicke 理论；使 $G_3 = G_5 = 0, G_2 = f(\phi) - \phi f'(\phi), G_4 = f'(\phi)$ ，其中 $f'(\phi) = df(\phi)/d\phi$ ，则变为 $f(R)$ 引力理论。

(2) 规范对称形式

在 Lavinia Heisenberg 理论中，总的标量-矢量-张量理论由两部分构成：

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{ST}} + \mathcal{S}_{\text{SVT}}, \quad (2.20)$$

在满足 U(1) 规范对称的理论中， \mathcal{L}_i 中 $i = 3 \sim 5$ 部分 \mathcal{S}_{ST} 直接取 Horndeski 形式，而矢量场 A_μ 满足规范对称性，引入场强 $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ ，和其对偶 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ ，则我们可以依次给出： $\mathcal{L}_{\text{SVT}}^2 = f_2(\pi, X, F, \tilde{F}, Y)$ ，不难看出，这部分拉氏量包含 Horndeski 形式下的 $\mathcal{L}_{\text{ST}}^2 = G_2(\pi, X)$ ，及三阶：

$$\mathcal{L}_{\text{SVT}}^3 = \mathcal{M}_3^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu \pi, \quad (2.21)$$

其中：

$$\mathcal{M}_3^{\mu\nu} = (f_3(\pi, X) g_{\rho\sigma} + \tilde{f}_3(\pi, X) \partial_\rho \pi \partial_\sigma \pi) \tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}^{\nu\sigma}, \quad (2.22)$$

四阶：

$$\mathcal{L}_{\text{SVT}}^4 = (\mathcal{M}_4^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu \partial_\alpha \pi \nabla_\nu \partial_\beta \pi + f_4(\pi, X) L^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}), \quad (2.23)$$

其中：

$$\mathcal{M}_4^{\mu\nu\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} f_{4,X} + \tilde{f}_4(\pi) \right) \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

最后总的作用量可以表示为：

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\sum_{i=3}^5 \mathcal{L}_{\text{ST}}^i + \sum_{i=2}^4 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^i \right), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SVT}}^2 &= f_2(\pi, X, F, \tilde{F}, Y), \\ \mathcal{L}_{\text{SVT}}^3 &= \mathcal{M}_3^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu \pi, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_{\text{SVT}}^4 = \mathcal{M}_4^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu \partial_\alpha \pi \nabla_\nu \partial_\beta \pi + f_4(\pi, X) L^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}.$$

可以看出，规范对称下的广义标量-矢量-张量引力主要的特点是引入规范矢量场，及其场强形式场强 $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ ，这一点也约束了其理论中矢量引力子质量必须为 0。在规范对称标量-矢量-张量引力中，引力波将有五个传播自由度。

(3) 规范对称破坏形式

将 U(1) 规范对称这一限制除去，我们可以获得更为广泛的标量-矢量-张量引力作用形式。还是先从矢量场强引入开始： $S_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu$ ，这里还需额外引入一个新的有效度规：

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{f_{nj}}^{\mu\nu} &= f_1(\pi, X_i) g_{\mu\nu} + f_2(\pi, X_i) \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi \\ &\quad + f_3(\pi, X_i) A_\mu A_\nu + f_4(\pi, X_i) A_\mu \partial_\nu \pi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

总的 no-gauge-invariance 标量-矢量-张量拉氏量为：

$$\mathcal{S}_{\text{SVT}}^{ng} = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{i,ng}, \quad (2.28)$$

伴随各阶分量分别为:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{2,ng} &= f_2(\pi, X_1, X_2, X_3, F, \tilde{F}, Y_1, Y_2, Y_3), \\
 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{3,ng} &= (f_{31}(\pi, X_3)g^{\mu\nu} + f_{32}(\pi, X_3)A^\mu A^\nu)S_{\mu\nu}, \\
 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{4,ng} &= f_4(\pi, X_3)R + f_{4,X_3}S_2, \\
 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{5,ng} &= \frac{f_5(\pi, X_3)}{2}G^{\mu\nu}S_{\mu\nu} - \frac{f_{5,X_3}}{6}S_3 \\
 &\quad + \mathcal{M}_5^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\pi + \mathcal{N}_5^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \\
 \mathcal{L}_{\text{SVT}}^{6,ng} &= f_6(\pi, X_1)L^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_6^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu\partial_\alpha\pi\nabla_\nu\partial_\beta\pi \\
 &\quad + \tilde{f}_6(\pi, X_3)L^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \mathcal{N}_6^{\mu\nu\alpha\beta}S_{\mu\alpha}S_{\nu\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

其中参量表示: $X_1 = -\frac{1}{2}(\partial\pi)^2$, $X_2 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi A^\mu$, $X_3 = -\frac{1}{2}A_\mu A^\mu$, $Y_1 = \partial_\mu\pi\partial_\nu\pi F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu$, $\tilde{Y}_2 = \partial_\mu\pi A_\nu F^{\mu\alpha}F^\nu\alpha$, $\tilde{Y}_3 = A_\mu A_\nu F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu$, $\mathcal{M}_5^{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\rho\sigma}^{h_{5j}}\tilde{F}^{\mu\rho}\tilde{F}^{\nu\sigma}$, $\mathcal{M}_6^{\mu\nu\alpha\beta} = 2f_{6,X_1}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{N}_6^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\tilde{f}_{6,X_3}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ 。由规范对称性的破缺, 引力波有最多六个传播自由度。且规范对称破缺下, 标量-矢量-张量引力理论相当于 Horndeski 形式和 multi-Proca 理论的结合, 即包含自旋为 1 的有质量矢量引力子。

2.2.4 标量-矢量-张量引力研究现状

2019 年, Lavinia Heisenberg 延续了其工作。提出并详细讨论了目前所有包含标量, 矢量, 张量引力的模型空间^[30], 及该修改引力分支下的宇宙学应用价值。总的来说, 目前在这一修改引力分支下大家最关心的还是上述的 TeVeS 和 MOG 两种标量-矢量-张量引力。而通过目前宇宙学观测, TeVeS 存在无法解释的矛盾。因此, 我们下文主要讨论的还是 MOG 标量-矢量-张量引力, 并试图严格讨论其参数空间及可能的存在价值。

3 引力波观测

3.1 LIGO-Virgo 介绍

LIGO Scientific Collaboration(LSC)最早在 1999 年由 Barry Barish^[74]带领团队建立。LIGO 在 2010 年停止运行并维护升级成 Advanced LIGO (大约 3 倍灵敏度)，从 2015 年 9 月开始重新启动 LIGO VIRGO network 观测计划 (由两个 advanced LIGO 和一个 advanced VIRGO 组成)。

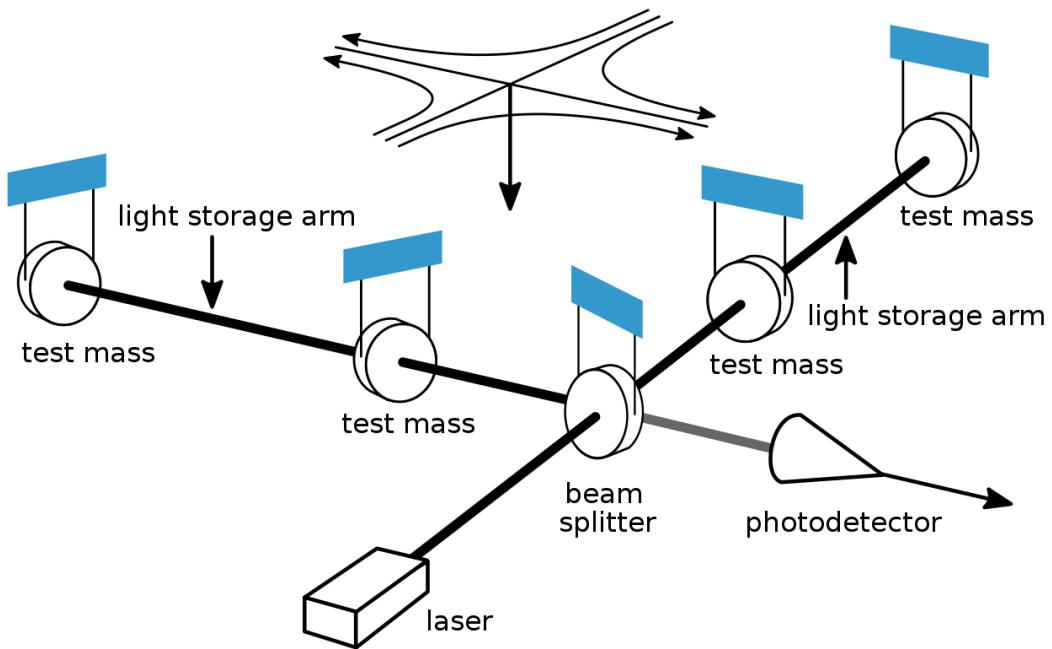


图 3.1 LIGO 原理图^[75]

如上图，单个 LIGO 作为改进的迈克尔逊干涉仪，由两个正交的干涉臂 $L_x = L_y = L = 4\text{km}$ 组成，当引力波信号传播到干涉臂上，会使两臂长发生不同的位移，且：

$$\Delta L(t) = \delta L_x - \delta L_y = h(t)L \quad (3.1)$$

这里两个臂长其实是由光来探测的。一束激光光束从激光器射出后，经过分光镜分成两束，它们分别被一面平面镜发射回来，再通过分光镜到达探测器。这两束光在探测器上会发生干涉，干涉变化结果可以导出引力波的数据。

分别位于美国 Hanford 和 Livingston，相距几千公里的探测器接收到的噪声完全不同，但引力波信号却是一致的。这样两台探测器可以互为对方的噪声过滤器，提升探测

器的灵敏度。此外，Advanced LIGO 采用的迈克尔逊-法布里珀罗干涉原理，可以提升光在干涉仪里面的往返次数。将有效光程增加数倍，则相应的灵敏度也将大大提升。

3.1.1 LIGO 与 GW150914

Advanced LIGO 在 2015 年 9 月 14 日^[8]首次直接观测到引力波，并命名为 GW150914，这也是历史上第一次探测到的双黑洞并合事件。在光度距离 $410^{+160}_{-180}\text{Mpc}$ ，红移 $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$ 处发生，合并前初态黑洞质量为 $36^{+5}_{-4}M_{\odot}$ 和 $29^{+4}_{-4}M_{\odot}$ ，末态质量 $64^{+4}_{-4}M_{\odot}$ ，辐射的引力波能量 $3.0^{+0.5}_{-0.5}M_{\odot}$ ，事件显著性大于 5.1σ 。该事件发生于世界标准时间（UTC）09:50:45，此时欧洲的 Virgo 正在更新中，因此探测只是分别由美国 LIGO 的两个激光干涉仪同时检测到信号。

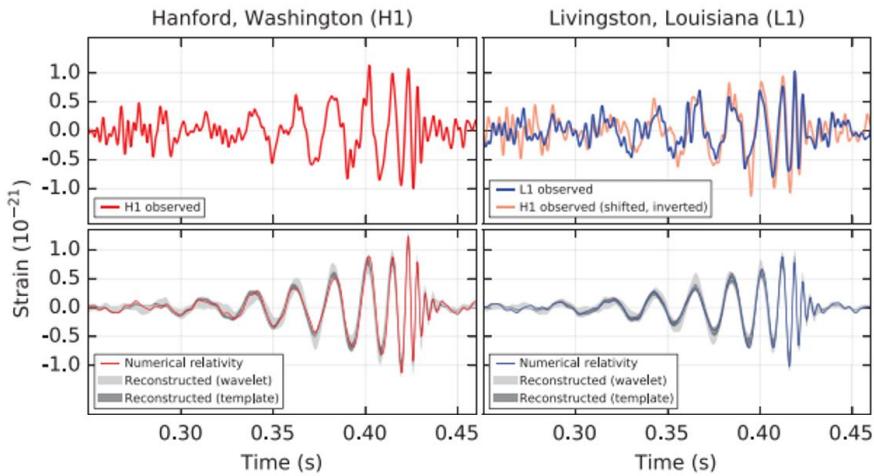
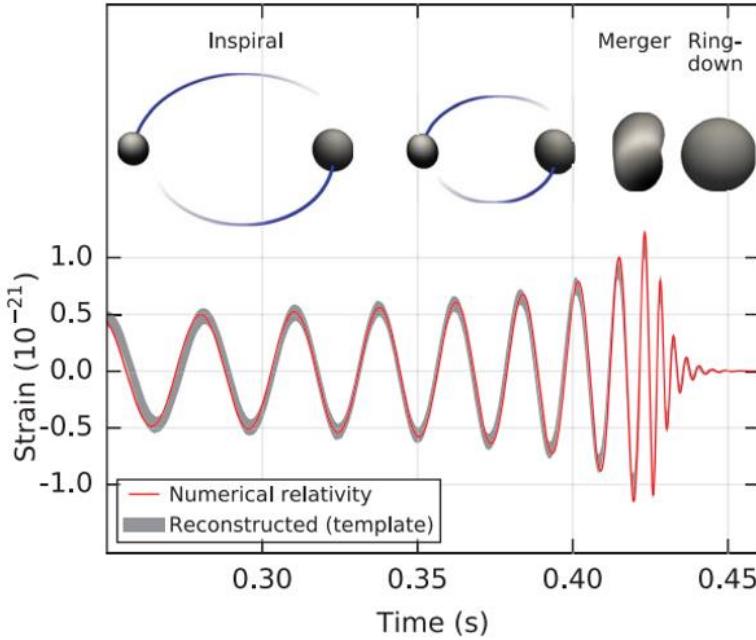


图 3.2 GW150914 探测信号图^[8]

图 3.2 就是分别位于两地的探测仪探测的引力波信号，可以看到两者还是有明显的区别的，这些区别就来自于引力波源在天球上的角分布对各地点的不同。这里的信号已经是经过了降噪，匹配滤波，重标度等等步骤后的结果，我们可以用其对比数值相对论拟合结果和理论波形模型的预测结果等等。

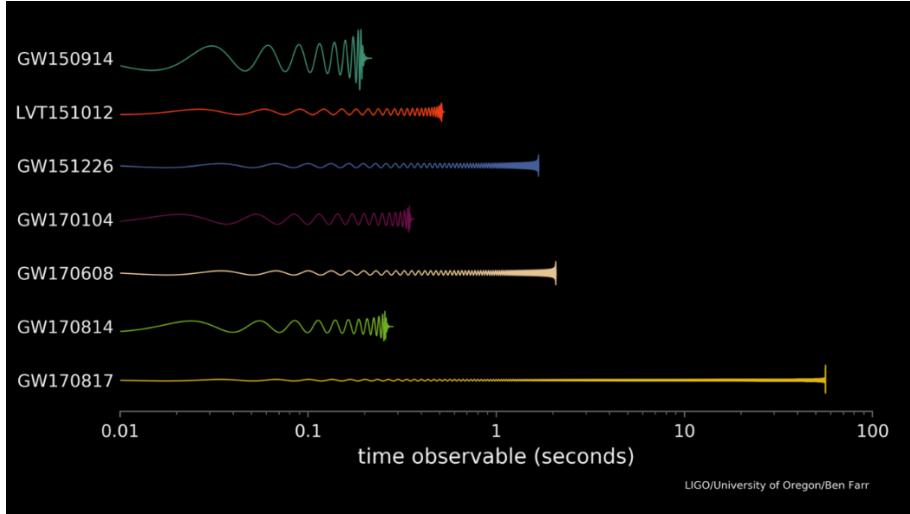
图 3.3 双黑洞合并三阶段对应波形图^[8]

这里展示图 3.3 主要是为了让读者能更形象地将具体的引力波信号波形和双黑洞合并的三个阶段（旋进(Inspiral)，合并(Merger)，铃荡(Ringdown)）结合起来。我们不难看出，在旋进阶段，波形表现为频率不断上升的三角函数；在合并阶段，波形的振荡逐渐剧烈，进入了强烈的非线性效应主导阶段；而铃荡阶段，波形最终变为衰减的三角函数形式。

3.1.2 LIGO 与 GW170817

在双黑洞合并事件之后，另一重大引力波事件 GW170817 则是 LIGO and Virgo Collaboration 首次对双中子星合并事件观测到引力波。其来源的光度距离 40^{+8}_{-14} Mpc。最有趣的是，在 1.74s 后，该源发出的伽马射线暴 GRB 170817A 也被费米伽玛射线太空望远镜的 Gamma-ray Burst Monitor 探测到。该也是首次对致密双星合并和伽马射线暴之间物理联系的直接证明。

不同于双黑洞合并模型，双中子星的合并需要考虑潮汐引力对其密度分布的影响。同时，观察图 3.4，双中子星的合并的完整周期更长：波形前期的振荡周期数（一般为几千次）要远多于双黑洞合并下的旋进阶段波形。因此在观测时，其原始信号特征主要体现在旋进部分以较稳定的频率振荡的波形；而双黑洞合并原始信号主要特征在合并时的振幅突然上升。

图 3.4 不同引力波信号的波形^[76]

3.1.2 LIGO 的三轮探测

除了上文介绍的 GW150914 和 GW170817 以外，截至今天，LIGO Network 已经进行了 3 个观测周期，到目前为止观测的引力波事件^[77]及所有发表的文章^[78]都可在网站找到。还有两个比较重要的观测结果是：

- (1) 2019 年 5 月 21 号观测的中等质量黑洞合并引力波信号 GW190521^[79]：合并前初态黑洞质量分别为 $85_{-14}^{+21} M_{\odot}$ 和 $66_{-18}^{+17} M_{\odot}$ ，末态质量 $142_{-16}^{+28} M_{\odot}$ ，在光度距离 $5.3_{-2.6}^{+2.4} \text{Gpc}$ 处发生。这次探测由 LIGO 和 Virgo 的三个探测器共同观测到。其独特之处在于合并后黑洞质量位于通常恒星形成理论中恒星质量黑洞和超大质量黑洞的质量量级之间。
- (2) 2019 年 8 月 14 号观测到极端质量比例致密星体合并事件 GW190814：合并前初态质量分别为 $23.3_{-1.0}^{+1.1} M_{\odot}$ 和 $2.59_{-0.09}^{+0.08} M_{\odot}$ ，在光度距离 $241_{-45}^{+41} \text{Gpc}$ 处发生。该事件独特之处在于人们对较小质量星体到底是黑洞还是中子星仍存有一定争议，因为中子星质量的钱德拉塞卡极限也位于这个范围内。所以有趣的是：该星体不是目前观测到的最重中子星就是最轻的黑洞。

3.3 其他引力波探测计划

当然，除了 LIGO/Virgo 之外，目前还有许多引力波探测计划正在筹备。包括：LISA^[80]空间引力波探测计划（Laser Interferometer Space Antenna）（由美国的 NASA 和欧洲的 ESA 合作发起，预期将于 2034 年开始投入运行）和中国的天琴计划^[12]（由中山大学珠海校区负责地面基础建设，目前已经进入试验阶段）。

空间探测器对引力波探测的观测频率区间为 $3 \times 10^{-5}\text{Hz}$ 至 10^{-1}Hz ，在此波段，地基引力波探测器会由于地表振动噪音和臂长受限，无法实现足够的探测准确度和精度。

除了激光干涉的探测方式，还有的 Pulsar Timing Array 等等其他探测手段也能间接获取引力波数据，在此就不详细展开介绍。

正因为引力波探测领域可以预期的繁荣盛况，天体物理、理论物理学家们也以持续的热忱投入：反复分析、挖掘数据，尝试拟合不同模型，希望能验证不同的猜想，或是揭示新的物理。

3.4 引力波探测与模型检验

(1) 引力波速度与模型检验

由 Shapiro time delay 原理，在各个引力理论中计算的引力波速度和光子速度之差结果对比 GW170817 的观测结果，可以有效的排除部分引力理论。2018 年 Boran 等四人由 GW170817/GRB170817A 观测数据，给出 PPN 参数的限制，将 OND 和 MOG 等等替代暗物质的引力理论排除。然而，M.A. Green 和 J.W. Moffat 随即在 Physics Letters B 中推导了三个引力子和光子的运动方程，并论证它们都以光速运动，否认了 BDKW 四人的结论。

(2) 探测引力波的标量-矢量极化

相对论引力理论只预言了引力波的张量极化，而在修正引力理论中，我们可以得到最多 6 个计划分量（另包括两个矢量极化，两个标量极化），中国科学技术大学赵文的团队曾在 2018 年针对 SMG 引力理论计算了双星系统标量辐射的 h_b 和 h_L 模式。还有利用数值方法 Grid and Bubble Evolver (GABE) 计算 Vainshtein Mechanism^[50] 对有质量引力子引力理论里标量辐射的单极，偶极矩影响的相关研究。

另一篇论文研究根据对 LIGO 的 O1 观测数据分析，运用贝叶斯推断方法得到结果，则并没有发现任何引力波极化^[52]，并认为该事实可以被用来给出引力波标量，矢量压力的上限。LIGO 在之后也得出引力波波形/极化观测结论符合广义相对论的结论。

4 标量-矢量-张量引力理论中的引力波辐射

4.1 MOG 标量-矢量-张量引力理论物理意义

在文中的 John Moffat 提出的 MOG 理论，由总作用量（引力波计算中认为矢量场耦合因子 $\omega = 0$ ）：

$$S = S_{\text{Grav}} + S_\phi + S_S + S_M, \quad (4.1)$$

对各部分作用量度规作变分可分别得到两个能动张量：

$$\begin{aligned} T_M^{\mu\nu} &= -2(-g)^{-1/2} \delta S_M / \delta g_{\mu\nu}, \\ T_{\text{MOG}}^{\mu\nu} &= -2(-g)^{-1/2} \left[\frac{\delta S_\phi}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_S}{\delta g_{\mu\nu}} \right], \\ T^{\mu\nu} &= T_M^{\mu\nu} + T_{\text{MOG}}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

及场方程：

$$G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda + Q_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

其中 $Q_{\mu\nu} = G(\nabla^\alpha \nabla_\alpha \Theta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \Theta)$, $\Theta(x) = 1/G(x)$, 也可以展开写为：

$$Q_{\mu\nu} = \frac{2}{G^2} (\nabla^\alpha G \nabla_\alpha G g_{\mu\nu} - \nabla_\mu G \nabla_\nu G) - \frac{1}{G} (\square G g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu G). \quad (4.4)$$

同时，利用比安基恒等式 $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ 和场方程，可以得到守恒律：

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{G} \nabla_\nu G T^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G} \nabla_\nu Q^{\mu\nu} = 0. \quad (4.5)$$

在 STVG 中，标量场 G 的影响在于作为有效标量引力作用强度取代牛顿和爱因斯坦引力下为 0 的标量引力场，此影响的量化因子：

$$\kappa = \sqrt{G - G_N} = \sqrt{\alpha G_N}, \quad (4.6)$$

其中 $\alpha = (G - G_N)/G_N \geq 0$, 利用这个量化因子，我们可以得到物质场的流：

$$J^\mu = \kappa T^{M\mu\nu} u_\nu, \quad (4.7)$$

则，在理想流体 $T^{M\mu\nu} = (\rho_M + p_M)u^\mu u^\nu - p_M g^{\mu\nu}$ 近似下，根据 $u^\nu u_\nu = 1$, 得到：

$$J^\mu = \kappa \rho_M u^\mu, \quad (4.8)$$

同时，根据 $J_{\mu u} = -(-g)^{-1/2} \delta S_M / \delta \phi^\mu$, 我们可以得到：

$$\nabla_\nu B^{\mu\nu} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_\mu} = -J^\mu, \quad (4.9)$$

根据 Moffat 对势能的选取及利用三个标量场方程的关系（具体推导见附录），我们可以将(4.9)式写为：

$$\nabla^\nu \nabla_\nu \phi_\mu - R_\mu^\nu \phi_\nu + \mu^2 \phi_\mu - \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi^\mu} - \frac{1}{\omega} \nabla^\nu \omega B_{\mu\nu} = \frac{1}{\omega} J_\mu. \quad (4.10)$$

另外，通过加入矢量场的作用，我们给出 MOG 理论中一般待测粒子的测地线方程：

$$m \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = f^\mu, \quad (4.11)$$

其中：

$$f^\mu = \lambda \omega B_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + \lambda \nabla^\mu \omega \left(\phi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) - \lambda \nabla_\alpha \omega \left(\phi^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right). \quad (4.12)$$

利用后文将给出的 MOG 场方程球对称解和类似于广义相对论下的近似方法 ($2GM/r \ll 1, dr/ds \sim dr/dt \ll 1$) 及伯克霍夫定理^[81] 对解为静态的限制，我们可以给出：

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{G_N M}{r^2} = \sigma \frac{d\phi_0}{dr}, \quad (4.13)$$

(上式略去 r^{-3} 阶项) 及矢量场 (可只考虑 ϕ_0 分量) 满足的二阶微分方程：

$$\phi_0'' + \frac{2}{r} \phi_0' - \mu^2 \phi_0 = 0, \quad (4.14)$$

这个方程的解满足 Yukawa 形式：

$$\phi_0(r) = -\beta \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (4.15)$$

之后将(4.15)代入(4.13)式后得到：

$$a(r) = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G_N M}{r^2} + K \frac{\exp(-\mu r)}{r^2} (1 + \mu r), \quad (4.16)$$

其中 $K = \sigma\beta$ ，我们令其等于 $G_N \alpha M$ ，则(4.15)式化为：

$$a(r) = -\frac{G_N M}{r^2} \{1 + \alpha[1 - \exp(-\mu r)(1 + \mu r)]\}. \quad (4.17)$$

这里我们就能很清楚的看出，矢量引力子相当于给空间中物质的运动提供了自然的排斥力，而这种排斥力对加速度的影响又由标量场强决定。因此 MOG 标量-矢量-张量引力的物理本质不妨这样解读：

若加入考虑天体物理尺度上的量子引力效应，MOG 理论三个标量场满足简单的重整化规律^[82]：

$$G \sim G_N(1 + \alpha), \quad \omega \sim \omega_0 A, \quad \mu \sim \mu_0 B. \quad (4.18)$$

当理论中有效参数 α, A, B 能随着不同时空尺度变化时，自然能通过数学上对观测数据的拟合解释暗物质，暗能量等等相关的现象。

4.2 双黑洞合并旋进阶段的引力波辐射

首先，在讨论引力波辐射方面的物理时，Moffat 先参考相同尺度下的星系旋转曲线^[83] 及星团运动^[73] 的拟合结果，将两个标量场作了限制： $\omega = 1, \mu^{-1} \sim 24 \text{kpc}$ ，由于引力波

源于加速运动质量的四极矩，参考式(4.17)，此时，在 MOG 标量-矢量-张量引力下，引力波极化分量振幅，频率，啁啾质量中的常数 G 都将被有效引力常数 $\mathcal{G} = G_N(1 + \alpha)$ 替代，即：

$$h_+(t) = \frac{4}{r} \left(\frac{\mathcal{G} M_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\pi f_{\text{gw}} t), \quad (4.19)$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{r} \left(\frac{\mathcal{G} M_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos \iota \sin(2\pi f_{\text{gw}} t),$$

$$f(t) = \frac{5^{\frac{3}{8}}}{8\pi} \left(\frac{c^3}{\mathcal{G} M_c} \right)^{\frac{5}{8}} (t_{\text{coal}} - t)^{-\frac{3}{8}}, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{c^3}{\mathcal{G}} \left[\frac{5}{96} \pi^{-\frac{8}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \dot{f} \right]^{\frac{3}{5}}. \quad (4.21)$$

利用上述表达式拟合引力波 GW150914 和 GW151226 数据，可以得到与广义相对论下不同的双黑洞质量结果。这里我们估计其使用的拟合方法应该是直接代入 LIGO 相关数据，以使：

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_{c\text{GR}} - \mathcal{M}_{c\text{MOG}}}{\mathcal{M}_{c\text{MOG}}}. \quad (4.22)$$

按照这个思路，其实 α 完全可以任意选取，而文章中 Moffat 应该也是这么处理的，对比 LIGO 推断的质量结果可见下表：

表 4.1 MOG 理论不同 α 推断黑洞质量表^[47]

引力波	α	$m_1(M_\odot)$	$m_2(M_\odot)$	$\mathcal{M}_c(M_\odot)$
GR GW150914	0	36	29	28
GR GW151226	0	14	8	8.9
MOG GW150914	2.6	10	8	7.8
MOG GW150914	5.7	6	4	4.2
MOG GW150914	8.3	4	3	3
MOG GW151226	2.0	4.7	3	3

从图 4.1 可以看到，LIGO/Virgo 的三轮的引力波探测计划推断出来的致密星体质量大致在 $2M_\odot$ 到 $10M_\odot$ 之间及 $160M_\odot$ 以上存在稀疏或没有的情况，这被科学界称为 Mass Gap 问题。这问题的产生固然需要考虑探测频段的限制，及中子星由泡利不相容斥力导出的

钱德拉塞卡质量上限等等限制。但不得不承认，在 MOG 修改引力中，对黑洞的质量推断结果可以很自然地让 Mass Gap 疑难被消去。

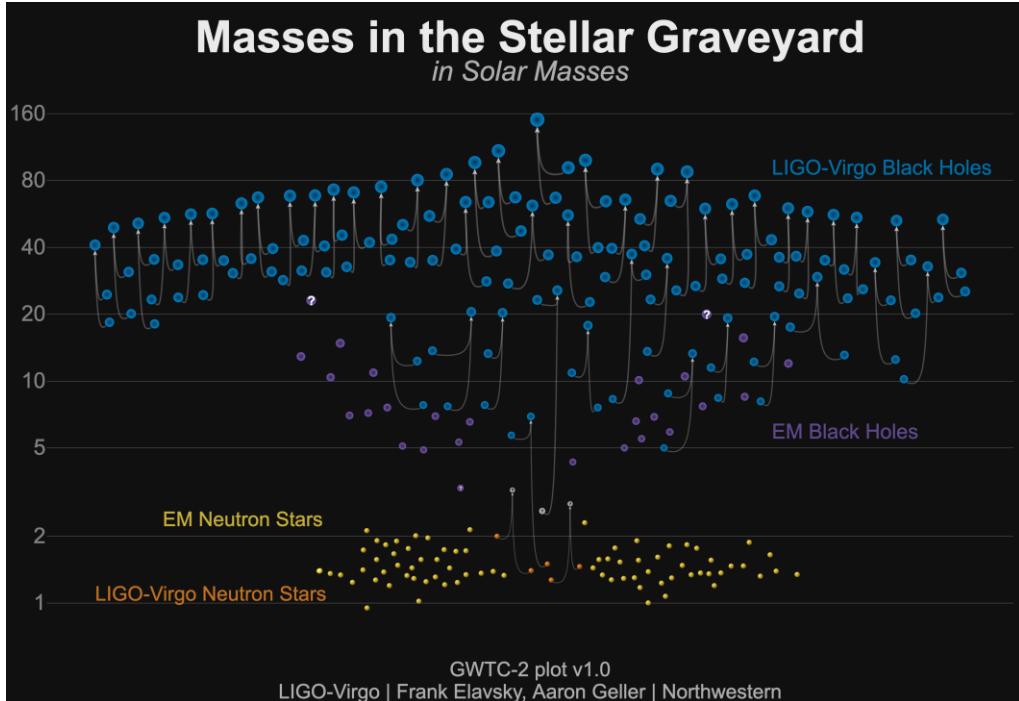


图 4.1 LIGO/Virgo 探测并推断的引力波源质量分布图^[76]

另外，我们还可以求出其轨道辐射能量，参考前文对椭圆轨道的辐射计算，MOG 标量-矢量-张量引力下其表达最大的区别仍然在于将牛顿引力常数 G_N 用这里的有效值 $\mathcal{G} = G_N(1 + \alpha)$ 替代，得到：

$$\langle P \rangle \equiv \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{32}{5} \frac{\mathcal{G}^4}{5c^5} \frac{(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (4.23)$$

4.3 双黑洞合并铃荡阶段的引力波辐射

针对双黑洞合并后的铃荡部分，我们将其运动视为稳定黑洞的微扰，来计算时空度规和曲率的变化。这里一般使用黑洞微扰论中的 Teukolsky 方程^[84]来描述：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 s \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 s \psi}{\partial \phi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial_s \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial_s \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial_s \psi}{\partial \phi} \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - i \cos \theta \right] \frac{\partial_s \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s)_s \psi = 4\pi \Sigma T. \end{aligned} \quad (4.24)$$

在真空环境下 ($T = 0$)，解的形式为：

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r), \quad (4.25)$$

其中 $S(\theta) = {}_s S_{lm}$ ，后者称为自旋加权球谐函数 (spin-weighted spheroidal function)，满足方程：

$$[(1 - x^2) {}_s S_{lm,x}]_x + {}_s S_{lm} \left[(cx)^2 - 2csx + s + {}_s A_{lm} - \frac{(m + sx)^2}{1 - x^2} \right] = 0, \quad (4.26)$$

其中 $x \equiv \cos \theta$ ， θ 设为 Boyer-Lindquist 坐标下角度。实际情况中，我们一般取 $s = -2$ 对应的球谐函数 (s 的正负分别为往外辐射的引力波和向内吸收的引力波 (前一个的反演))。

我们还需要边界条件：

- 在无穷远处，我们认为不应该有向里传播的波，而应该只有向外辐射的波；
- 在 horizon 边界，不应该有信息从 horizon 里跑出来，所以只有向里走的波。

同时，我们也可以看出 QNM 的物理意义：假想一般琴弦振动的弹性波，求简正模 NM(Normal Mode) 利用的是两端固定的边界条件，得到都是实数并且是某个基频的整数倍的频率解。回到 Quasi-Normal Mode，我们推演引力波的过程和推演琴弦的简正模的过程都是类似的，但是边界条件不同：我们不是把两侧的时空捏住，而是任由波带着能量向外逃走。这样我们得到的是频率为复数的准·简正模(Quasi-Normal Mode)，频率有虚部意味着 Quasi-Normal Mode 是随时间衰减的，而不是像简正模(Normal Mode)那样稳定存在的。

利用这些条件，我们就可以求解 ψ ，然而，针对每对不同的 l 和 m 值，都可以有无数个解，这些不同的解 ($n=0, 1, 2, \dots$) 就对应了 Quasi-Normal Mode 的基模 (fundamental mode) 和高阶倍数模 (overtones)。 n 越大频率越高，也越快被耗散掉。实验探测过程中，我们得到的数据是引力波频谱 spectrom，也就是 Black hole spectroscopy。不同的黑洞有不同的 Quasi-Normal Mode 谱，反过来说，通过 QNM 谱，我们也可以得到黑洞的信息^[85] (质量，角动量)。

同时，上述的 ψ 与我们所测的引力波振幅是可以联系在一起的：在 $r \gg 0$ 处 (在天文学上一般都满足)：

$$\psi(r \gg 0) \rightarrow \frac{1}{2}(\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times), \quad (4.27)$$

在相关科研工作中，一般写为：

$$h(t) \simeq \operatorname{Re} \left[\sum_{l,m,n} A_{lmn} e^{-i(\omega_{nlm} t + \phi_{nlm})} \right]. \quad (4.28)$$

其中 ω_{nlm} 的实数部分表证引力波频率，复数部分表证耗散。目前这一块的研究重点问题是使用 overtone 模型时如何平衡包含的 tones 数量和计算速度，因为随着 tone 数量加一，需要拟合的系数 (A_{lmn} 和 ω_{nlm}) 增加 2 个。

目前，双黑洞合并 ringdown 部分还未得到比较好的数据，所以一般采取的标准是 SXS (Simulating eXtreme Spacetimes) 相对论数值模拟提供的引力波数据。接下来我们也将拟合对比广义相对论和标量-矢量-张量引力理论下双黑洞合并铃荡波形的区别和拟合差别，并分析其不同的本质原因。

为了对 MOG 标量-矢量-张量引力理论给出严格的 Schwarzschild-MOG 解，我们需要忽略掉理论中的矢量引力子。因为矢量引力子的质量非常小： $m_\phi \sim 10^{-28}\text{eV}$ (从星系和星团的数据拟合中确定)，我们认为这个忽略是合理的。在这样情况下，给出度规：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N(1+\alpha)M}{r} + \frac{\alpha(1+\alpha)G_N^2 M^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N(1+\alpha)M}{r} + \frac{\alpha(1+\alpha)G_N^2 M^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.29)$$

这里的线元度规类似于静态球对称的 Reissner - Nordstrom 解形式，只不过这里的荷不再是电荷，而是标量引力子。当 $\alpha = 0$ 时，上述度规回归广义相对论下 Schwarzschild 形式。

参考 Moffat 的工作^[86] 我们还可以推导出 Kerr-MOG 黑洞解，其线元为：

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - adt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2. \quad (4.30)$$

其中：

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 + \alpha(1+\alpha)G_N^2 M^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (4.31)$$

其视界半径为 Δ 的根：

$$r_\pm = G_N(1+\alpha)M \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{G_N^2(1+\alpha)^2 M^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]. \quad (4.32)$$

其中这里 M 严格定义参考 ADM 质量 (Arnowitt - Deser - Misner mass) , $a = S/GM^2$ 表示自旋参量, S 为自旋角动量。当 $a = 0$ 时回归前面的 Schwarzschild-MOG 度规。利用这里的 Kerr-MOG 黑洞解, 我们可以求出 MOG 标量-矢量-张量引力理论下的双黑洞合并铃声阶段的 Quasi-Normal Mode。或者利用 Quasi-Normal Mode, 我们也可以检验 MOG 理论或者限制其参数。具体见下文讨论。

5 黑洞似正规模与标量-矢量-张量引力

我们考虑 Kerr 黑洞度规，此时，双黑洞合并 Ringdown 阶段的 Quasi-Normal-Mode 复频率（包含频率和耗散时间）完全由其末态黑洞的质量和自旋决定，又考虑到从前面 Inspiral 阶段标量-矢量-张量引力理论推断出的黑洞质量与广义相对论不同，我们可以通过对比观测到的 Quasi-Normal-Mode 来比较这两个理论。

由于目前还没有较好的 ringdown 部分的引力波观测波形数据，因此我们使用可以和 LIGO 探测下双黑洞合并三个阶段波形都符合较好的 SXS 相对论数值模拟下的 ringdown 部分波形作为拟合标准。

5.1 似正规模对比

5.1.1 MOG 下的似正规模

目前计算黑洞微扰和 Quasi-Normal-Mode 谱的方法有了很大改进，最常用的包括半解析形式求解^[87]，Leaver 使用的 Continued Fraction Method (CFM)^[88]，以及 WKB 近似等等。在最近几年，还有一种渐进迭代方法 asymptotic iteration method (AIM)^[89]显示出较好的效率。针对 MOG 标量-矢量-张量引力，2018 年有人已经根据 AIM 计算出其 Quasi-Normal-Mode 频率^[90]，这里我们直接取用其结果（表见附录），在不同参数 α 下对比广义相对论和 MOG。

在 MOG 标量-矢量-张量引力下， $\alpha = 0$ 对应的情况为回归到广义相对论。对于 MOG 下 $\alpha = 1, 4, 9$ 的 Quasi-Normal-Mode，我们分别对广义相对论末态黑洞质量作修正，使 $M = 2M_0, 5M_0, 10M_0$ ，这样就使得 MOG 下 α 始终等于 0，我们对比的就是广义相对论和 MOG（已回归广义相对论）对不同质量黑洞的 Quasi-Normal-Mode 预测结果。下面我们按照频率和耗散时间分别对比。

在此声明：下面画图所用到的程序主要来源于 Python 的 qnm package^[91]，并且修改了马克思普朗克引力物理中心爱因斯坦所的 Xisco Jimenez Forteza 和 Pierre Mourier 目前正在改进编写的 Overtone 部分模型 Mathematica 代码以使用到 MOG 理论中。

5.1.2 频率

下面我们针对广义相对论和 MOG，在不同的 l 和 n 下先计算其 Quasi-Normal-Mode 中复频率的实部，并且观察 α 增大对其差别的影响。

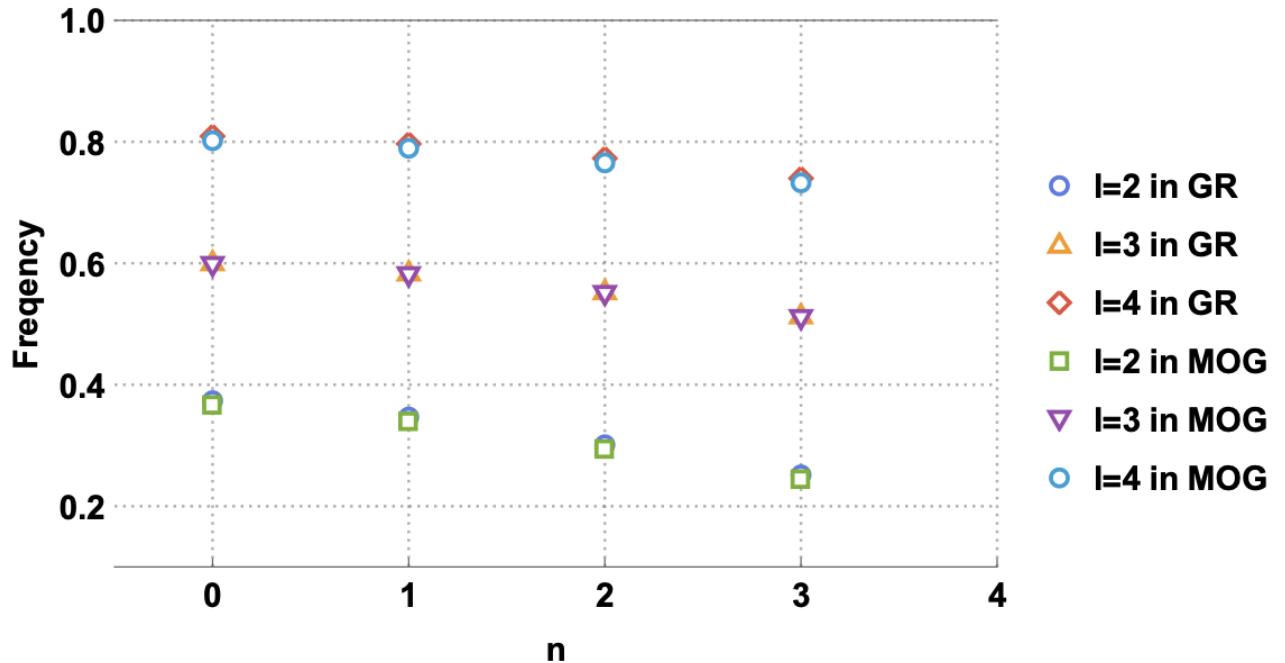


图 5.1 $\alpha = 0$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 频率随 n 变化趋势对比图

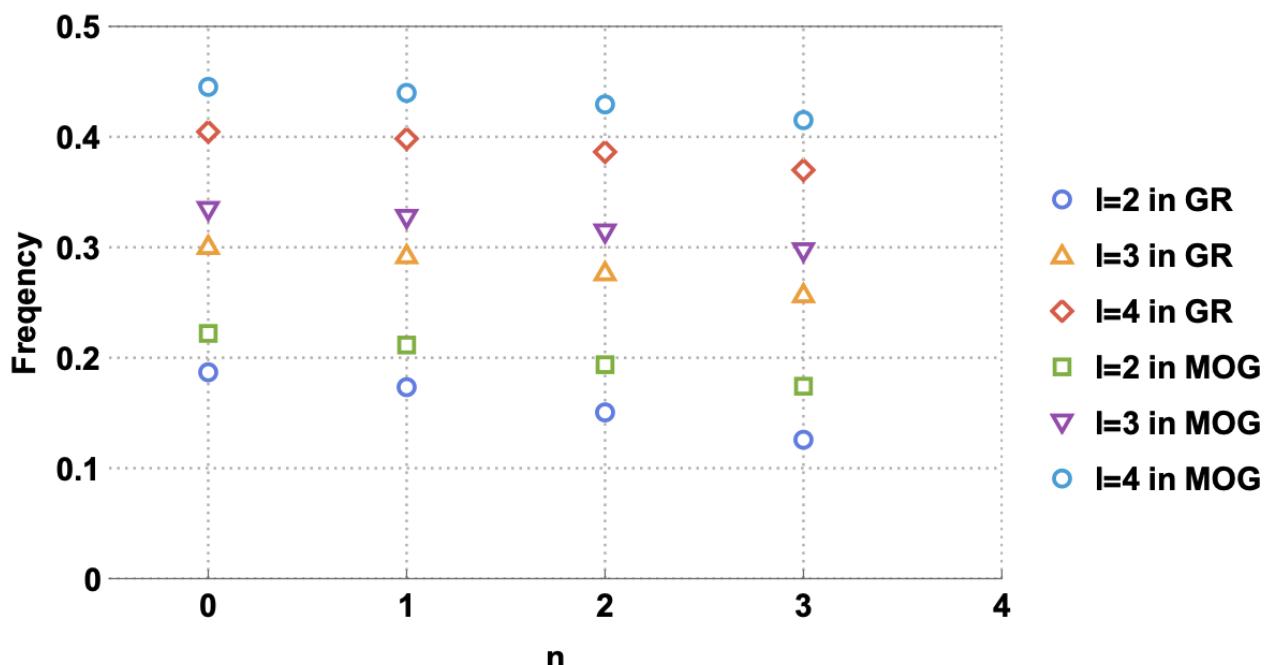
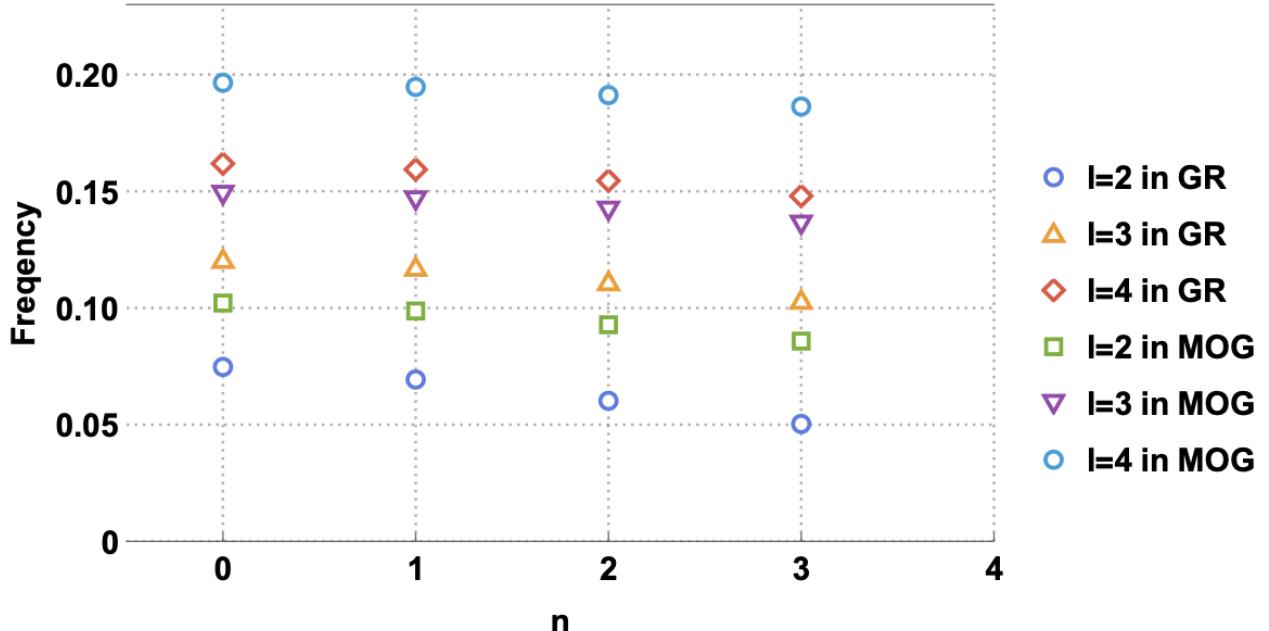
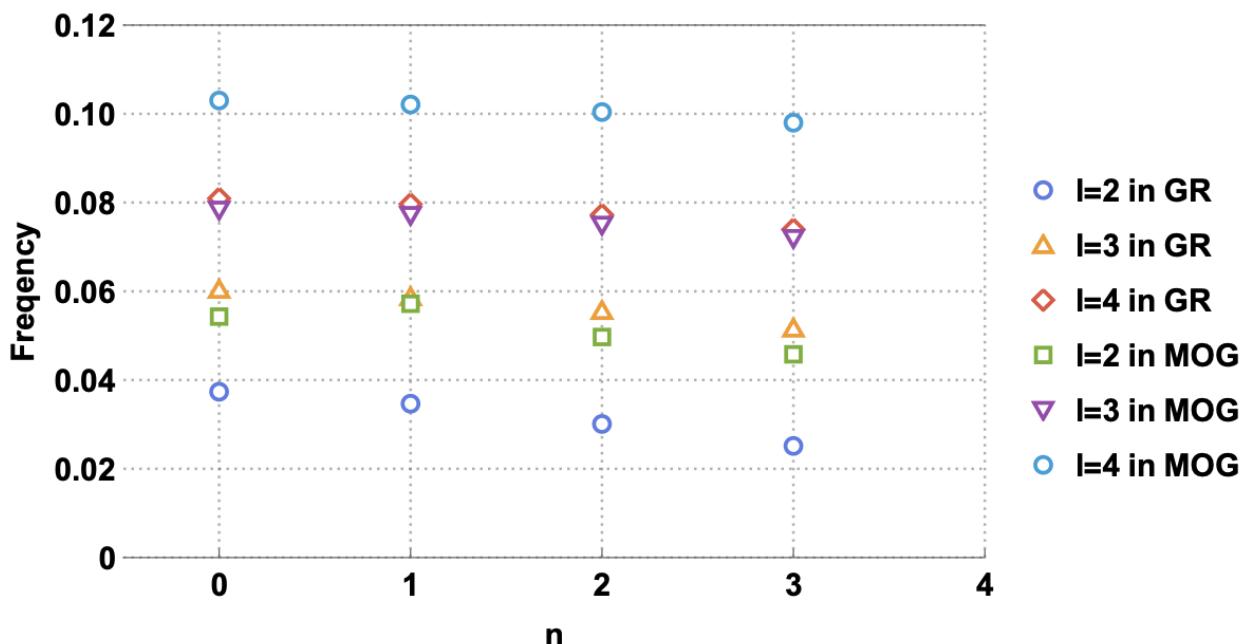


图 5.2 $\alpha = 1$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 频率随 n 变化趋势对比图


 图 5.3 $\alpha = 4$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 频率随 n 变化趋势对比图

 图 5.4 $\alpha = 9$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 频率随 n 变化趋势对比图

观察上述几幅图片，我们不难看出，随着 α 值逐渐增大，同一 l , m , n 下对应的 Quasi-Normal-Mode 与广义相对论之间相对偏移也越来越大。频率部分 MOG 标量-矢量-张量引力预测值要高于相对的广义相对论中预测值。

5.1.3 耗散时间

下面我们针对广义相对论和 MOG，在不同的 l 和 n 下先计算其 Quasi-Normal-Mode 中复频率的实部，并且观察 α 增大对其差别的影响。

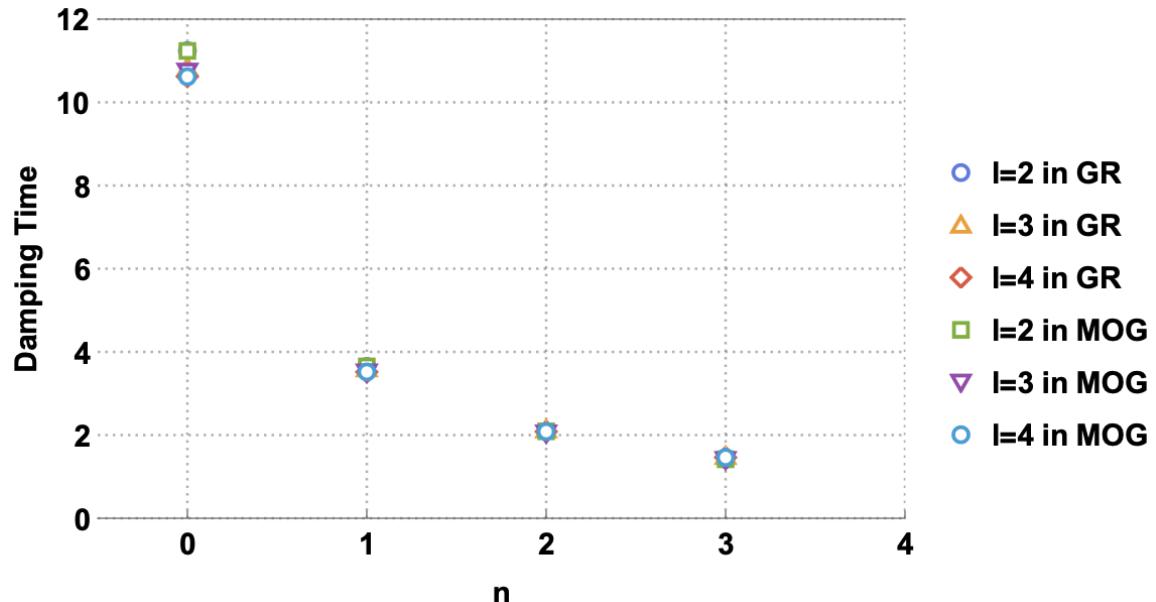


图 5.5 $\alpha = 0$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 耗散时间随 n 变化趋势对比图

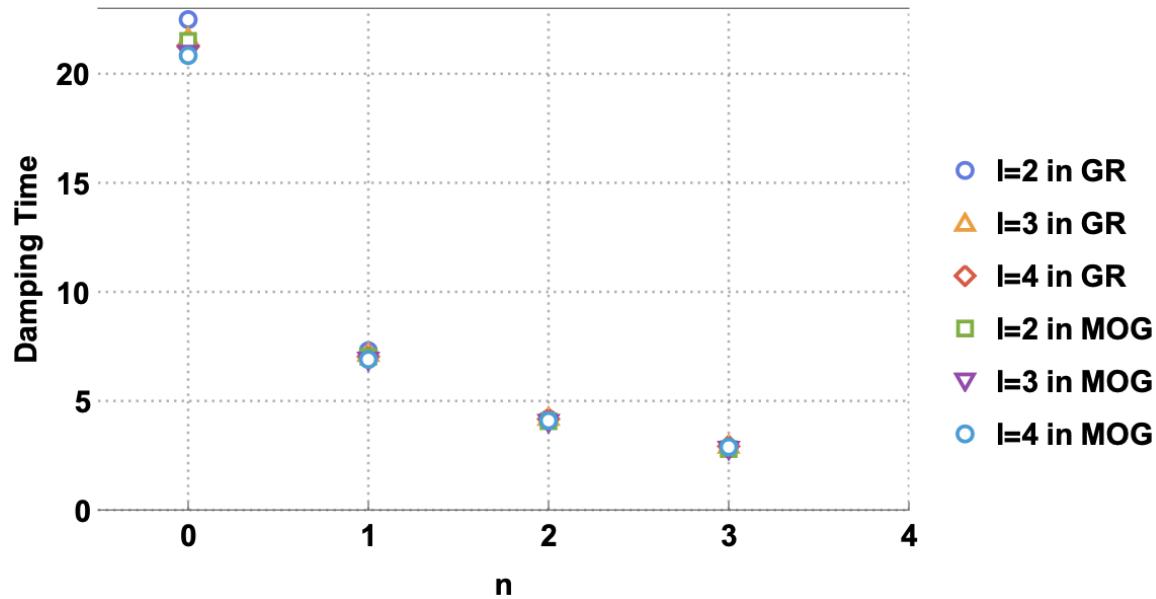
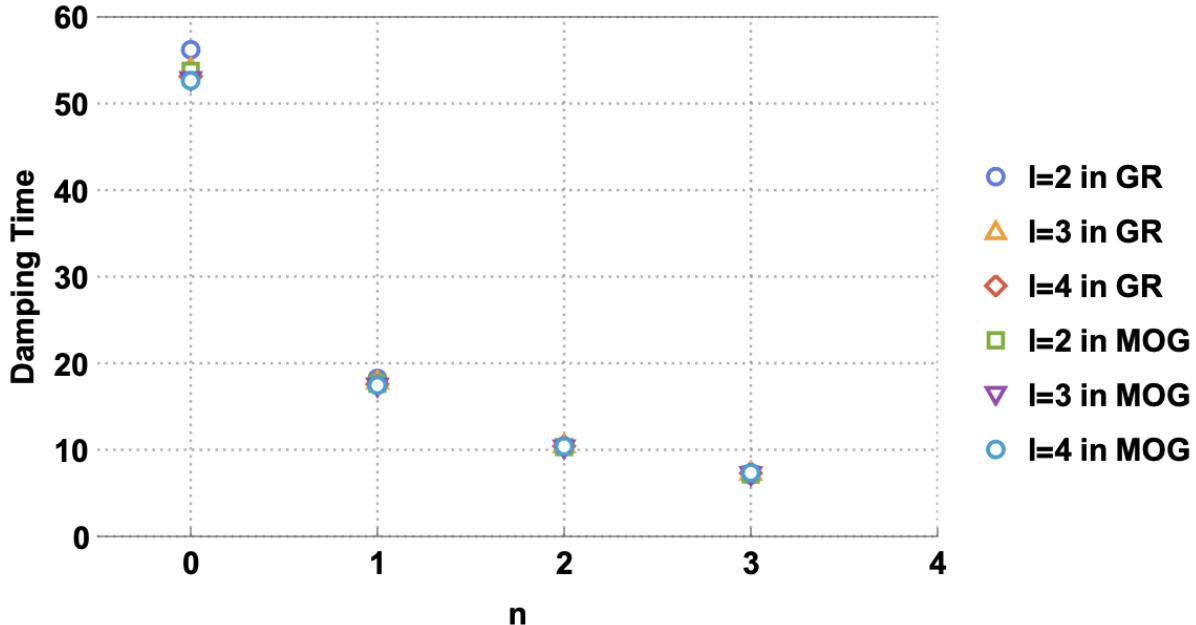
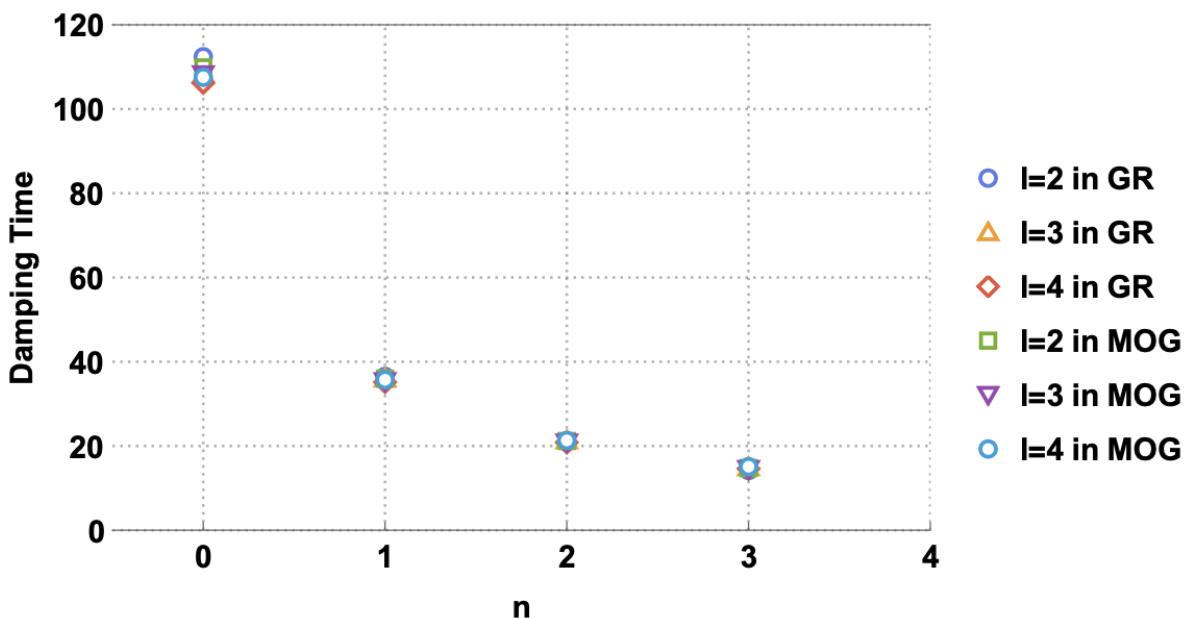


图 5.6 $\alpha = 1$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 耗散时间随 n 变化趋势对比图


 图 5.7 $\alpha = 4$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 耗散时间随 n 变化趋势对比图

 图 5.8 $\alpha = 9$ 时广义相对论和 MOG 计算 Quasi-Normal-Mode 耗散时间随 n 变化趋势对比图

观察上述几幅图片，我们不难看出，随着 α 值逐渐增大，同一 l, m, n 下对应的 Quasi-Normal-Mode 虚部（耗散时间）部分 MOG 标量-矢量-张量引力预测值与广义相对论中预测值相差很小。

5.2 数值相对论数据拟合

5.2.1 拟合建立

首先设定拟合条件:

- (1) 以 GR 代表广义相对论, MOG 代表 MOG 标量-矢量-张量引力, nrdata 代表相对论数值模拟 (numerical relativity) 数据。
- (2) 接下来讨论中, 我们都设定 $m = 0, s = -2$, 末态黑洞自旋取 0.0001。
- (3) ringdown 阶段主要有两种引力波振幅表示 shear modes (σ^l) 和 multipoles (I^l), 这里我们选取 shear modes 为 σ^l 振幅表示。
- (4) 将时间和质量合并以重标度时间轴, $t = t_0/M$ 。
- (5) 在算法和对应的 nrdata 中改变时间轴跨度, 当 α 变化时, 时间轴变为 $t' \rightarrow t(1 + \alpha)$ 。
- (6) 频率和耗散时间单位因后续微扰计算方便需要, 也作了重标度, 因此只有相对大小有意义。
- (7) 拟合开始时间设定为 $t_0 = 2.3M$, 结束时间 $t_f = 38.5M$, 该时间随 α 变化。

5.2.2 拟合算法

下面简要介绍拟合算法, 我们用 Mathematica 中 Levenberg–Marquardt 算法^[92] 来作非线性拟合使下式中 χ^2 最小:

$$\chi^2 = \sum_k |h_x[\vec{\lambda}](t_k) - h_{\text{nr}}(t_k)|^2, \quad (5.1)$$

同时, 我们按照相关的几篇文章^{[93][94][95]} 中 Mismatch(\mathcal{M}) 的定义:

$$\mathcal{M} = 1 - \frac{\langle h_{\text{NR}} | h_x \rangle}{\sqrt{\langle h_{\text{NR}} | h_{\text{NR}} \rangle \langle h_x | h_x \rangle}}. \quad (5.2)$$

来具体衡量模型拟合的整体准确程度。其中, 内积部分表示为:

$$\langle f | g \rangle = \int_{t_0}^{t_f} f(t)g(t)dt, \quad (5.3)$$

在模型数据完全拟合成功时, $\mathcal{M} = 1$ 。

拟合的残差平方和表示为:

$$\text{RSS} = \sum_k (h_{\text{NR}}(t_k) - h_x(t_k))^2. \quad (5.4)$$

另外, 下面用到的拟合结果评价指标还包括 Akaike information criterion (AIC)^[96], 根据赤池信息准则, 我们可以更好地比较不同数量参数模型拟合的结果好坏。

5.2.3 拟合示例

这里我们先拿广义相对论中的表达式来举例：

$$e^{-0.0889623t}x_0 \cos[0.373672t + \phi_0]. \quad (5.5)$$

这是一个典型的 $n=0$ 的模型，其中 x_0 表示振幅， ϕ_0 表示相位。

接下来，我们同时画出 $\alpha = 0$ 时 MOG 标量-矢量-张量理论下和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对数值相对论数据的拟合结果。

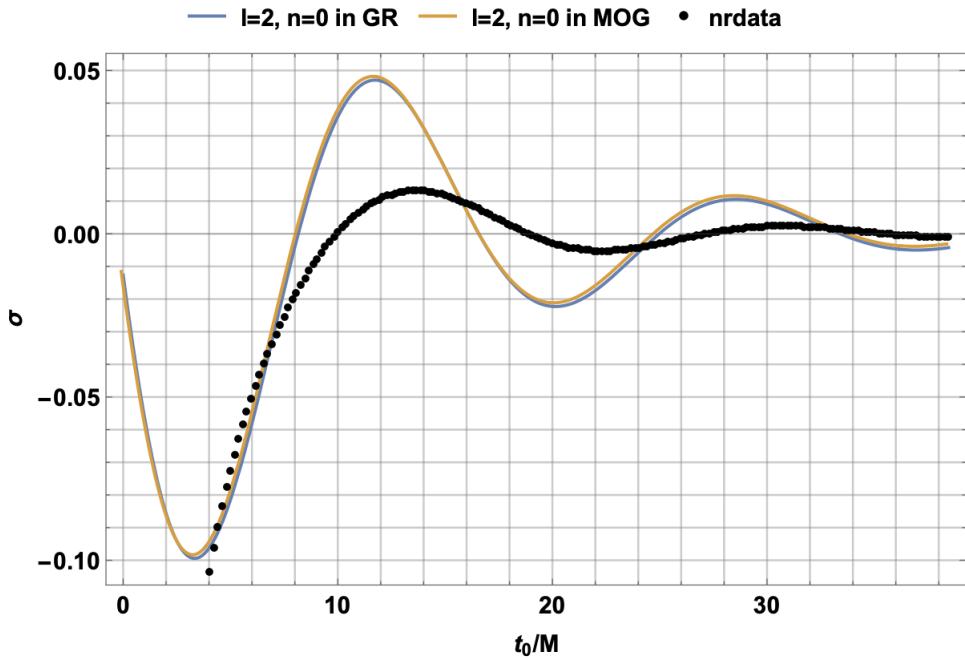


图 5.9 $\alpha = 0$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果

在表示指数衰减的函数时，从上图使用的普通 Plot 函数较难看出后期振幅较小时拟合的情况，因此后面我们统一使用 LogPlot 函数画图，即在纵坐标上等间隔表示为等比数列，更好地观察全阶段的差别。

接下来，我们将根据不同 α 画出其包含 n 个 overtones 时的拟合情况，并于对应的广义相对论拟合结果对比。

5.2.4 $\alpha = 0$

首先，我们针对 MOG 中 $\alpha = 0$ ，即回归广义相对论情况的 Quasi-Normal-Mode 的 shear 模式作拟合：

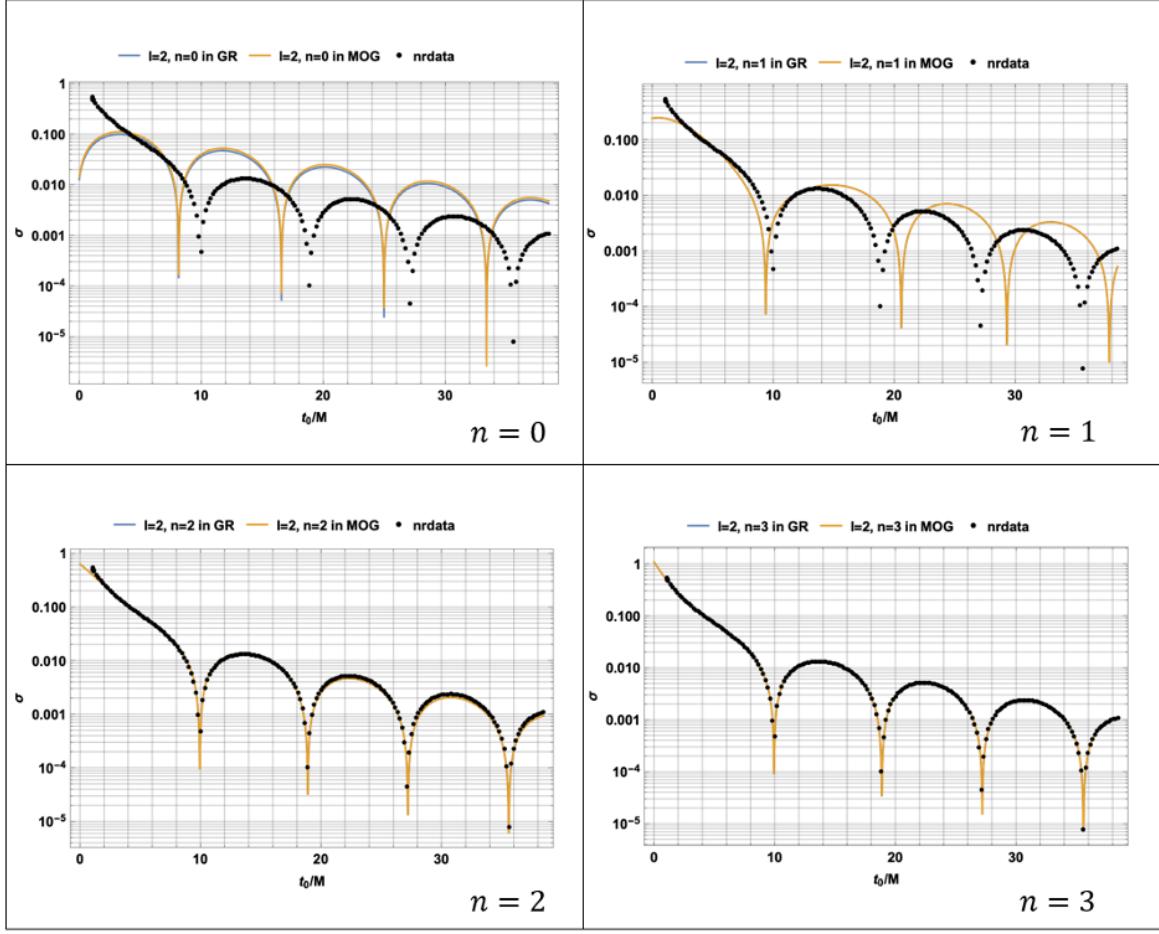


图 5.10 $\alpha = 0$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果，左上，右上，左下，右下图分别代表包含 overtones $n = 0, 1, 2, 3$ 的情况

参考 Xisco 和 Pierre 论文的结论^[97]，拟合的评价中关于具体参数的拟合结果及其置信区间等等主要取决于其迭代次数，与我们研究的重点关系不大，因此给出的主要评价整体拟合效果的指标。（下文同）。

表 5.1 $\alpha = 0, n = 2$ 时广义相对论对比 MOG 标量-矢量-张量引力对 nrdata 拟合结果评价表

理论	Rsquared	AIC	AICc	BIC
GR	0.999853	-2322.20	-2321.58	-2299.51
MOG	0.999852	-2321.95	-2321.33	-2299.25

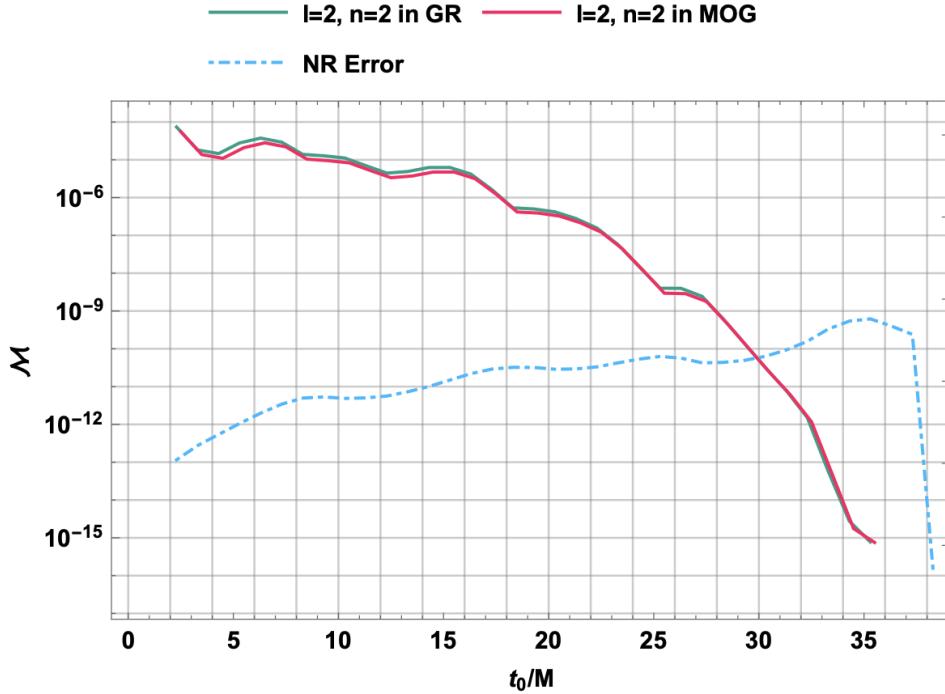


图 5.11 $\alpha = 0$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果 Mismatch 值对比图

从以上两图中不难看出，MOG 和广义相对论下对 Quasi-Normal-Mode 拟合曲线基本重合，这说明：当 $\alpha = 0$ 时，MOG 理论基本能回归广义相对论。另外，两理论都会随着包含的 overtones 数量增多而拟合数据更好。

5.2.5 $\alpha = 1$

接下来，我们针对 MOG 中 $\alpha = 1$ 情况的 Quasi-Normal-Mode 的 shear 模式作拟合：

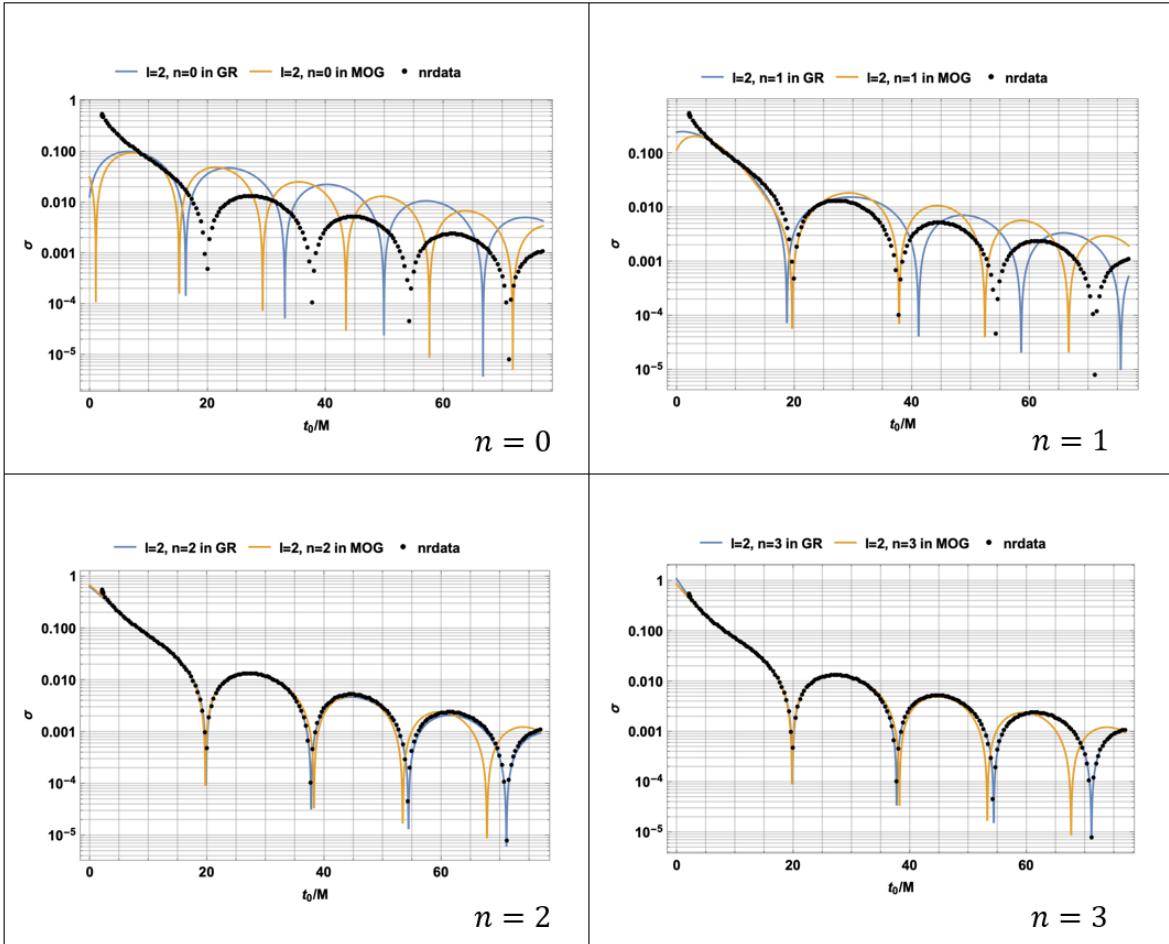


图 5.12 $\alpha = 1$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果，左上，右上，左下，右下图分别代表包含 overtones $n = 0, 1, 2, 3$ 的情况

表 5.2 $\alpha = 1, n = 2$ 时广义相对论对比 MOG 标量-矢量-张量引力对 nrdata 拟合结果评价表

理论	Rsquared	AIC	AICc	BIC
GR	0.999853	-2318.12	-2317.12	-2288.95
MOG	0.999844	-2306.76	-2305.75	-2277.95

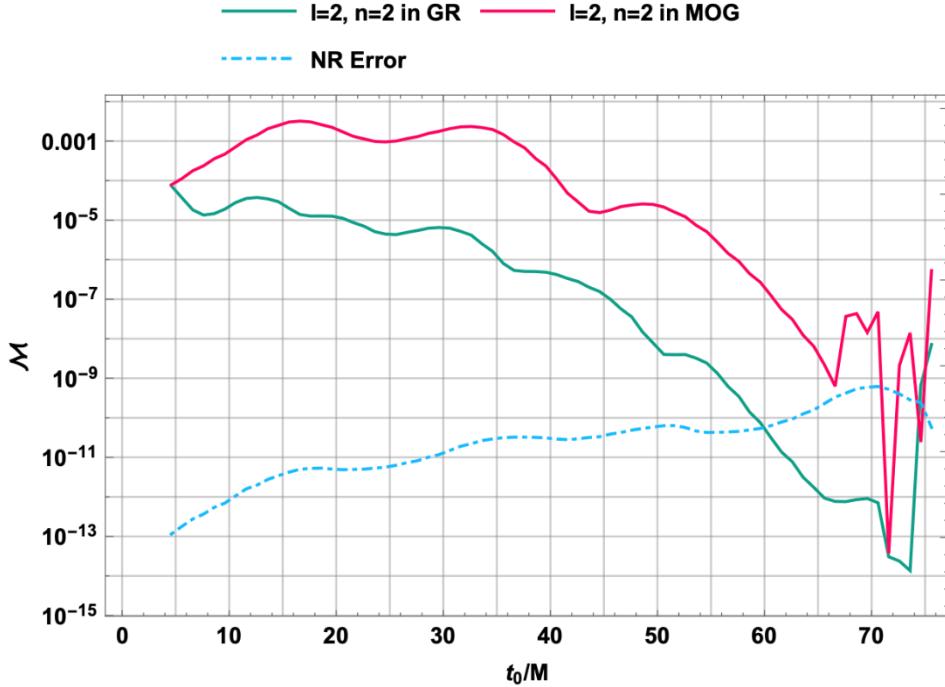


图 5.13 $\alpha = 1$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果 Mismatch 值对比图

从以上两图中不难看出，MOG 和广义相对论下对 Quasi-Normal-Mode 拟合曲线开始有了一定偏离，对比 Mismatch 值，也能看出 MOG 理论偏离 nrdata 结果更多。

5.2.6 $\alpha = 4$

接下来，我们针对 MOG 中 $\alpha = 4$ 情况的 Quasi-Normal-Mode 的 shear 模式作拟合：

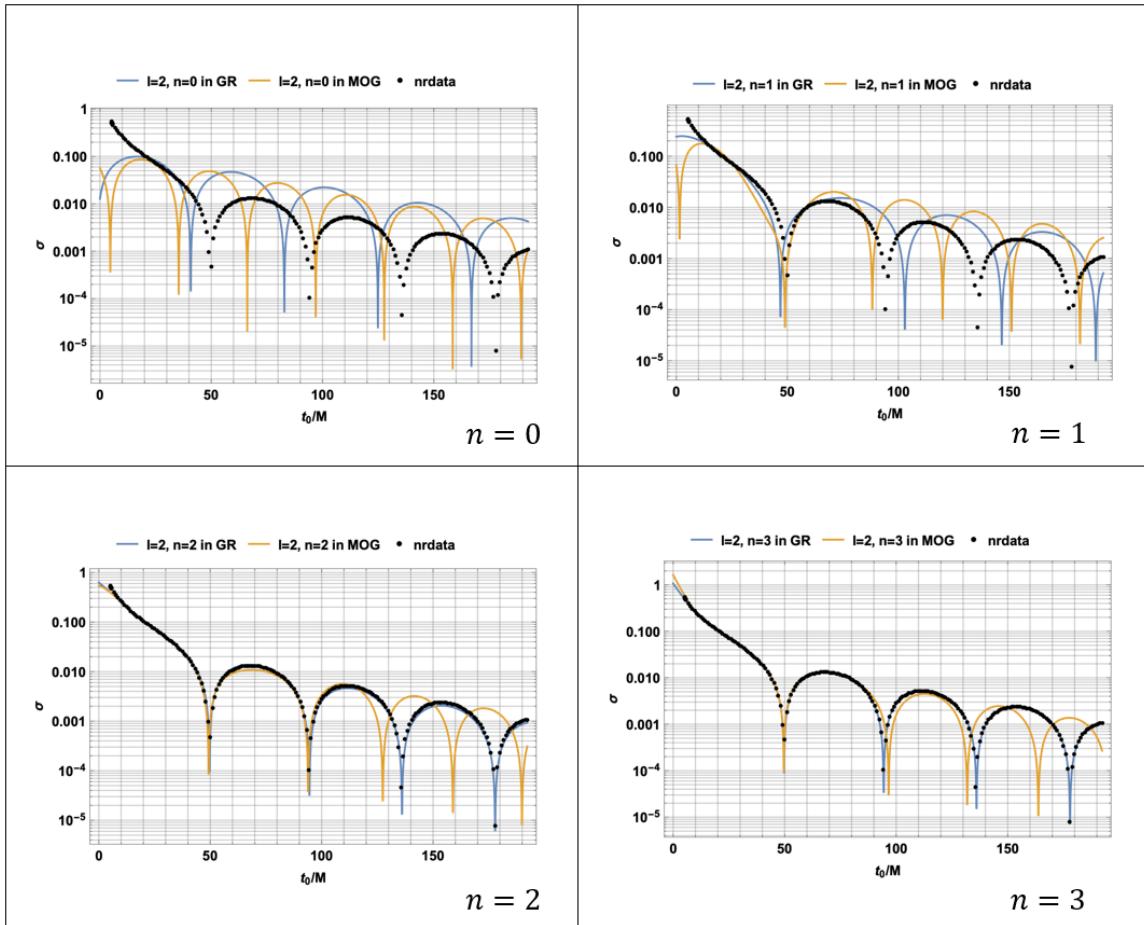


图 5.14 $\alpha = 4$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果，左上，右上，左下，右下图分别代表包含 overtones $n = 0, 1, 2, 3$ 的情况

表 5.3 $\alpha = 4, n = 2$ 时广义相对论对比 MOG 标量-矢量-张量引力对 nrdata 拟合结果评价表

理论	Rsquared	AIC	AICc	BIC
GR	0.999853	-2318.12	-2317.12	-2288.95
MOG	0.998733	-1911.39	-1910.39	-1882.95

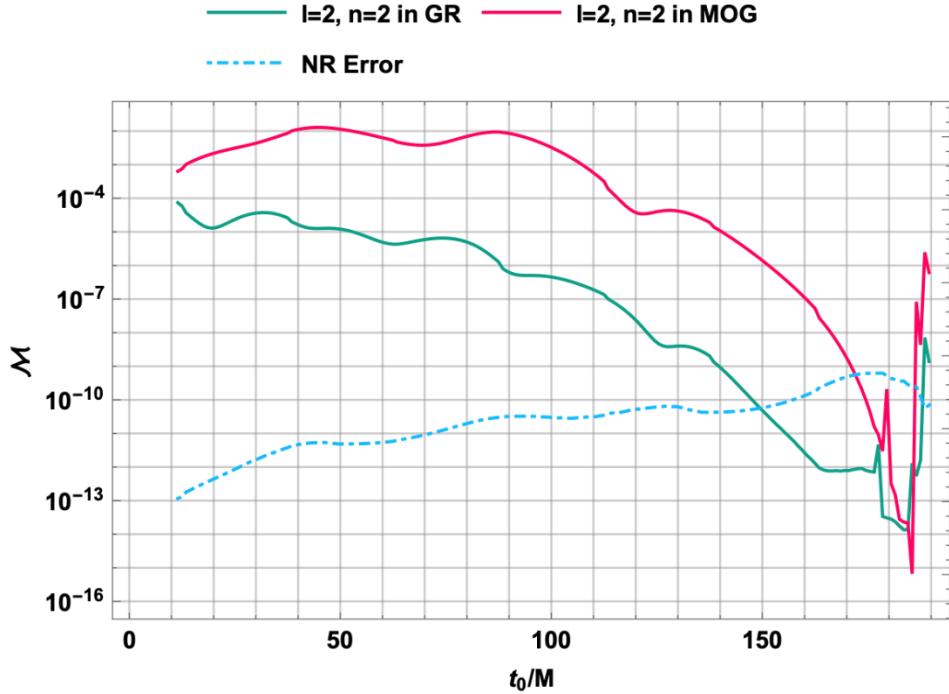


图 5.15 $\alpha = 4$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果 Mismatch 值对比图

从以上两图中不难看出，MOG 和广义相对论下对 Quasi-Normal-Mode 拟合曲线偏移程度进一步增大。

5.2.7 $\alpha = 9$

接下来，我们针对 MOG 中 $\alpha = 9$ 情况的 Quasi-Normal-Mode 的 shear 模式作拟合：

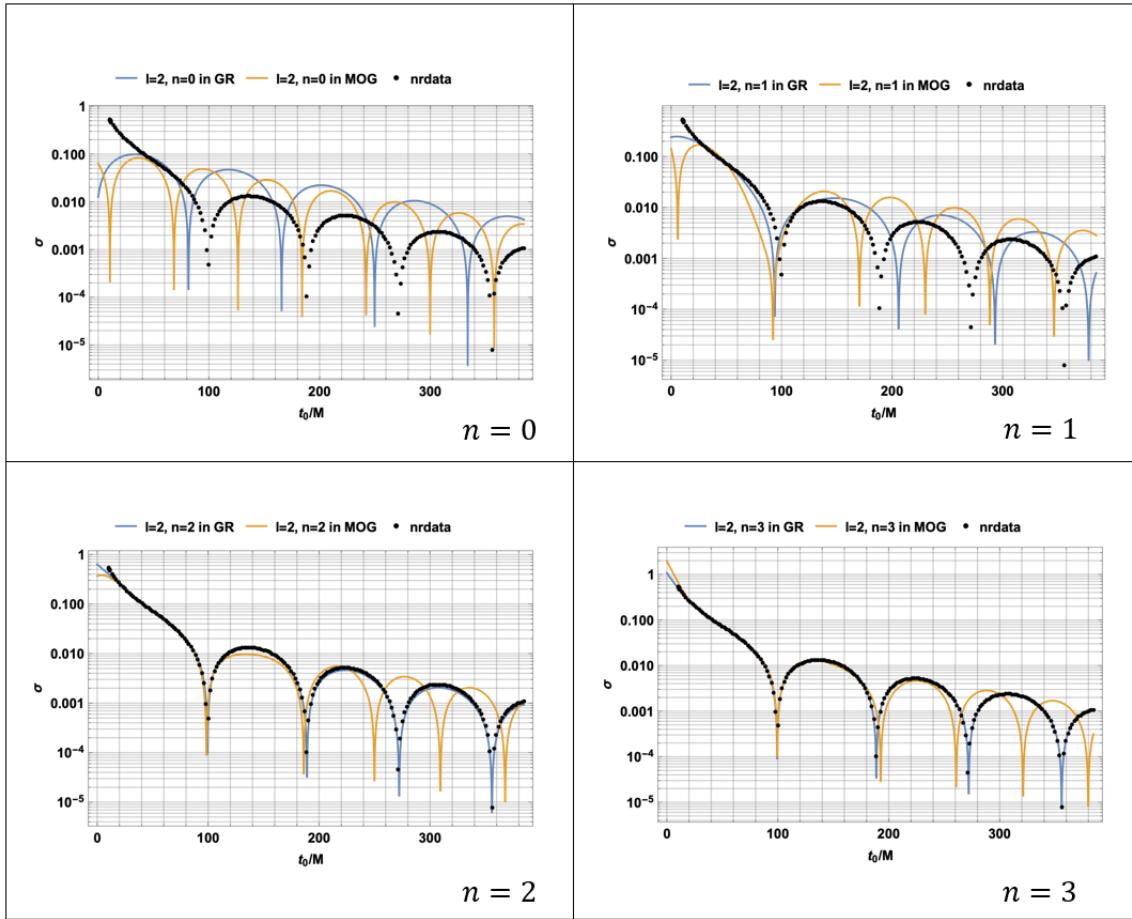


图 5.16 $\alpha = 9$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果，左上，右上，左下，右下图分别代表包含 overtones $n = 0, 1, 2, 3$ 的情况

表 5.4 $\alpha = 9, n = 2$ 时广义相对论对比 MOG 标量-矢量-张量引力对 nrdata 拟合结果评价表

理论	Rsquared	AIC	AICc	BIC
GR	0.999853	-2318.12	-2317.12	-2288.95
MOG	0.997613	-1791.74	-1790.74	-1762.57

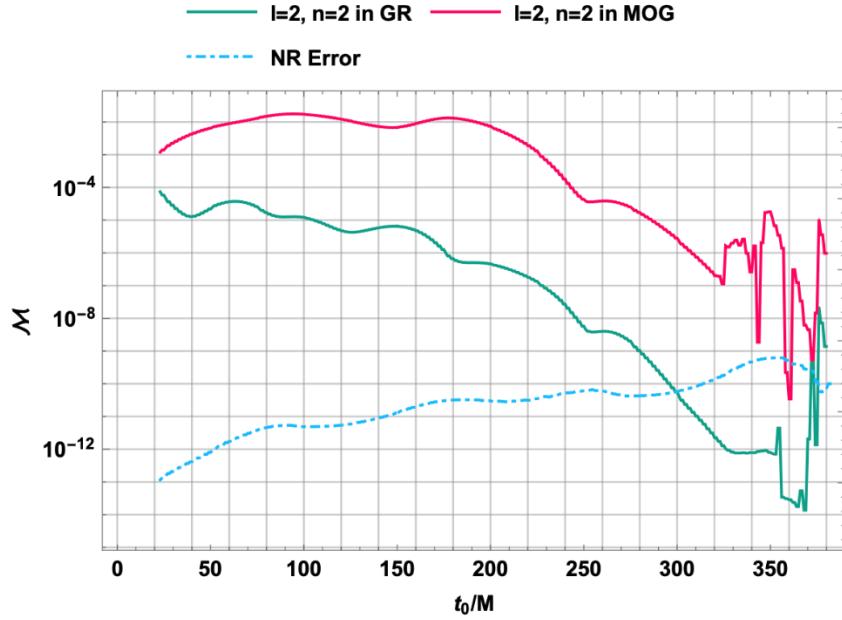


图 5.17 $\alpha = 9$ 下 MOG 和广义相对论下的 Quasi-Normal-Mode 模型对 nrdata 拟合结果 Mismatch 值对比图

在 $\alpha = 9$ 时，我们实际使用的是 10 倍末态黑洞质量的广义相对论 Quasi-Normal-Mode，其拟合情况十分不理想，接下来我们给出更明显的对比：

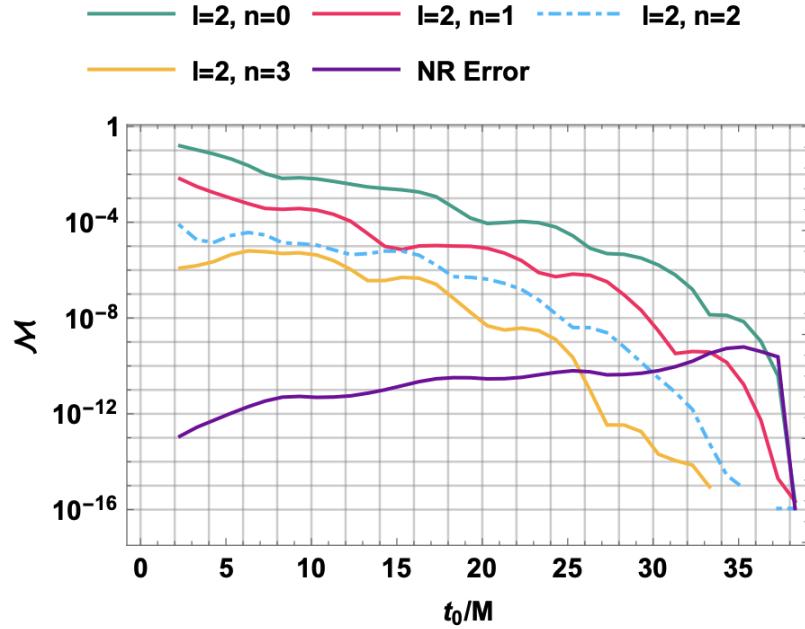
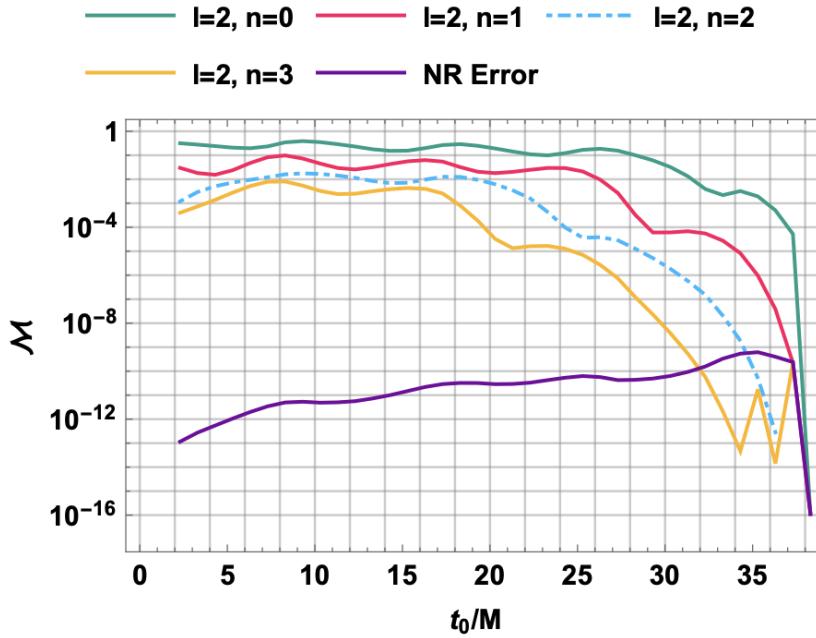


图 5.18 广义相对论下 nrdata 拟合结果 Mismatch 值随 n 变化图

图 5.19 MOG 下 $\alpha = 9$ 时 nrdata 拟合结果 Mismatch 值随 n 变化图

在以上两图中我们可以明显看出，MOG 理论相比广义相对论而言，对 nrdata 的拟合非常失败。

5.2.8 拟合结果讨论

上述图片对比了不同 α 下 MOG 理论和广义相对论 Quasi-Normal-Mode 随包含的 overtones 数量增多，逐渐更好地拟合了 nrdata。针对两者之间随参数 α 增加而逐渐偏移的事实，我们认为有三种可能原因：

- (1) 因为我们已经通过重新标度质量 M 来匹配不同 α ，使得 MOG 理论始终应该按照其自身的预测回归同等质量下的广义相对论结果。那么两者的偏移可以被认为是 MOG 理论的误差在随 α 逐渐增大，通过这一点，我们可以探究并限制其 α 的取值范围。
- (2) 我们还是需要注意，在 MOG 下黑洞无毛定理不一定成立，如果其末态黑洞不完全由其质量和自旋（及电荷）决定，还包含参数 α 的话，那么其演化过程，微扰过程下的物理机制将完全不同，我们或许就不能认为其偏移了广义相对论，而是两者预测的 Quasi-Normal-Mode 就是不同的结果，即——相对论数值模拟在 MOG 中将是错误的数据。但是这一点成立与否将能被后续引力波观测中 ringdown 部分波形的探测给最终验证。

(3) 还有一种可能: MOG 理论下 Moffat 本人推导给出的 Kerr-MOG 度规^[47]并不正确, 或是 Manfredi 这篇文章中计算 Quasi-Normal-Mode 的方式有一定错误, 使得我们在同比例替换 MOG 理论中 α 和广义相对论中黑洞质量 M 时, 导出的 Quasi-Normal-Mode 无法回归广义相对论。

由于能力和时间有限, 我们先不验证后两种可能性的正确与否。在后文中, 我们按照最基本的思路, 利用 MOG 和广义相对论偏移限制其有效常数 α 。

5.3 似正规模限制 MOG 中有效参数 α

根据上述的不同 α 下 MOG 理论的拟合结果, 我们选取 AIC 参数来分析推断, 以限制 α 在双黑洞合并情况下的取值范围。下面我们首先介绍 AIC 参数的评判标准。

5.3.1 AIC 简介

赤池信息准则估计参量 AIC 是由日本的统计学家赤池弘次基于信息熵理论发明的一种衡量拟合模型的统计优良性的参数。其最大特点在于可以比较使用不同数量参数模型的拟合情况, 避免多参数的过拟合性。其定义式为:

$$AIC = 2k + n \ln\left(\frac{RSS}{n}\right).$$

其中 k 表示参数的数量, n 表示拟合的数据数量, RSS 为残差平方和。

参考 Xisco 和 Pierre 两位对 overtones 模型^[97]使用的拟合 AIC 比较建议:

- (1) 拟合模型的 AIC 越小说明拟合效果越好。
- (2) 当两个模型拟合 AIC 相差 10 以上, 就足以比较区分其优劣。
- (3) 当两个模型拟合 AIC 相差 1 以内, 说明两者拟合准确程度可视为相同。

依据上述 3 条标准, 我们开始比较使用不同 α 的模型下其 AIC 大小, 并尝试给出参数限制范围: 由于 MOG 理论中参数 α 取值为 0 时回归广义相对论, 因此我们认为其下限为 0, 而上限取值范围为:

$$\alpha_{max} \in [\alpha_{maxlower}, \alpha_{maxupper}]. \quad (5.6)$$

其中 $\alpha_{maxlower}, \alpha_{maxupper}$ 满足 $AIC(\alpha_{maxlower})=1$, $AIC(\alpha_{maxupper})=10$ 。

5.3.2 参数限制

虽然已经采用了 AIC 参数作比较, 但为了尽量避免过拟合, 我们还是只选包含 overtones 数量 $n \in [0, 2]$ 的拟合结果对比广义相对论和 MOG 拟合结果的 AIC 差值, 并观察其随参数 α 的变化规律, 如下表:

表 5.5 $n \in [0,2]$ 下, MOG 对比 GR 在拟合 nrdata 时拟合结果 AIC 差值表

ΔAIC	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
n				
0	0.61	56.59	100.75	117.10
1	0.10	42.15	204.28	284.47
2	0.25	11.36	406.73	526.38

根据上文 AIC 的定义式, 我们使用 OriginPro 软件的 Logarithm 函数拟合, 得到的拟合曲线如下图:

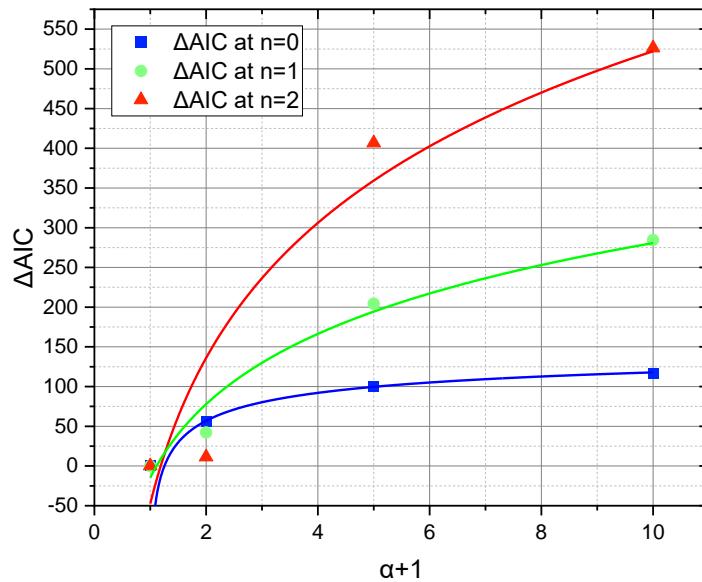
图 5.20 广义相对论和 MOG 理论 ΔAIC 差值随 α 变化的拟合曲线

表 5.6 拟合曲线的拟合结果属性表

拟合对象	R^2
$n=0$	0.9981
$n=1$	0.9703
$n=2$	0.9085

参考上表和拟合得到的函数，我们分别代入 $AIC(\alpha_{maxlower})=1$ 及 $AIC(\alpha_{maxupper})=10$ 的情况，可以求出：

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_{maxlower} = \frac{1.260 + 1.118 + 1.191}{3} - 1 = 0.190 \\ \bar{\alpha}_{maxupper} = \frac{1.317 + 1.191 + 1.232}{3} - 1 = 0.246 \end{cases} \quad (5.7)$$

因此我们可以粗略估算并限制 $\alpha_{max} \approx 0.218^{+0.028}_{-0.028}$ 。

5.3.3 评估稳定性

上文我们已经采用了 AIC 参数作为限制并得到结果，为了更稳定地评价拟合，我们继续增加考虑另外两个拟合结果评估的参量 AICc 和 BIC，分别表示小参数情况下的 AIC 参数和改进的拟合评估参数。

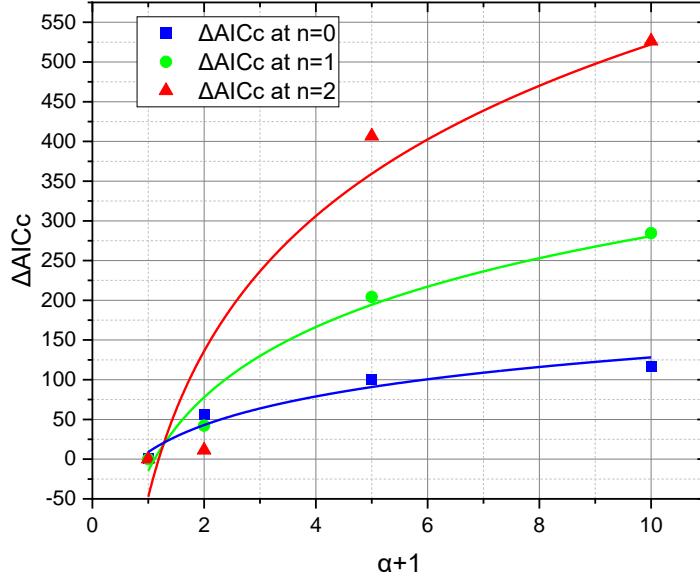
(1) AICc

与上文步骤一样，我们还是只选包含 overtones 数量 $n \in [0,2]$ 的拟合结果对比广义相对论和 MOG 拟合结果的 AIC 差值，并观察其随参数 α 的变化规律，如下表：

表 5.7 $n \in [0,2]$ 下，MOG 对比 GR 在拟合 nrdata 时拟合结果 AICc 差值表

$n \backslash \Delta AICc$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
0	0.61	56.58	100.76	117.11
1	0.10	42.15	204.27	284.47
2	0.25	11.35	406.73	526.38

根据上文定义，我们继续使用 OriginPro 软件的 Logarithm 函数拟合，得到的拟合曲线如下图：

图 5.21 广义相对论和 MOG 理论 ΔAIC 差值随 α 变化的拟合曲线表 5.8 $\Delta AICc$ 拟合曲线的拟合结果属性表

拟合对象	R^2
n=0	0.9415
n=1	0.9703
n=2	0.9085

参考上表和拟合得到的函数，我们分别代入 $AICc(\alpha_{maxlower})=1$ 及 $AICc(\alpha_{maxupper})=10$ 的情况，可以求出：

$$\begin{cases} \overline{\alpha_{maxlower}}' = \frac{0.848 + 1.118 + 1.190}{3} - 1 = 0.052 \\ \overline{\alpha_{maxupper}}' = \frac{1.029 + 1.195 + 1.231}{3} - 1 = 0.151 \end{cases} \quad (5.8)$$

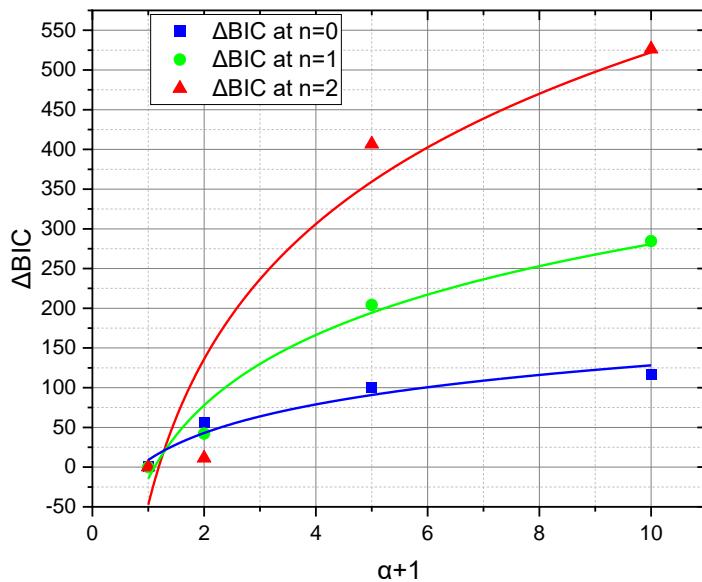
根据 $AICc$ 我们可以粗略估算并限制 $\alpha_{max} \approx 0.102^{+0.049}_{-0.050}$ 。

(2) BIC

最后，我们还是只选包含 overtones 数量 $n \in [0,2]$ 的拟合结果对比广义相对论和 MOG 拟合结果的 BIC 差值，并观察其随参数 α 的变化规律，如下表：

表 5.9 $n \in [0,2]$ 下, MOG 对比 GR 在拟合 nrdata 时拟合结果 BIC 差值表

ΔBIC $n \backslash \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
0	0.60	56.62	100.76	117.10
1	0.09	42.15	204.27	284.47
2	0.26	11.35	406.73	526.38

图 5.22 广义相对论和 MOG 理论 ΔAIC 差值随 α 变化的拟合曲线表 5.10 ΔBIC 拟合曲线的拟合结果属性表

拟合对象	R^2
n=0	0.9413
n=1	0.9703
n=2	0.9085

参考上表和拟合得到的函数，我们分别代入 $BIC(\alpha_{maxlower})=1$ 及 $BIC(\alpha_{maxupper})=10$ 的情况，可以求出：

$$\begin{cases} \overline{\alpha_{maxlower}}'' = \frac{0.850 + 1.118 + 1.190}{3} - 1 = 0.053 \\ \overline{\alpha_{maxupper}}'' = \frac{1.029 + 1.196 + 1.231}{3} - 1 = 0.152 \end{cases} \quad (5.9)$$

根据 AICc 我们可以粗略估算并限制 $\alpha_{max} \approx 0.103^{+0.049}_{-0.050}$ 。

(3) 综合评价

综合上文 AIC, AICc, BIC 三个拟合评估参数的评价，我们给出下表，并最终通过加权平均得到参数限制。

表 5.11 拟合评估参数汇总及参数限制表

拟合评估	$\alpha_{maxlower}$	$\alpha_{maxupper}$	α_{max}
AIC	0.190	0.246	$0.218^{+0.028}_{-0.028}$
AICc	0.052	0.151	$0.102^{+0.049}_{-0.050}$
BIC	0.053	0.152	$0.103^{+0.049}_{-0.050}$
AIC+AICc+BIC	0.098	0.183	$0.141^{+0.042}_{-0.043}$

通过上表，我们最终得到结论，MOG 理论中的参数将被限制为 $\alpha_{max} = 0.141^{+0.042}_{-0.043}$ 。

在 α 被限制后，MOG 理论将失去相比广义相对论的优点——解释黑洞质量分布 Mass Gap 问题。

5.4 MOG 标量-矢量-张量引力和广义相对论对比评价

我们部分引用一篇文章^[29]给出的一个好的引力理论应该满足的要求：从唯物主义观点来看：

- 首先，这个理论应该能解释基本的天体物理现象，包括弱引力下的牛顿理论，到水星进动等等太阳系内的观测现象。
- 其次，应该能解释星系动力学问题
- 最后，这个理论还应该能解释宇宙的大尺度动力学问题（宇宙学常数/宇宙膨胀和暗物质等）
- 最关键的一点，这个理论应该最简洁，自然。

拜读以往学者对 MOG 标量-矢量-张量引力理论的诸多研究，我们不难清楚该理论广泛的宇宙学实用性，其巧妙的思想不仅能解释原有广义相对论（不引入宇宙学常数）无法解释的暗物质暗能量等相关问题^{[25][73]}，又能在特殊情况恰到好处的回归与广义相对论相同的结论^[48]。甚至在本文重点关注的引力波领域，其有效参数 α 的选取自由性还可以使之解答黑洞/中子星 mass gap 问题^[47]，及 2019 年探测的最新的 LIGO 第三轮观测中 EMRI^{[98][99]}和超大质量黑洞^{[79][100]}的热点讨论。然而，在本节的参数限制给出后，其 α 选取的任意性将受极大限制，结合 MOG 理论其他参数的限制范围：我们可以认为，虽然其具备广义相对论没有的矢量场及后者对空间增加的额外排斥力等等物理性质，但是其包含了多个意义较小却又增加模型冗余性的有效常数，因此至少在现阶段引力波探测的基础上，我们仍可以认为广义相对论是具有更好描述性的引力理论。

结 论

本文首先系统给出了 Einstein 广义相对论下引力波各个基本物理量的推导。同时介绍了修改引力提出的必要性——新的宇宙学观测事实（暗物质，暗能量等），并主要针对历史上不断发展的几种标量-矢量-张量修改引力作了推导和原理分析，给出了 LIGO 等引力波探测计划的简要说明。

然后，本文展开分析了 MOG 理论几个物理场的存在意义，并在线性引力假设上推导 MOG 标量-矢量-张量引力理论中双黑洞合并下旋进阶段产生的引力波波形，通过拟合 LIGO 观测数据推断出双黑洞合并前后质量和啁啾质量，计算其传播速度和能量并与广义相对论引力波对比，我们发现 MOG 标量-矢量-张量引力理论下的黑洞质量和广义相对论有一定的差异。

之后根据这一差异性，我们联系到双黑洞合并后铃荡阶段引力波。在铃荡阶段，根据黑洞微扰的 Quasi-Normal Modes 模型，我们观察考虑包含不同 overtone 数量的引力波波形拟合和数值相对论模拟结果的偏差，并与广义相对论结果对比，我们也可以发现，两者预言的 Quasi-Normal Modes 模型并不相同，如果数值相对论模拟结果能被探测到，则我们将可以对 MOG 理论中参数 α 给出很强的限制 ($\alpha \leq 0.141^{+0.042}_{-0.043}$)。另外，我们还通过加深思考，对拟合结果提供了两种其他可能：MOG 下无毛定理变化或前人工作中计算的 MOG 的黑洞度规/Quasi-Normal Modes 存在错误。

最后我们综合全文，得出结论：虽然标量-矢量-张量引力理论可以应用于解释各个新的宇宙学观测事实，但终究是一个有效理论，和广义相对论对比，至少在目前引力波数据上，我们认为其有可能出现参数冗余的情况，实用性不如广义相对论。

参 考 文 献

- [1] EINSTEIN A. Erklarung der Perihelionbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitatstheorie[J]. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., vol. 47, No.2, pp. 831-839, 1915, 1915, 47: 831–839.
- [2] EINSTEIN A. Approximative integration of the field equations of gravitation[J]. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1916, 1916(688–696): 1.
- [3] PIRANI F A E. Republication of: On the physical significance of the Riemann tensor[J]. General Relativity and Gravitation, 2009, 41(5): 1215–1232.
- [4] EOS | The Role of Gravitation in Physics | The Chapel Hill Conference in Context[EB/OL]. [2021-06-15]. <https://edition-open-sources.org/sources/5/3/>.
- [5] CERVANTES-COTA J L, GALINDO-URIBARRI S, SMOOT G F. A Brief History of Gravitational Waves[J]. arXiv:1609.09400 [astro-ph, physics:gr-qc, physics:physics], 2016.
- [6] TAYLOR J H, WEISBERG J M. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16[J]. The Astrophysical Journal, 1982, 253: 908–920.
- [7] LIGO - Wikipedia[EB/OL]. [2021-06-03]. <https://en.wikipedia.org/wiki/LIGO>.
- [8] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger[J]. Physical review letters, APS, 2016, 116(6): 061102.
- [9] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral[J]. Physical Review Letters, APS, 2017, 119(16): 161101.
- [10] ABBOTT B P, BLOEMEN S, CANIZARES P, 等. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger[J]. 2017.
- [11] THRANE E, TALBOT C. An introduction to Bayesian inference in gravitational-wave astronomy: parameter estimation, model selection, and hierarchical models[J]. Publications of the Astronomical Society of Australia, Cambridge University Press, 2019, 36.
- [12] LUO J, CHEN L-S, DUAN H-Z, 等. TianQin: a space-borne gravitational wave detector[J]. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, 2016, 33(3): 035010.
- [13] CLIFTON T, FERREIRA P G, PADILLA A, 等. Modified gravity and cosmology[J]. Physics reports, Elsevier, 2012, 513(1–3): 1–189.
- [14] SPERGEL D N, VERDE L, PEIRIS H V, 等. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* observations: determination of cosmological parameters[J]. The Astrophysical Journal Supplement Series, IOP Publishing, 2003, 148(1): 175.
- [15] JAIN B, TAYLOR A. Cross-correlation tomography: measuring dark energy evolution with weak lensing[J]. Physical Review Letters, APS, 2003, 91(14): 141302.
- [16] RIESS A G, FILIPPENKO A V, CHALLIS P, 等. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant[J]. The Astronomical Journal, IOP Publishing, 1998, 116(3): 1009.

- [17] PERLMUTTER S, ALDERING G, GOLDHABER G, 等. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae[J]. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, 1999, 517(2): 565.
- [18] SANDERS R H, MCGAUGH S S. Modified Newtonian dynamics as an alternative to dark matter[J]. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, 2002, 40(1): 263–317.
- [19] TEGMARK M, STRAUSS M A, BLANTON M R, 等. Cosmological parameters from SDSS and WMAP[J]. *Physical review D*, APS, 2004, 69(10): 103501.
- [20] BRANS C, DICKE R H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation[J]. *Physical review*, APS, 1961, 124(3): 925.
- [21] HORNDESKI G W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, 1974, 10(6): 363–384.
- [22] MILGROM M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis[J]. *The Astrophysical Journal*, 1983, 270: 365–370.
- [23] BEKENSTEIN J, MILGROM M. Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?[J]. *The Astrophysical Journal*, 1984, 286: 7–14.
- [24] BEKENSTEIN J D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm[J]. *Physical Review D*, APS, 2004, 70(8): 083509.
- [25] MOFFAT J W. Scalar-tensor-vector gravity theory[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, 2006, 2006(03): 004.
- [26] HEISENBERG L. Scalar-vector-tensor gravity theories[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, 2018, 2018(10): 054.
- [27] DE FELICE A, TSUJIKAWA S. f (R) theories[J]. *Living Reviews in Relativity*, Springer, 2010, 13(1): 1–161.
- [28] SOTIRIOU T P, FARAOXI V. f (R) theories of gravity[J]. *Reviews of Modern Physics*, APS, 2010, 82(1): 451.
- [29] CAPOZZIELLO S, DE LAURENTIS M. Extended theories of gravity[J]. *Physics Reports*, Elsevier, 2011, 509(4–5): 167–321.
- [30] HEISENBERG L. A systematic approach to generalisations of General Relativity and their cosmological implications[J]. *Physics Reports*, Elsevier, 2019, 796: 1–113.
- [31] WILL C M. The confrontation between general relativity and experiment[J]. *Living reviews in relativity*, Springer, 2014, 17(1): 1–117.
- [32] BETTONI D, EZQUIAGA J M, HINTERBICHLER K, 等. Speed of gravitational waves and the fate of scalar-tensor gravity[J]. *Physical Review D*, APS, 2017, 95(8): 084029.
- [33] 粟待钦. 引力波的能动赝张量和引力波与标量扰动的耦合[D]. 中国科学技术大学, 2012.[J].
- [34] LANDAU L D. *The classical theory of fields*[M]. Elsevier, 2013, 2.
- [35] WEINBERG S, DICKE R H. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*[M]. Wiley New York, 1973.
- [36] MAGGIORE M. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*[M]. Oxford university press, 2008, 1.

- [37] MAGGIORE M. Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology[M]. Oxford University Press, 2018, 2.
- [38] NORDTVEDT JR K. Equivalence principle for massive bodies. II. Theory[J]. Physical Review, APS, 1968, 169(5): 1017.
- [39] WILL C M. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. II. Parametrized post-Newtonian hydrodynamics, and the Nordtvedt effect[J]. The Astrophysical Journal, 1971, 163: 611.
- [40] BLANCHET L, DAMOUR T. Post-Newtonian generation of gravitational waves[C]//Annales de l'IHP Physique théorique. 1989, 50(4): 377–408.
- [41] WILL C M. Theory and experiment in gravitational physics[M]. Cambridge university press, 2018.
- [42] CHATZIOANNOU K, YUNES N, CORNISH N. Model-independent test of general relativity: An extended post-Einsteinian framework with complete polarization content[J]. Physical Review D, APS, 2012, 86(2): 022004.
- [43] SAGI E. Propagation of gravitational waves in the generalized tensor-vector-scalar theory[J]. Physical Review D, APS, 2010, 81(6): 064031.
- [44] GONG Y, HOU S, LIANG D, 等. Gravitational waves in Einstein-æther and generalized TeVeS theory after GW170817[J]. Physical Review D, APS, 2018, 97(8): 084040.
- [45] GONG Y, HOU S. The polarizations of gravitational waves[J]. Universe, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2018, 4(8): 85.
- [46] BORAN S, DESAI S, KAHYA E O, 等. GW170817 falsifies dark matter emulators[J]. Physical Review D, APS, 2018, 97(4): 041501.
- [47] MOFFAT J W. LIGO GW150914 and GW151226 gravitational wave detection and generalized gravitation theory (MOG)[J]. Physics Letters B, Elsevier, 2016, 763: 427–433.
- [48] GREEN M A, MOFFAT J W, TOTH V T. Modified gravity (MOG), the speed of gravitational radiation and the event GW170817/GRB170817A[J]. Physics Letters B, Elsevier, 2018, 780: 300–302.
- [49] LIU Y, QIAN W-L, GONG Y, 等. Gravitational Waves in Scalar–Tensor–Vector Gravity Theory[J]. Universe, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2021, 7(1): 9.
- [50] DAR F, DE RHAM C, DESKINS J T, 等. Scalar gravitational radiation from binaries: Vainshtein mechanism in time-dependent systems[J]. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, 2018, 36(2): 025008.
- [51] VAINSHTEIN A I. To the problem of nonvanishing gravitation mass[J]. Physics Letters B, Elsevier, 1972, 39(3): 393–394.
- [52] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. Search for tensor, vector, and scalar polarizations in the stochastic gravitational-wave background[J]. Physical review letters, APS, 2018, 120(20): 201102.
- [53] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. First search for nontensorial gravitational waves from known pulsars[J]. Physical review letters, APS, 2018, 120(3): 031104.

- [54] NISHIZAWA A. Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. I. Formulation[J]. Physical Review D, APS, 2018, 97(10): 104037.
- [55] ARAI S, NISHIZAWA A. Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. II. Constraints on Horndeski theory[J]. Physical Review D, APS, 2018, 97(10): 104038.
- [56] BOYLE M, HEMBERGER D, IOZZO D A B, 等. The SXS collaboration catalog of binary black hole simulations[J]. Classical and Quantum Gravity, 2019, 36(19): 195006.
- [57] WOODFORD C. An update on the Simulating Extreme Spacetimes (SXS) simulation catalog for binary black holes[C]//APS April Meeting Abstracts. 2019, 2019: C11-003.
- [58] DU S M, NISHIZAWA A. Gravitational wave memory: A new approach to study modified gravity[J]. Physical Review D, APS, 2016, 94(10): 104063.
- [59] ABEDI J, AFSHORDI N. Echoes from the Abyss: A highly spinning black hole remnant for the binary neutron star merger GW170817[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, 2019, 2019(11): 010.
- [60] WANG Y-F, NIU R, ZHU T, 等. Gravitational Wave Implications for the Parity Symmetry of Gravity in the High Energy Region[J]. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, 2021, 908(1): 58.
- [61] SHAO L, WEX N, ZHOU S-Y. New graviton mass bound from binary pulsars[J]. Physical Review D, APS, 2020, 102(2): 024069.
- [62] SHAO L. Tests of local Lorentz invariance violation of gravity in the standard model extension with pulsars[J]. Physical Review Letters, APS, 2014, 112(11): 111103.
- [63] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. Tests of general relativity with GW170817[J]. Physical review letters, APS, 2019, 123(1): 011102.
- [64] RUBIN V C, FORD JR W K, THONNARD N. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605/R= 4kpc/to UGC 2885/R= 122 kpc[J]. The Astrophysical Journal, 1980, 238: 471–487.
- [65] Dark matter[J]. Wikipedia, 2021.
- [66] ALLEN S W, EVRARD A E, MANTZ A B. Cosmological parameters from observations of galaxy clusters[J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Annual Reviews, 2011, 49: 409–470.
- [67] CHANDRASEKHAR S, MILNE E A. The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1931, 91(5): 456–466.
- [68] PEEBLES P J E, RATRA B. The cosmological constant and dark energy[J]. Reviews of modern physics, APS, 2003, 75(2): 559.
- [69] Dark energy[J]. Wikipedia, 2021.
- [70] CORBELL E, SALUCCI P. The extended rotation curve and the dark matter halo of M33[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, 2000, 311(2): 441–447.
- [71] SANDERS R H. A stratified framework for scalar-tensor theories of modified dynamics[J]. The Astrophysical Journal, IOP Publishing, 1997, 480(2): 492.
- [72] BEKENSTEIN J D. Phase coupling gravitation: Symmetries and gauge fields[J]. Physics Letters B, Elsevier, 1988, 202(4): 497–500.
- [73] MOFFAT J W, RAHVAR S. The MOG weak field approximation-II. Observational test of Chandra X-ray clusters[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Oxford University Press, 2014, 441(4): 3724–3732.

- [74] BARISH B C, WEISS R. LIGO and the detection of gravitational waves[J]. Physics Today, American Institute of Physics, 1999, 52: 44–50.
- [75] LIGO[J]. Wikipedia, 2021.
- [76] LIGO Document Control Center[EB/OL]. [2021-06-08]. <https://dcc.ligo.org/cgi-bin/DocDB/DocumentDatabase>.
- [77] List of gravitational wave observations[J]. Wikipedia, 2021.
- [78] LSC-Virgo Released Papers[EB/OL]. [2021-06-03]. <https://pnp.ligo.org/ppcomm/Papers.html>.
- [79] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION, ABBOTT R, ABBOTT T D, 等. GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of \$150\textrm{M}_\odot\$[J]. Physical Review Letters, American Physical Society, 2020, 125(10): 101102.
- [80] DANZMANN K, RÜDIGER A. LISA technology—concept, status, prospects[J]. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, 2003, 20(10): S1.
- [81] Birkhoff's theorem (relativity)[J]. Wikipedia, 2021.
- [82] REUTER M, WEYER H. Quantum gravity at astrophysical distances?[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, IOP Publishing, 2004, 2004(12): 001–001.
- [83] MOFFAT J W, RAHVAR S. The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, 436(2): 1439–1451.
- [84] TEUKOLSKY S A. Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations[J]. Physical Review Letters, American Physical Society, 1972, 29(16): 1114–1118.
- [85] BERTI E, CARDOSO V, STARINETS A O. Quasinormal modes of black holes and black branes[J]. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, 2009, 26(16): 163001.
- [86] MOFFAT J W. Black Holes in Modified Gravity (MOG)[J]. The European Physical Journal C, 2015, 75(4): 175.
- [87] FERRARI V, MASHHOON B. New approach to the quasinormal modes of a black hole[J]. Physical Review D, American Physical Society, 1984, 30(2): 295–304.
- [88] LEAVER E W, CHANDRASEKHAR S. An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes[J]. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, Royal Society, 1985, 402(1823): 285–298.
- [89] BARAKAT T. The asymptotic iteration method for dirac and klein–gordon equations with a linear scalar potential[J]. International Journal of Modern Physics A, World Scientific Publishing Co., 2006, 21(19n20): 4127–4135.
- [90] MANFREDI L, MUREIKA J, MOFFAT J. Quasinormal Modes of Modified Gravity (MOG) Black Holes[J]. Journal of Undergraduate Reports in Physics, American Institute of Physics, 2019, 29(1): 100006.
- [91] STEIN L C. qnm: Package for computing Kerr quasinormal mode frequencies, separation constants, and spherical-spheroidal mixing coefficients[M].
- [92] WEISSTEIN E W. Levenberg-Marquardt Method[EB/OL]. Wolfram Research, Inc.[2021-06-03]. <https://mathworld.wolfram.com/Levenberg-MarquardtMethod.html>.
- [93] ISI M, GIESLER M, FARR W M, 等. Testing the no-hair theorem with GW150914[J]. Physical review letters, APS, 2019, 123(11): 111102.

- [94] FORTEZA X J, BHAGWAT S, PANI P, 等. Spectroscopy of binary black hole ringdown using overtones and angular modes[J]. Physical Review D, APS, 2020, 102(4): 044053.
- [95] BHAGWAT S, FORTEZA X J, PANI P, 等. Ringdown overtones, black hole spectroscopy, and no-hair theorem tests[J]. Physical Review D, APS, 2020, 101(4): 044033.
- [96] 赤池信息量准则[J]. 维基百科, 自由的百科全书, 2021.
- [97] MOURIER P, JIMENEZ-FORTEZA X, POOK-KOLB D, 等. Quasi-normal modes and their overtones at the common horizon in a binary black hole merger[J]. Physical Review D, 2021, 103(4): 044054.
- [98] ABBOTT R, ABBOTT T D, ABRAHAM S, 等. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object[J]. The Astrophysical Journal, American Astronomical Society, 2020, 896(2): L44.
- [99] MOFFAT J W. Modified Gravity (MOG) and Heavy Neutron Star in Mass Gap[J]. arXiv:2008.04404 [astro-ph, physics:gr-qc], 2020.
- [100] MOFFAT J W. Modified Gravitation Theory (MOG) and the aLIGO GW190521 Gravitational Wave Event[J]. arXiv:2009.04360 [gr-qc], 2020.

附录 A 拟合使用的 MOG 模型似正规模数据

针对 MOG 理论双黑洞 Ringdown 部分，Luciano Manfredi^[90]等人在 2018 年通过 AIM 方法计算出 Quasi-Normal Modes 数据如下表：

ℓ	n	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
2	0	0.3737 - 0.0890i	0.2220 - 0.04650i	0.1021 - 0.01867i	0.05431 - 0.009171i
	1	0.3467 - 0.2739i	0.2115 - 0.1423i	0.09872 - 0.05678i	0.05270 - 0.02781i
	2	0.3011 - 0.4783i	0.1937 - 0.2457i	0.09283 - 0.09696i	0.04974 - 0.04725i
	3	0.2515 - 0.7051i	0.1742 - 0.3579i	0.08582 - 0.1397i	0.04584 - 0.06776i
3	0	0.5994 - 0.0927i	0.3353 - 0.04758i	0.1496 - 0.0189i	0.07875 - 0.009267i
	1	0.5826 - 0.2813i	0.3281 - 0.1441i	0.1472 - 0.0571i	0.07761 - 0.02795i
	2	0.5517 - 0.4791i	0.3149 - 0.2444i	0.1428 - 0.0964i	0.07543 - 0.04706i
	3	0.5120 - 0.6903i	0.2979 - 0.3503i	0.1368 - 0.1373i	0.07238 - 0.06680i
4	0	0.8092 - 0.0942i	0.4452 - 0.04804i	0.1965 - 0.01903i	0.1030 - 0.009311i
	1	0.7966 - 0.2843i	0.4398 - 0.1449i	0.1947 - 0.05731i	0.1021 - 0.02802i
	2	0.7727 - 0.4799i	0.4294 - 0.2441i	0.1912 - 0.09625i	0.1004 - 0.04699i
	3	0.7398 - 0.6839i	0.4151 - 0.3468i	0.1863 - 0.1362i	0.09796 - 0.06636i

图 A. 0.1 精确到 4 位小数的 MOG 理论下，M=1 时，对应的 Quasi-Normal Modes 表

附录 B Mathematica 代码简单展示

下面简要展示画图所用的 Mathematica 程序。

以下首先为初始引入 Python 环境和 qnm 包等等代码：

```
rootpath = "/Users/qe/downloads/";
SetDirectory[rootpath <> "overtones-project_Yi/codes/RDownCode"];
session = StartExternalSession[{"Python", "Version" → "3.9.4"}] ExternalEvaluate[session,
"import qnm; import numpy as np; from qnm.schwarzschild.overtonesequence import
SchwOvertoneSeq as schw; from matplotlib import pyplot as plt"]
```

以下为路径定义：

```
(*Notebook directory*)
notdir = rootpath <> "overtones-project_Yi/codes/RDownCode/"
modedir = rootpath <> "overtones-project_Yi/data/RDownData/"
nrdir = rootpath <> "overtones-project_Yi/data/BL-5-CSVs/";
ExportQ = False
ExportDir = notdir
```

以下为数值相对论 shear modes data 简要挑选和处理：

```
nrfilenames = FileNames["*", nrdir]
shearfiles = Select[nrfilenames, StringMatchQ[#, "*shear_scalar_AH_res240*"] &]
shearfiles = Select[nrfilenames, StringMatchQ[#, "*shear*"] &]
multipolefiles = Select[nrfilenames, StringMatchQ[#, "*multipoles*"] &]
xifiles = Select[nrfilenames, StringMatchQ[#, "*xi_*"] &]
nrdatav1 = Import /@ shearfiles;
Dimensions@nrdatav1
fileindex = 2;
nrdata = Drop[#, 1] & /@ nrdatav1;
nrdata[[1]]
```

以下为 Quasi-Normal-Mode 求解函数和拟合函数简单用法展示：

```
t0 = 2.3;
tendfit = 40;
data20 = Select[TakeColumn[nrdata[[1]], {1, 5}], t0 ≤ #[[1]] ≤ tendfit &];
```

```

ansatz200 = OvertoneModel[0, {1, 0.0001}, t0, "Fit α" → {},"ωlmnFunction" → ωlmnPy,
"Mode" → {2, 0}, "AnsatzReal" → True]
fit200 = NonlinearModelFit[data20, ansatz200, {x0, φ0}, t]
fitn200 = Normal[fit200]

```

以下为画图 LogPlot 基本选项展示：

```

Show[LogPlot[{Abs[Re[fitn200]], Abs[Re[fitn201]], Abs[Re[fitn202]], Abs[Re[fitn203]]}, {t,
0, tend}, ImageSize → Large, Frame → True, ImageSize → Large, Frame → True,
Frame → True, PlotRange → All, Axes → True, PlotLegends →
Placed[LineLegend[{"l=2,n=0", "l=2,n=1", "l=2,n=2", "l=2,n=3"}, LabelStyle → {FontSize
→ 12}], {0.85, 0.66}], FrameLabel → {"t0/M", "σ"}, LabelStyle → {FontFamily →
"Arial", 12, GrayLevel[0], Bold}, GridLines -> {Full, Full}], ListLogPlot[Abs[data20p]]]

```

以下为计算 Mismatch 值代码简单展示：

```

grquality201 = Table[data = Select[data20, #[[1]] ≥ t0 + i &];
cfit = NonlinearModelFit[data, gransatz201, {x0, φ0, x1, φ1, x2, φ2}, t];
cfid = Transpose[{data[[All, 1]], Normal[cfit] /. t -> data[[All, 1]]}];
i + t0, Total[Abs[cfit["FitResiduals"]]^2]/Length@data, AICcRes[cfit["FitResiduals"], 1],
1 - EasyMatchT[data, cfid, t0 + i, tend], {i, 0, tend - t0} ];

```

修改记录

修改是论文写作过程中不可或缺的重要步骤，是提高论文质量的有效环节。修改的过程其实就是“去伪存真”、去糟粕取精华使论文不断“升华”的过程。

以下内容要求放到毕业设计（论文）修改记录中：

第一次修改记录：

公式部分标点符号修改。

增加图 3.4 及图 4.1。

精简摘要和润色致谢部分。

加入附录 B 程序介绍部分。

第二次修改记录：

修改引言部分重复段落。

修改前：详细介绍了 LIGO 发展

修改后：简要介绍 LIGO 发展

第三次修改记录：

增加 AICc 和 BIC 对参数的限制。

修改后：给出更精确 α 上限

第四次修改记录：

添加引言参考文献，并修改参考文献格式。

修改前：参考文献中出现“等”

修改后：“等”改为“et al.”

(5) 毕业设计（论文）外文翻译修改记录：无

(6) 毕业设计（论文）正式检测重复比：1.4%

记录人（签字）： 邱弋

指导教师（签字）： 张海峰

致 谢

短短四年求学时光仿佛一闪而过，留下太多的遗憾与不完美。在论文的最后，我愿用短短几段文字抒发一些肺腑之情。只希望最后不要错过这个机会，对给予我帮助的人说一声“谢谢”！

首先，感谢徐立昕老师在毕业论文方面的全部指导：一次次组会，一次次建议，一次次的关心和帮助，我都铭记在心。徐老师虽然嘴上严厉，实际上一直在给我们创造探索、学习的自由和未来的提升机会。希望将来的科研中，我能恪守老师的教诲：抓住一个问题，专注、深入地研究，给出真正有价值的结果，对所在的学科做出贡献。

我还想特别感谢付伟杰和白洪亮两位老师，不遗余力地为我的留学申请提供帮助。是你们，和物理学院的其他各位老师，一直以身作则，以崇高的教学热情传道、授业、解惑，让我能够有扎实的物理基础开始论文科研，你们对研究源源不断的热忱，求知探索的严谨态度，教育、感染、激励着我们一代一代的学生，你们是我的榜样！

其次，我想感谢身边的同学。寝室的三位室友：张子晨，张翔宇，高晗煜四年米和我同甘共苦，希望我们友谊长存。其中高晗煜和另一位同学肖子青是我的良师益友，我们常常一起学习讨论，尽管所做方向不同，我们还是能共勉共进。我自认为勤奋刻苦，但若离开了他们两的督促鼓励，我不可能有这样的动力。另外，刘宇辉，王俊霖，刘重阳，潘文泽，刘嘉辉，温昕，顾佳美，李天铭，刘一良几位好友也都在较长的时间里和我一起学习，给我帮助。同时，我还想认真感谢陪伴四年的所有同窗：我们心怀同一个梦想来到大连理工大学，经过四年不同的培养历练，我们又定下了不同的目标，即将各奔东西，准备开始新一段的征程。在这四年，能和你们一起互相学习，共同成长，是我的荣幸，祝你们都有光明的未来！

另外，在校外，我要感谢马普所引力物理中心的两位暑期科研指导人 Xisco Jimenez Forteza 和 Pierre Mourier。本应六月开始的远程项目，从四月就通过一次次的耐心讲解和悉心指导，让我快速地熟悉 qnm 和 ringdown 部分程序。正是通过这些熟悉和理解，我才能构思到创新点，并最终将之运用到修改引力模型。还有和王一帆博士，高勇学长，何显龙学长，陈雨鑫同学，毕研晨学弟等人的数次交流也都让我开拓眼界、受益匪浅。是你们的热心帮助，让我在毕设期间能够解决困难，并一直对引力波/修改引力领域饱有热情。希望以后我们都能不忘初心！

最后，我最想感谢父母家人，养育我，支持我，让我有机会读书学习，不用担心温饱。希望将来我能回报这份养育之恩！