

# 标量-矢量-张量引力理论中的引力波

# Gravitational Waves in Scalar-Vector-Tensor Gravity

答辩学生：邱弋  
指导教师：徐立昕



Max-Planck-Institut  
für Gravitationsphysik  
ALBERT-EINSTEIN-INSTITUT

# 目录 | Table of Content

---

## Gravitational waves in scalar-vector-tensor gravity

第一部分 LIGO引力波观测 (mostly introduction)

第二部分 修改引力模型 (mostly introduction)

第三部分 MOG标量-矢量-张量引力 (talk about physics)

第四部分 与广义相对论下引力波对比 (see the difference)

→ 第五部分 利用QNM限制MOG模型参数 (main work!)

第六部分 结论&总结 (the end)

# 引力波的提出与发现

- 引力波理论由爱因斯坦在1916年首次提出
- 2015年9月14日，LIGO首次直接探测引力波
- 2017年诺贝尔物理学奖

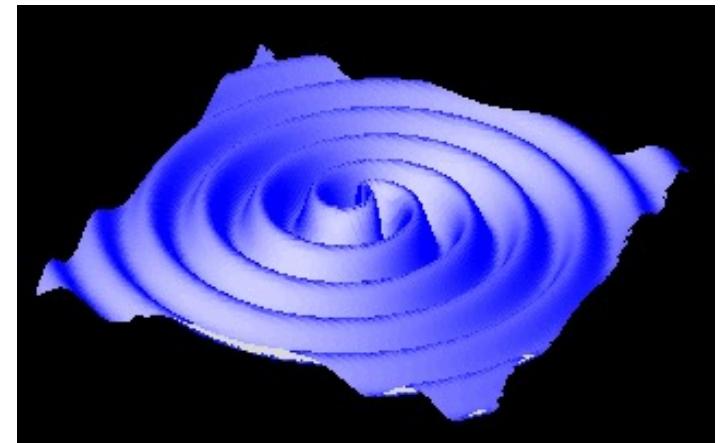
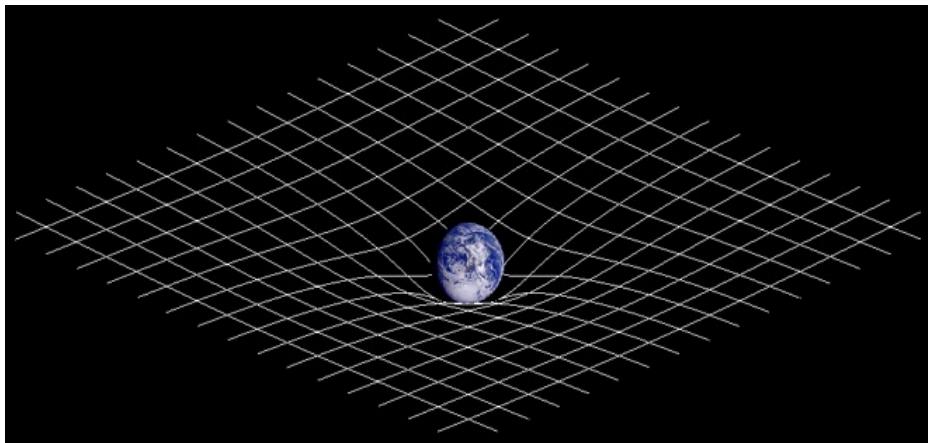
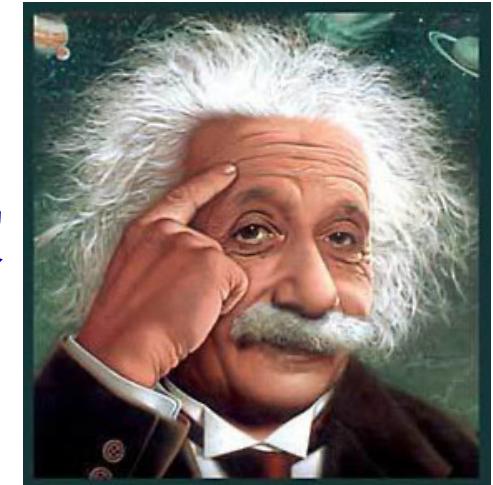


Image and animation credit: LISA project

# 引力波基础理论

线性引力理论：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

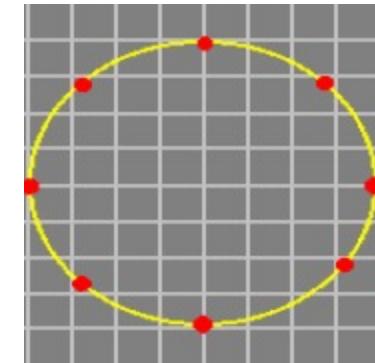
线性化场方程：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

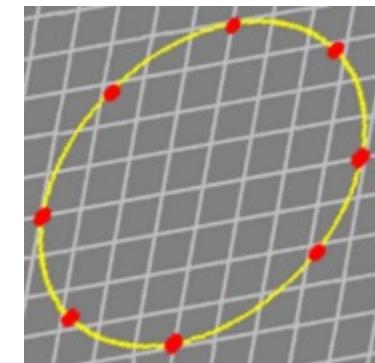
横向无迹(TT)规范下引力波：

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}.$$

$h_+$ 极化模式

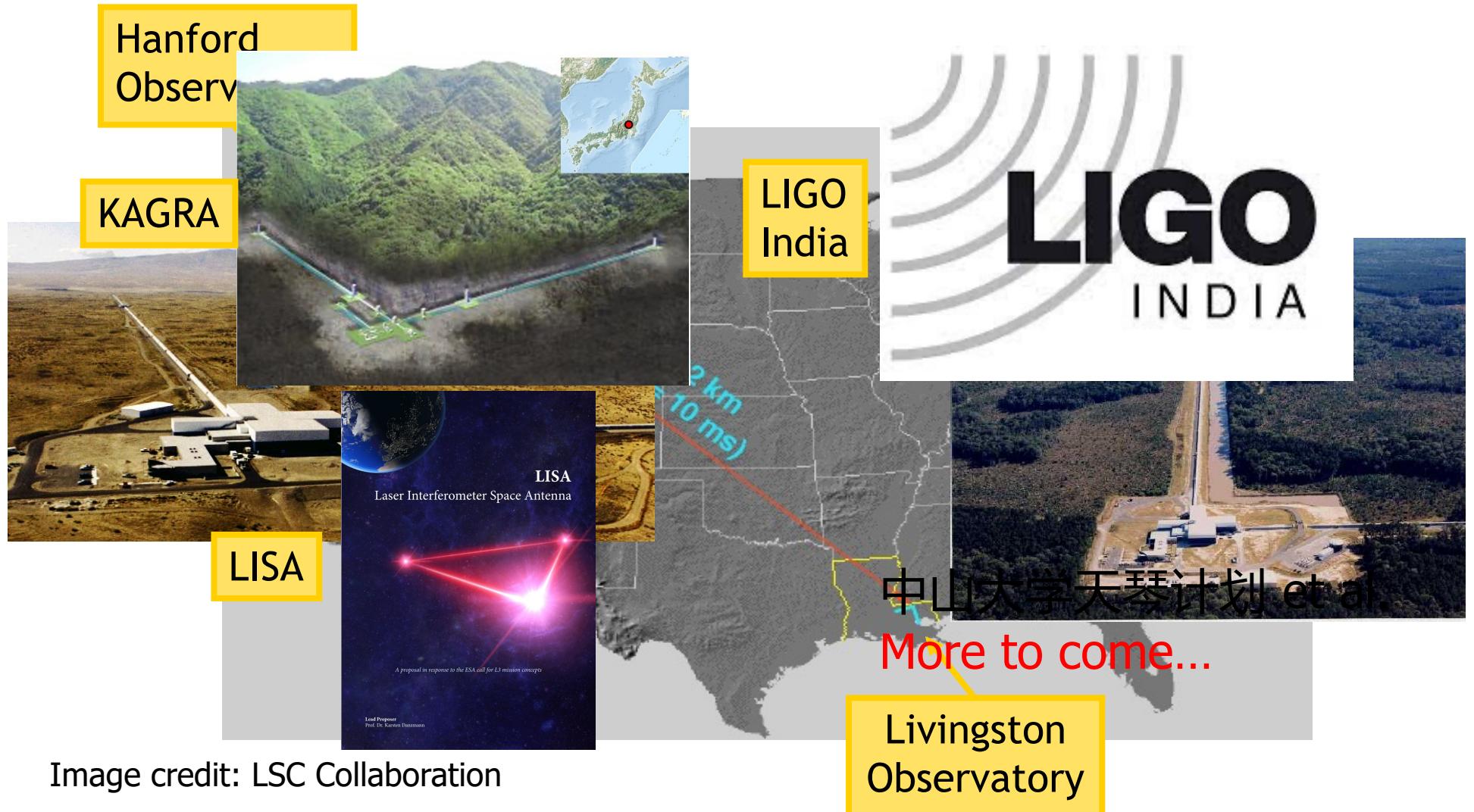


$h_x$ 极化模式

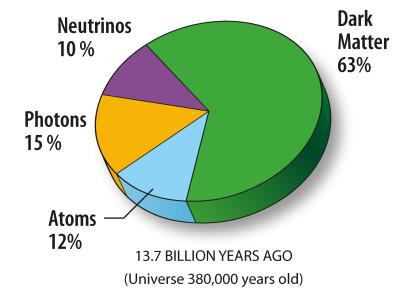
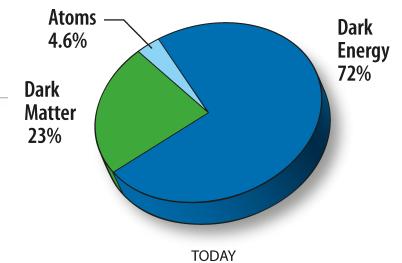
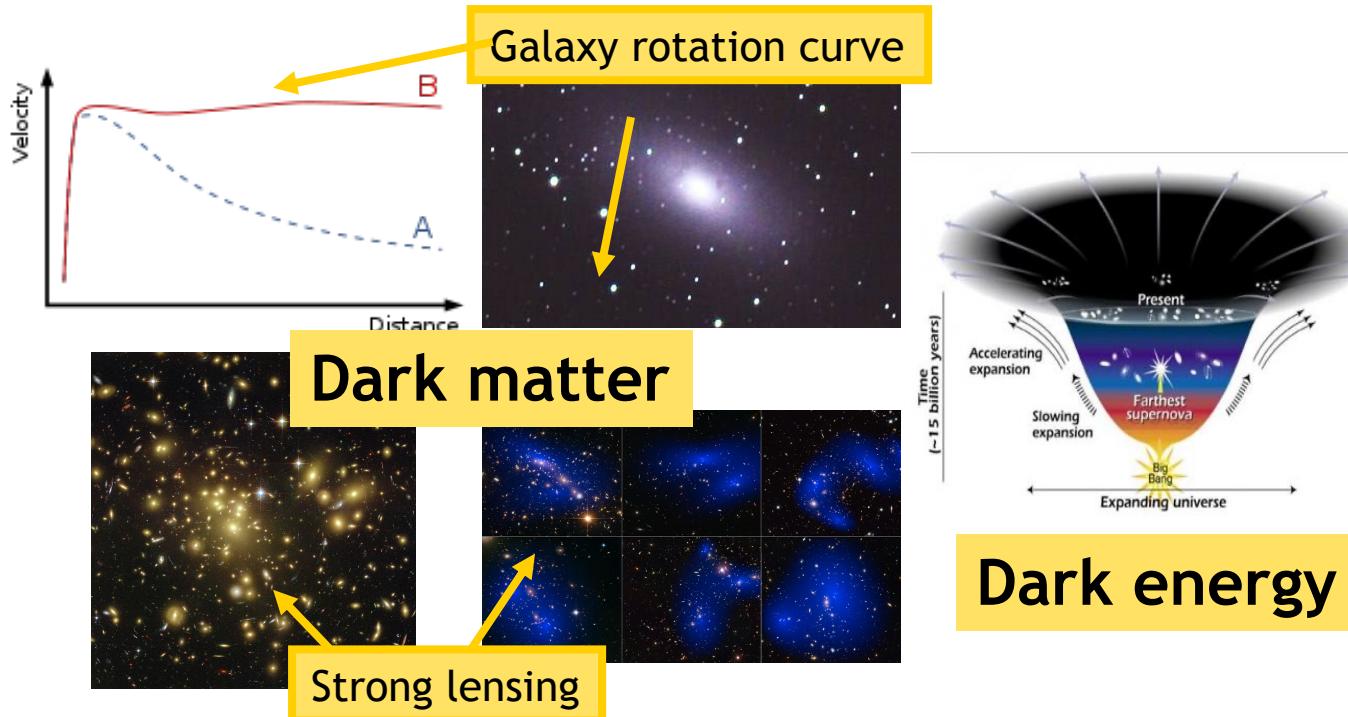


Animation credit: Wikipedia

# LIGO Network 位置分布



# What if ?



如果我们承认广义相对论是正确的，那就不可避免的需要假设暗物质，暗能量的大尺度存在。 **But, what if we just modify the theory?**

Image credit: Wikipedia, NASA

# 修改引力模型

## LSC Institutional Membership 35 institutions > 350 collaborators

University of Adelaide ACIGA  
Australian National University ACIGA  
Einstein-Æther theory  
Hills  
Caltech LIGO  
Caltech Experimental Gravitation CEGG  
Caltech Theory CART  
University of Cardiff GEO  
Carleton College  
Cornell University  
University of Florida @ Gainesville  
Glasgow University GEO  
University of Hannover GEO  
Harvard-Smithsonian  
India-IUCAA  
IAP Nizhny Novgorod  
Iowa State University  
Joint Institute of Laboratory Astrophysics

LIGO Livingston LIGOLA  
LIGO Hanford LIGOWA  
Louisiana State University  
Louisiana Tech University  
MIT LIGO  
Max Planck (Garching) GEO  
Max Planck (Potsdam) GEO  
University of Michigan  
Moscow State University  
NAOJ - TAMA  
University of Oregon  
Pennsylvania State University Exp  
Pennsylvania State University Theory  
Southern University  
Stanford University  
University of Texas@Brownsville  
University of Western Australia ACIGA  
University of Wisconsin@Milwaukee

**International**  
**India, Russia,**  
**Germany,**  
**U.K, Japan**  
**and**  
**Australia.**

**The international partners are involved in all aspects of the LIGO research program.**



# MOG标量-矢量-张量引力

J. W. Moffat 于2006年首次提出包含标量-矢量-张量引力场的  
引力理论 (**MOdified Gravity, MOG**) , 其作用量形式如下 :

$$S = S_{\text{Grav}} + S_\phi + S_S + S_M,$$
$$S_{\text{Grav}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \right], \quad \text{张量场}$$
$$S_\phi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \omega \left( \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + V(\phi) \right) \right], \quad \text{矢量场}$$
$$S_S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{G^3} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu G \nabla_\nu G - V(G) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{G} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega - V(\omega) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu^2 G} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \mu \nabla_\nu \mu - V(\mu) \right) \right]. \quad \text{标量场}$$

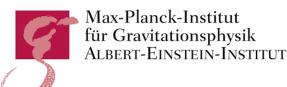
其中  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$

$\Lambda$  表示宇宙学常数

$\omega$  表示矢量场耦合强度

$\mu$  表示矢量引力子质量

$G$  表示引力常数



# MOG和广义相对论区别

- 理论推导思路：
  - 对三个作用量分别变分得到场方程
  - 求解场方程并化简能动张量表达式
  - 给出单粒子运动作用量
  - 在球对称度规下给出运动方程
  - 对比引力作用形式
- 结果：

GR:  $a(r) = -\frac{G_N M}{r^2}$

矢量引力子相当于给空间中物质的运动提供了排斥力，而这种排斥力对加速度的影响又由标量场强决定

MOG:  $a(r) = -\frac{G_N M}{r^2} \{1 + \alpha[1 - \exp(-\mu r)(1 + \mu r)]\}$

# 引力波波形对比

---

Moffat参考相同尺度下的星系旋转曲线及星团运动的拟合结果，将两个标量作了限制：

$$\omega = 1, \mu^{-1} \sim 24 \text{kpc}$$

此时标量  $\alpha$  相当于引力场强的重整化因子：

$$G \sim G_N(1 + \alpha),$$

则引力波波形中改变的量仅为引力常数  $G_N$ ：

$$h_+(t) = \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\pi f_{\text{gw}} t).$$

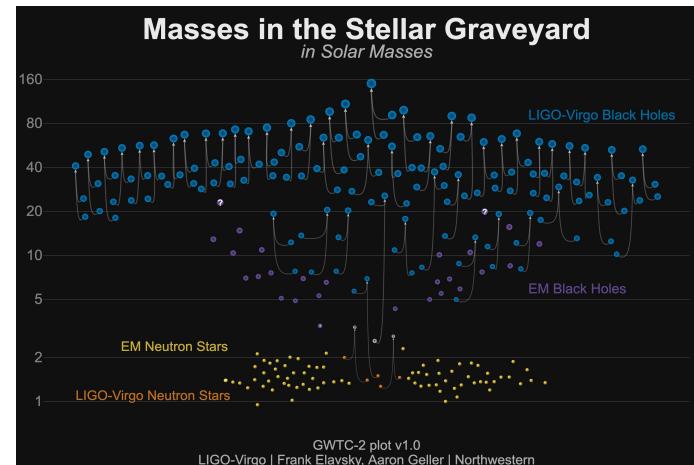
$$h_\times(t) = \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos \iota \sin(2\pi f_{\text{gw}} t).$$



# 参数 $\alpha$ 与黑洞质量

下表展示了Moffat给出的不同参数  $\alpha$  下推断出的黑洞质量：

引力波	$\alpha$	$m_1(M_\odot)$	$m_2(M_\odot)$	$\mathcal{M}_c(M_\odot)$
GR GW150914	0	36	29	28
GR GW151226	0	14	8	8.9
MOG GW150914	2.6	10	8	7.8
MOG GW150914	5.7	6	4	4.2
MOG GW150914	8.3	4	3	3
MOG GW151226	2.0	4.7	3	3

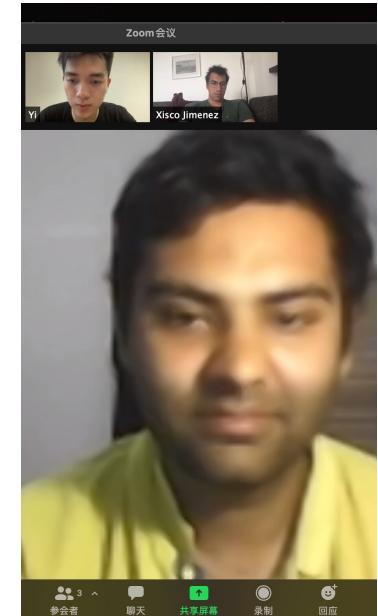


可以看出，相比广义相对论，MOG理论导出的黑洞质量可以更小，这一点某种程度上地解决恒星质量黑洞Mass Gap 及GW190521中等质量黑洞的问题。

# 广义相对论与MOG对比

- 引力波传播速度 ✓
- 引力波传播能动张量 ✓
- 推断黑洞质量 ✗

根据黑洞无毛定理，双黑洞合并后末态黑洞的性质完全由其质量和自旋决定，若质量不同，反映物理性质也不同！



Xisco & Pierre from AEI

# 黑洞微扰与QNM

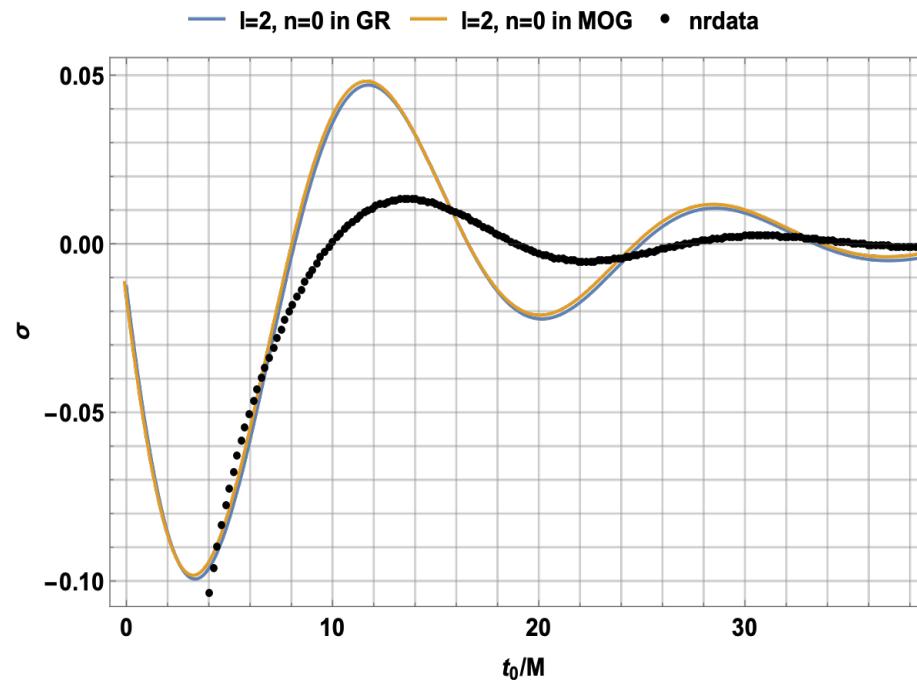
- 针对双黑洞合并后的铃荡部分，我们将其运动视为稳定黑洞的微扰，来计算时空度规和曲率的变化。这里一般使用黑洞微扰论中的Teukolsky方程。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 s\psi}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 s\psi}{\partial \phi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial_s \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial_s \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[ \frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial_s \psi}{\partial \phi} \\ & - 2s \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - i \cos \theta \right] \frac{\partial_s \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s)_s \psi = 4\pi \Sigma T. \end{aligned}$$

- 代入边界条件后求解得到的就是黑洞的准正模(Quasi-Normal-Mode, QNM)，QNM一般为衰减的指数形式。

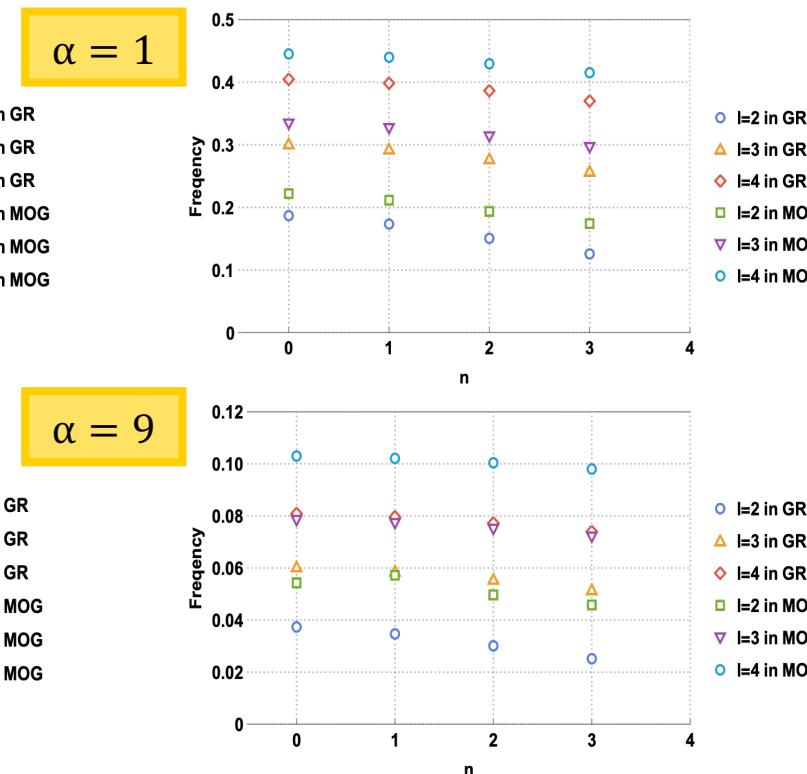
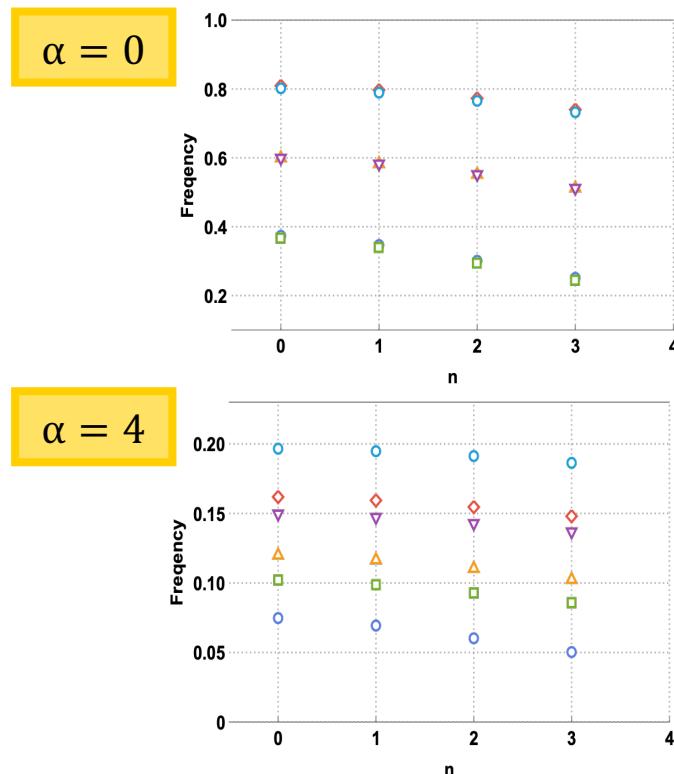
# QNM展示

$$h(t) \simeq \operatorname{Re} \left[ \sum_{l,m,n} A_{lmn} e^{-i(\omega_{nlm} t + \phi_{nlm})} \right].$$

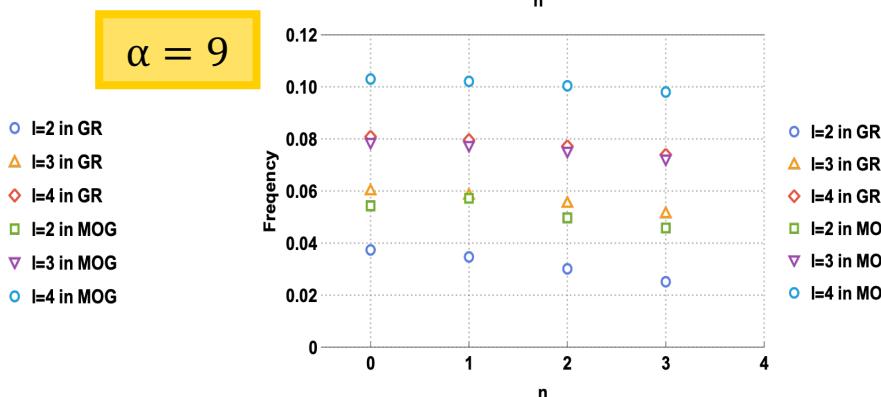
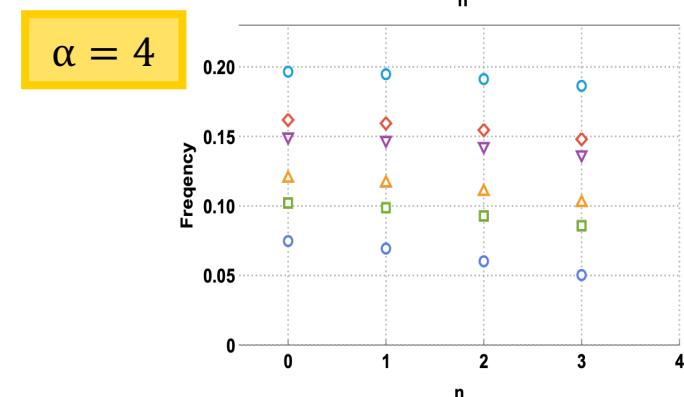


# 对比广义相对论和MOG下的QNM

- 利用计算Ringdown阶段QNM的Mathematica程序，计算广义相对论对应的MOG理论中不同  $\alpha$  取值的QNM**频率实部**，并与MOG下的结果对比。

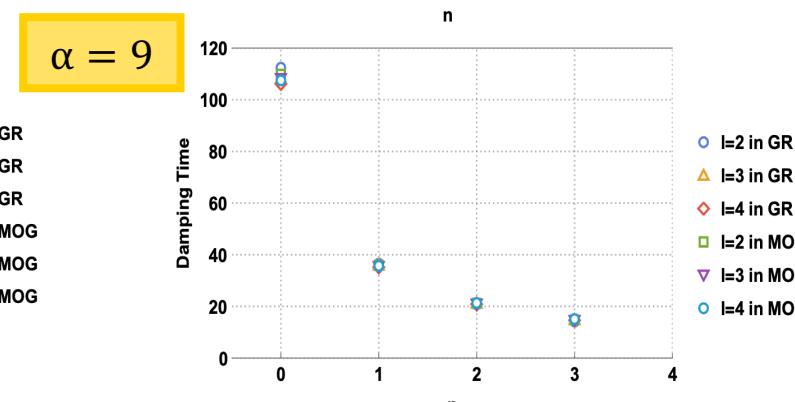
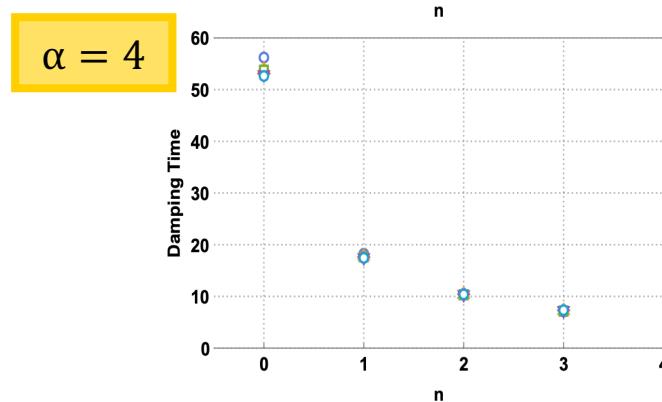
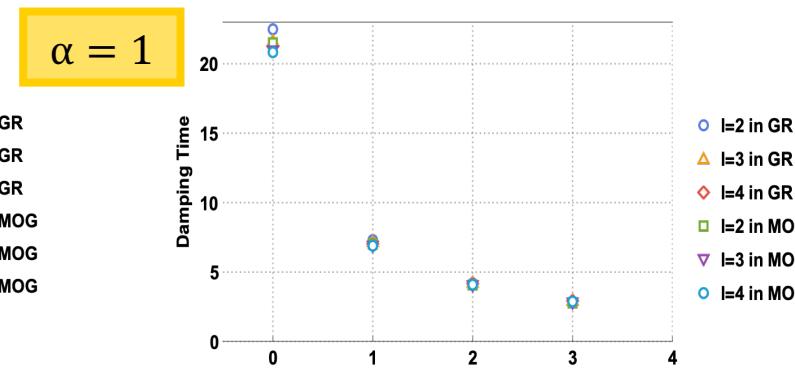
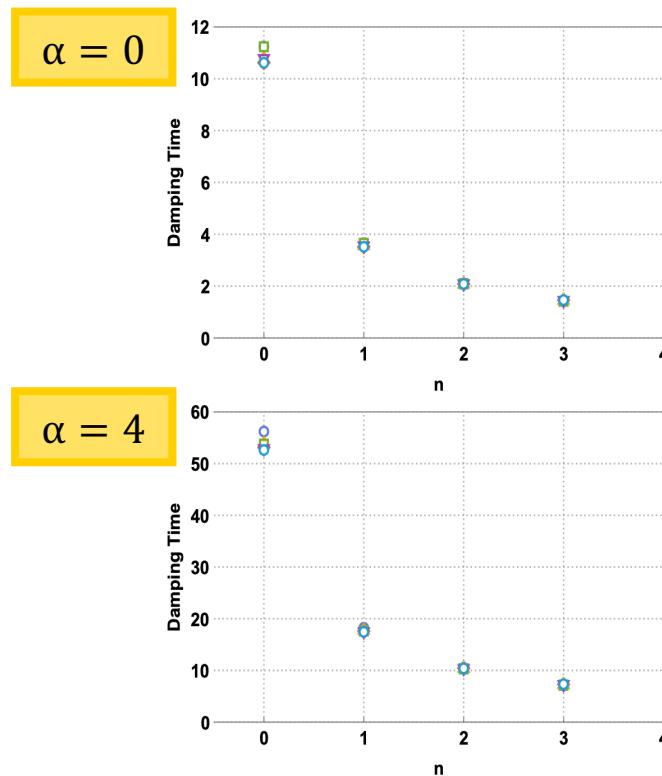


随  $\alpha$  增大  
两理论求  
出的QNM  
频率偏差  
逐渐增大



# 对比广义相对论和MOG下的QNM

- 计算广义相对论对应的MOG理论中不同  $\alpha$  取值的QNM频率虚部（对应耗散时间），并与MOG下的结果对比。

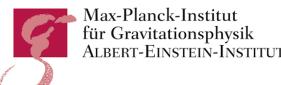


随  $\alpha$  增大  
两理论求  
出的QNM  
耗散时间  
偏差很小

# 数值相对论结果拟合

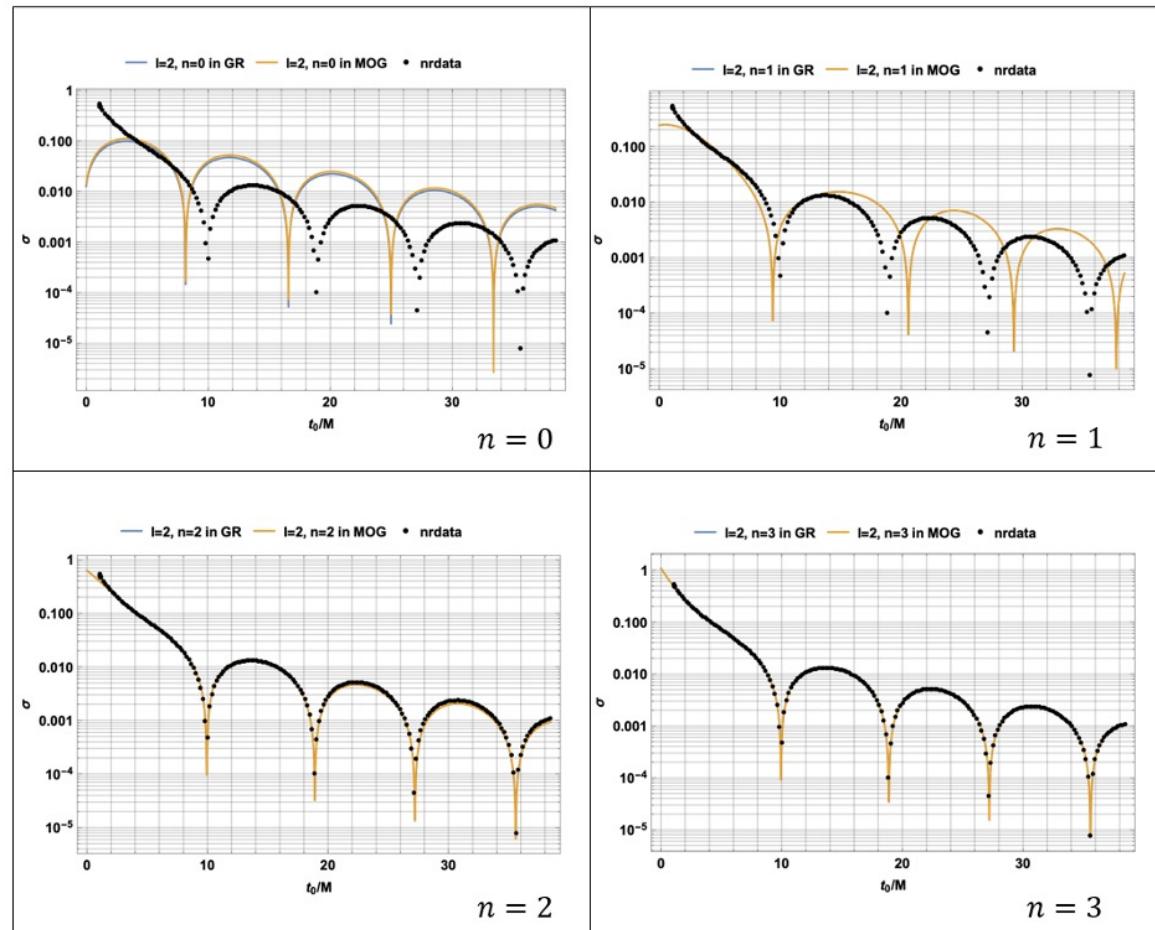
---

- 为了比对广义相对论和MOG理论的在描述引力波QNM上优劣，我们使用数值相对论数据作为标准，比对两模型拟合结果的好坏。首先，我们设定拟合条件：
  - 设定 $m = 0, s = -2$ ，末态黑洞自旋取0.0001
  - 选取shear modes  $\sigma^l$ 为振幅表示
  - 在算法和对应的nrdata中改变时间轴跨度，当 $\alpha$ 变化时，时间轴变为 $t' \rightarrow t(1 + \alpha)$ 。
- 接下来我们将根据不同  $\alpha$  画出其包含n个overtones时的拟合情况，并与对应的广义相对论拟合结果对比。



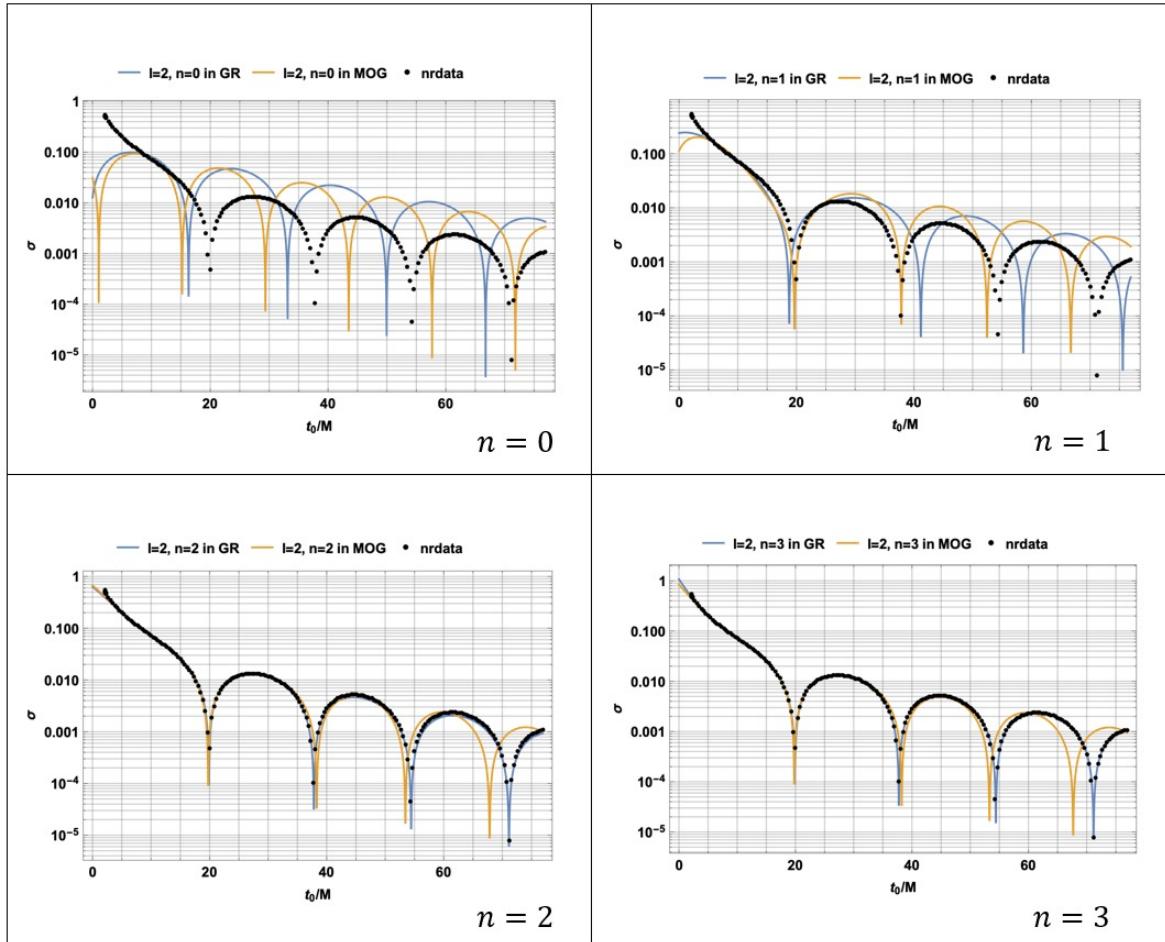
# MOG与广义相对论拟合结果对比 ( $\alpha = 0$ )

当 $\alpha = 0$ 时，MOG理论基本能回归广义相对论。另外，两理论都会随着包含的overtones数量增多而拟合结果更好。



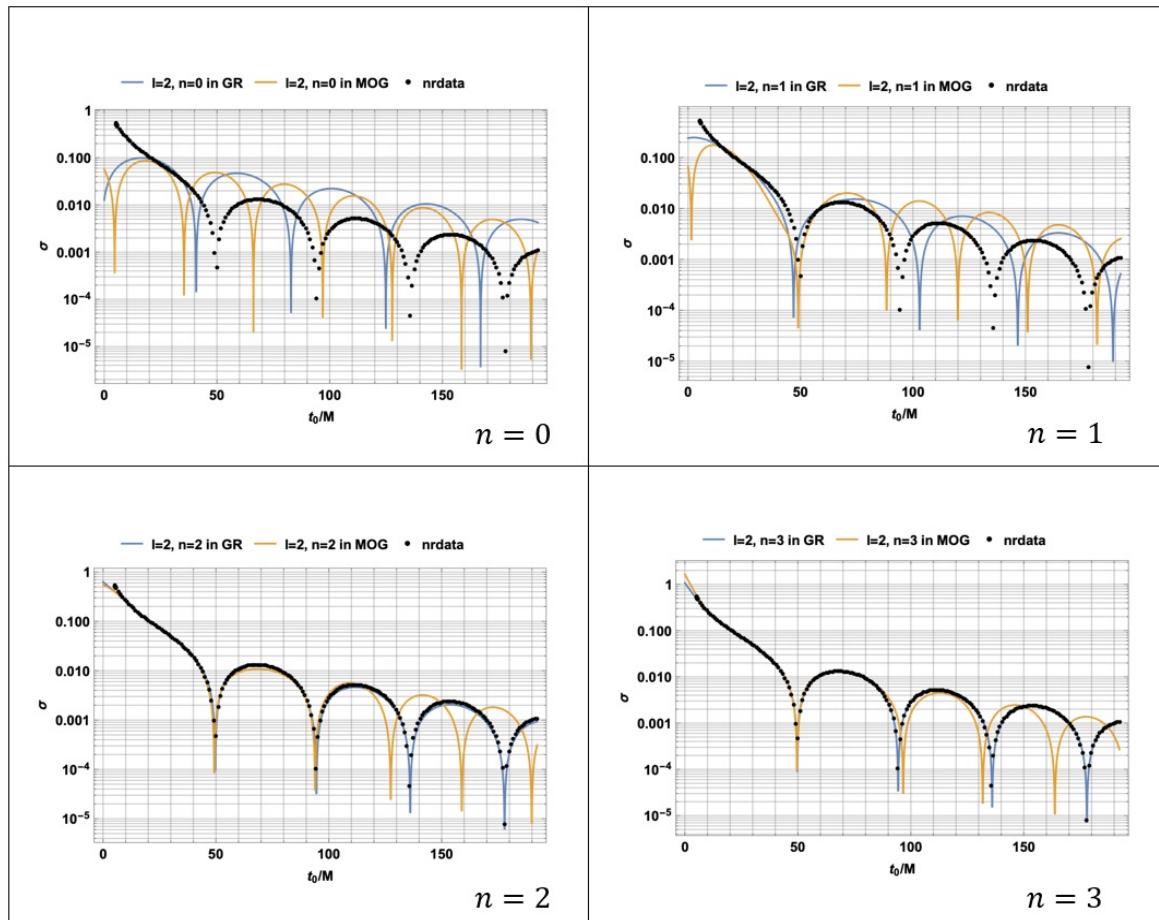
# MOG与广义相对论拟合结果对比 ( $\alpha = 1$ )

当 $\alpha = 1$ 时，MOG理论拟合结果开始不如广义相对论。但两理论仍都会随着包含的overtones数量增多而拟合结果更好。



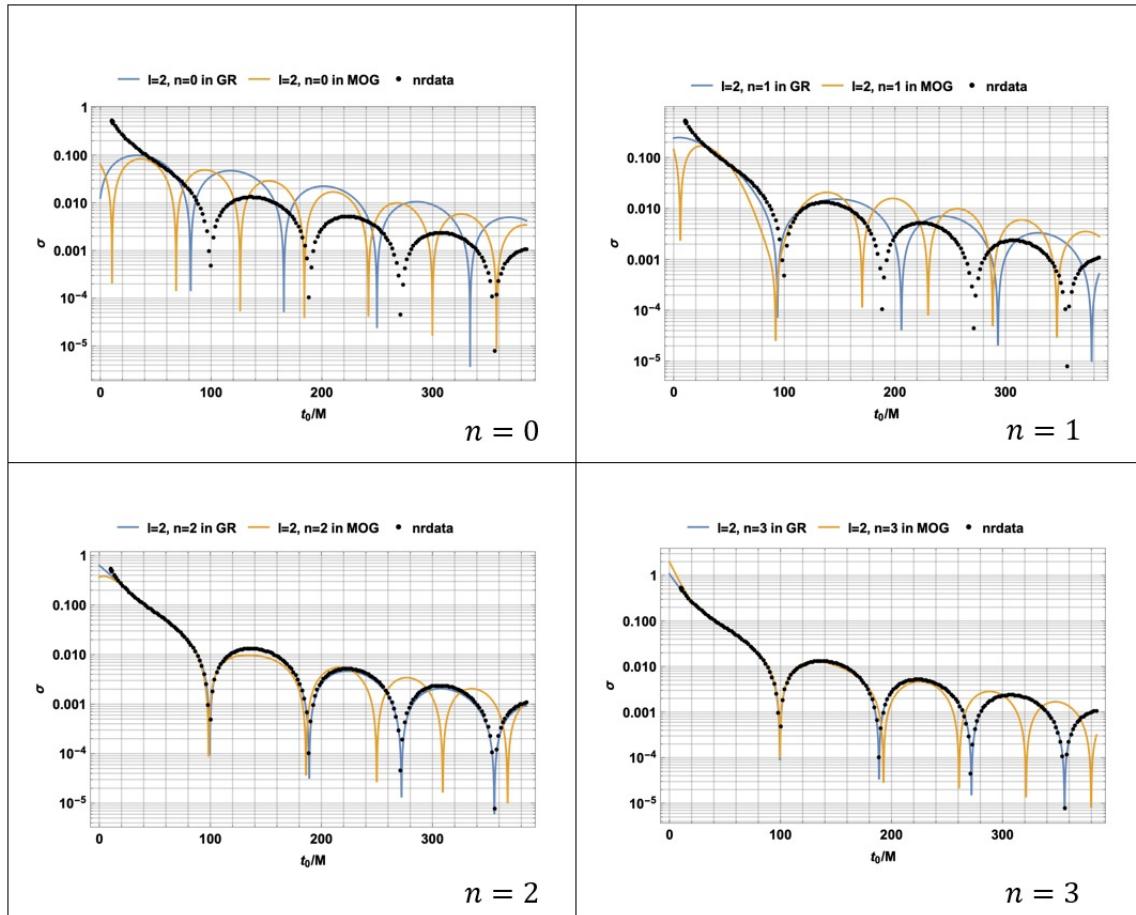
# MOG与广义相对论拟合结果对比 ( $\alpha = 4$ )

当 $\alpha = 4$ 时，MOG  
理论拟合结果更  
加不理想。



# MOG与广义相对论拟合结果对比 ( $\alpha = 9$ )

当 $\alpha = 9$ 时，MOG  
理论拟合结果与  
广义相对论对比，  
差距进一步扩大。



# 拟合结果分析

- 针对MOG理论和广义相对论两者之间随参数  $\alpha$  增加而逐渐偏移，且拟合结果不佳的事实，我们认为有三种可能原因：



1. MOG理论的误差随  $\alpha$  逐渐增大
2. MOG下黑洞无毛定理不成立，目标量  $\alpha$  作为一根“hair”
3. Moffat推导出的Kerr-MOG度规不正确/QNM计算错误

由于能力有限，我们先不质疑前人工作，妄自假设其可能的疏漏。这里我们按照第一种可能原因，进一步给出对MOG理论参数  $\alpha$  的限制。

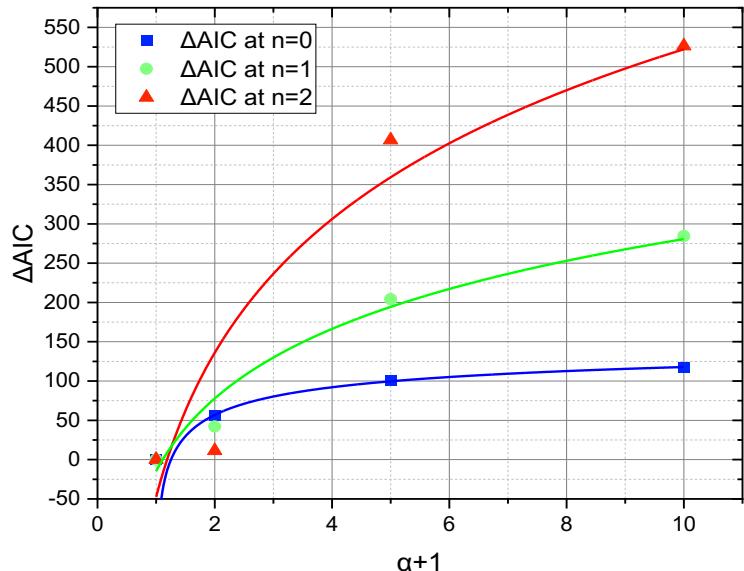
# 参数限制

这里由于各个模型包含的拟合系数数量不同，我们使用赤池信息准则估计参量AIC来衡量拟合结果，并根据以下准则给出参数限制：

- $AIC(\alpha_{maxlower})=1$
- $AIC(\alpha_{maxupper})=10$

n	$\Delta AIC$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
0	0.61	56.59	100.75	117.10	
1	0.10	42.15	204.28	284.47	
2	0.25	11.36	406.73	526.38	

$$AIC = 2k + n \ln(RSS/n).$$

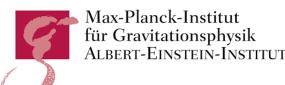


$$\alpha_{max} \approx 0.218^{+0.28}_{-0.28}$$

# 结论

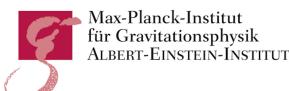
---

- 一个好的引力理论，需要：
  - 能解释基本的物理现象（牛顿引力中的内容）
  - 解释天体物理的观测结果（包括太阳系和宇宙大尺度）
  - 应该尽可能简洁，自然
- 拜读以往学者对MOG标量-矢量-张量引力理论的诸多研究，我们不难清楚该理论广泛的宇宙学实用性，其巧妙的思想不仅能解释原有广义相对论虚假设的暗物质暗能量存在，又能在特殊情况恰到好处的回归广义相对论。然而，在本节的参数限制给出后，其参数  $\alpha$  选取任意性将受极大限制。
- 因此，至少在现阶段引力波探测的基础上，我们仍可以认为广义相对论是具有更好描述性的引力理论。



感谢各位老师耐心聆听！  
Thanks for listening!

答辩学生：邱弋  
指导教师：徐立昕



# 附录

针对MOG理论双黑洞Ringdown部分，Luciano Manfredi等人在2018年通过AIM方法计算出Quasi-Normal Modes数据如下表：

$\ell$	$n$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 4$	$\alpha = 9$
2	0	0.3737 - 0.0890i	0.2220 - 0.04650i	0.1021 - 0.01867i	0.05431 - 0.009171i
	1	0.3467 - 0.2739i	0.2115 - 0.1423i	0.09872 - 0.05678i	0.05270 - 0.02781i
	2	0.3011 - 0.4783i	0.1937 - 0.2457i	0.09283 - 0.09696i	0.04974 - 0.04725i
	3	0.2515 - 0.7051i	0.1742 - 0.3579i	0.08582 - 0.1397i	0.04584 - 0.06776i
3	0	0.5994 - 0.0927i	0.3353 - 0.04758i	0.1496 - 0.0189i	0.07875 - 0.009267i
	1	0.5826 - 0.2813i	0.3281 - 0.1441i	0.1472 - 0.0571i	0.07761 - 0.02795i
	2	0.5517 - 0.4791i	0.3149 - 0.2444i	0.1428 - 0.0964i	0.07543 - 0.04706i
	3	0.5120 - 0.6903i	0.2979 - 0.3503i	0.1368 - 0.1373i	0.07238 - 0.06680i
4	0	0.8092 - 0.0942i	0.4452 - 0.04804i	0.1965 - 0.01903i	0.1030 - 0.009311i
	1	0.7966 - 0.2843i	0.4398 - 0.1449i	0.1947 - 0.05731i	0.1021 - 0.02802i
	2	0.7727 - 0.4799i	0.4294 - 0.2441i	0.1912 - 0.09625i	0.1004 - 0.04699i
	3	0.7398 - 0.6839i	0.4151 - 0.3468i	0.1863 - 0.1362i	0.09796 - 0.06636i