CHƯƠNG 2

ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ NGƯỢC ROBOT NỐI TIẾP

Robot nối tiếp là chuỗi động học hở gồm nhiều khâu nối với nhau bởi khớp quay hoặc trượt. Đế robot liên kết với hệ tọa độ trực chuẩn tham chiếu cố định, đầu công tác nằm ở đầu cuối của chuỗi. Vị trí tương đối giữa hai khâu kế nhau phụ thuộc góc quay θ hay độ dịch chuyển *d* gọi chung là biến khớp *q*. Động học thuận robot có mục đích là tìm vị trí và hướng đầu công tác so với hệ tọa độ cố định khi các khớp chuyển động còn động học ngược là tìm các biến khớp khi cho trước vị trí và hướng đầu công tác.

2.1 MA TRẬN CHUYỂN ĐỔI

2.1.1 Vị trí và hướng vật rắn trong không gian

Cho hệ tọa độ trực chuẩn O_0xyz gọi là hệ tọa độ gốc (gọi tắt là hệ tọa độ 0) và một vật rắn, liên kết với nó là hệ tọa độ vật O_1xyz (gọi tắt là hệ tọa độ 1). Hệ tọa độ được xác định theo qui tắc bàn tay phải. Các vector đơn vị của hai hệ lần lượt là $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{z}_0$ và $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{z}_1$. Cho điểm P có tọa độ (p_x, p_y, p_z) trong hệ tọa độ 0, ta biểu diễn bằng phương trình sau:

$$\overrightarrow{O_0P} = \boldsymbol{p}^0 = p_x\boldsymbol{x}_0 + p_y\boldsymbol{y}_0 + p_z\boldsymbol{z}_0 \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{p}^0 = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{p}^0$ có nghĩa là tọa độ điểm P trong hệ tọa độ 0.

Cho hai điểm A(a_x, a_y, a_z) và B(b_x, b_y, b_z), vector $\boldsymbol{p}_0=\overrightarrow{AB}$ điểm đầu là A điểm cuối là B có thành phần trong hệ tọa độ 0 là

$$\boldsymbol{p}^0 = \begin{bmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \end{bmatrix}^T \tag{2.3}$$

Tọa độ điểm O_1 trong hệ tọa độ gốc biểu diễn bởi vector $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{O_0O_1}$ gọi là vector tịnh tiến. Hướng hai hệ tọa độ liên hệ với nhau bởi phép quay $\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_0 \to \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_0 \to \boldsymbol{z}_1$, biểu diễn bởi ma trận quay $\boldsymbol{R}_0^1$ 3x3, mỗi phần tử là tích vô hướng giữa hai vector đơn vị, và chính là cos của góc giữa hai vector

$$\boxed{\boldsymbol{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{z}_0\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix}} \tag{2.4}$$

Cột thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là hình chiếu của $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1$ trên hệ trục 0,

Hàng thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là hình chiếu của $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0$ trên hệ trục 1,

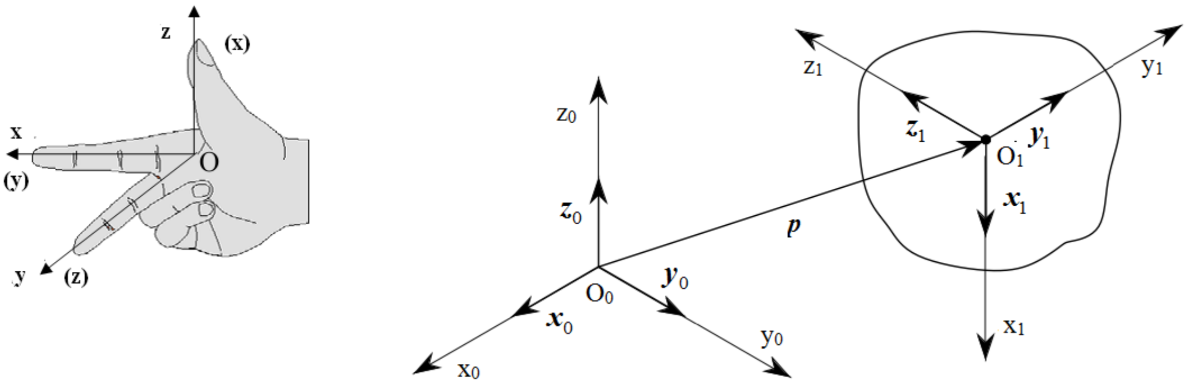
Nếu hai hệ trục song song nhau $\boldsymbol{R}_0^1$ là ma trận đơn vị.

Cho điểm A, biểu thị bằng vector $\boldsymbol{a}^1 = [a_{x1}\ a_{y1}\ a_{z1}]^T$ và $\boldsymbol{a}^0 = [a_{x0}\ a_{y0}\ a_{z0}]^T$ lần lượt trong hệ tọa độ 1 và 0, sự chuyển đổi giữa $\boldsymbol{a}^1$ và $\boldsymbol{a}^0$ được xác định bởi (2.5) (2.6)

$$\boldsymbol{a}^0 = \boldsymbol{p}^0 + \boldsymbol{R}_0^1 \boldsymbol{a}^1 \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{p}^1 + \boldsymbol{R}_1^0 \boldsymbol{a}^0 \tag{2.6}$$

p^1là tọa độ điểm gốc O_0 trong hệ tọa độ 1



Hình 2.1 Qui ước bàn tay phải và dịch chuyển giữa hai hệ tọa độ

$$\boxed{\boldsymbol{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix}} \tag{2.7}$$

Tích vô hướng có tính chất giao hoán, so sánh (2.4) và (2.7) ta nhận thấy

$$\boxed{\boldsymbol{R}_0^1 = (\boldsymbol{R}_1^0)^T = (\boldsymbol{R}_1^0)^{-1}} \tag{2.8}$$

Ma trận quay $\boldsymbol{R}_0^1$ có các đặc tính:

- det(R)=1
- mỗi cột hay hàng là vector đơn vị
- tích hai hàng hay hai cột là 0
- Mỗi cột là hình chiếu của vector đơn vị hệ tọa độ mới so với hệ tọa độ gốc
- Mỗi hàng là hình chiếu của vector đơn vị hệ tọa độ gốc so với hệ tọa độ mới

Như vậy một vật rắn trong không gian được biểu diễn so với hệ tọa độ tham chiếu bởi vector vị trí và ma trận quay. Nếu hai gốc tọa độ trùng nhau ta có phép quay quanh gốc (Hình 2.2a), là kết hợp của ba phép quay quanh trục.

Ví dụ 2.1: Xét Hình 2.2b, tìm phép quay trục 0 sang 1 và ngược lại.

Ta tìm hình chiếu của các vector đơn vị hệ trục 1 lên hệ trục 0

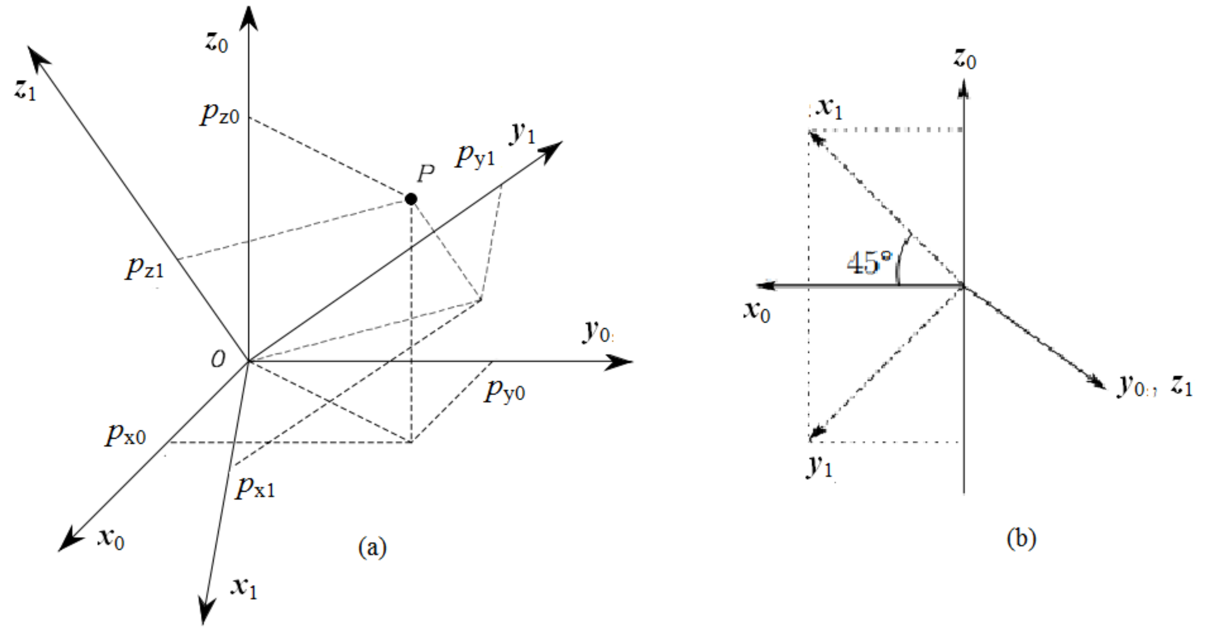
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Suy ra ma trận quay từ hệ trục 0 sang hệ trục 1

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận quay từ hệ trục 1 sang hệ trục 0 là

$$R_1^0 = (R_0^1)^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

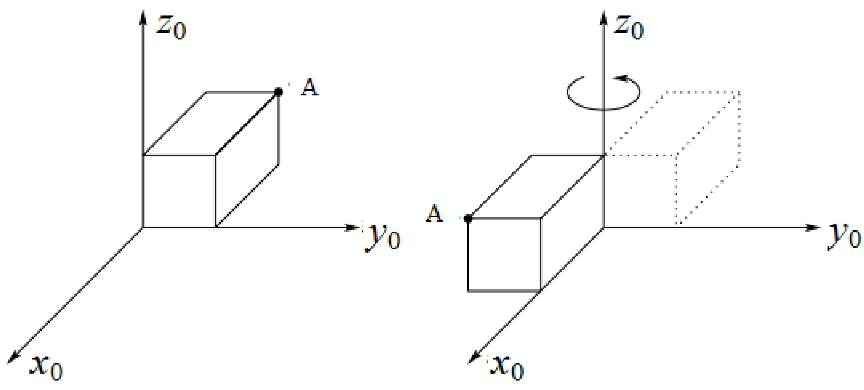


Hình 2.2 Quay quanh gốc

Ma trận quay biểu diễn phép quay hệ trục tọa độ, ngoài ra còn dùng để biểu diễn phép quay một khối hay phép biến đổi tọa độ

Ví dụ 2.2: Xét Hình 2.3, điểm A có tọa độ $\boldsymbol{a}^0=[-2\ 1\ 1]^T$, thực hiện phép quay quanh trục z_0 góc 180^o, ma trận quay

$$\boldsymbol{R}_0^1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

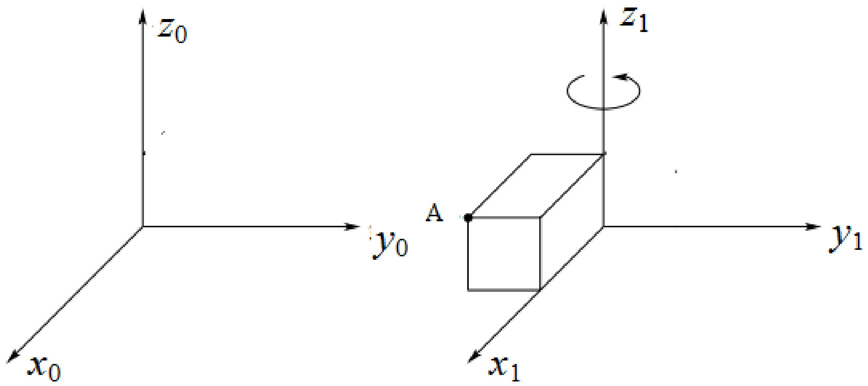


Hình 2.3 Quay một khối 180^o quanh trục z

Điểm A có tọa độ trong hệ 0 là

$$\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{a}^0=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.3: Xét Hình 2.4 với hai hệ tọa độ, tọa độ điểm A trong hệ 1 là $\boldsymbol{a}^1$=[2 -1 1]^T tìm tọa độ điểm A trong hệ tọa độ 0.



Hình 2.4 Tính tọa độ sau phép quay

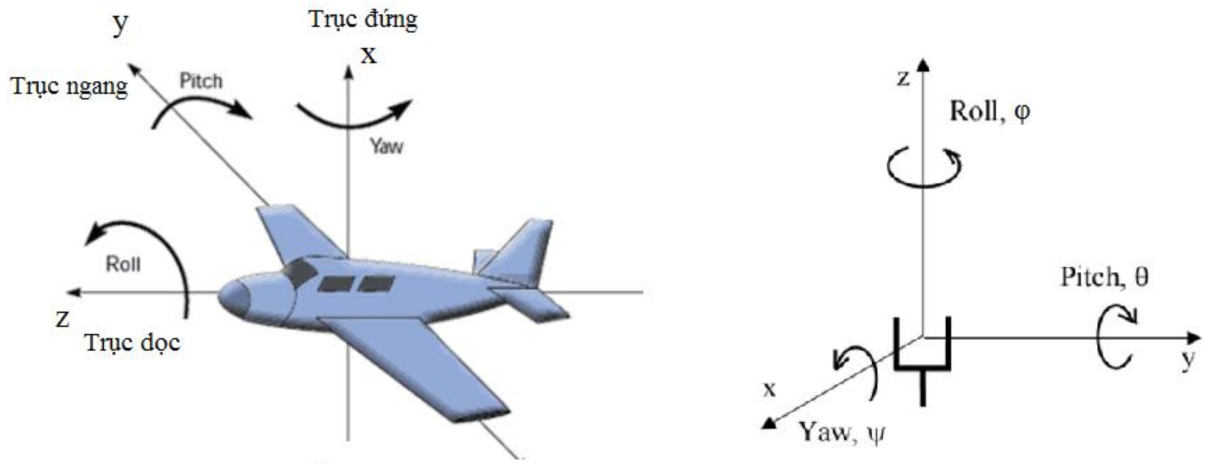
$$\boldsymbol{a}^0 = \boldsymbol{R}_0^1 \boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Các phép quay cơ bản

Cho một máy bay, hỏa tiễn hay chiếc thuyền đang chuyển động, ta gán trục z_0 theo phương chuyển động (trục dọc), trục y_0 trong mặt phẳng chuyển động (trục ngang), trục x_0 thẳng đứng, thẳng góc hai trục trên theo qui tắc bàn tay phải.

- Roll (góc lắc): góc quay góc φ quanh z_0,
- Pitch (góc ngẳng) : góc quay góc θ quanh y_0,
- Yaw (góc hướng): góc quay góc ψ quanh x_0.

Có thể hình dung ba góc này theo tư thế bàn tay: một người đứng duỗi thẳng cánh tay và bàn tay nằm ngang, cánh tay cố định, bàn tay chuyển động, góc roll là góc lật bàn tay sấp ngửa, góc pitch: quay bàn tay lên xuống, góc yaw: quay bàn tay sang phải trái.



Hình 2.5 Góc Roll Pitch Yaw

Phép quay Roll biểu diễn bởi ma trận $\boldsymbol{R}$(z, φ)

$$\boxed{\boldsymbol{R}(z,\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}} \tag{2.9}$$

Trong mặt phẳng xy 2D ma trận quay là

$$\boxed{\boldsymbol{R}(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}} \tag{2.10}$$

Phép quay Pitch biểu diễn bởi ma trận $\boldsymbol{R}$(y, θ)

$$\boxed{\boldsymbol{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}} \tag{2.11}$$

Phép quay Yaw biểu diễn bởi ma trận $\boldsymbol{R}$(x, ψ)

$$\boxed{\boldsymbol{R}(x,\psi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}} \tag{2.12}$$

Để đơn giản ta thường viết sφ thay sinφ, cφ thay coφ

2.1.3 Kết hợp phép quay

Phép quay quanh trục có hai loại là phép quay quanh trục cố định và phép quay quanh trục hiện tại. Khi thực hiện nhiều phép quay liên tiếp ta tìm một ma trận quay tổng hợp.

a/ Quay quanh trục hiện tại

Cho các hệ tọa độ 0, 1, 2, hệ tọa độ 1 suy từ hệ tọa độ 0 bởi ma trận $\boldsymbol{R}_0^1$, hệ tọa độ 2 suy từ hệ tọa độ 1 bởi ma trận $\boldsymbol{R}_1^2$, điểm A trong không gian có tọa độ lần lượt $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ trong ba hệ. Từ kết quả trước ta có

$$\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1 = \boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{p}^2$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{R}_0^2\boldsymbol{p}^2 \\ &\boldsymbol{R}_0^2 = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{R}_1^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Phép quay $\boldsymbol{R}_0^2$ gọi là phép quay kết hợp hai phép quay liên tiếp trong hai hệ trục khác nhau, do phép nhân ma trận không có tính giao hoán nên trật tự phép nhân là ma trận quay thực hiện trước thì đặt ở bên trái ma trận quay thực hiện sau, ta gọi là phép nhân sau.

Ví dụ 2.4: xét phép quay góc θ quanh trục hiện tại y_0 rồi quay góc φ quanh trục hiện tại z_1, ma trận quay là

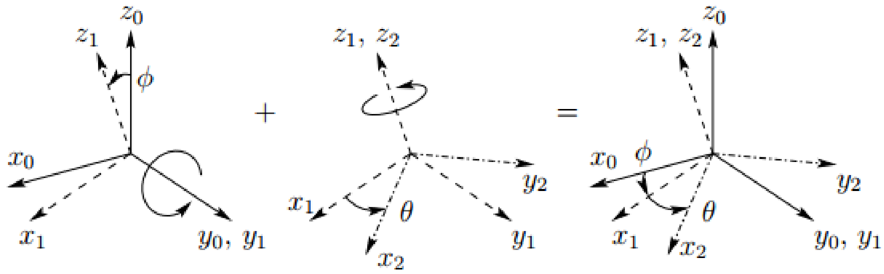
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(y,\theta)\boldsymbol{R}(z,\varphi) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & -c\theta s\varphi & s\theta \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ -s\theta c\varphi & -s\theta s\varphi & c\theta \end{bmatrix}$$

b/ Quay quanh hệ trục gốc cố định

Gỉa sử có điểm A trong hệ tọa độ gốc, ta dùng phép quay $\boldsymbol{R}_0^1$ quay A đến điểm B, sau đó dùng phép quay $\boldsymbol{R}_1^2$ quay B đến điểm C, tọa độ điểm C trong hệ tọa độ gốc là:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}_0^2\boldsymbol{a} \\ &\boldsymbol{R}_0^2 = \boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{R}_0^1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ma trận $\boldsymbol{R}_0^2$ là tích của phép nhân trước, phép quay thực hiện trước thì ma trận quay đặt bên phải.



Hình 2.6 Quay quanh trục hiện tại

2.1.4 Phép quay YAW PITCH ROLL XYZ quanh trục cố định

Thực hiện ba phép quay theo thứ tự góc ψ quanh trục x_0, góc θ quanh trục y_0 và góc φ quanh trục z_0,

Ví dụ 2.5: Cho góc quay ψ= θ=45^o , φ=90^o, ta tính được

```
phi=90;psi=45;theta=45
cphi=cosd(phi);
sphi=sind(phi);
cpsi=cosd(psi);
```

$$\boldsymbol{R}_{XYZfixed} = \boldsymbol{R}(z,\varphi)\boldsymbol{R}(y,\theta)\boldsymbol{R}(x,\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R_{XYZfixed} = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}} \quad (2.15)$$

```
spsi=sind(psi);
ctheta=cosd(theta);
stheta=sind(theta);
R=[cphi*ctheta cphi*stheta*spsi-sphi*cpsi cphi*stheta*cpsi+sphi*spsi;
    sphi*ctheta  sphi*stheta*spsi+cphi*cpsi sphi*stheta*cpsi-cphi*cpsi;
    -stheta ctheta*spsi ctheta*cpsi]
R =
         0   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.5000    0.5000
   -0.7071    0.5000    0.5000
```

Bây giờ cho ma trận quay ***R*** có 12 phần tử (2.13). Ta đi tìm ba góc φ θ ψ, đây là bài toán động học quay đảo. So sánh (2.12) và (2.13), từ r_{21} và r_{11} suy ra (2.14)

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Nếu r_{21} và r_{11} không cùng 0 ($\theta \neq \pm 90^0$)

Roll: $$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{r_{21}}{r_{11}},\ \varphi = \mathrm{atan2}(r_{21}, r_{11})} \tag{2.17}$$

*atan2(y,x) cho góc tính bằng rad mà tang là y/x, atan2d(y,x) cho góc tính bằng độ mà tang là y/x.

Bình phương r_{32} và r_{33} rồi cộng lại lấy căn ta được cosθ, xét thêm r_{31} ta được

Pitch: $$\boxed{\mathrm{tg}\theta = \frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}},\ \theta = \mathrm{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})} \tag{2.18}$$

Từ r_{32} và r_{33} suy ra

Yaw: $$\boxed{\mathrm{tg}\psi = \frac{r_{32}}{r_{33}},\ \psi = \mathrm{atan2}(r_{32}, r_{33})} \quad [\tag{2.19}$$

Ví dụ 2.6: Cho ma trận chỉ phương hệ trục $Ox_1y_1z_1$ so với $Ox_0y_0z_0$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.5 & 0.5 \\ -0.7071 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
r11=0;
r21=0.7071;
r31=-0.7071;
r32=0.5;
r33=0.5;
phi=atan2d(r21,r11)
theta=atan2d(-r31,sqrt(r32*r32+r33*r33))
psi=atan2d(r32,r33)
```

phi = 90, theta = 44.9997, psi = 45

Nếu r_{21} và r_{11} cùng 0 thì $\theta = \pm 90^0$, ta có trường hợp suy biến, có vô số nghiệm cho φ và ψ.

2.1.5 Phép quay RPY ZYX quanh trục hiện tại

Phép quay quanh trục cố định khó thực hiện đối với bàn tay robot, giả sử có hệ trục $Ox_0y_0z_0$, ta thực hiện phép quay góc φ quanh z_0, lúc này $x_0 \rightarrow x_1, y_0 \rightarrow y_1$, tiếp tục quay góc θ quanh y_1, $x_1 \rightarrow x_2$, $z_0 \rightarrow z_2$, cuối cùng quay góc ψ quanh x_2.

Ma trận quay là

$$\boldsymbol{R}_{ZYXmobile} = \boldsymbol{R}(z,\varphi)\boldsymbol{R}(y,\theta)\boldsymbol{R}(x,\psi)$$

$$\boxed{R_{ZYXmobile} = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}} \tag{2.20}$$

So sánh (2.15) và (2.20) ta thấy kết quả giống nhau. Ta nhận thấy qui tắc nhân ma trận quay theo trục hiện tại thực hiện từ trái sang phải, phép quay thực hiện đầu tiên dặt ở bên trái nhất (phép nhân sau).

Nếu có nhiều phép quay ta thực hiện tương tự Ví dụ 2.7 sau đây

Ví dụ 2.7: Tìm ma trận ***R*** thực hiện năm phép quay sau: quay góc 30^o quanh trục hiện tại *x*, góc 60^o quanh trục hiện tại *z*, góc 45^o quanh trục cố định z_0, góc 90^o quanh trục hiện tại *y*, quay góc 180^o quanh trục cố định x_0.

Ta bắt đầu với ***R***(x,30) sau đó theo thứ tự nhân phía trước nếu quay trong hệ trục cố định và nhân phía sau nếu quay trong hệ trục hiện tại

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x,160)\boldsymbol{R}(z,45)\ \boldsymbol{R}(x,30)\ \boldsymbol{R}(z,60)\ \boldsymbol{R}(y,90)$$

2.1.6 Phép quay góc Euler ZYZ quanh trục hiện tại

Ta thực hiện phép quay góc φ quanh trục *z*, góc θ theo trục hiện tại *y* rồi góc ψ theo trục hiện tại *z*

$$\boxed{\begin{gathered} R_{ZYZmobile} = R(z,\varphi)R(y,\theta)R(z,\psi) = \\ \begin{bmatrix} c\varphi c\theta c\psi - s\varphi s\psi & -c\varphi c\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta \\ s\varphi c\theta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi c\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \end{gathered}} \tag{2.21}$$

2.1.7 Quay quanh một trục tùy ý

Đôi khi ta muốn tạo chuyển động quay quanh một trục, ví dụ khi dùng robot vặn vít hay vặn ốc. Xét Hình 2.7 ta muốn quay khối rắn hệ trục Oxyz góc θ quanh trục *r* đi qua gốc. Phân tích vector *r* thành ba thành phần $[r_x\ r_y\ r_z]^T$ và các góc α, β

Ta sẽ đưa trục ***r*** về trục z, quay quanh trục z góc θ sau đó quay trở lại trục ***r*** về vị trí cũ, quá trình gồm năm bước:

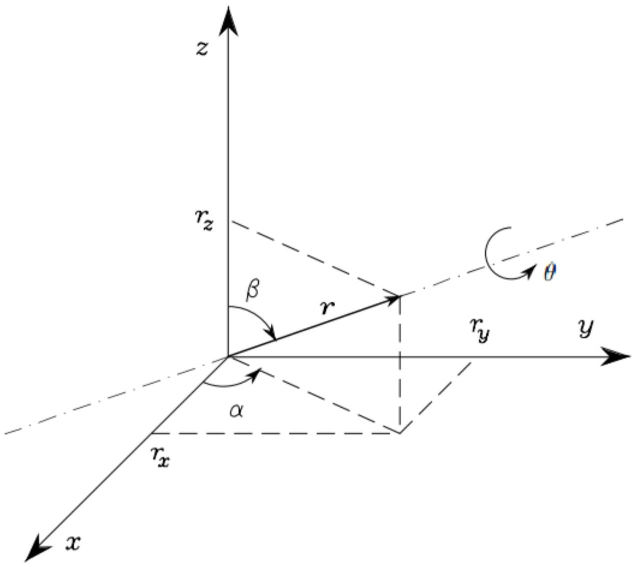
- quay quanh trục z góc –α rồi quay quanh trục y góc –β để đưa ***r*** thẳng hàng với z

- quay quanh trục z góc θ
- quay quanh trục y góc β rồi quay qunh trục z góc α để đưa ***r*** trở về vị trí cũ.

Vậy phép quay quanh ***r*** góc θ thực hiện bởi ma trận quay

$$\boxed{\boldsymbol{R}(r,\theta)=\boldsymbol{R}(z,\alpha)\boldsymbol{R}(y,\beta)\boldsymbol{R}(z,\theta)\boldsymbol{R}(y,-\beta)\boldsymbol{R}(z,\alpha)} \tag{2.22}$$

Ta tìm các góc α, β từ các thành phần của *r* để tính *R*(*r*, θ).



Hình 2.7 Quay góc θ quanh trục r

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{r_y}{\sqrt{r_x^2+r_y^2}},\cos\alpha=\dfrac{r_x}{\sqrt{r_x^2+r_y^2}},\\ \sin\beta=\sqrt{r_x^2+r_y^2},\cos\beta=r_z\end{array}}$$

Suy ra ma trận *R*(*r*, θ)

$$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{R}(r,\theta)=\begin{bmatrix} r_x^2a+c\theta & r_xr_ya-r_zs\theta & r_xr_za+r_ys\theta \\ r_xr_ya+r_zs\theta & r_y^2a+c\theta & r_yr_za-r_xs\theta \\ r_xr_za-r_ys\theta & r_yr_za+r_xs\theta & r_z^2a+c\theta \end{bmatrix}\\ a=1-c\theta\end{array}} \tag{2.23}$$

Sau đây xét bài toán ngược, cho ma trận quay (2.16) ta tìm *r* và θ. Kết quả là

$$\boxed{\begin{aligned}&\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right),\\ &\boldsymbol{r} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23}\\ r_{13}-r_{31}\\ r_{21}-r_{12}\end{bmatrix}\end{aligned}} \tag{2.24}$$

2.1.8 Ma trận biến đổi thuần nhất

Phương trình (2.5) cho tọa độ của điểm A tịnh tiến và quay đối với hệ tọa độ gốc, để thuận tiện cho việc tính toán ta đặt

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{H}_0^1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_0^1 & \boldsymbol{p}^0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}} \tag{2.25}$$

với a là tọa độ ba thành phần, như vậy (2.5) trở thành:

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{a}}^0 = \boldsymbol{H}_0^1\tilde{\boldsymbol{a}}^1} \tag{2.26}$$

$\boldsymbol{0}$ là vector hàng [0 0 0], $\boldsymbol{H}_0^1$ là ma trận 4x4 gồm ma trận quay $\boldsymbol{R}_0^1$ chuyển hệ trục 0 sang hệ trục 1 và $\boldsymbol{p}^0$ vectơ tịnh tiến từ gốc O_0 đến gốc O_1, gọi là ma trận biến đổi thuần nhất, phương trình (2.26) chuyển tọa độ điểm A trong hệ tọa độ 1 sang hệ tọa độ 0 bằng phép nhân ma trận.

Ngược lại cho tọa độ điểm A trong hệ tọa độ 0 ta có thể tìm tọa độ trong hệ tọa độ 1 bằng biểu thức

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{a}}^1 = (\boldsymbol{H}_0^1)^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}^0 = \boldsymbol{H}_1^0\tilde{\boldsymbol{a}}^0\\ &\boldsymbol{H}_1^0 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_0^{1T} & -\boldsymbol{R}_0^{1T}\boldsymbol{p}^0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^0 & -\boldsymbol{R}_1^0\boldsymbol{p}^0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\end{aligned}} \tag{2.27}$$

$\boldsymbol{R}_1^0$ là ma trận quay từ hệ 1 sang hệ 0 biểu thị trong hệ tọa độ 1

Các ma trận đồng nhất đặc biệt quay Rot và tịnh tiến Trans:

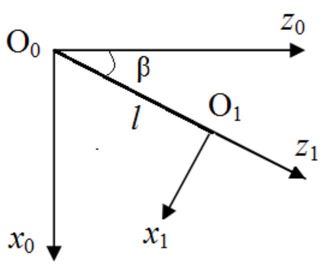
$$Rot_{x,\psi}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c\psi&-s\psi&0\\0&s\psi&c\psi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, Rot_{y,\theta}=\begin{bmatrix}c\theta&0&s\theta&0\\0&1&0&0\\-s\theta&0&c\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$
$$Rot_{z,\varphi}=\begin{bmatrix}c\varphi&-s\varphi&0&0\\s\varphi&c\varphi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, Trans_d=\begin{bmatrix}1&0&0&d_x\\0&1&0&d_y\\0&0&1&d_z\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Ma trận H có dạng tổng quát

$$\boldsymbol{H}_0^1=[\boldsymbol{n}\quad \boldsymbol{s}\quad \boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{d}]=\begin{bmatrix}n_x&s_x&a_x&d_x\\n_y&s_y&a_y&d_y\\n_z&s_z&a_z&d_z\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2.29}$$

n: vector đơn vị hướng của trục x_1 trong hệ trục 0
s: vector đơn vị hướng của trục y_1 trong hệ trục 0
t: vector đơn vị hướng của trục z_1 trong hệ trục 0
d : vector khoảng cách hai gốc tọa độ từ O_0 đến O_1, trong hệ trục 0 O_0 O_1 x_0 z_0 x_1 z_1 l θ β

Ví dụ 2.8: Tìm ma trận biến đổi hai hệ trục theo hình sau



Hình 2.8 Phép quay quanh trục y và tịnh tiến

$$H_0^1=Rot_{y,\beta}Trans_l=\begin{bmatrix}c\beta&0&s\beta&ls\beta\\0&1&0&0\\-s\beta&0&c\beta&lc\beta\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Nếu có một loạt phép biến đổi $0\to1\to2\ldots\to n$, trong hệ tọa độ hiện tại, điểm A trong hệ tọa độ n có tọa độ $\tilde{\boldsymbol{a}}^n$ thì tọa độ trong hệ tọa độ 0 là:

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{a}}^0=\boldsymbol{H}_0^1\boldsymbol{H}_1^2..\boldsymbol{H}_{n-1}^n\tilde{\boldsymbol{a}}^n=\boldsymbol{H}_0^n\tilde{\boldsymbol{a}}^n} \tag{2.31}$$

Chú ý là nếu biến đổi trong hệ tọa độ cô định thì ta phải dùng qui tắc nhân trước.

2.2 ĐỘNG HỌC THUẬN ROBOT

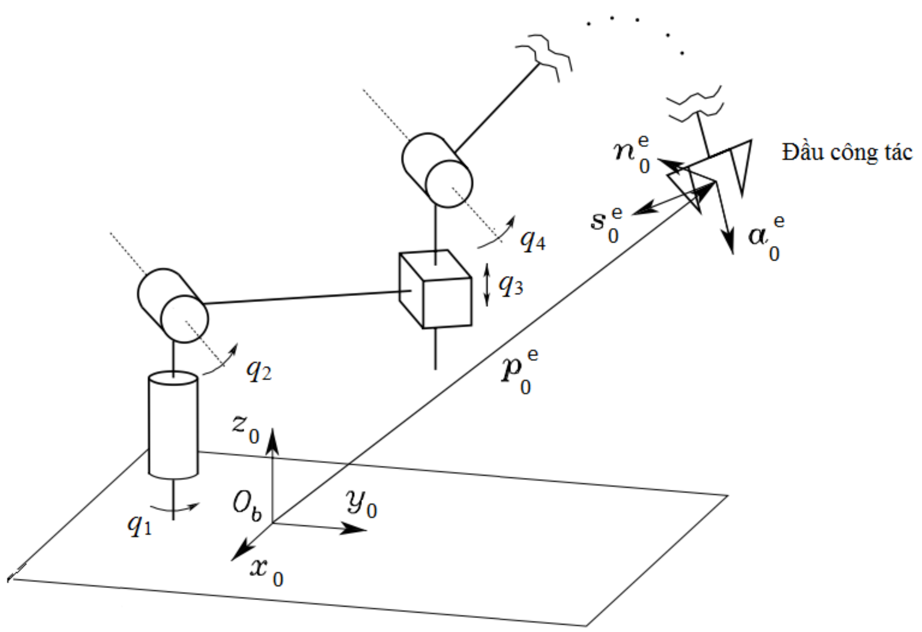
Cho robot nối tiếp *n* bậc tự do (Hình , các khớp nối một bâc tự do quay hay trượt, các biến khớp là góc quay hay khoảng dịch chuyển, ta ký hiệu là q_i. Bài toán động học thuận là tìm vị trí và hướng đầu công tác (end effector, gripper) theo vector biến khớp $q=[q_1\ q_2\ \ldots q_n]^T$.

Vị trí đầu công tác xác định bởi vector $\boldsymbol{p}_0^e$ nối từ gốc tọa độ tham chiếu O0xyz đến gốc hệ tọa độ liên kết với đần công tác, trong hệ tọa độ tham chiếu.

Hướng đầu công tác là ma trận $\boldsymbol{R}_0^e$ vuông 3x3 gồm ba vector $\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_0^e & \boldsymbol{s}_0^e & \boldsymbol{a}_0^e\end{bmatrix}$ là các vector đơn vị chỉ phương của hệ tọa độ liên kết với đần công tác, trong hệ tọa độ tham chiếu. Các vector chỉ phương được chọn tùy theo cấu tạo đầu công tác, nếu là tay kẹp thì *a* thẳng góc mặt phẳng tay kẹp, *n* trong mặt phẳng tay kẹp và theo chiều tay kẹp, *s* chọn theo qui tắc bàn tay phải.

Theo qui tắc biến đổi đồng nhất, động học thuận xác định bởi ma trận

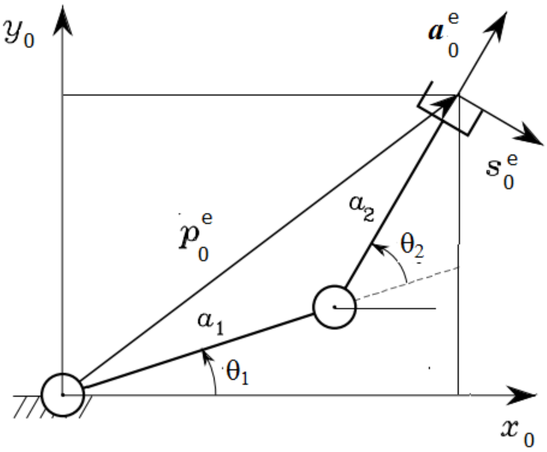
$$\boxed{\boldsymbol{T}_0^e(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_0^e & \boldsymbol{p}_0^e \\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}} \tag{2.32}$$



Hình 2.9 Vị trí và hướng đầu công tác

2.2.1 Tính động học thuận trực tiếp

Đối với các cơ cấu đơn giản ta dùng phương pháp hình học để tính động học thuận, ví dụ xét cánh tay phẳng hai bậc tự do quay



Hình 2.10 Cánh tay phẳng 2DOF quay

Tọa độ tâm tay kẹp:

$$\begin{aligned} x_e &= a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_e &= a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Thành phần của vector chỉ phương:

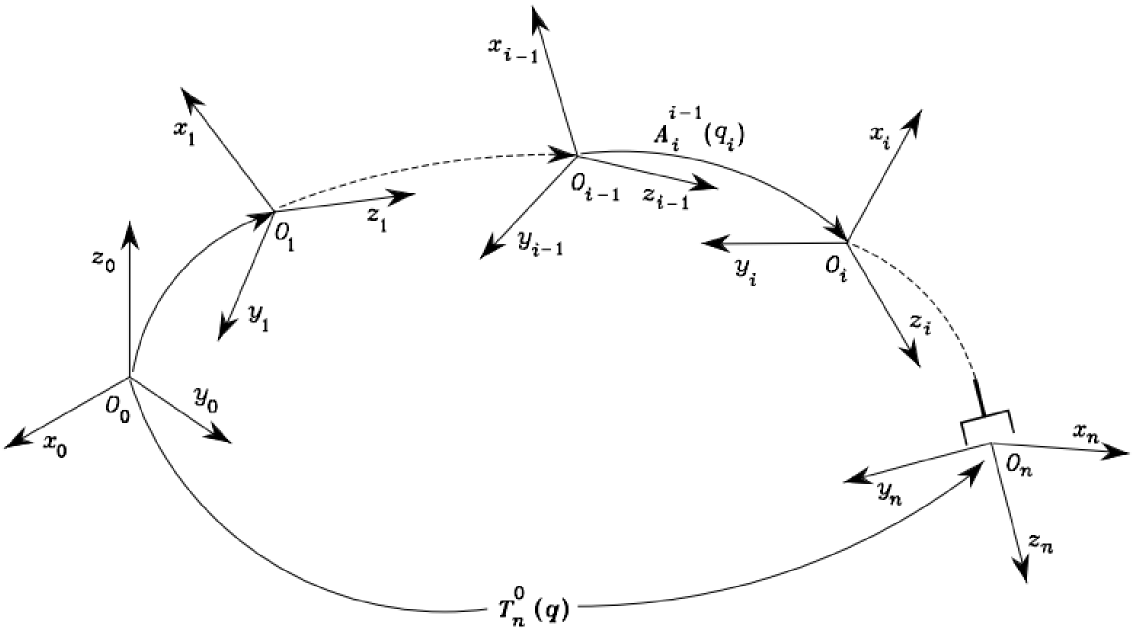
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_0^e &= \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad \sin(\theta_1 + \theta_2)\right]^T \\ \boldsymbol{s}_0^e &= \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 - 90^0) \quad \sin(\theta_1 + \theta_2 - 90^0)\right]^T \\ &= \left[\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad -\cos(\theta_1 + \theta_2)\right]^T \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ma trận động học thuận:

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & s(\theta_1 + \theta_2) & c(\theta_1 + \theta_2) & a_1 c\theta_1 + a_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & -c(\theta_1 + \theta_2) & s(\theta_1 + \theta_2) & a_1 s\theta_1 + a_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{2.35}$$

2.2.2 Qui tắc Denavit-Hartenberg

Xét robot nối tiếp *n* bậc tự do gồm *n* khớp một bậc tự do, *n*+1 khâu, khâu 0 là đế robot, cố định, khâu *n* là đầu công tác, mỗi khâu được gắn hệ trục tọa độ, hệ tọa độ tham chiếu $O_0x_0y_0z_0$ cố định và liên kết với đế robot, hệ tọa độ $O_ix_iy_iz_i$ liên kết với khâu thứ *i* và chuyển động khi khâu *i* chuyển động, hệ tọa độ $O_nx_ny_nz_n$ liên kết với đầu công tác. Qui tắc Denavit-Hartenberg (gọi tắt là D-H) ra đời năm 1955, qui định cách vẽ các hệ tọa độ để thống nhất cách tính động học thuận.



Hình 2.11 Các hệ tọa độ liên kết

Vị trí và hướng hệ tọa độ *i*+1 so với hệ *i* được xác định bởi ma trận đồng nhất

$$\boldsymbol{H}_i^{i+1}(q_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_i^{i+1} & \boldsymbol{p}_i^{i+1} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}_i^{i+1}$ là ma trận chỉ phương của hệ tọa độ *i*+1 trong hệ tọa độ *i*, $\boldsymbol{p}_i^{i+1}$ là vị trí của gốc hệ tọa độ *i*+1 trong hệ tọa độ *i*.

Vị trí và hướng hệ tọa độ *n* (đầu công tác) là tích các ma trận

$$\boxed{\boldsymbol{T}_0^n(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}_0^1(q_1)\boldsymbol{H}_1^2(q_2)...\boldsymbol{H}_{n-1}^n(q_n)} \tag{2.36}$$

Nếu ta chọn hệ tọa độ tham chiếu ở vị trí khác thì ma trận từ hệ tham chiếu này đến hệ tọa độ 0 là $\boldsymbol{H}_{ref}^0$. Nếu đầu công tác gắn một dụng cụ và ma trận từ đầu công tác đến hệ tọa độ dụng cụ là $\boldsymbol{H}_n^{tool}$. Vị trí và hướng hệ tọa độ của dụng cụ so với hệ tọa độ tham chiếu xác định bởi:

$$\boxed{\boldsymbol{T}_{ref}^{tool}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}_{ref}^0\boldsymbol{T}_0^n(\boldsymbol{q})\boldsymbol{H}_n^{tool}} \tag{2.37}$$

Sau đây trình bày cách vẽ hệ trục và cách tính ma trận ***H***

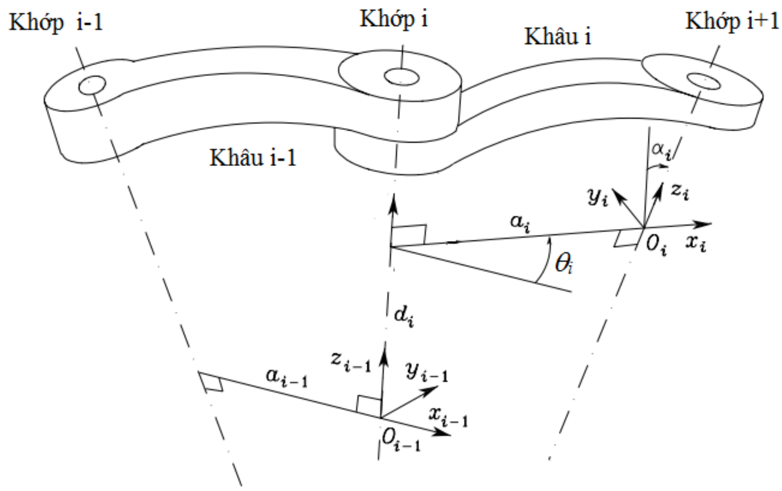
- Robot n bậc tự do có n+1 hệ trục đánh số từ 0 đến n.
- Hệ trục *i* gồm ba trục $x_iy_iz_i$ thẳng góc nhau từng đôi theo qui tắc bàn tay phải, miêu tả chuyển động của khớp *i*+1, khớp *i* nối khâu *i* và khâu *i*+1, hệ trục *i* gắn liền với khâu *i*, hệ trục 0 cố định gắn liền đế robot.

- Trục z_0 hướng theo trục quay hay trục tịnh tiến (gọi chung là trục chuyển động của khâu 1, gốc O_0 và trục x_0 tùy chọn,

- Trục z_i hướng theo trục chuyển động của khâu *i*+1 (khớp *i*+1),

- Gốc O_i là giao điểm trục z_i với pháp tuyến chung của z_{i-1} và z_i, nếu hai trục song song nhau gốc O_i chọn tùy ý, nếu hai trục cắt nhau O_i là giao điểm,

- Trục x_i trên đường pháp tuyến chung của z_{i-1} và z_i, hướng từ khớp *i* đến khớp *i*+1, x_i thẳng góc z_{i-1} và z_i



Hình 2.12 Qui tắc Denavit-Hartenberg

- Trục y_i kết hợp với z_i , x_i theo qui tắc bàn tay phải,

- Hệ trục cuối cùng có x_n thẳng góc z_{n-1}, z_n thẳng góc x_n và thường chọn là song song z_{n-1}.

- Hệ trục cuối cùng liên kết với tay kẹp, gốc O_e thường chọn ở giữa tay kẹp, trục z_e thường gọi là trục ***a*** (approach) theo hướng ngón tay, x_e lả trục ***n*** (normal) thẳng góc mặt phẳng bàn tay, còn y_e là ***s*** (sliding).

Kế tiếp xác định bốn thông số:

a_i: khoảng cách giữa hai trục z_{i-1} và z_i,

d_i: khoảng cách giữa hai trục x_{i-1} và x_i,

α_i: góc giữa hai trục z_{i-1} và z_i với trục quay là x_i, chiều dương là chiều lượng giác,

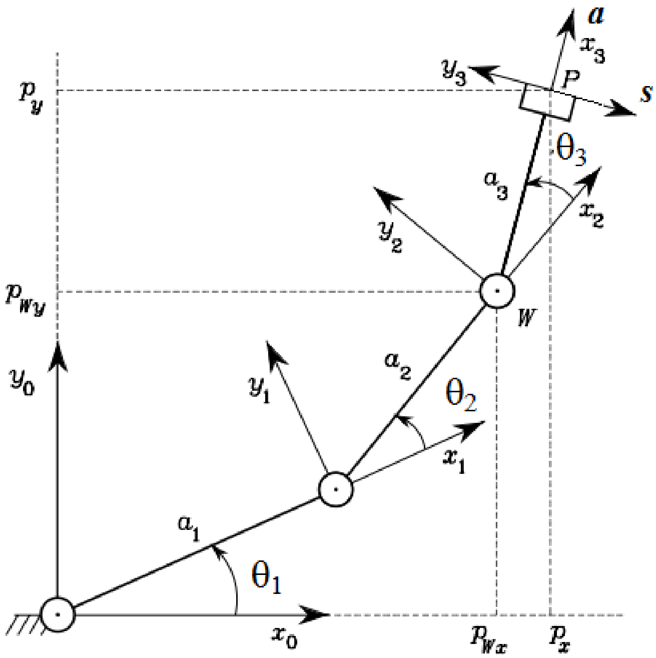
θ_i: góc giữa hai trục x_{i-1} và x_i với trục quay là z_{i-1}, chiều dương là chiều lượng giác.

a_i, α_i là hằng số, nếu khớp i-1 là khớp quay thì d_i là hằng số, θ_i là biến khớp, nếu khớp *i*-1 là khớp tịnh tiến thì d_i là biến khớp, θ_i là hằng số.

Dựa vào bốn thông số ta tính ma trận đồng nhất $\boldsymbol{H}_{i-1}^{i}$. Chọn một hệ tọa độ trùng với hệ tọa độ i-1, quay góc θ_i quanh trục z_{i-1}, tịnh tiến d_i dọc trục z_{i-1}, , tịnh tiến khoảng cách a_i dọc trục x_i rồi quay góc α_i quanh trục x_i, ta được hệ tọa độ *i*. Từ lý luận trên ta được (2.37) (tham khảo 2.28)

$$H_{i-1}^{i} = Rot_{z,\theta} Trans_{z,d} Trans_{x,a} Rot_{x,\alpha}$$
$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Ví dụ 2.9: Cánh tay phẳng ba bậc tự do quay Hình 2.12



Hình 2.13 Cánh tay phẳng ba bậc tự do quay

Các trục z_0, z_1, z_2, z_3 thẳng góc mặt phẳng robot (mặt phẳng xy), do đó α=0, các trục x thẳng hàng các khâu, góc giữa hai trục x là góc θ, thông số a là khoảng cách hai trục *z*, tức là chiều dài các khâu, các gốc nằm cùng mặt phẳng nên *d*=0. Ta có bảng thông số: θ_1 θ_2 θ_3

Khâu	*a*	α	θ	*d*
1	a_1	0	θ_1	0
2	a_2	0	θ_2	0
3	a_3	0	θ_3	0

$$H_{i-1}^{i}(\theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & a_i s\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Động học thuận cho bởi biểu thức (2.38), c_{123} có nghĩa $\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

$$\boldsymbol{T}_0^3(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}_0^1(\theta_1)\boldsymbol{H}_1^2(\theta_2)\boldsymbol{H}_2^3(\theta_3)$$
$$= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Đối với tay kẹp, ta nhận thấy hệ trục O_3xyz không phù hợp với hệ trục ***n s a***,vậy bổ sung thêm ma trận quay $\boldsymbol{x}_3 \rightarrow \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}_3 \rightarrow \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{z}_3 \rightarrow \boldsymbol{n}$. Trong hệ trục O_3xyz $\boldsymbol{n}$=[0 0 1]^T **,** $\boldsymbol{s}$=[0 -1 0]^T**,** $\boldsymbol{a}$=[1 0 0]^T, ma trận chuyển đổi là $\boldsymbol{T}_3^e$ (2.40).

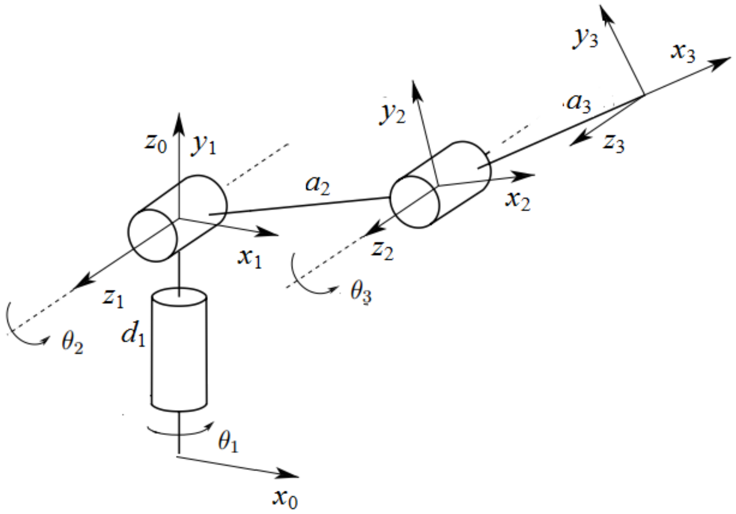
$$T_3^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Ví dụ 2.10: Cánh tay khuỷu ba bậc tự do (elbow, anthropomorphic (phỏng sinh))

Bảng DH

Khâu	a	α	d	θ
1	0	90^o	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$\boldsymbol{T}_0^3 = \boldsymbol{H}_0^1\boldsymbol{H}_1^2\boldsymbol{H}_2^3$$
$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



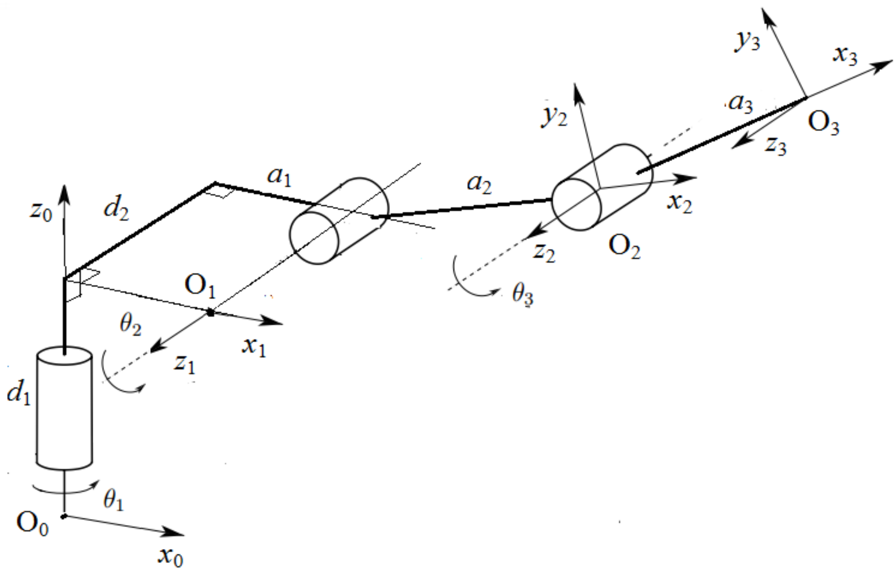
Hình 2.14 Cánh tay khuỷu

$$
= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2c_2 + a_3s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.41}
$$

Ví dụ 2.11: Cánh tay khuỷu lệch trục

Bảng DH

Khâu	a	α	d	θ
1	0	-90^o	0	θ_1
2	0	90^o	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	θ_3



Hình 2.15 Cánh tay khuỷu lệch trục

Cánh tay này sử dụng trong một số robot như PUMA, Scorbot

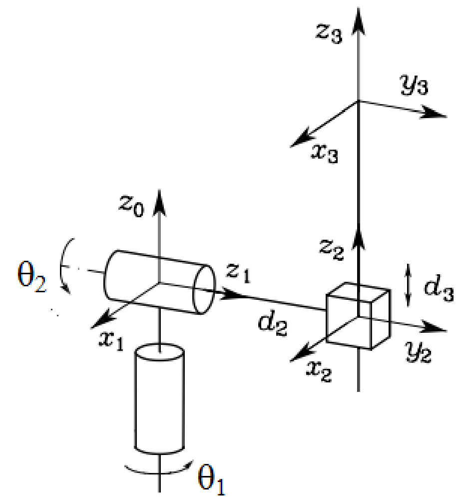
Bảng DH:

Khâu	a	α	d	θ
1	a_1	90^o	d_1	θ_1
2	a_2	0	d_2 (âm)	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$\boldsymbol{T}_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) + s_1d_2 + a_1c_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) - c_1d_2 + a_1s_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & d_1 + a_2s_2 + a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.12: Robot RRP



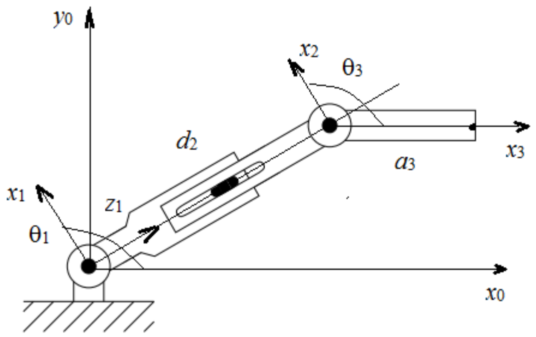
Hình 2.16 Cánh tay RRP

$$\boxed{\boldsymbol{T}_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad (2.42)$$

Ví dụ 2.13: Việc tính toán bằng tay thường tốn thời gian và dễ nhầm lẫn, ví dụ này trình bày một chương trình tính động học thuận robot phẳng RPR (Hình 2.17) dùng Symbolic Math Toolbox, độc giả có thể tham khảo để áp dụng cho các bài toán khác và có thể mở rộng dùng GUI.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, bảng DH là

Khâu	a	α	d	θ
1	0	90^o	0	θ_1
2	0	-90^o	d_2	0
3	a_3	0	0	θ_3



Hình 2.17 Robot RPR

```
%calculate forward kinematics of 3 dof RPR robot
clc
syms a alp d th d1 d2 th1 th3 pi a3;
hi=[cos(th)  -cos(alp)*sin(th) sin(alp)*sin(th)   a*cos(th);
    sin(th)  cos(alp)*cos(th)  -sin(alp)*cos(th)  a*sin(th);
     0       sin(alp)          cos(alp)           d        ;
     0       0                 0                  1        ];
a=0; alp=pi/2; d=0; th=th1;
h1=subs(hi);
h1=expand(h1)
a=0; alp=-pi/2;th=0 ; d=d2;
h2=subs(hi);
h2=expand(h2)
a=a3; alp=0;d=0;th=th3;
h3=subs(hi);
h3=expand(h3)
%forward kinematics
h03=h1*h2*h3;
%Orientation
R=h03(1:3,1:3)
%position of end effector
p=h03(1:3,4)
%verify
th1=0;th3=0;
h=subs(h03)
```

Answer

```
R =
[cos(th1)*cos(th3)-sin(th1)*sin(th3),-cos(th1)*sin(th3)-
cos(th3)*sin(th1), 0]
[cos(th1)*sin(th3)+cos(th3)*sin(th1),cos(th1)*cos(th3)-
sin(th1)*sin(th3), 0]
```

```
[0,                                       0, 1]

p =
 d2*sin(th1)+a3*cos(th1)*cos(th3)-a3*sin(th1)*sin(th3)
 a3*cos(th1)*sin(th3)-d2*cos(th1)+a3*cos(th3)*sin(th1)
                                                     0
h =
[ 1, 0, 0,  a3]
[ 0, 1, 0, -d2]
[ 0, 0, 1,   0]
[ 0, 0, 0,   1]
```

Kết quả tính toán cho thấy

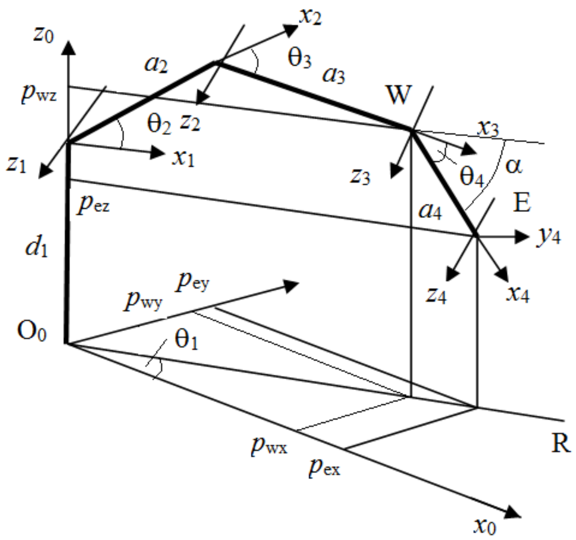
$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c_{13} & -s_{13} & 0 \\ s_{13} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_3 c_{13} + d_2 s_1 \\ a_3 s_{13} - d_2 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.14 Cánh tay khuỷu bốn bậc tự do

Với cánh tay khuỷu bốn bậc tự do ta có thể điều khiển vị trí [p_{ex}, p_{ey} $p$ez] và một hướng góc α của bàn tay, các trục $z_1..z_4$ song song nhau và thẳng góc z_0, các trục $x_1..x_4$ xuôi theo chiều các thanh, biến khớp θ_i là góc giữa x_{i-1} và x_1, khi cánh tay duỗi thẳng ra ta cho θ_i=0 tương ứng vị trí Home, góc nghiêng của bàn tay so với mặt phẳng ngang là $\alpha = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.

Bảng DH

Khâu	α	*a*	*d*	θ
1	90^o	0	d1	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	0	a_3	0	θ_3
4	0	a_4	0	θ_4



Hình 2.18 Cánh tay khuỷu bốn bậc tự do

Sử dụng (2.41) ta được

$$\boldsymbol{T}_0^4=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2c_2+a_3s_{23}+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_4c_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & a_4s_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

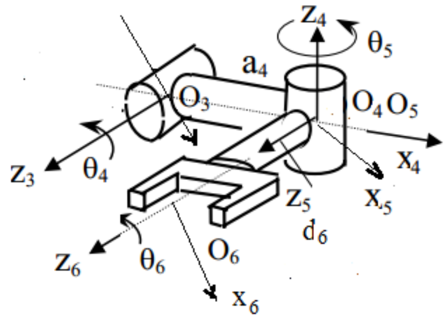
$$=\begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & c_1[a_2c_2+a_3c_{23}+a_4c_{234}] \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1[a_2c_2+a_3c_{23}+a_4c_{234}] \\ s_{234} & c_{234} & 0 & a_2s_2+a_3s_{23}+a_4s_{234}+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Ví dụ 2.15: Cổ tay ba bậc tự do quay

Đầu công tác (tay kẹp, bàn tay) robot thường có từ hai đến ba bậc tự do quay tương tự bàn tay người, các trục quay z_3 z_4 z_5 gặp nhau ở tâm cổ tay, trục z_3 nằm ngang, trục z_4 trong mặt phẳng đứng, trục z_5 dọc theo bàn tay, khoảng cách từ tâm cổ tay đến tâm bàn tay là d_6 là khoảng cách giữa x_5 và x_6. Các góc quay là θ_4 θ_5 θ_6 tương ứng góc Pitch, Yaw, Roll (θ ψ φ). Hệ tọa độ liên kết với bàn tay là $x_6\,y_6\,z_6$ (***n s a***).

Bảng DH

Khâu	α	*a*	*d*	θ
4	-90^o	a_4	0	θ_4
5	90^o	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6



Hình 2.19 Cổ tay ba bậc tự do

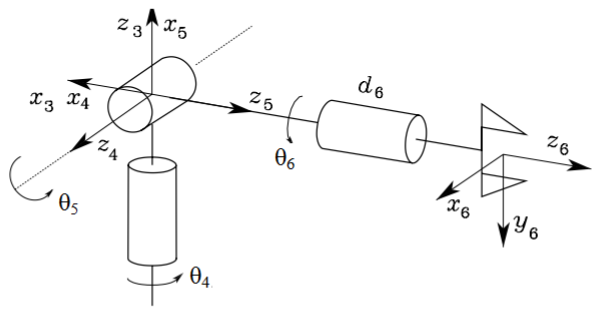
$$\boldsymbol{T}_3^6 = \boldsymbol{H}_3^4 \boldsymbol{H}_4^5 \boldsymbol{H}_5^6 =$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & a_4 c_4 \\ s_4 & 0 & c_4 & a_4 s_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 s_5 + a_4 c_4 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 + a_4 s_4 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad (2.44)$$

Nếu a_4=0 các trục quay cắt nhau, so sánh (2.21) và (2.44) ta nhận thấy hai ma trận quay giống nhau, vậy có sự tương đồng giữa các góc $\theta_4\ \theta_5\ \theta_6$ và các góc Euler $\varphi\ \theta\ \psi$

Một cách đặt hệ trục kiểu khác (khớp cầu) trình bày trên Hình 2.20



Hình 2.20 Cổ tay khớp cầu với cách đặt hệ trục kiểu khác

Bảng DH

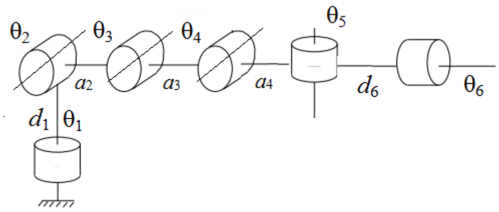
Khâu	α	a	d	θ
4	-90°	0	0	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

$$\boldsymbol{T}_3^6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

Khi bàn tay ở vị trí như trên Hình 2.15, $\theta_4=0$, $\theta_5=-90^o$, $\theta_6=90^o$

$$\boldsymbol{T}_3^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.16: Robot khuỷu 6 bậc tự do gồm cánh tay khuỷu 3DOF và cổ tay 3DOF



Hình 2.21 Robot khuỷu 6 bậc tự do

Khâu	*a*	α	*d*	θ
1	0	90^o	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3
4	a_4	-90^o	0	θ_4
5	0	90^o	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

Ta ghép hai ma trận (2.41) và (2.44)

$$\boldsymbol{T}_0^6 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2c_2 + a_3s_{23} + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 + a_4c_4 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 + a_4s_4 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_{ex} \\ n_y & s_y & a_y & p_{ey} \\ n_z & s_z & a_z & p_{ez} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

$$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} c_1c_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-c_1s_{23}[s_4c_5c_6+c_4s_6]-s_1s_5c_6 \\ s_1c_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-s_1s_{23}[s_4c_5c_6+c_4s_6]+c_1s_5c_6 \\ s_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]+c_{23}[s_4c_5c_6+c_4s_6] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1[c_{234}c_5c_6-s_{234}s_6]-s_1s_5c_6 \\ s_1[c_{234}c_5c_6-s_{234}s_6]+c_1s_5c_6 \\ c_{234}s_6+s_{234}c_5c_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} c_1c_{23}[-c_4c_5s_6-s_4c_6]-c_1s_{23}[-s_4c_5c_6+c_4c_6]-s_1s_5s_6 \\ s_1c_{23}[-c_4c_5s_6-s_4c_6]-s_1s_{23}[-s_4c_5c_6+c_4c_6]+c_1s_5c_6 \\ s_{23}[-c_4c_5s_6-s_4c_6]+c_{23}[-s_4c_5c_6+c_4c_6] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c_1[c_{234}c_5s_6+s_{234}c_6]+s_1s_5s_6 \\ -s_1[c_{234}c_5c_6+s_{234}c_6]-c_1s_5s_6 \\ c_{234}c_6-s_{234}c_5c_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4s_5-c_1s_{23}s_4s_5+s_1c_5 \\ s_1c_{23}c_4s_5-s_1s_{23}s_4s_5-c_1c_5 \\ s_{23}c_4s_5+c_{23}s_4s_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1c_{234}s_5+s_1c_5 \\ s_1c_{234}s_5-c_1c_5 \\ s_{234}s_5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_e=\begin{bmatrix} c_1c_{23}[d_6c_4s_5+a_4c_4]-c_1s_{23}[d_6s_4s_5+a_4s_4]+d_6s_1c_5+c_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_1c_{23}[d_6c_4s_5+a_4c_4]-s_1s_{23}[d_6s_4s_5+a_4s_4]-d_6c_1c_5+s_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_{23}[d_6c_4s_5+a_4c_4]+c_{23}[d_6s_4s_5+a_4s_4]+a_2s_2+d_1+a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_e=\begin{bmatrix} c_1c_{234}[a_4+s_5d_6]+s_1c_5d_6+c_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_1c_{234}[a_4+s_5d_6]-c_1c_5d_6+s_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_{234}[a_4+s_5d_6]+d_1+a_2s_2+a_3s_{23} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Nếu a_4=0 ba trục quay cổ tay giao nhau, tọa độ tâm cổ tay là $p_w= p_e$ khi cho d_6=0

$$\boldsymbol{p}_w=\begin{bmatrix} c_1c_{234}+c_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_1c_{234}+s_1[a_2c_2+a_3c_{23}] \\ s_{234}+d_1+a_2s_2+a_3s_{23} \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

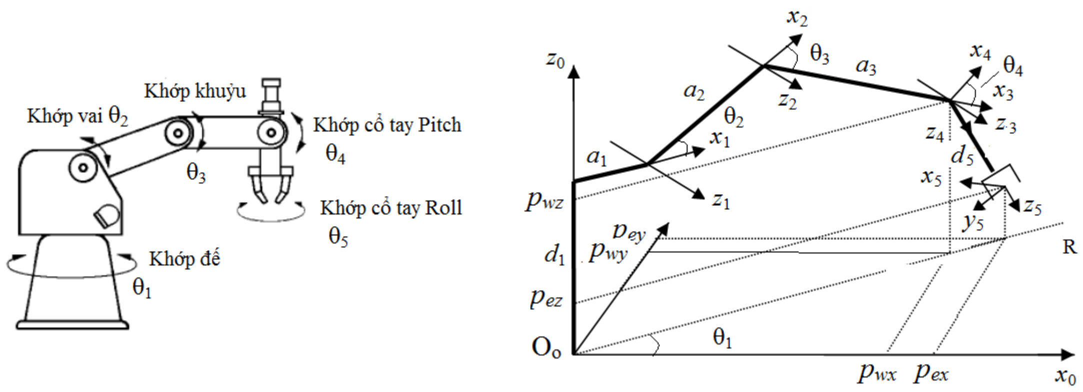
Ví dụ 2.17: Robot Scorbot 5 bậc tự do

Robot nằm trong mặt phẳng z_0O_0R, bàn tay có hai bậc tự do quay góc θ_4 và θ_5 , các trục quay z_1.. z_3 song song nhau và thẳng góc mặt phẳng z_0O_0R, trục quay z_4 của góc Roll θ_5 thẳng góc z_3, chú ý là x_4 thẳng góc khâu d_5, x_5 thẳng góc mặt phẳng bàn tay. Góc $\alpha= \theta_2+ \theta_3+ \theta_4$ là góc hợp bởi trục đứng $-z_0$ và z_4

Bảng DH

Khâu	a (mm)	α	d(mm)	θ
1	101,25mm	90^o	334,25	θ_1 ($-155^o..+155^o$)
2	220	0	0	θ_2 ($-35^o..+130^o$)
3	220	0	0	θ_3 ($-130^o..+130^o$)
4	0	90^o	0	θ_4 ($-130^o..+130^o$)

5	0	0	137,35	θ_5 (-570°..+570°)



Hình 2.22 Robot Scorbot

$$\boldsymbol{T}_0^5=\begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5+s_1s_5 & c_1c_{234}s_5+s_1c_5 & c_1s_{234} & c_1(d_5s_{234}+a_3c_{23}+a_2c_2+a_1) \\ s_1c_{234}c_5-c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5-c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(d_5s_{234}+a_3c_{23}+a_2c_2+a_1) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & -d_5c_{234}+a_3s_{23}+a_2s_2+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Giả sử tay kẹp của robot kẹp một dụng cụ chiều dài *l* trong mặt phẳng O_5xz và nghiêng góc β so với trục z_5 (Hình 2.8), nhân (2.48) với (2.30) ta được ma trận hướng và vị trí mũi dụng cụ $\boldsymbol{T}_o^{dc}=\boldsymbol{T}_o^5\boldsymbol{H}_5^{dc}$.

Ví dụ 2.18: Robot Scara 4 bậc tự do RRPR

Bảng DH

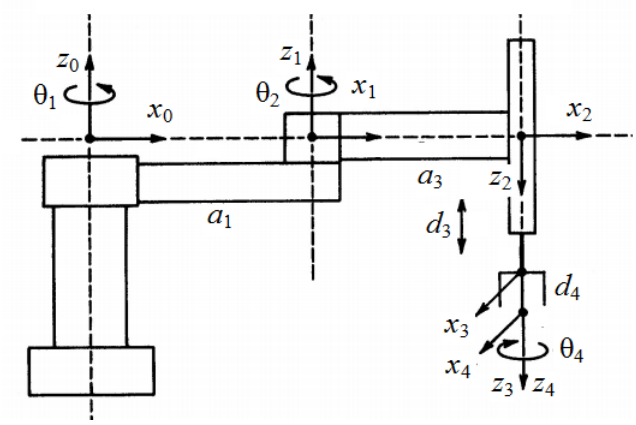
Khâu	*a*	α	d	θ
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	180o	0	θ_2
3	0	0	d_3*	0
4	0	0	d_4	θ_4

$$\boldsymbol{T}_0^4=\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2-\theta_4) & \sin(\theta_1+\theta_2-\theta_4) & 0 & a_1c_1+a_2c_{12} \\ \sin(\theta_1+\theta_2-\theta_4) & -\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_4) & 0 & a_1s_1+a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3-d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Ví dụ 2.19: Robot Stanford RRPRRR (Hình 2,23)

Kết hợp (2.41) và (2.43) ta được:

$$\boldsymbol{T}_0^6 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



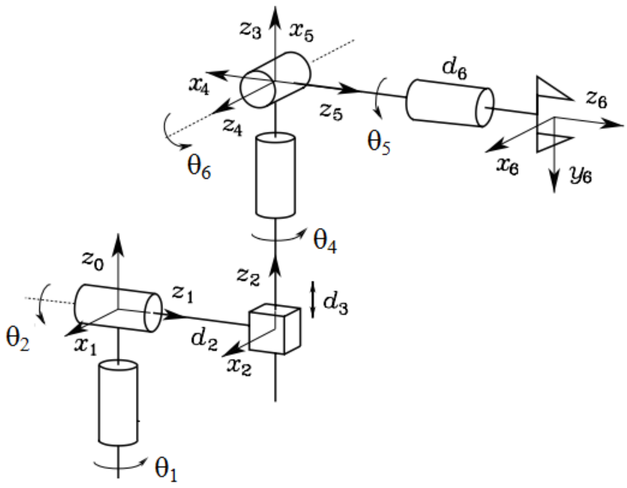
Hình 2.23 Robot SCARA

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6] \\ s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6] \\ -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1[-s_4c_5s_6 + c_4c_6] \\ s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1[-s_4c_5s_6 + c_4c_6] \\ s_2(c_4c_5c_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} c_1[c_2c_4s_5 + s_2c_5] - s_1s_4s_5 \\ s_1[c_2c_4s_5 + s_2c_5] + c_1s_4s_5 \\ -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_e = \begin{bmatrix} c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6\{c_1[c_2c_4s_5 + s_2c_5] - s_1s_4s_5\} \\ s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6\{s_1[c_2c_4s_5 + s_2c_5] + c_1s_4s_5\} \\ c_2d_3 + d_6[-s_2c_4s_5 + c_2c_5] \end{bmatrix} \tag{2.51}$$



Hình 2.24 Robot Stanford

2.3 ĐỘNG HỌC NGƯỢC ROBOT

Khi cho trước ma trận quay và vị trí đầu cuối, ta phải tìm các biến khớp, đây là bài toán động học ngược. Vậy ta phải giải n phương trình trong số 12 phương trình lượng giác (2.50)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^n(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}_e(\boldsymbol{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^n & \boldsymbol{p}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Ví dụ 2.20: Cho cánh tay robot Hình 2.10 với a_1=0.3m, a_2=0.2m, tìm θ_1 θ_2 để x_e=0.4m, y_e=0.

Ta phải giải hai phương trình

$0.3\cos(\theta_1) + 0.2\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0.4$

$0.3\sin(\theta_1) + 0.2\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$

Sử dụng Matlab

```
syms theta1 theta2
[st1,st2]=solve(0.3*cos(theta1) +0.2*cos(theta1+ theta2)- 0.4,
0.3*sin(theta1) +0.2*sin(theta1+ theta2))
y=single([st1,st2])
y=180*y/pi

st1 =
  2*atan(15^(1/2)/15)
 -2*atan(15^(1/2)/15)
st2 =
 -2*atan(15^(1/2)/5)
  2*atan(15^(1/2)/5)
y =
    0.5054   -1.3181
   -0.5054    1.3181
y =
   28.9550  -75.5225
  -28.9550   75.5225
```

Ta nhận thấy có hai cặp nghiệm (28.9550^o -75.5225^o) và (-28.9550^o 75.5225^o)

Ví dụ 2.21 : Cho robot Standford ví dụ 2.15 với d_2=-0.154, d_6=0.263, hướng và vị trí đầu cuối cho bởi ma trận

$$\boldsymbol{T}_0^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.154 \\ 0 & 0 & 1 & 0.763 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

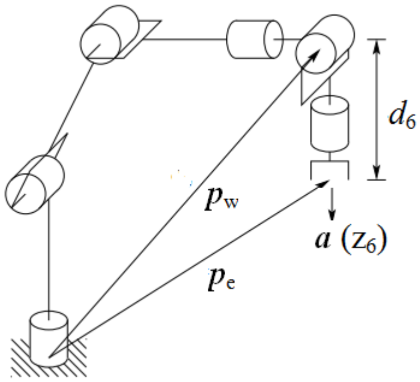
Tìm θ_1 θ_2 θ_4 θ_5 θ_6 d_3. Có thể viết chương trình như Ví dụ 2.20 để giải hệ 12 phương trình với 6 ẩn số, kết quả là $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta 6 = 90^o$, $\theta_5=0$, $d_3=0.5$.

Giải bài toán ngược rất cần thiết để điều khiển robot vì các biến khớp tìm được là giá trị đặt cho hệ thống điều khiển vị trí các khâu, tuy nhiên giải hệ phương trình động học ngược bằng phương pháp số không cho nghiệm dạng kín và không thuận tiện khi lập trình, do đó các hệ thống robot đều có bộ teach pendant điều khiển bằng tay robot đến vị trí đã định rồi ghi nhớ các biến khớp, như vậy không cần giải bài toán ngược, một phương pháp khác dùng phương pháp hình học để tìm nghiệm dạng kín có thể lập trình. Bài toán động học ngược có thể vô định ở một số vị trí của robot gọi là vị trí bất thường, hoặc có thể có nhiều nghiệm, trong trường hợp này ta loại bỏ những nghiệm không phù hợp kết cấu cơ khí của robot.

Robot thường có kết cấu cánh tay 3 DOF và bàn tay có từ 2 đến 3DOF, Khớp cổ tay là khớp quay với các trục quay cắt nhau ở một điểm. Bài toán động học ngược thường chia làm hai bài toán:

- Tìm vị trí cổ tay sau đó giải bài toán động học ngược vị trí tìm ba biến khớp đầu tiên
- Tìm ma trận quay của ba biến khớp cuối sau đó tìm ba góc quay của khớp cổ tay (động học ngược hướng).

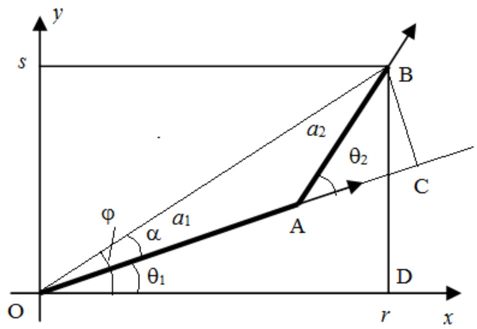
Lấy ví dụ robot 6 bậc tự do với ba bậc tự do cuối là ba khâu quay mà trục giao nhau ở tâm cổ tay, khoảng cách từ tâm cổ tay đến tâm bàn tay là d_6 (Ví dụ 2.16,Ví dụ 2.19) , liên kết với bàn tay là hệ trục $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{s}$ $\boldsymbol{a}$, tọa độ tâm cổ tay là $\boldsymbol{p}_w=\boldsymbol{p}_e-d_6\boldsymbol{a}$, từ biểu thức của $\boldsymbol{T}_0^6$ ta lấy ra vector vị trí, cho giá trị d_6 trong đó bằng 0 ta được biểu thức của $\boldsymbol{p}_w$ phụ thuộc ba biến khớp q_1 q_2 $q3$, vậy ta có ba phương trình để tìm ba biến khớp q_1 q_2 q_3, từ đó suy ra ma trận quay $\boldsymbol{R}_0^3$, biết $\boldsymbol{R}_0^6 = \boldsymbol{R}_0^3\,\boldsymbol{R}_3^6$ suy ra $\boldsymbol{R}_3^6 = (\boldsymbol{R}_0^3)^T\,\boldsymbol{R}_0^6$, biết biểu thức của $\boldsymbol{R}_3^6$(q_4, q_5,q_6) ta giải phương trình để tìm ba góc Euler φ θ ψ (Ví dụ 2.6) . Phương pháp trình bày ở trên gọi là phương pháp giải kết động học (decoupling kinematic).



Hình 2.25 Giải kết động học

Ta dùng phương pháp hình học lượng giác để tìm động học ngược một số cánh tay điển hình.

Ví dụ 2.22: Cánh tay quay hai bậc tự do



Hình 2.26 Cánh tay hai bậc tự do quay

Dùng định lý cosine cho tam giác OAB

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\theta_2 = \frac{r^2 + s^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = D,\\ &\theta_2 = \pm\text{acosd}(D)\end{aligned}} \tag{2.53}$$

Xét tam giác OBC

$$\text{OC} = a_1 + a_2\cos\theta_2 = a_1 + a_2D,$$

$$\text{BC} = a_2\sin\theta_2 = \pm a_2\sqrt{1-D^2},$$

$$\alpha = \text{atan2d}(\text{BC},\text{OC}) = \pm\text{atan2d}(a_2\sqrt{1-D^2}, a_1 + a_2D) \tag{2.54}$$

Xét tam giác OBD

$$\varphi = \text{atan2d}(s, r),$$

Suy ra

$$\boxed{\theta_1 = \varphi - \alpha = \text{atan2d}(s,r) \mp \text{atan2d}(a_2\sqrt{1-D^2}, a_1 + a_2 D)} \quad (2.55)$$

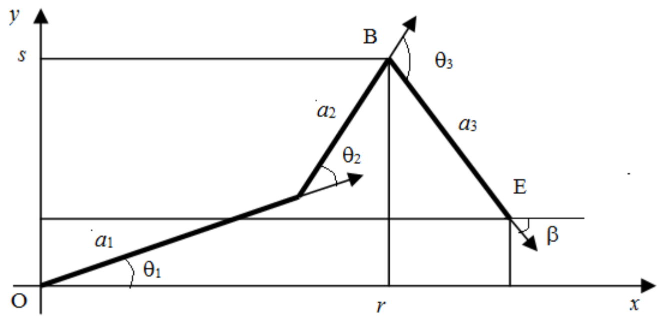
Ta có hai cấu hình cho cánh tay.

Với a_1=150mm, a_2=150mm, r=150mm, s=200mm suy ra

$\theta_1=19.57^o$, $\theta_2=67.11^o$, $\theta_1=86.7^o$, $\theta_2=-67.11^o$

```
r=150;s=200;a1=150;a2=150;
D=(r*r+s*s-a1*a1-a2*a2)/(2*a1*a2)
D1=sqrt(1-D*D)
theta21=acosd(D)
theta22=-acosd(D)
alpha=atan2d(a2*D1,a1+a2*D)
phi=atan2d(s,r)
theta11=phi-alpha
theta12=phi+alpha
%recheck
x1=a1*cosd(theta11)+a2*cosd(theta11+theta21)
y1=a1*sind(theta11)+a2*sind(theta11+theta21)
x2=a1*cosd(theta12)+a2*cosd(theta12+theta22)
y2=a1*sind(theta12)+a2*sind(theta12+theta22)
```

Ví dụ 2.23: Cánh tay quay ba bậc tự do



Hình 2.27 Cánh tay ba bậc tự do quay

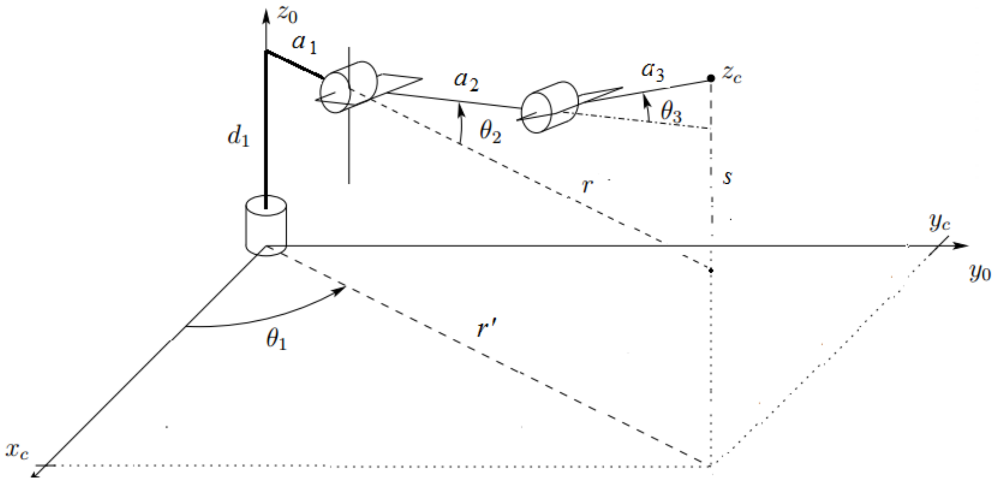
Ta tìm tọa độ điểm B (p_{xe}-$a_3$sinβ, p_{ye}-$a_3$cosβ) sau đó tính tương tự Ví dụ 2.1 tìm θ_1, θ_2, sau cùng θ_3= β-(θ_1+θ_2).

Ví dụ 2.24: Động học ngược cánh tay khuỷu ba bậc tự do (***Hình 2.28***)

Cho trước tọa độ tâm cổ tay là (x_c, y_c, z_c) ta phải tìm ba góc θ. Từ Hình 2.28 ta tính được:

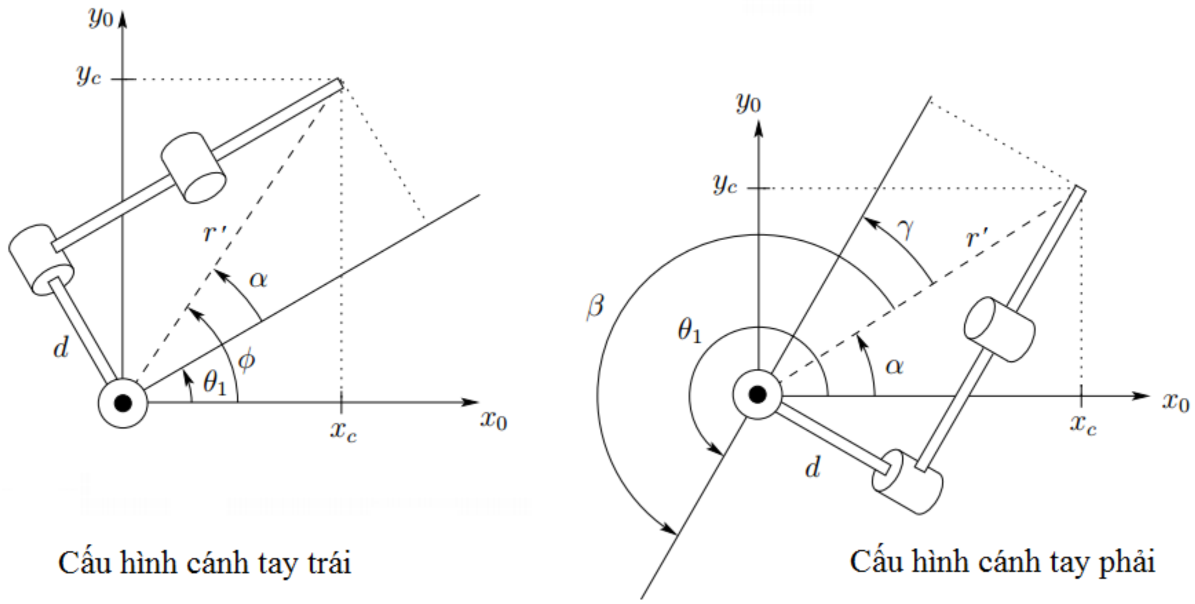
$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2d}(y_c, x_c), -180^o < \theta_1 < 180^o} \quad (2.56)$$

với x_c, y_c không đồng thời là 0. Nếu x_c, y_c đồng thời là 0 thì θ_1 không xác định (vị trí bất thường).



Hình 2.28 Động học ngược cánh tay khuỷu

Trường hợp robot có vai bề rộng *d* (Hình 2. 29) ta có hai cấu hình cánh tay bên trái và cánh tay bên phải.



Hình 2. 29 Cấu hình Robot có vai rộng

Với cấu hình cánh tay trái ta có tập các phương trình sau đây để tính θ_1

$$\boxed{\begin{aligned}&\phi = \text{atan2d}(y_c, x_c),\\ &\alpha = \text{atan2d}(d, \sqrt{r'^2 - d^2}) = \text{atan2d}(d, \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}),\\ &\theta_1 = \phi - \alpha\end{aligned}} \tag{2.57}$$

Với cấu hình cánh tay phải ta có tập các phương trình sau:

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha = \text{atan2d}(y_c, x_c),\\ &\gamma = \text{atan2d}(d, \sqrt{r'^2 - d^2}) = \text{atan2d}(d, \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}),\\ &\beta = \gamma + 180^o,\\ &\theta_1 = \alpha + \beta\end{aligned}} \tag{2.58}$$

Chú ý là tùy theo kết cấu cơ khí, robot thường chỉ có một cấu hình.

Bây giờ ta tính θ_2 và θ_3, có hai cấu hình là khuỷu trên và khuỷu dưới (tuy nhiên kết cấu cơ khí thường là khuỷu trên).

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = \frac{(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d_2^2} - a_1)^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \equiv D,\\ &\theta_3 = \pm\text{acosd}(D) = \text{atan2d}(\pm\sqrt{1 - D^2}, D)\end{aligned}} \tag{2.59}$$

$$\boxed{\theta_2 = \text{atan2d}(s, r) \mp \text{atan2d}(a_3\sqrt{1 - D^2}, a_2 + a_3D)} \tag{2.60}$$

Như vậy robot khuỷu có bốn cấu hình, tùy theo kết cấu cơ khí ta chọn một cấu hình làm lời giải (Hình 2.31).

Ví dụ 2.25: Tìm các góc θ cho robot Scorbot (Ví dụ 2.17) gắn một cây viết, tọa độ đầu viết, hướng cây viết như sau

$\boldsymbol{p}_t$	$\boldsymbol{n}_t$	$\boldsymbol{s}_t$	$\boldsymbol{a}_t$	l	β
[250 250 10]	[cos(45°) sin(45°) 0]	[-sin(45°) cos(45°) 0]	[0 0 -1]	100mm	90°

Giải: Đầu tiên ta tìm ma trận $\boldsymbol{T}_0^5 = \boldsymbol{T}_0^v(\boldsymbol{T}_5^v)^{-1}$

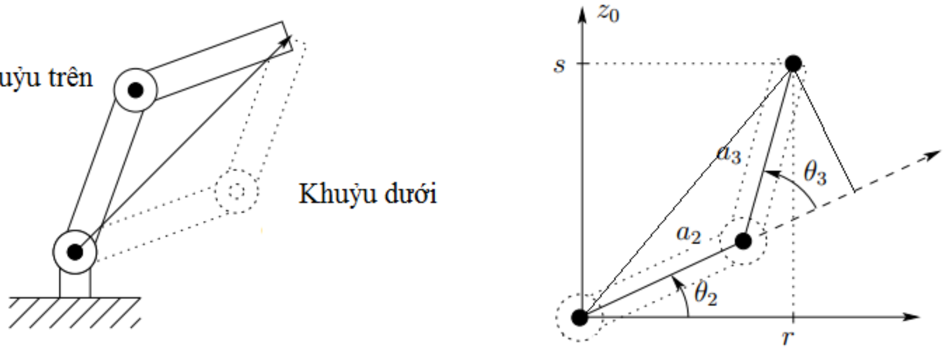
$$\boldsymbol{T}_0^v = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 250\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 250\\ 0 & 0 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_5^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 100\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

Suy ra

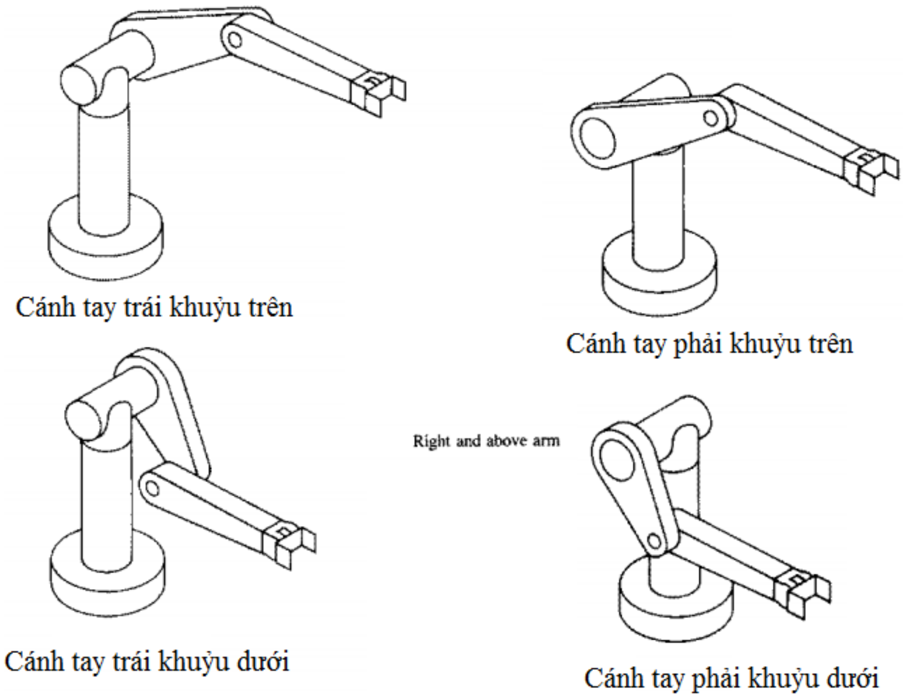
$$T_0^5 = \begin{bmatrix} 0 & -0.7071 & 0.7071 & 250\\ 0 & 0.7071 & 0.7071 & 250\\ -1 & 0 & 0 & 110\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Từ (2.48)

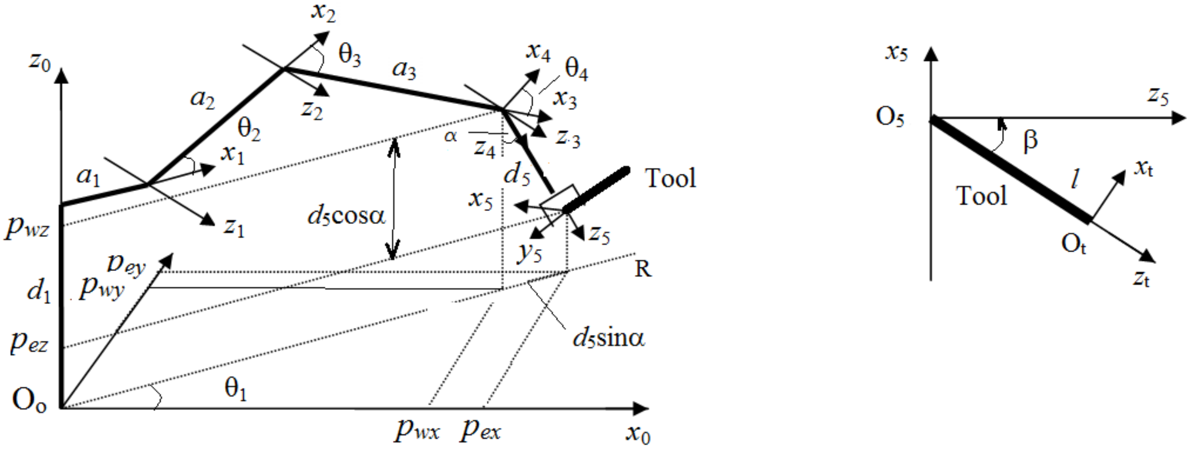
$$\boxed{\boldsymbol{T}_0^5 = \begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & c_1(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 + a_1)\\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(d_5s_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 + a_1)\\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & -d_5c_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 + d_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$



Hình 2.30 Cấu hình khuỷu tay



Hình 2.31 Bốn cấu hình của cánh tay khuỷu



Hình 2.32 Tính động học ngược robot Scorbot

Biết p_{ex}, p_{ey} ta suy ra θ_1 dùng (2.52) , $\alpha = \theta_2+\theta_3+\theta_4$=atan2d($-a_z$, $a_x/\cos\theta_1$), tọa độ tâm cổ tay ***w*** trong mặt phẳng z_0O_0R là $w_z = p_{ez} + d_5\cos\alpha$=, $w_R = \sqrt{p_{ex}^2 + p_{ey}^2} - d_5\sin\alpha$, ta tính tiếp θ_3 θ_2 dùng (2.54) (2.55), sau cùng $\theta_4 = \alpha - \theta_2 - \theta_3$. θ_5 suy từ phần tử (3,2) và (3,1) của $\boldsymbol{T}_0^5$ Tổng hợp các phương trình như sau:

$$\theta_1 = \text{atan2d}(p_{ey}, p_{ex}) = 45^0,$$

$$\alpha = \theta_2+\theta_3+\theta_4=\text{atan2d}(-a_z, a_x/\cos\theta_1)=90^0,$$

$$w_z = p_{ez} + d_5 \cos\alpha = 110,$$

$$w_R = \sqrt{p_{ex}^2 + p_{ey}^2} - d_5 \sin\alpha = 250\sqrt{2} - 137.35 = 216.25,$$

$$r = w_R - a_1 = 216.25 - 101.25 = 115,$$

$$s = w_z - d_1 = 110 - 334.25 = -224.25$$

$$\cos\theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \equiv D = -0.344,$$

$$\theta_3 = \text{atan2d}(\pm\sqrt{1-D^2}, D) = \pm 110^0 12$$

Trường hợp $\theta_3 = 110^o 12$

$$\theta_2 = \text{atan2d}(s,r) - \text{atan2d}(a_3\sqrt{1-D^2}, a_2 + a_3 D)$$

$$= \text{atan2d}(-224.25, 115) - \text{atan2d}(220*\sqrt{1-0.344^2}, 220 - 220*0.344)$$

$$= -117.9^o$$

Trường hợp $\theta_3 = -110^o 12$, $\theta_2 = -7.8^o$

$$\theta_4 = \alpha - \theta_2 - \theta_3 = 90^o - \theta_2 - \theta_3$$

Trường hợp 1: $\theta_4 = 90^o + 117.9^o - 110.12^o = 97.98^o$

Trường hợp 2: $\theta_4 = 90^o + 7.8^o + 110.12^o = 207.92^o$

Cuối cùng $\theta_5 = 0^o$

Ví dụ 2.26: Cánh tay khuỷu 6 bậc tự do quay (
Hình ***2.21***)

Từ các phương trình (2.41) và (2.44) ta suy ra các ma trận quay

$$\boldsymbol{R}_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}_3^6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Cho $\boldsymbol{T}_0^6 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p}_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^6 & \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$ ta tính $p_w = p_e - d_6 a$, từ đó tính ra θ_1 θ_2 θ_3

$$\theta_1 = \text{atan2d}(p_{wy}, p_{wx}), \tag{2.61}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\theta_3 = \frac{r^2+s^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3} = \frac{p_{wx}^2+p_{wy}^2+(p_{wz}-d_1)^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3} \equiv D,\\ &\theta_3 = \pm\text{acosd}(D) = \text{atan2d}(\pm\sqrt{1-D^2}, D)\end{aligned}} \tag{2.62}$$

$$\boxed{p_{wx}^2+p_{wy}^2+(p_{wz}-d_1)^2 < (a_2+a_3)^2} \tag{2.63}$$

$$\boxed{\theta_2 = \text{atan2d}(s,r) \mp \text{atan2d}(a_3\sqrt{1-D^2}, a_2+a_3D)} \tag{2.64}$$

Biết θ_1 θ_2 θ_3 ta tính ra $\boldsymbol{R}_0^3$ và $(\boldsymbol{R}_0^3)^{-1} = (\boldsymbol{R}_0^3)^T$ ta được phương trình $\boldsymbol{R}_3^6 = (\boldsymbol{R}_0^3)^T\,\boldsymbol{R}_0^6$, vế trái chứa các ẩn số θ_4 θ_5 θ_6. Gọi r_{ij} phần tử hàng i cột j của $\boldsymbol{R}_0^6$, sau khi nhân ma trận, ta được phương trình tương ứng cột 3 của $\boldsymbol{R}_3^6$ là:

$$c_4s_5 = c_1c_{23}r_{13} + s_1c_{23}r_{23} + c_{23}r_{33},$$
$$s_4s_5 = -c_1s_{23}r_{13} - s_1s_{23}r_{23} + c_{23}r_{33},$$

$c_5 = s_1r_{13} - c_1r_{23}$

Phương trình tương ứng hàng 3 của $\boldsymbol{R}_3^6$ là:

$$-s_5c_6 = s_1r_{11} - c_1r_{21},$$
$$s_5s_6 = s_1r_{12} - c_1r_{22}$$

Suy ra

$$\boxed{\theta_6 = \text{atan2d}(\,s_1r_{12}-c_1r_{22}, c_1r_{21}-s_1r_{11})} \tag{2.65}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_5 &= \pm\text{acosd}(s_1r_{13}-c_1r_{23})\\ &= \text{atan2d}(\pm\sqrt{1-(s_1r_{13}-c_1r_{23})^2}, s_1r_{13}-c_1r_{23}),\end{aligned}} \tag{2.66}$$

$$\boxed{\theta_4 = \text{atan2d}(-c_1s_{23}r_{13}-s_1s_{23}r_{23}+c_{23}r_{33}, c_1c_{23}r_{13}+s_1c_{23}r_{23}+s_{23}r_{33})} \tag{2.67}$$

Chương trình sau đây cho một lời giải của động học ngược

```
clc
% Calculates the Inverse Kinematic of an Anthropomorphic arm with 6
DOF.
% 'q' is the solutions in degree and K is the Forward Kinematic
matrix.
% Position and orientation of end-effector
K=[0 0 1 0.200;0 1 0 0.200; 1 0 0 0.100]
% Denavit-Hartenberg's Parameters
a2=0.3;          % [m]
a3=0.3;
d1=0.5;
d6=0.1;
R=K(1:3,1:3);
% Inverse Kinematic
pe=K(1:3,4); % End-effector's position
pw=pe-d6*a;   % Wrist's position
```

```
% Vector's components that representes the wrist's position
pwx=pw(1);
pwy=pw(2);
pwz=pw(3);
%Calculate first three joint variables
s=pwz-d1
r=sqrt(pwx^2+pwy^2)
c3=(r^2+s^2-a2^2-a3^2)/(2*a2*a3) % cos(theta3)
s3=-sqrt(1-c3^2)       % sin(theta3)
t1=atan2d(pwy,pwx);
t3=atan2d(s3,c3);
t2=atan2d(s,r)-atan2d(a3*s3,a2+a3*c3);
% Orientation Matrix of the spherical Wrist
R03=[cosd(t1)*cosd(t2+t3) -cosd(t1)*sind(t2+t3) sind(t1);
    sind(t1)*cosd(t2+t3) -sind(t1)*sind(t2+t3) -cosd(t1);
    sind(t2+t3) cosd(t2+t3) 0];

R36=R03'*R;% Matrix for the Euler's angle of spherical wrist

% Inverse kinematic for the spherical wrist
t4=atan2d(R36(2,3),R36(1,3));
t5=acosd(R36(3,3));
t6=atan2d(R36(3,2),R36(3,1));
% Solutions in degree
q=[t1 t2 t3 t4 t5 t6]'
```

2.4 HIỆU CHỈNH (CALIBRATION)

Ma trận động học thuận cho hướng và vị trí đầu cuối (tư thế, pose), tuy nhiên do sai số đo các thông số a, d, α, θ nên kết quả sẽ không chính xác, do đó cần hiệu chỉnh các thông số để giảm sai số. Qúa trình hiệu chỉnh được thực hiện bởi nhà sản xuất trước khi xuất xưởng và giá trị đã hiệu chỉnh được cài vào chương trình hoạt động của robot. Muốn hiệu chỉnh ta cần máy đo laser 3D chính xác để đo tư thế. Đặt các vector thông số DH sau $\boldsymbol{a}=[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]^T$, $\boldsymbol{d}=[d_1\ d_2\ \dots\ d_n]^T$, $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]^T$, $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\ \theta_2\ \dots\ \theta_n]^T$, tư thế của robot có thể viết dưới dạng

$$\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{f}_{6x1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\theta}) \tag{2.68}$$

Cho các thông số giá trị định mức, tư thế của robot là $\boldsymbol{x}_{en}$ Thực tế ta đo được $\boldsymbol{x}_{em}$, sai số $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{em} - \boldsymbol{x}_{en}$ cần được cực tiểu bằng cách chỉnh lại các thông số. Tuyến tính hóa quanh giá trị định mức

$$\Delta\boldsymbol{x}_{6x1} = \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{a}}\Delta\boldsymbol{a} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Delta\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{a}}\Delta\boldsymbol{d} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Delta\boldsymbol{\theta} \tag{2.69}$$

Đặt $\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^T & \boldsymbol{\alpha}^T & \boldsymbol{d}^T & \boldsymbol{\theta}^T\end{bmatrix}^T$ là vector cột 4nx1, $\Delta\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}_m - \boldsymbol{\zeta}_n$ là sai lệch của thông số , $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{a} & \partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\alpha} & \partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{d} & \partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}$, ta có phương trình

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}_{6\text{x}4\text{n}}(\boldsymbol{\zeta}_n)\Delta\boldsymbol{\zeta}_{4n\text{x}1} \tag{2.70}$$

Ta sẽ hiệu chỉnh với *l* tư thế và được kết quả sau

$$\Delta\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x}_1 \\ \Delta\boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{x}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_l \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\zeta} = \overline{\boldsymbol{\Phi}}\Delta\boldsymbol{\zeta} \tag{2.71}$$

Giải phương trình dùng phương pháp cực tiểu bình phương ta tính được

$$\Delta\boldsymbol{\zeta} = (\overline{\boldsymbol{\Phi}}^T\overline{\boldsymbol{\Phi}})^{-1}\overline{\boldsymbol{\Phi}}^T\Delta\overline{\boldsymbol{x}} \tag{2.72}$$

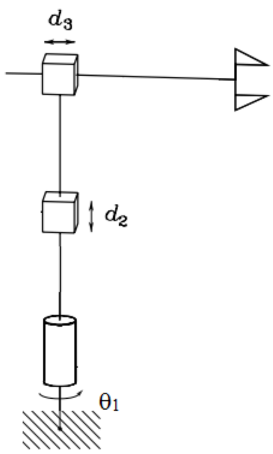
Cập nhật thông số $\boldsymbol{\zeta}_u = \boldsymbol{\zeta}_n + \Delta\boldsymbol{\zeta}$, sau đó ta có thể hiệu chỉnh lại với bộ thông số mới cho đến khi $\Delta\boldsymbol{\zeta}$ hội tụ về một giá trị ngưỡng.

Khi robot hoạt động ta cần phải đưa robot về tư thế Home, các biến khớp được tính bắt đầu từ tư thế này (bộ đếm góc quay của encoder đưa về 0), nếu không đưa về tư thế Home chính xác sẽ gây ra sai số khi robot làm việc do offset của các biến khớp.

BÀI TẬP

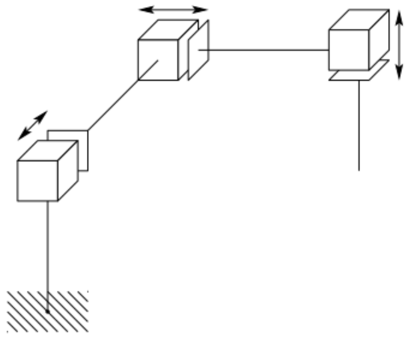
BT1 Cho hai hệ tọa độ 1(Oxyz) và 2 (Ouvw) hệ tọa độ 2 suy từ hệ tọa độ 1 bởi phép quay quanh trục z 60^o. Tính tọa độ điểm A trong hệ 2 biết tọa độ trong hệ 1 là (1, 2,3)

BT2. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot trụ Hình BT2



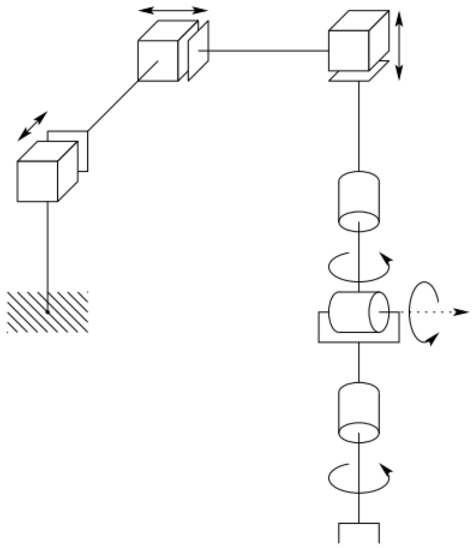
Hình BT2

BT3. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot cartesian Hình BT3



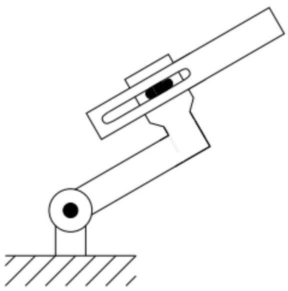
Hình BT3

BT4. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot cartesian với bàn tay khớp cầu Hình BT3



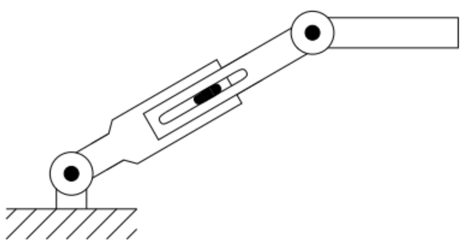
Hình BT4

BT5. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot RP Hình BT5



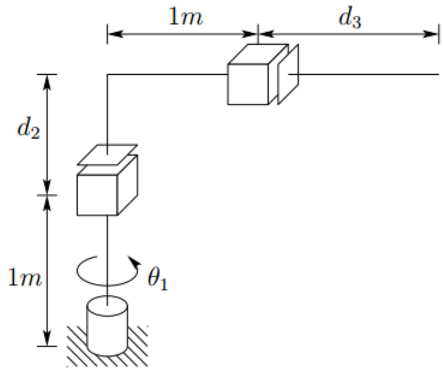
Hình BT5

BT6. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot RPR Hình BT6



Hình BT6

BT7. Giải bài toán động học thuận và ngược cho robot PPP Hình BT7



Hình BT7