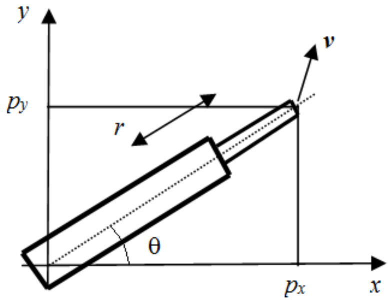
CHƯƠNG 3

ĐỘNG HỌC VẬN TỐC ROBOT NỐI TIẾP

Động học vận tốc tìm sự liên hệ giữa vận tốc đầu cuối của robot và đạo hàm biến khớp. Sự liên hệ này giúp giải nhiều bài toán như động học ngược, động lực học và lực tác động…

Ví dụ 3.1: Động học vận tốc robot hai bậc tự do RP



Hình 3.1 Robot hai bậc tự do

Vị trí đầu cuối là

$$p_x = r\cos(\theta)$$
$$p_y = r\sin(\theta) \quad (3.1)$$

Vận tốc dài đầu cuối là vector $\boldsymbol{v}$ đạo hàm của vị trí $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dp_x}{dt} \\ \dfrac{dp_y}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}c\theta - r\dot{\theta}s\theta \\ \dot{r}s\theta + r\dot{\theta}c\theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ là vector tỷ lệ vector đơn vị trục quay $\boldsymbol{k}$ và có giá trị là đạo hàm góc quay

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k} \quad (3.3)$$

Phương trình liên hệ vận tốc đầu cuối và đạo hàm biến khớp là

$$\boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & rs\theta \\ s\theta & rc\theta \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}} \quad (3.4)$$

$\boldsymbol{J}$ gọi là ma trận Jacobi của robot, phần tiếp theo trình bày cách tính $\boldsymbol{J}$

3.1 MA TRẬN ĐỐI XỨNG GHỀNH

3.1.1 Định nghĩa

Ma trận vuông $\boldsymbol{S}_{3x3}$ là ma trận đối xứng ghềnh (đxg, skew symmetry) nếu

$$\boxed{\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^T=0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{S}(\omega)} \tag{3.5}$$

Ta có thể coi như $\boldsymbol{S}$ là biểu diễn dạng ma trận của vector $\boldsymbol{\omega}=[\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$. Xét các vector đơn vị

$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

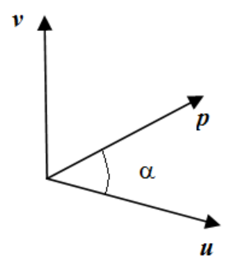
các ma trận $\boldsymbol{S}$ tương ứng là

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{i})=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{j})=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Nếu $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$ là biểu diễn ma trận đxg của vector $\boldsymbol{u}$ thì tich vector $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{p}$ biểu diễn dạng ma trận là tích ma trận đxg $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$ và vector $\boldsymbol{p}$

$$\boxed{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}-u_z p_y+u_y p_z\\ u_z p_x-u_x p_z\\ -u_y p_x+u_x p_y\end{bmatrix}} \tag{3.7}$$

Vector $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{p}$ thẳng góc hai vector $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ và có suất là $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{p}|\sin\alpha$, ba vecor $\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{p}$ có chiều theo qui tắc bàn tay phải.



Hình 3.2 Tích vector

3.1.2 Ma trận quay và ma trận đối xứng ghềnh

Cho $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ là các vectơ ba chiều, $\boldsymbol{R}$ là ma trận quay 3x3 góc θ , α, β là các số vô hướng, có thể chứng minh các tính chất sau:

- $\boldsymbol{S}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})+\beta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b})$ (3.8)
- $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}$ (3.9)

- $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a} \times R^T\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{Ra}) \times (\boldsymbol{RR}^T\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{Ra}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Ra})\boldsymbol{b}$ (3.10)
- $\boldsymbol{RS}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Ra})$ (3.11)

- Đạo hàm ma trận quay:

Nếu $\boldsymbol{R}(\theta)$ là ma trận quay thì

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I},$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\frac{d\boldsymbol{R}^T}{d\theta} = 0$$

Ma trận $\boldsymbol{S} = \dfrac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}\boldsymbol{R}^T$ cũng là ma trận đxg, $\dfrac{d\boldsymbol{R}}{d\theta}=\boldsymbol{SR}$

Ta tìm biểu thức của $\boldsymbol{S}$ với phép quay góc θ quanh vector $\boldsymbol{k}$, vector vận tốc góc là $\dot{\theta}\boldsymbol{k}$. Ma trận quay quanh vector $\boldsymbol{k}=[k_x\ k_y\ k_z]^T$ là (2.23)

$$\boldsymbol{R}_{k,\theta}(\theta) = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v\theta = 1 - \cos\theta \tag{3.12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}_{k,\theta}}{d\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 s\theta - s\theta & k_x k_y s\theta - k_z c\theta & k_x k_z s\theta + k_y c\theta \\ k_x k_y s\theta + k_z c\theta & k_y^2 s\theta - s\theta & k_y k_z s\theta - k_x c\theta \\ k_x k_z s\theta - k_y c\theta & k_y k_z s\theta + k_x c\theta & k_z^2 s\theta - s\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}_{k,\theta}}{d\theta}\boldsymbol{R}_{k,\theta}^T = \begin{bmatrix} k_x^2 s\theta - s\theta & k_x k_y s\theta - k_z c\theta & k_x k_z s\theta + k_y c\theta \\ k_x k_y s\theta + k_z c\theta & k_y^2 s\theta - s\theta & k_y k_z s\theta - k_x c\theta \\ k_x k_z s\theta - k_y c\theta & k_y k_z s\theta + k_x c\theta & k_z^2 s\theta - s\theta \end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_x k_z v\theta - k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta + k_y s\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}_{k,\theta}}{d\theta}\boldsymbol{R}_{k,\theta}^T = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} = S(\boldsymbol{k}) \tag{3.13}$$

Vậy, nếu $\boldsymbol{R}_{k,\theta}$ là ma trận quay góc θ quanh vector đơn vị $\boldsymbol{k}$ thì

$$\boxed{\frac{dR_{k,\theta}}{d\theta} = S(\boldsymbol{k})R_{k,\theta}} \tag{3.14}$$

Nếu lấy đạo hàm theo thời gian t

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{R}_{k,\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}_{k,\theta} = \boldsymbol{S}(\dot{\theta}\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}_{k,\theta} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R}_{k,\theta}} \tag{3.15}$$

***Ví dụ 3.2**:* Phép quay quanh trục z góc α có ma trận quay là

$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ với α thay đổi theo thời gian, lấy đạo hàm theo thời gian

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s\alpha & -\dot{\alpha}c\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c\alpha & -\dot{\alpha}s\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận đxg là $\boldsymbol{S} = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s\alpha & -\dot{\alpha}c\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c\alpha & -\dot{\alpha}s\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy vector vận tốc góc là $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T$ là vector trục z và có suất $\dot{\alpha}$

Ví dụ 3.3: Cho hai hệ trục $O_o x_o y_o z_o$ và $O_1 x_1 y_1 z_1$ liên hệ với nhau bởi ma trận

$$\boldsymbol{H}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^1(t) & \boldsymbol{O}_0^1(t) \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

điểm P có toạ độ trong hệ 1 là $\boldsymbol{p}_1$ và vận tốc trong hệ 1 là $\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{p}}_1$, tìm vận tốc góc và vận tốc dài của P trong hệ 0

Vận tốc góc của điểm P là vận tốc góc của hệ trục 1 so với hệ trục 0, giống như Ví dụ 3.2 ta tính $\boldsymbol{S} = \dot{\boldsymbol{R}}_0^1\boldsymbol{R}_0^{1T}$ từ đó tính $\boldsymbol{\omega}_0^1$.

Vận tốc dài tính được bằng cách đạo hàm vector vị trí

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{O}_0^1$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_0 = \dot{\boldsymbol{R}}_0^1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{R}_0^1\dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{O}}_0^1$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{v}_1 + \dot{\boldsymbol{O}}_0^1 = \boldsymbol{\omega}_0^1 \mathrm{x} \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{v}_1 + \dot{\boldsymbol{O}}_0^1$$

3.2 VẬN TỐC GÓC ĐẦU CUỐI

Cho robot n bậc tự do, hướng đầu công tác biểu thị bởi các tích ma trận quay

$$\boldsymbol{R}_0^n = \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{R}_1^2...\boldsymbol{R}_{n-1}^n$$
$$\frac{d\boldsymbol{R}_0^n}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}_0^1}{dt}\boldsymbol{R}_1^2...\boldsymbol{R}_{n-1}^n + \boldsymbol{R}_0^1\frac{d\boldsymbol{R}_1^2}{dt}\boldsymbol{R}_2^3...\boldsymbol{R}_{n-1}^n + ... + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{R}_1^2...\boldsymbol{R}_{n-2}^{n-1}\frac{d\boldsymbol{R}_{n-1}^n}{dt}$$
$$\frac{d\boldsymbol{R}_0^n}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}_0^1}{dt}\boldsymbol{R}_1^n + \boldsymbol{R}_0^1\frac{d\boldsymbol{R}_1^2}{dt}\boldsymbol{R}_2^n + ... + \boldsymbol{R}_0^{n-1}\frac{d\boldsymbol{R}_{n-1}^n}{dt}$$

Gọi $\boldsymbol{\omega}_{i-1}^i$ vận tốc góc khâu *i* so với khâu i-1, $\boldsymbol{\omega}_0^n$ là vận tốc góc đầu công tác so với hệ trục gốc,

$$\frac{d\boldsymbol{R}_0^n}{dt} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^n)\boldsymbol{R}_0^n$$
$$\frac{d\boldsymbol{R}_{i-1}^i}{dt} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\text{-}1}^i)\boldsymbol{R}_{i-1}^i$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^n)\boldsymbol{R}_0^n = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^1)\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{R}_1^n + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_1^2)\boldsymbol{R}_1^2\boldsymbol{R}_2^n + ... + \boldsymbol{R}_0^{n-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_{\text{n-1}}^{\text{n}})\boldsymbol{R}_{n-1}^n$$
$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^n)\boldsymbol{R}_0^n = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^1)\boldsymbol{R}_0^n + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{\omega}_1^2)\boldsymbol{R}_0^n + ... + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^{n-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1}^n)\boldsymbol{R}_0^n$$
$$= \{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^1) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{\omega}_1^2) + ... + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^{n-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1}^n)\}\boldsymbol{R}_0^n$$
$$= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}_0^1 + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{\omega}_1^2 + ... + \boldsymbol{R}_0^{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1}^n)\boldsymbol{R}_0^n$$

Suy ra

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_0^n = \boldsymbol{\omega}_0^1 + \boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{\omega}_1^2 + ... + \boldsymbol{R}_0^{n-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1}^n} \tag{3.16}$$

Vận tốc góc đầu công tác so với hệ trục gốc là tổng vận tốc góc các khâu so với hệ tọa độ gốc. Nếu khớp tịnh tiến thì vận tốc góc của khớp bằng không, do đó vận tốc góc đầu công tác so với hệ trục gốc là tổng vận tốc góc các **khớp quay** so với hệ tọa độ gốc. Đặt η_i=1 nếu khớp *i* là khớp quay, η_i=0 nếu khớp *i* là khớp trượt, $q_i=\theta_i$ là biến khớp, $\boldsymbol{z}_i^i = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}$ là vector đơn vị trục quay của khớp thứ *i* trong hệ trục *i*, tích $\boldsymbol{z}_0^{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{z}_i^i$ tính $\boldsymbol{z}_i^i$ trong hệ tọa độ gốc $Ox_0y_0z_0$, là cột thứ ba của $\boldsymbol{R}_0^i$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\omega_{0x}^n \\ \omega_{0y}^n \\ \omega_{0z}^n\end{bmatrix} = \eta_1\dot{q}_1\boldsymbol{z}_0 + \eta_2\dot{q}_2\boldsymbol{R}_0^1\boldsymbol{z}_1^1 + \eta_3\dot{q}_3\boldsymbol{R}_0^2\boldsymbol{z}_2^2 + ... + \eta_n\dot{q}_n\boldsymbol{R}_0^{n-1}\boldsymbol{z}_n^n}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\omega_{0x}^n\\ \omega_{0y}^n\\ \omega_{0z}^n\end{bmatrix}=[\eta_1\boldsymbol{z}_0\quad \eta_2\boldsymbol{z}_0^1\quad \eta_3\boldsymbol{z}_0^2\ldots\eta_n\boldsymbol{z}_0^{n\text{-}1}]\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ :\\ \dot q_{n-1}\\ \dot q_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_\psi\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ :\\ \dot q_{n-1}\\ \dot q_n\end{bmatrix}} \tag{3.17}$$

$\boldsymbol{J}_\omega$ là ma trận Jacobi vận tốc góc 3 hàng n cột, $\boldsymbol{J}_{\omega i}=\boldsymbol{z}_0^{i-1}$ nếu khớp *i* là khớp quay, $\boldsymbol{J}_{\omega i}=0$ nếu khớp *i* là khớp tịnh tiến,

3.3 VẬN TỐC DÀI ĐẦU CÔNG TÁC

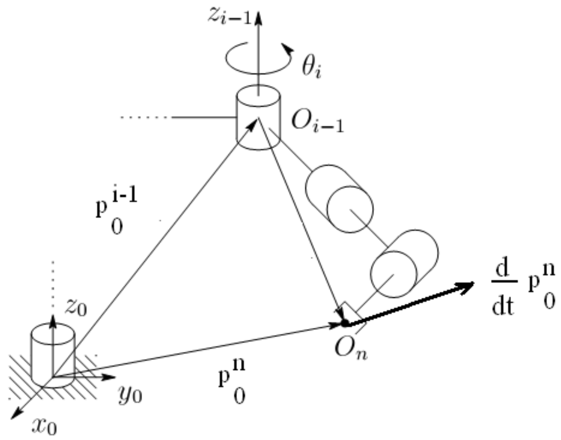
Vận tốc dài đầu công tác là đạo hàm vectơ vị trí theo thời gian

$$p_x = f_1(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$$
$$p_y = f_2(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$$
$$p_z = f_3(q_1,q_2,q_3,...,q_n)$$

$$\begin{bmatrix}v_x=\dfrac{dp_x}{dt}\\ v_y=\dfrac{dp_y}{dt}\\ v_z=\dfrac{dp_z}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{df_1}{dq_1} & \dfrac{df_1}{dq_2} & \ldots & \dfrac{df_1}{dq_n}\\ \dfrac{df_2}{dq_1} & \dfrac{df_2}{dq_2} & \ldots & \dfrac{df_2}{dq_n}\\ \dfrac{df_3}{dq_1} & \dfrac{df_3}{dq_2} & \ldots & \dfrac{df_3}{dq_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ .\\ \dot q_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_v\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ .\\ \dot q_n\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$\boldsymbol{J}_v$ là ma trận Jacobi vận tốc dài 3 hàng n cột.

Thay vì tính đạo hàm ta dùng ma trận đồng nhất để tính vận tốc dài



Hình 3.3 Tính vận tốc dài

a/ Trường hợp khớp *i* tịnh tiến: đầu công tác cũng sẽ tịnh tiến theo

$$\boldsymbol{H}_0^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^n & \boldsymbol{p}_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_0^{i-1}\boldsymbol{H}_{i-1}^i\boldsymbol{H}_i^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^{i-1} & \boldsymbol{p}_0^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{i-1}^i & \boldsymbol{p}_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_i^n & \boldsymbol{p}_i^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0^n & \boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i + \boldsymbol{p}_0^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tọa độ đầu công tác : $\boldsymbol{p}_0^n = \boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i + \boldsymbol{p}_0^{i-1}$

Nếu chỉ có khớp *i* di chuyển $\boldsymbol{p}_i^n, \boldsymbol{p}_0^{i-1}$ không đổi, các ma trận quay cũng không đổi, và $\boldsymbol{p}_{i-1}^i = [a_ic_i \; a_is_i \; d_i]$ trong đó d_i thay đổi

$$\frac{d\boldsymbol{p}_0^n}{dq_i} = \boldsymbol{R}_0^{i-1}\frac{d\boldsymbol{p}_{i-1}^i}{dd_i} = \dot{d}_i\boldsymbol{R}_0^{i-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{d}_i\boldsymbol{z}_0^{i-1}$$

$\boldsymbol{z}_0^{i-1}$ là hình chiếu trục z_{i-1} trên hệ tọa độ gốc, là hướng tịnh tiến của khớp *i*

$$\boxed{\boldsymbol{J}_{vi} = \dot{d}_i\boldsymbol{z}_0^{i-1}} \tag{3.19}$$

b/ Trường hợp khớp *i* quay quanh trục z_{i-1}:

$$\frac{d\boldsymbol{p}_0^n}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n) + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_{i-1}^i)$$

$$= \dot{\theta}_i\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_0^{i-1})\boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\frac{d}{dt_i}(\boldsymbol{p}_{i-1}^i)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_{i-1}^i) = \frac{d}{d\theta_i}\begin{bmatrix} a_ic_i \\ a_is_i \\ d_i \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i\begin{bmatrix} -a_is_i \\ a_ic_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_i & 0 \\ \dot{\theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_ic_i \\ a_is_i \\ d_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix})\boldsymbol{p}_{i-1}^i$$

$$= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_{i-1}\dot{\theta}_i)\boldsymbol{p}_{i-1}^i$$

$$\boldsymbol{R}_0^{i-1}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_{i-1}^i) = \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_{i-1}\dot{\theta}_i)\boldsymbol{p}_{i-1}^i = \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_{i-1}\dot{\theta}_i)(\boldsymbol{R}_0^{i-1})^T\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i$$

$$= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{z}_{i-1}\dot{\theta}_i)\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i = \dot{\theta}_i\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_0^{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_0^n}{dt} = \dot{\theta}_i\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_0^{i-1})(\boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i)$$

mà $\boldsymbol{R}_0^i\boldsymbol{p}_i^n + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}^i = \boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}$

Nên $\frac{d\boldsymbol{p}_0^n}{dt} = \dot{\theta}_i\boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_0^{i-1})(\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}) = \dot{\theta}_i(\boldsymbol{z}_0^{i-1} \text{ x}(\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}))$

Vậy $$\boxed{\boldsymbol{J}_{vi} = \boldsymbol{z}_0^{i-1} \text{ x } (\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1})} \tag{3.20}$$

$\boldsymbol{p}_0^n$ là tọa độ đầu công tác trong hệ tọa độ gốc

$\boldsymbol{p}_0^{i-1}$ là tọa độ gốc hệ trục *i*-1 trong hệ tọa độ gốc

$\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}$ là vectơ nối gốc hệ trục *i*-1 với đầu công tác, biểu thị trong hệ tọa độ gốc

3.4 MA TRẬN JACOBI

3.4.1 Ma trận Jacobi hình học

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2 & \dots & \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix}} \tag{3.21}$$

Ma trận Jacobi có số cột là số bậc tự do, số hàng là 6

Nếu khớp *i* là khớp quay

$$\boxed{\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^{i-1} \times (\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_0^{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{z}_0^{i-1})(\boldsymbol{p}_0^n - \boldsymbol{p}_0^{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_0^{i-1} \end{bmatrix}} \tag{3.22}$$

Nếu khớp *i* là tịnh tiến

$$\boxed{\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^{i-1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}} \tag{3.23}$$

$\boldsymbol{p}_0^{i-1}$ là vị trí gốc tọa độ *i*-1 so với hệ trục gốc, là cột thứ tư của ma trận $\boldsymbol{H}_0^{i-1}$

$\boldsymbol{z}_0^{i-1}$ là vectơ trục z_{i-1} so với hệ trục gốc, là cột thứ ba của ma trận quay $\boldsymbol{R}_0^{i-1}$

Sự liên hệ của đạo hàm biến khớp và vận tốc dài, vận tốc góc đầu công tác được biểu thị bởi công thức

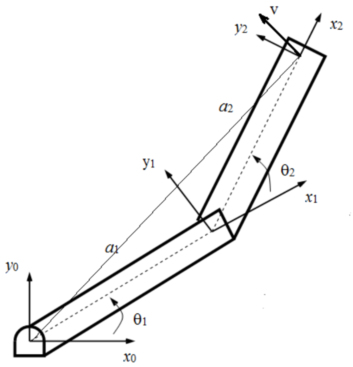
$$\boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}} \tag{3.24}$$

Nếu chọn một hệ tọa độ w khác so với hệ tọa độ gốc 0 ta tìm ma trận quay $\boldsymbol{R}_{0,\text{w}}$ biểu thị hướng của hệ 0 so với hệ w, ta có các biểu thức sau để tìm Jacobi của robot trong hệ w:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_{e,\text{w}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_{e,\text{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{0,\text{w}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{0,\text{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_{e,0} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_{e,0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_\text{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{0,\text{w}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{0,\text{w}} \end{bmatrix} \boldsymbol{J} \tag{3.25}$$

***Ví dụ 3.4*:** Robot RR



Hình 3.4 Tính ma trận Jacobi robot RR

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \text{x} \boldsymbol{p}_0^2 & \boldsymbol{z}_0^1 \text{x}(\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^1) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_0^1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{z}_0^1$ tương ứng cột thứ ba của $\boldsymbol{H}_0^1$, $\boldsymbol{p}_0^1, \boldsymbol{p}_0^2$ lần lượt tương ứng cột thứ tư của $\boldsymbol{H}_0^1$ và $\boldsymbol{H}_0^2$

Các trục quay thẳng góc mặt phẳng robot $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0^1 = [0\ 0\ 1]^T$, $\boldsymbol{p}_0^1 = [a_1c_1\ \ a_1s_1\ \ 0]^T$, $\boldsymbol{p}_0^2 = [a_1c_1 + a_2c_{12}\ \ a_1s_1 + a_2s_{12}\ \ 0]^T$. Áp dụng công thức (3.7)

$$\boldsymbol{z}_0 \text{x} \boldsymbol{p}_0^2 = \begin{bmatrix} -p_{0y}^2 \\ p_{0x}^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_1 \text{x}(\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^1) = \begin{bmatrix} -(p_{0y}^2 - p_{0y}^1) \\ p_{0x}^2 - p_{0x}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} \\ a_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra
$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -a_1s_1-a_2s_{12} & -a_2s_{12}\\ a_1c_1+a_2c_{12} & a_2c_{12}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Ví dụ 3.5**:** xét robot phẳng RRR Ví dụ 2.9, ma trận Jacobi là
$$J=\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0\text{x}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1\text{x}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2\text{x}(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_2)\\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2\end{bmatrix}$$

ta tính được
$$\boldsymbol{p}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}a_1c_1 & a_1s_1 & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2c_{12} & a_1s_1+a_2s_{12} & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2c_{12}+a_3c_{123} & a_1s_1+a_2s_{12}+a_3s_{123} & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

Suy ra
$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -(a_1s_1+a_2s_{12}+a_3s_{132}) & -(a_2s_{12}+a_3s_{132}) & -a_3s_{132}\\ a_1c_1+a_2c_{12}+a_3c_{123} & a_2c_{12}+a_3c_{123} & a_3c_{123}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Loại bỏ các hàng bằng 0 ta được ma trận 3x3
$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -(a_1s_1+a_2s_{12}+a_3s_{132}) & -(a_2s_{12}+a_3s_{132}) & -a_3s_{132}\\ a_1c_1+a_2c_{12}+a_3c_{123} & a_2c_{12}+a_3c_{123} & a_3c_{123}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.6**:** Xét Robot RPR Ví dụ 2.13 ta viết chương trình tính ma trận Jacobi bằng hai cách: tính $\boldsymbol{J}_{\text{v}}$ dùng hàm jacobian(p3,[theta1;d2;theta3]) và dùng công thức
$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{p}_0^3 & z_1 & \boldsymbol{z}_2\times(\boldsymbol{p}_0^3-\boldsymbol{p}_0^2)\\ z_0 & 0 & z_2\end{bmatrix}$$

```
clc
syms a alp d th d1 d2 th1 th3 pi a3;
hi=[cos(th) -cos(alp)*sin(th) sin(alp)*sin(th) a*cos(th);
    sin(th) cos(alp)*cos(th) -sin(alp)*cos(th) a*sin(th);
     0 sin(alp) cos(alp) d;
```

```
     0 0 0 1];
a=0; alp=pi/2; d=0; th=th1;
h1=subs(hi);
h1=expand(h1)
a=0; alp=-pi/2;th=0 ; d=d2;
h2=subs(hi);
h2=expand(h2)
a=a3; alp=0;d=0;th=th3;
h3=subs(hi);
h3=expand(h3)
h02=h1*h2
%forward kinematics
h03=h1*h2*h3;
z0=[0 0 1];
z1=h1(1:3,3)
z2=h02(1:3,3)
p3=h03(1:3,4)
%Tính Jacobi
Jac=jacobian(p3,[th1;d2;th3])
p2=h02(1:3,4)
%z0xp3
j1=[-p3(2) p3(1) 0]
%z2x(p3-p2)
p32=p3-p2
j3=[-z2(3)*p32(2)+z2(2)*p32(3) z2(3)*p32(1)-z2(1)*p32(3) -
z2(2)*p32(1)+z2(1)*p32(2)]
jacobcv=[j1 z0; z1' 0 0 0;j3 z2']
```

Từ kết quả chương trình ta suy ra

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} d_2c_1 - a_3s_{13} & s_1 & -a_3s_{13} \\ d_2s_1 + a_3c_{13} & -c_1 & a_3c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Xét trong mặt phẳng

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} d_2c_1 - a_3s_{13} & s_1 & -a_3s_{13} \\ d_2s_1 + a_3c_{13} & -c_1 & a_3c_{13} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Ma Trận Jacobi Giải Tích

Mục 3.4.1 cho thấy thành phần $\boldsymbol{J}_v$ trong ma trận Jacobi có thể tính bằng cách lấy đạo hàm biểu thức của vị trí đầu cuối, suy ra nếu ta biểu diễn hướng của đầu cuối theo ba góc Euler $\boldsymbol{\alpha}=[\varphi\ \theta\ \psi]^T$ và tìm biểu thức của $\boldsymbol{\alpha}$ theo biến khớp thì ta có thể tìm Jacobi của thành phần vận tốc góc tương tự.

Xét biểu thức

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

vector $\boldsymbol{X}_{6x1}$ gọi là tư thế (pose) của robot, đạo hàm riêng theo biến khớp $\boldsymbol{q}$ các biểu thức của $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ tọa độ đầu cuối và $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q})$ góc Euler, ta được ma trận gọi là Jacobi giải tích

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}} \tag{3.29}$$

Ma trận Jacobi giải tích khác với ma trận Jacobi mục 3.4.1 (gọi là ma trận Jacobi hình học vì $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ khác $\boldsymbol{\omega}$ (vector vận tốc góc).

Xét phép quay ba góc Euler quanh trục hiện tại ZYZ $R_{z,\psi}$ $R_{y,\theta}$ $R_{z,\varphi}$, ta công nhận không chứng minh biểu thức quan hệ giữa $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ và $\boldsymbol{\omega}$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} c_\psi s_\theta \dot{\varphi} - s_\psi \dot{\theta} \\ s_\psi s_\theta \dot{\varphi} + c_\psi \dot{\theta} \\ c_\theta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\psi s_\theta & -s_\psi & 0 \\ s_\psi s_\theta & c_\psi & 0 \\ c_\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \tag{3.30}$$

từ đó suy ra

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_a \dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.31}$$

Vậy quan hệ giữa $\boldsymbol{J}$ và $\boldsymbol{J}_a$ là

$$\boxed{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q})} \tag{3.32}$$

$$\boxed{\boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}), \det \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0} \tag{3.33}$$

Nếu xét phép quay Roll Pitch Yaw quanh hệ trục cố định góc φ quanh x_0, θ quanh y_0 và ψ quanh z_0 thì

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi & 0 \\ s_\psi c_\theta & c_\psi & 0 \\ -s_\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Với robot RRR ta có

$$J_a = \begin{bmatrix} -(a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{132}) & -(a_2 s_{12} + a_3 s_{132}) & -a_3 s_{132} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

3.5 ĐỘNG HỌC VẬN TỐC NGƯỢC

Ma trận Jacobi có 6 hàng n cột, nếu n=6 và det(***J***)≠0 ta có thể tính động học vận tốc ngược theo biểu thức

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}(t))\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Điều này có nghĩa cho trước vận tốc đầu cuối và các biến khớp, ta tìm được đạo hàm biến khớp tương ứng.

Điều kiện khả đảo của ***J*** không phải lúc nào cũng được thỏa mãn, xét ví dụ 3.2, ***J*** có hai hàng độc lập tuyến tính, nghĩa là rank(***J***)=2, vậy ta chỉ tìm được $[\dot{p}_x \;\; \dot{p}_y]$ theo $\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$ còn vận tốc góc không độc lập. Từ (3.26)

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

tính ma trận ngược của ***J***:

$$J^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} a_2 c_{12} & -(a_1 c_1 + a_2 c_{12}) \\ a_2 s_{12} & -(a_1 s_1 + a_2 s_{12}) \end{bmatrix}}{a_1 a_2 s_2}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a_2 c_{12} & -(a_1 c_1 + a_2 c_{12}) \\ a_2 s_{12} & -(a_1 s_1 + a_2 s_{12}) \end{bmatrix}}{a_1 a_2 s_2} \begin{bmatrix} \dot{p}_{ex}(t) \\ \dot{p}_{ey}(t) \end{bmatrix}} \tag{3.37}$$

Khi s_2=sin(θ_2)=0 thì det(***J***)=0, ta không tính nghịch đảo được, lúc này robot rơi vào vị trí bất thường (singular) , θ_2=0 hai cánh tay thẳng hàng hay $\theta_2=\pm 180^o$, hai cánh tay chập vào nhau. Ở điểm bất thường đạo hàm biến khớp tăng vô hạn, vậy ta phải tránh không cho robot rơi vào điểm bất thường.

Xét Ví dụ 3.6, robot ba bậc tự do, từ (3.28) ***J*** có ba hàng độc lập tuyến tính là 1,2 và 6, vậy ta có thể viết

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 c_1 - a_3 s_{13} & s_1 & -a_3 s_{13} \\ d_2 s_1 + a_3 c_{13} & -c_1 & a_3 c_{13} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

det(***J***) = $-d_2 \neq 0$, vậy ma trận ***J*** luôn luôn khả đảo.

Hạng của ma trận ***J*** là số hàng *r* của ma trận độc lập tuyến tính nghĩa là bậc của định thức lấy từ ***J*** khác 0. Khi robot có số bậc tự do *n* lớn hơn hạng *r* của ***J*** thì gọi là robot dư (redundant robot) ta có thể dùng ma trận giả đảo (pseudo inverse) $\boldsymbol{J}^{+}$ thông qua ma trận $(\boldsymbol{JJ}^T)^{-1}$, ở đây $\boldsymbol{J}_{rxn}$ là ma trận có r hàng rút ra từ ma trận hình học Jacobi, $\boldsymbol{JJ}^T$ là ma trận vuông rxr, từ các biểu thức sau

$$(\boldsymbol{JJ}^T)(\boldsymbol{JJ}^T)^{-1} = \boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{JJ}^T)^{-1}] = \boldsymbol{I} \tag{3.38}$$

Đặt $\boldsymbol{J}^+ = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{JJ}^T)^{-1}$ ta thấy $\boldsymbol{JJ}^+ = \boldsymbol{I}$, ma trận $\boldsymbol{J}^+$ n hàng r cột gọi là ma trận giả đảo bên phải của $\boldsymbol{J}$. Gọi $\boldsymbol{\eta}$ vector r x 1 lấy từ các thành phần của $[\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{\omega}]^T$ (theo các hàng độc lập tuyến tính của $\boldsymbol{J}$) ta tính được

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{q}}_{n\mathrm{x}1} = \boldsymbol{J}^+_{n\mathrm{x}r}\eta_{r\mathrm{x}1}} \tag{3.39}$$

Cho biểu thức quỹ đạo định trước của đầu cuối robot ta dễ dàng tính $\boldsymbol{\eta}(t)$ từ đó suy ra $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ và tích phân để được $\boldsymbol{q}(t)$, chính là giá trị đặt cho bộ điều khiển vị trí các khâu của robot

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(0) + \int_0^t \dot{\boldsymbol{q}}(\tau)d\tau \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \dot{\boldsymbol{q}}(t_k)\Delta t \tag{3.41}$$

Vậy ta đã giải bài toán động học ngược vị trí thông qua động học ngược vận tốc.

Ta cũng có thể tìm biểu thức của gia tốc, lấy đạo hàm (3.24) theo thời gian

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}} \tag{3.42}$$

3.6 VÒNG KÍN ĐỘNG HỌC NGƯỢC VỊ TRÍ

Công thức (3.39) thay tích phân bằng tổng do đó sẽ gây ra sai số, vì vậy ta sẽ dùng sai số vị trí trong không gian để hiệu chỉnh giá trị của biến khớp. Đặt

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}_e$$

lấy đạo hàm ta được

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}}_e = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

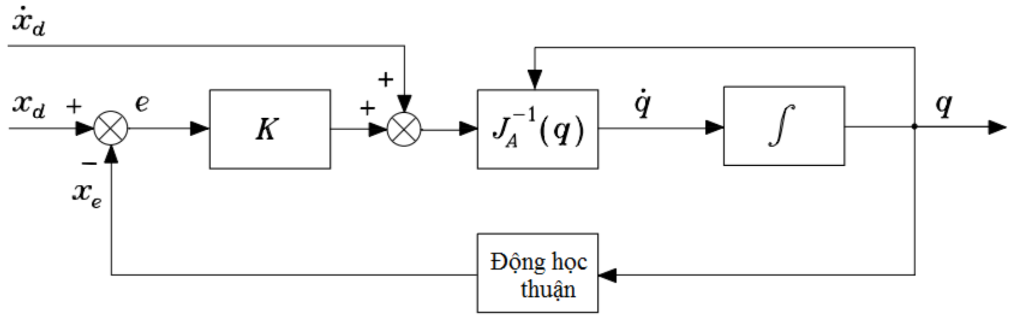
Đặt

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q})^{-1}(\dot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{Ke})} \tag{3.43}$$

ta suy ra

$$\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{Ke} = \boldsymbol{0}$$

Vậy sai số vị trí tiến về 0 khi chọn K là ma trận chép vuông có hệ số lớn, sơ đồ tính $\boldsymbol{q}$ trình bày ở Hình 3.5



Hình 3.5 Tính động học ngược vị trí thông qua động học ngược vận tốc

Phương pháp trên đòi hỏi phải tính ma trận Jacobi đảo, một phương pháp khác dùng ma trận Jacobi chuyển vị, ta đặt hàm Liapunov

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} > 0$$

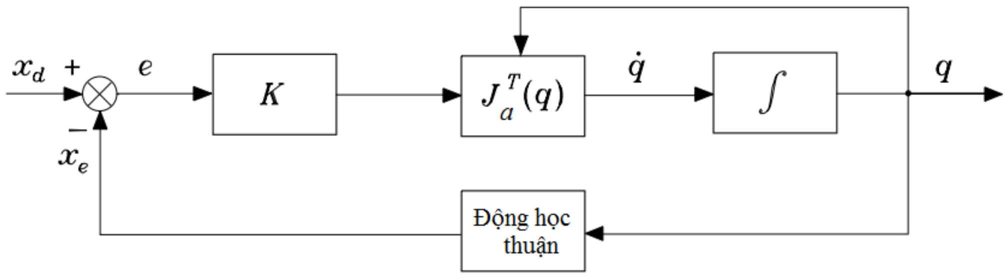
Lấy đạo hàm theo thời gian

$$\dot{V} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_e$$
$$= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_a\dot{\boldsymbol{q}}$$

Nếu $\dot{\boldsymbol{x}}_d = 0$ ta chọn $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_a^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$ suy ra

$$\dot{V} = -\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_a\boldsymbol{J}_a^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} < 0$$

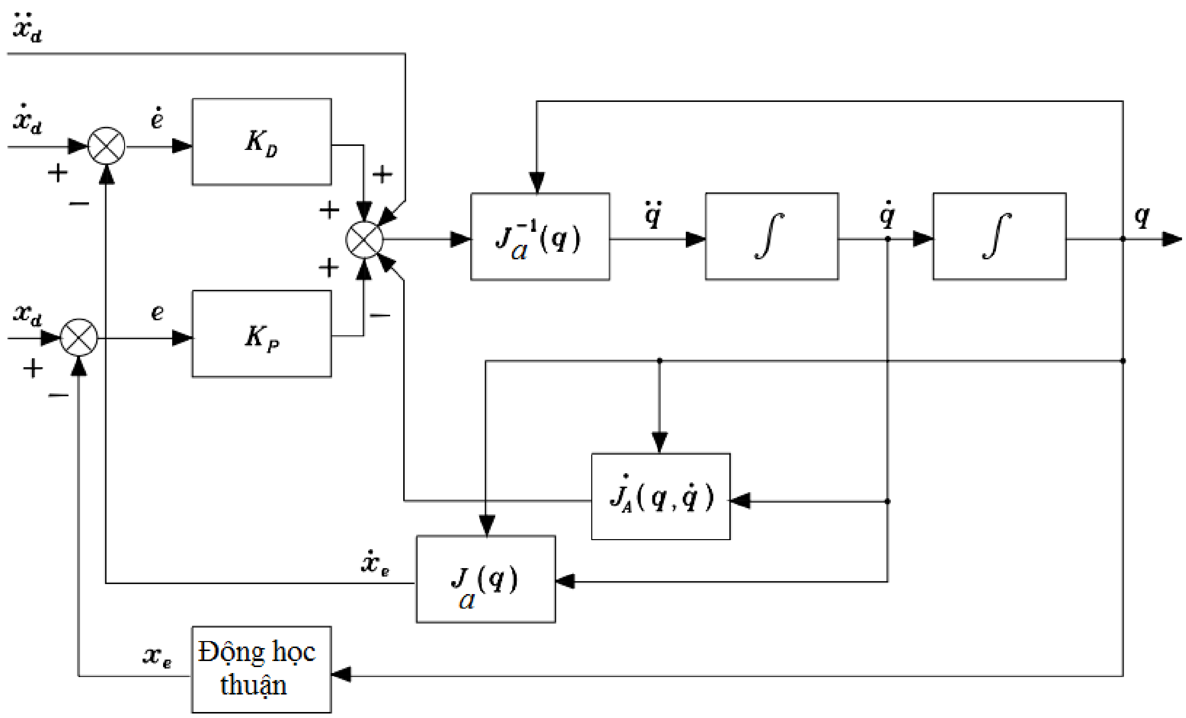
Vậy sai số $\boldsymbol{e}$ tiến về $\boldsymbol{0}$



Hình 3.6 Tính động học ngược vị trí thông qua động học ngược vận tốc

Nếu xét gia tốc biến khớp ta sẽ có sơ đồ vòng kín động học ngược vị trí bậc hai sử dụng luật điều khiển bậc hai

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_a^{-1}(\ddot{\boldsymbol{x}}_e - \dot{\boldsymbol{J}}_a\dot{\boldsymbol{q}})$$

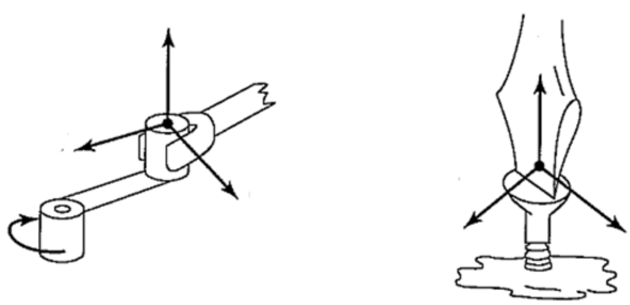


Hình 3.7 Vòng kín bậc hai động học ngược vị tri

3.7 LỰC VÀ MOMENT

Lực và moment tác động lên đầu công tác sẽ truyền xuống các biến khớp, ngược lại moment và lực do các động cơ khớp cũng sẽ tác động lực và moment lên môi trường đầu công tác tiếp xúc. Nếu khớp tịnh tiến ta có lực tác động, nếu khớp quay ta có moment.

Trong nhiều trường hợp ngoài việc điều khiển đầu công tác theo một quĩ đạo, ta còn phải điều khiển lực tác động lên môi trường làm việc của đầu công tác, ví dụ như lắp ráp, gia công.



Hình 3.8 Lực và moment tác động lên môi trường

Gọi $\boldsymbol{F}$ lực tác động lên đầu công tác và $\boldsymbol{\tau}$ moment tác động lên các khớp, $\boldsymbol{\delta X}$ khoảng dịch chuyển nhỏ của đầu công tác do lực $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{\delta q}$ khoảng dịch chuyển tương ứng của biến khớp, ta có biểu thức:

$$\delta X = J(q)\,\delta q$$

Công ảo sinh ra là $\delta w = F^T \delta X - \tau^T \delta q = (F^T J(q) - \tau^T)\delta q$

Khi hệ thống cân bằng ta có:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{F}} \tag{3.44}$$

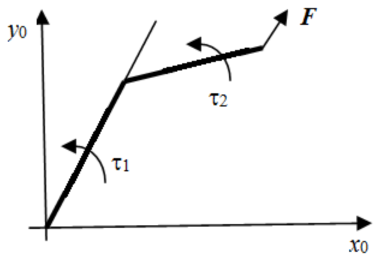
Trong không gian ***F*** là vectơ 6x1 gồm ba thành phần lực và ba thành phần moment.

Ví dụ 3.7: Xét robot RR, lực mà đầu công tác cần tác động là $\boldsymbol{F}=[1\ 1]^T$, tìm moment các động cơ khớp phải tạo ra

Từ (3.26)

$$\boldsymbol{J}^T = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ -a_2s_{12} & a_2c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} + a_1c_1 + a_2c_{12} \\ -a_2s_{12} + a_2c_{12} \end{bmatrix}$$



Hình 3.9 Moment các khớp

BÀI TẬP

BT1 Hệ trục 1 liên hệ với hệ trục 0 bởi ma trận đồng nhất

$$\boldsymbol{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Một điểm trong hệ toạ độ 1 có vận tốc $v_1^1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, tìm vận tốc điểm này trong hệ toạ độ 0.

BT2 Cho ba hệ toạ độ 0, 1, 2 với các trục quay $\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{\omega}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Tính $\boldsymbol{\omega}_0^2$ khi ma trận hướng là

$$\boldsymbol{R}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BT3 Viết chương trình Matlab tính Jacobi robot phẳng RRR

Đáp số:

$$J = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_2s_{12} - a_3s_{123} & -a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_2c_{12} + a_3c_{123} & a_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

BT4 Viết chương trình Matlab tính Jacobi robot khuỷu RRR

Đáp số:

$$J = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

BT5 Tính $\boldsymbol{J}$ của robot RRP có bảng DH sau

a	α	d	θ
0	90	0	θ_1
0	90	0	θ_2
0	0	d_3	0

BT6 Cho robot RRR có chiều dài cánh tay 0.25 m, vị trí ban đầu $\boldsymbol{q} = [\pi \;\; -\pi/2 \;\; -\pi/2]^T$, tương ứng $x_e = 0$ m, $y_e = 0.5$ m, $\phi_e = 0$ rad di chuyển theo vòng tròn bán kính 0.25m, tâm (0.25 0.5) m trong thời gian 4s với phương trình

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 - 0.25\cos\pi t \\ 0.5 + 0.25\sin\pi t \\ \sin\dfrac{\pi t}{24} \end{bmatrix}$$

Lập trình simulink giải bài toán động học ngược vi trí vòng kín, vẽ $\boldsymbol{q}$(t) và sai số vị trí, sai số hướng.