CHƯƠNG 4

QUI HOẠCH QUỸ ĐẠO

Qui hoạch quỹ đạo là tạo các tín hiệu vào tham chiếu cho bộ điều khiển robot để robot di chuyển theo quỹ đạo mong muốn. Quỹ đạo điểm điểm là quỹ đạo đi qua hai điểm định trước trong thời gian xác định, quỹ đạo đường là quỹ đạo đi qua nhiều điểm theo một đường liên tục xác định trước. Ta có thể qui hoạch trong không gian biến khớp nghĩa là tín hiệu tham chiếu là giá trị đặt cho các biến khớp $\boldsymbol{q}_d(t)$ hoặc qui hoạch trong không gian làm việc với tín hiệu tham chiếu $\boldsymbol{X}_d(t)$ là vị trí và hướng trong không gian.

4.1 QUI HOẠCH QUỸ ĐẠO ĐIỂM ĐIỂM

4.1.2 Quỹ đạo đa thức

Ta muốn đầu công tác đi qua hai điểm xác định trong không gian, từ vị trí đầu và cuối của đầu công tác ta giải bài toán động học ngược hoặc dùng teach pendant di chuyển đầu công tác đến vị trí đả định và đọc các biến khớp tương ứng, xác định các giá trị đầu và cuối cho các biến khớp $\boldsymbol{q}_o = \boldsymbol{q}(t_o)$, $\boldsymbol{q}_f = \boldsymbol{q}(t_f)$. Xét cho một biến khớp, ta tìm biểu thức cho $q(t)$ thỏa mãn điều kiện về vị trí và vận tốc ở thời điểm đầu và cuối, đôi khi xét thêm điều kiện về gia tốc.

$$\begin{aligned} q(t_o) &= q_o, q(t_f) = q_f \\ \dot{q}(t_o) &= \dot{q}_0, \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ta có bốn ràng buộc vậy có thể chọn $q(t)$ là đa thức bậc ba, thông thường t_0=0

$$q(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = q_0 \\ &a_1 = \dot{q}_0 \\ &a_3t_f^3 + a_2t_f^2 + a_1t_f + a_0 = q_f \\ &3a_3t_f^2 + 2a_2t_f + a_1 = \dot{q}_f \end{aligned}$$

Giải hai phương trình cuối ta được

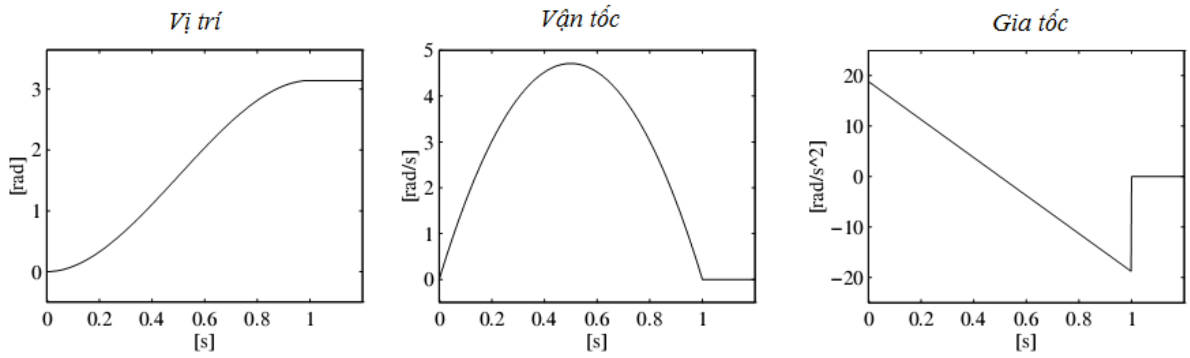
$$\boxed{a_2 = \frac{3(q_f - q_0) - 2(\dot{q}_0 + \dot{q}_f)t_f}{t_f^2}, a_3 = \frac{-2(q_f - q_0) + (\dot{q}_0 + \dot{q}_f)t_f}{t_f^3}} \tag{4.3}$$

Trường hợp thời điểm ban đầu là t_0 ta thay t_f trong (4.3) bằng $t_f - t_0$ và t trong (4.2) bằng $t - t_0$

Nếu chọn vận tốc đầu và cuối là 0 ta được

$$q(t) = -\frac{2(q_f - q_0)}{t_f^3}t^3 + \frac{3(q_f - q_0)}{t_f^2}t^2 + q_0 \,. \tag{4.4}$$

$$q(t) = -\frac{2(q_f - q_0)}{(t_f - t_0)^3}(t - t_0)^3 + \frac{3(q_f - q_0)}{(t_f - t_0)^2}(t - t_0)^2 + q_0 \quad (4.5)$$



Hình 4.1 Quỹ đạo bậc ba

Quỹ đạo đa thức bậc ba (Hình ***4.1***) có gia tốc đầu và cuối khác 0. Để cho chuyển động mượt hơn ta thêm hai điều kiện là gia tốc đầu và cuối bằng 0, như vậy $q(t)$ có bậc là 5 (PT 4.6)

$$q(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \quad (4.6)$$

$$a_0 = q_0$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_5t_f^5 + a_4t_f^4 + a_3t_f^3 = q_f - q_0,$$
$$5a_5t_f^4 + 4a_4t_f^3 + 3a_3t_f^2 = 0,$$
$$20a_5t_f^3 + 12a_4t_f^2 + 6a_3t_f = 0$$

Giải phương trình ta được

$$a_5 = 6(q_f - q_0)/t_f^5,$$
$$a_4 = -15(q_f - q_0)/t_f^4, \quad (4.7)$$
$$a_3 = 10(q_f - q_0)/t_f^3,\ a_2 = a_1 = 0,\ a_0 = q_0$$

Đa thức bậc cao có nhiều cực trị không kiểm soát được và đòi hỏi khối lượng tinh toán lớn, khó áp dụng thực tế.

Lập trình Matlab tính quỹ đạo bậc ba và bậc 5, cho giá trị đầu, cuối và thời gian

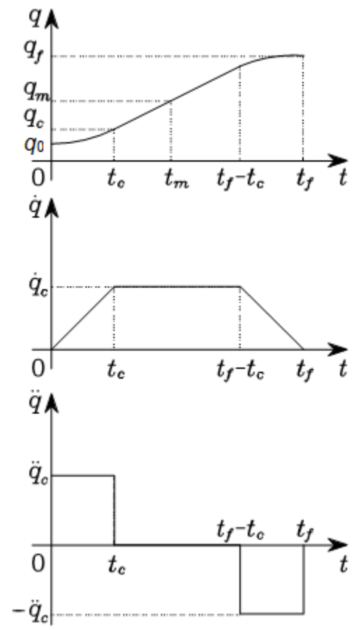
```
clc;
close all;
theta0=10;thetaf=80;tf=3;
%bac ba
a3=-2*(thetaf-theta0)/tf^3
a2=3*(thetaf-theta0)/tf^2
t=0:0.01:tf;
theta=a3*t.^3+a2*t.^2+theta0;
thetad=3*a3*t.^2+2*a2*t;
thetadd=6*a3*t+2*a2;
plot(t,theta)
```

```
grid on
hold on
plot(t,thetad,'.r')
title('Quy dao bac ba')
hold on
plot(t,thetadd,'--')
figure
% bac5
b=[thetaf-theta0;0;0];
A=[tf^5 tf^4 tf^3;5*tf^4 4*tf^3 3*tf^2;20*tf^3 12*tf^2 6*tf]
a=inv(A)*b
t=0:0.01:tf;
theta=a(1)*t.^5+a(2)*t.^4+a(3)*t.^3+theta0;
plot(t,theta)
title('Quy dao bac 5');
grid on
hold on
thetad=5*a(1)*t.^4+4*a(2)*t.^3+3*a(3)*t.^2;
```

4.1.2 Quỹ đạo vận tốc hình thang

Quỹ đạo đa thức cần nhiều phép tính nhân tốn thời gian, nếu ta dùng quỹ đạo có vận tốc hình thang thì biểu thức của q(t) gồm hai đoạn parabole ở hai đầu và đoạn tuyến tính ở giữa (LSPB Linear Segment with Parabolic Blend), việc tính toán đơn giản hơn. Gia tốc là hằng số $\ddot{q}_c$. Vận tốc gồm hai đoạn dốc ở đầu và cuối, vận tốc đầu và cuối là 0, vận tốc ở đoạn giữa là hằng số $\dot{q}_c$ và nhỏ hơn giá trị cho trước., Thời gian tăng tốc là t_c và bằng với thời gian giảm tốc. Thời gian di chuyển là t_f, $t_c <= t_f/2 \equiv t_m$

Vận tốc cuối đoạn parabole bằng vận tốc đầu đoạn tuyến tính, q_c là vị trí cuối đoạn parabole, q_m là vị trí giữa ở thời điểm t_m,



Hình 4.2 Quỹ đạo LSPB

Diện tích hình thang là quãng đường đi nên ta có biểu thức (4.7)

$$\boxed{0 < t_c = t_f - \frac{q_f - q_0}{\dot{q}_c} \le t_m} \tag{4.8}$$

$\dot{q}_c$ lựa chọn theo theo (4.7) và phải nhỏ hơn vận tốc tối đa cho phép.

$$\boxed{\frac{1}{t_f} < \frac{\dot{q}_c}{q_f - q_0} < \frac{2}{t_f}}$$

Gia tốc là $\ddot{q}_c = \dfrac{\dot{q}_c}{t_c}$

Nếu chọn trước gia tốc ta có biểu thức (4.8) tính t_c

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < t_c = \dfrac{t_f}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t_f^2\ddot{q}_c - 4(q_f - q_0)}{\ddot{q}_c}} \le t_m, \\ \dfrac{\ddot{q}_c}{q_f - q_0} \ge \dfrac{4}{t_f^2} \end{array}} \tag{4.9}$$

Sau khi đã chọn $\dot{q}_c$ và t_c ta có các biểu thức sau

$0 \le t \le t_c$: $\ddot{q} = \dfrac{\dot{q}_c}{t_c}, \dot{q} = \dfrac{\dot{q}_c}{t_c}t, q = \dfrac{\dot{q}_c}{2t_c}t^2 + q_0,$

$t_c < t \le t_f - t_c$: $\ddot{q} = 0, \dot{q} = \dot{q}_c, q = \dot{q}_c(t - \dfrac{t_c}{2}) + q_0,$ (4.10)

$t_f - t_c < t \le t_f$: $\ddot{q} = -\dfrac{\dot{q}_c}{t_c}, \dot{q} = \dfrac{\dot{q}_c}{t_c}(t_f - t), q = -\dfrac{\dot{q}_c}{2t_c}(t_f - t)^2 + q_f,$

Ví dụ 4.1: tính quỹ đạo LSPB với t_f=1s, q_f=π/2 radian, $\dot{q}_{\max}$ =2π radian/s

Ta phải có $1 < \dfrac{\dot{q}_c}{\pi/2} < 2, \dfrac{\pi}{2} < \dot{q}_c < \pi,$

Chọn $\dot{q}_c$=π rad/s, suy ra $0 < t_c = 1 - \dfrac{\pi/2}{\pi} \le 0.5$, t_c= 0.5s, quỹ đạo gồm hai đoạn parabole

$0 \le t \le 0.5$s: $\ddot{q} = 2\pi \text{ rad/s}^2, \dot{q} = 2\pi t \text{ rad/s}, q = \pi t^2 \text{rad},$

0.5s<$t\le$ 1s: $\ddot{q} = -2\pi \text{ rad/s}, \dot{q} = 2\pi(1-t) \text{ rad/s}, q = \pi(1-t)^2 + \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$

Ví dụ 4.2:Cho robot RR với a_1=0.3m, a_2=0.2m, tìm biểu thức của θ_i(t) để đầu cuối di chuyển từ điểm A(0.2 0)^T đến điểm B (0.3 0)^T trong thời gian 1s, a/ dùng quỹ đạo bậc ba, b/ dùng quỹ đạo LSPB

Giải:

- Đầu tiên ta giải động học ngược tìm θ_i

```
clc
a1=0.3;a2=0.2;
px1=0.2;py1=0;
syms theta1 theta2
[st1,st2]=solve(a1*cos(theta1) +a2*cos(theta1+ theta2)- px1,
a1*sin(theta1) +0.2*sin(theta1+ theta2)-py1)
y1=single([st1,st2])
px1=0.3; py1=0;
```

```
[st1,st2]=solve(a1*cos(theta1) +a2*cos(theta1+ theta2)- px1,
a1*sin(theta1) +0.2*sin(theta1+ theta2)-py1)
y2=single([st1,st2])
```

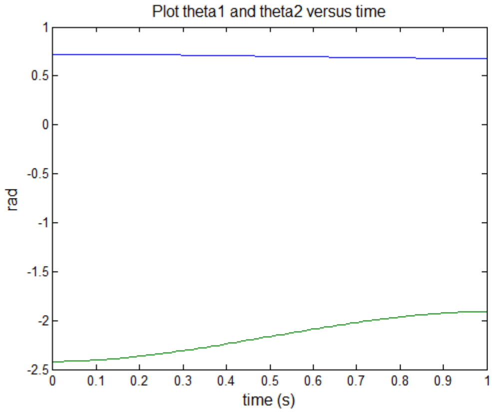
- Kết quả

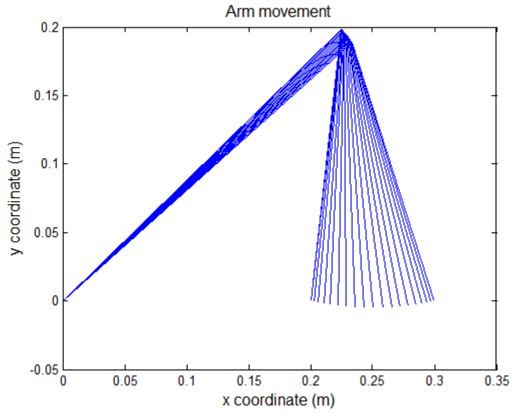
$\theta_1(0)= 0.7227$ rad, $\theta_2(0)=-2.4189$ rad

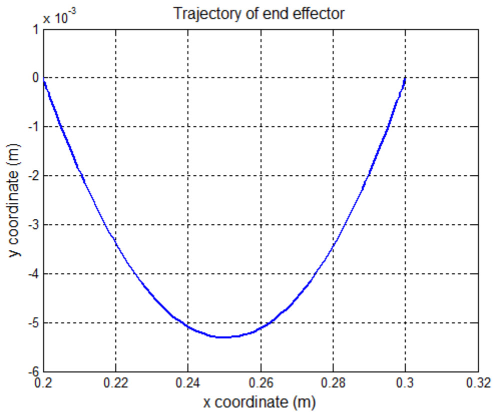
$\theta_1(1)= 0.6797$ rad, $\theta_2(1)= -1.9106$ rad

- Sau đó ta tính các hệ số của đa thức bậc ba, vẽ các góc $\theta_1\theta_2$ theo thời gian, chuyển động của hai cánh tay và quỹ đạo đầu cuối

```
%cubic trajectory
tf=1;
%theta1
a31=-2*(y2(1,1)-y1(1,1))/(tf^3)
a21=3*(y2(1,1)-y1(1,1))/(tf^2)
a11=0
a01=y1(1,1)
%theta2
a32=-2*(y2(1,2)-y1(1,2))/(tf^3)
a22=3*(y2(1,2)-y1(1,2))/(tf^2)
a12=0
a02=y1(1,2)
t=0:0.01:1
th1=a31*t.^3+a21*t.^2+a01;
th2=a32*t.^3+a22*t.^2+a02;
o1=[a1*cos(th1); a1*sin(th1)]
o2=o1+ [a2*cos(th1+ th2);  a2*sin(th1+ th2)]
%plot theta1 and theta2 versus time
plot(t,th1,t,th2)
title('Plot theta1 and theta2 versus time')
figure
for i=1:5:100
plot([0 o1(1,i)],[0 o1(2,i)])
hold on
plot([o1(1,i) o2(1,i)], [o1(2,i) o2(2,i)])
end
title('Arm movement')
figure
i=1:100
plot(o2(1,i),o2(2,i))
title('Trajectory of end effector')
grid on
```







Hình 4.3 Các đồ thị tương ứng quỹ đạo bậc ba Ví dụ4.2

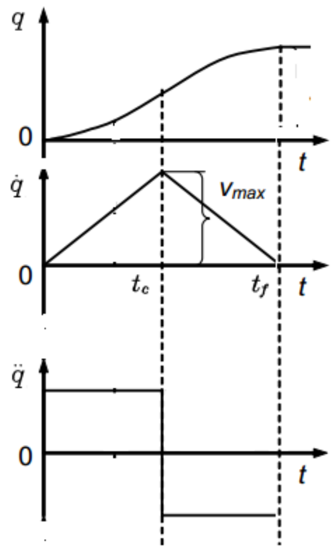
- Tính lại với quỹ đạo LSPB, chọn t_c=0.1s

```
%LSPB Trajectory
tc=0.1;
th1cdot=(y2(1,1)-y1(1,1))/(tf-tc);
th2cdot=(y2(1,2)-y1(1,2))/(tf-tc);

for i=1:101
t=(i-1)*0.01;
if (t<=tc)
th1(i)=(th1cdot/2/tc)*t^2+y1(1,1);
th2(i)=(th2cdot/2/tc)*t^2+y1(1,2);
elseif ((t>tc) & (t<=(tf-tc)))
th1(i)= th1cdot*(t-tc/2)+y1(1,1);
th2(i)= th2cdot*(t-tc/2)+y1(1,2);
elseif  t>(tf-tc)
th1(i)=-(th1cdot/2/tc)*(tf-t)^2+y2(1,1);
th2(i)=-(th2cdot/2/tc)*(tf-t)^2+y2(1,2);
end
end
i=1:101
o1=[a1*cos(th1(i)); a1*sin(th1(i))];
o2=o1+ [a2*cos(th1(i)+ th2(i));  a2*sin(th1(i)+ th2(i))];
%plot theta1 and theta2 versus time
figure
i=1:101

plot((i-1)*0.01,th1(i))
hold on
plot((i-1)*0.01,th2(i))
title('Plot theta1 and theta2 versus time')
xlabel('time (s)')
ylabel('rad')
figure
i=1:100
plot(o2(1,i),o2(2,i))
title('Trajectory of end effector')
xlabel('x coordinate (m)')
ylabel('y coordinate (m)')
grid on
```

4.1.3 Các dạng quỹ đạo khác

a/ Quỹ đạo tam giác

Nếu chọn $t_c=t_f/2$ trong quỹ đạo hình thang thì ta được quỹ đạo vận tốc tam giác và quỹ đạo vị trí gồm hai đoạn parabole



Hình 4.4 Quỹ đạo vận tốc tam giác

Gọi t_f là thời gian di chuyển và q_f là quãng đường, ta có

$$\boxed{v_{max}=\frac{2q_f}{t_f}} \tag{4.11}$$

$$0<=t<=t_f/2,\ \boxed{\dot{q}=\frac{4q_f t}{t_f^2},\ q=\frac{2q_f t^2}{t_f^2}} \tag{4.12}$$

$$t_f/2<=t<=t_f,\ \boxed{\dot{q}=\frac{4q_f}{t_f^2}(t_f-t),\ q=-\frac{2q_f(t_f-t)^2}{t_f^2}+q_f} \tag{4.13}$$

b/ Quỹ đạo gia tốc tam giác

Gia tốc có dạng hai hình tam giác cân, gia tốc và vận tốc đầu và cuối bằng 0 do đó chuyển động êm hơn, quỹ đạo vị trí gồm bốn đoạn bậc ba.

Gia tốc tối đa là $$a_{max}=\frac{8q_f}{t_f^2}, \tag{4.14}$$

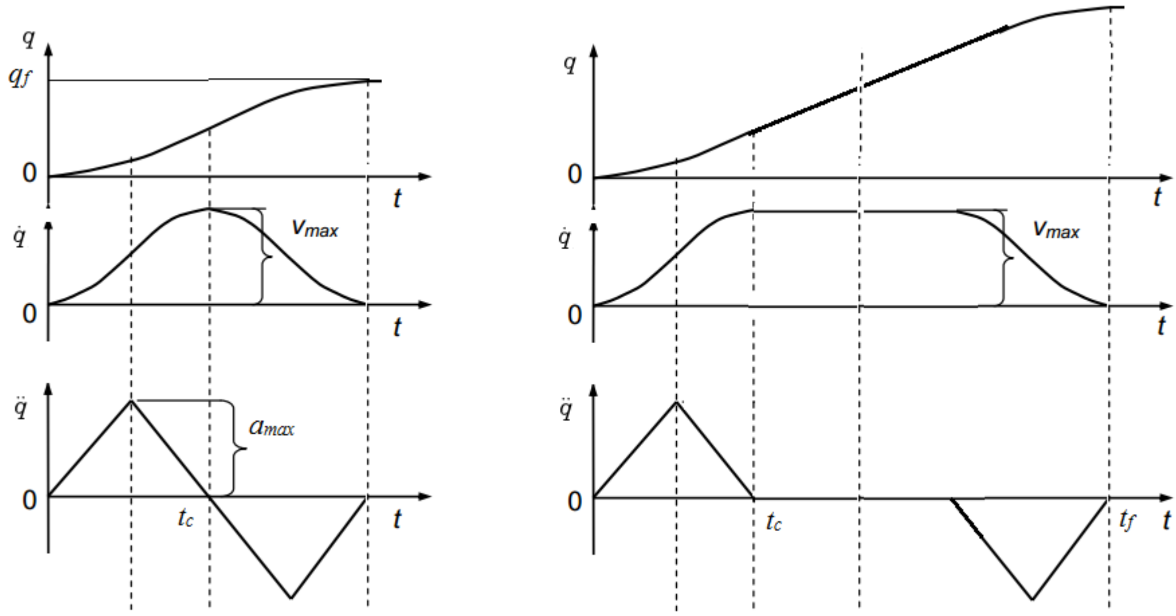
$$0<=t<=\frac{t_f}{4},\ \ddot{q}=\frac{4a_{max}t}{t_f},\ \dot{q}=\frac{2a_{max}t^2}{t_f},\ q=\frac{2a_{max}t^3}{3t_f}, \tag{4.15}$$

$$\frac{t_f}{4}<=t<=\frac{t_f}{2},\ \ddot{q}=-\frac{4a_{max}(t-\frac{t_f}{2})}{t_f},\ \dot{q}=-\frac{2a_{max}(t-\frac{t_f}{2})^2}{t_f}+a_{max}\frac{t_f}{4}, \tag{4.16}$$

$$q=\left[\frac{2(t-\frac{t_f}{2})^3}{3}+\frac{t_f^2 t}{4}-\frac{t_f^3}{16}\right]\frac{a_{max}}{t_f}, \tag{4.17}$$

$$\frac{t_f}{2} <= t <= \frac{3t_f}{4} \quad \ddot{q} = -\frac{4a_{max}(t - \frac{t_f}{2})}{t_f}, \tag{4.18}$$

$$\frac{3t_f}{4} <= t <= t_f \quad \ddot{q} = \frac{4a_{max}(t - t_f)}{t_f}, \tag{4.19}$$

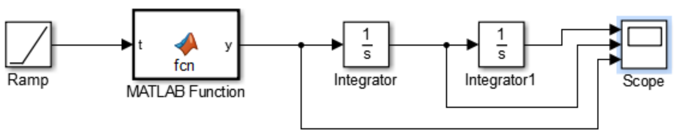


Hình 4.5 Quỹ đạo gia tốc tam giác

Nếu muốn có đoạn vận tốc hằng số thì ta giãn cách hai đoạn gia tốc đầu và cuối, quỹ đạo ví trí gồm 5 đoạn, đoạn giữa là đoạn thẳng

Ví dụ 4.3:Vẽ quỹ đạo gia tốc tam giác với t_f=4s, q_f=1

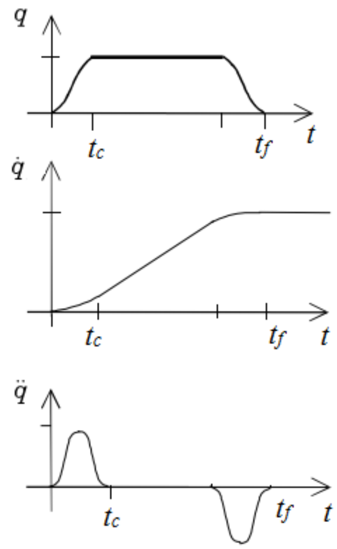
```
function y = fcn(t)
tf=4;qf=1;
am=8*qf/(tf*tf);
if (t<=tf/4)
    s=4*am*t/tf;
elseif ((t>tf/4) && (t<=3*tf/4 ))
    s=-4*am*(t-tf/2)/tf;
elseif ((t>3*tf/4) && (t<=tf ))
    s=4*am*(t-tf)/tf;
else s=0;
end
y = s;
```



Hình 4.6 Sơ đồ Simulink tạo quỹ đạo gia tốc tam giác

c/ Quỹ đạo vận tốc hình sin

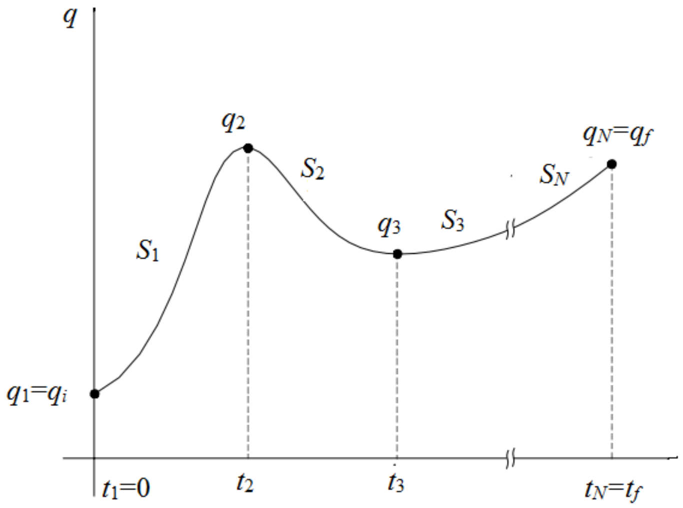
Thay vì dùng gia tốc là tam giác ta cũng có thể dùng gia tốc hình sin,



Hình 4.7 Quỹ đạo gia tốc hình sin

4.2 QUỸ ĐẠO QUA NHIỀU ĐIỂM

Dạng quỹ đạo này thường dùng khi di chuyển đầu công tác từ điểm ban đầu đến đích nhưng phải đi qua một số điểm trung gian để tránh một vật cản, khi gắp thả vật ta cũng cần hai điểm trung gian tương ứng với nâng lên và hạ xuống. Như vậy ta xác định điểm đầu, điểm cuối và các điểm trung gian trong không gian làm việc của đầu công tác, từ đó giải bài toán ngược, tìm biểu thức của $q(t)$ đi qua nhiều điểm. Trong mỗi khoảng thời gian từ t_k đến t_{k+1} ta dùng đa thức $q_k(t\text{-}t_k)$ với yêu cầu liên tục về vị trí và vận tốc (có thể cả gia tốc) ở đầu và cuối.



Hình 4.8 Quỹ đạo qua N điểm

4.2.1 Quỹ đạo là đa thức bậc cao

Ta có thể dùng đa thức bậc cao đi qua N điểm, nếu không xét vận tốc thì có N ràng buộc, như vậy cần đa thức bậc N-1, bậc đa thức tăng hơn nếu thêm ràng buộc vận tốc và gia tốc. Xét trường hợp quỹ đạo ba điểm dùng đa thức bậc 6 với bảy ràng buộc như sau:

$$q(t) = a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$
$$\dot{q}(t) = 6a_6 t^5 + 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1,$$
$$\ddot{q}(t) = 30a_6 t^4 + 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2$$
$$q(0) = q_i,\ q(t_1) = q_1,\ q(t_f) = q_f,$$
$$\dot{q}(0) = \dot{q}(t_f) = 0,\ \ddot{q}(0) = \ddot{q}(t_f) = 0$$

Ta có các phương trình

$$a_0 = q_i,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0 \tag{4.20}$$
$$a_6 t_2^6 + a_5 t_2^5 + a_4 t_2^4 + a_3 t_2^3 = q_2 - q_i,$$
$$a_6 t_f^6 + a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 = q_f - q_i,$$
$$6a_6 t_f^5 + 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 = 0,$$
$$30a_6 t_f^4 + 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f = 0,$$

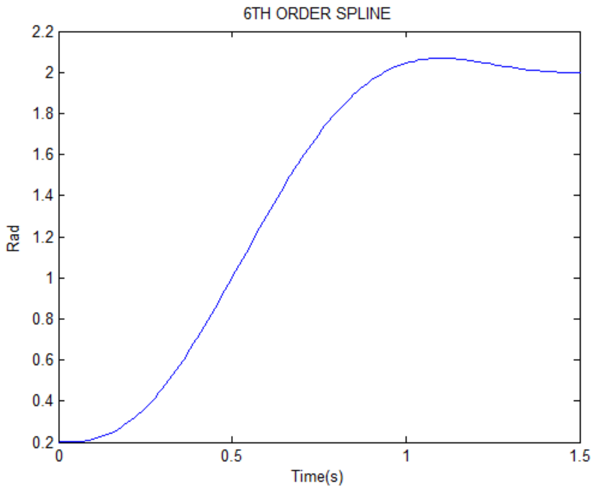
$$\begin{bmatrix} t_2^6 & t_2^5 & t_2^4 & t_2^3 \\ t_f^6 & t_f^5 & t_f^4 & t_f^3 \\ 6t_f^5 & 5t_f^4 & 4t_f^3 & 3t_f^2 \\ 30t_f^4 & 20t_f^3 & 12t_f^2 & 6t_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 - q_i \\ q_f - q_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Ta viết chương trình tính nghịch đảo ma trận để tìm các hệ số

Ví dụ 4.4: Tìm quỹ đạo bậc 6 qua ba điểm $q_1(0)$=0.2 rad, $q_2(0.5s)$=1 rad và $q_3(1.5s)$=2 rad

```
t2=0.5;tf=1.5;
q1=0.2;q2=1;q3=2;
A=[ t2^6    t2^5    t2^4      t2^3;
tf^6    tf^5    tf^4      tf^3;
    6*tf^5  5*tf^4  4*tf^3    3*tf^2;
    30*tf^4 20*tf^3 12*tf^2   6*tf];
b=[q2-q1;q3-q1;0;0];
a=inv(A)*b
f=figure;
set(f,'color','w');
t=0:0.01:tf;
plot(t, a(1)*t.^6+a(2)*t.^5+a(3)*t.^4+ a(4)*t.^3+q1)
title('6TH ORDER SPLINE')
xlabel('Time(s)');
ylabel('Rad');
```

Kết quả ở Hình 4.9. Quỹ đạo bậc cao đòi hỏi khối lượng tính toán lớn, dạng đa thức có thể không phù hợp cho điều khiển robot.



Hình 4.9 Quỹ đạo bậc 6 Ví dụ 4.3

4.2.2 Quỹ đạo là các đa thức bậc ba

a/Quỹ dạo hai đoạn

Ta có 8 ẩn số, các ràng buộc về vị trí và vận tốc

$$q_1(t) = a_{31}t^3 + a_{21}t^2 + a_{11}t + a_{01} \tag{4.22}$$

$$\dot{q}_1(t) = 3a_{31}t^2 + 2a_{21}t + a_{11}$$

$$\ddot{q}_1(t) = 6a_{31}t + 2a_{21}$$

$$q_2(t) = a_{32}(t-t_2)^3 + a_{22}(t-t_2)^2 + a_{12}(t-t_2) + a_{02} \tag{4.23}$$

$$\dot{q}_2(t) = 3a_{32}(t-t_2)^2 + 2a_{22}(t-t_2) + a_{12}$$

$$\ddot{q}_2(t) = 6a_{32}(t-t_2) + 2a_{22}$$

Các ràng buộc về vị trí: $q_1(0)=q_i$, $q_1(t_2)=q_2(t_2)=q_2$, , $q_2(t_f)=q_f$.

Các ràng buộc về vận tốc: $\dot{q}_1(0) = 0, \dot{q}_1(t_2) = \dot{q}_2(t_2), \dot{q}_2(t_f) = 0$

Còn thiếu một ràng buộc, có thể đặt vận tốc ở t_2 hay gia tốc liên tục ở t_2

***Ví dụ 4.5*:** Thực hiện Ví dụ 4.4 với đa thức bậc ba

$$q_1(0)=a_{01}=0.2 \text{ rad},\ q_1(0.5)=q_2(0.5)=1=a_{02}\ ,\ q_2(1.5)=2.$$

$$\dot{q}_1(0) = a_{11} = 0, \dot{q}_1(t_2) = \dot{q}_2(t_2), \dot{q}_2(t_f) = 0;$$

$$\ddot{q}_1(t_2) = \ddot{q}_2(t_2)$$

Ta có 5 phương trình

$$a_{31}t_2^3 + a_{21}t_2^2 = q_2 - q_i,$$

$$a_{32}(t_f - t_2)^3 + a_{22}(t_f - t_2)^2 + a_{12}(t_f - t_2) = q_f - q_2,$$

$$3a_{31}t_2^2 + 2a_{21}t_2 - 3a_{12} = 0,$$

$$3a_{32}(t_f - t_2)^2 + 2a_{22}(t_f - t_2) + a_{12} = 0,$$

$$6a_{31}t_2 + 2a_{21} - 2a_{22} = 0$$

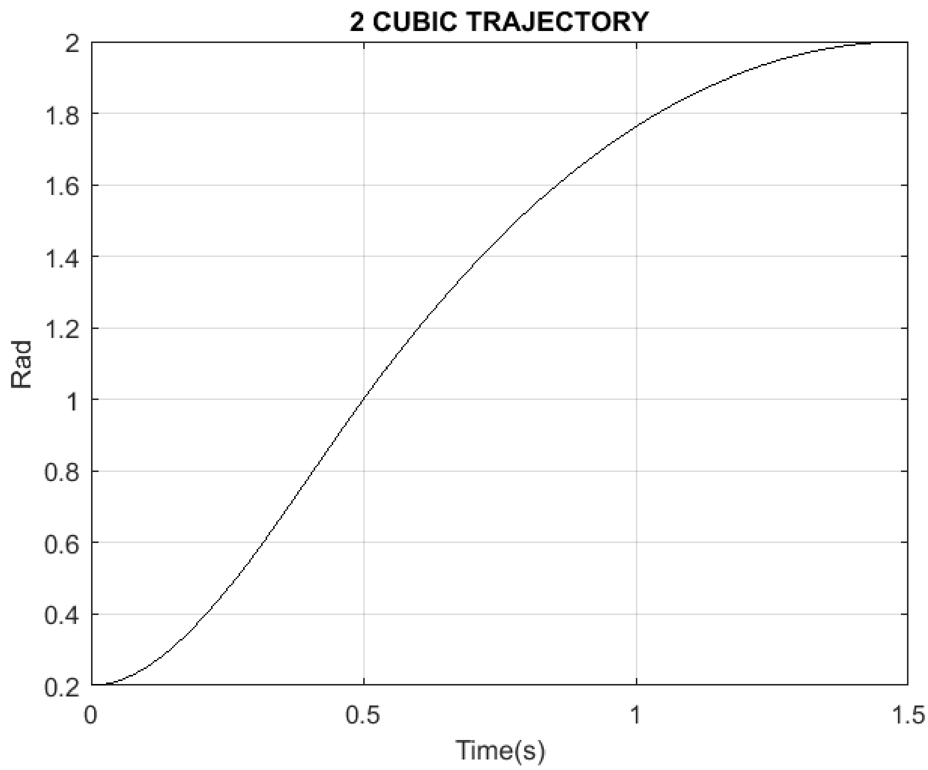
$$\begin{bmatrix} t_2^3 & 0 & t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (t_f-t_2)^3 & 0 & (t_f-t_2)^2 & t_f-t_2 \\ 3t_2^2 & 0 & 2t_2 & 0 & -1 \\ 0 & 3(t_f-t_2)^2 & 0 & 2(t_f-t_2) & 1 \\ 6t_2 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2-q_i \\ q_f-q_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình, ta được kết quả (Hình 4.10)

$$q_1(t) = -4.4t^3 + 5.4t^2 + 0.2;$$

$$q_2(t) = 0.1(t-0.5)^3 - 1.2(t-0.5)^2 + 2.1(t-0.5) + 1;$$

```
qi=0.2;q2=1;qf=2;
t2=0.5;tf=1.5;
A=[t2^3 0 t2^2 0 0;
    0 (tf-t2)^3 0 (tf-t2)^2 tf-t2;
    3*t2^2 0 2*t2 0 -1;
    0 3*(tf-t2)^2 0 2*(tf-t2) 1;
    6*t2 0 2 -2 0]
c=[q2-qi;qf-q2;0;0;0];
b=inv(A)*c
grid on
t=0:0.01:t2;
    s=b(1)*t.^3+b(3)*t.^2 +qi;
plot(t,s)
hold on
t=t2:0.01:tf;
    s=b(2)*(t-t2).^3+b(4)*(t-t2).^2 +b(5)*(t-t2) +q2;
plot(t,s)
```



Hình 4.10 Hai quỹ đạo bậc 3 Ví dụ 4.5

b/ **Quỹ đạo ba đoạn**

Ta có các phương trình sau

$$q_1(t) = a_{31}t^3 + a_{21}t^2 + a_{11}t + a_{01} \quad (4.24)$$
$$\dot{q}_1(t) = 3a_{31}t^2 + 2a_{21}t + a_{11}$$
$$\ddot{q}_1(t) = 6a_{31}t + 2a_{21}$$

$$q_2(t) = a_{32}(t-t_2)^3 + a_{22}(t-t_2)^2 + a_{12}(t-t_2) + a_{02} \quad (4.25)$$
$$\dot{q}_2(t) = 3a_{32}(t-t_2)^2 + 2a_{22}(t-t_2) + a_{12}$$
$$q_3(t) = a_{33}(t-t_3)^3 + a_{23}(t-t_3)^2 + a_{13}(t-t_3) + a_{03} \quad (4.26)$$
$$\dot{q}_3(t) = 3a_{33}(t-t_3)^2 + 2a_{23}(t-t_3) + a_{13}$$
$$\ddot{q}_3(t) = 6a_{33}(t-t_3) + 2a_{23}$$

Các ràng buộc về vị trí: $q_1(0)=q_i$, $q_1(t_2)=q_2(t_2)=q_2$, $q_2(t_3)=q_3(t_3)=q_3$, $q_3(t_f)=q_f$.

Các ràng buộc về vận tốc: $\dot{q}_1(0)=0, \dot{q}_1(t_2)=\dot{q}_2(t_2), \dot{q}_2(t_3)=\dot{q}_3(t_3), \dot{q}_3(t_f)=0$

Ta có 10 phương trình với 12 ẩn số, phải tìm thêm ràng buộc, có thể cho gia tốc ở t_1=0 và t_f là 0, ta có $\ddot{q}_1(0)=0, \ddot{q}_3(t_f)=0$, như vậy đủ 12 điều kiện, các phương trình được viết như sau:

$$a_{01}=q_i,\ a_{02}=q_2,\ a_{03}=q_3,\ a_{11}=a_{21}=0 \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} t_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (t_3-t_2)^3 & 0 & (t_3-t_2)^2 & 0 & t_3-t_2 & 0 \\ 0 & 0 & (t_f-t_3)^3 & 0 & (t_f-t_3)^2 & 0 & t_f-t_3 \\ 3t_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3(t_3-t_2)^2 & 0 & 2(t_3-t_2) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3(t_f-t_3)^2 & 0 & 2(t_f-t_3) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6(t_f-t_3) & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2-q_i \\ q_3-q_2 \\ q_f-q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

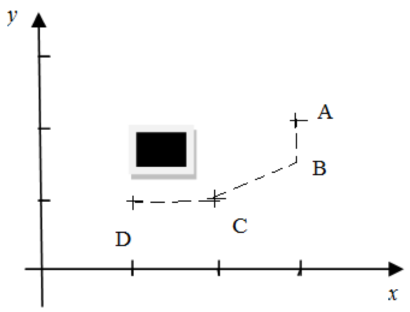
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

***Ví dụ 4.6*:** Xét robot Vi dụ 4.2 di chuyển theo quỹ đạo ABCD (Hình 4.11) để tránh vật cản trong thời gian 1.5s, tìm biểu thức của hai góc θ. Các điểm có toạ độ A(0.3, 0,2) B(0.3, 0,15) C(0.2, 0.1) D(0.1, 0.1), thời gian di chuyển cho mỗi đoạn là 0.5s

Giải:

- Dùng chương trình động học ngược như ví dụ trước ta tính được các góc

  $\theta_{11}=0$, $\theta_{12}= -0.1673$, $\theta_{13}=-0.2661$, $\theta_{14}=0.1847$



Hình 4.11 Quỹ đạo tránh vật cản

θ_{21}=1.5708, θ_{22}=1.7172, θ_{23}=2.3005, θ_{24}=2.7305

- Tính các hệ số đa thức cho θ_1 và vẽ θ_1

```
clc
close all
q1=0;q2=-0.1673;q3=-0.2661;qf=0.1847;
t2=0.5;t3=1;tf=1.5;
b=[q2-q1 q3-q2 qf-q3 0 0 0 0]';
     A=[t2^3    0        0          0            0          0          0;
     0      (t3-t2)^3    0         (t3-t2)^2     0          t3-t2      0;
              0     0   (tf-t3)^3    0          (tf-t3)^2    0     tf-t3;
 3*t2^2 0          0       0            0        -1          0;
       0     3*(t3-t2)^2 0    2*(t3-t2)   0         1        -1;
0 0             3*(tf-t3)^2 0    2*(tf-t3)   0         1;
  0        0             6*(tf-t3)    0       2        0         0]
a=inv(A)*b
t=0:0.01:t2;
plot(t, a(1)*t.^3)
hold on
t=t2:0.01:t3;
plot(t, a(2)* (t-t2).^3 + a(4)* (t-t2).^2+ a(6)* (t-t2)+q2)
hold on
t=t3:0.01:tf;
plot(t, a(3) *(t-t3).^3 + a(5) *(t-t3).^2+ a(7) *(t-t3) +q3)
title('3-CUBIC TRAJECTORY')
xlabel('Time (s)')
ylabel('Rad')
```

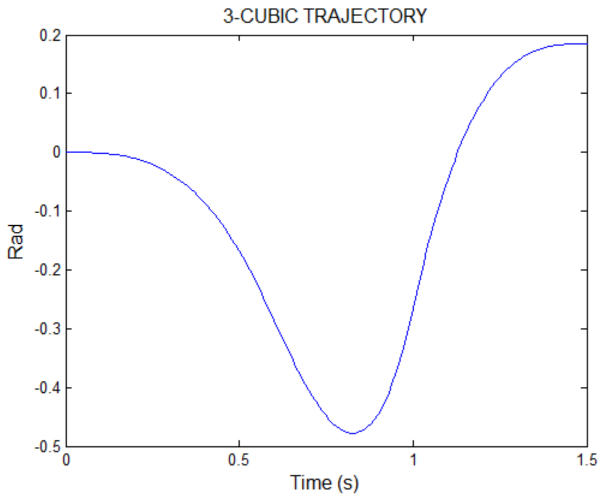
Từ kết quả chương trình suy ra

$\theta_{11}(t)$= -1.3384t^3

$\theta_{12}(t)$= 8.3848 $(t$-0.5$)^3$-2.5800 $(t$-0.5$)^2$-1.0038 $(t$-0.5)- 0.1673

$\theta_{13}(t)$=3.6064 $(t$-1$)^3$ -5.4096 $(t$-1$)^2$+2.7048 $(t$-1) - 0.2661

Quỹ đạo trình bày ở Hình 4.12.



Hình 4.12 Quỹ đạo 3-cubic của θ_1

c/Spline

Nếu chọn gia tốc ở các điểm giữa liên tục thì quỹ đạo qua *n* điểm gồm *n*-1 đường bậc ba liên tục về vị trí, vận tốc và gia tốc với vận tốc đầu và cuối cho trước còn gia tốc đầu và cuối khác 0, đường này gọi là spline. Xét trường hợp tổng quát ta đặt $h_i=t_{i+1}-t_i$, v_i là vận tốc ở thời điểm t_i trong đó v_1 và v_n cho trước, còn v_i, i=2..*n*-1 chưa biết.

Từ phương trình vị trí ở đầu mỗi đoạn (*i*=1..*n*-1)

$$a_{0i}=q_i, \tag{4.29}$$

Từ vận tốc ở đầu mỗi đoạn

$$a_{1i}=v_i, \tag{4.30}$$

Điều kiện liên tục vận tốc :

$$3h_i^2a_{3i}+2h_ia_{2i}+v_i=v_{i+1} \tag{4.31}$$

Điều kiện vị trí ở cuối mỗi đoạn:

$$a_{3i}h_i^3+a_{2i}h_i^2+h_iv_i+q_i=q_{i+1} \tag{4.32}$$

Giải hai phương trình (4.31) và (4.32)

$$a_{3i}=\frac{v_{i+1}+v_i}{h_i^2}-\frac{2}{h_i^3}(q_{i+1}-q_i), \tag{4.33}$$

$$a_{2i}=-\frac{v_{i+1}+2v_i}{h_i}+\frac{3}{h_i^2}(q_{i+1}-q_i) \tag{4.34}$$

Điều kiện liên tục về gia tốc:

$$6h_ia_{3i}+\ 2a_{2i}-\ 2a_{2,i+1}=0 \tag{4.35}$$

Thay (4.33) (4.34) vào (4.35) ta được *n*-2 phương trình để tính $v_2..v_{n-1}$

$$h_{i+1}v_i+2(h_i+h_{i+1})v_{i+1}+h_iv_{i+2}=\frac{3}{h_ih_{i+1}}\left[h_i^2(q_{i+2}-q_{i+1})+h_{i+1}^2(q_{i+1}-q_i)\right] \tag{4.36}$$

Các phương trình (4.36) viết dưới dạng ma trận

$$\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{b} \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_2 & v_3 & . & . & v_{n-3} & v_{n-2} & v_{n-1}\end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & 0 & \dots & & 0 \\ & h_4 & 2(h_3+h_4) & h_3 & \dots & & 0 \\ & & & & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}_{(n-2)\mathrm{x}(n-2)}$ gọi là ma trận ba đường chéo, các phần tử ngoài ba đường chéo này đều là 0

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{h_1h_2}\left[h_1^2(q_3-q_2)+h_2^2(q_2-q_1)-h_2v_1\right] \\ \dfrac{3}{h_2h_3}\left[h_2^2(q_4-q_3)+h_3^2(q_3-q_2)\right] \\ \vdots \\ \dfrac{3}{h_{n-3}h_{n-2}}\left[h_{n-3}^2(q_{n-1}-q_{n-2})+h_{n-2}^2(q_{n-2}-q_{n-3})\right] \\ \dfrac{3}{h_{n-2}h_{n-1}}\left[h_{n-2}^2(q_n-q_{n-1})+h_{n-1}^2(q_{n-1}-q_{n-2})-h_{n-2}v_n\right] \end{bmatrix}$$

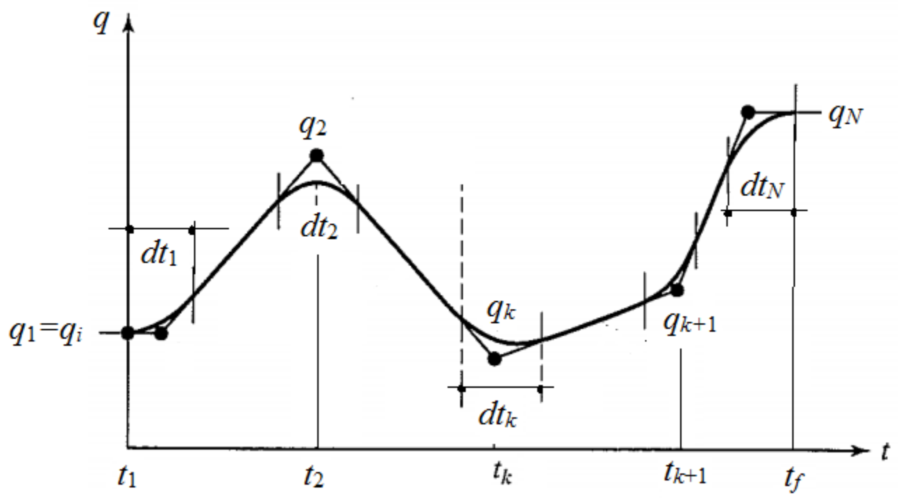
Giải hệ phương trình (4.37) ta tính được $v_2,..v_{n-1}$, thay vào (4.33) (4.34) được a_{3i}, a_{2i} , từ (4.30) được a_{1i}

Muốn có quỹ đạo liên tục về gia tốc ở các điểm trung gian và gia tốc bằng 0 ở điểm đầu cuối ta nên dùng đa thức bậc 4 ở đoạn đầu, cuối và đa thức bậc ba ở các điểm trung gian.

4.2.3 Quỹ đạo LSPB (Nội suy tuyến tính)

Quỹ đạo đa thức đòi hỏi tính toán phức tạp và ta không điều khiển được các điểm cực trị của đa thức, nếu chỉ cần quỹ đạo đi lướt gần qua qua điểm trung gian $q_2,\dots q_{N-1}$ thì ta có thể cho quỹ đạo là đoạn thẳng giữa hai điểm, và ở lân cận điểm trung gian ta thay bằng parabole (Hình 4.13).

nhược điểm: không đi qua chính xác điểm trung gian



Hình 4.13 Quỹ đạo LSPB

Trong khoảng thời gian Δt_k từ $t_k+\frac{dt_k}{2}$ đến $t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}$ vận tốc quỹ đạo thứ k là hằng số

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}} \tag{4.38}$$

quỹ đạo là đường thẳng hướng đến q_{k+1}

$$\boxed{q_k(t) = \frac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}\left(t-t_k-\frac{dt_k}{2}\right)+q_k\left(t_k+\frac{dt_k}{2}\right),\ t_k+\frac{dt_k}{2}\le t<t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}} \tag{4.39}$$

vận tốc không đổi trong thời gian Δt_k, khi gần đến điểm q_{k+1}, vận tốc thay đổi theo qui luật tuyến tính để chuyển từ $\dot{q}_k$ sang $\dot{q}_{k+1}$ trong thời gian dt_{k+1}, trong thời gian dt_{k+1} vận tốc là

$$\boxed{\dot{q}_{k+1}(t) = \frac{\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k}{dt_{k+1}}\left\{t-\left(t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}\right)\right\}+\dot{q}_k,\ t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}\le t\le t_{k+1}+\frac{dt_{k+1}}{2}} \tag{4.40}$$

$$\boxed{\dot{q}_{k+1} = \frac{q_{k+2}-q_{k+1}}{t_{k+2}-t_{k+1}}} \tag{4.41}$$

quỹ đạo là parabole

$$\boxed{\begin{aligned} q_{k+1}(t) &= \frac{\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k}{2dt_{k+1}}\left\{t-\left(t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}\right)\right\}^2+\dot{q}_k\left\{t-\left(t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}\right)\right\}+q_{k,t=t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}}, \\ & t_{k+1}-\frac{dt_{k+1}}{2}\le t<t_{k+1}+\frac{dt_{k+1}}{2} \end{aligned}} \tag{4.42}$$

với gia tốc là

$$\boxed{\gamma_{k+1} = \frac{\dot{q}_{k+1}-\dot{q}_k}{dt_{k+1}}} \tag{4.43}$$

Đối với đoạn đầu đoạn quỹ đạo phát xuất là parabole

$$\boxed{q_1(t) = \frac{\dot{q}_1}{2dt_1}t^2+q_i\ \ 0\le t\le dt_1} \tag{4.44}$$

ở thời điểm dt_1 $q_1(dt_1) = \frac{\dot{q}_1 dt_1}{2} + q_i$, và độ dốc là $\dot{q}_1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này:

$\frac{q(t) - q_1(dt_1)}{t - dt_1} = \dot{q}_1$, ta muốn tiếp tuyến này đi qua điểm (t_2,q_2) nên $\frac{q_2 - \frac{\dot{q}_1 dt_1}{2} - q_i}{t_2 - dt_1} = \dot{q}_1$, giải phương trình này suy ra vận tốc trong đoạn tuyến tính thứ nhất

$$\boxed{\dot{q}_1 = \frac{q_2 - q_i}{t_2 - \frac{dt_1}{2}}} \tag{4.45}$$

và quỹ đạo tuyến tính là

$$\boxed{q_1(t) = \dot{q}_1(t - dt_1) + q_{1,t=dt_1}, dt_1 \le t \le t_2 - dt_2/2} \tag{4.46}$$

Tương tự dối với đoạn cuối vận tốc hằng số là

$$\boxed{\dot{q}_{N-1} = \frac{q_f - q_{N-1}}{t_N - t_{N-1} - dt_N/2}} \tag{4.47}$$

quỹ đạo tuyến tính là

$$\boxed{q_{N-1}(t) = \dot{q}_{N-1}(t - t_{N-1} - dt_{N-1}/2) + q_{N-1,t=t_{N-1}+dt_{N-1}/2}, t_{N-1} + dt_{N-1}/2 \le t \le t_f - dt_N} \tag{4.48}$$

đoạn quỹ đạo kết thúc là parabole

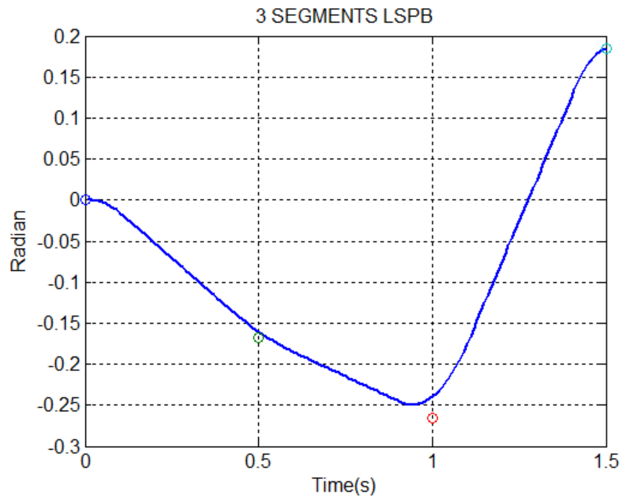
$$\boxed{q_N(t) = -\frac{\dot{q}_{N-1}}{2dt_N}(t_f - t)^2 + q_f, t_f - dt_N \le t \le t_f} \tag{4.49}$$

Sử dụng quỹ đạo tuyến tính giúp giảm khối lượng tính toán, không đòi hỏi công cụ xử lý đắt tiền. Để đơn giản lập trình ta chọn $dt_k = dt$,k=2..N-1 là cố định và $dt_1 = dt_N = dt/2$. Chọn dt nhỏ thì gia tốc sẽ tăng do đó tuỳ theo gia tốc tối đa cho phép của kết cấu robot ta chọn dt phù hợp.

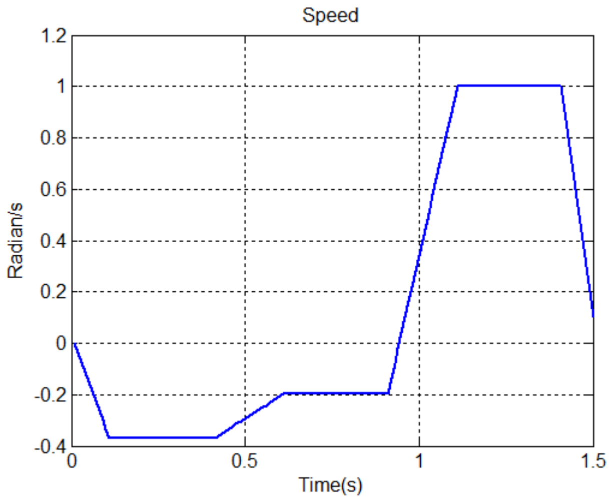
***Ví dụ 4.7*:** Điều khiển theo quỹ đạo tuyến tính cho bài toán ở Ví dụ 4.6, chọn $\Delta t'$ =0.2s, $\Delta t_1' = \Delta t_4' = \Delta t'/2, \Delta t_2' = \Delta t_3' = \Delta t'$

```
clc
close all
qi=0;q2=-0.1673;q3=-0.2661;qf=0.1847;
t2=0.5;t3=1;tf=1.5;
dt=0.2;
qdot2=(q2-qi)/(t2-dt/4)
qdot3=(q3-q2)/(t3-t2)
qdot4=(qf-q3)/(tf-t3-dt/4)
for i=1:100*tf
t=0.01*(i-1)
    if t<=dt/2
        q(i)=qdot2*(t.^2)/dt+qi;
        qd(i)=2*qdot2*t/dt;
        qdd(i)=2*qdot2/dt;
        qt1=qi+qdot2*dt/4;
elseif ((t>dt/2) & (t<=(t2-dt/2)))
q(i)=qdot2*(t-dt/2)+qt1;
        qd(i)=qdot2;
```

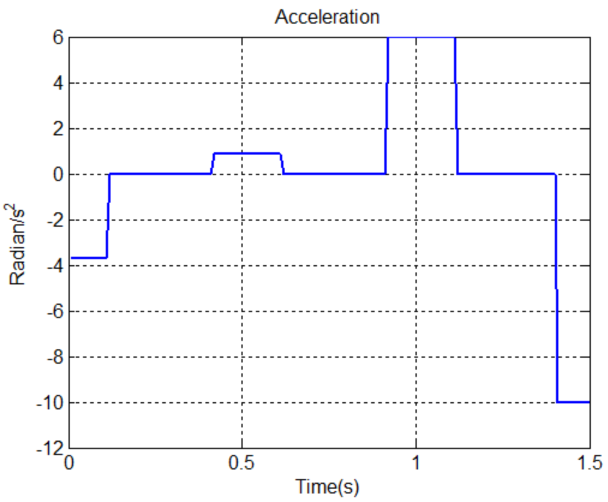
```
qdd(i)=0;
        qt2=qdot2*(t2-dt)+qt1;
    elseif ((t>(t2-dt/2)) &(t<=(t2+dt/2)))
        q(i)=((qdot3-qdot2)/dt/2)*(t-t2+dt/2)^2+qdot2*(t-
t2+dt/2)+qt2;
        qd(i)=(qdot3-qdot2)*(t-t2+dt/2)/dt+qdot2;
qdd(i)=(qdot3-qdot2)/dt;
qt3=((qdot3-qdot2)/dt/2)*(t2+dt/2-t2+dt/2)^2+qdot2*(t2+dt/2-
t2+dt/2)+qt2;
    elseif ((t>(t2+dt/2)) &(t<=(t3-dt/2)))
        q(i)=qdot3*(t-t2-dt/2)+qt3;
qd(i)=qdot3;
        qdd(i)=0;
qt33=qdot3*(t3-dt/2-t2-dt/2)+qt3;
    elseif ((t>(t3-dt/2)) &(t<=(t3+dt/2)))
        q(i)=((qdot4-qdot3)/dt/2)*(t-t3+dt/2)^2+qdot3*(t-
t3+dt/2)+qt33;
        qd(i)=(qdot4-qdot3)*(t-t3+dt/2)/dt +qdot3;
qdd(i)=(qdot4-qdot3)/dt;
qt4=((qdot4-qdot3)/dt/2)*(t3+dt/2-t3+dt/2)^2+qdot3*(t3+dt/2-
t3+dt/2)+qt33;
    elseif (t>(t3+dt/2)) &(t<=(tf-dt/2))
        q(i)=qdot4*(t-t3-dt/2)+qt4;
qd(i)=qdot4;
        qdd(i)=0;
qt44=qdot4*(tf-dt/2-t3-dt/2)+qt4;
    elseif ((t>(tf-dt/2)) &(t<=tf))
q(i)=-qdot4/dt*(tf-t)^2+qf;
        qd(i)=qdot4*2*(tf-t)/dt;
        qdd(i)=-qdot4*2/dt;

    end
end
i=1:100*tf
plot(i*0.01,q(i))
hold on
grid on
title('3 SEGMENTS LSPB');
xlabel('Time(s)')
ylabel('Radian')
plot(0,0,'o',0.5,-0.1673,'o',1,-0.2661,'o',1.5,0.1847,'o')
figure
plot(i*0.01,qd(i))
title('Speed');
xlabel('Time(s)')
ylabel('Radian/s')
grid on
figure
plot(i*0.01,qdd(i))
title('Acceleration');
xlabel('Time(s)')
ylabel('Radian/s^2')
grid on
```



Hình 4.14 Quỹ đạo LSPB của θ_1



Hình 4.15 Vận tốc LSPB



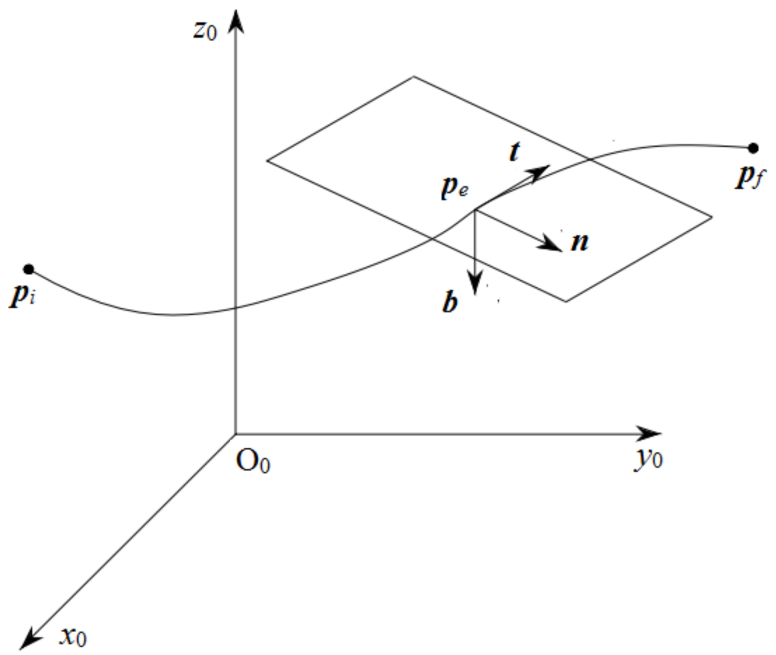
Hình 4.16 Gia tốc LSPB

So sánh Hình 4.12 và 4.14 rõ ràng là quỹ đạo LSPB tốt hơn.

4.3 QUI HOẠCH QUỸ ĐẠO TRONG KHÔNG GIAN LÀM VIỆC

Khi dùng robot trong dây chuyền sản xuất ta thường phải điều khiển vị trí và hướng đầu cuối theo quỹ đạo định trước, ví dụ quỹ đạo đường hàn, quỹ đạo cắt laser, như vậy ta phải lập biểu thức của vị trí và hướng đầu cuối theo thời gian, sau đó giải bài toán động học ngược để tìm các giá trị của biến khớp theo thời gian, là giá trị đặt cho bộ điều khiển robot. Các quỹ đạo không gian thường là các đoạn thẳng (nội suy tuyến tính) các cung tròn (nội suy tròn) và kết hợp đoạn thẳng- cung tròn. Ta tách ra hai bài toán qui hoạch quỹ đạo vị trí và qui hoạch quỹ đạo hướng.

Gọi $\boldsymbol{p}_e$ vị trí đầu cuối trong không gian hệ toạ độ tham chiếu $O_o xyz$, quỹ đạo là một đường trong không gian, ta thường biểu diễn $\boldsymbol{p}_e(t)$ theo một tham số vô hướng $s(t)$ là chiều dài của quỹ đạo tính từ điểm phát xuất $\boldsymbol{p}_{ei}(t=0)$



Hình 4.17 Quỹ đạo vị trí trong không gian

Vận tốc dài của đầu cuối là

$$\frac{d\boldsymbol{p}_e}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}_e}{ds}\frac{ds}{dt}$$

4.3.1 Nội suyTuyến Tính

Khi quỹ đạo là tuyến tính từ $\boldsymbol{p}_i$ đến $\boldsymbol{p}_f$ trong thời gian t_f, ta có thể viết

$$\boldsymbol{p}_e(t) = \boldsymbol{p}_i + s(t)(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i) \tag{4.50}$$

s là số vô hướng có giá trị trong khoảng [0,1], $s(t=0)=0$ và $s(t=t_f)=1$.

Nếu vận tốc di chuyển trên quỹ đạo là hằng số $v = \frac{\| p_f - p_i \|}{t_f} = \frac{l}{t_f}$, $t_f = \frac{\| p_f - p_i \|}{v}$,

ta chọn $s = \frac{t}{t_f}$.

Thông thường quỹ đạo sẽ bắt đầu và kết thúc với vận tốc bằng 0, vậy ta chọn $s(t)$ sao cho $\dot{s}(t)$ có dạng hình thang như Hình 4.2, gọi t_c thời diểm vận tốc hằng số, $\dot{s}_{\max} = \frac{1}{t_f - t_c}$ giá trị cực đại của $\dot{s}(t)$ ta có

$$\boxed{0 \le t \le t_c : s = \frac{\dot{s}_{\max}}{2t_c} t^2,} \tag{4.51}$$

$$\boxed{t_c < t \le t_f - t_c : s = \dot{s}_{\max}(t - \frac{t_c}{2}),} \tag{4.52}$$

$$\boxed{t_f - t_c < t \le t_f : s = -\frac{\dot{s}_{\max}}{2t_c}(t_f - t)^2 + 1,} \tag{4.53}$$

Gía trị của t_f, t_c được tính từ gia tốc $a_m \le a_{max}$ hoặc vận tốc $v_m \le v_{max}$ trên đoạn thẳng

$$v_m = a_m t_c,$$
$$l = v_m(t_f - t_c),$$
$$t_f = \frac{l}{v_m} + t_c$$

Nếu vận tốc ban đầu là 0 vận tốc trên đoạn t_f-t_c là v_m(vận tốc cuối là v_m) thì

$$v_m = a_m t_c,$$
$$l = v_m(2t_f - t_c)/2,$$
$$t_f = \frac{l}{v_m} + \frac{t_c}{2}$$

Ví dụ 4.8: Tính biểu thức của biến khớp cho robot 2DOF Ví dụ 4.2 di chuyển theo đường thẳng A(0.3 0) B(0 0.3) trong thời gian 2s.

Vị trí đầu cuối biểu thị theo tham số s

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_A + s(\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 + 0.3s \\ 0.3s \end{bmatrix}$$

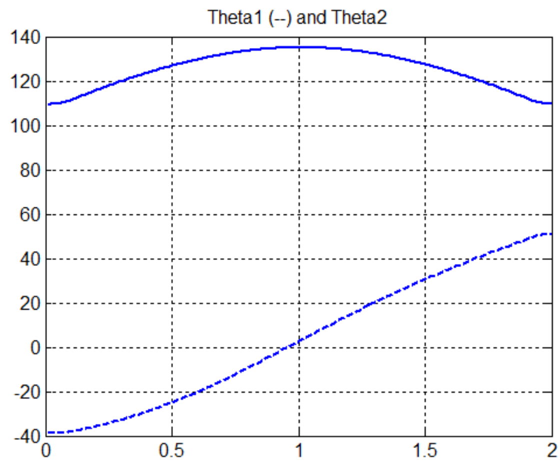
Chọn t_c=0.1s, suy ra $\dot{s}_{\max} = 1/(2 - 0.1) = 0.5263$,

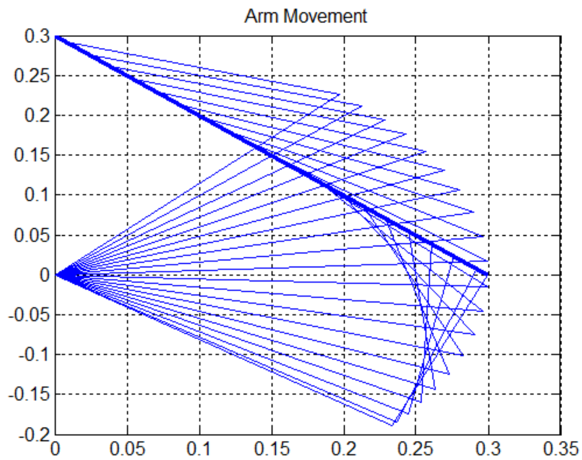
$$0 \le t \le 0.1 : s = 2.6315t^2,$$
$$0.1 < t \le 1.9 : s = 0.5263(t - 0.05),$$
$$1.9 < t \le 2 : s = -2.6315(2 - t)^2 + 1,$$
$$\cos\theta_2 = \frac{p_x^{\,2}(s) + p_y^{\,2}(s) - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = D,$$
$$\theta_2 = \text{acosd}(D)$$
$$\theta_1 = \text{atan2d}(p_y, p_x)\text{ - atan2d}(a_2\sqrt{1 - D^2}, a_1 + a_2D)$$

```
%Linear Interpolation 2 DOF RR Robot
clc;
close all;
a1=0.3;a2=0.2;
tc=0.1;tf=2;
 pa=[0.3;0]
 pb=[0;0.3]
 pab=pb-pa
  sdmax= 1/(tf-tc);
   for i=1:1:100*tf+1
     t=(i-1)*0.01;
     if (t <=tc)
s=(sdmax/2/tc)*t^2;
     elseif ((t>tc)&(t<=(tf-tc)))
s=sdmax*(t-tc/2);
```

```
     else
        s=1-(sdmax/2/tc)*(tf-t)^2
     end
p=pa+pab*s
D=(p(1)*p(1)+p(2)*p(2)-a1*a1-a2*a2)/(2*a1*a2);
D1=sqrt(1-D*D);
theta2(i)=acosd(D);
alpha=atan2d(a2*D1,a1+a2*D);
phi=atan2d(p(2),p(1));
theta1(i)=phi-alpha;
o1(1:2,i)=[a1*cosd(theta1(i)); a1*sind(theta1(i))]
o2(1:2,i)=o1(1:2,i)+ [a2*cosd(theta1(i)+ theta2(i));
a2*sind(theta1(i)+ theta2(i))]
 end
i=1:100*tf;
plot((i)*0.01,theta1(i),'--')
hold on
plot((i)*0.01,theta2(i))
grid on
 title( 'Theta1 (--) and Theta2')
 figure
for i=1:10:100*tf
plot([0 o1(1,i)],[0 o1(2,i)])
hold on
plot([o1(1,i) o2(1,i)], [o1(2,i) o2(2,i)])
 end
plot([0.3 0],[0 0.3], 'LineWidth',3)
grid on
title ('Arm Movement')
```

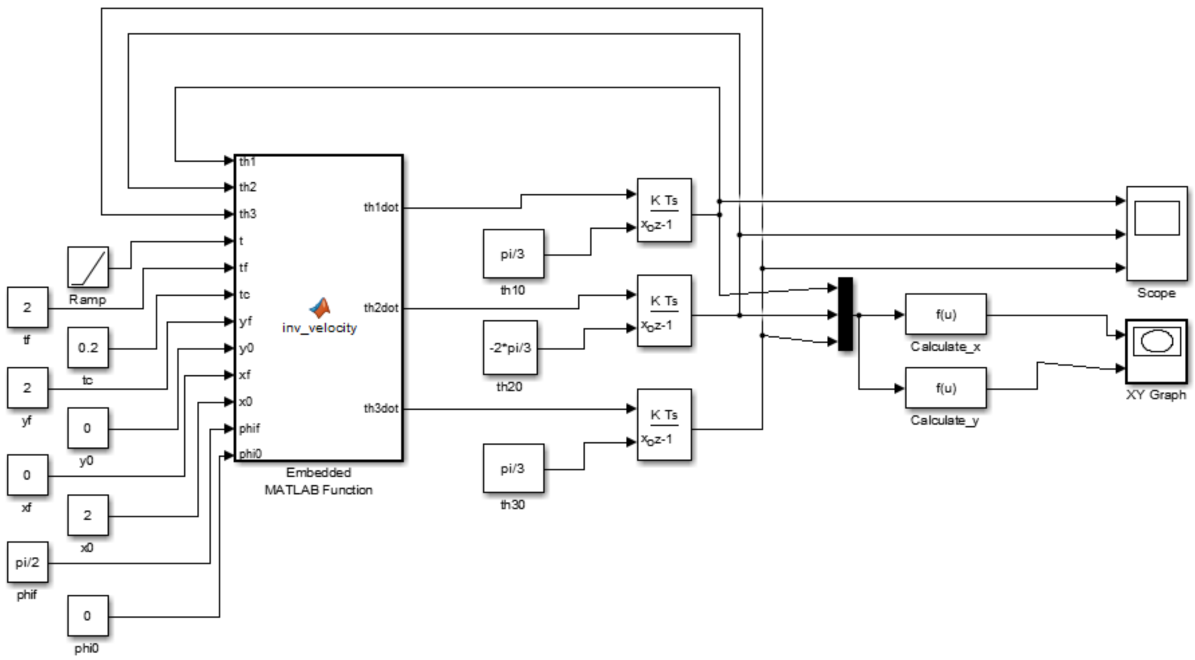
Kết quả chương trình cho thấy vị trí đầu cuối đi theo đường thẳng.





Hình 4.18 Kết quả nội suy tuyến tính Ví dụ 4.8

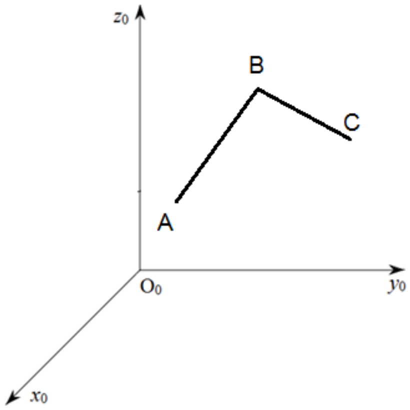
Ví dụ 4.9: Tính quỹ đạo robot RRR với ba cánh tay có chiều dài 1m, di chuyển theo đường thẳng từ (2,0) đến (0,2) , góc φ đi từ 0 đến 90° trong thời gian 4s, dùng động học ngược vận tốc.



th10=pi/3, th20=-2pi/3, th3=-(th1+th2)

```
function [th1dot, th2dot,th3dot] = inv_velocity(th1, th2,th3,
t,tf,tc,yf,y0,xf,x0,phif,phi0)
%LSPB Trajectory
a1=1;a2=1;a3=1;
s_dotmax=1/(tf-tc);
temp=0;

if (t<=tc)
        temp=(s_dotmax/tc)*t;
elseif ((t>tc) & (t<=(tf-tc)))
        temp=s_dotmax;
elseif t>=tf
        temp=0;
elseif t>(tf-tc)
        temp=s_dotmax*(tf-t)/tc;
end
s_dot=temp;
x_dot=(xf-x0)*s_dot;
y_dot=(yf-y0)*s_dot;
phi_dot=(phif-phi0)*s_dot;
J=[-a1*sin(th1)-a2*sin(th1+th2)-a3*sin(th1+th2+th3)  -a2*sin(th1+th2)-
a3*sin(th1+th2+th3) -a3*sin(th1+th2+th3)   ;
    a1*cos(th1)+a2*cos(th1+th2)+a3*cos(th1+th2+th3)
a2*cos(th1+th2)+a3*cos(th1+th2+th3 )  a3*cos(th1+th2+th3)
    1 1 1];
out=inv(J)*[x_dot;y_dot;phi_dot];
th1dot=out(1,1);
th2dot=out(2,1);
th3dot=out(3,1);
```

Ví dụ 4.10: Tính quỹ đạo tuyến tính của robot RR đi qua ba điểm ABC theo quy luật vận tốc hình thang với gia tốc a_m và vận tốc v_m



Hình 4.19

Ta có hai đoạn với chiều dài và hướng lần lượt là

$$l_1 = \| \boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A \|, \ \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A,$$
$$l_2 = \| \boldsymbol{p}_C - \boldsymbol{p}_B \|, \ \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_C - \boldsymbol{p}_B$$

Đoạn đường di chuyển là $l=l_1+l_2$. Ta xác định các khoảng thời gian

$$v_m = a_m t_c,$$
$$l = v_m(t_f - t_c),$$
$$t_f = \frac{l}{v_m} + t_c$$

Thời gian di chuyển trên đoạn $l_1$và $l_2$là

$$t_1 = \frac{l_1}{v_m} + \frac{t_c}{2},$$
$$t_2 = \frac{l_2}{v_m} + \frac{t_c}{2}$$

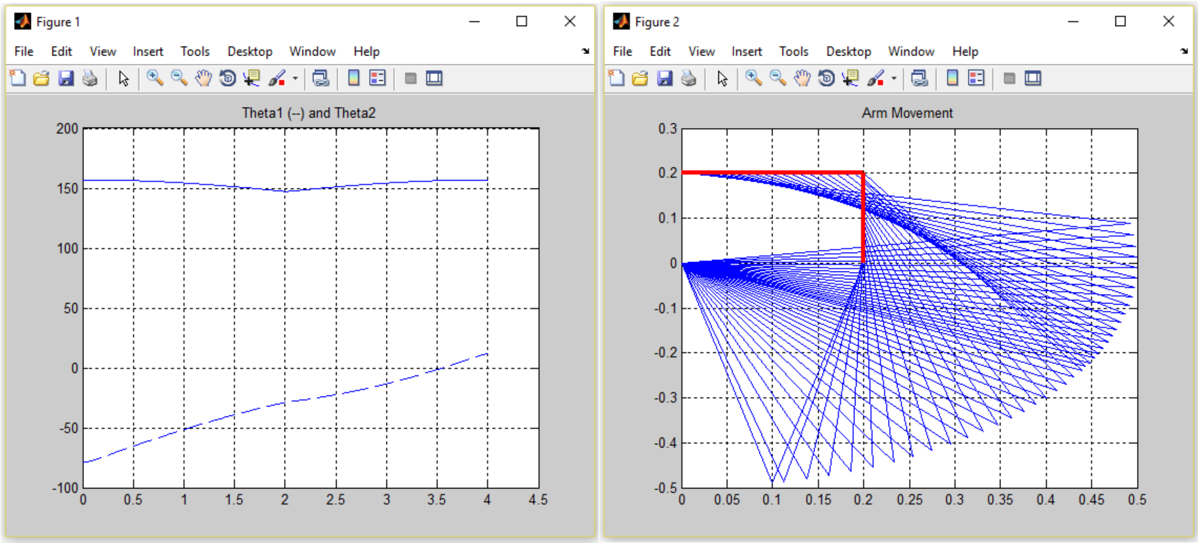
Đoạn AB từ t=0 đến t=t_1 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_A + \dfrac{s}{s(t_1)}(\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A)$

Đoạn BC từ t=t_1 đến t=t_f $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_B + \dfrac{s - s(t_1)}{1 - s(t_1)}(\boldsymbol{p}_C - \boldsymbol{p}_B)$

Tham số s tính theo công thức (4.51..4.53), $s(t_1)=sdmax*(t_1-t_c/2)$

```
%Linear Interpolation 2 segment 2 DOF RR Robot
clc;
close all;
a1=0.5;a2=0.5;
tc=0.1;tf=4;
 pa=[0.2;0];
 pb=[0.2;0.2];
 pc=[0.0;0.2];
 pab=pb-pa;
 pbc=pc-pb;
 l1=norm(pab);
 l2=norm(pbc);
 l=l1+l2;
 vm=l/(tf-tc);
 t1=l1/vm +tc/2;
 sdmax= 1/(tf-tc);
```

```
 st1=sdmax*(t1-tc/2)
 for i=1:1:100*tf+1
     t=(i-1)*0.01;
     if (t <=tc)
        s=(sdmax/2/tc)*t^2;
     elseif ((t>tc)&(t<=(tf-tc)))
        s=sdmax*(t-tc/2);
     else
        s=1-(sdmax/2/tc)*(tf-t)^2;
     end
if (i<=100*t1+1)
p=pa+pab*s/st1;
elseif (i>100*t1+1)
p=pb+pbc*(s-st1)/(1-st1);
end
D=(p(1)*p(1)+p(2)*p(2)-a1*a1-a2*a2)/(2*a1*a2);
D1=sqrt(1-D*D);
theta2(i)=acosd(D);
alpha=atan2d(a2*D1,a1+a2*D);
phi=atan2d(p(2),p(1));
theta1(i)=phi-alpha;
o1(1:2,i)=[a1*cosd(theta1(i)); a1*sind(theta1(i))];
o2(1:2,i)=o1(1:2,i)+ [a2*cosd(theta1(i)+ theta2(i));
a2*sind(theta1(i)+ theta2(i))];
end
i=1:100*tf+1;
plot((i)*0.01,theta1(i),'--')
hold on
plot((i)*0.01,theta2(i))
grid on
title( 'Theta1 (--) and Theta2')
 hold on
 figure
for i=1:10:100*tf
plot([0 o1(1,i)],[0 o1(2,i)])
hold on
plot([o1(1,i) o2(1,i)], [o1(2,i) o2(2,i)])
hold on
 end
plot([0.2 0],[0.2 0.2], 'r','LineWidth',3)
hold on
plot([0.2 0.2],[0 0.2], 'r','LineWidth',3)
grid on
title ('Arm Movement')
```

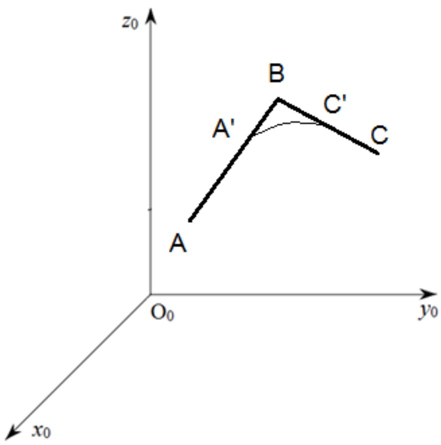


Ví dụ 4.11: Lặp lại ví dụ 4.10 nhưng lần này ta chỉ lướt gần qua điểm B

Chuyển động trên quỹ đạo gồm chuyển động thẳng theo AB, tăng tốc từ 0 đến v_1 sau đó giữ nguyên vận tốc đến A’, sau đó chuyển động theo đường cong A’C’ đến điểm C’ , vận tốc ở A’ là v_1, ở C’ là v_2 rồi chuyển động thẳng C’C, khi gần đến C vận tốc giảm dần về 0. Ta xác định thời gian di chuyển trên đường cong A’C’ là ΔT và khoảng đường d_1=A’B, d_2=BC’.

Các vector chỉ phương là

$$\boldsymbol{k}_{AB} = \frac{\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A}{\| \boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_A \|}, \boldsymbol{k}_{BC} = \frac{\boldsymbol{p}_C - \boldsymbol{p}_B}{\| \boldsymbol{p}_C - \boldsymbol{p}_B \|}$$



Hình 4.20

$$\boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_{A'} = d_1 \boldsymbol{k}_{AB},$$
$$\boldsymbol{p}_{C'} - \boldsymbol{p}_B = d_2 \boldsymbol{k}_{BC}$$

Lấy gốc thời gian ở điểm A’, vector vị trí trong đoạn A’C’ là

$$\boldsymbol{p}(t) = [x(t); y(t); z(t)], t \in [0, \Delta T]$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = v_1 k_{AB} + \frac{(v_2 k_{BC} - v_1 k_{AB})t}{\Delta T},$$

$$\boldsymbol{p}(t) = p_{A'} + v_1 k_{AB} t + \frac{(v_2 k_{BC} - v_1 k_{AB})t^2}{2\Delta T}$$

Suy ra

$$\boldsymbol{p}(\Delta T) = \boldsymbol{p}_{A'} + v_1 \boldsymbol{k}_{AB} \Delta T + \frac{(v_2 \boldsymbol{k}_{BC} - v_1 \boldsymbol{k}_{AB})\Delta T}{2} = \boldsymbol{p}_{C'}$$

$$\boldsymbol{p}_{A'} - \boldsymbol{p}_B + \frac{(v_2 \boldsymbol{k}_{BC} + v_1 \boldsymbol{k}_{AB})\Delta T}{2} = \boldsymbol{p}_{C'} - \boldsymbol{p}_B$$

$$\frac{(v_2 \boldsymbol{k}_{BC} + v_1 \boldsymbol{k}_{AB})\Delta T}{2} = \boldsymbol{p}_{C'} - \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_{A'} = d_2 \boldsymbol{k}_{BC} + d_1 \boldsymbol{k}_{AB}$$

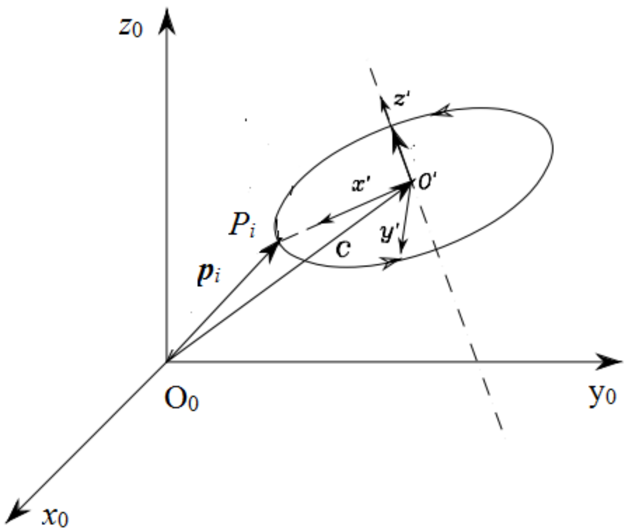
Suy ra $$d_1 = \frac{v_1 \Delta T}{2}, d_2 = \frac{v_2 \Delta T}{2}, \Delta T = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$$

Chọn d_1 suy ra

$$\Delta T = \frac{2d_1}{v_1}, d_2 = \frac{d_1 v_2}{v_1}$$

4.3.2 Nội Suy Tròn

Giả sử quỹ đạo trong không gian là vòng tròn bán kính *r* tâm O’, vị trí của O’ trong hệ toạ độ tham chiếu là ***c***=**OO**’, ta gán cho vòng tròn hệ toạ độ O’x’y’z’, trục z’ thẳng góc mặt phẳng vòng tròn và đi qua tâm vòng tròn. Gọi ***P*** một điểm trên vòng tròn, *s* là chiều dài cung tính từ điểm ban đầu $\boldsymbol{P}_i$, trong hệ toạ độ của vòng tròn ta biểu diễn toạ độ của ***P*** theo *s*



Hình 4.21 Quỹ đạo tròn trong không gian

$$\boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} r\cos(s/r) \\ r\sin(s/r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gọi ***R*** ma trận hướng của O’*x*’*y*’*z*’ so với $O_0x_0y_0z_0$, toạ độ điểm *P* trong hệ 0 là

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}'$$
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} r\cos(s(t)/r) \\ r\sin(s(t)/r) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

Vậy ta đã biểu diễn vị trí một điểm trên vòng tròn theo tham số $s(t)$ là chiều dài cung tròn. Gọi $\eta(t)$ là góc quay (rad) ta có $s(t)=r\eta(t)$. Giống như nội suy tuyến tính ta có thể chọn dạng của $s(t)$.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} r\cos\eta(t) \\ r\sin\eta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

***Ví dụ 4.12*:** Tính biểu thức của biến khớp cho robot 2DOF Ví dụ 4.2 di chuyển theo vòng tròn có tâm C(0.2 0.2) bán kính 0.1 từ góc s=0^o đến góc s=90^o trong thời gian 2s.

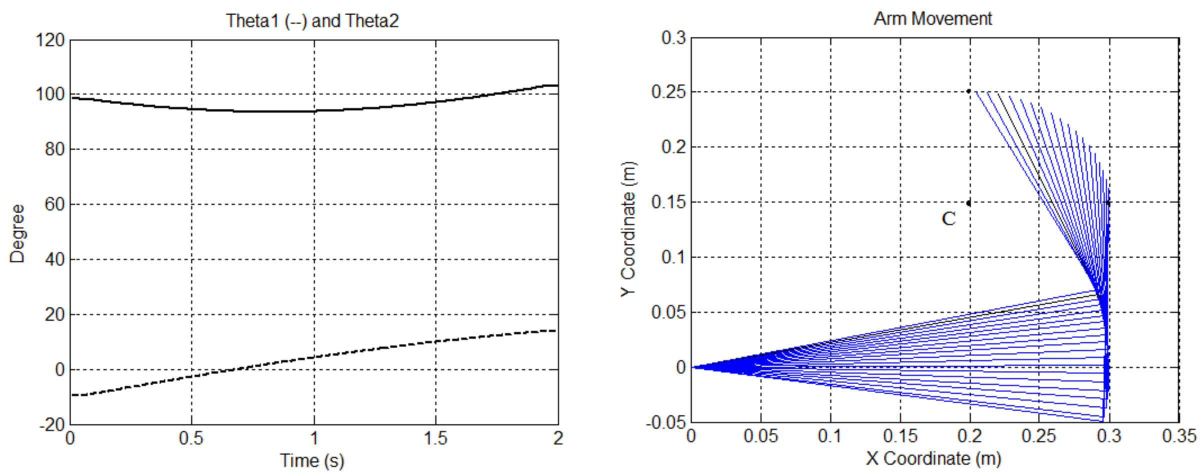
Toạ độ trên vòng tròn:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + r\begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}$$

Ta chọn s theo qui tắc vận tốc hình thang và lập trình như Ví dụ 4.8.

***Ví dụ 4.13*:** Robot 2DOF RP trong mặt phẳng yz di chuyển từ P1(0 0.5 1) đến P2(0 -0.5 1) chiều kim theo vòng tròn tâm C(0 0 1) thời gian 2s. Viết chương trình vẽ biến khớp theo thời gian.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} + \begin{bmatrix} 0 \\ r\cos\alpha(t) \\ r\sin\alpha(t) \end{bmatrix}$$



Hình 4.21 Kết quả nội suy tròn

$c = [0\;0\;1]^T, r = 0.5$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\cos\alpha(t) \\ 1 + r\sin\alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5\cos\alpha(t) \\ 1 + 0.5\sin\alpha(t) \end{bmatrix}$$

$\alpha = -\pi s(t)$

$$t_f = 2, t_c = 0.1, \dot{s}_{\max} = \frac{1}{t_f - t_c}$$

$$0 \le t \le t_c : s = \frac{\dot{s}_{\max}}{2t_c} t^2,$$

$$t_c < t \le t_f - t_c : s = \dot{s}_{\max}(t - \frac{t_c}{2}),$$

$$t_f - t_c < t \le t_f : s = -\frac{\dot{s}_{\max}}{2t_c}(t_f - t)^2 + 1,$$

$$d_2 = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\theta_1 = a\tan 2(z, y)$$

Chương trình ví dụ 4.13

```
clc;
close all;
tf=2;tc=0.1;pi=3.14156; r=0.5;sdmax=1/(tf-tc);

for i=1:1:100*tf+1
     t=(i-1)*0.01;
if (t <=tc)
        s=(sdmax/2/tc)*t^2;
elseif ((t>tc)&(t<=(tf-tc)))
        s=sdmax*(t-tc/2);
else
        s=1-(sdmax/2/tc)*(tf-t)^2
end
     py(i)=r*cos(-pi*s);
     pz(i)=1+r*sin(-pi*s);
     d2(i)=sqrt(py(i)^2+pz(i)^2);
     theta1(i)=atan2d(pz(i),py(i));
end
   i=1:100*tf;
   plot(py(i),pz(i))
   grid on
   figure
   plot(i*0.01,d2(i),'--')
   grid on
figure
plot((i)*0.01,theta1(i))
grid on
```

Thông thường người ta cho ba điểm P_1 P_2 P_3 không thẳng hàng trong không gian và đi tìm vòng tròn có bán kính R tâm C qua ba điểm. Có nhiều thuật toán giải bài toán này, một thuật toán dùng phép nhân vector dễ lập trình được trình bày như sau:

- Vector chỉ phương của pháp tuyến mặt phẳng vòng tròn: $\boldsymbol{n}$=($\boldsymbol{p}_2$-$\boldsymbol{p}_1$)x($\boldsymbol{p}_3$-$\boldsymbol{p}_2$),
- Trung điểm hai đoạn: $\boldsymbol{mp}_1$=0.5($\boldsymbol{p}_2$+$\boldsymbol{p}_1$), $\boldsymbol{mp}_2$=0.5($\boldsymbol{p}_3$+$\boldsymbol{p}_2$),
- Vector chỉ phương hai đường trung trực của đoạn P_1P_2 và P_3P_2:$\boldsymbol{n}_1$=($\boldsymbol{p}_2$-$\boldsymbol{p}_1$) x $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_2$= ($\boldsymbol{p}_3$-$\boldsymbol{p}_2$) x $\boldsymbol{n}$
- Phương trình hai đường trung trực: $\boldsymbol{mp}_1+\boldsymbol{n}_1t$ và $\boldsymbol{mp}_2+\boldsymbol{n}_2u$
- Hai trung trực cắt nhau ở tâm C, giải phương trình $\boldsymbol{mp}_1+\boldsymbol{n}_1t=\boldsymbol{mp}_2+\boldsymbol{n}_2u$, ta tính được t^*, u^* và tâm C có toạ độ $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{mp}_1+\boldsymbol{n}_1t^*=\boldsymbol{mp}_2+\boldsymbol{n}_2u^*$
- Bán kính là $r=\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{p}_1\|$

```
p1=[0;0;0];p2=[2;2;0];p3=[1;1;sqrt(2)];
n=cross((p1-p2),(p3-p2));
if norm(n)< 10^-3
    warning('ba diem thang hang')
    return
end
md1=0.5*(p1+p2);
md2=0.5*(p3+p2);
n1=cross((p1-p2),n);
n2=cross((p3-p2),n);
syms t u;
[st,su]=solve(md1+n1*t==md2+n2*u);
c1=md1+n1*double(st)
r=norm(c1-p1)
c1 =
     1     1     0
r =
    1.4142
```

4.3.3 Qui Hoạch Hướng

Hướng đầu công tác biểu thị bằng ma trận quay $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0^n$, ban đầu $\boldsymbol{R}(t=0)=\boldsymbol{R}_i$, ở thời điểm cuối $\boldsymbol{R}(t=t_f)=\boldsymbol{R}_f$. Ma trận chuyển đổi từ $\boldsymbol{R}_i$ sang $\boldsymbol{R}_f$ là $\boldsymbol{R}_i^f$ sao cho $\boldsymbol{R}_f=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_i^f$, nghĩa là $\boldsymbol{R}_i^f=\boldsymbol{R}_i^T\boldsymbol{R}_f$.

Biết $\boldsymbol{R}_i$, $\boldsymbol{R}_f$ ta tính được

$$\boldsymbol{R}_i^f=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

Ta tìm ma trận $\boldsymbol{R}_t(t)$ theo tham số $s(t)$ sao cho $\boldsymbol{R}_t(t=0)=\boldsymbol{I}$ và $\boldsymbol{R}_t(t=t_f)=\boldsymbol{I}$. Có thể xem ma trận $\boldsymbol{R}_i^f$ là kết quả hệ trục gốc quanh vector $\boldsymbol{r}$ một góc α (xem mục 2.1.7) xác định bởi (xem công thức 2.24)

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2\sin\alpha}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

Với $\boldsymbol{r}$ và α đã biết, ma trận quay là (xem công thức 2.23)

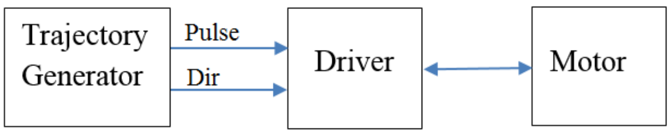
$$\boldsymbol{R}_t(r,\alpha)=\begin{bmatrix} r_x^2a+c\alpha & r_xr_ya-r_zs\alpha & r_xr_za+r_ys\alpha \\ r_xr_ya+r_zs\alpha & r_y^2a+c\alpha & r_yr_za-r_xs\alpha \\ r_xr_za-r_ys\alpha & r_yr_za+r_xs\alpha & r_z^2a+c\alpha \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

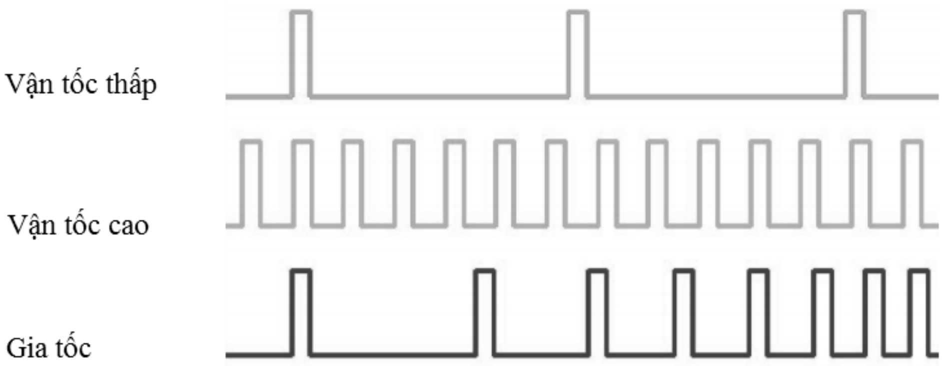
$$a=1-c\alpha$$

Chọn tham số α thay đổi theo thời gian, ma trận hướng là $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_t$, giải bài toán động học đảo ta tìm được các biến khớp theo tham số.

4.4 CHUYỂN ĐỔI RA SỐ LƯỢNG XUNG (LẤY MẪU)

Khi điều khiển động cơ bước hay các động cơ khác thông qua driver chuyên dụng, driver là bộ công suất điều khiển chuyển động động cơ (vòng hở hay kín) ta cần phải chuyển đổi tín hiệu đặt quỹ đạo ra dạng xung và hướng Pulse/Dir (một số driver dùng hai ngõ vào xung quay thuận hay quay ngược CW/CCW). Nếu vận tốc không đổi chu kỳ xung cũng không đổi, gia tốc dương chu kỳ xung giảm dần, gia tốc âm chu kỳ xung tăng dần.





Xét quỹ đạo $q=f(t)$, giả sử dịch chuyển là góc quay hay tịnh tiến , ta cần chuyển đổi giá trị này ra số xung encoder, mỗi đơn vị dịch chuyển (mm, độ..) tương ứng n_e xung encoder, vậy số xung cần phát là $n= n_e f(t)$, thời gian t cần chuyển đổi theo chu kỳ lấy mẫu T_s, thường là cỡ msec hay µsec, $t=kT_s$, k=0,1,2… là số bước. Sau cùng $n_k= n_e f(kT_s)$, n_k là số xung encoder ở thời điểm k. Chọn T_s nhỏ sao cho ở mỗi nhịp chỉ có thể phát tối đa một xung. Ví dụ di chuyển với vận tốc 1000 xung/s thì ta phải chọn T_s<=1ms. Có nhiều cách để phát xung với chu kỳ thay đổi, sau đây trình bày một cách đơn giản ít tính toán, chỉ dùng phép cộng và so sánh.

Bắt đầu từ Δ=0, với mỗi nhịp ở thời điểm k ta tính Δ=Δ+ n_k - n_{k-1} , nếu |Δ|>=1 thì phát xung, nếu Δ>0 thì Dir=1, Δ= Δ-1 (nếu Δ<0 thì Dir=0, Δ= Δ+1), lặp lại cho đến khi đủ số xung. Như vậy ta phải chọn T_s sao cho $|n_k - n_{k-1}|$<=1. Điều này được thực hiện dễ dàng khi tính số xung N cần di chuyển trong thời gian T và chọn $T_s < T/N$. Bề rộng xung phát ra thường là $T_s/2$.

Ví dụ 4.14: di chuyển 1mm tương ứng 100 xung encoder, d=0.5t (m), ta sẽ có phương trình theo số xung là n_k=0.5*10^5*t, chọn T_s <1/0.5*10^5 . Chọn T_s =10us. Mỗi xung nhịp có tối đa một xung làm dịch chuyển robot, số xung giữa bước k-1 và k là Δ_k=0.5, vậy cứ hai nhịp sẽ dịch chuyển một xung.

Nhịp k	Tính Δ	Phát xung kích
0	Δ=0	
1	$\Delta = \Delta + \Delta_1 = 0.5$	
2	$\Delta = \Delta + \Delta_2 = 1 \rightarrow 0$	Có
3	$\Delta = \Delta + \Delta_3 = 0.5$	
4	$\Delta = \Delta + \Delta_4 = 1 \rightarrow 0$	Có
20	$\Delta = \Delta + \Delta_6 = 1 \rightarrow 0$	
…	….	

Cứ 2 nhịp tương ứng 20us ta phát một xung kích, mỗi giây là 50000 xung.

Gỉa sử chuyển động vận tốc tăng đều d=0.25t^2 (mét) trong thời gian 0.1s, khoảng dịch chuyển là 2.5mm hay 250 xung, T_s =0.1ms, n_k=0.25*10^5*k^2/10^8=0.00025*k^2, Δ_k= 0.00025 *(2k-1) = -0.00025+0.0005k.

Để dễ tính toán ta dùng chương trình Matlab

```
clc
delta=0;
dir=1;
step=0;
for k=1:1000
%insert expression here
delta=delta -0.00025+0.0005*k;
  if delta>=1
      dir=1
      delta= delta-1;
      step=step+1
     disp(k)
  elseif delta<=-1
     dir=0
      delta= delta+1;
     step=step+1
     disp(k)
  end
end
```

Nhịp	Trì hoãn	Dịch chuyển
64	6.4ms	1
90	2.7ms	2
110	2ms	3
127	1,7ms	4
…	…	…
825		170

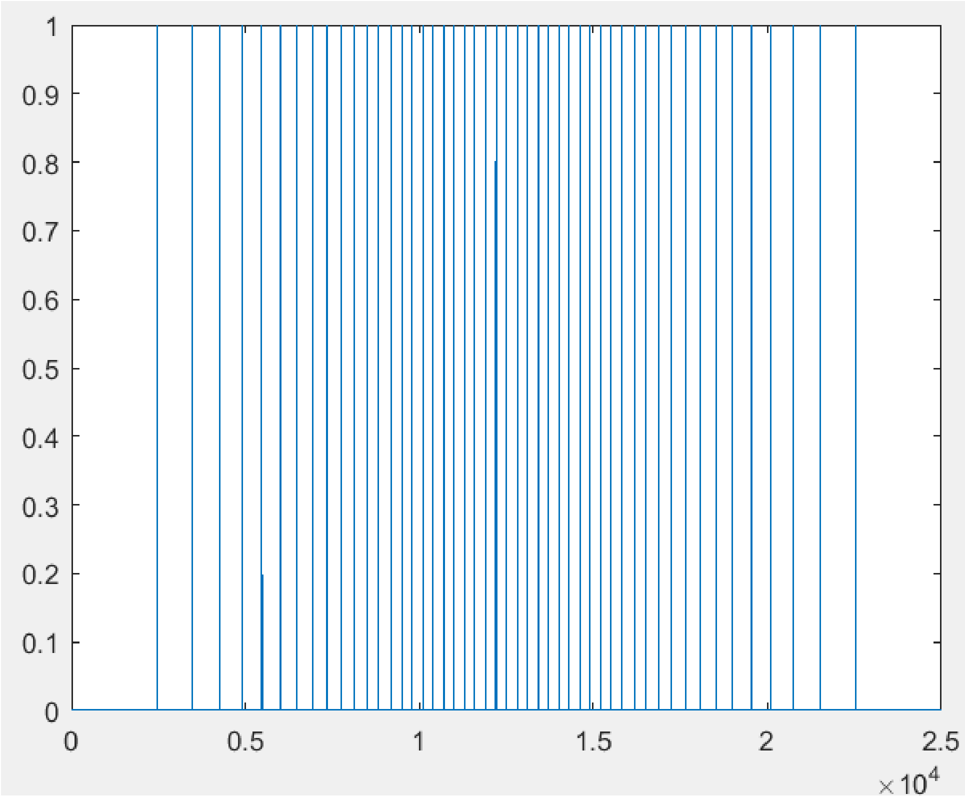
828	0.3ms	171
…	…	…
996		248
998	0.2ms	249
1000	0.1ms	250

Trong trường hợp chuyển động có đổi hướng thì Δ có thể âm hoặc dương,
Nếu Δ>=1 thì DIR=1, PULSE=1, Δ= Δ-1
Nếu Δ<=-1 thì DIR=0, PULSE=1, Δ= Δ+1
Driver sẽ được nghiên cứu ở Chương 6

***Ví dụ 4.15*:** Chuyển động 1000 xung theo vận tốc hình thang trong thời gian 5s

```
clc; close;
ne=50;tf=0.25; fmax=10000;ta=0.1;ts=10^-5;
kmax=round(tf/ts);
vc=ne/(tf-ta)
a=vc*ts^2/2/ta
delta=0;
dir=1;
step=0;
for k=1: kmax

if (k*ts<=ta)
%n(k)=a*k^2;
deltak=a*(2*k-1);
elseif ((k*ts>ta) & (k*ts<=(tf-ta)))
%n(k)= vc*(k*ts-ta/2);
deltak=vc*ts;
elseif  k*ts>(tf-ta)
%n(k)=-a*(kmax-k)^2+ne;
deltak=a*(1-2*k+2*kmax);
end

delta=delta +deltak;
  if delta>=1
    dir=1;
    delta= delta-1;
    step=step+1
    pulse(k)=1;
    display(k)
 elseif delta<=-1
     dir=0;
delta= delta+1;
     step=step-1;
     display(k)
     pulse(k)=1;
  else  pulse(k)=0;
  end
  if step==ne
      break
  end
end
k= 1:kmax;
```

```
plot (k,pulse(k))
```



Trường hợp lập trình dùng vi điều khiển ta dùng ngắt timer chu kỳ T_a và phát tín hiệu ra chân port.

KẾT LUẬN

Trong Chương 4 chúng ta đã khảo sát các phương pháp tính quỹ đạo trong không gian biến khớp và không gian làm việc, kết hợp với lập trình Matlab, các kết quả này sẽ được sử dụng ở Chương 6 để điều khiển robot.

BÀI TẬP

BT1 Tìm đa thức bậc ba sao cho $q(t_0)=q_0$, $q(t_0+T)=q_f$, $\dot{q}(t_0)=0, \dot{q}(t_0+T)=\dot{q}_f$. Viết chương trình Matlab vẽ $q, \dot{q}, \ddot{q}$ với $t_0=0$, $T=2$, $q_0=1$rad, $q_f=2$rad, $\dot{q}_f=1$rad/s .

BT2 Làm lại BT4.1 với quỹ đạo LSPB

BT3 Tính quỹ đạo $q(0)=q_0$, $q(t_f)=q_f$ với vận tốc và gia tốc đầu, cuối là 0. Viết chương trình Matlab vẽ quỹ đạo

BT4 Tính quỹ đạo qua ba điểm $q(0)=0$, $q(1)=0.5$, $q(3)=1$ dùng hai đa thức bậc ba, vận tốc đầu, cuối là 0

BT5 Làm lại BT4.4 với quỹ đạo LSPB

BT6 Viết chương trình Matlab tính quỹ đạo cho robot khuỷu 3DOF $d_1=0.5$, $a_2=a_3=1$ di chuyển theo quỹ đạo tuyến tính từ A(0, 0.5, 0) đến B(0.5, -0.5, 0.5) trong thời gian 2s, quy luật vận tốc hình thang, vận tốc đầu và cuối là 0.

BT7 Viết chương trình Matlab tính quỹ đạo cho robot khuỷu 3DOF d_1=0.5, a_2=a_3=1 di chuyển theo quỹ đạo tròn trong mặt phẳng z=0 từ A(0, 0.5, 0) đến B(0.5, -0.5, 0) bán kính là 1 theo chiều kim trong thời gian 2s, quy luật vận tốc hình thang, vận tốc đầu và cuối là 0.

BT8 Lặp lại BT7 với quỹ đạo tròn đi qua ba điểm A, B, C, A là điểm hiện tại, C là điểm cuối, B là điểm trung gian.

BT9 Viết chương trình C vi xử lý cho các BT5, 6, 7 và 8 phát xung cho driver