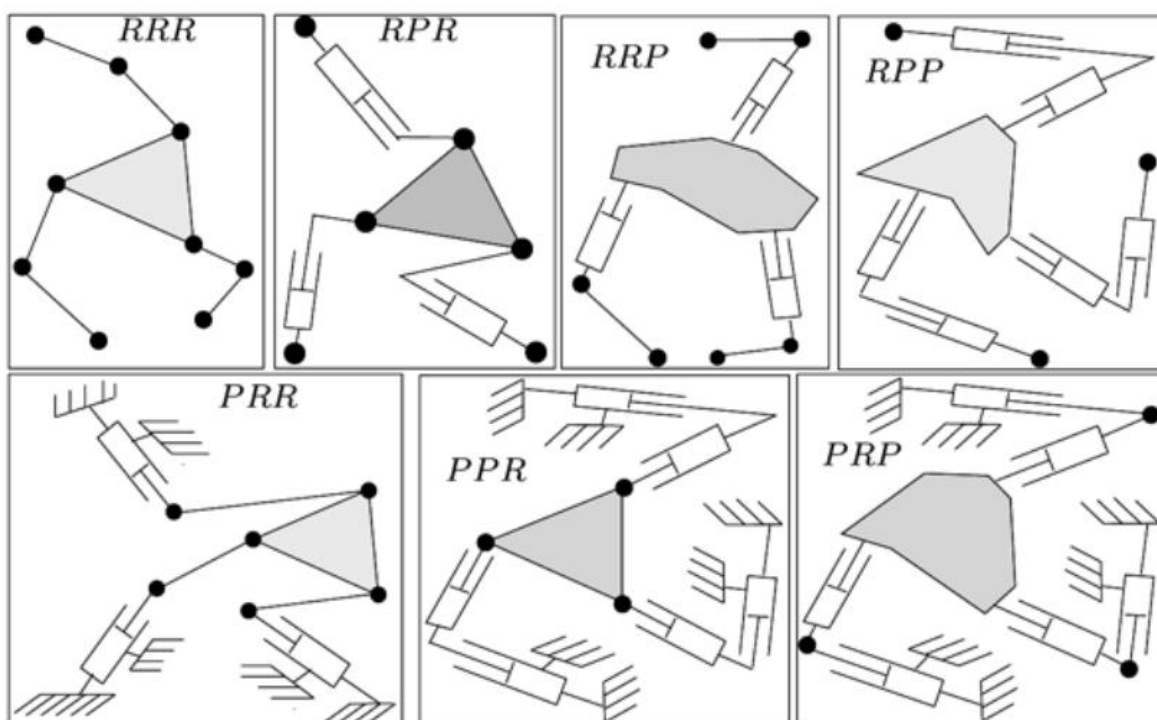


CHƯƠNG 7

ROBOT SONG SONG

7.1 ĐỊNH NGHĨA

Robot song song gồm một đế di động và một đế cố định, nối với nhau bằng các nhánh cơ khí tạo thành chuỗi động học kín, robot có n bậc tự do thì có n nhánh, mỗi nhánh gồm hai khâu liên kết với nhau bằng khớp tịnh tiến hay khớp quay và có một motor điều khiển chuyển động, mỗi khâu liên kết với đế qua khớp tịnh tiến hay khớp quay, có ba khớp độc lập trong mỗi nhánh, có 7 cách bố trí nhánh: RRR RRP RPR PRR RPP PRP PPR, chia ra robot phẳng, robot cầu và robot không gian. Robot song song có độ cứng vững tốt hơn robot nối tiếp, nhưng không gian làm việc bị giới hạn.



Hình 7.1 Robot song song phẳng ba bậc tự do

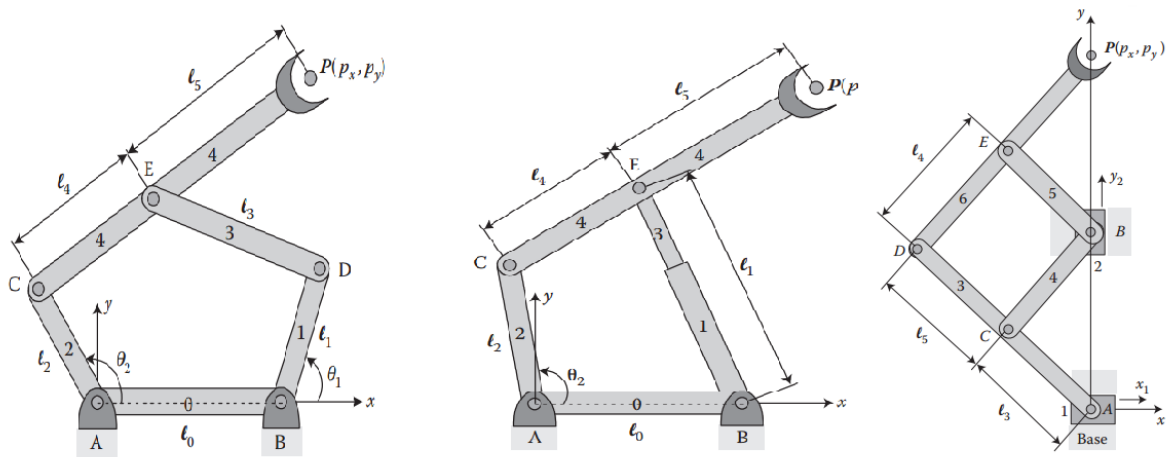
Cơ cấu động học vòng kín thường dùng để tăng độ cứng vững như cơ cấu 5 thanh RR, 5 thanh RP, pantograph (Hình 7.2)

Hệ tọa độ liên kết với đế di động được xác định bởi vị trí gốc tọa độ và hướng, gồm 6 thành phần. Một kết cấu nổi tiếng là cơ cấu Stewart- Gough, 6 bậc tự do với 6 nhánh có chiều dài thay đổi. Robot song song 6 bậc tự do thường gọi là Hexapod.

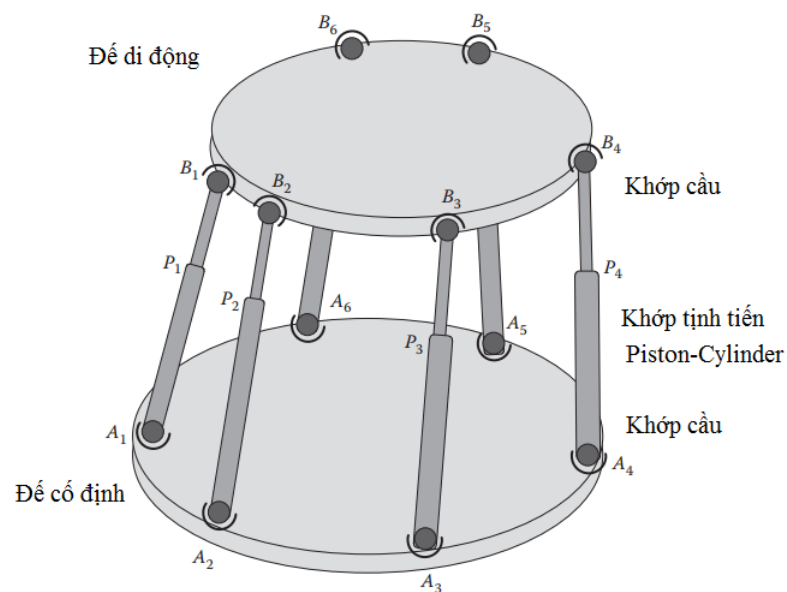
Số bậc tự do F của robot tính theo công thức Chebyshev–Grübler–Kutzbach

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_p \quad (7.1)$$

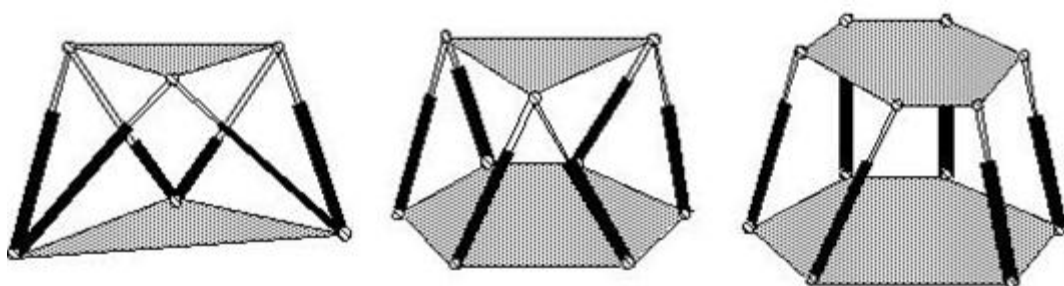
λ : số bậc tự do vùng làm việc, 3 trong mặt phẳng và 6 trong không gian,
 n : số khâu liên kết gồm cả đế,
 j : số khớp nối,
 f_i : số bậc tự do của khớp i
 f_p : số bậc tự do thụ động không ảnh hưởng đến chuyển động của đế



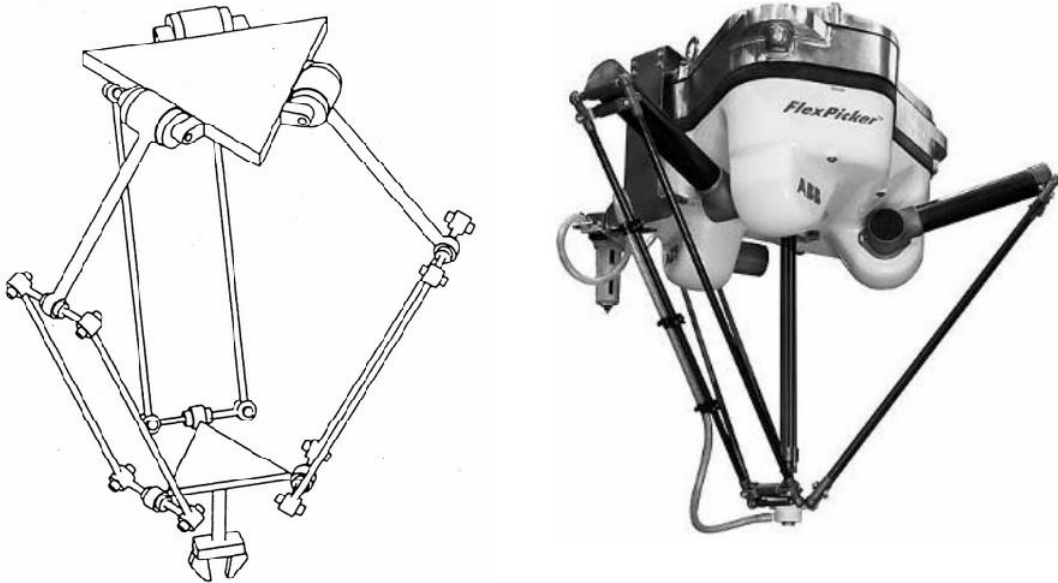
Hình 7.2 Một số cơ cấu động học vòng kín



Hình 7.2 Cơ cấu Robot Stewart- Gough 6DOF



Hình 7.3 Cơ cấu Robot Stewart 3-3, 3-6 và 6-6

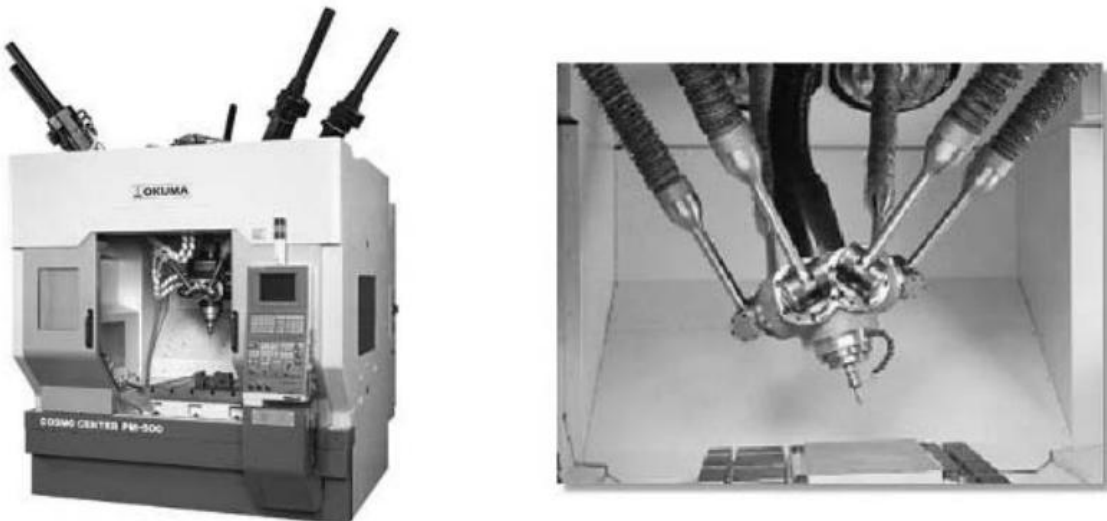


Hình 7.4 Robot delta 4 DOF

Ví dụ robot Stewart- Gough hoạt động trong không gian có $\lambda=6$, số khâu là $n=6*2+2=14$, số khớp nối là $j=6*2$ khớp cầu và 6 khớp tịnh tiến, có 6 chuyển động thụ động quanh trục mỗi thanh, số bậc tự do robot là

$$F = 6(14-18-1)+12*3+6*1-6 = 6$$

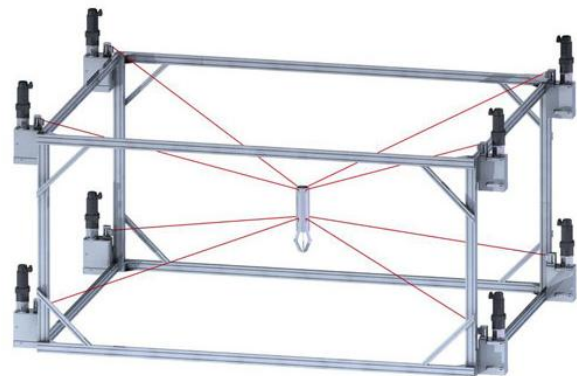
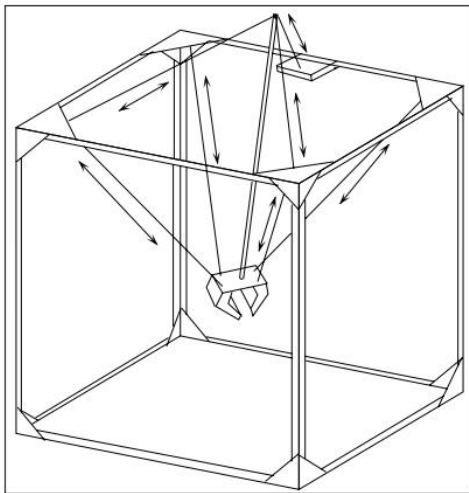
Robot song song thường dùng cho máy CNC, dây chuyền gấp thả, phòng mô phỏng chuyển động cho huấn luyện hàng không và không gian, giải trí. Một loại robot treo trên dây cáp có vùng hoạt động lớn cũng được xếp vào loại robot song song (cable driven parallel robot) bằng cách dùng tời quay để thay đổi chiều dài dây, vị trí và hướng có thể được điều khiển. Các robot loại này có nhiều kiểu như Robocrane, Skycam.



Hình 7.5 Máy CNC dùng robot song song



Hình 7.6 Thiết bị mô phỏng bay công ty Lufthansa



Hình 7.7 Robot song song treo trên dây

7.2 ĐỘNG HỌC ROBOT

Do kết cấu động học phức tạp nên động học robot song song đòi hỏi nhiều tính toán hơn so với robot nối tiếp, lời giải của động học thuận thường có nhiều nghiệm.

7.2.1 Động học robot phẳng năm thanh RR 2DOF

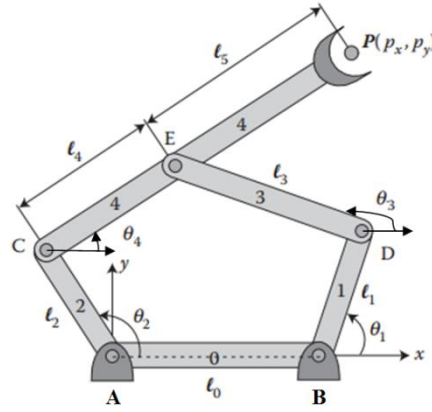
a/ Động học thuận

Đầu tiên ta tính hai góc θ_3 θ_4 dùng công thức lượng giác, chọn gốc tọa độ ở điểm A, tọa độ điểm E là

$$e_x = l_2 c_2 + l_4 c_4 = l_1 c_1 + l_3 c_3 + l_0$$

$$e_y = l_2 s_2 + l_4 s_4 = l_1 s_1 + l_3 s_3$$

Suy ra



Hình 7.8 Robot 2DOF 5Thanh

$$l_4 c_4 - l_3 c_3 = l_1 c_1 - l_2 c_2 + l_0 = a \quad (7.2)$$

$$l_4 s_4 - l_3 s_3 = l_1 s_1 - l_2 s_2 = b \quad (7.3)$$

Từ (7.2) suy ra $c_4 = \frac{a + l_3 c_3}{l_4}$, $s_4 = \sqrt{1 - \left(\frac{a + l_3 c_3}{l_4}\right)^2}$ (7.4)

Thay (7.4) vào (7.3)

$$l_4 \sqrt{1 - \left(\frac{a + l_3 c_3}{l_4}\right)^2} = b + l_3 s_3 \quad (7.5)$$

$$b s_3 - a c_3 = \frac{l_4^2 - l_3^2 - a^2 - b^2}{2l_3} \quad (7.6)$$

Đặt $t = \tan(\theta_3/2)$, (7.6) trở thành

$$t^2 \left(a - \frac{l_4^2 - l_3^2 - a^2 - b^2}{2l_3} \right) + 2bt - \left(a + \frac{l_4^2 - l_3^2 - a^2 - b^2}{2l_3} \right) = 0 \quad (7.7)$$

Giải phương trình bậc hai (7.7) được hai nghiệm

$$t = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - \left(\frac{l_4^2 - l_3^2 - a^2 - b^2}{2l_3}\right)^2}}{a - \frac{l_4^2 - l_3^2 - a^2 - b^2}{2l_3}} \quad (7.8)$$

Từ (7.8) suy ra θ_3 , thay vào (7.3) suy ra

$$\sin \theta_4 = \frac{b + l_3 s_3}{l_4} \quad (7.9)$$

Toạ độ đầu cuối có hai nghiệm là

$$\begin{cases} p_x = l_2 c_2 + (l_4 + l_5) c_4 \\ p_y = l_2 s_2 + (l_4 + l_5) s_4 \end{cases} \quad (7.10)$$

b/ Động học ngược

Tính toán tương tự như trên ta được:

$$\tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{p_y \pm \sqrt{p_y^2 + p_x \left(p_x + \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - (l_4 + l_5)^2}{2l_2} \right)}}{p_x + \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - (l_4 + l_5)^2}{2l_2}} \quad (7.11)$$

Từ hai nghiệm θ_2 suy ra hai nghiệm θ_4 và hai vị trí của điểm E, vậy sẽ có bốn nghiệm θ_1 và θ_4 ,

$$\begin{aligned} e_x &= l_2 c_2 + l_4 c_4 = l_1 c_1 + l_3 c_3 + l_0 \\ e_y &= l_2 s_2 + l_4 s_4 = l_1 s_1 + l_3 s_3 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Tính toán tương tự (7.11) ta suy ra

$$\tan \frac{\theta_1}{2} = \frac{e_y \pm \sqrt{e_y^2 + (e_x - l_0) \left(e_x - l_0 + \frac{(e_x - l_0)^2 + e_y^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_1} \right)}}{e_x - l_0 + \frac{(e_x - l_0)^2 + e_y^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_1}} \quad (7.13)$$

Ví dụ 7.1: cho các đoạn chiều dài bằng nhau là $l=0.4\text{m}$, $\theta_1=90^\circ$, $\theta_2=90^\circ$, tính p_x, p_y

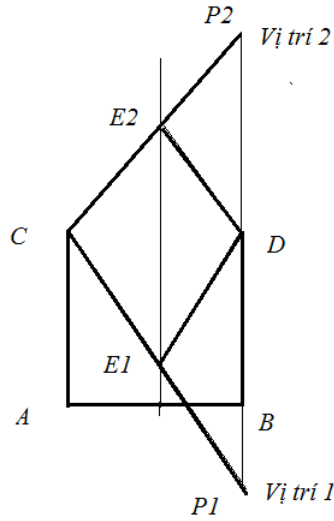
```
clc
theta1=90;theta2=90;
l0=0.4;l1=0.4;l2=0.4;l3=0.4;l4=0.4;l5=0.4;
a=l0+l1*cosd(theta1)-l2*cosd(theta2);
b=l1*sind(theta1)-l2*sind(theta2);
c=(l4^2-l3^2-a^2-b^2)/2/l3;
d=(-b+(b^2+a^2-c^2)^0.5)/(a-c);
theta3=atand(2*d/(1-d^2))+180;
theta4=asind((b+l3*sind(theta3))/l4);
px1=l2*cosd(theta2)+(l4+l5)*cosd(theta4);
py1=l2*sind(theta2)+(l4+l5)*sind(theta4);
d=(-b-(b^2+a^2-c^2)^0.5)/(a-c);
theta3=atand(2*d/(1-d^2))+180;
theta4=asind((b+l3*sind(theta3))/l4);
px2=l2*cosd(theta2)+(l4+l5)*cosd(theta4);
py2=l2*sind(theta2)+(l4+l5)*sind(theta4);
```

Kết quả

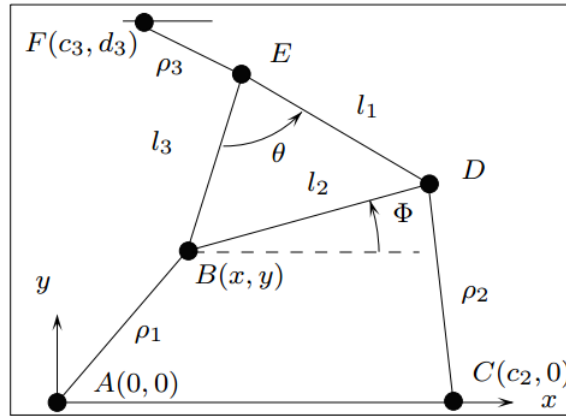
```
theta31 = 240, theta41 = -60,
px1 = 0.4, py1 = -0.2928
theta32 = 120, theta42 = 60,
px2 = 0.4, py2 = 1.0928
```

7.2.2 Động học robot phẳng 3 DOF RPR

Chiều dài ba thanh xác định vị trí điểm B và góc Φ từ đó ta có thể tính vị trí các điểm khác của tam giác.



Hình 7.9 Động học thuận Ví dụ 7.1



Hình 7.10 Robot phẳng 3DOF RPR

Cho x, y, Φ ta tính được chiều dài các thanh, là lời giải bài toán động học ngược

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2,$$

$$\rho_2^2 = (x + l_2 \cos \Phi - c_2)^2 + (y + l_2 \sin \Phi)^2 = x^2 + y^2 + Rx + Sy + Q, \quad (7.14)$$

$$\rho_3^2 = (x + l_3 \cos(\Phi + \theta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin(\Phi + \theta) - d_3)^2 = x^2 + y^2 + Ux + Vy + W,$$

R, S, Q, U, V, W phụ thuộc Φ

Cho chiều dài các thanh ta giải bài toán động học thuận

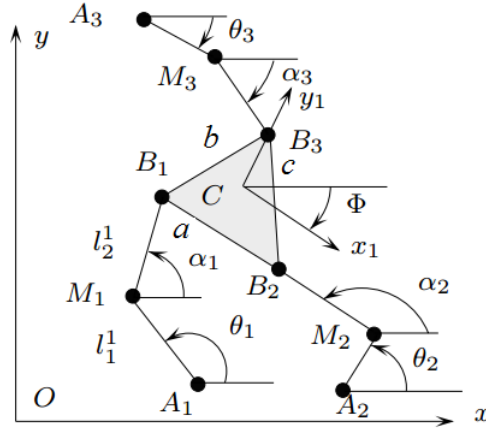
$$\rho_1^2 = x^2 + y^2,$$

$$\rho_2^2 - \rho_1^2 - Q = Rx + Sy, \quad (7.15)$$

$$\rho_3^2 - \rho_1^2 - W = Ux + Vy,$$

Giải ba phương trình (7.15) ta tìm x, y , và Φ , có tối đa 6 tập nghiệm.

7.2.3 Động học robot phẳng 3 DOF RRR



Hình 7.11 Robot phẳng RRR

Để di động là tam giác $B_1B_2B_3$ có các cạnh a, b, c và góc $B_2B_1B_3$ là β
 Cho góc θ_i ta tìm tọa độ điểm B_1 và góc Φ , cần ba phương trình

$$\mathbf{OB}_1 = \mathbf{OA}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{B}_1, \quad i=1..3 \quad (7.16)$$

$$\mathbf{OA}_i = (a_{ix}, a_{iy}), \mathbf{A}_i\mathbf{M}_i = (l_i^1 \cos \theta_i, l_i^1 \sin \theta_i), \mathbf{M}_i\mathbf{B}_i = (l_i^2 \cos \alpha_i, l_i^2 \sin \alpha_i)$$

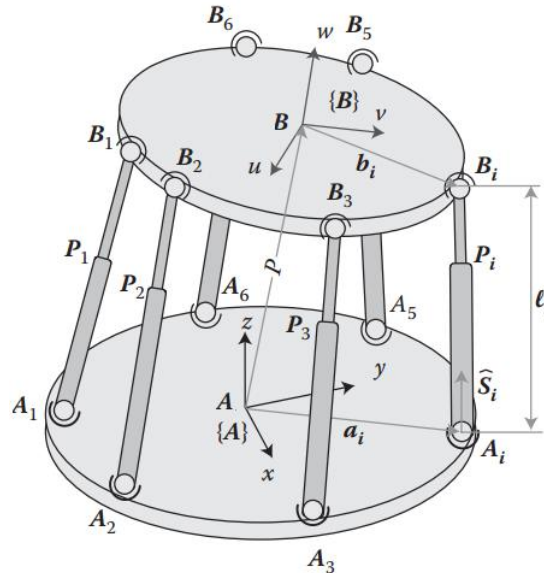
$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1 = (-a \cos \Phi, -a \sin \Phi),$$

$$\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1 = (-b \cos(\Phi + \beta), -b \sin(\Phi + \beta)),$$

Phân tích cho thấy bài toán động học thuận có 8 lời giải.

Cho vị trí trọng tâm C và góc Φ , ta tìm được các tọa độ của đỉnh tam giác, từ đó suy ra các góc θ_i, α_i tương tự như mục 7.2.1.

7.2.4 Động học robot không gian 6 DOF SPS



Hình 7.12 Robot 6DOF SPS

Ta liên kết hai hệ trục $Axyz$ và $Buvw$ với hai đế, vị trí gốc B xác định bởi vector \mathbf{AB} còn hướng hệ trục B xác định bởi ma trận quay \mathbf{R}_A^B .

Bài toán động học ngược là tìm chiều dài l_i của các thanh A_iB_i khi biết $\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ và \mathbf{R}_A^B . Ta dùng qui tắc cộng vector

$$\mathbf{A_iB_i} = \mathbf{A_iA} + \mathbf{AB} + \mathbf{R_A^B BB_i} \quad (7.17)$$

$\mathbf{BB_i}$ được tính trong hệ toạ độ B, bình phương hai vế ta được

$$l_i^2 = \|\mathbf{A_iB_i}\|^2 = \|\mathbf{P}\|^2 + 2(-\mathbf{a_i} + \mathbf{R_A^B b_i})\mathbf{P} - 2\mathbf{a_i R_A^B b_i} + \|\mathbf{a_i}\|^2 + \|\mathbf{b_i}\|^2 \quad (7.18)$$

Bài toán động học thuận phức tạp hơn, cho l_i , ta phải tìm \mathbf{AB} và \mathbf{R}_A^B , có tất cả 12 ẩn số và 12 phương trình phi tuyến, gồm 6 phương trình theo l_i và 6 phương trình theo điều kiện trục chuẩn của ma trận quay, các nghiên cứu cho thấy bài toán động học thuận có nhiều lời giải, chủ yếu là dùng phương pháp số và việc tìm lời giải dạng kín rất phức tạp, độc giả có thể tham khảo tài liệu [5].

7.3 ĐỘNG HỌC VẬN TỐC

7.3.1 Động học vận tốc robot phẳng năm thanh RR 2DOF

Xét robot Hình 7.8 ta tìm vận tốc ở điểm E theo góc θ_1, θ_2 từ đó suy ra vận tốc ở điểm P, ta có

$$\begin{aligned} v_{ex} &= -l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - l_4 s_4 \dot{\theta}_4 = -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_3 s_3 \dot{\theta}_3, \\ v_{ey} &= l_2 c_2 \dot{\theta}_2 + l_4 c_4 \dot{\theta}_4 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_3 c_3 \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Khử $\dot{\theta}_3$ và $\dot{\theta}_4$ trong (7.19)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 s_3 & -l_4 s_4 \\ l_3 c_3 & -l_4 c_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - l_1 s_1 \dot{\theta}_1 \\ l_2 c_2 \dot{\theta}_2 - l_1 c_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Sau khi tính được $\dot{\theta}_4$ theo $\dot{\theta}_1$ và $\dot{\theta}_2$ ta được

$$\begin{aligned} v_{px} &= -l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - (l_4 + l_5) s_4 \dot{\theta}_4, \\ v_{py} &= l_2 c_2 \dot{\theta}_2 + (l_4 + l_5) c_4 \dot{\theta}_4 \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$v_{px} = \frac{s_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_3 - \theta_1) l_1 \dot{\theta}_1 + \sin(\theta_2 - \theta_3) l_2 \dot{\theta}_2)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} - l_2 s_2 \dot{\theta}_2$$

$$v_{py} = -\frac{c_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_3 - \theta_1) l_1 \dot{\theta}_1 + \sin(\theta_2 - \theta_3) l_2 \dot{\theta}_2)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} + l_2 c_2 \dot{\theta}_2$$

Ma trận Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{s_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_3 - \theta_1) l_1)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} & \frac{s_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_2 - \theta_3) l_2)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} - l_2 s_2 \\ -\frac{c_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_3 - \theta_1) l_1)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} & -\frac{c_4 (l_4 + l_5) (\sin(\theta_2 - \theta_3) l_2)}{l_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)} + l_2 c_2 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Bất thường xảy ra khi $\det(J)=0$, lúc đó $\theta_1 = \theta_3$, hay $\theta_2 = \theta_4$, nghĩa là có hai nhánh nối tiếp AC CE hay BD DE thẳng hàng.

7.3.2 Động học vận tốc robot Stewart 6DOF SPS

Xét Hình 7.12 ta có phương trình vector

$$AB + R.BB_i = AA_i + A_iB_i, i = 1..6$$

$$P + Rb_i = a_i + l_i s_i \quad (7.22)$$

Chú ý là b_i tính trong hệ toạ độ B. Đạo hàm (7.22) theo thời gian,

$$\dot{P} + \dot{R}b_i = \dot{l}_i s_i + l_i \dot{s}_i \quad (7.23)$$

$$\dot{P} = [\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z]^T = [v_x, v_y, v_z]^T$$

$\dot{R}b_i = \omega \times Rb_i$, ω là vector vận tốc góc của đế B trong hệ toạ độ A

$l_i \dot{s}_i = l_i(\omega_i \times s_i)$, ω_i là vector vận tốc góc của thanh thứ i trong hệ toạ độ A, s_i là vector đơn vị theo hướng thanh thứ i .

$$v_p + \omega \times Rb_i = \dot{l}_i s_i + l_i(\omega_i \times s_i) \quad (7.24)$$

Nhân tích vô hướng (tích chấm) hai vế (7.24) với s_i để khử ω_i

$$s_i v_p + (Rb_i \times s_i) \omega = \dot{l}_i \quad (7.25)$$

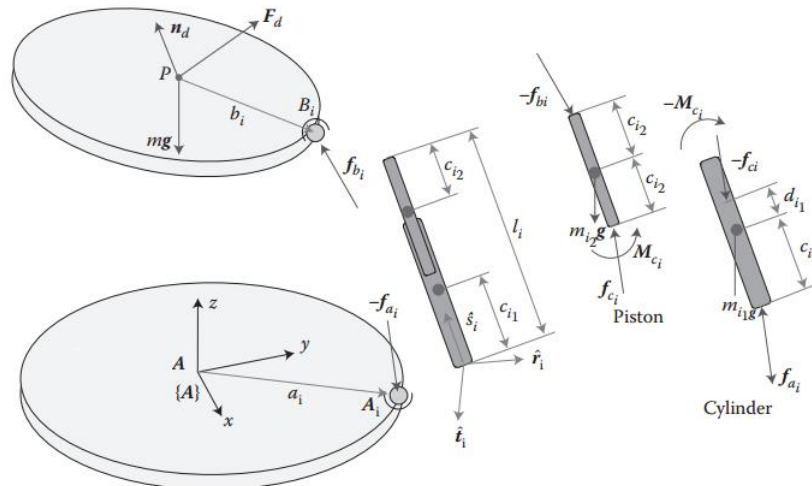
Chú ý là

$$s_i = \frac{P - a_i + Rb_i}{l_i}$$

Triển khai (7.24) cho sáu thanh ta được biểu thức của ma trận Jacobi đảo

$$\begin{bmatrix} s_1^T & (Rb_1 \times s_1)^T \\ s_2^T & (Rb_2 \times s_2)^T \\ s_3^T & (Rb_3 \times s_3)^T \\ s_4^T & (Rb_4 \times s_4)^T \\ s_5^T & (Rb_5 \times s_5)^T \\ s_6^T & (Rb_6 \times s_6)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \\ \dot{l}_4 \\ \dot{l}_5 \\ \dot{l}_6 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

7.4 ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 6DOF SPS



Hình 7.13 Phân tích robot Stewart

Động lực học robot song song rất phức tạp do số khâu lớn và sự ràng buộc giữa chúng, có ba phương pháp thường sử dụng là phương pháp Newton-Euler, công ảo và Lagrange, các tính toán tương đối phức tạp và sẽ không được trình bày chi tiết, bạn đọc có thể tham khảo trong [5] hay bài báo *Explicit Dynamics Formulation of Stewart–Gough Platform: A Newton–Euler Approach*, Reza Oftadeh, Mohammad M. Aref and Hamid D. Taghirad, The 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, October 18-22, 2010, Taipei, Taiwan.

Robot có 13 khâu chuyển động, gồm đế di động, 6 cylinder và 6 piston, ta sẽ tính động lực học từng khâu sau đó kết hợp lại.

Trong phần này ta sẽ dùng các phép tính nhân hai vector ba chiều gồm nhân vô hướng (dot product) và nhân có hướng (cross product), sau đây tóm tắt đặc tính hai phép nhân với các vector cột $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{c} (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) = \mathbf{c} \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = k \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, k là vector vuông góc \mathbf{a}, \mathbf{b} theo qui tắc bàn tay phải

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Tích $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ còn được thay bởi tích ma trận với vector $\mathbf{S}(\mathbf{a}) \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}_x \mathbf{b}$ với

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}_x \equiv \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Với Matlab ta tính tích chấm $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ bởi phép tính $\mathbf{a}' * \mathbf{b}$ hay $\text{dot}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, tích $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ là $\text{cross}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Xét Hình 7. 13, với nhánh thứ i ta có các định nghĩa sau: \mathbf{s}_i vector đơn vị chỉ hướng của nhánh, \mathbf{x}_i toạ độ khớp nối nhánh với đế di động, $\boldsymbol{\omega}_i$ vận tốc góc nhánh, \mathbf{I}_{i1} : tensor quán tính xylanh trong hệ toạ độ \mathbf{A} , \mathbf{I}_{i2} : tensor quán tính piston trong hệ toạ độ \mathbf{A} , $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{i1} + \mathbf{I}_{i2}$ và các định nghĩa khác trong Hình 7.13. Liên kết với mỗi nhánh là hệ toạ độ \mathbf{A}_i (t_i, r_i, s_i) với các vector đơn vị t_i, r_i, s_i ,

$$\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{s}_i \times \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{s}_i \times \mathbf{a}_i\|}, \mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i \times \mathbf{t}_i$$

$$\text{Ma trận quay } \mathbf{R}_A^{A_i} = \begin{bmatrix} t_{ix} & r_{ix} & s_{ix} \\ t_{iy} & r_{iy} & s_{iy} \\ t_{iz} & r_{iz} & s_{iz} \end{bmatrix},$$

Tensor quán tính của nhánh tính theo công thức

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_A^{A_i} \mathbf{I}_i^{A_i} (\mathbf{R}_A^{A_i})^T$$

$I_i^{A_i}$ là tensor quán tính trong hệ tọa độ song song A_i và đi qua khối tâm. Do tính chất đối xứng của các nhánh, tensor quán tính với hệ tọa độ qua trọng tâm và qua trục đối xứng của nhánh có dạng

$$I_i^{A_i} = \begin{bmatrix} I_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & I_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xxi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xxi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzi} \end{bmatrix}$$

Với hệ tọa độ tổng quát là vị trí \mathbf{x} và hướng ϕ của đế di động

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x} \ \phi) = [x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T \quad (7.27)$$

ϕ là vector gồm ba thành phần góc Euler của hệ tọa độ B so với hệ tọa độ A , vận tốc góc đế di động là $\omega = E\dot{\phi}$, E là ma trận chuyển đổi đạo hàm của ϕ sang vận tốc góc, đế di động có khối lượng m_{mp} , tensor quán tính I_{mp} trong hệ tọa độ A ,

Các biểu thức về động học như sau:

$$\mathbf{a}_i + l_i \mathbf{s}_i = \mathbf{x} + \mathbf{R}_A^B \mathbf{b}_i^B = \mathbf{x} + \mathbf{b}_i = \mathbf{x}_i, \mathbf{b}_i = \mathbf{R}_A^B \mathbf{b}_i^B$$

$$l_i = \|\mathbf{x} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\|, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{s}_i = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i}{l_i} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\|}, \quad (7.29)$$

$$\dot{l}_i = \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{s}_i, \quad (7.30)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}} + \omega \times \mathbf{b}_i = \dot{l}_i \mathbf{s}_i + l_i \omega_{ix} \mathbf{s}_i, \quad (7.31)$$

$$\omega_i = \frac{1}{l_i} \mathbf{s}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{l_i} \mathbf{s}_{ix} (\dot{\mathbf{x}} + \omega \times \mathbf{b}_i), \quad (7.32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}} + E\dot{\phi} \times \mathbf{b}_i = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_i \times E\dot{\phi} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}_{ix} E\dot{\phi}, \quad (7.33)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{X}}, \quad (7.34)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{J}}_i \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_i \ddot{\mathbf{X}}, \quad (7.35)$$

$$\mathbf{J}_i = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{b}_{ix} E], \quad (7.36)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_i = [\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad -\omega \times \mathbf{b}_{ix} E + \mathbf{b}_{ix} \dot{E}], \quad (7.37)$$

7.4.1 Động lực học các nhánh

Động lực học khâu thứ i là

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{G}_i = \mathbf{F}_i \quad (7.38)$$

Ma trận quán tính suy từ động năng $K_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{x}}_i$

Thành phần $\mathbf{C}_i \dot{\mathbf{x}}_i$ suy từ phương trình $\mathbf{C}_i \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial K_i}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}$

Thành phần \mathbf{G}_i suy từ thế năng P_i , $\mathbf{G}_i = \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{x}_i}$

F_i là lực tổng quát tác động vào khâu i , f_{bi} : lực tác động vào khớp B_i

$$K_i = \frac{1}{2} m_{i1} \mathbf{v}_{i1}^T \mathbf{v}_{i1} + \frac{1}{2} m_{i2} \mathbf{v}_{i2}^T \mathbf{v}_{i2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (7.39)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i^{A_i T} \mathbf{R}_A^{A_i T} \mathbf{R}_A^{A_i} \mathbf{I}_i^{A_i} \mathbf{R}_A^{A_i T} \mathbf{R}_A^{A_i} \boldsymbol{\omega}_i^{A_i} = \boldsymbol{\omega}_i^{A_i T} \mathbf{I}_i^{A_i} \boldsymbol{\omega}_i^{A_i},$$

Trong hệ toạ độ A_i $\boldsymbol{\omega}_i^{A_i} = [\omega_i \ 0 \ 0]^T$ nên

$$\boldsymbol{\omega}_i^{A_i T} \mathbf{I}_i^{A_i} \boldsymbol{\omega}_i^{A_i} = I_{xxi} \omega_i^2 = I_{xxi} \boldsymbol{\omega}_i^{A_i T} \boldsymbol{\omega}_i^{A_i} = I_{xxi} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{R}_A^{A_i} \mathbf{R}_A^{A_i T} \boldsymbol{\omega}_i = I_{xxi} \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{\omega}_i,$$

Vậy
$$K_i = \frac{1}{2} m_{i1} \mathbf{v}_{i1}^T \mathbf{v}_{i1} + \frac{1}{2} m_{i2} \mathbf{v}_{i2}^T \mathbf{v}_{i2} + \frac{1}{2} I_{xxi} \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \quad (7.40)$$

Vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_i$ liên hệ với vận tốc dài $\dot{\mathbf{x}}_i$ bởi hệ thức

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{\mathbf{s}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i}{l_i} = \frac{\mathbf{s}_{ix} \dot{\mathbf{x}}_i}{l_i} \quad (7.41)$$

Các vận tốc dài biểu thị theo $\dot{\mathbf{x}}_i$

$$v_{i1} = c_{i1} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) = -c_{i1} (\mathbf{s}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) = -\frac{c_{i1}}{l_i} \mathbf{s}_{ix}^2 \dot{\mathbf{x}}_i \quad (7.42)$$

$$v_{i2} = (l_i - c_{i2}) (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) + \dot{l}_i \mathbf{s}_i = -(l_i - c_{i2}) (\mathbf{s}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) + \dot{l}_i \mathbf{s}_i$$

$$\dot{l}_i \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i$$

$$v_{i2} = -\frac{(l_i - c_{i2})}{l_i} \mathbf{s}_{ix}^2 \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i \quad (7.43)$$

Thay (7.41)..(7.43) vào (7.40)

$$K_i = \frac{1}{2} m_{i1} \left(\frac{c_{i1}}{l_i} \right)^2 \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{s}_{ix}^4 \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} m_{i2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \left(-\frac{(l_i - c_{i2})}{l_i} \mathbf{s}_{ix}^2 + \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \right)^2 \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} \frac{I_{xxi}}{l_i^2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{s}_{ix}^T \mathbf{s}_{ix} \dot{\mathbf{x}}_i,$$

$$K_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \left[m_{i1} \left(\frac{c_{i1}}{l_i} \right)^2 \mathbf{s}_{ix}^4 + m_{i2} \left(-\frac{(l_i - c_{i2})}{l_i} \mathbf{s}_{ix}^2 + \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \right)^2 - \frac{I_{xxi}}{l_i^2} \mathbf{s}_{ix}^2 \right] \dot{\mathbf{x}}_i \quad (7.44)$$

Ta biến đổi \mathbf{s}_{ix}^4 như sau, gọi \mathbf{a} một vector ba thành phần

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ix}^4 \mathbf{a} &= \mathbf{s}_{ix} \mathbf{s}_{ix}^3 \mathbf{a} = \mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbf{a})) \\ &= \mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{s}_i \times \mathbf{a}) - \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{a})) = -\mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{s}_{ix} \mathbf{s}_{ix} \mathbf{a} = -\mathbf{s}_{ix}^2 \mathbf{a} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\boxed{\mathbf{s}_{ix}^4 = -\mathbf{s}_{ix}^2} \quad (7.45)$$

Dựa vào định nghĩa của \mathbf{s}_{ix} sau một loạt tính toán ta chứng minh là

$$\boxed{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{s}_{ix}}, \quad (7.46)$$

$$\boxed{(\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T)^2 = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T = \mathbf{s}_i (\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i) \mathbf{s}_i^T = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T}, \quad (7.47)$$

$$\boxed{\mathbf{s}_{ix}^2 \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_{ix}^2 = \mathbf{0}_{3 \times 3}} \quad (7.48)$$

(7.44) đơn giản thành

$$K_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \left[- \left(\frac{m_{i1}c_{i1}^2 + m_{i2}(l_i - c_{i2})^2}{l_i^2} \right) \mathbf{s}_{ix}^2 + m_{i2} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T - \frac{I_{xxi}}{l_i^2} \mathbf{s}_{ix}^2 \right] \dot{\mathbf{x}}_i, \quad (7.49)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

 \mathbf{M}_i là ma trận quán tính của nhánh i

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= -(m_{ce} + \frac{I_{xxi}}{l_i^2}) \mathbf{s}_{ix}^2 + m_{i2} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T, \\ m_{ce} &= \frac{m_{i1}c_{i1}^2 + m_{i2}(l_i - c_{i2})^2}{l_i^2}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

Ta tính tiếp thành phần thế năng

$$\begin{aligned} P_i &= -\mathbf{g}^T [m_{i1}c_{i1} + m_{i2}(l_i - c_{i2})] \mathbf{s}_i \\ dP_i &= -\mathbf{g}^T [m_{i1}c_{i1} + m_{i2}(l_i - c_{i2})] d\mathbf{s}_i - \mathbf{g}^T m_{i2} \mathbf{s}_i dl_i \end{aligned} \quad (7.51)$$

Ta tính $d\mathbf{s}_i$ và $\mathbf{s}_i dl_i$ theo $d\mathbf{x}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \mathbf{a}_i + l_i \mathbf{s}_i, \\ d\mathbf{x}_i &= l_i d\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i dl_i, \end{aligned} \quad (7.52)$$

Nhân hai vế của (7.52) cho \mathbf{s}_i để khử $d\mathbf{s}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{x}_i &= \mathbf{s}_i^T d\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i dl_i = dl_i, \\ \text{Vậy } \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T d\mathbf{x}_i &= \mathbf{s}_i dl_i, \end{aligned} \quad (7.53)$$

Nhân vector hai vế (7.52) cho \mathbf{s}_i để khử dl_i

$$\mathbf{s}_i \times d\mathbf{x}_i = l_i (\mathbf{s}_i \times d\mathbf{s}_i) + (\mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i) dl_i = l_i (\mathbf{s}_i \times d\mathbf{s}_i),$$

Nhân tiếp vector hai vế cho \mathbf{s}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \times d\mathbf{x}_i) &= l_i \mathbf{s}_i \times (\mathbf{s}_i \times d\mathbf{s}_i), \\ \mathbf{s}_{ix}^2 d\mathbf{x}_i &= l_i [(\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_i) \mathbf{s}_i - (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_i) d\mathbf{s}_i] = -l_i d\mathbf{s}_i, \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d\mathbf{s}_i = -\frac{\mathbf{s}_{ix}^2 d\mathbf{x}_i}{l_i} \quad (7.54)$$

Thay (7.53) (7.54) vào (7.51)

$$dP_i = \left[\mathbf{g}^T [m_{i1}c_{i1} + m_{i2}(l_i - c_{i2})] \frac{S^2(\mathbf{s}_i)}{l_i} - \mathbf{g}^T m_{i2} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \right] d\mathbf{x}_i$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \left[m_{ge} \frac{S^2(\mathbf{s}_i)}{l_i} - m_{i2} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \right] \mathbf{g}, \\ m_{ge} &= m_{i1}c_{i1} + m_{i2}(l_i - c_{i2}), \end{aligned} \quad (7.55)$$

Ta cũng suy ra các kết quả sau

$$C_i = -\frac{m_{i2}c_{i2}}{l_i^2} s_i \dot{x}_i^T s_{ix}^2 - \frac{1}{l_i^2} \omega_i s_i^T I_i s_{ix} + \frac{2\dot{l}_i}{l_i} \left((m_{ce} - \frac{m_{i2}(l_i - c_{i2})}{l_i}) s_{ix}^2 + \frac{s_{ix}^T I_i s_{ix}}{l_i^2} \right), \quad (7.56)$$

$$F_i = -f_{bi} + \tau_i s_i, \quad (7.57)$$

τ_i là lực động cơ làm thay đổi l_i ,

Tiếp đến ta khử biến trung gian x_i , thay (7.34), (7.35) vào (7.38)

$$J_i^T M_i J_i \ddot{X} + J_i^T (C_i J_i \dot{X} + M_i \dot{J}_i) \dot{X} + J_i^T G_i = J_i^T F_i$$

Phương trình động lực học mỗi nhánh theo toạ độ tổng quát:

$$M_{li} \ddot{X} + C_{li} \dot{X} + G_{li} = F_{li}, \quad (7.58)$$

$$M_{li} = J_i^T M_i J_i, C_{li} = J_i^T (C_i J_i \dot{X} + M_i \dot{J}_i), G_{li} = J_i^T G_i, F_{li} = J_i^T F_i,$$

$$F_{li} = \begin{bmatrix} -f_{bi} \\ -E^T b_{ix} f_{bi} \end{bmatrix} + f_{\tau i} \quad (7.59)$$

$$f_{\tau i} = \begin{bmatrix} \tau_i s_i \\ \tau_i E^T b_{ix} f_{bi} \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

Cho i thay đổi từ 1 đến 6 rồi cộng các phương trình (7.58) lại, ta được phương trình động lực học 6 nhánh

$$\Sigma M_{li} \ddot{X} + \Sigma C_{li} \dot{X} + \Sigma G_{li} = \Sigma F_{li} = \begin{bmatrix} -\Sigma f_{bi} + \Sigma \tau_i s_i \\ E^T \Sigma \tau_i b_{ix} s_i - E^T \Sigma b_{ix} f_{bi} \end{bmatrix}, \quad (7.61)$$

7.4.2 Động lực học đế di động

Phương trình động lực học đế di động là

$$M_{mp} \ddot{X} + C_{mp} \dot{X} + G_{mp} = F_{mp}, \quad (7.62)$$

$$M_{mp} = \begin{bmatrix} m_{mp} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E^T I_{mp} E \end{bmatrix}, \quad (7.63)$$

$$C_{mp} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E^T I_{mp} \dot{E} + E^T (E \dot{\phi})_x I_{mp} E \end{bmatrix}, \quad (7.64)$$

$$G_{mp} = \begin{bmatrix} -m_{mp} g \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (7.65)$$

$$F_{mp} = \begin{bmatrix} \Sigma f_{bi} \\ E^T \Sigma b_{ix} f_{bi} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

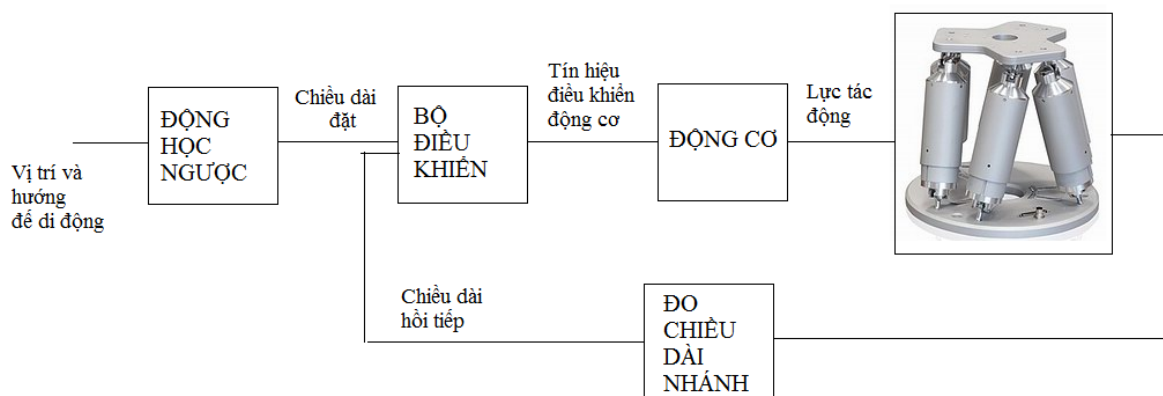
7.4.3 Động lực học toàn bộ robot

Cộng (7.55) và (7.56) ta được hệ sáu phương trình vi phân phi tuyến bậc hai biểu diễn động lực học toàn bộ robot

$$M_r \ddot{X} + C_r \dot{X} + G_r = \begin{bmatrix} \sum \tau_i s_i \\ E^T \sum \tau_i b_{ix} s_i \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

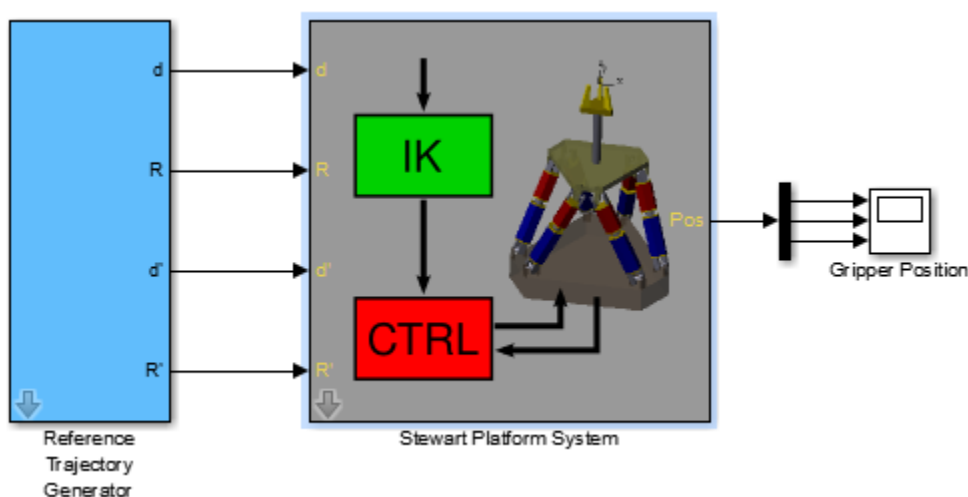
7.5 ĐIỀU KHIỂN ROBOT 6DOF SPS

Điều khiển chuyển động robot thông qua điều khiển chiều dài các nhánh dùng động cơ tuyến tính, xy lanh thủy khí hay động cơ điện và trục vít. Thuật toán điều khiển đơn giản nhất là thuật toán PID.

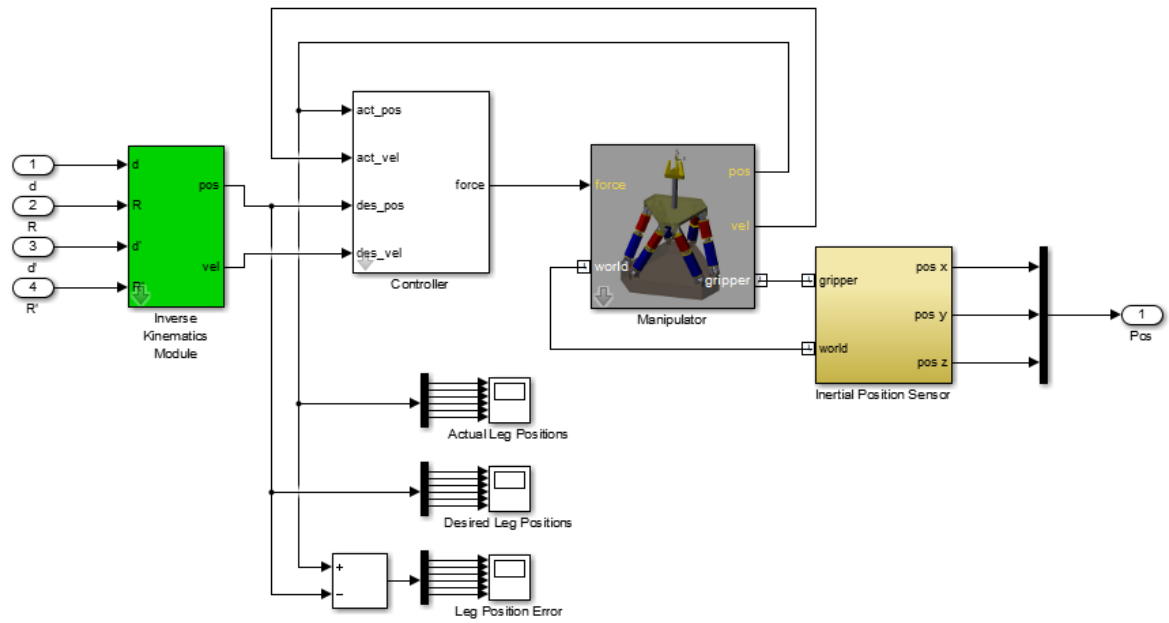


Hình 7.14 Sơ đồ điều khiển robot Stewart

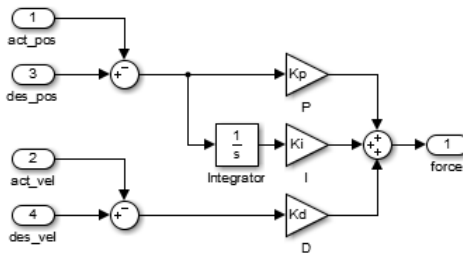
Matlab có file demo robot dùng Simulink SimMechanics trong thư mục toolbox\physmod\sm\smdemos\stewart_platform\sm_stewart_platform.slx. Chương trình mô phỏng dùng SimMechanics để tạo mô hình robot



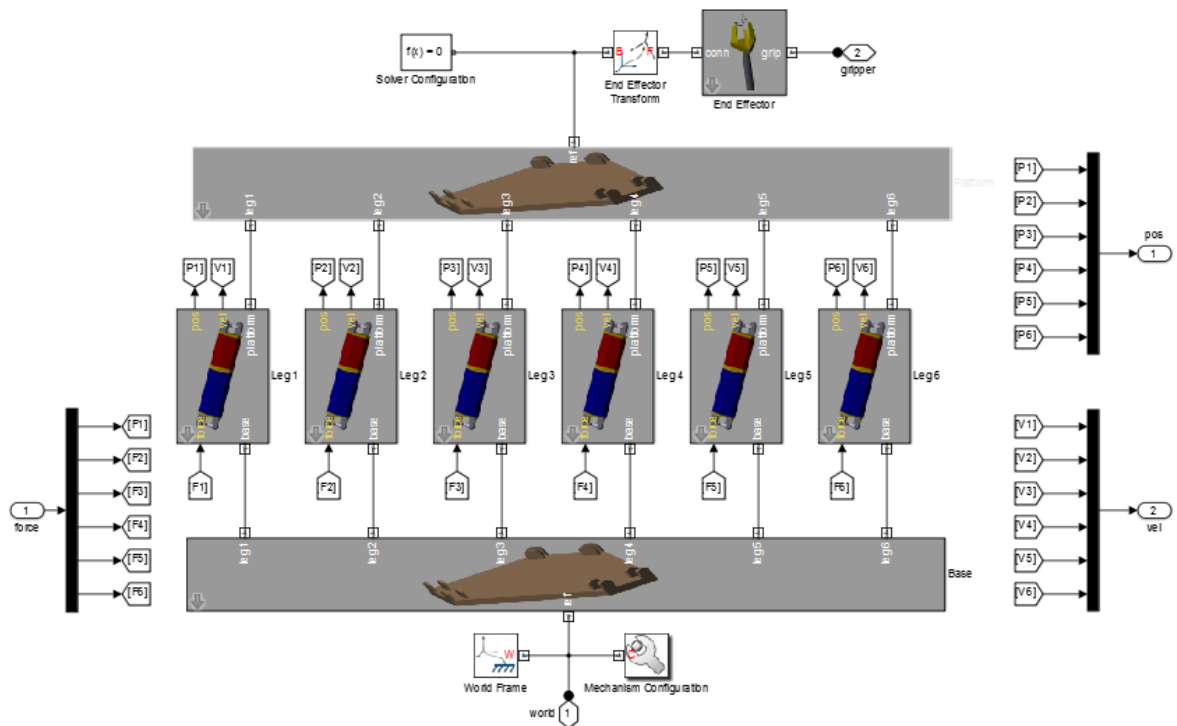
Hình 7.15 Sơ đồ mô phỏng điều khiển robot Stewart dùng Matlab



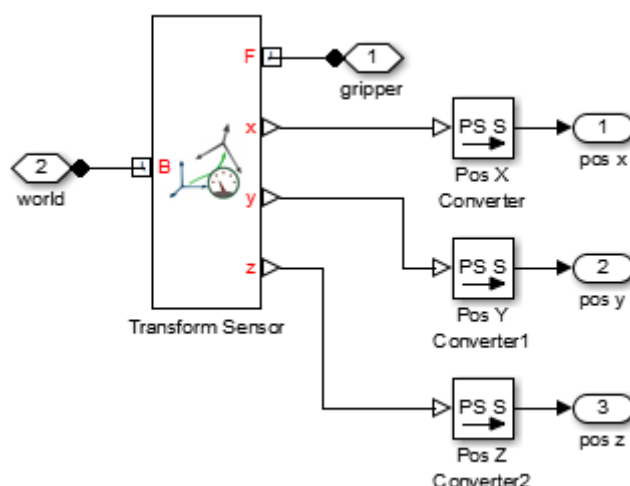
Hình 7.16 Mô hình và điều khiển robot Stewart



Hình 7.17 Bộ điều khiển



Hình 7.18 Mô hình Robot



Hình 7.19 Cảm biến vị trí và hướng

7.6 ROBOT DELTA

(The Delta Parallel Robot: Kinematics Solutions Robert L. Williams II)

Robot Delta loại xoay có ba bậc tự do gồm đế cố định và đế di động, hai đế nối với nhau bằng ba nhánh, mỗi nhánh gồm hai cánh tay, cánh tay trên được quay bởi động cơ gắn trên đế cố định, cánh tay dưới gồm hai thanh dạng hình bình hành, nối khớp quay với cánh tay trên và đế di động, Điều khiển góc quay ba động cơ chúng ta điều khiển được vị trí đế di động xyz trong không gian, còn hướng của đế di động thì cố định. Đế di động luôn luôn song song với đế cố định. Do các nhánh và đế di động có trọng lượng không đáng kể nên robot Delta hoạt động rất nhanh, linh hoạt.

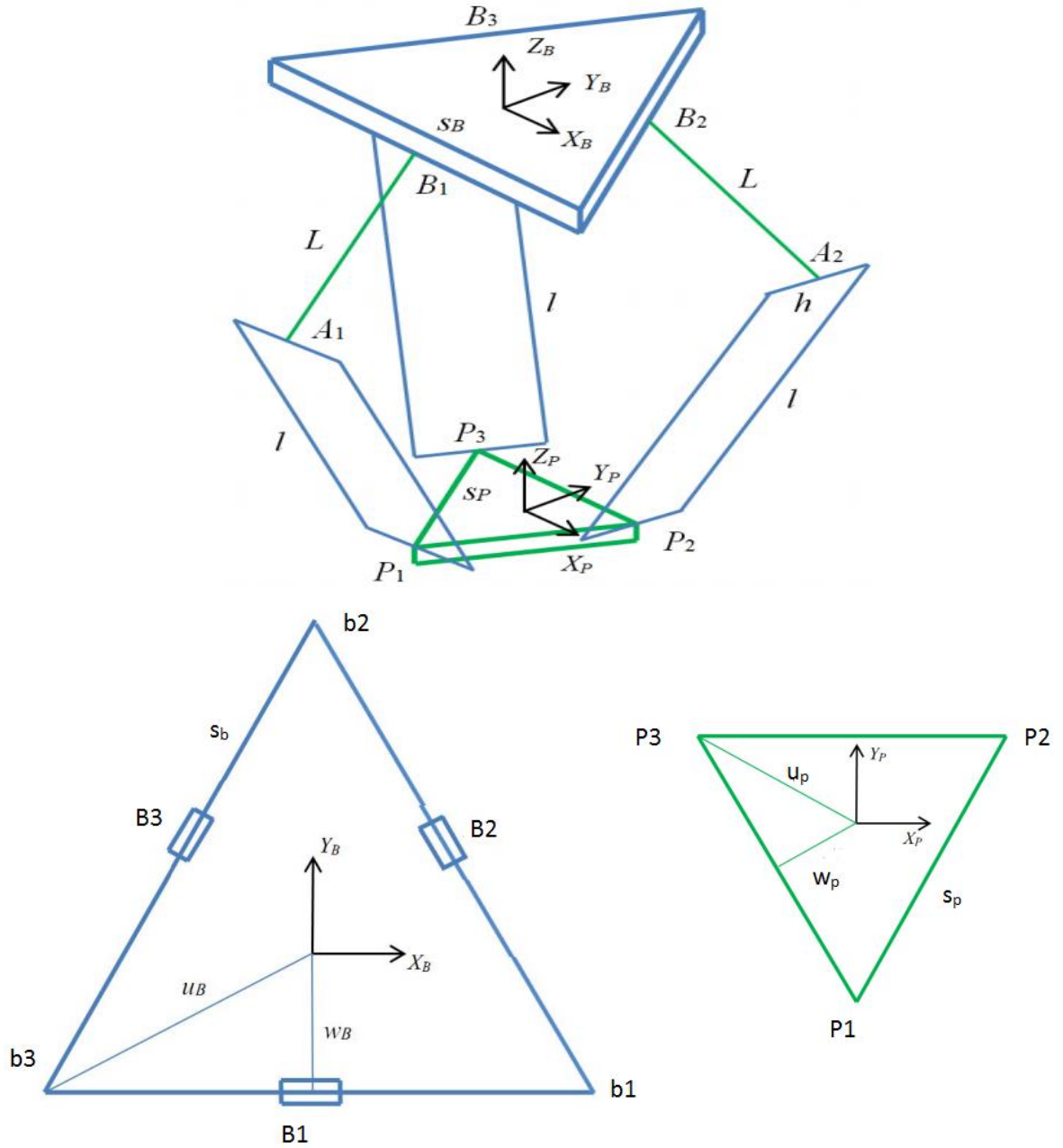


Hệ trục cố định và di động liên kết với hai hệ trục B và P song song với nhau, Tọa độ các điểm nối trong hai hệ trục là

$$B_1^B = [0 \quad -w_B \quad 0], B_2^B = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} w_B \quad 0.5 w_B \quad 0 \right], B_3^B = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} w_B \quad 0.5 w_B \quad 0 \right]$$

$$P_1^P = [0 \quad -u_B \quad 0], P_2^P = [0.5 s_p \quad w_p \quad 0], P_3^P = [-0.5 s_p \quad w_p \quad 0]$$

$$w_B = \frac{\sqrt{3}}{6} s_B, u_B = \frac{\sqrt{3}}{3} s_B, w_P = \frac{\sqrt{3}}{6} s_P, u_P = \frac{\sqrt{3}}{3} s_P$$



Biến khớp là góc quay θ_i của cánh tay L làm dịch chuyển gốc hệ tọa độ $P=[x \ y \ z]^T$. Tọa độ điểm P_i trong hệ tọa độ B là

$$P^B + P_i^B = B_i^B + L_i^B + l_i^B$$

$$L_1^B = [0 \quad -L \cos \theta_1 \quad -L \cos \theta_1]^T, L_2^B = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_2 \quad 0.5 L \cos \theta_2 \quad -L \sin \theta_2 \right]^T,$$

$$L_3^B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_3 & 0.5L\cos\theta_3 & -L\sin\theta_3 \end{bmatrix}^T$$

$$l_i^B = P^B + P_i^B - B_i^B - L_i^B$$

$$l_1^B = [x \quad y + L\cos\theta_1 + a \quad z + L\sin\theta_1]^T,$$

$$l_2^B = \begin{bmatrix} x - \frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_2 + b & y - 0.5L\cos\theta_2 + c & z + L\sin\theta_2 \end{bmatrix}^T,$$

$$l_3^B = \begin{bmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_3 - b & y - 0.5L\cos\theta_3 + c & z + L\sin\theta_3 \end{bmatrix}^T$$

Suất của các vector l_i^B là l , vậy ta có ba phương trình

$$\begin{aligned} 2L(y+a)\cos\theta_1 + 2zL\sin\theta_1 + x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya - l^2 &= 0 \\ -L(\sqrt{3}(x+b) + y + c)\cos\theta_2 + 2zL\sin\theta_2 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2xb + 2yc - l^2 &= 0 \\ L(\sqrt{3}(x-b) - y - c)\cos\theta_3 + 2zL\sin\theta_3 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 - 2xb + 2yc - l^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = w_B - u_P$$

$$b = \frac{s_P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}w_B$$

$$c = w_P - \frac{1}{2}w_B$$

Ba phương trình có dạng $E_i\cos\theta_i + F_i\sin\theta_i + G_i = 0$

$$E_1 = 2L(y+a)$$

$$F_1 = 2zL$$

$$G_1 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya - l^2$$

$$E_2 = -L(\sqrt{3}(x+b) + y + c)$$

$$F_2 = 2zL$$

$$G_2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2(xb + yc) - l^2$$

$$E_3 = L(\sqrt{3}(x-b) - y - c)$$

$$F_3 = 2zL$$

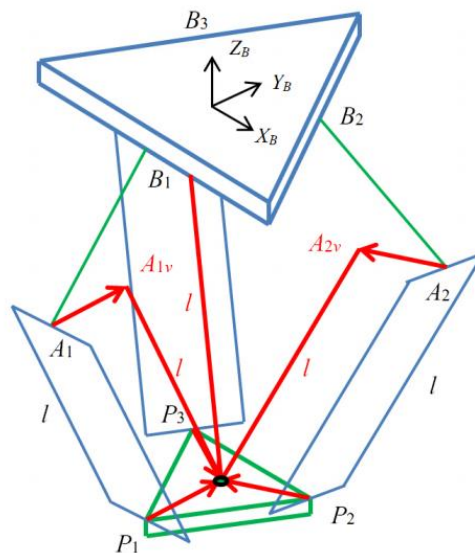
$$G_3 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2(-xb + yc) - l^2$$

Đặt $t_i = \tan(\theta_i/2)$, ta giải được động học ngược tìm θ_i khi biết x, y, z

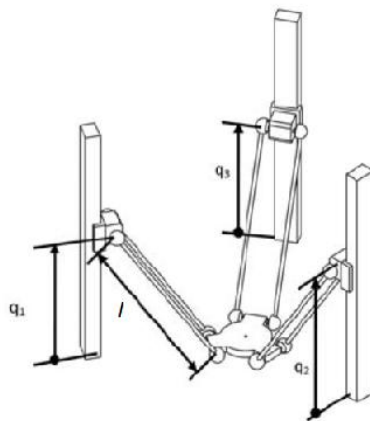
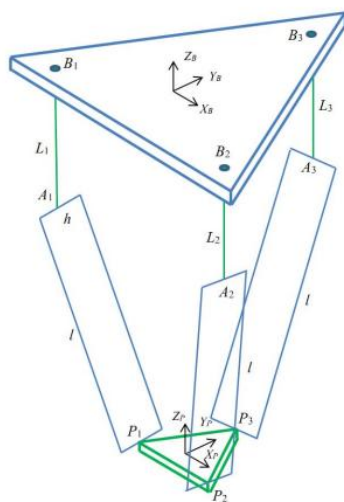
$$t_{i,2} = \frac{-F_i \pm \sqrt{E_i^2 + F_i^2 - G_i^2}}{G_i - E_i}$$

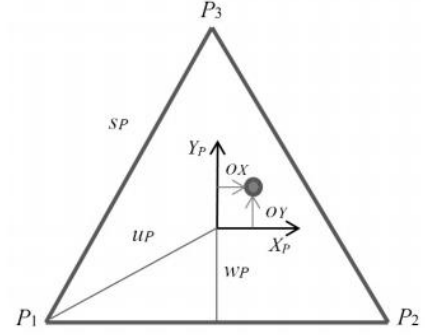
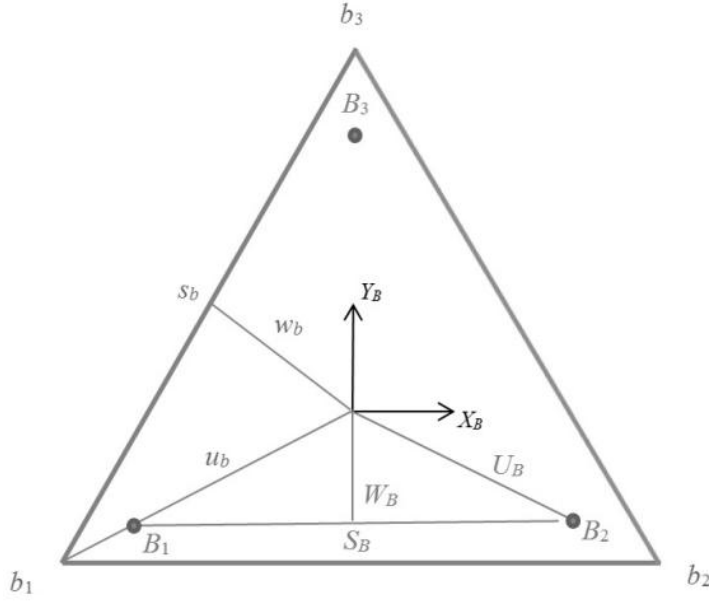
$$\theta_i = 2\arctan(t_i)$$

Bài toán động học thuận tìm x, y, z khi biết θ_i phức tạp hơn, ta tìm tọa độ ba cùi chỏ $A_i = B_i + L_i$, sau đó tìm tọa độ ba cùi chỏ ảo $A_{vi} = A_i - P_i$, điểm P là giao điểm ba hình cầu có tâm A_{vi} và bán kính l



Một loại robot Delta khác thường dùng trong máy in 3D là robot Delta tuyến tính, để di động nổi với ba nhánh cùng chiều dài, mỗi nhánh có dạng hình bình hành, đầu cuối của nhánh trượt trên thanh trượt đứng, ba thanh trượt bố trí theo hình tam giác đều





Ba phương trình động học là

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by + 2zL_1 + L_1^2 - l^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by + 2zL_2 + L_2^2 - l^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy + 2zL_3 + L_3^2 - l^2 = 0$$

$$a = \frac{S_B}{2} - \frac{s_P}{2}$$

$$b = W_B - w_P$$

$$c = u_P - U_B$$

Bài toán động học ngược tìm L_i khi cho x, y, z

$$L_i^2 + 2zL_i + C_i = 0 \quad i=1,2,3$$

$$C_1 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by - l^2$$

$$C_2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by - l^2$$

$$C_3 = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy - l^2$$

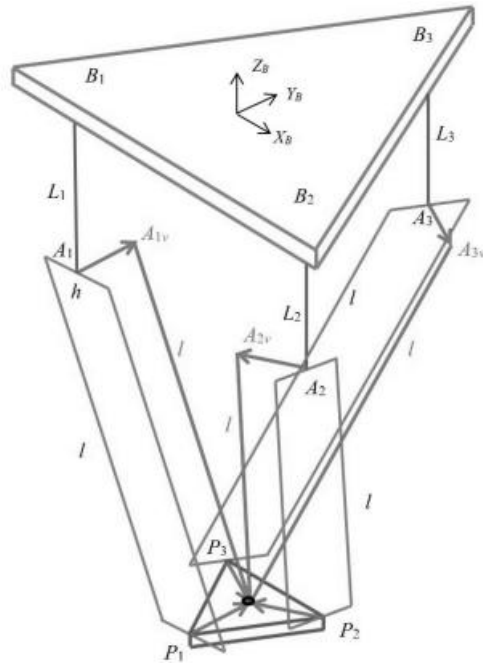
$$L_i = -z \pm \sqrt{z^2 - C_i} \quad i=1,2,3$$

Bài toán động học thuận là tìm x, y, z khi cho L_i , tìm giao điểm ba hình cầu có tâm A_{iv} bán kính l

$${}^B \mathbf{A}_{1v} = \begin{Bmatrix} -\frac{S_B}{2} + \frac{s_P}{2} \\ -W_B + w_P \\ -L_1 \end{Bmatrix}$$

$${}^B \mathbf{A}_{2v} = \begin{Bmatrix} \frac{S_B}{2} - \frac{s_P}{2} \\ -W_B + w_P \\ -L_2 \end{Bmatrix}$$

$${}^B \mathbf{A}_{3v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_B - u_P \\ -L_3 \end{Bmatrix}$$



KẾT LUẬN

Chương 7 cung cấp một số kiến thức về robot song song, bao gồm động học và động lực học, phương pháp điều khiển robot song song cũng tương tự như robot nối tiếp, mô phỏng robot thường dựa trên toolbox SimMechanics.

BÀI TẬP

BT1 Trình bày cách sử dụng phần mềm SimMechanics

BT2 Mô phỏng điều khiển robot phẳng 5 thanh

BT3 Mô phỏng điều khiển hexapod