CHƯƠNG 5

ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT NỐI TIẾP

Động lực học robot là phương trình vi phân liên kết lực và moment với chuyển động của robot bao gồm vị trí, vận tốc và gia tốc các biến khớp. Động lực học giúp mô phỏng chuyển động của robot dưới tác động của lực và moment đặt vào các khớp, nếu động lực học của các động cơ được khảo sát ta có thể mô phỏng chuyển động robot cùng với bộ điều khiển robot.

Có hai phương pháp tính động lực học là phương pháp Euler Lagrange dựa trên năng lượng và phương pháp Newton Euler dựa trên lực và moment. Trong tài liệu này ta khảo sát chi tiết phương pháp Euler Lagrange còn phương pháp Newton Euler trình bày sơ lược hơn.Trước tiên ta ôn lại các khái niệm về chuyển động quay và động năng.

5.1 MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI RẮN

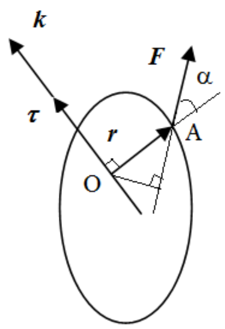
5.1.1 Momen quán tính và Tensor quán tính

a/ Momen quán tính

Khi một lực $\boldsymbol{F}$ tác động làm quay một vật rắn, nó đã tạo ra moment lực (moment of force, torque) gọi tắt là moment $\boldsymbol{\tau}$, là vector có phương theo trục quay, thẳng góc với lực $\boldsymbol{F}$ và có giá trị là tích vector

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}= \boldsymbol{S(r)F} \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{r}$ là vector thẳng góc trục quay và nối đến điểm đặt A của lực, $\boldsymbol{\tau}$cósuất là $\tau =\|r\|.\|F\|.\ |\sin\alpha|$ (đơn vị là Nm) với α là góc giữa $\boldsymbol{r}$ và $\boldsymbol{F}$, vector $\boldsymbol{\tau}$ có chiều sao cho $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}$ theo qui tắc bàn tay phải.



Hình 5.1 Lực và moment

Moment liên hệ với gia tốc góc và khối rắn theo biểu thức

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} \tag{5.2}$$

I là moment quán tính, phụ thuộc khối lượng, hình dáng và trục quay, $\boldsymbol{\omega}$là vector vận tốc góc cùng phương chiều với $\boldsymbol{\tau}$. Moment quán tính (đơn vị kgm^2) tương tự khối lượng trong chuyển động tịnh tiến. Gọi ρ là tỷ khối, một chất điểm thể tích *dV* có khối lượng là *dm*=ρ*dV*, *r* là khoảng cách từ chất điểm đến trục quay ta có công thức tính *I*

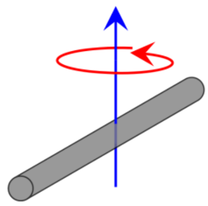
$$I = \iiint_V \rho r^2 dV \tag{5.3}$$

Đối với vật khối lượng m có kích thước nhỏ coi như chất điểm, $I=mr^2$.

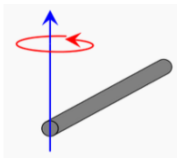
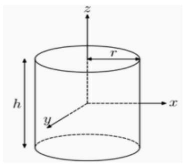
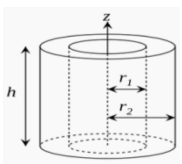
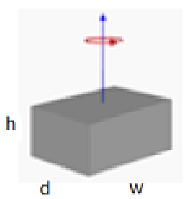
Ví dụ xét một thanh có chiều dài *l* tiết diện *s* nhỏ khối lượng *m* quay quanh trục *z* đi qua trọng tâm và thẳng góc thanh, chọn trục *x* dọc theo thanh,

$$I = \iiint_V \rho r^2 dV = 2\int_0^{l/2} x^2 \rho s dx = 2\rho s \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{l/2}$$

$$= 2\rho s \frac{l^3}{24} = \frac{ml^2}{12}$$



Bảng 5.1 liệt kê moment quán tính một số khối rắn

	Thanh dài *l* tiết diện *s* nhỏ quay ở một đầu	$I = \frac{ml^2}{3}$
	Hình trụ đặc, có ba trục quay	$I_z = \frac{mr^2}{2}, I_x = I_y = \frac{m(3r^2 + h^2)}{12}$
	Hình trụ rỗng vách dầy, bán kính trong r_1, bán kính ngoài r_2, cao *h*, hở hai đầu	$I_z = \frac{m(r_2^2 + r_1^2)}{2}$ $I_x = I_y = \frac{m\{3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\}}{12}$
	Khối chữ nhật cao *h* rộng *w* sâu *d*, trục quay qua trọng tâm	$I_h = \frac{m(w^2 + d^2)}{12}$ $I_w = \frac{m(h^2 + d^2)}{12}$ $I_d = \frac{m(w^2 + h^2)}{12}$

b/ Tensor quán tính

Xét khối rắn có hệ trục xyz liên kết thẳng góc từng đôi một, giả sử quay khối rắn quanh một trục có vector đơn vị là ***k*** bất kỳ ta phải tính moment quán tính với trục này, như vậy rất phức tạp, ta sẽ tính trước moment quán tính theo các trục của khối rắn và được ma trận 3 x 3 gọi là tensor quán tính (inertia tensor)

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

I_{xx} là moment quán tính quanh trục *x*, I_{yy} là moment quán tính quanh trục *y*, I_{zz} là moment quán tính quanh trục *z*, các thành phần còn lại gọi là tích quán tính.

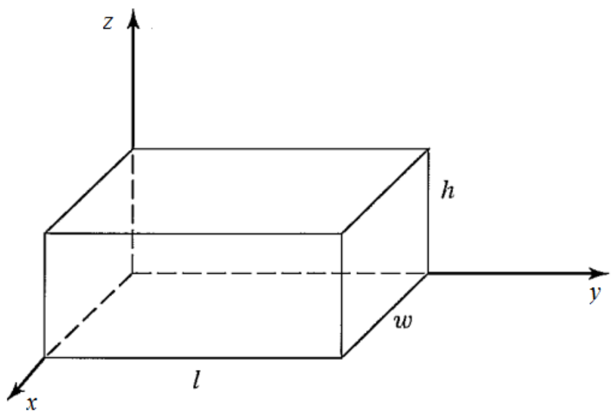
$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho dV, I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho dV, I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dV$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \iiint_V xy\rho dV, I_{yz} = I_{zy} = \iiint_V yz\rho dV, I_{xz} = I_{zx} = \iiint_V xz\rho dV$$

Nếu vật rắn đối xứng qua các trục chính thì ***I*** là ma trận chéo.

Moment quán tính quay quanh trục ***k*** qua gốc là tích $\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{k}$

***Ví dụ 5.1*:** Tính tensor quán tính khối hình chữ nhật Hình 5.2



Hình 5.2 Tính tensor quán tính

$$I_{xx} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2)\rho dxdydz$$

$$= \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2)\rho wdydz = \int_0^h (\frac{l^3}{3} + z^2 l)\rho wdz$$

$$I_{xx} = \left(\frac{hl^3}{3} + \frac{h^3}{3}l\right)\rho w = \frac{l^2 + h^2}{3}m$$

Hoán chuyển các giá trị ta suy ra dễ dàng $I_{yy} = \dfrac{w^2 + h^2}{3}m, I_{zz} = \dfrac{w^2 + l^2}{3}m$

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy\rho dxdydz$$

$$= \int_0^h \int_0^l y\frac{w^2}{2}\rho dydz = \int_0^h \frac{l^2w^2}{4}\rho dz = \frac{l^2w^2h}{4}\rho$$

$$I_{xy} = \frac{lw}{4}m$$

Tương tự $I_{xz} = \dfrac{hw}{4}m, I_{yz} = \dfrac{hl}{4}m$

Tensor quán tính

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \frac{l^2+h^2}{3} & \frac{lw}{4} & \frac{hw}{4} \\ \frac{lw}{4} & \frac{w^2+h^2}{3} & \frac{hl}{4} \\ \frac{hw}{4} & \frac{hl}{4} & \frac{l^2+w^2}{3} \end{bmatrix} m$$

Moment quán tính với trục quay Oy là

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = I_{yy} = \frac{w^2+h^2}{3}$$

Moment lực liên hệ với gia tốc góc và tensor quán tính theo công thức

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{I\omega}}{dt} \tag{5.5}$$

Đại lượng $\boldsymbol{I\omega}$ gọi là động lượng góc (angular momentum). Chú ý là $\boldsymbol{I}$ và $\boldsymbol{\omega}$ thay đổi theo hệ toạ độ. Gọi $\boldsymbol{I}^j$, $\boldsymbol{\omega}^j$ các giá trị trong hệ toạ độ j , $\boldsymbol{R}_i^j$ ma trận quay biểu thị hướng hệ toạ độ j so với hệ toạ độ i, ta có

$$\boldsymbol{I}^i\boldsymbol{\omega}^i = \boldsymbol{R}_i^j(\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{\omega}^j) = \boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{\omega}^j = -\boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{I}^j(\boldsymbol{R}_i^j)^{-1}\boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{\omega}^j = \boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{I}^j(\boldsymbol{R}_i^j)^T\boldsymbol{\omega}^i$$

$$= \boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}_i^{jT}\boldsymbol{\omega}^i$$

Vậy

$$\boxed{\boldsymbol{I}^i = \boldsymbol{R}_i^j\boldsymbol{I}^j\boldsymbol{R}_i^{jT}} \tag{5.6}$$

c/ Định lý trục song song Steiner-Huyghens

Khi đã biết moment quán tính I_C với một trục đi qua khối tâm thì moment quán tính của khối đó với một trục song song và cách một khoảng d là

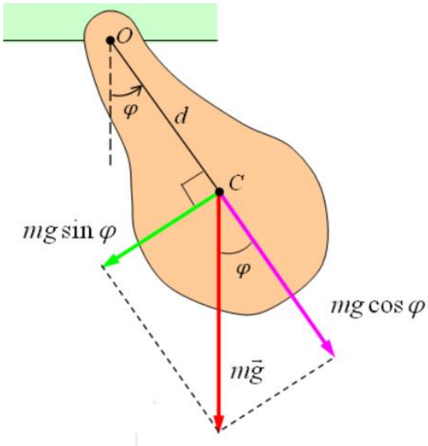
$$I = md^2 + I_C \tag{5.7}$$

Đối với tensor quán tính ta có công thức tương tự, gọi $\boldsymbol{I}_A$ tensor quán tính đối với hệ trục A song song với hệ trục đi qua khối tâm , $\boldsymbol{p}_c$ là toạ độ khối tâm trong hệ trục A

$$\boxed{\boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}_C + m(\boldsymbol{p}_c^T\boldsymbol{p}_c\boldsymbol{1}_3 - \boldsymbol{p}_c\boldsymbol{p}_c^T)} \tag{5.8}$$

$\boldsymbol{1}_3$ là ma trận đơn vị 3x3

Tính toán moment quán tính có thể khó khăn đối với vật có hình dạng phức tạp, chúng ta có thể đo moment quán tính bằng cách đo chu kỳ dao động của con lắc vật lý, từ đó suy ra moment quán tính



Vật khối lượng *m* được quay tự do quanh trục ngang cách tâm khối C khoảng cách *d*. Với góc lệch nhỏ chu kỳ dao động là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + md^2}{mgd}}$$

I_c là moment quán tính qua tâm khối, từ đó suy ra

$$I_c = m[gd(\frac{T}{2\pi})^2 - d^2]$$

5.1.2 Động năng

Một vật khối lượng *m* chịu tác động lực *F* có gia tốc là *a* và vận tốc là *v*

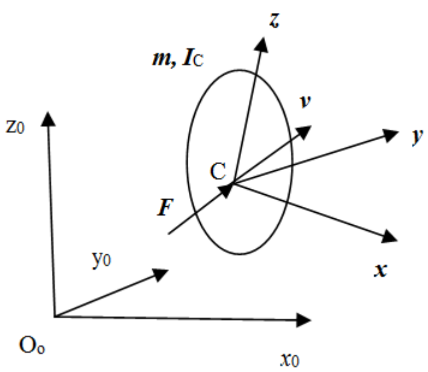
$$F=ma,$$

xét trong hệ toạ độ cố định ta có $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.

Động năng tịnh tiến là

$$\boxed{\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ K &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_c^T\boldsymbol{v}_c \end{aligned}} \tag{5.9}$$

$\boldsymbol{v}_c$ là vector vận tốc khối tâm biểu thị trong hệ toa độ tham chiếu. Động năng có đơn vị là Joule kgm^2/s^2 và không phụ thuộc hệ toạ độ tham chiếu quán tính.

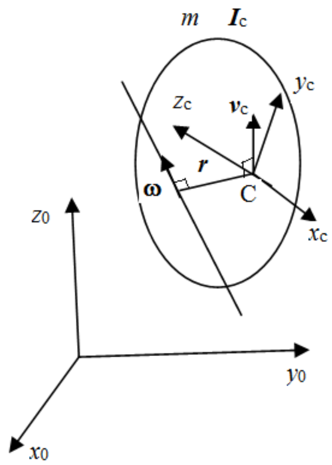


Hình 5.3 Vận tốc tịnh tiến

Bây giờ xét khối rắn có tensor quán tính trong hệ trục qua khối tâm $\boldsymbol{I}_c$ và quay quanh trục đi qua khối tâm với vector vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_c$, động năng quay là

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{I}_c \boldsymbol{\omega}_c} \tag{5.10}$$

ví dụ trục quay là trục z của khối thì $\boldsymbol{\omega}=[0\ 0\ 1]^T$ và $K=\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2$



Hình 5.4 Vận tốc dài và vận tốc quay

Nếu trục quay không đi qua khối tâm thì khối tâm có vận tốc dài $\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{v}_c$ thẳng góc nhau theo qui tắc bàn tay phải với $\boldsymbol{r}$ là vector thẳng góc ω và $\boldsymbol{v}_c$, nối dến khối tâm và có suất là $r\omega$, r là khoảng cách từ khối tâm đến trục quay và ω là vận tốc góc.

Động năng gồm động năng tịnh tiến của khối tâm và động năng quay

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{I}_c \boldsymbol{\omega}_c = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_c^T \boldsymbol{v}_c + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{I}_c \boldsymbol{\omega}_c} \tag{5.11}$$

5.2 PHƯƠNG PHÁP EULER LAGRANGE

Cho robot n bậc tự do với biến khớp $\boldsymbol{q}$, gọi $\boldsymbol{\tau}$ lực tổng quát đặt vào robot (bao gồm lực/moment động cơ, ma sát, tác động của môi trường từ đầu cuối), phương trình động lực học được tính dựa vào các biểu thức sau:

- Hàm vô hướng Lagrange $\qquad L=K-P$

trong đó K là động năng robot, P là thế năng

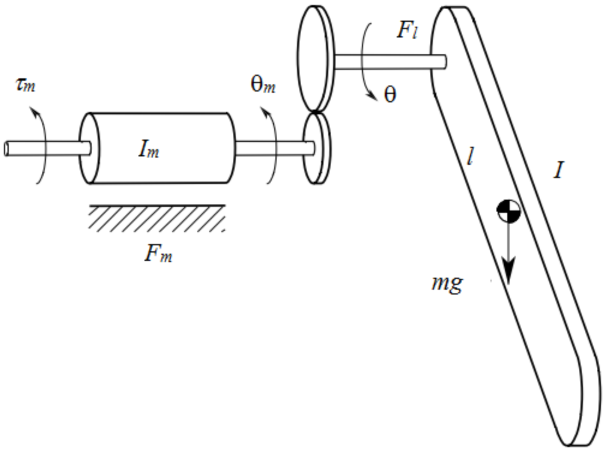
- Phương trình Euler Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\boldsymbol{q}}\right)^T = \boldsymbol{\tau}} \tag{5.12}$$

Động lực học có thể tính toán trực tiếp hay dùng công thức

5.2.1 Tính động lực học trực tiếp

Ví dụ 5.2: Cánh tay một bậc tự do



Hình 5.5 Cánh tay một bậc tự do

Động cơ có moment quán tính rotor I_m quay một thanh có khối lượng m, moment quán tính I, khoảng cách từ trục quay đến trọng tâm là l, ma sát trên trục motor F_m, ma sát trên trục của thanh F_l, động cơ giảm tốc với hệ số r>1, moment động cơ là τ_m, góc quay của thanh tính từ trục hướng xuống dưới là θ, góc quay của motor là θ_m.

Động năng hệ thống: $K = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(r^2 I_m + I)\dot{\theta}^2$

Chọn mốc thế năng là khi thanh thẳng đứng xuống dưới, θ=0, tăng θ, trọng tâm của thanh nâng lên một đoạn l(1-cosθ). Vậy thế năng của thanh là $P=mgl(1-\cos\theta)$.

Hàm Lagrange: $L = \frac{1}{2}(r^2 I_m + I)\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (r^2 I_m + I)\dot{\theta}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (r^2 I_m + I)\ddot{\theta}$$

Phương trình chuyển động

$$(r^2 I_m + I)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau_l$$

Moment động cơ là τ_m qui về thanh rắn là $r\tau_m$, ma sát trên trục động cơ là $F_m = B_m\dot{\theta}_m$, trên trục quay của thanh là $F_l = B_l\dot{\theta}_l$. Qui về trục quay của thanh:

$$\tau_l = r\tau_m - r^2 B_m\dot{\theta} - B_l\dot{\theta}$$

Phương trình chuyển động

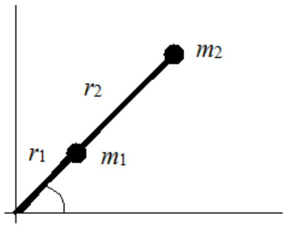
$$\boxed{(r^2 I_m + I)\ddot{\theta} + (rB_m + B_l)\dot{\theta} + mgl\sin\theta = r\tau_m}$$

Xét ảnh hưởng quán tính điện từ của động cơ, với động cơ DC, $\tau_m = k_m i = k_m(v - k_e\dot{\theta}_m)/R$, R là điện trở cuộn dây, k_m, k_e là hằng số cơ điện động cơ, v là điện áp đặt vào cuộn dây, phương trình động lực của cánh tay là:

$$(r^2 I_m + I)\ddot{\theta} + (rB_m + B_l)\dot{\theta} + mgl\sin\theta = rk_m(v - k_e\dot{\theta}_m)/R)$$

$$\boxed{(r^2 I_m + I)\ddot{\theta} + (B_l + r^2 B_m + k_m k_e r^2/R)\dot{\theta} + mgl\sin\theta = rk_m v/R} \quad (5.13)$$

***Ví dụ 5.3*: Cánh tay hai bậc tự do RP, gồm khối $m_1$quay và khối m_2 tịnh tiến, giả sử có kích thước nhỏ



Hình 5.6 Cánh tay RP

Các phương trình liên quan:

$$x_1 = r_1 \cos\theta$$
$$y_1 = r_1 \sin\theta$$
$$x_2 = (r_1 + r_2)\cos\theta$$
$$y_2 = (r_1 + r_2)\sin\theta$$

$$\dot{x}_1 = -r_1\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y}_1 = r_1\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{x}_2 = \dot{r}_2\cos\theta - (r_1 + r_2)\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y}_2 = \dot{r}_2\sin\theta + (r_1 + r_2)\dot{\theta}\cos\theta$$

Vận tốc khối 1 và 2

$$V_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = r_1^2\dot{\theta}^2$$
$$V_2^2 = \dot{r}_2^2 + (r_1 + r_2)^2\dot{\theta}^2$$

Động năng

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\theta}^2$$
$$K_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}m_2(r_1 + r_2)^2\dot{\theta}^2$$
$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2(r_1 + r_2)^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2$$

Thế năng

$$P_1 = m_1gr_1\sin\theta$$
$$P_2 = m_2g(r_1 + r_2)\sin\theta$$
$$P = (m_1 + m_2)gr_1\sin\theta + m_2gr_2\sin\theta$$

Hàm Lagrange

$$L = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2(r_1 + r_2)^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - (m_1 + m_2)gr_1\sin\theta - m_2gr_2\sin\theta$$

Moment cho góc quay

$$T_\theta = (m_1r_1^2 + m_2(r_1 + r_2)^2)\ddot{\theta} + 2m_2(r_1 + r_2)\dot{r}_2\dot{\theta} + (m_1 + m_2)gr_1\cos\theta + m_2gr_2\cos\theta$$

Lực cho tịnh tiến

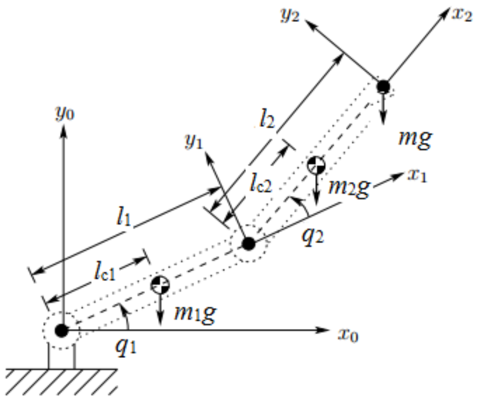
$$F_r = m_2\ddot{r}_2 - m_2(r_1+r_2)\dot{\theta}^2 + m_2 g\sin\theta$$

Viết dạng vector

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{bmatrix} m_1r_1^2+m_2(r_1+r_2)^2 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{r}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2m_2(r_1+r_2)\\ 0\end{bmatrix}\dot{r}_2\dot{\theta}\\ &+\begin{bmatrix}0\\ -m_2(r_1+r_2)\end{bmatrix}\dot{\theta}^2+\begin{bmatrix}((m_1+m_2)r_1+m_2r_2)g\cos\theta\\ m_2 g\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_\theta\\ F_r\end{bmatrix}\end{aligned}} \qquad (5.14)$$

Ta có thể thêm vào ma sát giống như Ví dụ 5.1

Ví dụ 5.4: Robot RR mang tải khối lượng *m*, các thanh có moment quán tính với trục quay qua trọng tâm trục z là I_1, I_2



Hình 5.7 Robot RR mang tải chất điểm khối lượng m

Động năngthanh 1: $\frac{1}{2}(I_1+m_1l_{c1}^2)\dot{q}_1^2,$

Động năng thanh 2: ta phải tính vận tốc dài của tâm khối

- Toạ độ khối tâm là

$$p_{c2x} = l_1\cos q_1 + l_{c2}\cos(q_1+q_2)$$
$$p_{c2y} = l_1\sin q_1 + l_{c2}\sin(q_1+q_2)$$

- Vận tốc khối tâm là

$$\dot{p}_{c2x} = -(l_1\dot{q}_1\sin q_1 + l_{c2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_1+q_2)$$
$$\dot{p}_{c2y} = l_1\dot{q}_1\cos q_1 + l_{c2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2)$$
$$v_{c2}^2 = l_1^2\dot{q}_1^2 + l_{c2}^2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + 2l_1l_{c2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2)\cos q_2$$
$$= (l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)\dot{q}_1^2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)$$

- Động năng thanh 2

$$\frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2+\frac{1}{2}m_2\{(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)\dot{q}_1^2+l_{c2}^2\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)\}$$

Động năng tải tính tương tự:

$$\frac{1}{2}m\{(l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos q_2)\dot{q}_1^2+l_2^2\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2(l_2^2+l_1l_2\cos q_2)\}$$

Thế năng thanh 1: $m_1gl_{c1}\sin q_1$

Thế năng thanh 2: $m_2g(l_1\sin q_1+l_{c2}\sin(q_1+q_2))$

Thế năng tải: $mg(l_1\sin q_1+l_2\sin(q_1+q_2))$

Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial P}{\partial q_1}=\tau_1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial P}{\partial q_2}=\tau_2$$

Đầu tiên tính phương trình động lực thứ nhất:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}=(I_1+m_1l_{c1}^2)\dot{q}_1+I_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)+m_2\{(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)\dot{q}_1+\dot{q}_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)\}$$

$$=\{I_1+I_2+m_1l_{c1}^2+m_2(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)\}\dot{q}_1+\{I_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)\}\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}=\{I_1+I_2+m_1l_{c1}^2+m_2(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)\}\ddot{q}_1+\{I_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)\}\ddot{q}_2$$

$$-l_1l_{c2}m_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)\sin q_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_1}=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_1}=(m_1l_{c1}+m_2l_1+ml_1)g\cos q_1+(m_2l_{c2}+ml_2)g\cos(q_1+q_2),$$

Phương trình động lực thứ nhất:

$$\boxed{\begin{aligned}&\{I_1+I_2+m_1l_{c1}^2+m_2(l_1^2+l_{c2}^2+2l_1l_{c2}\cos q_2)+m(l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos q_2)\}\ddot{q}_1+\\&\{I_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)+m(l_2^2+l_1l_2\cos q_2)\}\ddot{q}_2\\&-(l_{c2}m_2+l_2m)(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)l_1\sin q_2\\&+(m_1l_{c1}+m_2l_1+ml_1)g\cos q_1+(m_2l_{c2}+ml_2)g\cos(q_1+q_2)=\tau_1,\end{aligned}} \quad (5.15)$$

Chuyển sang phương trình động lực thứ 2

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}=I_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)+m_2l_{c2}^2\dot{q}_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)\dot{q}_1+ml_2^2\dot{q}_2+m(l_2^2+l_1l_2\cos q_2)\dot{q}_1$$

$$=\{I_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)+m(l_2^2+l_1l_2\cos q_2)\}\dot{q}_1+(I_2+m_2l_{c2}^2+ml_2^2)\dot{q}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}=\{I_2+m_2(l_{c2}^2+l_1l_{c2}\cos q_2)+m(l_2^2+l_1l_2\cos q_2)\}\ddot{q}_1+(I_2+m_2l_{c2}^2+ml_2^2)\ddot{q}_2$$

$$-(m_2l_{c2}+ml_2)l_1\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_2} = -(m_2 l_{c2} + m l_2) l_1 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_2} = m_2 g l_{c2} \cos\left(q_1 + q_2\right) + m g l_2 \cos\left(q_1 + q_2\right) = (m_2 l_{c2} + m l_2) g \cos\left(q_1 + q_2\right),$$

Phương trình động lực thứ 2:

$$\boxed{\begin{aligned} &\{I_2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}\cos q_2) + m(l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2)\}\ddot{q}_1 + (I_2 + m_2 l_{c2}^2 + m l_2^2)\ddot{q}_2 \\ &+(m_2 l_{c2} + m l_2) l_1 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 l_{c2} + m l_2) g \cos\left(q_1 + q_2\right) = \tau_2 \end{aligned}} \quad (5.16)$$

Các phươngtrình (5.15, 5.16) cho thấy tải *m* ảnh hưởng nhiều đến chuyển động của robot.

5.2.2 Động năng robot n bậc tự do

Động năng robot gồm tổng động năng các khâu và các motor

Xét khâu thứ *I* có khối lượng m_i, vận tốc dài khối tâm là v_0^i trong hệ toạ độ gốc, vận tốc góc của khối tâm là $\boldsymbol{\omega}^i$ trong hệ toạ độ liên kết khâu thứ *i* (gọi tắt là hệ *i*), tensor quán tính $\boldsymbol{I}^i$ tính trong hệ toạ độ qua khối tâm song song hệ *i*. Theo kết quả chương 3, gọi J_{v_i}, J_{ω_i} ma trận Jacobi khối tâm ta có

$$\boldsymbol{v}_i = J_{v_i}\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{\omega}_0^i = J_{\omega_i}\dot{\boldsymbol{q}}$$

Động năng khối *i* là $K_i = \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{iT} I^i \boldsymbol{\omega}^i$ (5.17)

Gọi $\boldsymbol{R}_0^i$ ma trận quay của hệ *i*, $\boldsymbol{\omega}_0^i = \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{\omega}^i = \boldsymbol{R}_0^{iT}\boldsymbol{\omega}_0^i$

Động năng khối *i* là $K_i = \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0^{iT} \boldsymbol{R}_0^i I^i \boldsymbol{R}_0^{iT} \boldsymbol{\omega}_0^i$

$$\boxed{\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_{v_i}^T \boldsymbol{J}_{v_i} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_{\omega_i}^T \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT} \boldsymbol{J}_{\omega_i}\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T (m_i \boldsymbol{J}_{v_i}^T \boldsymbol{J}_{v_i} + \boldsymbol{J}_{\omega_i}^T \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT} \boldsymbol{J}_{\omega_i})\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}} \quad (5.18)$$

Tham khảo mục 3.4.1

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{v_i} \\ \boldsymbol{J}_{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{1v} & \dots & \boldsymbol{J}_{iv} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{1\omega} & \dots & \boldsymbol{J}_{i\omega} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \dots & \boldsymbol{J}_i & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^{k-1} \times (\boldsymbol{p}_{c0}^i - \boldsymbol{p}_0^{k-1}) \\ \boldsymbol{z}_0^{k-1} \end{bmatrix}, k = 1..i, \text{ nếu khớp quay}$$

$\boldsymbol{J}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^{k-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ nếu khớp tịnh tiến

$\boldsymbol{p}_{c0}^i$ là vector vị trí của khối tâm khâu thứ i trong hệ toạ độ gốc

$\boldsymbol{p}_{c0}^i = \boldsymbol{H}_0^i \boldsymbol{p}_{ci}$, $\boldsymbol{p}_{ci}$ là vector vị trí khối tâm khâu thứ i trong hệ toạ độ của khâu

$\boldsymbol{p}_0^{k-1}$ là vector vị trí của gốc hệ toạ độ k-1 trong hệ toạ độ gốc, là cột thứ tư của ma trận $\boldsymbol{H}_0^{k-1}$

$\boldsymbol{z}_0^{k-1}$ là vector trục quay hay trục tịnh tiến khâu thứ k

Tính cho n khâu

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \Big(\sum_1^n m_i \boldsymbol{J}_{v_i}^T \boldsymbol{J}_{v_i} + \sum_1^n \boldsymbol{J}_{\omega_i}^T \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT} \boldsymbol{J}_{\omega_i}\Big)\dot{\boldsymbol{q}}} \qquad (5.19)$$

Thành phần động năng của các motor thay đổi tuỳ theo vị trí lắp đặt, nếu motor đặt cố định thì động năng là

$$K_{mi} = \frac{1}{2} I_{mi} k_i^2 \dot{q}_i^2$$

k_i là hệ số giảm tốc, I_{mi}là moment quán tính rotor,

Nếu motor di chuyển theo các khâu

$$K_{mi} = \frac{1}{2} m_{mi} \boldsymbol{v}_{mi}^T \boldsymbol{v}_{mi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{mi}^T \boldsymbol{I}_{mi} \boldsymbol{\omega}_{mi}$$

m_{mi} là khối lượng motor thứ i, $\boldsymbol{v}_{mi}$ vận tốc dài khối tâm , $\boldsymbol{\omega}_{mi}$ vận tốc góc rotor.

Động năng toàn thể robot là $\boxed{K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}}$ (5.20)

Ma trận $\boldsymbol{D}$ gọi là ma trận quán tính, là ma trận đối xứng xác định dương (ma trận vuông $\boldsymbol{D}_{nxn}$ gọi là xác định dương khi $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \pm 0$)

Nếu viết K dưới dạng $K = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^n d_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n d_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right\}. \forall$ thì

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & .. & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} = d_{12} & d_{22} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ d_{n=1,1} = d_{1,n-1} & .. & .. & d_{n-1,n-1} & d_{n-1,n} \\ d_{n1} = d_{1n} & .. & .. & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{bmatrix}$$

5.2.2 Thế năng robot n bậc tự do

Thế năng khâu thứ i phụ thuộc độ cao của khối tâm có thay đổi theo $\boldsymbol{q}$, giả sử trục z_0 hướng lên thì vector gia tốc trọng trường là $\boldsymbol{g}=[0\ 0\ -g]^T$ và

$$P_i = -\, m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{ci}$$

$$\boxed{P = -\sum_{1}^{n} m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{ci}} \tag{5.21}$$

Ta phải thêm vào thế năng các động cơ có chuyển động thay đổi độ cao.

5.2.3 Phương trình chuyển động

Hàm Lagrange

$$L = K - P = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T D(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \sum_{1}^{n} m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{ci} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} d_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{1}^{n} m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{ci}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}\dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

$$\boxed{\sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k, k = 1..n}$$

$$\boxed{c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)} \tag{5.22}$$

$$\boxed{c_{ijk} = c_{jik}}$$

c_{ijk} gọi là ký hiệu Christoffel.

Dạng ma trận của phương trình động lực robot

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}} \tag{5.23}$$

Phần tử c_{kj} của ma trận $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ là

$$\boxed{c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i} \tag{5.24}$$

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ chứa các thành phần liên quan $\dot{q}_i^2$ gọi là lực ly tâm, liên quan $\dot{q}_i\dot{q}_j$ gọi là lực Coriolis.

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial q_1} & \frac{\partial P}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial P}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T} \tag{5.25}$$

Xét các lực ma sát nhớt $\boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}}$, ma sát coulomb $\boldsymbol{F}_c\,\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}})$, lực tiếp xúc của đầu công tác với môi trường $\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}_e$ ($\boldsymbol{h}_e$ là vector lực , moment đầu công tác tác động lên môi trường), phương trình động lực robot là

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}_c\,\mathrm{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}_e = \boldsymbol{\tau}} \tag{5.26}$$

$\boldsymbol{\tau}$ là lực tổng quát motor tác động vào trục khớp.

Với các giá trị $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$ xác định ta tính được moment $\boldsymbol{\tau}$, **g**iá trị này dùng làm cơ sở chọn động cơ có moment tối đa phù hợp.

***Ví dụ 5.5*:** Lấy lại Ví dụ 5.4

Đầu tiên ta tính ma trận Jacobi

$$z_0^0 = z_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{p}_0^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{p}_0^1 = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 & l_1 s\theta_1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{p}_{c0}^1 = \begin{bmatrix} l_{c1}c_1 & l_{c1}s_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{p}_{c0}^2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c2}c_{12} & l_1 s_1 + l_{c2}s_{12} & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{p}_0^2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{v_1} \\ \boldsymbol{J}_{\omega_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^0 \times (\boldsymbol{p}_{c0}^1 - \boldsymbol{p}_0^0) & 0 \\ \boldsymbol{z}_0^0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{v_1} = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{p}_{c0}^1 - \boldsymbol{p}_0^0)_y & 0 \\ (\boldsymbol{p}_{c0}^1 - \boldsymbol{p}_0^0)_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1}s1 & 0 \\ l_{c1}c1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.27)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{v_2} \\ \boldsymbol{J}_{\omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0^0 \times (\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^0) & \boldsymbol{z}_0^1 \times (\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^1) \\ \boldsymbol{z}_0^0 & \boldsymbol{z}_0^1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{v_2} = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^0)_y & -(\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^1)_y \\ (\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^0)_x & (\boldsymbol{p}_{c0}^2 - \boldsymbol{p}_0^1)_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_{c2}s_{12}) & -l_{c2}s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_{c2}c_{12}) & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^0)_y & -(\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^1)_y \\ (\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^0)_x & (\boldsymbol{p}_0^2 - \boldsymbol{p}_0^1)_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Các biểu thức trên có thể suy ra nhanh hơn từ đạo hàm riêng $\boldsymbol{p}_{c0}^1$ và $\boldsymbol{p}_{c0}^2$

Từ (5.14) động năng liên quan đến vận tốc dài là

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T (\sum_1^3 m_i \boldsymbol{J}_{v_i}^T \boldsymbol{J}_{v_i})\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T (m_1 \boldsymbol{J}_{v_1}^T \boldsymbol{J}_{v_1} + m_2 \boldsymbol{J}_{v_2}^T \boldsymbol{J}_{v_2} + m \boldsymbol{J}_{v_m}^T \boldsymbol{J}_{v_m})\dot{q} \quad (5.30)$$

động năng liên quan vận tốc góc

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{1T} \boldsymbol{I}_1 \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^{2T} \boldsymbol{I}_2 \boldsymbol{\omega}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_1 \dot{q}_1^2 + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \left(I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.31}$$

Kết hợp các biểu thức (5.27 …5.31) ta được ma trận quán tính

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & d_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2) + m(l_1^2 + l_2^2) + 2l_1 (m_2 l_{c2} + m l_2) \cos q_2 \\ & d_{12} = d_{21} = I_2 + m_2 l_{c2}^2 + m l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m l_2) l_1 \cos q_2 \\ & d_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2 + m l_2^2 \end{aligned}} \tag{5.32}$$

Dùng (5.24) tính các ký hiệu Christoffel

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0,$$

$$c_{121} = c_{211} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -(m_2 l_{c2} + m l_2) l_1 \sin q_2 \equiv h$$

$$c_{221} = \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = h,$$

$$c_{112} = \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -h,$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0,$$

$$c_{122} = c_{212} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} & c_{11} = c_{111} \dot{q}_1 + c_{211} \dot{q}_2 = h \dot{q}_2, \\ & c_{12} = c_{121} \dot{q}_1 + c_{221} \dot{q}_2 = h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ & c_{21} = c_{112} \dot{q}_1 + c_{212} \dot{q}_2 = -h \dot{q}_1, \\ & c_{22} = c_{122} \dot{q}_1 + c_{222} \dot{q}_2 = 0, \\ & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{5.33}$$

Ta tính tiếp thế năng theo độ cao y

$$\begin{aligned} & P_1 = m_1 g l_{c1} \sin q_1, \\ & P_2 = m_2 g (l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) + mg (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2), \\ & P = P_1 + P_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\partial P}{\partial q_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g\cos q_1 + (m_2 l_{c2} + m l_2) g\cos(q_1+q_2),\\ \phi_2 &= \frac{\partial P}{\partial q_2} = (m_2 l_{c2} + mgl_2) g\cos(q_1+q_2)\end{aligned}} \qquad (5.34)$$

Phương trình động lực học robot RR giống (5.14, 5.15)

$$\boxed{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix}} \qquad (5.35)$$

Giả sử motor đặt cố định có hệ số giảm tốc k_{ri}, moment quán tính I_{mi}, ma sát trên trục động cơ là F_{mi} và trục khớp F_{ji}, moment động cơ τ_{mi}, phương trình (5.31) trở thành

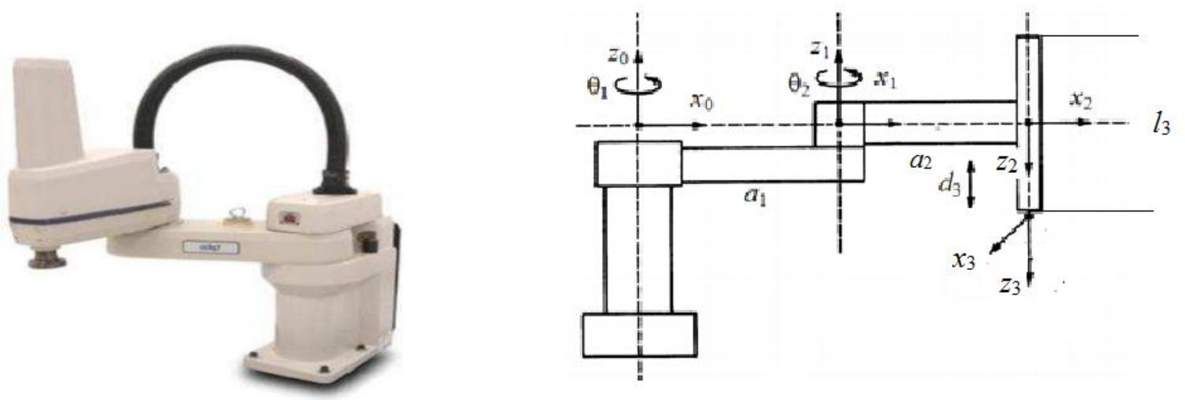
$$\boxed{\begin{bmatrix} d_{11} + k_{r1}^2 I_{m1} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} + k_{r2}^2 I_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} + F_{j1} + k_{r1}^2 F_{m1} & c_{12} \\ c_{21} & F_{j2} + k_{r2}^2 F_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_{r1}\tau_{m1} \\ k_{r2}\tau_{m2}\end{bmatrix}} \qquad (5.36)$$

Ví dụ 5.6: Robot Scara RRP

Các khâu có khối lượng lần lượt là m_1, m_2, m_3, chiều dài a_1, a_2,l_3,, tiết diện nhỏ, moment quán tính với trục quay thẳng góc thanh và qua khối tâm là $m_i l_i^2/12$.

Bảng DH

a	α	d	Θ
a_1	0^o	0	θ_1
a_2	180^o	0	θ_2
0	0^o	d_3	0



Hình 5.8 Robot Scara

Toạ độ khối tâm 1

$$p_{c1} = \begin{bmatrix}\frac{a_1}{2}c_1 & \frac{a_1}{2}s_1\end{bmatrix}^T$$

Vận tốc khối tâm 1

$$\dot{p}_{c1} = \begin{bmatrix}-\frac{a_1}{2}\dot{\theta}_1 s_1 & \frac{a_1}{2}\dot{\theta}_1 c_1\end{bmatrix}^T$$

$$v_{c1}^2 = \frac{a_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2$$

Vận tốc góc khâu 1 là $\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$

Động năng khâu 1

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}\left\{m_1\frac{a_1^2}{4}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_1 a_1^2}{12}\dot{\theta}_1^2\right\} = m_1\frac{a_1^2}{6}\dot{\theta}_1^2$$

Toạ độ khối tâm 2

$$p_{c2} = \left[a_1c_1 + \frac{a_2}{2}c_{12} \quad a_1s_1 + \frac{a_2}{2}s_{12}\right]^T$$

Vận tốc khối tâm 2

$$\dot{p}_{c2} = \left[-a_1\dot{\theta}_1 s_1 - \frac{a_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)s_{12} \quad a_1\dot{\theta}_1 c_1 + \frac{a_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)c_{12}\right]^T$$

$$v_{c2}^2 = a_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{a_2^2}{4}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)^2 + a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)c_2$$

Vận tốc góc khâu 2 là $\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$

Động năng khâu 2

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{m_2\left(a_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{a_2^2}{4}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)^2 + a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)c_2\right) + \frac{m_2a_2^2}{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\right\}$$

$$= \frac{m_2}{2}\left\{a_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{a_2^2}{3}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)^2 + a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)c_2\right\}$$

Toạ độ khối tâm 3

$$p_{c3} = \left[a_1c_1 + a_2c_{12} \quad a_1s_1 + a_2s_{12} \quad -d_3\right]^T$$

Vận tốc khối tâm 3

$$\dot{p}_{c3} = \left[-a_1\dot{\theta}_1 s_1 - a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s_{12} \quad a_1\dot{\theta}_1 c_1 + a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c_{12} \quad -\dot{d}_3\right]^T$$

$$v_{c3}^2 = a_1^2\dot{\theta}_1^2 + a_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c_2 + \dot{d}_3^2$$

Do khâu 3 có tiết diện nhỏ nên moment quán tính theo trục *z* là 0, Động năng khâu 3:

$$K_3=\frac{1}{2}m_3v_{c2}^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{m_3\left(a_1^2\dot{\theta}_1^2+a_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+2a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c_2\right)+m_3\dot{d}_3^2\right\}$$
$$=\frac{m_3}{2}\left\{a_1^2\dot{\theta}_1^2+a_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+2a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c_2+\dot{d}_3^2\right\}$$

Động năng toàn thể

$$K=\frac{m_1}{2}\frac{a_1^2}{3}\dot{\theta}_1^2+\frac{m_2}{2}\left\{a_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{a_2^2}{3}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c_2\right\}$$
$$+\frac{m_3}{2}\left\{a_1^2\dot{\theta}_1^2+a_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2+2a_1a_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)c_2+\dot{d}_3^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{m_1\frac{a_1^2}{3}+m_2\left(a_1^2+\frac{a_2^2}{3}+a_1a_2c_2\right)+m_3(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2c_2)\right\}\dot{\theta}_1^2$$
$$+\frac{1}{2}\left\{m_2\frac{a_2^2}{3}+m_3a_2^2\right\}\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{d}_3^2+\frac{1}{2}\left\{m_2(2\frac{a_2^2}{3}+a_1a_2c_2)+m_3(2a_2^2+2a_1a_2c_2)\right\}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&d_{11}=m_1\frac{a_1^2}{3}+m_2(a_1^2+\frac{a_2^2}{3}+a_1a_2c_2)+m_3(a_1^2+a_2^2+2a_1a_2c_2),\\&d_{12}=d_{21}=\frac{m_2}{2}(2\frac{a_2^2}{3}+a_1a_2c_2)+m_3(a_2^2+a_1a_2c_2),\\&d_{13}=d_{31}=d_{23}=d_{32}=0,\\&d_{22}=m_2\frac{a_2^2}{3}+m_3a_2^2,\\&d_{33}=m_3\end{aligned}}\tag{5.37}$$

Tính tiếp ma trận $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$

$$c_{111}=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1}=0,$$
$$c_{222}=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2}=-\frac{a_1a_2}{4}(m_2+2m_3)s_2,$$
$$c_{333}=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_3}=0,$$
$$c_{112}=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}=\frac{a_1a_2}{2}\left(m_2+2m_3\right)s_2$$
$$c_{113}=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial d_{31}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_3}\right)=0$$
$$c_{121}=c_{211}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}+\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}-\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}=-\frac{a_1a_2}{4}\left(m_2+2m_3\right)s_2$$

$$c_{122} = c_{212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$c_{123} = c_{213} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{12}}{\partial q_3}\right) = 0$$

$$c_{131} = c_{311} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{13}}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$c_{132} = c_{312} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{13}}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$c_{133} = c_{313} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{13}}{\partial q_3}\right) = 0$$

$$c_{221} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} = \frac{a_1 a_2}{2}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2,$$

$$c_{223} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_3}\right) = 0$$

$$c_{232} = c_{322} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{23}}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$c_{233} = c_{323} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{23}}{\partial q_3}\right) = 0$$

$$c_{331} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$c_{332} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{3} c_{i11}\dot{q}_i = c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 + c_{311}\dot{q}_3 = -\frac{a_1 a_2}{4}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2\dot{q}_2$$

$$c_{12} = \sum_{i=1}^{3} c_{i21}\dot{q}_i = c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 + c_{321}\dot{q}_3 = -\frac{a_1 a_2}{4}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2\dot{q}_1 + \frac{a_1 a_2}{2}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2\dot{q}_2$$

$$= \frac{a_1 a_2}{4}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2(-\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)$$

$$c_{13} = \sum_{i=1}^{n} c_{i31}\dot{q}_i = c_{131}\dot{q}_1 + c_{231}\dot{q}_2 + c_{331}\dot{q}_3 = 0$$

$$c_{21} = \sum_{i=1}^{n} c_{i12}\dot{q}_i = c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 + c_{312}\dot{q}_3 = \frac{a_1 a_2}{2}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2\dot{q}_1$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^{n} c_{i22}\dot{q}_i = c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 + c_{322}\dot{q}_3 = -\frac{a_1 a_2}{4}(m_2 + 2m_3)s_2\dot{q}_2$$

$$c_{23} = \sum_{i=1}^{n} c_{i32}\dot{q}_i = c_{132}\dot{q}_1 + c_{232}\dot{q}_2 + c_{332}\dot{q}_3 = 0$$

$$c_{31} = \sum_{i=1}^{n} c_{i13}\dot{q}_i = c_{113}\dot{q}_1 + c_{213}\dot{q}_2 + c_{313}\dot{q}_3 = 0,$$

$$c_{32} = \sum_{i=1}^{n} c_{i23}\dot{q}_i = c_{123}\dot{q}_1 + c_{223}\dot{q}_2 + c_{323}\dot{q}_3 = 0$$

$$c_{33} = \sum_{i=1}^{n} c_{i33}\dot{q}_i = c_{133}\dot{q}_1 + c_{233}\dot{q}_2 + c_{333}\dot{q}_3 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{a_1 a_2}{4}\left(m_2 + 2m_3\right)s_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & (-\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) & 0 \\ 2\dot{q}_1 & -\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \tag{5.38}$$

Thế năng$P$=-m_3gd_3

$$\boxed{\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix}} \tag{5.39}$$

5.2.4 Đặc tính phương trình động lực

a/ Đối xứng ghềnh

Ma trận $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$là ma trận đối xứng ghềnh, nghĩa là $n_{kj} = -n_{jk}$

Tham khảo (5.19)

$$n_{kj} = \dot{d}_{kj} - 2c_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - 2\sum_{i=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\right\}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i$$

$$n_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial d_{ji}}{\partial q_k} + \frac{\partial d_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i = -n_{kj}$$

Vậy ma trận $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ là đối xứng ghềnh

Cho vector bất kỳ $\boldsymbol{x}$, do tính chất đối xứng ghềnh, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{x} = 0$

b/ Tuyến tính của phương trình động lực

Ta có thể biểu điễn phương trình động lực dưới dạng tích ma trận hồi qui $\boldsymbol{Y}$ và vector Θ các thông số robot

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \phi(\boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\tau} \tag{5.40}$$

$\boldsymbol{\Theta}$ là vector chứa các thông số robot như chiều dài, khối lượng, moment quán tính, ma trận $\boldsymbol{Y}$ phụ thuộc chuyển động robot và chức các thông số đã biết. Phương trình (5.31) có thể dùng trong thuật toán nhận dạng thông số và điều khiển thích nghi robot.

Xét các biểu thức (5.31), ta có thể viết

$$\begin{aligned}
&d_{11} = \Theta_1 + 2\Theta_2 \cos q_2,\\
&d_{12} = d_{21} = \Theta_3 + \Theta_2 \cos q_2,\\
&d_{22} = \Theta_3\\
&\Theta_1 = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2) + m(l_1^2 + l_2^2),\\
&\Theta_2 = (m_2 l_{c2} + m l_2) l_1,\\
&\Theta_3 = m_2 l_{c2}^2 + m l_2^2 + I_2
\end{aligned}$$

Xét các biểu thức (5.33), ta có thể viết

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = \Theta_4 \cos q_1 + \Theta_5 \cos(q_1 + q_2),\\
&\phi_2 = \Theta_5 \cos(q_1 + q_2),\\
&\Theta_4 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g,\\
&\Theta_5 = (m_2 l_{c2} + m l_2) g
\end{aligned}$$

Phương trình (5.34) viết lại là

$$\begin{bmatrix} (\Theta_1 + 2\Theta_2 \cos q_2)\ddot{q}_1 + (\Theta_3 + \Theta_2 \cos q_2)\ddot{q}_2 \\ (\Theta_3 + \Theta_2 \cos q_2)\ddot{q}_1 + \Theta_3 \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Theta_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1 - \Theta_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \\ \Theta_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \Theta_4 \cos q_1 + \Theta_5 \cos(q_1 + q_2) \\ \Theta_5 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận hồi qui là

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos q_2 + (\dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2)\sin q_2 & \ddot{q}_2 & \cos q_1 & \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & \ddot{q}_1 \cos q_2 & \ddot{q}_2 & 0 & \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Vector thông số:

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2) + m(l_1^2 + l_2^2) \\ (m_2 l_{c2} + m l_2) l_1 \\ m_2 l_{c2}^2 + m l_2^2 + I_2 \\ (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \\ (m_2 l_{c2} + m l_2) g \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Trong vector thông số ta cũng có thể thêm moment quán tính của động cơ và hệ số ma sát. Robot là đối tượng phức tạp, một số thông số không biết được chính xác do đó cần nhận dạng tham số, thay vì nhận dạng từng tham số một, ta sẽ nhận dạng vector $\boldsymbol{\Theta}$, việc nhận dạng được tiến hành bằng các đặt moment τ thay đổi theo thời gian vào các khớp và đo vị trí, vận tốc, gia tốc, vậy ta cần các cảm biến đo moment và vị trí, tiến hành thực nghiệm với các moment khác nhau ta được tập phương trình

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}(t_1) \\ \boldsymbol{Y}(t_2) \\ : \\ : \\ \boldsymbol{Y}(t_N) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \tau(t_1) \\ \tau(t_2) \\ : \\ : \\ \tau(t_N) \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\bar{\boldsymbol{Y}}_{nN\text{x}p}\boldsymbol{\Theta}_{p\text{x}1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{nN\text{x}1}$$

N là số lần đo cần chọn khá lớn, dùng phương pháp cực tiểu sai số bình phương ta được giá trị vector thông số

$$\boxed{\boldsymbol{\Theta} = (\bar{\boldsymbol{Y}}^T\bar{\boldsymbol{Y}})^{-1}\bar{\boldsymbol{Y}}^T\bar{\boldsymbol{\tau}}} \tag{5.43}$$

5.3 PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC TRONG KHÔNG GIAN DESCARTES

Xét phương trình (5.22), nhân hai vế với nghịch đảo của ma trân Jacobi chuyển vị ta được

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \phi(\boldsymbol{q})\} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

Gọi $\boldsymbol{F}$ lực tổng quát tác động vào đầu cuối,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \phi(\boldsymbol{q})\} = \boldsymbol{F} \tag{5.44}$$

Gọi $\boldsymbol{X}$ toạ độ tổng quát của đầu cuối robot trong không gian Descartes, từ định nghĩa của ma trận Jacobi

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}},\ \ddot{X} = \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} \\ &\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}} \\ &\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\ddot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Thay (5.43) vào (5.42)

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{-1}\ddot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\phi(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{F}$$

Đặt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_X &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{-1}, \\ \boldsymbol{C}_X &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{J}^{-1} - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}^{-1}, \\ \phi_X &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-T}\phi(\boldsymbol{q}) \end{aligned} \tag{5.46}$$

ta có phương trình động lực học trong không gian Descartes

$$\boxed{\boldsymbol{D}_X\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}_X\dot{\boldsymbol{X}} + \phi_X = \boldsymbol{F}} \tag{5.47}$$

5.4 MÔ PHỎNG ĐỘNG LỰC HỌC

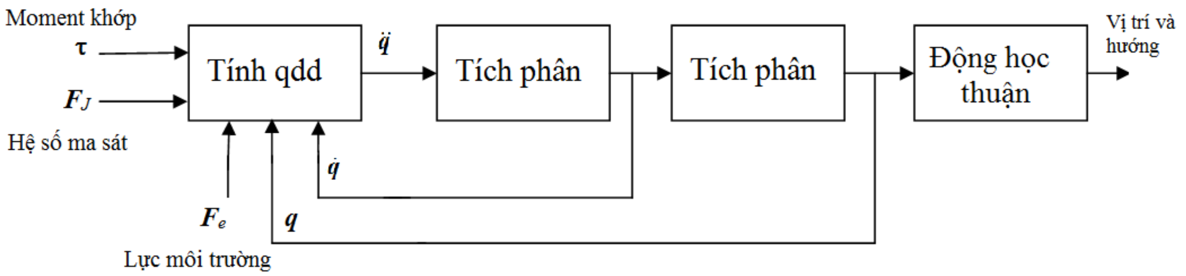
5.4.1 Mô phỏng dùng Smulinks

Muốn mô phỏng robot dùng Matlab Simulink ta tính $\ddot{\boldsymbol{q}}$ từ (5.22)

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\tau - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \phi(\boldsymbol{q})\right)$$

sau đó tích phân để được $\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q}$, có thể thêm vào các ma sát trên khớp $\boldsymbol{F}_J\dot{\boldsymbol{q}}$ và ảnh hưởng lực môi trường $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{F}$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{F}_J\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{F}_e - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q})\right)$$

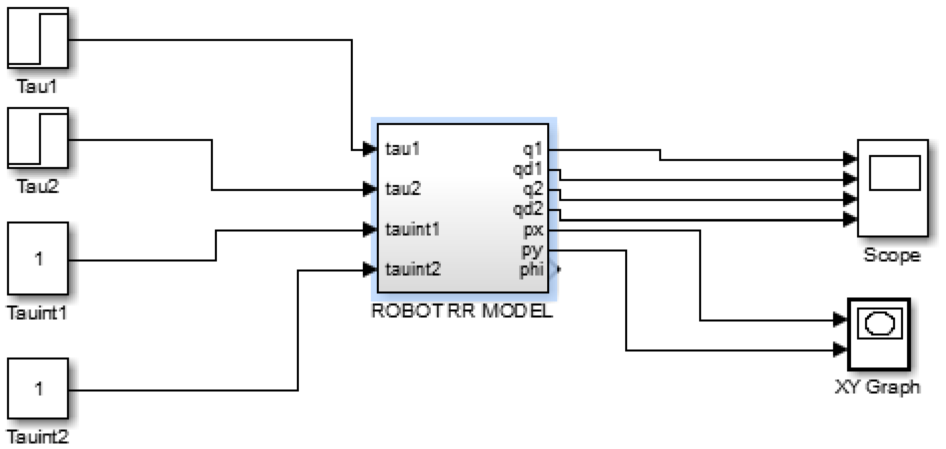


Hình 5.9 Mô phỏng robot dùng Simulink

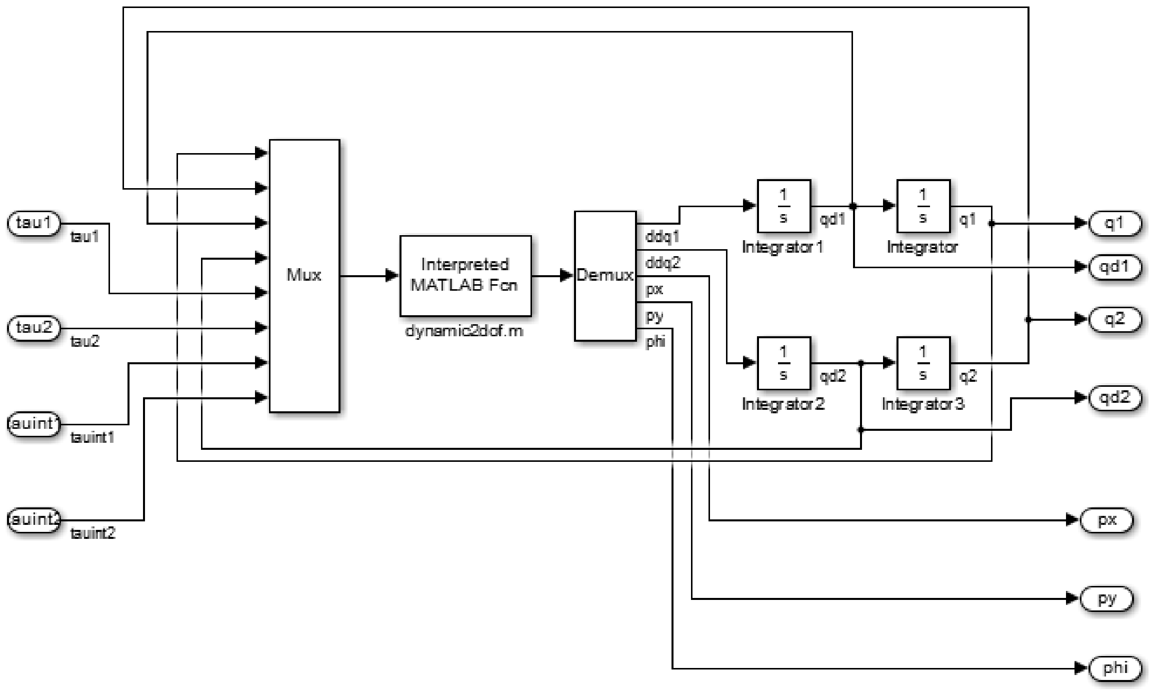
Ví dụ 5.7: Mô phỏng robot RRVí dụ 5.5 dùng Simulink, tính gia tốc dùng hàm dynamic2dof.m (Interpreted Matlab Function)

```
function out = dynamic2dof(u);
% Dynamic model of a planar 2 dof RR manipulator
% Input:
% dq -->> joint velocity vector
% q -->> joint position vector
% tau -->> joint torques
% tauint -->> interaction forces
% Output:
% ddq -->> joint acceleration vector
% p -->>position and orientaion
I1z = 0.8; I2z = 0.4;
m1 = 10.0; m2 = 5.0;
L1 = 1; L2 = 1;
Lc1=L1/2; Lc2=L2/2;
g = 9.81;
%Joint Friction
M = diag([30,30]);
q1 = u(1); q2 = u(2);
dq = u(3:4); dq1 = u(3); dq2 = u(4);
tau = u(5:6); tauint = u(7:8);
% Kinematic functions
s1 = sin(q1);s2 = sin(q2); s12 = sin(q1+q2);
c1 = cos(q1); c2 = cos(q2); c12 = cos(q1+q2);
q12 = q1 + q2;
dq12 = dq1 + dq2;
% Elements of the Inertia Matrix D
D11 = I1z+I2z+Lc1^2*m1+m2*(L1^2+Lc2^2+2*L1*Lc2*c2);
D12 = I2z+m2*(Lc2^2+L1*Lc2*c2);
D22 = I2z+Lc2^2*m2;
D = [D11, D12; D12, D22];
% Coriolis and centrifugal elements
C11 = -(L1*dq2*s2*(Lc2*m2)); C12 = -(L1*dq12*s2*(Lc2*m2) );
C21 = m2*L1*Lc2*s2*dq1; C22 = 0;
C = [C11 C12; C21 C22];
% Gravity :
g1 = m1*Lc1*c1+m2*(Lc2*c12 + L1*c1); g2 = m2*Lc2*c12;
```

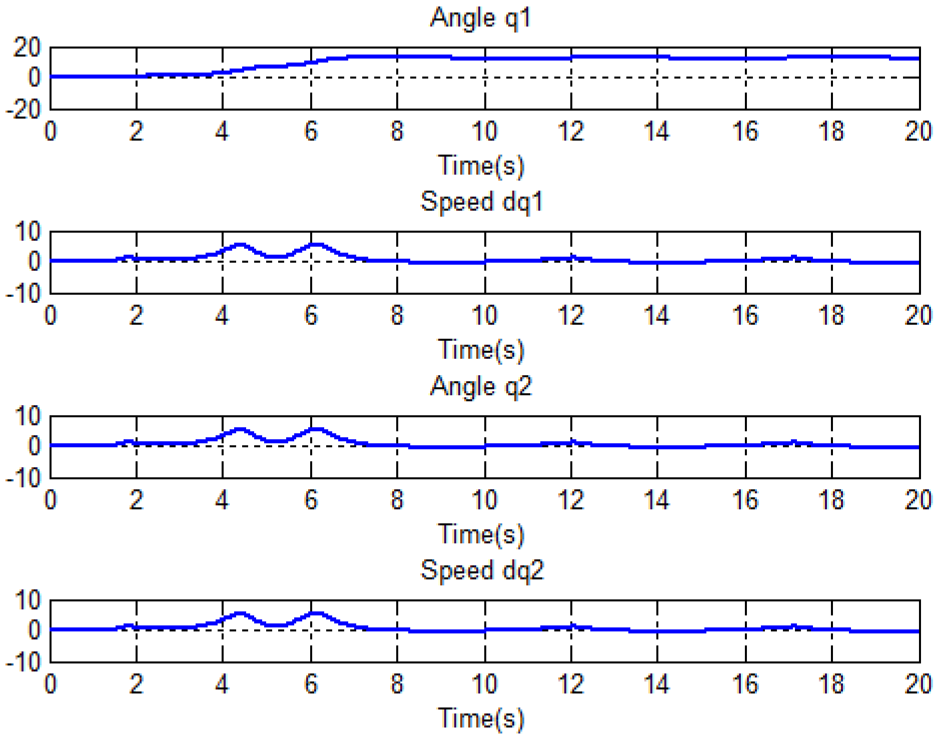
```
G = g*[g1; g2];
% Computation of acceleration
ddq = inv(D) * (tau - tauint - C*dq - M*dq - G);
p=[L1*c1+L2*c12;L1*s1+L2*s12;q12];
out=[ddq;p];
```



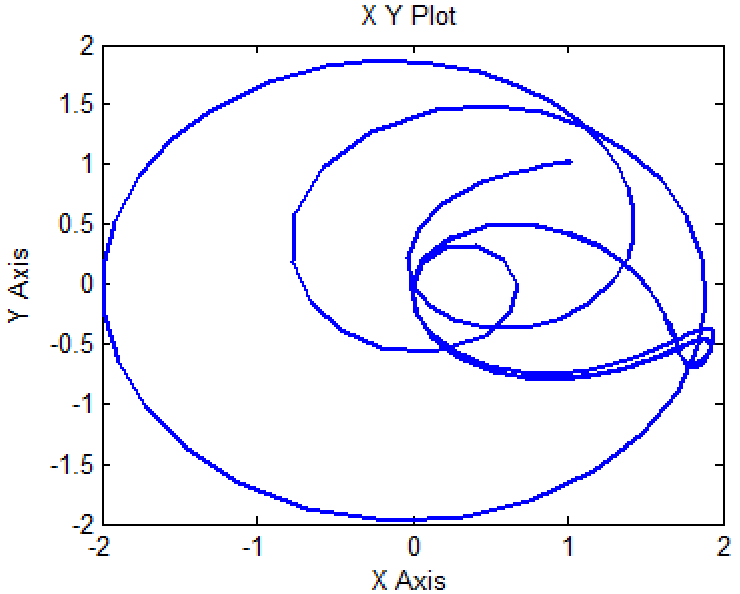
Hình 5.10 Sơ đồ mô phỏng



Hình 5.11 Mô hình robot



Hình 5.12 Kết quả mô phỏng góc và vận tốc góc



Hình 5.13 Vị trí đầu cuối

5.4.2 Giới thiệu Robotic Toolbox for Matlab

Gói phần mêm này của ông Peter Corke gồm các hàm Matlab hỗ trợ tính toán và mô phỏng robot trong Matlab, download miễn phí từ trang web http://petercorke.com/Robotics_Toolbox.html, bản 9.10.

Ta download phần mềm và giải nén trong thư mục rcvtools, khai báo đường dẫn cho thư mục này trong Matlabpath, chạy file rvctools/startup_rvc.m, sau đó chạy file rtbdemo.mđể xem demo.

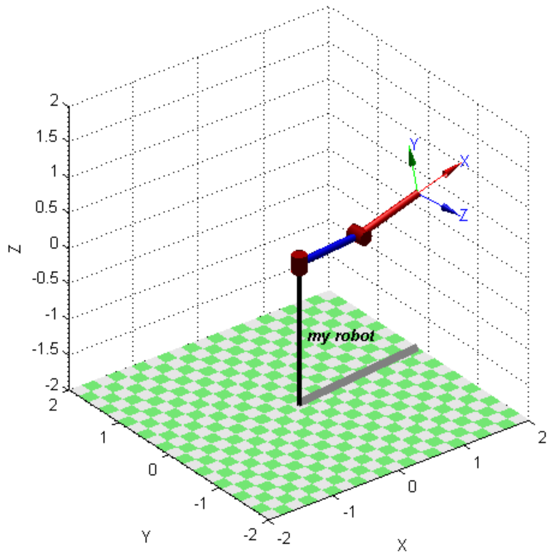
Hình 5.14 Giao diện file rtbdemo.m

Phần tiếp theo giới thiệu một số nét chính của Toolbox

a/ Tính động học thuận, dựa vào file robot.m tính động học thuận và vẽ robot 2DOF RR

```
% Copyright (C) 1993-2014, by Peter I. Corke
% The first link is

L1 = Link('d', 0, 'a', 1, 'alpha', pi/2);
% The second link is
L2 = Link('d', 0, 'a', 1, 'alpha', 0);
% Join links into a serial-link robot manipulator
bot = SerialLink([L1 L2], 'name', 'my robot');
% Forward Kinematics with joint angles q1 = 0.1 and q2 = 0.2
bot.fkine([0.1 0.2])
bot.plot([0.1 0.2])
```

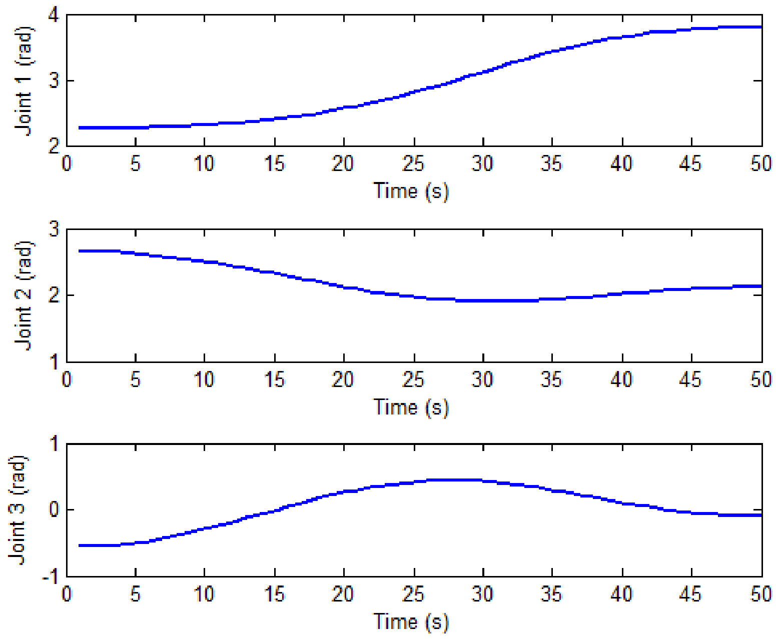
```
ans =
    0.9752   -0.1977    0.0998    1.9702
    0.0978   -0.0198   -0.9950    0.1977
    0.1987    0.9801    0.0000    0.1987
         0         0         0    1.0000
```



Hình 5.15 Hình vẽ robot RR

b/ Tính động học ngược, dựa vào file ikine.m

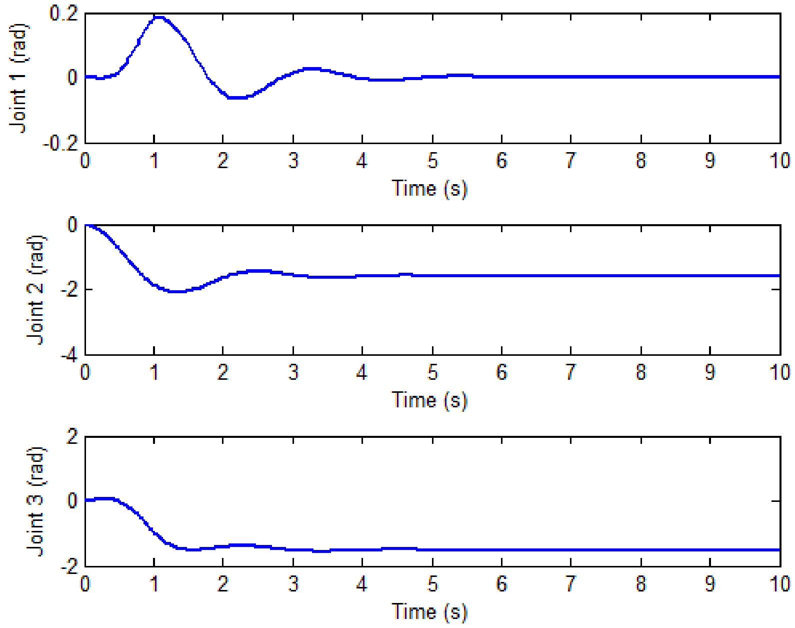
```
% Copyright (C) 1993-2014, by Peter I. Corke
mdl_puma560 % định nghĩa robot puma 560
q = [0 -pi/4 -pi/4 0 pi/8 0]
T = p560.fkine(q)
% Inverse kinematics
qi = p560.ikine(T, 'pinv');
% Inverse kinematics may also be computed for a trajectory. If we
%take a Cartesian straight line path between two poses in 50 steps

T1 = transl(0.6, -0.5, 0.0) % define the start point
T2 = transl(0.4, 0.5, 0.2)  % and destination
T = ctraj(T1, T2, 50);  % compute a Cartesian path

% now solve the inverse kinematics
q = p560.ikine6s(T);

% Let's examine the joint space trajectory that results in
%straightlineCartesian motion

subplot(3,1,1); plot(q(:,1)); xlabel('Time (s)'); ylabel('Joint 1
(rad)');
subplot(3,1,2); plot(q(:,2)); xlabel('Time (s)'); ylabel('Joint 2
(rad)');
subplot(3,1,3); plot(q(:,3)); xlabel('Time (s)'); ylabel('Joint 3
(rad)');

% This joint space trajectory can now be animated
figure
p560.plot(q)
```



Hình 5.16 Quỹ đạo tuyên tính robot Puma

c/ mô phỏng động lực học robot Puma, file fdyn.m

```
% Copyright (C) 1993-2014, by Peter I. Corke
% Consider a Puma 560 at rest in the zero angle pose, with zero
applied joint % torques. The joint acceleration would be given by

mdl_puma560
p560.accel(qz, zeros(1,6), zeros(1,6))

% To simulate the motion of the Puma 560 from rest in the zero angle
pose with zero applied joint torques

tic
[t q qd] = p560.nofriction().fdyn(10, [], qz);
toc

% and the resulting motion can be plotted versus time

subplot(3,1,1)
plot(t,q(:,1))
xlabel('Time (s)');
ylabel('Joint 1 (rad)')
subplot(3,1,2)
plot(t,q(:,2))
xlabel('Time (s)');
ylabel('Joint 2 (rad)')
subplot(3,1,3)
plot(t,q(:,3))
xlabel('Time (s)');
ylabel('Joint 3 (rad)')
figure
p560.plot(q)
```



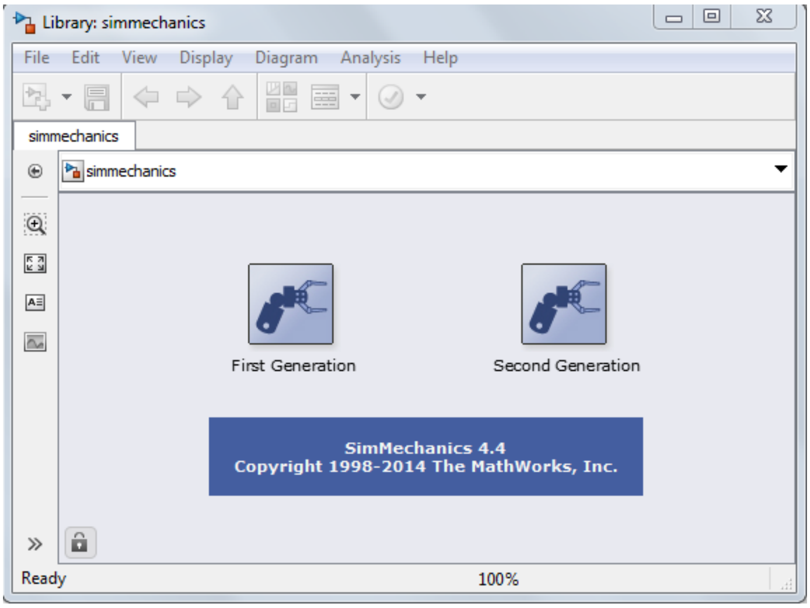
Hình 5.17 Đáp ứng của robot Puma dưới tác động trong lực

5.4.3 Mô phỏng 3D kết hợp phần mềm thiết kế cơ khí và Simmechanics

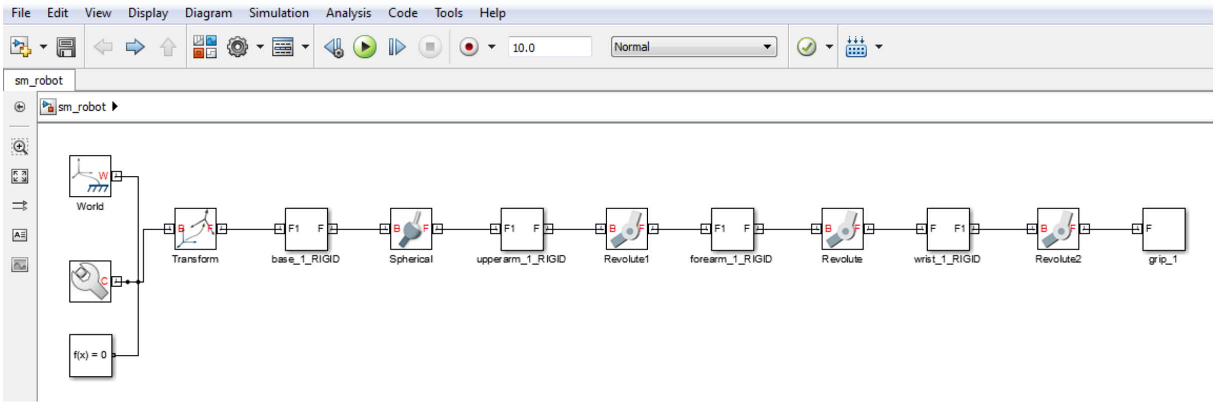
Chúng ta có thể thiết kế phần chi tiết cơ khí robot dùng các phần mềm như Autocad, SolidWorks,… sau đó import sơ đồ vào phần mềm SimMechanics của Matlab, tiến hành điều khiển robot và quan sát chuyển động 3D của robot, như vậy sẽ hấp dẫn hơn, kỹ thuật này thường dùng khi training hay trình diễn.SimMechanics là công cụ nằm trong Simulink→Simscape giúp mô phỏng chuyển động 3D của các vật thể.

Phần mềm CAD (Computer Aided Design) export sơ đồ cơ khí ra file *.xml, SimMechanics import file này và ta có thể thêm phần điều khiển vào, ta chạy mô phỏng trên nền Matlab với các thuật toán điều khiển khác nhau.

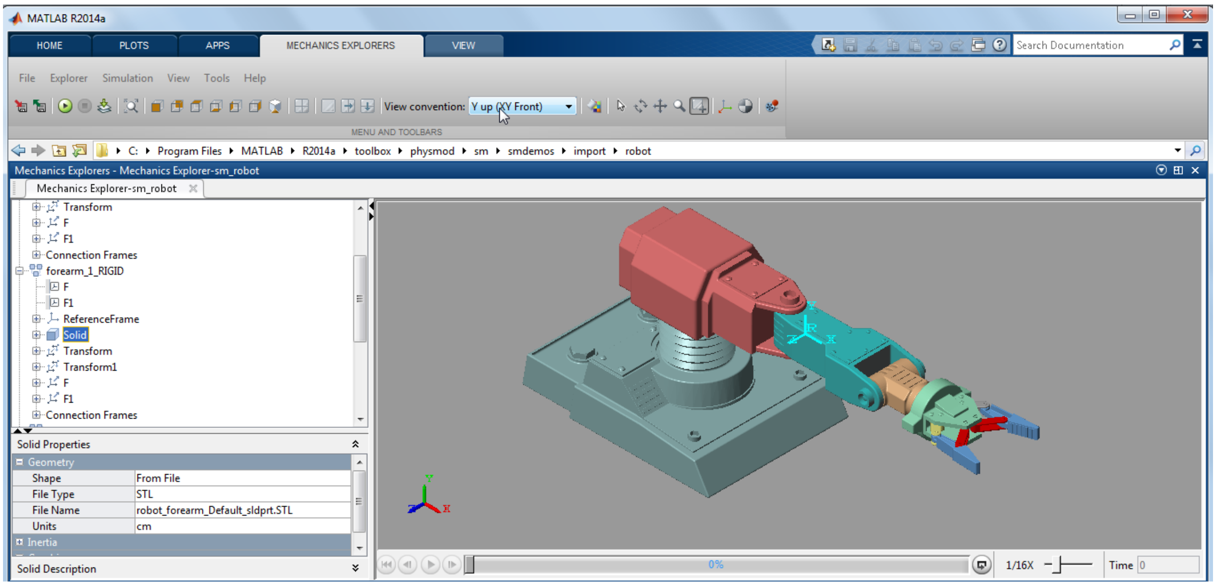
***Ví dụ 5.8*:** Matlab có sẵn file sm_robot.xml trong thư mục \toolbox\ physmod\ sm\smdemos\ import\robot\, trong cửa số lệnh ta gõ smimport('sm_robot.xml') để nhập mô hình, SimMechanics mở ra cửa sổ trình bày sơ đồ kết nối của robot, bấm Simulation>Update Diagram, cửa sổ Mechanics Explorer mở ra trình bày hình dáng robot, bấm chọn View convention Y up (XY Front), chọn view point để thay đổi góc nhìn. Vào cửa sổ simulink chọn Simulation →Run, trở lại cửa sổ Mechanics Explorer quan sát chuyển động robot dưới tác động của trọng lực. Sau đó ta sẽ thêm bộ điều khiển vào sơ đồ simulink, vấn đề điều khiển sẽ được bàn đến trong chương sau.



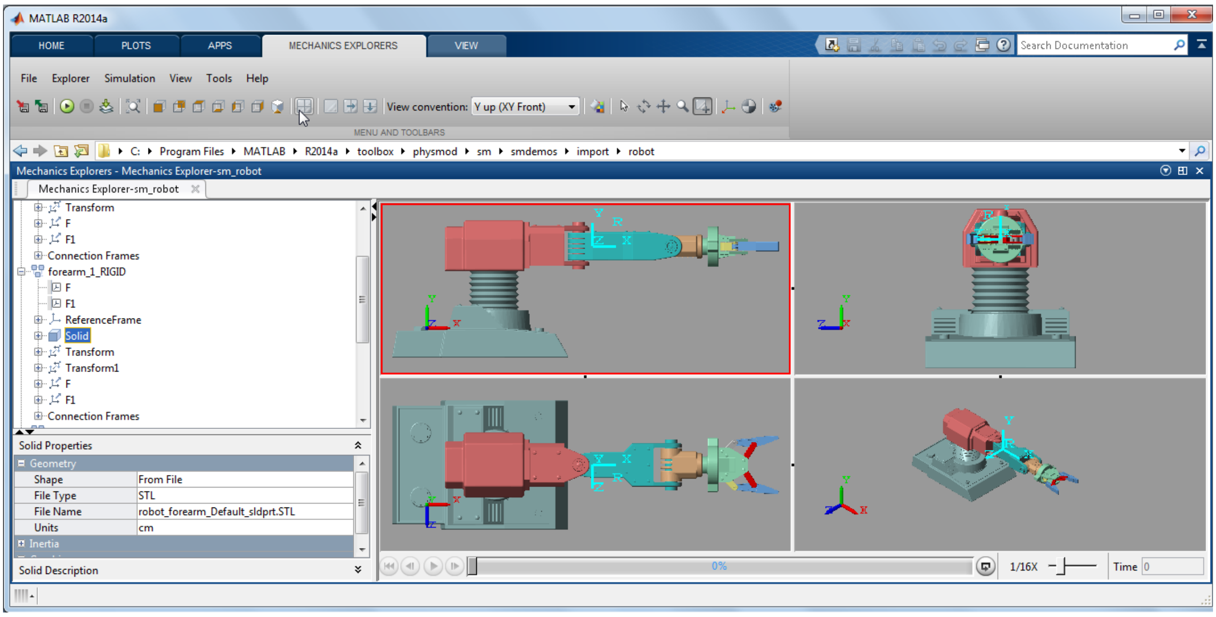
Hình 5.18Thư viện SimMechanics



Hình 5.19 Sơ đồ cơ khí robot trong SimMechanics



Hình 5.20 Quan sát chuyển động Robot



Hình 5.21 Thay đổi góc nhìn

5.5 PHƯƠNG PHÁPNEWTON- EULER

Phương pháp Newton-Euler cũng cho cùng kết quả như phương pháp Euler-Lagrange, việc tính toán dựa trên phương trình lực Newton

- Nếu khối 1 tác động lực $\boldsymbol{f}$ và moment $\boldsymbol{\tau}$ vào khối 2 thì khối 2 tác động lực $-\boldsymbol{f}$ và moment $-\boldsymbol{\tau}$ vào khối 1.

- Gọi $\boldsymbol{f}$ tổng các lực tác động vào khối m, gia tốc tịnh tiến khối tâm là $\boldsymbol{a}$, vận tốc tịnh tiến khối tâm là $\boldsymbol{v}$ ta có phương trình Newton

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a} \qquad (5.48)$$

- Cho khối quay với hệ toạ độ liên kết qua khối tâm và có tensor quán tính $\boldsymbol{I}$,gọi $\boldsymbol{\tau}$ tổng các moment tác động, $\boldsymbol{\omega}$vận tốc góc, tất cả trong hệ trục liên kết khối tâm, phương trình liên kết là

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{I\omega}) = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT})\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + (\dot{\boldsymbol{R}}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT} + \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \dot{\boldsymbol{R}}_0^{iT})\boldsymbol{\omega} \qquad (5.49)$$

Dùng biểu thức (3.15) $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R}$ ta viết lại (5.49)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}$$

mà $\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ nên $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{R}_0^i \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{R}_0^{iT}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{I\omega}$

Phương trình Euler liên kết moment, gia tốc góc và vận tốc góc là

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\dot{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I\omega}} \qquad (5.50)$$

Giả sử vật rắn đối xứng có moment quán tính với trục z là $J=I_{zz}$ và hệ trục tham chiếu có phương trùng với hệ trục qua tâm khối của vật, (5.50) trở thành công thức quen thuộc

$$\boxed{\tau_z = J\dot{\omega}_z} \tag{5.51}$$

Xét robot gồm n khâu với $n+1$ hệ toạ độ liên kết, hệ toạ độ 0 là hệ toạ độ tham chiếu cố định, hệ toạ độ i liên kết với khâu i, $i \geq 1$, các biến khớp là $\boldsymbol{q}$, phương pháp E-N là phương pháp đệ quy (recursive) gồm hai giai đoạn:

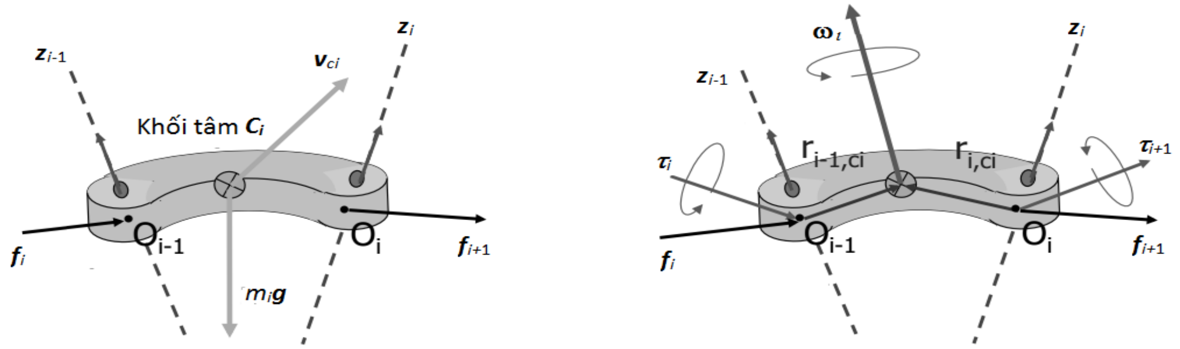
- Giai đoạn tiến: với i=1..n ta tìm vị trí, vận tốc, gia tốc khối tâm i

- Giai đoạn lùi: với i=n..1 ta tìm lực và moment tác dộng lên khớp i

Như vậy sau hai giai đoạn ta tìm được biểu thức liên hệ lực tổng quát và biến khớp, chính là phương trình động lực robot.

Với vector và ma trận tính với hệ toạ độ z_0 trừ trường hợp định nghĩa khác, cho khâu i ta định nghĩa các đại lượng sau:

- m_i khối lượng khâu i
- $\boldsymbol{I}_i$ tensor quán tính khâu i so với hệ toạ độ gốc z_0
- $\boldsymbol{p}_{i-1}$, $\boldsymbol{p}_i$ toạ độ gốc hệ trục z_{i-1} và z_i so với hệ toạ độ gốc z_0
- $\boldsymbol{r}_{i-1,ci}$ vector từ gốc toạ độ z_{i-1} đến khối tâm khâu i
- $\boldsymbol{r}_{i-1,i}$ vector từ gốc toạ độ z_{i-1} đến gốc toạ độ z_i
- $\boldsymbol{r}_{i-1}^{i-1,i}$ vector từ gốc toạ độ z_{i-1} đến gốc toạ độ z_i trong hệ toạ độ z_{i-1}
- $\boldsymbol{r}_{i,ci}$ vector từ gốc toạ độ z_i đến khối tâm khâu i
- $\boldsymbol{v}_{ci}$ vận tốc dài khối tâm khâu i
- $\boldsymbol{a}_{ci}=\dot{\boldsymbol{v}}_{ci}$ gia tốc dài khối tâm khâu i
- $\boldsymbol{v}_i$ vận tốc dài gốc toạ độ i
- $\boldsymbol{\omega}_i$ vận tốc góc khâu i
- $\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1,i}$ vận tốc góc hệ toạ độ z_i so với hệ toạ độ z_{i-1} trong hệ toạ độ z_{i-1}
- $\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i$ gia tốc dài gốc toạ độ i
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ gia tốc góc khâu i
- $\boldsymbol{g}_0$ gia tốc trọng trường
- $\boldsymbol{f}_i$ lực khâu i-1 tác động lên khâu i
- $\boldsymbol{f}_{i+1}$ lực khâu i tác động lên khâu i+1
- $\boldsymbol{\tau}_i$ moment khâu i-1 tác động lên khâu i
- $\boldsymbol{\tau}_{i+1}$ moment khâu i+1 tác động lên khâu i
- τ_i lực tổng quát khớp i(trục z_{i-1}) tác động lên khâu i



Hình 5.22 Tính lực và moment

5.5.1 Tính vận tốc và gia tốc

Ta có

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{i-1} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1}^{i-1,i}, \tag{5.52}$$

lấy đạo hàm (5.52) kết hợp (3.16) ta được

$$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\dot{\boldsymbol{r}}_{i-1}^{i} + \dot{\boldsymbol{R}}_0^{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1}^{i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i}} \tag{5.53}$$

Tính tiếp vận tốc góc, ta có hệ thức

$$\boldsymbol{R}_0^{i} = \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{R}_{i-1}^{i} \tag{5.54}$$

Đạo hàm (5.54) $\quad \dot{\boldsymbol{R}}_0^{i} = \dot{\boldsymbol{R}}_0^{i-1}\boldsymbol{R}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\dot{\boldsymbol{R}}_{i-1}^{i}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(\omega_i)\boldsymbol{R}_0^{i} &= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{R}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{S}(\omega_{i-1}^{i-1,i})\boldsymbol{R}_{i-1}^{i} \\
&= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{S}(\omega_{i-1}^{i-1,i})(\boldsymbol{R}_0^{i-1})^T\,\boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{R}_{i-1}^{i} \\
&= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{S}(\omega_{i-1}^{i-1,i})(\boldsymbol{R}_0^{i-1})^T\,\boldsymbol{R}_0^{i} \\
&= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^{i-1}\omega_{i-1}^{i-1,i})\boldsymbol{R}_0^{i}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}(\omega_i)\boldsymbol{R}_0^{i} = \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_0^{i} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0^{i-1}\omega_{i-1}^{i-1,i})\boldsymbol{R}_0^{i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{R}_0^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}} \tag{5.55}$$

Trường hợp khớp i là tịnh tiến $\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i\boldsymbol{z}_{i-1}$, $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}$ =0, (5.53)(5.55) trở thành

$$\boxed{\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} + \dot{d}_i\boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i}} \tag{5.56}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}} \tag{5.57}$$

Trường hợp khớp i là quay $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i z_{i-1}$, $\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i}$ =0, (5.53)(5.55) trở thành

$$\boxed{\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i} = \boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i}} \tag{5.58}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i\boldsymbol{z}_{i-1}} \tag{5.59}$$

Tính tiếp gia tốc cho khớp tịnh tiến, đạo hàm (5.56)

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{d}_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

$$\dot{d}_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{z}_{i-1} = \dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \text{ x } \boldsymbol{z}_{i-1}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{i-1,i} = \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i})} \quad (5.60)$$

Gia tốc góc cho khớp tịnh tiến: $\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}}$ (5.61)

Tương tự với khớp quay

$$\boxed{\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,i})} \quad (5.62)$$

Gia tốc góc cho khớp quay

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{\theta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \dot{\theta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1} \text{ x } \boldsymbol{z}_{i-1}} \quad (5.63)$$

Nếu dùng hệ toạ độ z_i cho các vectơ liên quan đến khâu i, các phương trình liên quan khớp tịnh tiến là:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = R_{i-1}^{tT} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \quad (5.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i = R_{i-1}^{tT} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} \quad (5.65)$$

$$\boldsymbol{a}_i^i = \boldsymbol{R}_{i-1}^{iT}(\boldsymbol{a}_{i-1}^{i-1} + \ddot{d}_i \boldsymbol{z}_0) + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } \boldsymbol{R}_{i-1}^{iT}\boldsymbol{z}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i-1,i}) \quad (5.66)$$

các phương trình liên quan khớp quay là:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = R_{i-1}^{tT}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + \dot{\theta}_i \boldsymbol{z}_0) \quad (5.67)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i = R_{i-1}^{iT}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{\theta}_i \boldsymbol{z}_0 + \dot{\theta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \text{ x } \boldsymbol{z}_0) \quad (5.68)$$

$$\boldsymbol{a}_i^i = \boldsymbol{R}_{i-1}^{iT}\boldsymbol{a}_{i-1}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i-1,i}) \quad (5.69)$$

Gia tốc dài tâm khối là

$$\boldsymbol{a}_i^{ci} = \boldsymbol{a}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i.ci} + \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i.ci}) \quad (5.70)$$

Điều kiện đầu $\boldsymbol{\omega}_0^0 = 0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = 0,$ với trục z_0 hướng lên $\boldsymbol{g}_0$=[0 0 9.81]^T

5.5.2 Tính lực và moment

Phương trình lực trong hệ toạ độ z_0

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_{i+1} + m_i(\boldsymbol{a}_{ci} - \boldsymbol{g}_0)$$

Phương trình lực trong hệ toạ độ z_i $\quad \boldsymbol{f}_i^i = \boldsymbol{R}_i^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1}^{i+1} + m_i \boldsymbol{a}_i^{ci}$ (5.71)

Phương trình moment trong hệ toạ độ z_0

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\boldsymbol{f}_i \text{ x } \boldsymbol{r}_{i-1,ci} + \boldsymbol{\tau}_{i+1} + \boldsymbol{f}_{i+1} \text{ x } \boldsymbol{r}_{i,ci} + \boldsymbol{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \text{x } \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$$

Phương trình moment trong hệ toạ độ z_i

$$\boldsymbol{\tau}_i^i = -\boldsymbol{f}_i^i \text{ x } \boldsymbol{r}_i^{i-1,ci} + \boldsymbol{R}_i^{i+1}\boldsymbol{\tau}_{i+1}^{i+1} + \boldsymbol{R}_i^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1}^{i+1} \text{x } \boldsymbol{r}_i^{i,ci} + \boldsymbol{I}_i^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ x } \boldsymbol{I}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i \quad (5.72)$$

Lực tổng quát tác động vào khớp i (trục $\boldsymbol{z}_{i-1}$) là hình chiếu của lực/moment trên trục $\boldsymbol{z}_{i-1}$, với khớp tịnh tiến,

$$\tau_i = \boldsymbol{f}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} = \boldsymbol{f}_i^{iT} \boldsymbol{R}_{i-1}^{iT} \boldsymbol{z}_0 \tag{5.73}$$

với khớp quay, $\tau_i = \boldsymbol{\tau}_i^T \boldsymbol{z}_{i-1} = \boldsymbol{\tau}_i^{iT} \boldsymbol{R}_{i-1}^{iT} \boldsymbol{z}_0$ (5.74)

$\boldsymbol{f}_{n+1}^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{n+1}$ là lực và moment môi trường tác động lên khâu thứ *n*

Ví dụ 5.9: Xét robot hai bậc tự do phẳng quay Ví dụ 5.4 với m=0

Các điều kiện: $\ddot{\boldsymbol{a}}_0^0 - \boldsymbol{g}_0^0 = \begin{bmatrix} 0 & g = 9.81 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{\omega}_0^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = 0$, $\boldsymbol{f}_3^3 = \boldsymbol{\tau}_3^3 = 0$

Các vector khoảng cách

$\boldsymbol{r}_1^{1,c1} = \begin{bmatrix} l_{c1} - l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{r}_1^{0,1} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,

$\boldsymbol{r}_2^{2,c2} = \begin{bmatrix} l_{c2} - l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{r}_2^{1,2} = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Ma trận quay

$$\boldsymbol{R}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính vận tốc gia tốc khâu 1

$$\boldsymbol{\omega}_1^1 = R_0^{1T}(\boldsymbol{\omega}_0^0 + \dot{\theta}_1 \boldsymbol{z}_0) = R_0^{1T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_1^1 = -\boldsymbol{R}_0^{1T} \boldsymbol{g}_0^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{r}_1^{0,1} + \boldsymbol{\omega}_1^1 \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{r}_1^{0,1})$$

$$\boldsymbol{a}_1^1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ x } \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 + l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1^{c1} = \boldsymbol{a}_1^1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{r}_1^{1.c1} + \boldsymbol{\omega}_1^1 \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{r}_1^{1.c1})$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} l_{c1} - l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ x } \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} l_{c1} - l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (l_{c1} - l_1)\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(l_{c1} - l_1)\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_{c1}\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_{c1}\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tính vận tốc gia tốc khâu 2

$$\boldsymbol{\omega}_2^2 = R_1^{2T}(\boldsymbol{\omega}_1^1 + \dot{\theta}_2 \boldsymbol{z}_0) = R_1^{2T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2^2 = \boldsymbol{R}_1^{2T}\boldsymbol{a}_1^1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 \text{ x } \boldsymbol{r}_2^{1,2} + \boldsymbol{\omega}_2^2 \text{ x } (\boldsymbol{\omega}_2^2 \text{ x } \boldsymbol{r}_2^{1,2})$$

$$\boldsymbol{a}_2^2 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + gs_{12} \\ l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2^{c2} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 - l_{c2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + gs_{12} \\ l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + l_{c2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tính lực khâu 2

$$\boldsymbol{f}_2^2 = m_2 \boldsymbol{a}_2^{c2} = m_2 \begin{bmatrix} l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 - l_{c2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + gs_{12} \\ l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + l_{c2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2^2 = -\boldsymbol{f}_2^2 \text{ x } \boldsymbol{r}_2^{1,c2} + \boldsymbol{I}_2^2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 + \boldsymbol{\omega}_2^2 \text{ x } \boldsymbol{I}_2^2 \boldsymbol{\omega}_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} * \\ * \\ I^{2zz}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_{c2}^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_{c2} c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_{c2} g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \boldsymbol{\tau}_2^{2T} \boldsymbol{R}_1^{2T} \boldsymbol{z}_0,$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_2 = (I^{2zz} + m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} c_2)\ddot{\theta}_1 + (I^{2zz} + m_2 l_{c2}^2)\ddot{\theta}_2 \\ &+ m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_{c2} g c_{12}, \end{aligned}} \tag{5.75}$$

Tính lực khâu 1

$$\boldsymbol{f}_1^1 = \boldsymbol{R}_1^1 \boldsymbol{f}_2^2 + m_1 \boldsymbol{a}_1^{c1} = \begin{bmatrix} -m_2 l_{c2} s_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - m_1 l_{c1} \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -m_2 l_{c2} c_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g s_1 \\ m_1 l_{c1} \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_{c2} c_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ -m_2 l_{c2} s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1^1 = -\boldsymbol{f}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{r}_1^{0,c1} + \boldsymbol{R}_1^2 \boldsymbol{\tau}_2^2 + \boldsymbol{R}_1^2 \boldsymbol{f}_2^2 \text{x } \boldsymbol{r}_1^{1,c1} + \boldsymbol{I}_1^1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 + \boldsymbol{\omega}_1^1 \text{ x } \boldsymbol{I}_1^1 \boldsymbol{\omega}_1^1$$

$$\boldsymbol{\tau}_1^1 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ I^{1zz}\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_{c1}^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 l_1 l_{c2} c_2 \ddot{\theta}_1 + I^{2zz}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ +m_2 l_{c2}^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ +m_1 l_{c1} g c_1 + m_2 l_1 g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = \boldsymbol{\tau}_1^{1T} \boldsymbol{R}_0^{1T} \boldsymbol{z}_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_1 = \{I^{1zz} + I^{2zz} + m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2)\}\ddot{\theta}_1 \\ &+\{I^{2zz} + m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2)\}\ddot{\theta}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2}\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &+(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g c_1 + m_2 l_{c2} g c_{12} \end{aligned}} \tag{5.76}$$

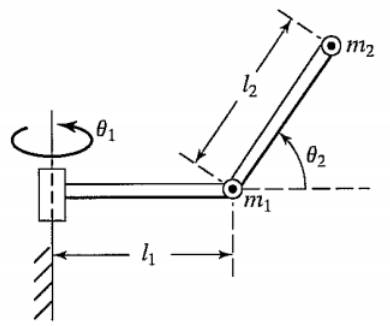
Các phương trình (5.75, 5.76) giống (5.35)

BÀI TẬP

BT1 Tính tensor quán tính khối chữ nhật với hệ trục đi qua trọng tâm và song song các cạnh **.**Tính moment quán tính với truc quay đi qua đường chéo qua trọng tâm.

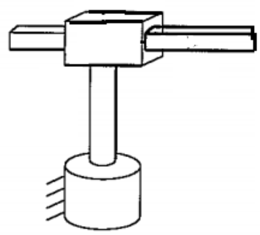
BT2 Robot descartes ba bậc tự do PPP với mỗi khâu là khối chữ nhật chiều dài 1m, tiết diện vuông cạnh 1cm, khối lượng 1kg, tính phương trình động lực học.

BT3 Tính động lực học robot Hình BT3 và viết chương trình simulink mô phỏng



Hình BT3

BT4Tính động lực học robot RP Hình BT4 và viết chương trình simulink mô phỏng



Hình BT4