Vektorbündel & Gysin-Homomorphismus

von YICHUAN SHEN

November 30, 2015

Definition. Sei X ein Schema.

(i) Ein Vektorbündel vom Rang n ist ein Morphismus $p : E \to X$, so dass eine offene Überdeckung $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ existiert mit U_α-Isomorphismen $\varphi_\alpha : f^{-1}(U_\alpha) \to \mathbf{A}^n_{U_\alpha}$, so dass die Übergangsabbildungen $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbf{A}^n_{U_\alpha \cap U_\beta} \to \mathbf{A}^n_{U_\alpha \cap U_\beta}$ lineare Automorphismen sind.

(ii) Für eine lokal freie Garbe $\mathcal{E}$ vom Rang n auf X definiert

$$\mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathbf{Spec}_X(\operatorname{Sym}^\bullet \mathcal{E}) \to X$$

ein Vektorbündel vom Rang n auf X.

(iii) Für einen Vektorbündel $E \to X$ vom Rang n definiert

$$\Gamma(E) = (U \mapsto \operatorname{Hom}_X(U, E))$$

eine lokal freie Garbe auf X vom Rang n.

Satz 1. Sei X ein Schema. Für eine lokal freie Garbe $\mathcal{E}$ auf X und einen Vektorbündel $E \to X$ gilt:

$$\Gamma(\mathbf{V}(\mathcal{E})) = \mathcal{E}^\vee$$
$$\mathbf{V}(\Gamma(E)) = E^\vee$$

Definition. Sei X ein Schema.

(i) Das *projektive Vektorbündel* $p : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ einer lokal freien Garbe $\mathcal{E}$ über X ist gegeben durch:

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj}_X(\operatorname{Sym}^\bullet \mathcal{E}) \to X$$

Es gibt einen natürlichen surjektiven Morphismus $p^*\mathcal{E} \to \mathcal{O}_\mathcal{E}(1)$.

(ii) Das *projektive Vektorbündel* $p : P(E) \to X$ eines Vektorbündels $E \to X$ über X ist gegeben durch:

$$P(E) = (E \setminus i_0(X))/\mathbb{G}_\mathrm{m} \to X$$

Satz 2. Sei X ein Schema.

(i) Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe und $E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \to X$ das zugehörige Vektorbündel. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) \cong P(E)$$

Definition. Die *Segre-Klassen* $s_i(E)$ für $i \geq 1-r$ eines Vektorbündels $E \to X$ vom Rang $r = \mathrm{rk}(E)$ auf einer Varietät X sind die Homomorphismen:

$$\begin{aligned} s_i(E) \cap - : A_k(X) &\to A_{k-i}(X), \\ \alpha &\mapsto p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{(r-1)+i} \cap p^*\alpha) \end{aligned}$$

wobei $r-1$ die relative Dimension des projektiven Vektorbündels $p : P(E) \to X$ bezeichnet. Für eine lokal freie Garbe $\mathcal{E}$ setzen wir:

$$s_i(\mathcal{E}) = s_i(\mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee))$$

Dies impliziert $s_i(E) = s_i(\Gamma(E))$.

Satz 3. Sei $\mathcal{E} = \Gamma(E)$ ein Vektorbündel auf einer Varietät X und $\alpha \in A_\bullet(X)$.

(i) $s_i(\mathcal{E}) \cap \alpha = 0$ für alle $1 - r \leq i < 0$.

(ii) $s_0(\mathcal{E}) \cap \alpha = \alpha$

(iii) Sei $\mathcal{F} = \Gamma(F)$ ein weiteres Vektorbündel auf X. Dann gilt für alle $i, j \geq 0$:

$$s_i(\mathcal{E}) \cap (s_j(\mathcal{F}) \cap \alpha) = s_j(\mathcal{F}) \cap (s_i(\mathcal{E}) \cap \alpha)$$

(iv) Sei $f : Y \to X$ ein eigentlicher Morphismus und $\beta \in A_\bullet(Y)$. Dann gilt die Projektionsformel:

$$f_*(s_i(f^*\mathcal{E}) \cap \beta) = s_i(\mathcal{E}) \cap f_*\beta$$

(v) Sei $f : Y \to X$ ein flacher Morphismus. Dann gilt:

$$f^*(s_i(\mathcal{E}) \cap \alpha) = s_i(f^*\mathcal{E}) \cap f^*\alpha$$

(vi) Ist $\mathcal{E}$ vom Rang 1, also ein Geradenbündel. Dann gilt:

$$s_1(\mathcal{E}) \cap \alpha = -c_1(\mathcal{E}) \cap \alpha$$

Proof. Projektive Vektorbündel sind stabil unter Basiswechsel. Wir haben das kartesische Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} P(f^*E) & \xrightarrow{P(f)} & P(E) \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

und $P(f)^*\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{O}_{f^*E}(1)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_*(s_i(f^*\mathcal{E}) \cap \beta) &= f_*q_*(c_1(\mathcal{O}_{f^*E}(1))^{r-1+i} \cap q^*\beta) \\ &= p_*P(f)_*(c_1(P(f)^*\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap q^*\beta) \\ &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap P(f)_*q^*\beta) \\ &\qquad \text{(Projektionsformel für } c_1) \\ &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap p^*f_*\beta) \\ &= s_i(\mathcal{E}) \cap f_*\beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^*(s_i(\mathcal{E}) \cap \alpha) &= f^* p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap p^*\alpha) \\
&= q_* P(f)^*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap p^*\alpha) \\
&= q_*(c_1(P(f)^*\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap P(f)^* p^*\alpha) \\
&= q_*(c_1(\mathcal{O}_{f^*E}(1))^{r-1+i} \cap q^* f^*\alpha) \\
&= s_i(f^*\mathcal{E}) \cap f^*\alpha
\end{aligned}
$$

Dies zeigt (iv) und (v). Für (i) und (ii) sei $\alpha = [V]$ ein Primzykel und nach der Projektionsformel für $V \hookrightarrow X$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $V = X$ ganz ist. Dann gilt:

$$
s_i(\mathcal{E}) \cap [X] \begin{cases} \in A_{\dim(X)-i}(X) = 0, & \text{wenn } i < 0 \\ = m \cdot [X], & \text{für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ wenn } i = 0 \end{cases}
$$

Um $m = 1$ zu zeigen, können wir nach (v) auf eine offene Teilmenge einschränken, so dass $P(E) = X \times_k \mathbf{P}_k^{r-1}$ das triviale Bündel ist. Wieder nach (v) für $X \to k$ können wir sogar annehmen, dass $X = \operatorname{Spec}(k)$ und $P(E) = \mathbf{P}_k^{r-1}$. Es gilt:

$$
c_1(\mathcal{O}(1)) \cap [\mathbf{P}_k^{r-1}] = [\mathbf{P}_k^{r-2}]
$$

Wendet man dies $(r-1)$-mal an, zeigt dies $m = 1$. Für (iii) betrachte das kartesische Quadrat:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, dashed, "f"] & P(E) \arrow[d, "p"] \\
P(F) \arrow[r, "q"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
s_i(\mathcal{E}) \cap (s_j(\mathcal{F}) \cap \alpha) &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap p^*(q_*(c_1(\mathcal{O}_F(1))^{s-1+j} \cap q^*\alpha)) \\
&= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap q'_*(c_1(p'^*\mathcal{O}_F(1))^{s-1+j} \cap p'^* q^*\alpha)) \\
&= f_*(c_1(q'^*\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap c_1(p'^*\mathcal{O}_F(1))^{s-1+j} \cap f^*\alpha) \\
&\quad \text{(Projektionsformel)}
\end{aligned}
$$

Die Aussage folgt, da c_1 kommutativ ist. Für (vi) sei $E \to X$ ein Geradenbündel und $\mathcal{E}$ eine invertierbare Garbe mit $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ und $P(E) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) = X$ und $\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{E} = \Gamma(E)^\vee$. Dann gilt:

$$
s_1(E) \cap \alpha = c_1(\mathcal{O}_E(1)) \cap \alpha = -c_1(\Gamma(E)) \cap \alpha = -c_1(E) \cap \alpha \qquad \square
$$

Korollar 4. Sei $E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r. Dann ist

$$
p^* : A_k(X) \to A_{k+r-1}(P(E))
$$

injektiv und besitzt den Schnitt:

$$
\alpha \mapsto p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1} \cap \alpha)
$$

Proof. Die Komposition des Schnitts mit p^* ist gerade $s_0(E) \cap - = \mathrm{id}$. $\square$

Korollar 5 (*Splitting-Prinzip*)**.** Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang r auf einer Varietät X. Dann gibt es einen flachen projektiven Morphismus $f : Y \to X$, so dass:

(i) Die induzierte Abbildung $f^* : A_\bullet(X) \to A_\bullet(Y)$ ist injektiv.

(ii) Die Garbe $f^*\mathcal{E}$ besitzt eine *vollständige Filtration*, d.h. eine Filtration von lokal freien Garben

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_r = f^*\mathcal{E}$$

so dass die Quotienten $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ vom Rang 1 sind.

Proof. Per Induktion über r. Ist $r = 1$, so ist die Aussage trivial. Sei nun $r > 1$ und $p : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ das projektive Vektorbündel. Nach dem vorherigen Korollar ist p^* injektiv. Betrachte die exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow p^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{E}(1) \longrightarrow 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $f' : Y \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ mit injektivem f'^* und eine vollständige Filtration von $f'^*\mathcal{K} \subset f'^*p^*\mathcal{E}$. Setze $f = p \circ f'$. □

Satz 6. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang r und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X. Dann gilt:

$$s_i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{r-1+i}{r-1+j} s_j(\mathcal{E}) c_1(\mathcal{L})^{i-j}$$

Definition. Das *Segre-Polynom* einer lokal freien Garbe $\mathcal{E}$ einer Varietät X ist definiert durch:

$$s_t(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(\mathcal{E}) t^i \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))[t]$$

Es hat höchstens Grad $\dim(X)$. Die *totale Segre-Klasse* ist:

$$s(\mathcal{E}) = s_t(\mathcal{E})|_{t=1} \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))$$

Bemerkung. Die Segre-Klassen $s_i(\mathcal{E})$ sind für $i > 0$ nilpotent und liegen in einem kommutativen Teilring von $\mathrm{End}(A_\bullet(X))$. Da $s_0(\mathcal{E}) = \mathrm{id}$, folgt:

$$s_t(\mathcal{E}) \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))[t]^\times$$

Definition. Sei $E \to X$ ein Vektorbündel auf X und $\mathcal{E} = \Gamma(E)$. Das *Chern-Polynom* von E bzw. $\mathcal{E}$ ist definiert durch:

$$c_t(\mathcal{E}) = s_t(\mathcal{E})^{-1} \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))[t]^\times$$

Die Koeffizienten sind die *Chern-Klassen*:

$$c_t(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\mathcal{E}) t^i$$

wobei $c_i(\mathcal{E}) \cap - : A_k(X) \to A_{k-i}(X)$. Die *totale Chern-Klasse* ist:

$$c(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E})|_{t=1} \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))$$

Bemerkung. (i) Die zwei Definitionen von c_1 stimmen überein.

(ii) Die Chern-Klassen liegen in denselben kommutativen Teilring wie die Segre-Klassen, kommutieren also mit Segre-Klassen.

(iii) Explizite Formeln für Chern-Klassen sind gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= -s_1 \\
c_2 &= s_1^2 - s_2 \\
&\vdots \\
c_n &= -s_1 c_{n-1} - s_2 c_{n-2} - \ldots - s_{n-1} c_1 - s_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lemma 7. Sei X eine Varietät und $\mathcal{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang r auf X. Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ und $Z = Z(s) \hookrightarrow X$ das geschlossene Unterschema wo s verschwindet, d.h. $Z = \{x \in X \mid \text{Bild von } s \text{ verschwindet in } \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)\}$, und $j : U = X \setminus Z \hookrightarrow X$ das offene Komplement. Dann gilt:

(i) Für alle $\alpha \in A_\bullet(X)$ gilt $c_r(\mathcal{E}) \cap \alpha = \beta$, wobei β einen Vertreter besitzt, dessen Träger in Z liegt.

(ii) $c_r(j^*\mathcal{E}) = 0$

(iii) Sei $Z = \varnothing$ und $\mathcal{E}$ besitze eine vollständige Filtrierung mit Geradenbündeln $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ als Quotienten. Dann gilt für alle $\alpha \in A_\bullet(X)$:

$$\prod_{i=1}^{r} c_1(\mathcal{L}_i) \cap \alpha = 0$$

Satz 8. Sei $\mathcal{E} = \Gamma(E)$ ein Vektorbündel auf einer Varietät X vom Rang r und sei $\alpha \in A_\bullet(X)$.

(i) $c_i(\mathcal{E}) \cap \alpha = 0$ für $i > r$.

(ii) $c_0(\mathcal{E}) \cap \alpha = \alpha$

(iii) Sei $\mathcal{F} = \Gamma(F)$ ein weiteres Vektorbündel auf X. Dann gilt für alle $i, j \geq 0$:

$$c_i(\mathcal{E}) \cap (c_j(\mathcal{F}) \cap \alpha) = c_j(\mathcal{F}) \cap (c_i(\mathcal{E}) \cap \alpha)$$

(iv) Sei $f : Y \to X$ ein eigentlicher Morphismus und $\beta \in A_\bullet(Y)$. Dann gilt die Projektionsformel:

$$f_*(c_i(f^*\mathcal{E}) \cap \beta) = c_i(\mathcal{E}) \cap f_*\beta$$

(v) Sei $f : Y \to X$ ein flacher Morphismus. Dann gilt:

$$f^*(c_i(\mathcal{E}) \cap \alpha) = c_i(f^*\mathcal{E}) \cap f^*\alpha$$

(vi) *(Whitneysche Summenformel)* Für eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben auf X gilt:

$$c_n(\mathcal{E}) = \sum_{i+j=n} c_i(\mathcal{E}')c_j(\mathcal{E}'')$$

(vii) Für einen Cartier-Divisor D auf X gilt:

$$c_1(\mathcal{O}_X(D)) \cap [X] = [D]$$

Bemerkung. Chern-Klassen sind eindeutig durch die Eigenschaften (v), (vi) und (vii) bestimmt.

Proof. (ii), (iii) und (vii) sind klar. (iv) und (v) folgen aus den Aussagen für die Segre-Klassen, da Chern-Klassen Polynome in den Segre-Klassen sind.

Für (i) sei zunächst $E \to X$ ein Geradenbündel und $\mathcal{E} = \Gamma(E)$. Dann ist $P(E) = X$ und $\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{E}^\vee$ und:

$$s_i(\mathcal{E}) \cap \alpha = c_1(\mathcal{O}_E(1))^i \cap \alpha = (-1)^i c_1(\mathcal{E})^i \cap \alpha$$

Somit gilt für die totale Segre-Klasse:

$$s(\mathcal{E}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_1(\mathcal{E})^i = \frac{1}{1 + c_1(\mathcal{E})} \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))$$

Dies zeigt $c_i(\mathcal{E}) = 0$ für $i > \mathrm{rk}(\mathcal{E}) = 1$. Für den allgemeinen Fall betrachte das Splitting-Prinzip und (v). Wir können annehmen, dass $\mathcal{E}$ eine vollständige Filtration besitzt mit Quotienten $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$. Die Whitneysche Summenformel ist äquivalent zu $c(\mathcal{E}')c(\mathcal{E}'') = c(\mathcal{E}) \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))$. Daher gilt:

$$(\star) \qquad c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c(\mathcal{L}_i) = \prod_{i=1}^{r} (1 + c_1(\mathcal{L}_i))$$

Dies zeigt (a).

Für die Summenformel können wir nach dem Splitting-Prinzip und (v) annehmen, dass $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{E}''$ vollständige Filtrationen besitzen. Diese induzieren eine vollständige Filtration auf $\mathcal{E}$ mit Geradenbündeln $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_r$ als Quotienten und zu zeigen ist nun $(\star)$.

Ist $\sigma_i \in \mathrm{End}(A_\bullet(X))$ das i-te elementar-symmetrische Polynom in $c_1(\mathcal{L}_1), \ldots, c_1(\mathcal{L}_r)$ und $\sigma_0 = 1$. Dann ist $(\star)$ äquivalent zu $c_i(\mathcal{E}) = \sigma_i$.

Sei $p : P(E) \to X$ das zugehörige projektive Vektorbündel und $\tilde{\sigma}_i$ das i-te elementar-symmetrische Polynom in $c_1(p^*\mathcal{L}_1), \ldots, c_1(p^*\mathcal{L}_r)$ und $\tilde{\sigma}_0 = 1$. Setze $\zeta = c_1(\mathcal{O}_E(1))$. Die natürliche Surjektion $p^*\mathcal{E}^\vee \to \mathcal{O}_E(1)$ liefert einen Schnitt $s \in \mathrm{H}^0(P(E), p^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_E(1))$, das nirgendwo verschwindet. Die Garbe $p^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_E(1)$ hat eine vollständige Filtrierung mit Quotienten $p^*\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_E(1)$ und der nachfolgende Satz zeigt:

$$0 = \prod_{i=1}^{r} c_1(p^*\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_E(1)) = \prod_{i=1}^{r} (\zeta + c_1(p^*\mathcal{L}_i)) = \sum_{i=0}^{r} \tilde{\sigma}_i \zeta^{r-i}$$

Für ein $\alpha \in A_\bullet(X)$ und $\nu \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= p_*\Big(\zeta^{\nu-1}\sum_{i=0}^{r}\zeta^{r-i}\tilde{\sigma}_i \cap p^*\alpha\Big) \\
&= p_*\Big(\sum_{i=0}^{r} c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+\nu-i} \cap p^*(\sigma_i \cap \alpha)\Big) \qquad \text{(Rückzug)} \\
&= (s_\nu(\mathcal{E})\sigma_0 + s_{\nu-1}(\mathcal{E})\sigma_1 + \ldots + s_{\nu-r}(\mathcal{E})\sigma_r) \cap \alpha
\end{aligned}$$

und somit folgt unter Beachtung von $s_j(\mathcal{E}) = 0$ für $j < 0$:

$$s(\mathcal{E})(\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_r) = s_0(\mathcal{E})\sigma_0 = 1$$

Dies zeigt $c_i(\mathcal{E}) = \sigma_i$. □

Beweis von Lemma. (i) folgt aus (ii) durch Rückzug:

$$j^*(c_r(\mathcal{E}) \cap \alpha) = c_r(j^*\mathcal{E}) \cap j^*\alpha = 0$$

und der Ausschneidungssequenz $A_\bullet(Z) \to A_\bullet(X) \xrightarrow{j^*} A_\bullet(U) \to 0$. (ii) folgt aus (iii) mit dem Splitting-Prinzip und der Whitney-Formel $c_r(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_1(\mathcal{L}_i)$ für den höchsten Koeffizienten.

(iii) zeigen wir per Induktion über r. Sei $s_r \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}_r)$ das Bild von s unter $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_r$, und sei $i_r : Z_r \hookrightarrow X$ das geschlossene Unterschema, wo s_r verschwindet. Dann kann $\mathcal{L}_r$ durch einen Pseudo-Divisor $(\mathcal{L}_r, Z_r, s_r)$ dargestellt werden und nach Konstruktion gilt:

$$c_1(\mathcal{L}_r) \cap \alpha = i_{r,*}((\mathcal{L}_r, Z_r, s_r) \cdot \alpha) = i_{r,*}\beta \in i_{r,*}A_\bullet(Z_r) \subset A_\bullet(X)$$

Nach der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $\mathcal{E}' = i_r^* \ker(\mathcal{E} \to \mathcal{L}_r)$, mit dem induzierten nicht-verschwindenden Schnitt $s|_{Z_r} \in \mathrm{H}^0(Z_r, \mathcal{E}') \subset \mathrm{H}^0(Z_r, i_r^*\mathcal{E})$ und Filtrationsquotienten $i_r^*\mathcal{L}_1, \ldots, i_r^*\mathcal{L}_{r-1}$, erhalten wir:

$$\prod_{i=1}^{r} c_1(\mathcal{L}_i) \cap \alpha = \prod_{i=1}^{r-1} c_1(\mathcal{L}_i) \cap (i_{r,*}\beta) = i_{r,*}\Big(\prod_{i=1}^{r-1} c_1(i_r^*\mathcal{L}_i) \cap \beta\Big) = 0$$

Der Induktionsanfang $r = 1$ folgt aus der Tatsache, dass für den trivialen Geradenbündel $c_1(\mathcal{O}_X) = 0$ gilt. □

Theorem 9. Sei $p : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r und $q : P(E) \to X$ das assoziierte projektive Vektorbündel.

(i) Der flache Rückzug $p^* : A_k(X) \to A_{k+r}(E)$ ist ein Isomorphismus.

(ii) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus:

$$\begin{aligned}
\theta_E : \bigoplus_{i=0}^{r-1} A_{k+i}(X) &\xrightarrow{\sim} A_{k+r-1}(P(E)) \\
A_{k+i}(X) \ni \alpha_i &\longmapsto c_1(\mathcal{O}_E(1))^i \cap q^*\alpha_i
\end{aligned}$$

Proof. Die Surjektivität von p^* wurde im zweiten Vortrag schon gezeigt. Um zu sehen, dass θ_E surjektiv ist, können wir per noethersche Induktion auf den Fall reduzieren, in dem $E = X \times \mathbf{A}^r$ trivial ist. Per Induktion über r, genügt es zu zeigen, dass $\theta_{E\oplus 1}$ surjektiv ist, wenn θ_E surjektiv ist. Der Fall $r = 1$ ist trivial.

Die Inklusion $E \hookrightarrow E \oplus 1$ induziert eine offene Einbettung $j : E \hookrightarrow P(E \oplus 1)$ mit Komplement $i : P(E) \hookrightarrow P(E \oplus 1)$ mit $\mathcal{O}_E(1) = i^*\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1)$. Sei $q' : P(E \oplus 1) \to X$ die Projektion. Es gilt:

$$j^* c_1(\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1)) = 0$$

da $\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1)$ die Idealgarbe zu $P(E) \hookrightarrow P(E \oplus 1)$ und daher trivial auf E ist. Außerdem gilt:

$$i_* q^* \alpha = c_1(\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1)) \cap q'^* \alpha$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} i_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^\nu \cap q^*\alpha) &= i_*(c_1(i^*\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1))^\nu \cap q^*\alpha) \\ &= c_1(\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1))^\nu \cap i_* q^*\alpha \\ &= c_1(\mathcal{O}_{E\oplus 1}(1))^{\nu+1} \cap q'^*\alpha \end{aligned}$$

Es kommutiert daher:

$$\begin{tikzcd} & A_{k+r}(P(E)) \arrow[r, "i_*"] & A_{k+r}(P(E\oplus 1)) \arrow[r, "j^*"] & A_{k+r}(E) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{r} A_{k+i}(X) \arrow[r] \arrow[u, "{\theta_E[1]}"] & \bigoplus_{i=0}^{r} A_{k+i}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}_0"'] \arrow[u, "\theta_{E\oplus 1}"] & A_k(X) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"'] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile wegen der Ausschneidungssequenz exakt ist. Nach dem Fünfer-Lemma folgt (i) aus (ii). Per Diagrammjagd sehen wir die Surjektivität von $\theta_E[1]$.

Für die Injektivität sei $\theta_E(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}) = 0$ und ν der größte Index mit $\alpha_\nu \neq 0$. Dann gilt:

$$0 = q_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1-\nu} \cap \theta_E(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})) = \sum_{i=0}^{\nu} s_{i-\nu}(\mathcal{E}) \cap \alpha_i = \alpha_\nu$$

ein Widerspruch. □

Definition. Für ein Vektorbündel $p : E \to X$ vom Rang r mit Nullschnitt $s : X \to E$ definieren wir den *Gysin-Homomorphismus* entlang s als:

$$s^* = (p^*)^{-1} : A_{d+r}(E) \to A_d(X)$$