

Algebraische Geometrie

Vorlesung von PROF. DR. KAY WINGBERG



gesetzt von
YICHUAN SHEN

2014/2015
21. Juni 2015

Lizenz & Quellcode. Dieses Dokument steht unter einer Creative Commons Attribution Lizenz. Weitere Informationen findet man auf <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/>. Der Quellcode ist auf <http://github.com/yishn/Uni> zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
1 Varietäten	4
1.1 Affine Varietäten	4
1.2 Projektive Varietäten	5
1.3 Morphismen	6
2 Schemata	8
2.1 Garben	8
2.2 Schemata	15
2.3 Erste Eigenschaften von Schemata	28
2.4 Separierte & eigentliche Morphismen	42
2.5 Modulgarben	53
2.6 Divisoren	69
2.7 Projektive Morphismen	80
2.8 Differentiale	87
3 Kohomologie	95
3.1 Kohomologie von Garben	95
3.2 Der Čech-Komplex	104
3.3 Kohomologie des projektiven Raumes	105
3.4 Ext-Gruppen	109
3.5 Die Serre-Dualität	112
3.6 Der Satz von Riemann-Roch für Kurven	117
Index	118

1 Varietäten

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1.1 Affine Varietäten

Definition.

- (i) Die Menge aller n -Tupeln über k

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}_k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k\}$$

heißt *affiner n -dimensionaler Raum* über k . Ein Element $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$ heißt *Punkt* und die a_i heißen *Koordinaten* von P .

- (ii) Der Polynomring über k in n Variablen bezeichnen wir mit $A = k[X_1, \dots, X_n]$. Für $T \subset A$ definieren wir die *Nullstellenmenge* von T wie folgt:

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{A}^n \mid \forall f \in T: f(P) = 0\}$$

Es gilt $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$, wobei \mathfrak{a} das von T erzeugte Ideal in A ist.

- (iii) Eine Teilmenge $Y \subset \mathbf{A}^n$ der Form $Y = Z(T)$ für ein $T \subset A$ heißt *affine algebraische Menge*. Für algebraische Mengen $Y_i = Z(\mathfrak{a}_i)$ mit Ideale $\mathfrak{a}_i \subset A$, $i \in I$ gilt:

$$Y_1 \cup Y_2 = Z(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2), \quad \bigcap_{i \in I} Y_i = Z\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Ferner gilt $\mathbf{A}^n = Z(0)$ und $\emptyset = Z(1)$. Wir statten \mathbf{A}^n mit der sogenannten *Zariski-Topologie* aus, in dem wir eine Menge $U \subset \mathbf{A}^n$ genau dann offen nennen, wenn $\mathbf{A}^n \setminus U$ eine algebraische Menge ist.

- (iv) Eine *affine Varietät* V ist eine *irreduzible* abgeschlossene Menge in \mathbf{A}^n , d.h. aus $V = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Mengen $V_1, V_2 \subset \mathbf{A}^n$ folgt $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$.

Eine offene Teilmenge einer affinen Varietät bzgl. der induzierten Topologie nennt man *quasi-affine Varietät*.

- (v) Sei $Y \subset \mathbf{A}^n$ eine algebraische Menge. Dann definieren wir das Ideal:

$$I(Y) = \{f \in A \mid \forall P \in Y: f(P) = 0\}$$

Der *Koordinatenring* von Y ist definiert als $A(Y) = A/I(Y)$.

Definition. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Das *Radikal* von \mathfrak{a} ist definiert als:

$$\text{Rad}(\mathfrak{a}) = \{f \in A \mid \exists r > 0: f^r \in \mathfrak{a}\}$$

Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ heißt *Radikalideal*, wenn $\mathfrak{a} = \text{Rad}(\mathfrak{a})$ gilt.

Satz. Es gibt eine inklusionsumkehrende Bijektion:

$$\{\text{Algebraische Mengen in } \mathbf{A}^n\} \rightarrow \{\text{Radikalideale in } k[X_1, \dots, X_n]\}, \quad Y \mapsto I(Y)$$

mit der Umkehrabbildung $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$. Eine algebraische Menge Y ist genau dann irreduzibel, wenn $I(Y) \subset A$ ein Primideal ist.

1.2 Projektive Varietäten

Definition.

- (i) Zwei Punkte $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$ heißen äquivalent, wenn ein $\lambda \in k^\times$ existiert, so dass $a_i = \lambda b_i$ für alle i gilt. Die Äquivalenzklasse von (a_0, \dots, a_n) wird mit $(a_0 : \dots : a_n)$ bezeichnet. Der *projektiver n -dimensionaler Raum* über k wird definiert als:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}_k^n = \{(a_0 : \dots : a_n) \mid a_i \in k \text{ nicht alle } 0\}$$

Ein Element $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ heißt *Punkt* und die a_i heißen *homogene Koordinaten* von P .

- (ii) Der Polynomring über k in $n+1$ Variablen $S = k[X_0, \dots, X_n]$ wird mit der folgenden Zerlegung zu einem graduierten Ring:

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d, \quad S_d = \left\{ \sum a_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} \mid a_{i_0, \dots, i_n} \in k, \sum_{j=0}^n i_j = d \right\}$$

Die Elemente in S_d heißen *homogene Elemente vom Grad d* . Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset S$ heißt *homogenes Ideal*, wenn $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (S_d \cap \mathfrak{a})$ gilt.

- (iii) Sei $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal. Dann setzen wir:

$$Z(\mathfrak{a}) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid \forall f \in \mathfrak{a} \text{ homogen: } f(P) = 0\}$$

Diese ist wohldefiniert, da $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$ für $f \in S_d$. Eine Menge $Y \subset \mathbf{P}^n$ heißt *projektive algebraische Menge*, wenn $Y = Z(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset S$ gilt.

Analog wie im affinen Fall, können wir auch \mathbf{P}^n mit der *Zariski-Topologie* ausstatten, d.h. eine Menge $U \subset \mathbf{P}^n$ ist genau dann offen, wenn $\mathbf{P}^n \setminus U$ eine projektive algebraische Menge ist.

- (iv) Eine *projektive Varietät* V ist eine irreduzible abgeschlossene Menge in \mathbf{P}^n . Eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät bzgl. der induzierten Topologie nennt man *quasi-projektive Varietät*.
- (v) Sei $Y \subset \mathbf{P}^n$ eine algebraische Menge. Dann setzen wir $I(Y)$ als das Ideal in S , das von der folgenden Menge erzeugt wird:

$$\{f \in S \text{ homogen} \mid \forall P \in Y: f(P) = 0\}$$

$I(Y)$ ist ein homogenes Ideal in S . Der *homogene Koordinatenring* von Y ist definiert als $S(Y) = S/I(Y)$.

Satz. Wir haben eine inklusionsumkehrende Bijektion:

$$\{\text{Algebraische Mengen in } \mathbf{P}^n\} \rightarrow \{\text{Radikalideale in } k[X_0, \dots, X_n]\}, \quad Y \mapsto I(Y)$$

mit der Umkehrabbildung $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$.

Satz. Sei Y eine (quasi-)projektive Varietät. Dann wird Y von offenen Mengen der Form $Y \cap U_i$, $i = 0, \dots, n$ überdeckt mit:

$$U_i = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{P}^n \mid a_i \neq 0\}$$

Die Abbildungen $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbf{A}^n$, $(a_0 : \dots : a_n) \mapsto (\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\widehat{a_i}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$ sind wohldefiniert und Homöomorphismen, d.h. die $Y \cap U_i$ sind (quasi-)affine Varietäten.

1.3 Morphismen

Definition.

- (i) Sei $Y \subset \mathbf{A}^n$ eine quasi-affine Varietät. Eine Abbildung $f : Y \rightarrow k$ heißt *reguläre Funktion* in $P \in Y$, wenn eine offene Umgebung $U \subset Y$ mit $P \in U$ existiert, so dass $f = \frac{g}{h}$ auf U für gewisse $g, h \in A$ gilt.

Sei $Y \subset \mathbf{P}^n$ eine quasi-projektive Varietät. Eine Abbildung $f : Y \rightarrow k$ heißt *reguläre Funktion* in $P \in Y$, wenn eine offene Umgebung $U \subset Y$ mit $P \in U$ existiert, so dass $f = \frac{g}{h}$ auf U für gewisse homogene Polynome $g, h \in S$ vom gleichen Grad.

Identifizieren wir $k \cong \mathbf{A}^1$ so ist eine reguläre Funktion notwendigerweise stetig.

- (ii) Eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ zwischen zwei (quasi-)projektiven Varietäten heißt *Morphismus*, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ und reguläre Funktion $f : V \rightarrow k$ auch $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow k$ regulär ist.

Damit erhält man die Kategorie $\mathbf{Var}(k)$ aller Varietäten auf k .

Definition. Sei Y eine Varietät und $P \in Y$ ein Punkt.

- (i) Wir bezeichnen den Ring aller regulären Funktionen auf Y mit $\mathcal{O}(Y)$.
- (ii) $\mathcal{O}_{P,Y} = \{\langle U, f \rangle \mid P \in U \subset_o Y, f \text{ ist auf } U \text{ regulär}\}$ heißt der Ring der *Keime* regulärer Funktionen auf Y in P . Wir identifizieren zwei Keime $\langle U, f \rangle = \langle V, g \rangle$, wenn $f = g$ auf $U \cap V$ gilt.
 $\mathcal{O}_{P,Y}$ ist ein lokaler Ring, dessen Maximalideal wir mit \mathfrak{m}_P bezeichnen.
- (iii) $K(Y) = \{\langle U, f \rangle \mid \emptyset \neq U \subset_o Y, f \text{ ist auf } U \text{ regulär}\}$ heißt der *Funktionenkörper* von Y . Die Elemente von $K(Y)$ heißen *rationale Funktionen* auf Y .

Es gilt $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}_{P,Y} \subset K(Y)$.

Theorem. Sei $Y \subset \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät. Dann gilt:

- (i) $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$
- (ii) Die Abbildung $Y \rightarrow \{\text{Maximale Ideale in } A(Y)\}, P \mapsto \mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{P,Y}$ ist eine Bijektion.
- (iii) $\mathcal{O}_{P,Y} \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ und $\dim \mathcal{O}_{P,Y} = \dim Y$.
- (iv) $K(Y) \cong \text{Quot}(A(Y))$

Theorem. Sei $Y \subset \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät. Dann gilt:

- (i) $\mathcal{O}(Y) = k$
- (ii) $\mathcal{O}_{P,Y} \cong S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$
- (iii) $K(Y) \cong S(Y)_{((0))}$

Theorem. Sei X eine beliebige Varietät und Y eine affine Varietät. Dann haben wir eine Bijektion:

$$\text{Mor}_{\mathbf{Var}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X)), f \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \circ f)$$

Ist X ebenfalls affin, so gilt $X \cong Y$, genau dann wenn $A(X) \cong A(Y)$. Der Funktor **affine Var** $(k) \rightarrow \mathbf{nullteilerfreie } k\text{-Alg}$, $X \mapsto A(X)$ ist eine pfeilumkehrende Äquivalenz von Kategorien.

2 Schemata

2.1 Garben

Definition 1.1. Sei X ein topologischer Raum.

- (i) Die Menge aller offenen Teilmengen in X bilden zusammen mit den natürlichen Inklusionen eine Kategorie $\mathbf{Top}(X)$.
- (ii) Eine *Prägarbe* F abelscher Gruppen ist nichts anderes als ein kontravarianter Funktor $F : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ mit $F(\emptyset) = 0$.

Bemerkung.

- 1. Eine Prägarbe besteht also aus abelschen Gruppen $F(U)$, $U \subset_o X$ und Homomorphismen abelscher Gruppen $\text{res}_V^U : F(U) \rightarrow F(V)$ für alle offenen $V \subset U$, so dass $\text{res}_U^U = \text{id}_{F(U)}$. Für offene Mengen $W \subset V \subset U$ gelte ferner $\text{res}_W^U = \text{res}_W^V \circ \text{res}_V^U$.
- 2. Ebenso können Prägarben in eine beliebige Kategorie gebildet werden, z.B. **Ringe** und **Mengen**.
- 3. Die Elemente von $F(U)$ heißen *Schnitte* von F über U . Manchmal schreiben wir auch $\Gamma(U, F) = F(U)$. Die res_V^U heißen *Restriktionsabbildungen*. Wir schreiben auch $\text{res}_V^U(s) = s|_V$.

Definition 1.2. Eine Prägarbe F auf einem topologischen Raum X heißt *Garbe*, falls die folgenden Diagramme exakt sind:

$$0 \longrightarrow F(U) \xrightarrow{\text{res}} \prod_i F(U_i) \xrightarrow{\text{res}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

für alle $U \subset_o X$ und jede offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$, d.h:

- (i) $s \mapsto (\text{res}_{U_i}^U(s))_i$ ist injektiv, d.h. aus $s|_{U_i} = 0$ für alle i folgt $s = 0$.
- (ii) Sei $s_i \in F(U_i)$ für alle i gegeben, so dass $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j . Dann gibt es ein $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für alle i .

Definition 1.3.

- (i) Ein *Morphismus* $\varphi : F \rightarrow G$ von Prägarben auf X ist ein Morphismus kontravarianter Funktoren, d.h. eine Kollektion von Morphismen $(\varphi(U))_{U \subset_o X}$, so dass für alle offenen Mengen $V \subset U$ folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & G(U) \\ \text{res}_V^U \downarrow & & \downarrow \text{res}_V^U \\ F(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & G(V) \end{array}$$

- (ii) Ein *Morphismus* von Garben ist ein Morphismus von Prägarben. Die (Prä-)Garben bilden eine Kategorie.

Beispiel 1.4.

1. Sei X eine Varietät über k . Betrachte den Funktor $\mathcal{O} : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathbf{komm Ringe}$ mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen $\text{res}_V^U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ ist offensichtlich eine Prägarbe von Ringen. Da ferner reguläre Funktionen 0 ist, wenn sie lokal 0 ist, und eine lokal reguläre Funktion auch global regulär ist, ist \mathcal{O} auch eine Garbe.
2. Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Die *konstante Garbe* \mathcal{A} auf X ist folgendermaßen definiert: Wir statten A mit der diskreten Topologie aus. Für jedes $U \subset_o X$ setze:

$$\mathcal{A}(U) = \{f : U \rightarrow A \mid f \text{ stetig}\}$$

Ist U zusammenhängend, so gilt $\mathcal{A}(U) \xrightarrow{\sim} A$, $f \mapsto f(x)$, wobei $x \in U$ beliebig.

Definition 1.5. Sei F eine Prägarbe auf X und $P \in X$. Der *Halm* F_P von F in P ist definiert als:

$$F_P = \varinjlim_{\substack{U \subset_o X \\ P \in U}} F(U) = \coprod_{\substack{U \subset_o X \\ P \in U}} F(U) / \sim$$

wobei zwei Elemente $s \in F(U)$, $t \in F(V)$ genau dann äquivalent $s \sim t$ sind, wenn es ein $\emptyset \neq W \subset_o X$ mit $W \subset U \cap V$ existiert, so dass $s|_W = t|_W$ gilt. Die Elemente eines Halms heißen *Keime* der Schnitte von F in P .

Beispiel. Sei X eine Varietät, $P \in X$ ein Punkt und \mathcal{O} die Garbe der regulären Funktionen. Dann ist der Halm in P gerade der lokale Ring $\mathcal{O}_{P,X}$.

Bemerkung. Ein Morphismus $\phi : F \rightarrow G$ von Prägarben induziert für alle $P \in X$ ein Gruppenhomomorphismus $\phi_P : F_P \rightarrow G_P$.

Satz 1.6. Sei $\phi : F \rightarrow G$ ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum X . Dann gilt:

$$\phi : F \rightarrow G \text{ ist Isomorphismus} \iff \phi_P : F_P \rightarrow G_P \text{ ist Isomorphismus f\"ur alle } P \in X$$

Für Prägarben gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht.

Beweis. Ist ϕ ein Isomorphismus, so auch alle ϕ_P , $P \in X$. Sei umgekehrt ϕ_P Isomorphismen für alle $P \in X$. Es genügt zu zeigen, dass $\phi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ für alle $U \subset_o X$ ein Isomorphismus ist. Sei $U \subset_o X$ und setze $\varphi = \phi(U)$.

- *Injektivität von φ :* Sei $s \in F(U)$ mit $0 = \varphi(s) \in G(U)$. Dann gilt für das Bild $\varphi(s)_P$ von $\varphi(s)$ im Halm $0 = \varphi(s)_P \in F_P$. Wegen $\varphi(s)_P = \phi_P(s_P)$ für das Bild $s_P \in F_P$ von s , folgt wegen der Injektivität von ϕ_P nun $s_P = 0$ für alle $P \in U$.

Per Definition gibt es für jedes $P \in U$ eine offene Umgebung $W_P \subset_o X$ von P mit $W_P \subset U$, so dass $s|_{W_P} = 0$ gilt. Dann bilden die W_P eine offene Überdeckung von $U = \bigcup_{P \in U} W_P$. Da F eine Garbe ist, folgt $s = 0$.

Wir haben gezeigt, dass $\phi(U)$ für alle $U \subset_o X$ injektiv ist, genau dann wenn ϕ_P für alle $P \in X$ injektiv ist.

- *Surjektivität von φ :* Sei $t \in G(U)$ ein Schnitt und $t_P \in G_P$ sein Keim in P . Da ϕ_P surjektiv ist, existiert ein $s_P \in F_P$ mit $\phi_P(s_P) = t_P$. Sei s_P durch den Schnitt $s(P) \in F(V_P)$ mit $V_P \subset_o U$, $P \in V_P$ repräsentiert. Dann sind $\phi(V_P)(s(P))$ und $t|_{V_P}$ zwei Elemente aus $G(V_P)$ mit demselben Keim. Durch das Verkleinern von V_P folgt $\phi(V_P)(s(P)) = t|_{V_P}$ in $G(V_P)$.

Dann bilden die V_P eine offene Überdeckung von $U = \bigcup_{P \in U} V_P$. Es gilt außerdem $s(P)|_{V_P \cap V_Q} = s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$ für alle $P, Q \in U$, denn beide Elemente sind Schnitte aus $F(V_P \cap V_Q)$, die durch $\phi(V_P \cap V_Q)$ auf $t|_{V_P \cap V_Q}$ abgebildet werden, und $\phi(V_P \cap V_Q)$ aus dem ersten Teil injektiv ist.

Da F eine Garbe ist, existiert ein $s \in F(U)$ mit $s|_{V_P} = s(P)$ für alle $P \in U$. Schließlich gilt $\varphi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$ für alle $P \in U$, d.h. $(\varphi(s) - t)|_{V_P} = 0$. Da G eine Garbe ist, folgt $\varphi(s) = t$. \square

Definition 1.7. Sei $\varphi : F \rightarrow G$ ein Morphismus von Prägarben. Die Prägarben

$$U \mapsto \ker \varphi(U), \quad U \mapsto \operatorname{coker} \varphi(U), \quad U \mapsto \operatorname{im} \varphi(U)$$

heißen *Prägarbenkern*, *-kokern* und *-bild* von φ . Sind F und G Garben, so sind Kokern und Bild nicht notwendig Garben.

Satz & Definition 1.8. Sei F eine Prägarbe. Dann existiert eine Garbe F^+ und ein Morphismus von Prägarben $\theta : F \rightarrow F^+$ mit folgender Universaleigenschaft:

Sei G eine Garbe und $\phi : F \rightarrow G$ ein Morphismus von Prägarben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\psi : F^+ \rightarrow G$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & F^+ \\ \phi \downarrow & \swarrow \psi & \\ G & & \end{array}$$

F^+ ist somit eindeutig bestimmt und heißt die zu F assoziierte Garbe.

Beweis. Für jede offene Menge $U \subset X$ setze $F^+(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \coprod_{P \in U} F_P$, so dass:

- (i) Für alle $P \in U$ gilt $s(P) \in F_P$.
- (ii) Für alle $P \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von P mit $V \subset U$ und ein Element $t \in F(V)$, so dass für alle $Q \in V$ der Keim t_Q von t in Q gleich $s(Q)$ ist.

Somit wird F^+ zu einer Garbe bzgl. der natürlichen Restriktionsabbildungen und besitzt die verlangte Universaleigenschaft. Für jeden Punkt $P \in X$ gilt $F_P^+ = F_P$. Ist F eine Garbe, so ist $F^+ \cong F$ via θ . \square

Definition 1.9.

- (i) Eine *Untergarbe* von F ist eine Garbe F' derart, dass:
 - (a) $F'(U) \subset F(U)$ ist eine Untergruppe für alle $U \subset X$.
 - (b) Für offene Mengen $V \subset U$ gilt $\text{res}'_V U = \text{res}_V U|_{F'(U)}$.

Insbesondere ist $F'_P \subset F_P$ eine Untergruppe.

- (ii) Der *Kern* von φ ist die Prägarbe $\ker(\varphi)$, die bereits eine Garbe ist. *Grund:*

Sei $U \subset X$ und $U = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung. Sei $s \in \ker \varphi(U)$ mit $s|_{U_i} = 0$ für alle i . Da F eine Garbe ist und $s \in F(U)$, folgt $s = 0$. Sei nun $s_i \in \ker \varphi(U_i)$ für alle i gegeben mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j . Da F eine Garbe ist, existiert ein $s \in F(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für alle i . Zu zeigen ist noch $s \in \ker \varphi(U)$. Es gilt für alle i :

$$0 = \varphi(U_i)(s_i) = \varphi(U_i)(s|_{U_i}) = \varphi(U)(s)|_{U_i} \in G(U_i)$$

Da nun auch G eine Garbe ist, folgt $\varphi(U)(s) = 0$.

(iii) φ heißt *injektiv*, falls $\ker(\varphi) = 0$.

Mit anderen Worten: φ ist genau dann injektiv, wenn $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ für alle $U \subset_o X$ injektiv ist.

(iv) Das *Bild* $\text{im}(\varphi)$ von φ ist die assoziierte Garbe des Prägarbenbilds von φ .

Nach der Universaleigenschaft gibt es einen natürlichen Morphismus $\psi : \text{im}(\varphi) \rightarrow G$. Dieser ist injektiv, da $(\text{im}(\varphi))_P : \text{im}(\varphi_P) \rightarrow G_P$ für alle $P \in X$ injektiv ist.

(v) φ heißt *surjektiv*, wenn $\text{im}(\varphi) = G$.

(vi) Eine Garbensequenz

$$\cdots \longrightarrow F^i \xrightarrow{\varphi^i} F^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} F^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, falls $\ker(\varphi^{i+1}) = \text{im}(\varphi^i)$ für alle i gilt.

(vii) Sei F' eine Untergarbe von F . Die *Quotientengarbe* F/F' ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe $U \mapsto F(U)/F'(U)$. Offensichtlich gilt $(F/F')_P = F_P/F'_P$ für alle $P \in X$.

(viii) Der *Kokern* von φ ist die assoziierte Garbe zum Prägarbenkokern von φ .

Regeln 1.10. Seien F, G Garben auf X und $\varphi : F \rightarrow G$ ein Morphismus von Garben.

(i) φ ist genau dann injektiv, wenn $0 \rightarrow F \rightarrow G$ exakt ist und genau dann surjektiv, wenn $F \rightarrow G \rightarrow 0$ exakt ist.

(ii) Eine Garbensequenz $\cdots \rightarrow F^i \rightarrow F^{i+1} \rightarrow F^{i+2} \rightarrow \cdots$ ist genau dann exakt, wenn ihre entsprechenden Halmsequenzen in allen Punkten $P \in X$ exakt ist. *Grund:*

$$(\text{im } \varphi^i)_P = \text{im}(\varphi_P^i), \quad (\ker \varphi^{i+1})_P = \ker(\varphi_P^{i+1})$$

Insbesondere ist ein Garbenmorphismus genau dann injektiv bzw. surjektiv falls alle Halmabbildungen injektiv bzw. surjektiv sind.

(iii) φ ist genau dann surjektiv, wenn für alle $U \subset_o X$ und $s \in G(U)$ eine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit Schnitten $t_i \in F(U_i)$, $i \in I$ existieren, so dass $\varphi(t_i) = s|_{U_i}$.

Ist φ surjektiv, so muss im Allgemeinen $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$ nicht surjektiv sein.

(iv) Sei $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$ eine exakte Garbensequenz und $U \subset_o X$. Dann ist auch die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(U, F') \rightarrow \Gamma(U, F) \rightarrow \Gamma(U, F'')$$

Der Funktor $\Gamma(U, -)$ ist linksexakt, aber nicht exakt.

(v) Sei $\varphi : F \rightarrow G$ ein injektiver Morphismus von Prägarben. Dann ist der induzierte Morphismus $\varphi^+ : F^+ \rightarrow G^+$ der assoziierten Garben auch injektiv. Der Funktor $-^+$ ist sogar exakt.

Regeln 1.11.

- (i) Sei F' eine Untergarbe von F . Dann ist die Sequenz $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F/F' \rightarrow 0$ exakt, da sie halmweise exakt ist.
- (ii) Sei $\varphi : F \rightarrow G$ ein Garbenmorphismus. Dann gilt:

$$\operatorname{im}(\varphi) \cong F / \ker(\varphi), \quad \operatorname{coker}(\varphi) \cong G / \operatorname{im}(\varphi)$$

d.h. die Folgen $0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow F \rightarrow \operatorname{im}(\varphi) \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow \operatorname{im}(\varphi) \rightarrow G \rightarrow \operatorname{coker}(\varphi) \rightarrow 0$ sind exakt.

Definition 1.12.

- (i) Seien F und G Garben auf X . Die *Summe* $F \oplus G$ von F und G ist die Garbe $U \mapsto F(U) \oplus G(U)$.
- (ii) Sei $(F_i, \varphi_{i,j})$ ein direktes System von Garben auf X . Der *direkte Limes* $(\varinjlim F_i, \varphi_i)$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe $U \mapsto \varinjlim F_i(U)$.

Der direkte Limes besitzt die übliche Universaleigenschaft: Sei G eine Garbe und $\psi_i : F_i \rightarrow G$ Morphismen mit $\varphi_k \varphi_{ik} = \psi_i$ für alle $i \leq k$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\psi : \varinjlim F_i \rightarrow G$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varinjlim F_i \\ \psi_i \downarrow & \swarrow \psi & \\ G & & \end{array}$$

- (iii) Ebenso wird der *projektive Limes* definiert, wobei alle Pfeile umgedreht werden. Es ist außerdem $U \mapsto \varprojlim F_i(U)$ bereits eine Garbe.
- (iv) Sei F eine Garbe auf X und $s \in F(U)$ ein Schnitt über $U \subset_o X$. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(s) = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$$

wobei $s_P \in F_P$ der Keim von s in P bezeichnet, der *Support* von s . $\operatorname{supp}(s)$ ist abgeschlossen in U .

$$\operatorname{supp}(F) = \{P \in X \mid F_P \neq 0\}$$

heißt *Support* von F . Dieser ist nicht notwendigerweise abgeschlossen.

- (v) Seien F, G Garben abelscher Gruppen auf X . Für ein $U \subset_o X$ sei $F|_U$ die Einschränkung von F auf U , d.h. $F|_U(V) = F(V)$ für alle $V \subset_o U$. Dann ist die Menge $\operatorname{Hom}(F|_U, G|_U)$ der Morphismen von $F|_U$ nach $G|_U$ eine abelsche Gruppe.

$$U \mapsto \operatorname{Hom}(F|_U, G|_U)$$

definiert eine Garbe und wird die *Hom-Garbe* genannt. Sie wird mit $\mathcal{H}\operatorname{om}(F, G)$ bezeichnet.

Definition 1.13. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, F eine Garbe auf X und G eine Garbe auf Y .

- (i) Die *direkte Bildgarbe* f_*F von F auf Y ist die Garbe

$$V \mapsto (f_*F)(V) = F(f^{-1}(V))$$

- (ii) Die *Urbildgarbe* $f^{-1}G$ von G auf X ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto (f^{-1}G)(U) = \varinjlim_{\substack{V \subset_o Y \\ f(U) \subset V}} G(V)$$

Regeln 1.14. Seien X, Y topologische Räume.

- (i) Sei $Z \subset X$ ein Teilraum mit der Inklusionsabbildung $i : Z \hookrightarrow X$ und F eine Garbe auf X . Dann gilt:

$$i^{-1}F = F|_Z$$

Offensichtlich gilt $(F|_Z)_P = F_P$ für $P \in Z$.

- (ii) Seien $\mathbf{Ab}(X)$ und $\mathbf{Ab}(Y)$ die Kategorien der Garben auf X bzw. Y . Dann sind $f_* : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}(Y)$ und $f^{-1} : \mathbf{Ab}(Y) \rightarrow \mathbf{Ab}(X)$ Funktoren.

- (iii) Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann sind die *Adjunktionsabbildungen*

$$\mathrm{ad} : f^{-1}f_*F \rightarrow F, \quad \mathrm{ad} : G \rightarrow f_*f^{-1}G$$

für Garben F auf X bzw. G auf Y Garbenmorphisimen und wie folgt definiert:

- Sei $U \subset_o X$ und $s \in (f^{-1}f_*F)(U)$ ein Schnitt, das durch $s' \in (f_*F)(V)$ mit $f(U) \subset V \subset_o Y$ repräsentiert wird, d.h. $s' \in F(f^{-1}(V))$ mit $U \subset f^{-1}(V)$. Dann setzen wir:

$$(f^{-1}f_*F)(U) \rightarrow F(U), \quad s \mapsto \mathrm{res}_U^{f^{-1}(V)} s' \in F(U)$$

- Sei $V \subset_o Y$. Es besteht $(f_*f^{-1}G)(V) = (f^{-1}G)(f^{-1}(V))$ aus Abbildungen der Form $f^{-1}(V) \rightarrow \coprod_{P \in f^{-1}(V)} (f^{-1}G)_P$. Setze nun:

$$G(V) \rightarrow (f_*f^{-1}G)(V), \quad s \mapsto (s \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \coprod f^{-1}(G)_P, \quad P \mapsto s_{f(P)})$$

Es existiert eine natürliche Bijektion:

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}G, F) \cong \mathrm{Hom}_Y(G, f_*F)$$

in dem wir ein $\varphi : f^{-1}(G) \rightarrow F$ auf $\psi : G \xrightarrow{\mathrm{ad}} f_*f^{-1}G \xrightarrow{f_*(\varphi)} f_*F$ schicken und ein $\psi : G \rightarrow f_*F$ auf $\varphi : f^{-1}G \xrightarrow{f^{-1}(\psi)} f^{-1}f_*F \xrightarrow{\mathrm{ad}} F$ schicken. Somit ist f^{-1} linksadjungiert zu f_* .

Definition 1.15. Sei X ein topologischer Raum mit $P \in X$ und A eine abelsche Gruppe. Sei \mathcal{A} die konstante Garbe auf $\overline{\{P\}}$ und $i : \overline{\{P\}} \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Dann heißt die Garbe $i_*\mathcal{A}$ *Wolkenkratzergarbe*. Es gilt:

$$(i_*\mathcal{A})(U) = \begin{cases} A, & \text{wenn } P \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (i_*\mathcal{A})_Q = \begin{cases} A, & \text{wenn } Q \in \overline{\{P\}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 1.16. Sei X ein topologischer Raum, $Z \subset X$ abgeschlossen und $U = X \setminus Z$. Seien $j : U \hookrightarrow X$, $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildungen. Ist F eine Garbe auf Z , so gilt:

$$(i_*F)_P = \begin{cases} F_P, & \text{wenn } P \in Z \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei F eine Garbe auf U und $j_!(F)$ die Garbe auf X , die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} F(V), & \text{wenn } V \subset U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziiert ist. Sie heißt die *außerhalb U durch Null fortgesetzte Garbe* von F . Es gilt:

$$(j_!F)_P = \begin{cases} F_P, & \text{wenn } P \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei F eine Garbe auf X . Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow j_!(F|_U) \longrightarrow F \longrightarrow i_*(F|_Z) \longrightarrow 0$$

2.2 Schemata

Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und $\text{Spec}(A)$ die Menge aller Primideale von A . Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, setzen wir:

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

Lemma 2.1.

- (i) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale von A , so gilt $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
- (ii) Sind $\mathfrak{a}_i \subset A$, $i \in I$ Ideale, so gilt $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.
- (iii) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideale, gilt: $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}) \iff \text{Rad}(\mathfrak{a}) \supset \text{Rad}(\mathfrak{b})$

Wegen $V(A) = \emptyset$ und $V(0) = \text{Spec}(A)$ sehen wir, dass wir Teilmengen der Form $V(\mathfrak{a})$ zu abgeschlossene Mengen in $\text{Spec}(A)$ erklären können. Somit erhalten wir die *Zariski-Topologie* auf $\text{Spec}(A)$.

Setzen wir $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$ für $f \in A$, so bilden diese offene Mengen eine Basis der Topologie auf Spec .

Definition 2.2. Wir definieren eine Ringgarbe \mathcal{O} auf $\text{Spec}(A)$ wie folgt: Sei $U \subset_o \text{Spec}(A)$. Setze $\mathcal{O}(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$, so dass:

- (i) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$.
- (ii) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von \mathfrak{p} mit $V \subset U$ und Elemente $a, f \in A$, so dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ stets $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$ in $A_{\mathfrak{q}}$ gilt.

Offensichtlich ist mit $s, t \in \mathcal{O}(U)$ auch $s + t, st \in \mathcal{O}(U)$. Ferner ist für $V \subset U$ offen $\text{res}_V^U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ ein Ringhomomorphismus. \mathcal{O} heißt *Strukturgarbe*. Das *Spektrum* von A ist das Paar $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$.

Satz 2.3. Sei A ein Ring und $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ sein Spektrum. Dann gilt:

- (i) Der Halm $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ist isomorph zu $A_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$.
- (ii) $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$ für alle $f \in A$
- (iii) $\Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) = A$

Beweis. (iii) folgt aus (ii) mit $f = 1$.

(i) Die Abbildungen $\mathcal{O}(U) \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, $s \mapsto s(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} \in U \subset_o \text{Spec}(A)$ sind kompatibel und induzieren einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$.

- *Surjektivität:* Sei $\frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$ mit $a, f \in A$, $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $D(f)$ eine offene Umgebung von \mathfrak{p} und es gibt ein $s \in \mathcal{O}(D(f))$ mit $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}$.
- *Injektivität:* Sei U eine Umgebung von \mathfrak{p} und $s, t \in \mathcal{O}(U)$ mit $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$. Verkleinern wir U wenn nötig, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass:

$$s = \frac{a}{f}, \quad t = \frac{b}{g} \quad \text{für gewisse } a, b, g, f \in A, \quad g, f \notin \mathfrak{p}$$

Wegen $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ in $A_{\mathfrak{p}}$, gibt es ein $h \notin \mathfrak{p}$, so dass $h(ga - bf) = 0$ in A . Insbesondere ist $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ in $A_{\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ mit $g, f, h \notin \mathfrak{q}$. Somit ist $s = t$ auf der offenen Umgebung $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ von \mathfrak{p} und haben daher denselben Keim.

(ii) Sei $f \in A$ und $\mathfrak{p} \in D(f)$, d.h. $(f) \subset A \setminus \mathfrak{p}$. Betrachte die kanonische Abbildung $\lambda_{\mathfrak{p}} : A_f \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Setze:

$$\psi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D(f)), \quad \frac{a}{f^n} \mapsto \left(\mathfrak{p} \mapsto \lambda_{\mathfrak{p}} \left(\frac{a}{f^n} \right) \right)$$

- *Injektivität:* Sei $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = \psi\left(\frac{b}{f^m}\right)$ und $\mathfrak{p} \in D(f)$. Dann ist $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ in $A_{\mathfrak{p}}$, d.h. es gibt ein $h \notin \mathfrak{p}$ mit $h(f^m a - f^n b) = 0$. Setze $\mathfrak{a} = \text{Ann}(f^m a - f^n b)$. Dann ist $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, da $h \in \mathfrak{a}$, also folgt $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Wir haben also $V(\mathfrak{a}) \subset V(f)$ gezeigt. Nach Lemma 2.1 (iii) folgt $f \in \text{Rad}(\mathfrak{a})$, d.h. $f^e \in \mathfrak{a}$ für ein $e > 0$. Per Definition gilt $f^e(f^n a - f^m b) = 0$, also $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ in A_f .
- *Surjektivität:* Sei $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Nach Definition von \mathcal{O} ist $D(f) = \bigcup V_i$ mit $s = \frac{a_i}{g_i}$ auf V_i für gewisse $a_i, g_i \in A$, $g_i \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V_i$. Insbesondere gilt $V_i \subset D(g_i)$. Da die $D(h)$ eine Basis der Topologie bilden, können wir o.B.d.A. $V_i = D(h_i)$ annehmen, also $D(h_i) \subset D(g_i)$. Es folgt $V(h_i) \supset V(g_i)$ und nach Lemma 2.1 (iii) auch $\text{Rad}(h_i) \subset \text{Rad}(g_i)$. Wähle ein n , so dass $h_i^n \in (g_i)$ für alle i , d.h. $h_i^n = c_i g_i$ für ein $c_i \in A$. Es folgt:

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{c_i a_i}{h_i^n}$$

Ersetzt man a_i durch $c_i a_i$ und h_i durch h_i^n , so können wir o.B.d.A. $D(f) \subset \bigcup D(h_i)$ und $s = \frac{a_i}{h_i}$ auf $D(h_i)$ annehmen.

Wir zeigen nun, dass $D(f)$ durch endlich viele $D(h_i)$ überdeckt werden kann. Wir haben mit Lemma 2.1 Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} D(f) \subset \bigcup_i D(h_i) &\iff V(f) \supset \bigcap_i V(h_i) = V\left(\sum_i (h_i)\right) \\ &\iff f \in \text{Rad}\left(\sum_i (h_i)\right) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in \sum_i (h_i) \end{aligned}$$

Daher ist f^n eine endliche Summe der Form $f^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i$ für gewisse $b_i \in A$, d.h. $D(f) \subset D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$.

Nun gilt:

$$D(h_i) \cap D(h_j) = \text{Spec}(A) \setminus (V(h_i) \cup V(h_j)) = \text{Spec}(A) \setminus V(h_i h_j) = D(h_i h_j)$$

Auf $D(h_i h_j)$ wird s repräsentiert durch $\frac{a_i}{h_i}$ und $\frac{a_j}{h_j}$ in $A_{h_i h_j}$. Wenden wir die Injektivität von ψ auf $D(h_i h_j)$ an, so erhalten wir $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$ in $A_{h_i h_j}$. Es folgt $(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0$ für ein m . Sei m so groß, dass dies für alle endlich vielen i, j gilt, also gilt für alle i, j :

$$h_j^{m+1} (h_i^m a_i) - h_i^{m+1} (h_j^m a_j) = 0$$

Ersetzen wir nun h_i durch h_i^{m+1} und a_i durch $a_i h_i^m$, so wird s auf $D(h_i)$ immer noch durch $\frac{a_i}{h_i}$ repräsentiert und es gilt $h_j a_i = h_i a_j$ für alle i, j .

Schreibe nun $f^n = \sum b_i h_i$ für ein n und setze $a = \sum b_i a_i$. Es folgt für alle j :

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = f^n a_j$$

Also gilt $\frac{a}{f^n} = \frac{a_j}{h_j}$ auf $D(h_j)$ für alle j , d.h. $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = s$. □

Definition 2.4.

- (i) Ein *geringter Raum* (X, \mathcal{O}_X) besteht aus einem topologischen Raum X und einer Ringgarbe \mathcal{O}_X auf X . Ein *Morphismus von geringten Räumen* ist ein Paar

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

wobei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ ein Morphismus von Ringgarben auf Y ist.

- (ii) Ein geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt *lokal*, falls für alle $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Ring ist. Ein *Morphismus von lokal geringten Räumen* ist ein Morphismus $(f, f^\#)$ von geringten Räumen derart, dass für alle $P \in X$ die induzierte Abbildung $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ lokale Homomorphismen sind.

Bemerkung 2.5.

- Die (lokal) geringte Räume bilden eine Kategorie.
- Ein Morphismus $(f, f^\#)$ von (lokal) geringten Räumen ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist und $f^\#$ ein Garbenisomorphismus ist.

Satz 2.6. Seien A, B Ringe.

- (i) $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ ist ein lokal geringter Raum.
- (ii) Sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Dann induziert φ einen natürlichen Morphismus von lokal geringten Räumen:

$$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A), \quad f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

- (iii) Jeder Morphismus $(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A)$ von lokal geringten Räumen ist induziert von einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$.

Beweis.

- (i) folgt aus Satz 2.3 (i).
- (ii) Definiere f durch $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann ist $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$. Daher ist f stetig. Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$. Dann liefert φ einen lokalen Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$. Das liefert für $V \subset_{\circ} \text{Spec}(A)$ einen Ringhomomorphismus:

$$f^{\sharp}(V) : \mathcal{O}_A(V) \rightarrow \mathcal{O}_B(f^{-1}(V))$$

indem man eine Abbildung $s : V \rightarrow \coprod_{\mathfrak{q} \in V} A_{\mathfrak{q}}$ auf die folgende Abbildung $f^{\sharp}(s) : f^{-1}(V) \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{p}}$ schickt:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{s} & A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) & \longmapsto & s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) & \longmapsto & \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))) \end{array}$$

Die $f^{\sharp}(V)$ gibt uns einen Garbenmorphismus $f^{\sharp} : \mathcal{O}_A \rightarrow f_*\mathcal{O}_B$. Die durch f^{\sharp} induzierte Abbildungen auf den Halmen sind gerade die $\varphi_{\mathfrak{p}}$. Somit ist (f, f^{\sharp}) ein Morphismus lokal geringten Räumen.

- (iii) Sei $(f, f^{\sharp}) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A)$ ein Morphismus von lokal geringten Räumen. f^{\sharp} induziert einen Ringhomomorphismus:

$$\varphi : A = \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_A) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) = B$$

Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$. Dann haben wir induzierte lokale Homomorphismen mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A_{f(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{A, f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}} & \mathcal{O}_{B, \mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Da die $f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}$ lokale Homomorphismen sind, folgt $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Somit ist f^{\sharp} von dem Ringhomomorphismus φ induziert. \square

Definition 2.7.

- (i) Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , der als lokal geringter Raum isomorph zum Spektrum eines Rings ist.
- (ii) Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) derart, dass jeder Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ besitzt, so dass $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein affines Schema ist.

\mathcal{O}_X heißt *Strukturgarbe*. Ein *Morphismus* von Schemata ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

Beispiel 2.8.

1. Sei k ein Körper. $\text{Spec}(k)$ ist ein affines Schema, dessen topologischer Raum aus einem Punkt besteht.

Definition 2.9. Sei K ein Körper. Eine *diskrete Bewertung* von K ist eine Abbildung $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:

- (i) $v(xy) = v(x) + v(y)$
- (ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$
- (iii) $v(x) = \infty \iff x = 0$

$R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ definiert einen Teilring von K und heißt *diskreter Bewertungsring* von v . R ist ein lokaler Hauptidealring mit Maximalideal $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$. R/\mathfrak{m} heißt *Restklassenkörper* von v . Ein *diskreter Bewertungsring* A ist ein nullteilerfreier Ring, der diskreter Bewertungsring für eine Bewertung seines Quotientenkörpers ist.

Beispiel 2.8

2. Sei R ein diskreter Bewertungsring. Es ist $T = \text{Spec}(R)$ ein affines Schema, bestehend aus zwei Punkten:
 - Der Punkt $t_0 = \mathfrak{m} \in \text{Spec}(R)$ ist abgeschlossen, da $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$ und besitzt $R = R_{t_0}$ als lokalen Ring.
 - Der Punkt $t_1 = (0) \in \text{Spec}(R)$ ist offen und dicht in $\text{Spec}(R)$, da $V(0) = \text{Spec}(R)$. t_1 besitzt $K = \text{Quot}(R) = R_{t_1}$ als lokalen Ring.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & \text{Spec}(R) & \longleftarrow & \text{Spec}(R/\mathfrak{m}) \\ (0) & \longmapsto & t_1 & & t_0 \longleftarrow (0) \end{array}$$

3. Sei k ein Körper. Die *affine Gerade* \mathbf{A}_k^1 über k ist $\text{Spec } k[X]$. Sei ξ das Nullideal in $\text{Spec } k[X]$. Dann ist $\overline{\{\xi\}} = \mathbf{A}_k^1$. Ein solcher Punkt heißt *generischer Punkt*. Alle anderen Punkte sind abgeschlossen, da diese den maximalen Idealen in $k[X]$ entsprechen. Es besteht eine Bijektion zwischen den irreduziblen, nicht-konstanten, normierten Polynomen aus $k[X]$ und den abgeschlossenen Punkten von \mathbf{A}_k^1 .

Ist k algebraisch abgeschlossen, so besteht eine Bijektion zwischen den Elementen aus k und den abgeschlossenen Punkten von \mathbf{A}_k^1 .

4. Allgemeiner definieren wir den *affinen n -dimensionalen Raum* über k als:

$$\mathbf{A}_k^n = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$$

5. Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann entsprechen die abgeschlossenen Punkte von \mathbf{A}_k^n nach dem hilbertschen Nullstellensatz bijektiv den n -Tupeln von Elementen aus k . Ferner gibt es einen generischen Punkt ξ , der dem Nullideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ entspricht, d.h. $\overline{\{\xi\}} = \mathbf{A}_k^n$.

Definition 2.10. (*Offene Unterschemata*) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema und $U \subset X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein Schema. Diese Aussage ist nichttrivial und wir werden sie später zeigen. Die offene Menge U besitzt die *induzierte Unterschemastruktur*.

Definition 2.11. (*Verkleben von Schemata*) Sei $\{X_i\}$ eine Familie von Schemata und $U_{ij} \subset X_i$, $i \neq j$ offene Teilmengen mit induzierter Struktur. Ferner haben wir für $i \neq j$ Isomorphismen von Schemata:

$$\varphi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_{X_i}|_{U_{ij}}) \xrightarrow{\sim} (U_{ji}, \mathcal{O}_{X_j}|_{U_{ji}})$$

mit $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ und $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ und $\varphi_{jk} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$ für alle paarweise verschiedene i, j, k . Wir erhalten ein Schema X durch *Verkleben* der X_i längst U_{ij} bzgl. φ_{ij} :

$$X = \bigcup_i X_i / \sim, \quad x_i \sim \varphi_{ij}(x_i) \text{ für alle } x_i \in U_{ij}, i \neq j$$

X besitze die Quotiententopologie. Es existiert für jedes j ein Morphismus $\psi_j : X_j \rightarrow X$ von Schemata, das ein Isomorphismus auf einem offenen Unterschema in X induziert mit $X = \bigcup \psi_j(X_j)$ und $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$ und $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij} für alle $i \neq j$. Die Strukturgarbe auf X ist folgendermaßen gegeben: Sei $V \subset_o X$. Setze:

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ (s_i) \in \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V)) \mid \varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij}}) = s_j|_{\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}} \right\}$$

Somit ist (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum. Da alle X_i Schemata sind, besitzt jeder Punkt von X eine affine Umgebung. Also ist X ein Schema.

Beispiel 2.12. Sei k ein Körper, $X_1 = X_2 = \mathbf{A}_k^1$ und $U_1 = U_2 = \mathbf{A}_k^1 \setminus \{P\}$ mit einem abgeschlossenen Punkt P . Ist $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ die Identität, so ist die Verklebung X von X_1 und X_2 längst φ die affine Gerade, wobei der Punkt P verdoppelt wurde. X ist selbst nicht mehr affin.

Satz 2.13. Sei A ein Ring und (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Dann ist die Abbildung bijektiv:

$$\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \text{Spec } A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ringe}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

wobei wir $(f : X \rightarrow \text{Spec } A, f^\# : \mathcal{O}_A \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$ durch das Nehmen der globalen Schnitte auf den Ringhomomorphismus $A = \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_A) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ schicken.

Beweis. Sei $X = \bigcup_\nu X_\nu$ eine affine Überdeckung. Ein Morphismus $(f, f^\#)$ ist eindeutig durch seine Einschränkungen $(f_\nu, f_\nu^\#)$ auf X_ν bestimmt. Diese sind nach Satz 2.6 wiederum eindeutig bestimmt durch $\alpha(f_\nu)$. Ferner kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha(f_\nu)} & \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu}) \\ \alpha(f) \downarrow & \nearrow \text{res} & \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & & \end{array}$$

weshalb $\alpha(f)$ schon alle $\alpha(f_\nu)$ eindeutig bestimmt. Somit ist α injektiv. Sei nun ein Ringhomomorphismus $h : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ gegeben und $h_\nu : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu})$. Nach Satz 2.6 (iii) existiert ein $f_\nu : X_\nu \rightarrow \text{Spec}(A)$ mit $\alpha(f_\nu) = h_\nu$. Für alle ν, μ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu}) & & \\ & \nearrow h_\nu & & \searrow \text{res} & \\ A & & & & \Gamma(X_\nu \cap X_\mu, \mathcal{O}_X) \\ & \searrow h_\mu & & \nearrow \text{res} & \\ & & \Gamma(X_\mu, \mathcal{O}_{X_\mu}) & & \end{array}$$

Aus der Injektivität von α folgt $f_\nu = f_\mu$ auf $X_\nu \cap X_\mu$. Kleben wir die f_ν nun zusammen, so erhalten wir ein $f : X \rightarrow \text{Spec}(A)$ mit $\alpha(f) = h$. \square

Korollar 2.14. Es gibt eine pfeilumkehrende Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der affinen Schemata und der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

Korollar 2.15. $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ist Endobjekt in der Kategorie der Schemata, d.h. für jedes Schema X existiert ein eindeutiger Morphismus $f : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Satz 2.16. Sei A ein Ring, $X = \text{Spec}(A)$ und $f \in A$. Dann gilt:

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \text{Spec}(A_f)$$

Beweis. Die natürliche Abbildung $\varphi : A \rightarrow A_f$ induziert einen Homöomorphismus:

$$\psi : \text{Spec}(A_f) \rightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} = D(f), \quad \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \square$$

Beweis zu Definition 2.10. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema und $U \subset X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein lokal geringter Raum. Sei $P \in U$. Wir zeigen, dass eine Umgebung $V \subset_\circ U$ von P existiert, so dass $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ affin ist. Da (X, \mathcal{O}_X) ein Schema ist, existiert ein $V' \subset_\circ X$, $P \in V'$ mit $(V', \mathcal{O}_X|_{V'})$ affin. Sei also $V' = \text{Spec}(A)$ für einen Ring A . Da die $D(f)$, $f \in A$ eine Basis der Topologie auf X bilden, existiert ein $f \in A$, so dass $P \in D(f) \subset V' \cap U$. Wegen Satz 2.16 ist $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \text{Spec}(A_f)$ affin. \square

Satz 2.17. Sei X ein Schema und $Z \subset X$ irreduzibel und abgeschlossen. Dann existiert genau ein Punkt $\xi \in Z$ derart, dass $\overline{\{\xi\}} = Z$. ξ heißt *generischer Punkt* von Z .

Beweis.

- *Existenz:* Sei $U \subset_o X$ affin mit $Z \cap U \neq \emptyset$. Da $Z \cap U$ abgeschlossen in U ist, gibt es ein Radikalideal \mathfrak{p} mit $Z \cap U = V(\mathfrak{p})$.

Nun ist $Z \cap U$ irreduzibel, da für offene Mengen $V_1, V_2 \subset_o Z \cap U$ stets $V_1, V_2 \subset_o Z$ gilt und aus der Irreduzibilität von Z stets $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ folgt.

Ferner ist \mathfrak{p} ein Primideal, denn ist $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$ für gewisse Ideale \mathfrak{a} und \mathfrak{b} , so folgt $\text{Rad}(\mathfrak{ab}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Dies ist äquivalent zu $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, daher:

$$Z \cap U = V(\mathfrak{p}) = (V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{a})) \cup (V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{b}))$$

Da $Z \cap U$ irreduzibel ist, folgt o.B.d.A. $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \text{Rad}(\mathfrak{a}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

\mathfrak{p} ist nun generischer Punkt von $Z \cap U$, da:

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{p})$$

Die andere Inklusion folgt aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Da \mathfrak{p} prim ist, folgt $\text{Rad}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}$ und somit $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{a})$. Somit ist $Z \cap U = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

Bezeichne mit $\overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$ den topologischen Abschluss in X . Dann ist $Z \cap U \subset \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$. Da Z irreduzibel ist, gilt $Z = \overline{Z \cap U} \subset \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$, also $Z = \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$.

- *Eindeutigkeit:* Sei $\overline{\{\xi\}}^X = Z = \overline{\{\xi'\}}^X$. Sei $U \subset_o X$ eine affine Umgebung von $\xi \in U$. Dann ist $\xi' \in U$, da aus $\xi' \in Z \setminus U$ der Widerspruch $\xi \in Z = \overline{\{\xi'\}}^X \subset X \setminus U$ folgt. Wähle nun Radikalideale \mathfrak{p}' und \mathfrak{p} mit:

$$V(\mathfrak{p}') = \overline{\{\xi'\}}^U = U \cap \overline{\{\xi'\}}^X = U \cap \overline{\{\xi\}}^X = \overline{\{\xi\}}^U = V(\mathfrak{p})$$

Es folgt $\xi' = \mathfrak{p}' = \text{Rad}(\mathfrak{p}') = \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} = \xi$. □

Satz 2.18. Sei X ein Schema und K ein Körper. Dann gibt es eine Bijektion:

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } K, X) \xrightarrow{\sim} \{(x, i) \mid x \in X, i : \kappa(x) \hookrightarrow K \text{ Ringhomomorphismus}\}$$

wobei $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnet. Die Elemente heißen *K-wertige Punkte* von X .

Beweis. Sei ein Morphismus $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ gegeben. Setze $x = f((0)) \in X$. $f^\#$ induziert einen lokalen Homomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{K,(0)} = K$. $f^\#$ faktorisiert daher über $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \kappa(x)$ und induziert einen Homomorphismus $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$.

Sei nun umgekehrt ein $x \in X$ und $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$ gegeben. i definiert nach Satz 2.6 ein Schemamorphismus:

$$f : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec} \kappa(x) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\psi} X$$

wobei ψ die folgende kanonische Abbildung ist:

Sei $U \subset_o X$ eine affine Umgebung von x mit $U = \text{Spec}(A)$. Nach Satz 2.3 (i) gilt $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} = A_x$. Die kanonische Abbildung $A \rightarrow A_x$ induziert $\psi : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow U \hookrightarrow X$. Diese Abbildung ist unabhängig von U :

Sei $U' \subset_o X$ eine weitere affine Umgebung von x . Dann existiert eine affine Umgebung $U'' \subset_o U \cap U'$ mit $x \in U''$, also können wir o.B.d.A. $\text{Spec}(A) = U \subset U' = \text{Spec}(A')$ annehmen. Es existiert ein kanonischer Homomorphismus $A' \rightarrow A$ derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\quad} & A \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A'_x = \mathcal{O}_{X,x} = A_x \end{array}$$

Somit kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & U' & \xleftarrow{\quad} & U \\ & & \swarrow & & \uparrow \\ & & & & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \end{array}$$

□

Satz 2.19.

(i) Sei A ein Ring und $f \in A$. Dann gilt:

$$D(f) = \emptyset \iff f \text{ nilpotent}$$

(ii) Sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $f : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = X$ der durch φ induzierte Morphismus affiner Schemata. Dann gilt:

- (a) φ ist genau dann injektiv, wenn $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ injektiv ist. In diesem Fall ist f *dominant*, d.h. $f(Y) \subset X$ ist dicht.
- (b) φ ist genau dann surjektiv, wenn $f^\#$ surjektiv ist und f ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Beweis. Übung.

□

Definition 2.20. Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) heißt *reduziert*, falls $\mathcal{O}_X(U)$ für alle $U \subset_o X$ reduziert sind, d.h. keine nilpotente Elemente besitzt.

Regeln 2.21. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema.

- (i) (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann reduziert, wenn $\mathcal{O}_{X,P}$ für alle $P \in X$ keine nilpotente Elemente besitzt.
- (ii) Sei $\mathcal{O}_X^{\text{red}}$ die assoziierte Garbe zur folgenden Prägarbe:

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\mathfrak{N}_U$$

wobei \mathfrak{N}_U das Nilradikal von $\mathcal{O}_X(U)$ bezeichnet. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X^{\text{red}})$ ein Schema, das zu X assoziierte *reduzierte Schema* X_{red} . Es gibt einen Morphismus $f : X_{\text{red}} \rightarrow X$ mit dem Homöomorphismus id auf den unterliegenden topologischen Räumen und $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_X^{\text{red}}$ gegeben durch:

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X^{\text{red}}(U), \quad s \mapsto \left(U \xrightarrow{s} \coprod_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P} \rightarrow \coprod_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}^{\text{red}} \right)$$

- (iii) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit X reduziert. Setze $g = f$ auf den unterliegenden topologischen Räumen. Da X reduziert ist, faktorisiert $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ über $\mathcal{O}_Y^{\text{red}}$. $f^\#$ induziert $g^\# : \mathcal{O}_Y^{\text{red}} \rightarrow g_* \mathcal{O}_X = f_* \mathcal{O}_X$. Es gibt also einen eindeutig bestimmten Morphismus $g : X \rightarrow Y_{\text{red}}$ mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \uparrow \\ & & Y_{\text{red}} \end{array}$$

Sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$. Ein Primideal $\mathfrak{p} \subset S$ ist genau dann homogen, wenn aus $fg \in \mathfrak{p}$ für gewisse homogene Elemente $f, g \in S$ stets $f \in \mathfrak{p}$ oder $g \in \mathfrak{p}$ folgt. Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset S$ setze:

$$\text{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \subset S \text{ homogenes Primideal} \mid S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}, \quad V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

Lemma 2.22.

- (i) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset S$ homogene Ideale, so gilt $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
- (ii) Ist $(\mathfrak{a}_i)_i$ eine Familie homogener Ideale in S , so folgt $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.

Damit wird auf $\text{Proj}(S)$ eine Topologie definiert. Die abgeschlossenen Mengen sind genau die Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset S$.

Beweis. Wie in Lemma 2.1 unter Beachtung, dass homogene Ideale von homogene Elemente erzeugt werden. \square

Definition. Sei $T \subset S$ multiplikativ abgeschlossen, die aus homogenen Elementen besteht. Dann wird $T^{-1}S = \bigoplus_{i \geq 0} (T^{-1}S)_i$ zu einem graduierten Ring:

$$(T^{-1}S)_i = \left\{ \frac{s}{t} \in T^{-1}S \mid s \in S \text{ homogen, } t \in T, \deg(s) - \deg(t) = i \right\}$$

Ist $\mathfrak{p} \subset S$ ein homogenes Primideal und $f \in S$ ein homogenes Element, so ist die *homogene Lokalisierung* bzgl. \mathfrak{p} bzw. f definiert als:

$$S_{(\mathfrak{p})} = (S_{\mathfrak{p}})_0, \quad S_{(f)} = (S_f)_0$$

Definition. Wir definieren eine Ringgarbe \mathcal{O} auf $\text{Proj}(S)$ wie folgt: Sei $U \subset_o \text{Proj}(S)$ und setze $\mathcal{O}(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$, so dass:

- (i) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$.
- (ii) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine offene Umgebung V von \mathfrak{p} mit $V \subset U$ und homogene Elemente $a, f \in S$ mit $\deg(a) = \deg(f)$ derart, dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ stets $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$ in $S_{(\mathfrak{q})}$ gilt.

Satz 2.23. Sei S ein graduierter Ring. Dann gilt:

- (i) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$.
- (ii) Für ein homogenes $f \in S_+$ setze $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Dann ist $D_+(f)$ offen in $\text{Proj}(S)$ und es gilt:

$$\text{Proj}(S) = \bigcup_{f \in S_+ \text{ homogen}} D_+(f)$$

Es gibt einen Isomorphismus lokal geringter Räume $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec } S_{(f)}$.

- (iii) $(\text{Proj } S, \mathcal{O})$ ist ein Schema.

Beweis.

- (i) Die Abbildung $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow S_{(\mathfrak{p})}$, $s_{\mathfrak{p}} \mapsto s(\mathfrak{p})$, wobei s ein Repräsentant von $s_{\mathfrak{p}}$ ist, ist ein Isomorphismus. Beweis analog wie Satz 2.3 (i).
- (ii) Da $D_+(f) = \text{Proj}(S) \setminus V(f)$, ist $D_+(f)$ offen. Sei $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$, d.h. $\mathfrak{p} \subset S$ ist ein homogenes Primideal mit $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$. Sei $f \in S_+ \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p} \notin V(f)$, also $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Daher ist $\text{Proj}(S) = \bigcup D_+(f)$.

Sei $f \in S_+$. Wir definieren ein Morphismus lokal geringter Räume $(\phi, \phi^\#) : D_+(f) \rightarrow \text{Spec } S_{(f)}$ wie folgt: Sei $S \rightarrow S_f$ der natürliche Homomorphismus. Sei $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal und setze $\phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)}$. Beachte, dass $S_{(f)} = (S_f)_0 \subset S_f$ ein Teilring ist. Für $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ ist $\phi(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } S_{(f)}$, siehe Satz 2.16, und ϕ ist bijektiv. Sei $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal. Dann ist $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $\phi(\mathfrak{p}) \supset \phi(\mathfrak{a})$. Daher ist ϕ ein Homöomorphismus.

$\phi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow \phi_* (\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}|_{D_+(f)})$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}(\phi^{-1}(U)), \quad s \mapsto \left(\phi^{-1}(U) \xrightarrow{s \circ \phi} \coprod (S_f)_{\phi(\mathfrak{p})} \cong \coprod S_{(\mathfrak{p})} \right)$$

Dieses ist ein Isomorphismus.

(iii) folgt aus (i) und (ii). □

Beispiel 2.24. Sei A ein Ring. Dann heißt

$$\mathbf{P}_A^n = \text{Proj } A[X_0, \dots, X_n]$$

der *n-dimensionaler projektiver Raum* über A . Ist speziell $A = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist \mathbf{P}_k^n ein Schema. Dessen Teilraum aller abgeschlossenen Punkte ist homöomorph zur projektiven n -dimensionalen Varietät.

Definition 2.25. Sei S ein beliebiges Schema. Ein *Schema über S* ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $X \rightarrow S$, der sogenannte *Strukturmorphismus*. Ein Morphismus zweier Schemata X und Y über S ist ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

So ein Morphismus nennt man auch *S-Morphismus*. Bezeichne die Kategorie aller Schemata über S mit S -Morphismen mit $\mathbf{Sch}(S)$. Für einen Ring A setzen wir auch $\mathbf{Sch}(A) = \mathbf{Sch}(\text{Spec } A)$.

Satz 2.26. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gibt es einen natürlichen Funktor

$$t : \mathbf{Var}(k) \rightarrow \mathbf{Sch}(k)$$

der *volltreu* ist, d.h. für zwei Varietäten V, W ist die durch t auf den Morphismen induzierte Abbildung $\text{Hom}_{\mathbf{Var}(k)}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sch}(k)}(tV, tW)$ bijektiv. Für eine Varietät V setze $\mathfrak{M}(V)$ als die Menge aller abgeschlossenen Punkte des Schemas tV mit der Teilraumtopologie. Es gibt einen Homöomorphismus topologischer Räume $V \cong \mathfrak{M}(V)$. Die Garbe der regulären Funktionen ist via diesen Homöomorphismus isomorph zu $\mathcal{O}_{tV}|_{\mathfrak{M}(V)}$.

Beweis. Siehe z.B. Hartshorne Kapitel II, Proposition 2.6 oder Mumford, Theorem 2 auf Seite 168.

2.3 Erste Eigenschaften von Schemata

Definition 3.1.

- (i) Ein Schema heißt *zusammenhängend*, falls es als topologischer Raum zusammenhängend ist.
- (ii) Ein Schema heißt *irreduzibel*, falls es als topologischer Raum irreduzibel ist.
- (iii) Ein Schema heißt *reduziert* falls für alle $U \subset_o X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.
- (iv) Ein Schema heißt *integer*, falls für alle $U \subset_o X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei ist.

Beispiel 3.2. Sei $X = \text{Spec}(A)$ ein affines Schema. Dann gilt:

- (i) X ist irreduzibel $\iff \mathfrak{N}(A)$ ist ein Primideal
- (ii) X ist reduziert $\iff A$ ist reduziert $\iff \mathfrak{N}(A) = 0$
- (iii) X ist integer $\iff A$ ist nullteilerfrei

Beweis. (i) und (ii) sind klar. Ist X integer, so ist $A = \mathcal{O}_X(X)$ nullteilerfrei. Sei nun umgekehrt A nullteilerfrei, d.h. $\mathfrak{N}(A) = 0$ ist ein Primideal. Nach (i) und (ii) ist X irreduzibel und reduziert. Daher folgt die Aussage aus dem nächsten Satz. \square

Satz 3.3. Ein Schema X ist genau dann integer, wenn X reduziert und irreduzibel ist.

Beweis. Sei X integer. Dann ist X offensichtlich reduziert. Wäre X nicht irreduzibel, so gäbe es $\emptyset \neq U_1, U_2 \subset_o X$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann ist:

$$\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$$

Somit ist $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2)$ nicht nullteilerfrei. Sei nun umgekehrt X irreduzibel und reduziert.

Sei $V \subset_o X$ affin mit $V = \text{Spec}(A)$. Sei $a, b \in A$ mit $ab = 0$. Es folgt:

$$\text{Spec}(A) = V(ab) = V(a) \cup V(b)$$

Da V irreduzibel ist, folgt o.B.d.A. $\text{Spec}(A) = V(a)$. Da $A = \mathcal{O}_X(V)$ reduziert ist, folgt $\text{Rad}(a) = (0)$, also $a = 0$. Daher ist $\mathcal{O}_X(V)$ für jedes affine $V \subset_o X$ nullteilerfrei.

Sei nun $U \subset_o X$ beliebig und $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $fg = 0$. Für $V \subset_o U$ affin, folgt aus $f|_V \cdot g|_V = 0$ o.B.d.A. $f|_V = 0$. Nun ist U der Abschluss von V in U . Sei $x \in U$ und

$U(x) \subset_o U$ eine affine Umgebung von x mit $U(x) = \text{Spec}(B)$. Sei $f(x) = \frac{a}{h} \in B_x$ für alle $x \in U(x)$. Es ist $U(x) \cap V \neq \emptyset$, da U irreduzibel ist. Wähle ein $y \in U(x) \cap V$; es folgt $0 = f(y) = \frac{a}{h} \in B_y$, also gibt es ein $k \in B \setminus y$ mit $ka = 0$. Da B nullteilerfrei ist, folgt $a = 0$ und $f = 0$ auf $U(x)$. Somit folgt $f = 0$. \square

Definition.

- (i) Ein Schema X heißt *quasikompakt*, wenn sein unterliegender topologischer Raum quasikompakt ist.
- (ii) Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen in X stationär wird.

Bemerkung. Sei X ein noetherscher Raum. Nach Zorns Lemma besitzt jede nichtleere Menge Σ von abgeschlossenen Mengen in X ein minimales Element, da jede Kette in Σ ein minimales Element besitzt.

Satz 3.4.

- (i) Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann noethersch, wenn alle offenen Teilmengen $U \subset X$ quasikompakt sind.
- (ii) Sei X ein affines Schema. Dann ist X quasikompakt, aber nicht notwendig noethersch.
- (iii) Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist der $\text{Spec}(A)$ unterliegender Raum noethersch.

Beweis.

- (i) Sei $U \subset_o X$ und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setze $V_J = \bigcup_{i \in J} U_i$. Dann ist $V_J \subset X$ offen und es gilt:

$$U = \bigcup_{J \subset I \text{ endlich}} V_J$$

Wählt man aus $\Sigma = \{X \setminus V_J \mid J \subset I \text{ endlich}\}$ ein minimales Element $X \setminus V_{J'}$. Dann gilt $V_{J'} \supset V_J$ für alle J . Also ist $U = V_{J'} = \bigcup_{i \in J'} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung.

Sei umgekehrt $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ eine Kette abgeschlossener Mengen in X , so ist die Menge $U = \bigcup_{j \geq 1} X \setminus Y_j$ offen in X . Wir erhalten eine endliche Teilüberdeckung $U = \bigcup_{r \geq j \geq 1} X \setminus Y_j = X \setminus Y_r$, also folgt $Y_s = Y_r$ für alle $s \geq r$.

- (ii) Sei $X = \text{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Wir können o.B.d.A. $U_i = D(f_i)$ für gewisse $f_i \in A$ annehmen. Sei $\mathfrak{a} = (f_i \mid i \in I) \subset A$. Dann gilt:

$$X = \bigcup_{i \in I} X \setminus V(f_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} V(f_i) = X \setminus V(\mathfrak{a})$$

Es folgt $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$, also $1 \in \mathfrak{a}$. Somit gibt es endlich viele $g_j \in A$ und $i_j \in I$ mit $1 = \sum_j g_j f_{i_j}$. Wir erhalten die endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_j D(f_{i_j})$.

- (iii) Sei $V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset \dots$ eine Kette abgeschlossener Mengen in $\text{Spec}(A)$ mit Radikalidealen $\mathfrak{a}_i \subset A$. Sie wird stationär, da die Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$ stationär wird. \square

Definition 3.5. Sei X ein Schema.

- (i) X heißt *lokal noethersch*, falls X von offenen, affinen Teilmengen $\text{Spec}(A_i)$ mit noetherschen Ringen A_i überdeckt werden kann.
- (ii) X heißt *noethersch*, falls X lokal noethersch und quasikompakt ist. Dies ist äquivalent dazu, dass X von endlich vielen offenen, affinen Teilmengen $\text{Spec}(A_i)$ mit noetherschen Ringen A_i überdeckt werden kann.

Bemerkung. Ist ein Schema X noethersch, so ist nach Satz 3.4 (iii) der unterliegender Raum von X noethersch. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Satz 3.6. Sei X ein Schema. Dann ist X genau dann lokal noethersch, wenn für alle offenen, affinen Teilmengen $U = \text{Spec}(A)$ stets A ein noetherscher Ring ist.

Beweis. Die Rückrichtung ist trivial. Sei also X lokal noethersch und $U = \text{Spec}(A)$ offen in X . Wir haben eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_i \text{Spec}(B_i)$ mit noetherschen Ringen B_i . Da die offenen Mengen $D(f)$ eine offene Basis der Topologie bilden, haben wir eine Darstellung:

$$U = \bigcup_{i,j} D(f_{ij}), \quad f_{ij} \in B_i, \quad D(f_{ij}) \subset U \cap \text{Spec}(B_i)$$

mit $D(f_{ij}) = \text{Spec}(B_i)_{f_{ij}}$. Da B_i noethersch sind, sind die Lokalisierungen $(B_i)_{f_{ij}}$ ebenfalls noethersche Ringe. Da U affin und somit quasikompakt ist, kann U von endlich vielen Spektren noetherscher Ringe überdeckt werden.

Sei $V = \text{Spec}(B)$ offen in U mit noetherschen Ring B . Sei $f \in A$ und betrachte $D(f) \subset V$. Die natürliche Inklusion $V \hookrightarrow U$ induziert einen Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$. Sei \bar{f} das Bild von f in B . Es gilt:

$$\text{Spec}(A_f) = D(f) = D(\bar{f}) = \text{Spec}(B_{\bar{f}})$$

Es folgt $A_f \cong B_{\bar{f}}$ und A_f ist noethersch. Wir haben nun gezeigt, dass U von endlich vielen offenen Mengen der Form $D(f) = \text{Spec}(A_f)$ überdeckt werden kann mit noetherschen Ringen A_f . Somit folgt die Aussage aus dem nächsten Lemma. \square

Lemma 1. Sei A ein Ring und $f_1, \dots, f_r \in A$ mit $1 = (f_1, \dots, f_r)$. Sind alle A_{f_i} noethersch, so ist auch A noethersch.

Lemma 2. Sei A ein Ring und $f_1, \dots, f_r \in A$ mit $1 = (f_1, \dots, f_r)$. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$ die Lokalisierungsabbildung. Dann gilt:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i})$$

Beweis. Für die nichttriviale Inklusion sei $b \in A$ mit $\varphi_i(b) \in \varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i}$ für alle i . Schreibe:

$$\varphi_i(b) = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \in A_{f_i}, \quad a_i \in \mathfrak{a}, \quad n_i > 0$$

Sei o.B.d.A. $n = n_1 = \dots = n_r$. Somit gibt es für alle i ein $m_i \geq 0$ mit:

$$f_i^{m_i}(f_i^n b - a_i) = 0$$

Sei o.B.d.A. $m = m_1 = \dots = m_r$. Es folgt $f_i^{m+n}b \in \mathfrak{a}$ für alle i . Aus $1 = (f_1, \dots, f_r)$ folgt $1 = (f_1^N, \dots, f_r^N)$ für alle $N \geq 0$, insbesondere für $N = m + n$. Sei also $1 = \sum_{i=1}^r c_i f_i^N$ für gewisse $c_i \in A$. Dann gilt:

$$b = \sum_{i=1}^r c_i f_i^N b \in \mathfrak{a} \quad \square$$

Beweis von Lemma 1. Sei $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$ eine Kette von Idealen in A . Diese induziert für alle i eine Kette von Idealen in A_{f_i} :

$$\varphi_i(\mathfrak{a}_1)A_{f_i} \subset \varphi_i(\mathfrak{a}_2)A_{f_i} \subset \dots$$

Da A_{f_i} noethersch ist, wird diese Kette stationär für alle i . Es existiert also ein s mit $\varphi_i(\mathfrak{a}_s)A_{f_i} = \varphi_i(\mathfrak{a}_{s+1})A_{f_i} = \dots$ für alle i . Mit Lemma 2 wird auch die ursprüngliche Kette von Idealen in A stationär. \square

Definition. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata.

- (i) f heißt *lokal von endlichem Typ*, falls Y eine offene affine Überdeckung $\bigcup_i \text{Spec}(B_i)$ besitzt, so dass $f^{-1}(\text{Spec } B_i)$ für alle i eine offene affine Überdeckung $\bigcup_j \text{Spec}(A_{ij})$ besitzt, wobei alle A_{ij} endlich erzeugte B_i -Algebren sind.
- (ii) f heißt *von endlichem Typ*, falls Y eine offene affine Überdeckung $\bigcup_i \text{Spec}(B_i)$ besitzt, so dass $f^{-1}(\text{Spec } B_i)$ für alle i eine endliche, offene affine Überdeckung $\bigcup_j \text{Spec}(A_{ij})$ besitzt, wobei alle A_{ij} endlich erzeugte B_i -Algebren sind.
- (iii) f heißt *endlich*, falls eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_i \text{Spec}(B_i)$ existiert, so dass $f^{-1}(\text{Spec } B_i) = \text{Spec}(A_i)$ für alle i ist, wobei A_i eine B_i -Algebra ist, die als B_i -Modul endlich erzeugt ist.

Bemerkung 3.7. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata.

- (i) f ist genau dann lokal von endlichem Typ, wenn für alle offene, affine $V = \operatorname{Spec}(B)$ in Y es eine offene affine Überdeckung $f^{-1}(V) = \bigcup_j \operatorname{Spec}(A_j)$ gibt, wobei A_j endlich erzeugte B -Algebren sind.
- (ii) f ist genau dann von endlichem Typ, wenn für alle offene, affine $V = \operatorname{Spec}(B)$ in Y es eine endliche, offene affine Überdeckung $f^{-1}(V) = \bigcup_j \operatorname{Spec}(A_j)$ gibt, wobei A_j endlich erzeugte B -Algebren sind.
- (iii) f ist genau dann endlich, wenn für alle offene, affine $V = \operatorname{Spec}(B)$ in Y die Menge $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$ affin ist, wobei A ein endlich erzeugter B -Modul ist.

Beweis. Dies werden wir später zeigen.

Beispiel 3.8. Sei V eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann ist das Schema $t(V)$ in Satz 2.26 ein integres, noethersches Schema von endlichem Typ über k .

Beispiel 3.9. Sei P ein Punkt einer Varietät und \mathcal{O}_P der zugehörige Halm. Dann ist $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_P)$ ein integres, noethersches Schema, aber nicht von endlichem Typ über k .

Definition 3.10. Ein *offenes Unterschema* eines Schemas X ist ein Schema U , dessen unterliegender topologischer Raum eine offene Teilmenge von X ist und dessen Strukturgarbe \mathcal{O}_U isomorph zu $\mathcal{O}_X|_U$ ist.

Ein Schemamorphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt *offene Immersion*, falls f ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema in Y induziert.

Bemerkung. Jede offene Teilmenge eines Schemas X trägt eine eindeutig bestimmte Struktur als offenes Unterschema, siehe auch Definition 2.10.

Definition 3.11. Ein *abgeschlossenes Unterschema* eines Schemas X ist ein Schema Y , zusammen mit einem Morphismus $(i, i^\#) : Y \rightarrow X$, so dass:

- (i) Der Y unterliegender Raum ist eine abgeschlossene Teilmenge von X .
- (ii) $i : Y \hookrightarrow X$ ist die natürliche Inklusion.
- (iii) $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv.

Ein Schemamorphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt *abgeschlossene Immersion*, falls f ein Isomorphismus auf ein abgeschlossenes Unterschema in Y induziert.

Beispiel 3.12. Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ induziert $f : Y \rightarrow X$, $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Dies induziert ein Morphismus von Schemata. f ist ein Homöomorphismus von Y auf $V(\mathfrak{a})$ und die Abbildung $f^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ induziert:

$$f_{\mathfrak{p}}^\sharp : \mathcal{O}_{X, f(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{Y, \mathfrak{p}}$$

$f_{\mathfrak{p}}^\sharp$ ist surjektiv für alle $\mathfrak{p} \in Y$, also ist nach 1.10 (ii) auch f^\sharp surjektiv. Somit erhält man für jedes $\mathfrak{a} \subset A$ auf $V(\mathfrak{a}) \subset X$ eine Struktur als abgeschlossenes Unterschema in X .

Bemerkung. Ist $Y \subset X = \operatorname{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge, so existieren auf Y viele abgeschlossene Unterschemastrukturen. Wir werden später sehen, dass sie genau den Idealen $\mathfrak{a} \subset A$ mit $Y = V(\mathfrak{a})$ entsprechen.

Satz 3.14. Sei X ein Schema und Y eine abgeschlossene Teilmenge von X . Dann besitzt Y eine eindeutig bestimmte induzierte Struktur als reduziertes, abgeschlossenes Unterschema.

Lemma 3.15. Sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung. Ferner sei für jedes i eine Garbe F_i auf U_i gegeben und für alle i, j seien Isomorphismen gegeben:

$$\varphi_{ij} : F_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} F_j|_{U_i \cap U_j}$$

so dass $\varphi_{ii} = \operatorname{id}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Garbe F auf X und Isomorphismen $\psi_i : F|_{U_i} \xrightarrow{\sim} F_i$ mit $\psi_j = \varphi_{ij}\psi_i$ auf $U_i \cap U_j$. Wir sagen auch, dass F durch *Verkleben* der F_i längst φ_{ij} entsteht.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition einer Garbe. □

Definition 3.16.

- (i) Die *Dimension* $\dim(X)$ eines Schemas X ist die Dimension von X als topologischer Raum, d.h:

$$\dim(X) = \sup\{n \mid \text{es gibt eine Kette } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \\ \text{von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen in } X\}$$

- (ii) Sei Z eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge eines Schemas X . Dann ist die *Kodimension* $\operatorname{codim}(Z, X)$ von Z in X definiert als:

$$\operatorname{codim}(Z, X) = \sup\{n \mid \text{es gibt eine Kette } Z = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \\ \text{von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen in } X\}$$

Ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X , so setzen wir:

$$\text{codim}(Y, X) = \inf\{\text{codim}(Z, X) \mid Z \subset Y \text{ irreduzibel, abgeschlossen}\}$$

Definition 3.17. Sei S ein Schema und X, Y S -Schemata. Das *Faserprodukt* $X \times_S Y$ von X und Y über S ist ein Schema, zusammen mit Projektionsmorphisimen $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$ derart, dass:

(i) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

(ii) Ist Z ein S -Schema und $f : Z \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$ Morphismen derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & & g & \\ & & & \searrow & \\ Z & \xrightarrow{\theta} & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow f & \downarrow p_1 & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & S \end{array}$$

so existiert einen eindeutig bestimmten Morphismus $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$ mit $f = p_1 \theta$ und $g = p_2 \theta$.

Wird für Schemata X und Y kein Bezug zu einer Basis angegeben, so ist immer das Endobjekt $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ gemeint, d.h. $X \times Y = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$.

Theorem 3.18. Seien X und Y S -Schemata. Dann existiert das Faserprodukt $X \times_S Y$ und ist auf Isomorphie eindeutig.

Lemma 3.19. (*Verkleben von Morphismen*, vgl. Satz 2.13) Seien X, Y Schemata und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von X . Ferner seien $f_i : U_i \rightarrow Y$ Morphismen gegeben, wobei U_i mit der offenen Unterschemastruktur versehen ist. Es gelte $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j . Dann gibt es einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle i .

Beweis von Theorem 3.18. Die Eindeutigkeit ist klar.

1. Schritt: Seien $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$, $S = \operatorname{Spec}(R)$ affin. Somit sind A und B R -Algebren. Wir zeigen $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$. Die Projektionsabbildung $p_1 : \operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ ist durch die natürliche Abbildung $\tilde{p}_1 : A \rightarrow A \otimes_R B$ gegeben, analog für p_2 . Offensichtlich kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{p}_1} & A \otimes_R B \\ \uparrow & & \uparrow \tilde{p}_2 \\ R & \longrightarrow & B \end{array}$$

Sei also Z ein S -Schema und Morphismen $f : Z \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow Y$ gegeben, die über S gleich sind. Diese entsprechen Ringhomomorphismen $\tilde{f} : A \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ und $\tilde{g} : B \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ nach Satz 2.13. Es kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \\ & & \tilde{f} & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{\tilde{p}_2} & A \otimes_R B & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \\ \uparrow & & \uparrow \tilde{p}_2 & & \uparrow \tilde{g} \\ R & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

Wegen der Universaleigenschaft des Tensorprodukts gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\tilde{\theta} : A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ mit $\tilde{f}\tilde{\theta} = \tilde{p}_1$ und $\tilde{g}\tilde{\theta} = \tilde{p}_2$. Satz 2.13 liefert ein eindeutiges $\theta : Z \rightarrow \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ mit $f = p_1\theta$ und $g = p_2\theta$.

2. Schritt: Seien X, Y beliebige S -Schemata und $U \subset_o X$. Wir nehmen an, dass das Faserprodukt $X \times_S Y$ mit Projektionen p_1, p_2 existiert. Wir zeigen, dass für die offene Teilmenge $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ stets $p_1^{-1}(U) = U \times_S Y$ gilt.

Da $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$, kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} p_1^{-1}(U) & \xrightarrow{p_2} & Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & S \end{array}$$

Sei Z ein S -Schema und Morphismen $f : Z \rightarrow U$, $g : Z \rightarrow Y$ gegeben, so dass $(Z \xrightarrow{f} U \xrightarrow{i} X \rightarrow S) = (Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow S)$. Nach der Universaleigenschaft von $X \times_S Y$ existiert ein eindeutiges $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$ mit $if = p_1\theta$ und $g = p_2\theta$. Insbesondere gilt $\theta(Z) \subset p_1^{-1}(U)$, also $\theta : Z \rightarrow p_1^{-1}(U)$. Somit erfüllt $p_1^{-1}(U)$ die Universaleigenschaft von $U \times_S Y$.

3. Schritt: Seien X, Y S -Schemata und $\{X_i\}$ eine offene Überdeckung von X . Wir nehmen an, dass alle Faserprodukte $X_i \times_S Y$ mit Projektionen p_{1i}, p_{2i} existieren. Wir zeigen, dass in diesem Fall auch $X \times_S Y$ existiert.

Setze $X_{ij} = X_i \cap X_j$ und $U_{ij} = p_{1i}^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_S Y$. Nach Schritt 2 folgt nun $U_{ij} = X_{ij} \times_S Y$. Wegen Eindeutigkeit existieren nun Isomorphismen $\varphi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$ mit $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$, $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{jk}$. Mithilfe 2.11 verkleben wir die $X_i \times_S Y$ via φ_{ij} und erhalten so ein Schema Z mit Morphismen $\psi_j : X_j \times_S Y \rightarrow Z$, die Isomorphismen auf einem offenen Unterschema induzieren. Seien p_1, p_2 die Morphismen, die durch Verkleben der p_{1i} bzw. p_{2i} entstehen, siehe Lemma 3.19. Wir zeigen nun, dass Z gerade das Faserprodukt $X \times_S Y$ mit Projektionsmorphismen p_1, p_2 ist.

Es gilt $Z = \bigcup_j \psi_j(X_j \times_S Y)$. Also folgt die Kommutativität des zweiten Diagramms aus dem ersten:

$$\begin{array}{ccc} X_j \times_S Y & \xrightarrow{p_{1j}} & X_j \\ p_{2j} \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

Sei nun Z' ein weiteres S -Schema und $f : Z' \rightarrow X$, $g : Z' \rightarrow Y$ gegeben, die über S gleich sind. Setze $Z'_i = f^{-1}(X_i)$ für alle i . Zu jedem i existiert genau ein Morphismus $\theta_i : Z'_i \rightarrow X_i \times_S Y \hookrightarrow Z$ mit $f|_{Z'_i} = p_{1i} \circ \theta_i$ und $g|_{Z'_i} = p_{2i} \circ \theta_i$. Es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X_i \times_S Y & \hookrightarrow & Z \\ p_{1i} \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X_i & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Es gilt $Z'_i \cap Z'_j = f^{-1}(X_i \cap X_j) = f^{-1}(X_{ij})$ und daher $f|_{Z'_i \cap Z'_j} = p_{1i} \circ \theta_i|_{Z'_i \cap Z'_j} = p_{1j} \circ \theta_j|_{Z'_i \cap Z'_j}$, entsprechend für g . Wegen Eindeutigkeit folgt $\theta_i|_{Z'_i \cap Z'_j} = \theta_j|_{Z'_i \cap Z'_j}$. Daher können wir die θ_i zu einem Morphismus $\theta : Z' \rightarrow Z$ verkleben mit $f = p_1 \theta$ und $g = p_2 \theta$. θ ist eindeutig, da $\theta|_{Z'_i} = \theta_i$ und alle θ_i eindeutig sind.

4. Schritt: Seien X, Y S -Schemata und S affin. Wir zeigen, dass $X \times_S Y$ existiert.

Seien $X = \bigcup_i X_i$ und $Y = \bigcup_j Y_j$ offene affine Überdeckungen. Nach Schritt 1 existieren $X_i \times_S Y_j$ für alle i, j . Nach Schritt 3 existieren $X \times_S Y_j$ für alle j . Wegen Symmetrie, existiert somit $X \times_S Y$ nach Schritt 3.

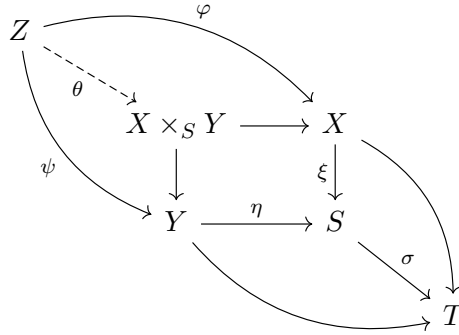
5. Schritt: Seien X, Y S -Schemata mit S beliebig. Wir zeigen, dass $X \times_S Y$ existiert.

Seien $q : X \rightarrow S$ und $r : Y \rightarrow S$ die Strukturmorphismen und $S = \bigcup_i S_i$ eine offene affine Überdeckung. Setze $X_i = q^{-1}(S_i)$ und $Y_i = r^{-1}(S_i)$. Nach Schritt 4 existieren $X_i \times_{S_i} Y_i$. Wir zeigen, dass $X_i \times_{S_i} Y_i$ die Universaleigenschaft von $X_i \times_S Y$ erfüllt.

Satz 3.21. Seien X, Y, Z S -Schemata und W ein Z -Schema. Dann gilt:

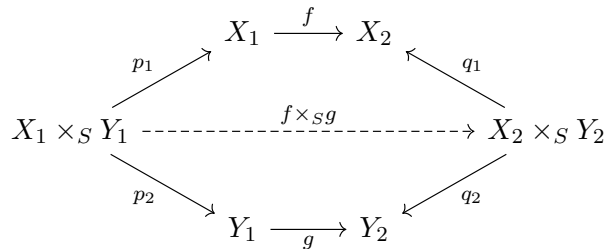
- (i) $X \times_S S \cong X$
- (ii) $X \times_S Y \cong Y \times_S X$
- (iii) $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$
- (iv) $(X \times_S Z) \times_Z W \cong X \times_S W$
- (v) $(X \times_S Y) \times_S Z \cong (X \times_S Z) \times_Z (Y \times_S Z)$
- (vi) Ist $\sigma : S \rightarrow T$ eine Immersion, so ist $X \times_S Y \cong X \times_T Y$.

Beweis. (i) bis (v) folgen direkt aus der Universaleigenschaft des Faserprodukts. Für (vi) seien $\varphi : Z \rightarrow X$, $\psi : Z \rightarrow Y$ Morphismen über T und $\xi : X \rightarrow S$, $\eta : Y \rightarrow S$ die Strukturmorphismen. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:



Wegen der Injektivität von σ , folgt aus $\sigma \xi \varphi = \sigma \eta \psi$ stets $\xi \varphi = \eta \psi$. Es existiert ein eindeutiges, kompatibles $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$. Somit erfüllt $X \times_S Y$ die Universaleigenschaft von $X \times_T Y$. \square

Definition 3.22. Seien $f : X_1 \rightarrow X_2$ und $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ S -Morphismen mit kommutativen Diagramm:



Es existiert genau ein Morphismus $f \times_S g : X_1 \times_S Y_1 \rightarrow X_2 \times_S Y_2$ mit $f p_1 = q_1 (f \times_S g)$ und $g p_2 = q_2 (f \times_S g)$.

Definition 3.23. Sei $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus von Schemata. Für ein Morphismus $g : T \rightarrow S$ erhält man ein T -Schema $X_T = X \times_S T$ mit:

$$\begin{array}{ccc} X_T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Man sagt, dass X_T durch *Basiswechsel* von X über S durch T erhalten bleibt.

Lemma 3.24. Sei $U \subset S$ ein offenes Unterschema. Dann gilt für den Basiswechsel X_U von $f : X \rightarrow S$:

$$X_U = X \times_S U \cong f^{-1}(U)$$

Beweis. Nach Satz 3.21 (i) ist die Projektion $p_1 : X \times_S S \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus. Sei in Lemma 3.20 $Y = S$ und setze $f = p_2 : X \rightarrow S$. Wir erhalten:

$$f^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(U) \cong X \times_S U \quad \square$$

Definition. Sei \mathcal{P} eine Eigenschaft eines Morphismus' $f : X \rightarrow S$. Man sagt, dass \mathcal{P} bei Basiswechsel *erhalten* bleibt, wenn $f_T : X_T \rightarrow T$ die Eigenschaft \mathcal{P} besitzt für alle Morphismen $g : T \rightarrow S$.

Bemerkung. Hat $f : X \rightarrow S$ eine Eigenschaft \mathcal{P} , die stabil unter Basiswechsel ist, so hat insbesondere $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ für alle offenen $U \subset S$ die Eigenschaft \mathcal{P} .

Satz 3.25.

- (i) Die Eigenschaft (abgeschlossene, offene) Immersion zu sein bleibt bei Basiswechsel erhalten.
- (ii) Die Eigenschaft von endlichem Typ zu sein bleibt stabil unter Basiswechsel.

Beweis. Wird ausgelassen.

Bemerkung. Irreduzibilität, Reduziertheit und Integrität bleiben unter Basiswechsel nicht notwendig erhalten.

Lemma 3.26. Sei $\psi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\alpha(\psi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Immersion ist. Sei ferner C ein beliebiger Ring. Dann ist $\alpha(\psi \otimes \text{id}_C) : \text{Spec}(B \otimes_A C) \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_A C) = \text{Spec}(C)$ eine abgeschlossene Immersion, wobei α die Abbildung aus Satz 2.13 bezeichnet.

Beweis. Da $\tilde{\psi} = \alpha(\psi)$ eine abgeschlossene Immersion ist, ist $\tilde{\psi}^\# : \mathcal{O}_A \rightarrow \tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B$ surjektiv. $\tilde{\psi}$ ist Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge, daher ist $(\tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B)_{\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{B,\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$. Nach Beispiel 3.12 ist die auf den Halmen induzierte Abbildung $\tilde{\psi}_\mathfrak{p}^\#$ surjektiv:

$$\tilde{\psi}_\mathfrak{p}^\# : A_{\psi^{-1}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{A,\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} \rightarrow (\tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B)_{\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} = B_\mathfrak{p}$$

Betrachte nun die exakte A -Modulsequenz $A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow B/\psi(A) \rightarrow 0$. Diese induziert unter $-\otimes_A A_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ die exakte Folge:

$$A_\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A A_\mathfrak{q} \rightarrow B/\psi(A) \otimes_A A_\mathfrak{q} \rightarrow 0$$

Sei das Bild von $\tilde{\psi}$ von der Form $V(\mathfrak{a}) \cong \text{Spec}(B)$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} B \otimes_A A_\mathfrak{q} \neq 0 &\iff \mathfrak{q} \in \text{supp}(B), \text{ wobei } B \text{ als } A\text{-Modul aufgefasst wird} \\ &\iff \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a} \\ &\iff \mathfrak{q} \in \text{im}(\tilde{\psi}) \\ &\iff \mathfrak{q} = \psi^{-1}(\mathfrak{p}) \text{ für ein } \mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \\ &\implies B/\psi(A) \otimes_A A_\mathfrak{q} = 0 \end{aligned}$$

Somit ist $A_\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A A_\mathfrak{q}$ surjektiv für alle $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$. Es folgt die Surjektivität von ψ . Wir erhalten unter $-\otimes_A C$ die surjektive Abbildung $C \rightarrow B \otimes_A C$. Nach Beispiel 3.12 folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.27. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus und $Y = \bigcup_\lambda Y_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann ist f genau dann eine (abgeschlossene, offene) Immersion, wenn $f_\lambda = f|_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ mit $X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$ die Eigenschaft hat.

Beweis. Kein Beweis.

Bemerkung 3.28. Sind Y_1, Y_2 Unterschemata von X , so ist $Y_1 \times_X Y_2 \rightarrow X$ ein Unterschema von X , d.h. eine Immersion.

Definition 3.29. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein S -Morphismus von S -Schemata. Der Morphismus $\Gamma_f = (\text{id}_X, f)_S : X \rightarrow X \times_S Y$ heißt S -Graph von f und $\Gamma_f(X)$ heißt Graph von f . Ist $f = \text{id}_X$ die Identität, so heißt $\Delta_{X/S} = \Gamma_{\text{id}_X}$ der *Diagonalmorphismus*.

Satz 3.30. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein S -Morphismus von S -Schemata.

- (i) Sind Y und S affine Schemata, so ist Γ_f eine abgeschlossene Immersion. Insbesondere ist für X, S affin $\Delta_{X/S}$ eine abgeschlossene Immersion.
- (ii) Γ_f ist allgemein eine Immersion.

Beweis.

- (i) Sei $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ eine offene affine Überdeckung und $X \times_S Y$ das Faserprodukt. Nach Lemma 3.24 ist $p_1^{-1}(X_{\alpha}) \cong X_{\alpha} \times_S Y$ affin. Da $p_1 \circ \Gamma_f = \text{id}_X$, gilt $\Gamma_f^{-1}(p_1^{-1}(X_{\alpha})) = X_{\alpha}$. Da $\Gamma_f : \bigcup_{\alpha} \Gamma_f^{-1}(X_{\alpha} \times_S Y) \rightarrow \bigcup_{\alpha} (X_{\alpha} \times_S Y) = X \times_S Y$, können wir nach Lemma 3.27 o.B.d.A. annehmen, dass X affin ist.

Sei also $S = \text{Spec}(R)$, $X = \text{Spec}(B)$ und $Y = \text{Spec}(A)$. Sei f induziert von $\varphi : A \rightarrow B$ und Γ_f induziert von $\psi : B \otimes_R A \rightarrow A$, $b \otimes a \mapsto b\varphi(a)$. ψ ist offensichtlich surjektiv, daher ist Γ_f nach Satz 2.19 (ii) eine abgeschlossene Immersion.

- (ii) Sei zunächst S affin und $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$ eine offene affine Überdeckung. Setze $X_{\alpha} = f^{-1}(Y_{\alpha})$, $\Gamma_{f\alpha} = \Gamma_f|_{X_{\alpha}}$ und $f_{\alpha} = f|_{X_{\alpha}} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$. Es ist $\Gamma_{f\alpha}(X_{\alpha}) \subset X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha}$ nach (i) ein abgeschlossenes Unterschema und $X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha} \subset X \times_S Y_{\alpha}$ nach Satz 3.25 (i) ein offenes Unterschema ist. Nach (i) ist $\Gamma_{f\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha}$ eine Immersion. Nach Lemma 3.27 ist auch Γ_f eine Immersion.

Sei nun S beliebig und $S = \bigcup_{\lambda} S_{\lambda}$ eine offene affine Überdeckung. Nach Satz 3.21 (v) ist $(X \times_S Y) \times_S S_{\lambda} = X_{\lambda} \times_{S_{\lambda}} Y_{\lambda}$, wobei $X_{\lambda} = X \times_S S_{\lambda}$ und $Y_{\lambda} = Y \times_S S_{\lambda}$. Ferner ist $\Gamma_{f_{\lambda}}$ der Graph von $f_{\lambda} : X_{\lambda} \rightarrow Y_{\lambda}$ eine Immersion. Nach Lemma 3.27 ist auch Γ_f eine Immersion. \square

Definition 3.31. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und $y \in Y$ ein Punkt mit Restklassenkörper $\kappa(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}$. Sei weiter $i : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$ der natürliche Morphismus gegeben durch $(y, \text{id}_{\kappa(y)})$ (siehe Satz 2.18). Dann heißt das Faserprodukt $X_y = X \times_Y \text{Spec } \kappa(y)$ die *Faser* von f über dem Punkt y .

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{p_2} & \text{Spec } \kappa(y) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Satz. X_y ist ein $\kappa(y)$ -Schema mit $f^{-1}(y)$ als unterliegender topologischer Raum.

Beweis. Es ist $fp_1(X_y) = ip_2(X_y) = y$, also folgt $p_1(X_y) \subset f^{-1}(y)$ und somit $X_y = p_1^{-1}(f^{-1}(y))$. Sei $V \subset_{\circ} X$ affin mit $V \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$p_1^{-1}(V) = V_y \cong X \times_Y \text{Spec } \kappa(y) \times_X V = X_y \times_X V$$

Wir können somit o.B.d.A. X und Y als affin annehmen, sei also $X = \text{Spec}(B)$, $Y = \text{Spec}(A)$, $y = \mathfrak{p}$. Sei $\varphi : A \rightarrow B$ assoziiert zu f . Setze $\varphi' : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B' = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} =$

$\varphi(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$. Es gibt eine Folge von Homöomorphismen:

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(y) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} \\
 &\cong \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B') \mid \varphi'^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\} \\
 &\cong \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B') \mid \mathfrak{q} \supset (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})B'\} \\
 &= \operatorname{Spec}(B'/(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})B') \\
 &= \operatorname{Spec}(B' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \\
 &= \operatorname{Spec}((B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \quad \square
 \end{aligned}$$

Definition 3.32. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, so dass $f(X) \subset Y$ dicht liegt, und Y irreduzibel mit generischer Punkt ξ mit $\xi \in f(X)$. Dann heißt $f^{-1}(\xi)$ *generische Faser* von f .

Beispiel 3.33. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und:

$$X = \operatorname{Spec} k[X, Y, t]/(tY - X^2), \quad Y = \operatorname{Spec} k[t]$$

Sei $f : X \rightarrow Y$ gegeben durch die kanonische Abbildung $\varphi : k[t] \rightarrow k[X, Y, t]/(tY - X^2)$. X und Y sind integrale Schemata von endlichem Typ über k . Ferner ist f surjektiv, da φ injektiv ist (vgl. Satz 2.19 (ii)). Abgeschlossene Punkte von Y entsprechen k . Sei $a \in Y$ ein abgeschlossener Punkt und betrachte die Faser:

$$X_a = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(a) = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(aY - X^2)$$

Im Fall $a \neq 0$ ist X_a eine ebene Kurve in \mathbf{A}_k^2 , die irreduzibel und reduziert ist. Für $a = 0$ ist $X_0 = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(X^2)$ die Y -Achse. Diese ist nicht reduziert.

2.4 Separierte & eigentliche Morphismen

Definition 4.1. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. f heißt *separiert*, falls $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$ eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall sagen wir auch, dass X über Y separiert ist.

Ein Schema X heißt *separiert*, falls $X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ separiert ist.

Beispiel 4.2. Sei k ein Körper und X die affine Gerade über k mit doppeltem Nullpunkt wie in Beispiel 2.12. Dann ist $X \times_k X$ die affine Ebene mit vierfachen Nullpunkt und $\Delta(X)$ die gewöhnliche Diagonale, die zwei Nullpunkte besitzt. $\Delta(X)$ ist nicht abgeschlossen, da $\overline{\Delta(X)}$ vier Nullpunkte besitzt.

Beispiel 4.3. Ist V eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , so ist $t(V)$ separiert über k . Dies werden wir später zeigen.

Beispiel 4.4. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus affiner Schemata, so ist f separiert nach Satz 3.30 (i).

Beispiel 4.5. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Immersion, so ist f separiert, da nach Satz 3.21 (vi) $X \cong X \times_X X \cong X \times_Y X$ gilt, d.h. $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X$ ist ein Isomorphismus.

Satz 4.6. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Dann ist f genau dann separiert, wenn $\Delta(X) \subset X \times_Y X$ abgeschlossen ist.

Beweis. Für die nicht-triviale Richtung sei $\Delta(X) \subset X \times_Y X$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $X \rightarrow \Delta(X)$ ein Homöomorphismus ist, und dass der Morphismus $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$ surjektiv ist.

- Sei $p_1 : X \times_Y X \rightarrow X$ die erste Projektion. Da $p_1 \circ \Delta = \text{id}_X$, induziert Δ ein Homöomorphismus auf sein Bild.
- Sei $P \in X$ und $V \subset_o Y$ affin. Wähle $U \subset_o X$ affin mit $P \in U$ und $f(U) \subset V$. Dann ist $U \times_V U$ eine offene, affine Umgebung von $\Delta(P)$. Nach Beispiel 4.4 ist $\Delta : U \rightarrow U \times_V U$ eine abgeschlossene Immersion. Somit ist $\mathcal{O}_{X \times_Y X}|_{U \times_V U} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X|_U$ surjektiv. \square

Definition 4.7. Ein Ring R heißt *Bewertungsring*, wenn R nullteilerfrei ist, wenn von der folgenden Form ist:

$$R = \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\}$$

wobei $v : K^\times \rightarrow G$ eine Bewertung ist, d.h. $v(xy) = v(x) + v(y)$ und $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, und G eine total geordnete abelsche Gruppe ist. R ist dann lokaler Ring mit Maximalideal $\mathfrak{m} = \{x \in K^\times \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$ und $K = \text{Quot}(R)$.

Theorem 4.8. (*Bewertungstheoretisches Kriterium für Separiertheit*) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit X noethersch. Es sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist separiert.
- (ii) Sei R ein Bewertungsring des Körpers $K = \text{Quot}(R)$ und $i : U = \text{Spec}(K) \hookrightarrow T = \text{Spec}(R)$ die kanonische Inklusion. Seien ferner Morphismen $T \rightarrow Y$, $U \rightarrow X$ derart gegeben, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dann gibt es höchstens eine Abbildung $h : T \rightarrow X$, die das obige Diagramm kommutativ macht. Mit anderen Worten: Die folgende kanonische Abbildung ist für jeden Bewertungsring R über Y injektiv:

$$\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(R), X) \rightarrow \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(K), X), \quad h \mapsto h \circ i$$

Definition 4.9. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Punkt $x' \in X$ heißt *Spezialisierung* von x , wenn $x' \in \overline{\{x\}}$ gilt. Ist x'' Spezialisierung von x' und x' Spezialisierung von x , so ist x'' auch Spezialisierung von x .

Eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt *stabil unter Spezialisierungen*, falls mit $x \in Z$ auch jede Spezialisierung in Z ist. Abgeschlossene Mengen sind stabil unter Spezialisierungen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Ein Morphismus von Schemata f heißt *quasikompakt*, falls es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$ existiert, so dass alle $f^{-1}(Y_{\alpha})$ quasikompakt sind. Es gilt:

$$f \text{ quasikompakt} \iff \forall V \subset_{\circ} Y \text{ affin: } f^{-1}(V) \text{ quasikompakt}$$

Satz 4.10. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein quasikompakter Morphismus von Schemata. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist abgeschlossen.
- (ii) Ist $x \in X$ und y' eine Spezialisierung von $y = f(x)$, so gibt es eine Spezialisierung x' von x mit $f(x') = y'$. Mit anderen Worten: $f(\overline{\{x\}})$ ist stabil unter Spezialisierungen für alle $x \in X$.

Beweis. (i) \implies (ii) ist trivial. Sei also $X' \subset X$ abgeschlossen und setze $Y' = \overline{f(X')}$. Wir zeigen $Y' = f(X')$. Wir versehen X' und Y' mit der eindeutig bestimmten, reduzierte abgeschlossene Unterschemastruktur in X bzw. Y . Seien $i : X' \hookrightarrow X$ und $j : Y' \hookrightarrow Y$ die natürlichen Inklusionen. Das Urbildschema $(f \circ i)^{-1}(Y')$ ist reduziert, besitzt X' als unterliegender topologischer Raum und ist als Schema gleich X' , da die reduzierte Unterschemastrukturen eindeutig sind. Somit existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f' : X' \rightarrow Y'$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

f' erfüllt ebenfalls die Voraussetzung (ii). Ferner ist f' quasikompakt. i ist als abgeschlossene Immersion quasikompakt, also auch $f \circ i = j \circ f' : X' \rightarrow Y$. Unter Basiswechsel sehen wir, dass $X' \times_Y Y' \rightarrow Y'$ quasikompakt ist. Da j eine Immersion ist, ist $X' \cong X' \times_Y Y' = X' \times_Y Y'$, also ist $X' \rightarrow Y'$ quasikompakt.

Wir müssen noch zeigen: Ist $f : X \rightarrow Y$ ein quasikompakter, dominanter Morphismus reduzierter Schema, welcher (ii) erfüllt, so ist f surjektiv. Sei dazu $y' \in Y$ gegeben und y ein generischer Punkt der irreduziblen Komponente von Y , in der y' liegt. Somit ist y' eine Spezialisierung von y . Gilt nun $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wegen (ii) gibt es eine Spezialisierung x' von x mit $f(x') = y'$ und wir sind fertig. Somit ist noch das nächste Lemma zu zeigen. \square

Lemma 4.12. Für einen quasikompakten Morphismus $f : X \rightarrow Y$ ist äquivalent:

- (i) f ist dominant.
- (ii) Für die generischen Punkte y von Y der irreduziblen Komponenten gilt $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Korollar 4.13. Eine quasikompakte Immersion $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn $f(X)$ in Y stabil unter Spezialisierungen ist.

Beweis. f faktorisiert in eindeutiger Weise in der Form $X \xrightarrow{\sim} Z \xrightarrow{i} Y$, wobei i die kanonische Inklusion des Unterschema $Z \subset Y$ ist. Es ist i quasikompakt. Ist $f(X) = Z$ stabil unter Spezialisierungen, ist (ii) in Satz 4.10 erfüllt, daher ist $i : Z \rightarrow Y$ abgeschlossen und Z ein abgeschlossenes Unterschema in Y . \square

Lemma 4.14. Sei R ein Bewertungsring eines Körpers K und $T = \text{Spec}(R)$, $U = \text{Spec}(K)$. Sei X ein Schema. Dann gilt:

- (i) $\text{Hom}(U, X)$ ist die Menge aller Paare (x, i) mit $x \in X$ und Körperhomomorphismus $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$, wobei $\kappa(x)$ der Restklassenkörper in x bezeichnet.
- (ii) $\text{Hom}(T, X)$ ist die Menge aller Tripel (x_0, x_1, i) mit $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ und Körperhomomorphismus $\kappa(x_1) \hookrightarrow K$, so dass R über $\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}$ dominiert, wobei $\overline{\{x_1\}}$ mit der reduzierten Unterschemastruktur ausgestattet ist.

Definition 4.15. Seien $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ lokale Ringe, die in einem Körper K eingebettet sind. Wir sagen B dominiert A , wenn $A \subset B$ und $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$ gilt. Mit anderen Worten, wenn die natürliche Inklusion $A \hookrightarrow B$ ein lokaler Homomorphismus ist.

Beweis von Lemma 4.14. (i) ist gerade Satz 2.18. Setze $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$ und $t_1 = (0) \in T$. Für (ii) sei $f : T \rightarrow X$ ein Morphismus. Setze $x_i = f(t_i)$ und $Z = \overline{\{x_1\}}$ mit der reduzierten Unterschemastruktur. Dann gilt $f^{-1}(Z) = T$ als Mengen. Nach Regeln 2.21 (iii) faktorisiert f in der Form:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Z \end{array}$$

Beachte, dass für $U \subset_o Z$ mit $x_0 \in U$ auch $x_1 \in U$ gilt. Das induziert $\mathcal{O}_{Z,x_0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,x_1}$, analog haben wir $\mathcal{O}_{T,t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t_1}$. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{Z,x_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T,t_1} = K \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{O}_{Z,x_0} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T,t_0} = R \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{m}_{Z,x_0} & \longrightarrow & \mathfrak{m}_{T,t_0}
 \end{array}$$

Da Z reduziert und irreduzibel ist, ist Z integer. Daher ist $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1)$, alle Abbildungen sind injektiv und wir sehen, dass R über \mathcal{O}_{Z,x_0} dominiert.

Sei umgekehrt $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \in \overline{\{x_1\}} = Z$ und $\mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$ ein lokaler Homomorphismus. Das induziert $T = \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \rightarrow Z \rightarrow X$. Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander. \square

Beweis zu Theorem 4.8. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata mit X noethersch.

- Sei zunächst f separiert und R ein Bewertungsring des Körpers $K = \text{Quot}(R)$ mit Inklusion $i : U = \text{Spec}(K) \hookrightarrow \text{Spec}(R) = T$. Seien $T \rightarrow Y$, $U \rightarrow X$ gegeben und $h_1, h_2 : T \rightarrow X$ mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow f \\
 T & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Setze $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$ und $t_1 = (0) \in T$. Aus der Kommutativität $h_1 i = h_2 i$ folgt insbesondere $h_1(t_1) = h_2(t_1)$. Setze $h'' = (h_1, h_2)_Y : T \rightarrow X \times_Y X$. Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & X & & \\
 \downarrow i & & \downarrow \Delta & & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{h''} & X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\
 & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

$h_1 i$ (oben, von U nach X)
 $h_2 i$ (unten, von T nach X)

Es gilt $\{h''(t_1)\} = h''i(U) \subset \Delta(X)$. Da f separiert ist, ist $\Delta(X)$ abgeschlossen und es folgt $h''(t_0) \in h''(\overline{\{t_1\}}) \subset \overline{\{h''(t_1)\}} \subset \Delta(X)$. Es folgt:

$$h_1(t_0) = p_1 h''(t_0) = p_2 h''(t_0) = h_2(t_0)$$

Aus der Kommutativität folgt, dass h_1^\sharp und h_2^\sharp dieselbe Abbildung $\kappa(x_1) \hookrightarrow K$ mit $x_1 = h_1(t_1) = h_2(t_1)$ induzieren. Mit Lemma 4.14 (ii) folgt $h_1 = h_2$.

- Für die andere Richtung genügt es nach Satz 4.6 zu zeigen, dass $\Delta(X) \subset X \times_Y X$ abgeschlossen ist. Nach Satz 3.30 (ii) ist Δ eine Immersion. Da X noethersch ist, ist Δ quasikompakt. Nach Korollar 4.13 genügt es zu zeigen, dass $\Delta(X)$ stabil unter Spezialisierungen ist.

Sei also $\xi_1 \in \Delta(X)$ und $\xi_0 \in \overline{\{\xi_1\}}$. Sei $K = \kappa(\xi_1)$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overline{\{\xi_1\}}, \xi_0}$, wobei $\overline{\{\xi_1\}}$ mit der reduzierten Unterschemastruktur versehen ist, d.h. \mathcal{O} ist ein lokaler Ring in K . Mit Satz 4.16 und dem Lemma von Zorn sehen wir, dass für jeden lokalen Ring \mathcal{O} in K einen Bewertungsring R gibt, der \mathcal{O} dominiert. Sei R ein solcher Bewertungsring. Nach 4.14 (ii) haben wir einen Morphismus $h : T = \text{Spec}(R) \rightarrow X \times_Y X$ mit $t_i \mapsto \xi_i$, wobei $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$, $t_1 = (0) \in T$. Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(K) & \xrightarrow{i} & T & \xrightarrow{p_1 h} & X \\
 & & \searrow h & & \downarrow p_1 \\
 & & X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\
 & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \nearrow p_2 h & & &
 \end{array}$$

Ist $x \in X$, so ist $\kappa(x) \cong \kappa(\Delta(x))$, wegen:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times_Y X \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow p_i \\
 & & X
 \end{array}$$

Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\quad g \quad} & X \\
 & \searrow hi & \downarrow \Delta \\
 & & X \times_Y X
 \end{array}$$

Wähle ein $x_1 \in X$ mit $\Delta(x_1) = \xi_1$ und $j : \kappa(x_1) \hookrightarrow K$ als den von hi induzierten $\kappa(\Delta(x_1)) \hookrightarrow K$. Nach Lemma 4.14 (i) erhalten wir den zu (x_1, j) passenden Morphismus $g : \text{Spec}(K) \rightarrow X$, das das obige Diagramm kommutativ macht. Also faktorisiert $\text{Spec}(K) \rightarrow X \times_Y X$ über $\text{Spec}(K) \rightarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X$, d.h. $p_1 hi = p_2 hi$. Nach Voraussetzung folgt $p_1 h = p_2 h$, d.h. auch $T \rightarrow X \times_Y X$ faktorisiert über $T \rightarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X$. Somit folgt $\xi_0 \in \Delta(X)$. \square

Satz 4.16. Sei K ein Körper und $R \subset K$ ein lokaler Ring. Dann ist R genau dann ein Bewertungsring, wenn für jeden lokalen Ring $R \subset S \subset K$ mit lokalem Homomorphismus $R \hookrightarrow S$ stets $R = S$ folgt.

Beweis. Siehe z.B. Bourbaki, Algebra VI §13.

Satz 4.17. Alle involvierten Schemata sind noethersch. Dann gilt:

- (i) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.
- (ii) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
- (iii) Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel.
- (iv) Sind $f : X \rightarrow Y$, $f' : X' \rightarrow Y'$ separierte Morphismen von S -Schemata, so ist auch $f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ separiert.
- (v) Ist $f \circ f'$ separiert, so ist auch f separiert.
- (vi) $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann separiert, wenn es eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ gibt, so dass alle $f^{-1}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$ separiert sind.

Beweis. Folgt alles aus Theorem 4.8. □

Definition 4.18. Ein Morphismus von Schemata $f : X \rightarrow Y$ heißt *eigentlich*, wenn gilt:

- (i) f ist von endlichem Typ.
- (ii) f ist separiert.
- (iii) f ist *universell abgeschlossen*, d.h. für jeden Morphismus $Y' \rightarrow Y$ ist der Morphismus $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ abgeschlossen.

In diesem Fall heißt X auch *eigentlich über Y* .

Beispiel 4.19. Sei k ein Körper und $X = \mathbf{A}_k^1$ die affine Gerade. Dann ist X separiert und von endlichem Typ. Basiserweiterung mit $X \rightarrow k$ ergibt $X \times_k X \rightarrow X$, die Projektionsabbildung $\mathbf{A}_k^2 \rightarrow \mathbf{A}_k^1$. Sei $Y = \text{Spec}(k[X, Y]/(XY - 1))$ die hyperbolische Kurve in \mathbf{A}_k^2 . $Y \subset \mathbf{A}_k^2$. Diese ist abgeschlossen in \mathbf{A}_k^2 und projiziert sich in \mathbf{A}_k^1 auf $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$, die in \mathbf{A}_k^1 nicht abgeschlossen ist. Daher ist die Projektionsabbildung nicht abgeschlossen. In diesem Beispiel fehlt der unendliche Punkt von Y . Wir werden später zeigen, dass X eigentlich über k ist, wenn X eine sogenannte projektive Varietät.

Theorem 4.20. (*Bewertungstheoretisches Kriterium für Eigentlichkeit*) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von endlichem Typ mit X noethersch. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist eigentlich.
- (ii) Sei R ein Bewertungsring des Körpers $K = \text{Quot}(R)$ und $i : U = \text{Spec}(K) \hookrightarrow T = \text{Spec}(R)$ die kanonische Inklusion. Seien ferner Morphismen $T \rightarrow Y$ und $U \rightarrow X$ derart gegeben, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : T \rightarrow X$, der das Diagramm kommutativ macht. Mit anderen Worten ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\text{Hom}_Y(T, X) \rightarrow \text{Hom}_Y(U, X), h \mapsto h \circ i$$

Lemma 4.21.

- (i) Abgeschlossene Immersionen sind von endlichem Typ. Quasikompakte offene Immersionen sind von endlichem Typ.
- (ii) Kompositum zweier Morphismen von endlichem Typ ist von endlichem Typ.
- (iii) Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn f lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.
- (iv) Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen mit f quasikompakt und $g \circ f$ von endlichem Typ. Dann ist f von endlichem Typ.

Beweis von Theorem 4.20.

- Sei f eigentlich. Nach Definition ist f separiert, somit ist ein Morphismus $h : T \rightarrow X$ wie oben eindeutig bestimmt nach Theorem 4.8. Es bleibt die Existenz zu zeigen. Betrachte die Basiserweiterung $X_T = X \times_Y T$ von X mit $T \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccccc} U & & \xrightarrow{u} & & X \\ & \searrow \theta & & \searrow p_1 & \downarrow f \\ & & X_T & & \\ & \searrow i & \downarrow f' & & \\ & & T & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

Wir erhalten ein $\theta : U \rightarrow X_T$, so dass das obige Diagramm kommutiert. Sei $\xi_1 \in X_T$ das Bild des einzigen Punktes $t_1 \in U$ und $Z = \overline{\{\xi_1\}} \subset X_T$ mit der reduzierten Unterschemastruktur. Da f universell abgeschlossen ist, ist f' abgeschlossen, somit ist $f'(Z) \subset T$ abgeschlossen. Da $f'(\xi_1) = t_1$ und t_1 der generische Punkt von T ist, gilt $f'(Z) = T$. Es existiert also ein $\xi_0 \in Z$ mit $f'(\xi_0) = t_0$, wobei t_0 der abgeschlossene Punkt in T ist.

Betrachte den zu f' gehörigen lokalen Homomorphismus $R \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z, \xi_0}$. Da ξ_1 der generische Punkt von Z ist, gilt $\kappa(\xi_1) = \mathcal{O}_{Z, \xi_1}$ und nach Lemma 4.14 (i) erhalten wir $\kappa(\xi_1) \subset K$, der durch $U \rightarrow Z$ induziert wird. Nach Satz 4.16 ist R als Bewertungsring maximal unter allen lokalen Ringen in K bzgl. Dominanz. Ferner gilt $\mathcal{O}_{Z, \xi_0} \subset \mathcal{O}_{Z, \xi_1} = \kappa(\xi_1) \subset K$ und $\mathcal{O}_{Z, \xi_0} \subsetneq K$, da $\xi_0 \neq \xi_1$. Wegen $f'(\xi_0) = t_0$ dominiert \mathcal{O}_{Z, ξ_0} den Ring R , d.h. $R \cong \mathcal{O}_{Z, \xi_0}$, insbesondere dominiert R über \mathcal{O}_{Z, ξ_0} . Nach Lemma 4.14 (ii) erhalten wir Morphismus $h' : T \cong \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \xi_0}) \rightarrow X_T$, $t_i \mapsto \xi_i$. Wir erhalten $h : T \xrightarrow{h'} X_T \xrightarrow{p_1} X$ mit $fh = fp_1h' = tf'h' = t$ und $hi = p_1h'i = p_1h'f'\theta = p_1\theta = u$.

- Es gelte (ii). f ist nach Voraussetzung von endlichem Typ und separiert nach Theorem 4.8. Sei also $Y' \rightarrow Y$ ein Morphismus und $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ die Basiserweiterung von f . Wir zeigen, dass f' abgeschlossen ist. Sei $Z \subset X'$ abgeschlossen mit der reduzierten Unterschemastruktur. Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \hookrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Da f von endlichem Typ ist, ist nach Satz 3.25 (ii) auch f' von endlichem Typ. Es folgt, dass $f'|_Z : Z \rightarrow Y'$ von endlichem Typ ist und somit quasikompakt. $f'|_Z$ faktorisiert über $Z \rightarrow f'(Z) \hookrightarrow Y'$. Wir sehen, dass $f'(Z) \hookrightarrow Y'$ quasikompakt ist. Nach Korollar 4.13 genügt es zu zeigen, dass $f'(Z)$ stabil unter Spezialisierungen ist.

Sei also $z_1 \in Z$ und $y_1 = f'(z_1)$, $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$. Wir verstehen $\overline{\{y_1\}}$ mit der reduzierten Unterschemastruktur. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overline{\{y_1\}}, y_0}$. Dann ist $\text{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \hookrightarrow \kappa(z_1) =: K$. Sei R ein Bewertungsring von K , der \mathcal{O} dominiert. Nach Lemma 4.14 haben wir Morphismen:

$$U = \text{Spec}(K) \rightarrow Z, \quad t_1 \mapsto z_1$$

$$T = \text{Spec}(R) \rightarrow Y', \quad t_i \mapsto y_i$$

Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & Z & \hookrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & & \searrow & \downarrow f' & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\quad} & & & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein Morphismus $h : T \rightarrow X$, der das Diagramm kommutativ macht. Aus der Universaleigenschaft des Faserprodukts X' erhalten wir ein Morphismus $h' : T \rightarrow X'$, der $h : T \rightarrow X$ liftet. Nach Voraussetzung ist Z abgeschlossen und da der generische Punkt $t_1 \in T$ auf $z_1 \in X'$ abgebildet wird, faktorisiert $h' : T \rightarrow X'$ über $h' : T \rightarrow Z \rightarrow X'$. Setze $z_0 = h'(t_0) \in Z$. Dann ist $f'(z_0) = y_0$, also $y_0 \in f'(Z)$. \square

Korollar 4.22. Alle vorkommenden Schemata seien noethersch.

- (i) Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich.
- (ii) Kompositum zweier eigentlicher Morphismen ist eigentlich.
- (iii) Eigentliche Morphismen sind stabil unter Basiserweiterung.
- (iv) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $f' : X' \rightarrow Y'$ eigentliche Morphismen von S -Schemata. Dann ist $f \times f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ eigentlich.
- (v) Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen. Ist $g \circ f$ eigentlich und g separabel, so ist f eigentlich.
- (vi) Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann eigentlich, wenn es eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ gibt, so dass $f^{-1}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$ für alle α eigentlich ist.

Beweis. Wir zeigen nur (v). Da X noethersch ist, ist f quasikompakt. Nach Lemma 4.21 ist f von endlichem Typ. Nach Satz 4.17 ist f separiert. Sei nun R ein Bewertungsring und seien Morphismen $U \rightarrow X$, $T \rightarrow Y$ gegeben mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{t} & Y \\ & \searrow t' & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Wir wollen ein $h : T \rightarrow X$ konstruieren mit $fh = t$ und $hi = u$. Setze $t' = gt$. Da gf eigentlich ist, gibt es genau ein $h : T \rightarrow X$ mit $gf h = t'$ und $hi = u$. Sei $t'' = fh$. Nun ist g separabel und $ti = fu = fhi = t''i$ und $gt = t' = gfh = gt''$. Nach Theorem 4.8 folgt $t = t''$ und somit $fh = t$. \square

Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ der zugehörige Morphismus, so gilt:

$$\mathbf{P}_B^n \cong \mathbf{P}_A^n \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$$

Insbesondere gilt $\mathbf{P}_A^n \cong \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} A$.

Definition 4.23.

- (i) Sei Y ein Schema. Dann heißt $\mathbf{P}_Y^n = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y$ der n -dimensionale projektive Raum über Y .
- (ii) Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata heißt *projektiv*, wenn er eine Faktorisierung $f : X \xrightarrow{i} \mathbf{P}_Y^n \xrightarrow{p_2} Y$ besitzt, wobei i eine abgeschlossene Immersion ist.
- (iii) Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata heißt *quasiprojektiv*, falls er eine Faktorisierung der Form $f : X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p} Y$ besitzt, wobei i eine offene Immersion und p projektiv ist.

Theorem 4.24. Ein projektiver Morphismus von noetherschen Schemata ist eigentlich. Ein quasiprojektiver Morphismus von noetherschen Schemata ist von endlichem Typ und separiert.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n$ eigentlich über \mathbb{Z} ist, da der Basiswechsel nach Korollar 4.22 (iii) eigentlich über Y ist. Ist $f : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$ projektiv, so ist er als Verkettung von eigentlichen Morphismen wieder eigentlich, siehe Korollar 4.22. Ist $f : X \hookrightarrow X' \rightarrow Y$ quasiprojektiv, so ist f als Verkettung separierter Morphismen separiert, siehe Korollar 4.17. Da X noethersch ist, ist $X \hookrightarrow X'$ eine quasikompakte offene Immersion, also nach Lemma 4.21 (i) vom endlichem Typ.

Sei also $X = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n$ und $X = \bigcup V_i$ eine offene affine Überdeckung mit $V_i = D_+(x_i) = \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$. Es ist also X von endlichem Typ. Sei nun R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(R)$ und $U \rightarrow X$, $T \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ Morphismen mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{t} & \text{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass genau ein Morphismus $h : T \rightarrow X$ existiert, der das obige Diagramm kommutativ ergänzt. Für $n = 0$ ist $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ und die Aussage ist klar. Sei $n \geq 1$ und ξ_1 das Bild des einzigen Punktes aus U in X . Ist $\xi_1 \in X \setminus V_i$ für ein i , so folgt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung, da die Hyperebene $X \setminus V_i$ isomorph zu $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$ ist.

Sei also $\xi_1 \in \bigcap V_i$, d.h. alle Funktionen der Form $\frac{x_i}{x_j}$ sind invertierbar in \mathcal{O}_{ξ_1} . Der Morphismus $U \rightarrow X$ liefert Inklusion $\kappa(\xi_1) \hookrightarrow K$. Sei weiter $f_{ij} \in K^\times$ das Bild von $\frac{x_i}{x_j}$ unter $\mathcal{O}_{\xi_1} \rightarrow \kappa(\xi_1) \hookrightarrow K$. Dann folgt $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$ für alle i, j, k . Sei $v : K \rightarrow G$ die zu R gehörige Bewertung und setze $g_i = v(f_{i0})$ für alle i . Sei k derart, dass g_k minimal unter g_0, \dots, g_n ist. Es gilt für alle i :

$$v(f_{ik}) = v(f_{i0}) - v(f_{k0}) = g_i - g_k \geq 0$$

Es folgt $f_{ik} \in R$ für alle i . Es gibt Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\left[\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}\right] & \xrightarrow[\frac{x_i}{x_k} \mapsto f_{ik}]{\varphi} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\xi_1} & \longrightarrow \kappa(\xi_1) \longrightarrow & K \end{array}$$

Wir erhalten den zu φ gehörige Morphismus $T \rightarrow V_k$ und somit $h : T \rightarrow V_k \hookrightarrow X$. Offensichtlich ist $T \rightarrow X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ der Morphismus t und $U \rightarrow T \rightarrow X$ der Morphismus u . Ferner ist h eindeutig nach Konstruktion. \square

Satz 4.25. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Das Bild des Funktors $t : \mathbf{Var}(k) \rightarrow \mathbf{Sch}(k)$ ist die Menge aller quasiprojektiven, integren Schemata über k . Insbesondere ist $t(V)$ integer, separiert und von endlichem Typ für jede Varietät V .

Beweis. Ohne Beweis.

Satz 4.26. Sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k . Dann ist die Menge der abgeschlossenen Punkte in X dicht in X .

Definition 4.27. Eine (*abstrakte*) *Varietät* ist ein integrales, separiertes Schema X von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Ist X über k eigentlich, so heißt X *vollständig*. Quasiprojektive abstrakte Varietäten entsprechen den klassischen Varietäten.

Bemerkung 4.28.

- (i) Eine projektive, abstrakte Varietät ist vollständig nach Theorem 4.24.
- (ii) Es gibt vollständige Varietäten, die nicht projektiv sind, d.h. die Klasse der abstrakten Varietäten ist größer als die Klasse der klassischen Varietäten.
- (iii) Jede vollständige abstrakte Varietät der Dimension 1, d.h. eine vollständige Kurve, ist projektiv.
- (iv) Jede Varietät kann als offene Menge in eine vollständige Varietät eingebettet werden.

2.5 Modulgarben

Definition 5.1. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum.

- (i) Eine *Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln* bzw. *\mathcal{O}_X -Modul* ist eine Garbe \mathcal{F} auf X derart, dass $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul für alle $U \subset_o X$ ist und alle $\text{res} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, $V \subset U$ verträglich mit den Modulstrukturen via $\text{res} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ ist.
- (ii) Ein *Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$* von \mathcal{O}_X -Moduln ist ein Garbenmorphismus, so dass $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus für alle $U \subset_o X$ ist.
- (iii) Eine Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln heißt *exakt*, wenn sie exakt als Garbensequenz abelscher Garben ist.
- (iv) Sind \mathcal{F}, \mathcal{G} \mathcal{O}_X -Moduln, so bezeichnet $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ die Gruppe der Morphismen von \mathcal{F} nach \mathcal{G} .
- (v) Sind \mathcal{F}, \mathcal{G} \mathcal{O}_X -Moduln, so heißt die Garbe $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ die *Hom-Garbe* und wird mit $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnet. Diese ist ein \mathcal{O}_X -Modul.
- (vi) Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} \mathcal{O}_X -Moduln. Dann heißt die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe das *Tensorprodukt* von \mathcal{F} und \mathcal{G} . Diese wird mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ bezeichnet.
- (vii) Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt *frei*, wenn \mathcal{F} isomorph zu einer direkten Summe von Exemplaren von \mathcal{O}_X ist.
- (viii) Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt *lokal frei*, wenn X durch offene Mengen U überdeckt werden kann, so dass $\mathcal{F}|_U$ freier $\mathcal{O}_X|_U$ -Modul ist.

Der *Rang* r von \mathcal{F} auf U ist gerade die Anzahl der Kopien von $\mathcal{O}_X|_U$. Wir schreiben $\text{rang}(\mathcal{F}|_U) = r$. Ist X zusammenhängend, so ist dieser Rang überall gleich.

- (ix) Ein lokal freier \mathcal{O}_X -Modul vom Rang 1 heißt *invertierbare Garbe*.
- (x) Eine *Idealgarbe* auf X ist ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{I} , der Untergarbe von \mathcal{O}_X ist, d.h. $\mathcal{I}(U)$ ist ein Ideal von $\mathcal{O}_X(U)$ für $U \subset_o X$.
- (xi) Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von geringten Räumen und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist $f_*\mathcal{F}$ ein $f_*\mathcal{O}_X$ -Modul und somit auch ein \mathcal{O}_Y -Modul unter dem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. $f_*\mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von \mathcal{F} unter f .
Sei \mathcal{G} ein \mathcal{O}_Y -Modul. Dann ist $f^{-1}\mathcal{G}$ ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul. Betrachte das Bild θ von f^\sharp unter dem Adjunktionsisomorphismus $\text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$. Durch θ wird \mathcal{O}_X zu einem $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul. Wir definieren:

$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

Somit ist $f^*\mathcal{G}$ ein \mathcal{O}_X -Modul, das *Urbild* von \mathcal{G} unter f .

Für jeden \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} und \mathcal{O}_Y -Modul \mathcal{G} gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Somit ist f^* linksadjungiert zu f_* .

Bemerkung.

- (i) Kern, Bild und Kokern eines Morphismus von \mathcal{O}_X -Moduln ist wieder ein \mathcal{O}_X -Modul.
- (ii) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ \mathcal{O}_X -Moduln und \mathcal{F}' eine Untergarbe von \mathcal{F} , so ist \mathcal{F}/\mathcal{F}' ein \mathcal{O}_X -Modul.
- (iii) Direkte Summen, direkte Produkte und projektive Limiten von \mathcal{O}_X -Moduln sind wieder \mathcal{O}_X -Moduln.

Definition. Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Wir definieren die zu M assoziierte Garbe \widetilde{M} auf $\text{Spec}(A)$ wie folgt: Für $U \subset_o \text{Spec}(A)$ setzen wir $\widetilde{M}(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$, so dass:

- (i) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$.
- (ii) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von \mathfrak{p} mit $V \subset U$ und Elemente $m \in M, f \in A$, so dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ stets $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_{\mathfrak{q}}$ gilt.

Dann ist \widetilde{M} mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe.

Satz 5.2. Sei A ein Ring und M ein A -Modul mit der assoziierten Garbe \widetilde{M} auf $X = \text{Spec}(A)$. Dann gilt:

- (i) \widetilde{M} ist ein \mathcal{O}_X -Modul.
- (ii) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ gilt für den Halm von \widetilde{M} in \mathfrak{p} stets $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$.
- (iii) Für alle $f \in A$ gibt es einen A_f -Modulisomorphismus $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$.
- (iv) Insbesondere gilt $\Gamma(X, \widetilde{M}) \cong M$.

Beweis. (i) ist klar. (iv) folgt aus (iii) mit $f = 1$. (ii) und (iii) gehen analog zu 2.3. \square

Satz 5.3. Sei A ein Ring und $X = \text{Spec}(A)$. Ferner sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ der entsprechende Morphismus. Dann gilt:

- (i) Die Abbildung $M \mapsto \widetilde{M}$ liefert einen exakten, volltreuen Funktor von der Kategorie der A -Moduln in die Kategorie der \mathcal{O}_X -Moduln.
- (ii) Seien M, N A -Moduln. Dann gilt $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.
- (iii) Sei $(M_i)_i$ eine Familie von A -Moduln. Dann gilt $\widetilde{\bigoplus_i M_i} \cong \bigoplus_i \widetilde{M_i}$.
- (iv) Sei N ein B -Modul. Dann gilt $f_* \widetilde{N} \cong \widetilde{{}_A N}$, wobei ${}_A N$ den Modul N als A -Modul via φ bezeichnet.
- (v) Sei M ein A -Modul. Dann gilt $f^* \widetilde{M} \cong \widetilde{M \otimes_A B}$.

Beweis. Für (i) zeigen wir:

- *Funktorialität:* Sei $\psi : M \rightarrow N$ ein A -Modulhomomorphismus. Dieser induziert für alle $f \in A$ einen A_f -Modulhomomorphismus $\psi_f : M_f \rightarrow N_f$. Ist $D(f) \supset D(g)$, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\psi_f} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_g & \xrightarrow{\psi_g} & N_g \end{array}$$

Da $D(f)$, $f \in A$ eine Basis der Topologie bilden, induzieren ψ_f , $f \in A$ einen \tilde{A} -Homomorphismus $\tilde{\psi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ mit $\tilde{\psi}|_{D(f)} = \psi_f$.

- *Volltreu:* Die Umkehrabbildung zu $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ ist gegeben durch das Bilden der globalen Schnitte:

$$\text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N}) \rightarrow \text{Hom}_A(\Gamma(X, \tilde{M}), \Gamma(X, \tilde{N})) = \text{Hom}_A(M, N)$$

- *Exaktheit:* Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von A -Moduln. Da Lokalisierungen exakt sind, ist $0 \rightarrow M'_p \rightarrow M_p \rightarrow M''_p \rightarrow 0$ exakt. Nach Satz 5.2 (ii) ist $\tilde{M}_p = M_p$. Da jede Halmsequenz exakt ist, folgt nach 1.10 die Exaktheit von $0 \rightarrow \tilde{M}' \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'' \rightarrow 0$.

(ii) und (iii) folgen, da direkte Summen und Tensorprodukte mit Lokalisierungen kommutieren. Für (iv) sei $g \in A$. Es gilt:

$$\Gamma(D(g), f_*\tilde{N}) = \Gamma(f^{-1}(D(g)), \tilde{N}) = \Gamma(D(\varphi(g)), \tilde{N}) \cong N_{\varphi(g)} = N_g \cong \Gamma(D(g), \tilde{N})$$

Für (v) sei N ein B -Modul. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\tilde{B}}(f^*\tilde{M}, \tilde{N}) &= \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, f_*\tilde{N}) \stackrel{(iv)}{=} \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \widetilde{AN}) \\ &= \text{Hom}_A(M, {}_AN) \stackrel{\star}{\cong} \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \cong \text{Hom}_{\tilde{B}}(\widetilde{M \otimes_A B}, \tilde{N}) \end{aligned}$$

wobei \star durch die Abbildung $\eta \mapsto (m \otimes b \mapsto \eta(m)b)$ gegeben ist. □

Definition 5.4.

- (i) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt *quasikohärent*, falls es eine offene affine Überdeckung $U_i = \text{Spec}(A_i)$, $i \in I$ von X gibt, so dass für jedes i ein A_i -Modul M_i existiert mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$.
- (ii) \mathcal{F} heißt *kohärent*, falls \mathcal{F} quasikohärent ist und alle vorkommenden M_i in (i) endlich erzeugte A_i -Moduln sind.

Beispiel 5.5. Für jedes Schema X ist \mathcal{O}_X kohärent, da $\mathcal{O}_X|_{\mathrm{Spec}(A)} = \widetilde{A}$.

Beispiel 5.6. Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin und $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema, das durch das Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ definiert ist. Sei $i : Y \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Es ist $\mathcal{O}_Y \cong \widetilde{A/\mathfrak{a}}$ und somit $i_*\mathcal{O}_Y = \widetilde{A/\mathfrak{a}}$, wobei hier A/\mathfrak{a} als A -Modul aufgefasst wird. Somit ist $i_*\mathcal{O}_Y$ ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul.

Beispiel 5.7. Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin und $U \subsetneq X$ mit der natürlichen Inklusion $j : U \hookrightarrow X$. Betrachte die Garbe $j_!\mathcal{O}_U$, die außerhalb U durch Null fortgesetzte Garbe von \mathcal{O}_U . $j_!\mathcal{O}_U$ ist nicht quasikohärent:

Sei X irreduzibel und $V = \mathrm{Spec}(A) \subsetneq X$ mit $V \subsetneq U$. Wäre $j_!\mathcal{O}_U|_V \cong \widetilde{M}$ für einen A -Modul M , so ist $(j_!\mathcal{O}_U|_V)(V) = M$, aber $(j_!\mathcal{O}_U|_V)(V) = 0$ und $j_!\mathcal{O}_U|_V \neq 0$.

Lemma 5.8. Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema, $f \in A$ und \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul.

- (i) Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $s|_{D(f)} = 0$. Dann existiert ein $n > 0$ mit $f^n s = 0$.
- (ii) Sei $t \in \Gamma(D(f), \mathcal{F})$. Dann existiert ein $n > 0$ und $t' \in \mathcal{F}(X)$ mit $f^n t = t'|_{D(f)}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es eine Überdeckung der Form $X = \bigcup_{i=1}^m D(g_i)$ gibt, so dass $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ für einen A_{g_i} -Modul M_i .

Da \mathcal{F} quasikohärent ist, existiert eine offene affine Überdeckung aus Mengen der Form $V = \mathrm{Spec}(B)$ mit $\mathcal{F}|_V = \widetilde{M}$ für einen B -Modul M . Wir schreiben $V = \bigcup_{\text{gewisse } g \in A} D(g)$. Die natürlichen Morphismen $D(g) \hookrightarrow V$ liefern Ringhomomorphismen $B \rightarrow A_g$. Nach Satz 5.3 (v) ist $\mathcal{F}|_{D(g)} \cong \widetilde{M \otimes_B A_g}$. Da X affin und somit quasikompakt ist, kann X durch solche Mengen endlich überdeckt werden.

- (i) Setze s_i als das Bild von $s|_{D(g_i)}$ unter $\Gamma(D(g_i), \mathcal{F}) = \Gamma(D(g_i), \widetilde{M_i}) \cong M_i$. Wegen $D(fg_i) = D(f) \cap D(g_i)$ folgt nach Satz 5.2 (iii) $\Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}) = (M_i)_f$. Also ist $s_i = 0$ in $(M_i)_f$. Nach Definition gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit $f^{n_i} s_i = 0$ in M_i . Sei n das Maximum aller n_i , $i = 1, \dots, m$. Dann folgt $f^n s = 0$ aus der ersten Garbeneigenschaft.
- (ii) Betrachte die Einschränkungen $t \in \Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}) = (M_i)_f$. Für alle i gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$, so dass $f^{n_i} t = t_i|_{D(fg_i)}$ für ein $t_i \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F}) = M_i$. Sei n das Maximum aller n_i , $i = 1, \dots, m$. Dann gibt es für alle i ein $t_i \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$ mit $f^n t = t_i|_{D(fg_i)}$. Auf $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$ haben wir Schnitte t_i, t_j konstruiert, die auf $D(fg_i g_j)$ übereinstimmen. Nach (i) gibt es ein m_{ij} , so dass $f^{m_{ij}}(t_i - t_j) = 0$ auf $D(g_i g_j)$ gilt. Sei m das Maximum aller m_{ij} , so dass $f^m(t_i - t_j) = 0$ auf $D(g_i g_j)$ für alle i, j gilt. Die lokalen Schnitte $f^m t_i$ in $\Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$ verkleben sich somit zu einem globalen Schnitt t' von \mathcal{F} zusammen mit $t'|_{D(f)} = f^{n+m} t$. \square

Satz 5.9. Sei X ein Schema und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist \mathcal{F} genau dann quasikohärent, wenn für alle affinen $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$ ein A -Modul M existiert mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$.

Ist X noethersch, so ist \mathcal{F} genau dann kohärent, wenn für alle affinen $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$ ein endlich erzeugter A -Modul M existiert mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$.

Lemma. Sei $X = \text{Spec}(A)$ affin, M ein A -Modul und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \rightarrow \text{Hom}_{\widetilde{A}}(\widetilde{M}, \mathcal{F}), \quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$$

ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\theta \mapsto \Gamma(X, \theta)$.

Beweis von Satz 5.9. Die Rückrichtungen der beiden Aussagen sind trivial. Sei $U \subset_o X$ affin. Nach dem Beweis von Lemma 5.8 gibt es eine Basis der Topologie von U , bestehend aus affinen Teilmengen V_i derart, dass $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \widetilde{N_i}$ mit einem Modul N_i ist. Somit ist $\mathcal{F}|_U$ quasikohärent. Wir können somit o.B.d.A. $X = U = \text{Spec}(A)$ als affin annehmen.

Setze $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ und $\alpha : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}$ als das Bild von id_M unter der Abbildung im vorherigen Lemma. Wie im Beweis von Lemma 5.8 gezeigt, gibt es eine Überdeckung der Form $X = \bigcup_{i=1}^n D(g_i)$ mit $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ für einen A_{g_i} -Modul M_i . Es gilt $M_i = \mathcal{F}(D(g_i)) \cong M_{g_i}$ und wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X)_{g_i} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(D(g_i)) \\ \uparrow & \nearrow \text{res} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

Somit ist $\alpha|_{D(g_i)}$ ein Isomorphismus für alle i . Da die $D(g_i)$ ganz X überdecken, ist α ein Isomorphismus.

Sei nun X zusätzlich noethersch. Dann sind die A_{g_i} -Moduln M_{g_i} endlich erzeugt. Wir zeigen, dass M endlich erzeugt ist. Da A noethersch ist, sind alle A_{g_i} noethersch. Also sind die endlich erzeugten A_{g_i} -Moduln M_{g_i} noethersch. Analog zu Satz 3.6 folgt M noethersch. Insbesondere ist M endlich erzeugt. \square

Korollar 5.10. Sei A ein Ring und $X = \text{Spec}(A)$. Dann ist

$$\{\text{Kategorie der } A\text{-Moduln}\} \rightarrow \{\text{Kategorie der quasikohärenten } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}\}, \quad M \mapsto \widetilde{M}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit der Umkehrabbildung $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. Ist A noethersch, so geben dieselben Funktoren eine Kategorienäquivalenz zwischen den endlich erzeugten A -Moduln und den kohärenten \mathcal{O}_X -Moduln.

Beweis. Sei \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Nach Satz 5.9 existiert ein A -Modul M mit $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$. Nach Satz 5.2 (iv) ist $\Gamma(X, \mathcal{F}) = M$, also:

$$M \mapsto \widetilde{M} \mapsto \Gamma(X, \widetilde{M}) = M, \quad \mathcal{F} = \widetilde{M} \mapsto \Gamma(X, \widetilde{M}) = M \mapsto \widetilde{M} \quad \square$$

Satz 5.11. Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema und sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln, wobei \mathcal{F}' quasikohärent ist. Dann ist die Sequenz der globalen Schnitte ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

Beweis. Da $\Gamma(X, -)$ linksexakt ist, bleibt nur die Surjektivität von $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ zu zeigen. Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ gegeben. Für $x \in X$ gibt es ein $f \in A$ mit $x \in D(f) \subset X$, so dass $s|_{D(f)}$ sich zu einem $t \in \mathcal{F}(D(f))$ liftet. Wir zeigen nun, dass es ein $r > 0$ existiert, so dass sich $f^r s$ zu einem $t'' \in \mathcal{F}(X)$ liftet.

Sei $X = \bigcup_i D(g_i)$ eine endliche offene Überdeckung, so dass sich $s|_{D(g_i)}$ zu einem $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ liftet. Auf $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ liften $t_i, t \in \mathcal{F}(D(fg_i))$ beide s . Aus der Linksexaktheit von $\Gamma(D(fg_i), -)$ folgt $t - t_i \in \mathcal{F}'(D(fg_i))$. Da \mathcal{F}' quasikohärent ist, folgt aus Lemma 5.8 (ii) die Existenz eines $n > 0$ und $u_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$ mit $u_i|_{D(fg_i)} = f^n(t - t_i)$. Wir können n unabhängig von i wählen. Setze $t'_i = f^n t_i + u_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$. Dann ist t'_i ein Lift von $f^n s|_{D(g_i)}$ und $\star t'_i = f^n t$ auf $\mathcal{F}(D(fg_i))$. Auf $D(g_i g_j)$ liften t'_i und t'_j beide $f^n s$, also $t'_i - t'_j \in \mathcal{F}'(D(g_i g_j))$ und daher $t'_i = t'_j$ auf $\mathcal{F}(D(fg_i g_j))$ wegen \star . Nach Lemma 5.8 (i) existiert ein $m > 0$, so dass $f^m(t'_i - t'_j) = 0$ auf $\mathcal{F}(D(g_i g_j))$. Wir können m unabhängig von i, j wählen. Somit verkleben sich die $f^m t'_i$ zu einem $t'' \in \mathcal{F}(X)$ zusammen und t'' ist ein Lift von $f^{n+m} s$.

Sei nun $X = \bigcup_i D(f_i)$ eine endliche offene Überdeckung, so dass sich $s|_{D(f_i)}$ zu einem Schnitt aus $\mathcal{F}(D(f_i))$ liften lässt. Für alle i existiert ein n und ein Lift $t_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ von $f_i^n s$. Wir können o.B.d.A. n unabhängig von i annehmen. Da $X = \bigcup_i D(f_i)$, gilt $(f_1^n, \dots, f_k^n) = A$, also $1 = \sum_{i=1}^k a_i f_i^n$ für gewisse $a_i \in A$. Setze $t = \sum_{i=1}^k a_i t_i \in \mathcal{F}(X)$. Dann ist t ein Lift von $\sum_{i=1}^k a_i f_i^n s = s \in \mathcal{F}''(X)$. \square

Satz 5.12. Sei X ein Schema.

- (i) Kern, Kokern und Bild eines Morphismus von quasikohärenten Garben ist wieder quasikohärent.
- (ii) Ist $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln und $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ quasikohärent, so ist \mathcal{F} quasikohärent.
- (iii) Ist X noethersch, so gilt (i) und (ii) auch für kohärente Garben.

Beweis. Da Quasikohärenz bzw. Kohärenz eine lokale Eigenschaft ist, können wir ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen. Nach Korollar 5.10 gelten (i) und (ii) für Modulgarben der Form \widetilde{M} . Da $M \mapsto \widetilde{M}$ nach 5.3 (i) ein exakter, volltreuer Funktor ist, folgt die Aussage über Kern, Kokern und Bild.

Sei nun $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln mit $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ quasikohärent. Nach Satz 5.11 ist die folgende Folge exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

Da $M \mapsto \widetilde{M}$ ein exakter Funktor ist, folgt die Exaktheit von:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}')} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}'')} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile links und rechts sind nach Korollar 5.10 Isomorphismen. Nach dem 5er Lemma ist somit auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus und \mathcal{F} ist quasikohärent.

Sei nun X noethersch und $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ kohärent. Dann sind $\Gamma(X, \mathcal{F}'), \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ endlich erzeugt und somit auch $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Es folgt die Kohärenz von \mathcal{F} . \square

Satz 5.13. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata.

- (i) Sei \mathcal{G} ein quasikohärenter \mathcal{O}_Y -Modul. Dann ist $f^*\mathcal{G}$ quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul.
- (ii) Seien X, Y noethersch und \mathcal{G} kohärenter \mathcal{O}_Y -Modul. Dann ist $f^*\mathcal{G}$ kohärent.
- (iii) Sei X noethersch oder f quasikompakt und separiert. Ist \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul, so ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärenter \mathcal{O}_Y -Modul.

Lemma 5.14. Sei Y ein affines Schema, $f : X \rightarrow Y$ ein separierter Morphismus und $U, V \subset_o X$ affin. Dann ist $U \cap V$ ein abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas. Wir werden in Korollar 5.18 sehen, dass $U \cap V$ sogar affin ist. Insbesondere ist $U \cap V$ quasikompakt.

Beweis. Betrachte das kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Nach Lemma 3.20 ist $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times_Y V$ affin. Es gilt:

$$U \cap V \cong \Delta_{X/Y}(X) \cap U \times_Y V \subset U \times_Y V$$

Nun ist $\Delta_{X/Y}(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$, d.h. $U \cap V$ ist ein abgeschlossenes Unterschema in $U \times_Y V$. \square

Beweis von Satz 5.13. Für (i) und (ii) ist die Aussage lokal in X und in Y . Daher können wir o.B.d.A. $X = \operatorname{Spec}(B)$ und $Y = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen. Dann folgt die Behauptung aus der Kategorienäquivalenz Korollar 5.10 und Satz 5.3 (v) $f^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Für (iii) können wir nur Y als affin annehmen. Sei $X = \bigcup_i U_i$ eine endliche, offene affine Überdeckung, da in beiden Fällen X quasikompakt ist. Setze $U_{ij} = U_i \cap U_j$. In beiden Fällen sind U_{ij} quasikompakt, siehe Lemma 5.14 und 3.5, 3.4. Sei also $U_{ij} = \bigcup_k U_{ijk}$ eine endliche, offene affine Überdeckung. Nach der Garbeneigenschaft haben wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$$

Wegen Satz 5.3 (iv) sind $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ und $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ quasikohärent. Nach Satz 5.12 (ii) sind $\bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ und $\bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ quasikohärent. Nach 5.12 (i) ist daher auch $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent. \square

Bemerkung. Sind X, Y noethersch und \mathcal{F} kohärent, so muss $f_*\mathcal{F}$ nicht notwendigerweise kohärent sein.

Definition 5.16. Sei Y ein abgeschlossenes Unterschema von X und $i : Y \hookrightarrow X$ der Inklusionsmorphismus. Dann ist die *zu Y gehörige Idealgarbe* auf X , wie folgt definiert:

$$\mathcal{I}_Y = \ker(i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$$

Satz 5.17. Sei X ein Schema. Dann gilt:

- (i) Ist Y ein abgeschlossenes Unterschema von X , so ist \mathcal{I}_Y eine quasikohärente Idealgarbe auf X .
- (ii) Ist X zusätzlich noethersch, so ist \mathcal{I}_Y kohärent.
- (iii) Jede quasikohärente Idealgarbe auf X bestimmt in eindeutiger Weise ein abgeschlossenes Unterschema.

Beweis.

- (i) Sei $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $i : Y \hookrightarrow X$ ein quasikompakter Morphismus. Wegen Satz 4.17 (i) ist i separiert. Nach Satz 5.13 (iii) ist $i_*\mathcal{O}_Y$ quasikohärent, also \mathcal{I}_Y quasikohärent nach Satz 5.12 (i).
- (ii) Ist X noethersch und $U \subset_o X$ affin mit $U = \operatorname{Spec}(A)$, so ist auch A noethersch nach Satz 3.6. Daher ist $I = \Gamma(U, \mathcal{I}_Y|_U)$ ein endlich erzeugtes Ideal in A . Nach Satz 5.9 ist \mathcal{I}_Y kohärent.

(iii) Sei \mathcal{J} eine quasikohärente Idealgarbe auf X . Setze:

$$Y = \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \{x \in X \mid (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x \neq 0\} \subset X$$

Wir zeigen, dass $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ ein abgeschlossenes Unterschema von X ist. Dies ist eine lokale Frage, sei o.B.d.A. $X = \text{Spec}(A)$ affin. Da \mathcal{J} quasikohärent ist, folgt $\mathcal{J} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Es gilt:

$$\begin{aligned} Y &= \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \text{supp}(\widetilde{A/\mathfrak{a}}) \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \neq 0\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} = \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit ist klar. □

Korollar 5.18. Sei $X = \text{Spec}(A)$ affin. Dann haben wir eine Bijektion:

$$\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset A \text{ Ideal}\} \rightarrow \{Y \mid Y \subset X \text{ abgeschlossenes Unterschema}\}, \quad \mathfrak{a} \mapsto \text{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

Definition 5.19. Sei $S = \bigoplus_d S_d$ ein graduierter Ring. Ein S -Modul heißt *graduierter S -Modul*, falls $M = \bigoplus_d M_d$ mit $S_d \cdot M_e \subset M_{d+e}$ gilt. Sei $\ell \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir den *gewisteten S -Modul* $M(\ell)$ von M durch:

$$M(\ell)_d = M_{d+\ell}$$

Definition 5.20. Sei S ein graduierter Ring und M ein graduierter S -Modul. Die zu M assoziierte Garbe \widetilde{M} auf $\text{Proj}(S)$ ist wie folgt definiert: Sei $U \subset_o \text{Proj}(S)$ und setze $\widetilde{M}(U)$ als die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$, so dass:

- (i) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ gilt $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$.
- (ii) Für alle $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine offene Umgebung V von \mathfrak{p} mit $V \subset U$ und homogene Elemente $m \in M$, $f \in S$ mit $\deg(m) = \deg(f)$ derart, dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ stets $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f}$ in $M_{(\mathfrak{q})}$ gilt.

\widetilde{M} wird zu einer Garbe mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen.

Satz 5.21. Sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter S -Modul und $X = \text{Proj}(S)$. Dann gilt:

- (i) $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$ für alle $\mathfrak{p} \in X$.

- (ii) Für alle homogene Elemente $f \in S_+$ ist $\widetilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M}_{(f)}$ bzgl. des Isomorphismus' $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} S_{(f)}$.
- (iii) \widetilde{M} ist ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Ist X noethersch und M endlich erzeugt, so ist \widetilde{M} kohärent.

Beweis. (i) und (ii) sind analog zu Satz 2.23. (iii) folgt aus (ii). □

Definition 5.22. Sei S ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj}(S)$ und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir die *getwistete Garbe* $\mathcal{F}(n)$ von \mathcal{F} wie folgt:

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$$

Satz 5.23. Sei S ein graduierter Ring und $X = \operatorname{Proj}(S)$, wobei S als S_0 -Algebra von S_1 erzeugt wird. Dann gilt:

- (i) $\mathcal{O}_X(n)$ ist eine invertierbare Garbe auf X .
- (ii) Sind M, N graduierte S -Moduln, so ist $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$. Insbesondere gilt $\widetilde{M(n)} \cong \widetilde{M}(n)$ und $\mathcal{O}_X(n+m) \cong \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$.
- (iii) Sei T ein weiterer graduierter Ring, der von T_1 als T_0 -Algebra erzeugt wird und $\varphi : S \rightarrow T$ ein Homomorphismus graduierter Ringe. Sei $U \subset_o Y = \operatorname{Proj}(T)$ und $f : U \rightarrow X$ der durch φ induzierte Morphismus. Dann gilt für jeder graduierte S -Modul M und jeder graduierte T -Modul N :

$$f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_S T}|_U, \quad f_*(\widetilde{N}|_U) \cong (\widetilde{S N})$$

Insbesondere gilt $f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)|_U$ und $f_*(\mathcal{O}_X(n)|_U) = (f_*\mathcal{O}_U)(n)$.

Beweis.

- (i) Sei $f \in S_1$ und betrachte $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} \cong \widetilde{S(n)}_{(f)}$ auf $\operatorname{Spec} S_{(f)}$. Es ist $S(n)_{(f)}$ freier $S_{(f)}$ -Modul vom Rang 1 via dem Isomorphismus $(S_f)_0 \rightarrow (S_f)_n$, $s \mapsto f^n s$ für alle n . Da S von S_1 als S_0 -Algebra erzeugt wird, gilt $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$. Daher ist $\mathcal{O}_X(n)$ invertierbar.
- (ii) Sei $f \in S_1$. Es gilt $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$. Da S von S_1 erzeugt wird, folgt $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.
- (iii) Analog wie im affinen Fall. □

Definition 5.24. Sei S ein graduierter Ring, $X = \text{Proj}(S)$ und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Der zu \mathcal{F} assoziierte graduierte S -Modul $\Gamma_*(\mathcal{F})$ ist definiert als die Gruppe

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

mit der folgenden S -Wirkung: Ein $s \in S_d$ induziert ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Für $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ setze $st = s \otimes t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$.

Satz 5.25. Sei A ein Ring und $X = \mathbf{P}_A^r$ mit $r \geq 1$ und $S = A[X_0, \dots, X_r]$. Dann gilt:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$$

Beweis. Sei $X = \bigcup_{i=0}^r D_+(X_i)$. Ein $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ entspricht eine Familie $t_i \in \Gamma(D_+(X_i), \mathcal{O}_X(n))$, $i = 1, \dots, r$ mit $t_i = t_j$ auf $D_+(X_i X_j)$. t_i ist ein homogenes Element $s_i \in S_{X_i}$ vom Grad n und $t_i|_{D_+(X_i X_j)}$ entspricht dem Bild von s_i in $S_{X_i X_j}$. Es folgt:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \left\{ (t_0, \dots, t_r) \in \prod_{i=0}^r S_{X_i} \mid t_i = t_j \text{ auf } S_{X_i X_j} \text{ für alle } i, j \right\}$$

Da keine X_i Nullteiler sind, haben wir Inklusionen $S \hookrightarrow S_{X_i} \hookrightarrow S_{X_i X_j} \hookrightarrow S_{X_0 \dots X_r}$ und:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigcap_{i=0}^r S_{X_i} \subset S_{X_0 \dots X_r}$$

Jedes homogene $t \in S_{X_0 \dots X_r}$ lässt sich eindeutig in der folgenden Form schreiben:

$$t = X_0^{i_0} \cdots X_r^{i_r} f, \quad i_j \in \mathbb{Z}$$

wobei $f \in S$ ein homogenes Element ist, das durch kein X_i teilbar ist. Es ist t genau dann in S_{X_i} , wenn $i_j \geq 0$ für alle $j \neq i$ gilt. Also ist $\bigcap S_{X_i} = S$. \square

Lemma 5.26. Sei X ein Schema, \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X und $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Setze $X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\} \subset_{\circ} X$ und sei \mathcal{F} eine quasikohärente Garbe auf X .

- (i) Sei X quasikompakt und $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $s|_{X_f} = 0$. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass $f^n s = 0 \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$.
- (ii) Sei $X = \bigcup U_i$ eine endliche, offene affine Überdeckung, so dass $\mathcal{L}|_{U_i}$ für alle i frei und $U_i \cap U_j$ für alle i, j quasikompakt sind. Zu $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ gibt es ein $n > 0$, so dass sich $f^n t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ zu einem globalen Schnitt auf ganz X fortsetzen lässt.

Bemerkung 5.27. Voraussetzungen in Lemma 5.26 (i) und (ii) sind erfüllt, wenn X noethersch ist, oder wenn X quasikompakt und separiert ist.

Beweis von Lemma 5.26.

- (i) Sei $X = \bigcup U_i$ eine endliche, offene affine Überdeckung mit $\mathcal{L}|_{U_i}$ frei. Betrachte $U = U_i$ und sei $\psi : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ ein Isomorphismus. Da \mathcal{F} quasikohärent ist, folgt $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ für ein A -Modul M , wobei $U = \text{Spec}(A)$. Für ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ ist $s|_U \in M$. Setze $g := \psi(f|_U) \in A$. Es ist $X_f \cap U = D(g)$ und $s|_{X_f} = 0$. Nach Lemma 5.8 (i) gibt es ein $n > 0$ mit $g^n s = 0 \in M$. Der Isomorphismus

$$\text{id} \otimes \psi^{\otimes n} : \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$$

liefert $0 = f^n s = \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ für alle $U = U_i$. Wählt man n so groß, dass die obige Aussage für alle U_i gilt, so folgt $f^n s = 0$ auf X .

- (ii) Analog zu (i) mit Lemma 5.8 (ii). □

Satz 5.28. Sei S ein graduierter Ring, der durch S_1 als S_0 -Algebra endlich erzeugt wird. Sei $X = \text{Proj}(S)$ und \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:

$$\beta : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

Beweis. Es ist $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$ eine endliche Vereinigung. Für $f \in S_1$ definiere:

$$\beta_f : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}_{(f)} = \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}|_{D_+(f)} \rightarrow \mathcal{F}|_{D_+(f)}$$

durch $\bigoplus_d \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d)) \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$, das induziert wird durch:

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d)) \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d) \otimes \mathcal{O}_X(-d)) = \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}), \quad \frac{m}{f^d} \mapsto m \otimes f^{-d}$$

Wir erhalten eine Abbildung $\beta : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \rightarrow \mathcal{F}$. Wir zeigen nun, dass alle β_f Isomorphismen sind. Es genügt zu zeigen, dass $\Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)} \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$ Isomorphismen sind. Lemma 5.26 (i) liefert die Injektivität und Lemma 5.26 (ii) die Surjektivität. □

Korollar 5.29. Sei A ein Ring. Dann gilt:

- (i) Ist $Y \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$ ein abgeschlossenes Unterschema, so existiert ein homogenes Ideal $I \subset S = A[X_0, \dots, X_r]$, so dass $Y = \text{Proj}(S/I) \hookrightarrow \text{Proj}(S) = X$.
- (ii) Sei Y ein Schema über $\text{Spec}(A)$. Dann ist Y genau dann projektiv, wenn $Y \cong \text{Proj}(S)$ für einen graduerten Ring S , der von S_1 als $S_0 = A$ -Algebra endlich erzeugt wird.

Beweis.

- (i) Sei $\mathcal{J}_Y \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe von Y auf $X = \mathbf{P}_A^r$. Da $\mathcal{J}_Y(d) \subset \mathcal{O}_X(d)$, folgt $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y) \subset \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$. Nach Satz 5.25 ist $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$, d.h. $I = \Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$ ist ein homogenes Ideal in S . Setze $Y' = \text{Proj}(S/I)$. Y' ist ein abgeschlossenes Unterschema von X mit Idealgarbe $\mathcal{J}_{Y'} = \tilde{I}$. Da \mathcal{J}_Y nach Satz 5.17 (i) quasikohärent ist, folgt $\mathcal{J}_Y \cong \Gamma_*(\tilde{\mathcal{J}_Y})$ nach Satz 5.28. Nun gilt:

$$\mathcal{J}_Y \cong \Gamma_*(\tilde{\mathcal{J}_Y}) = \tilde{I} = \mathcal{J}_{Y'}$$

Nach Satz 5.17 folgt $Y = Y'$, also ist Y das abgeschlossene Unterschema, das durch I definiert ist.

- (ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} Y \text{ projektiv} &\iff Y \text{ ist abgeschlossenes Unterschema von } \mathbf{P}_A^r \text{ für ein } r \\ &\iff Y \cong \text{Proj}(S'/I) \text{ für ein homogenes Ideal } I \subset S' = A[X_0, \dots, X_r] \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass I und $I' = \bigoplus_{d \geq d_0} I_d$ dasselbe abgeschlossene Unterschema bestimmen. Dafür zeigen wir $\mathfrak{p} \supset I$, wenn $\mathfrak{p} \supset I'$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S')$. Wegen $\mathfrak{p} \not\supset S_+$ gibt es ein $x_i \notin \mathfrak{p}$. Sei nun $x \in I_r$, $r < d_0$, dann ist $x_i^{d_0-r} x \in I_{d_0} \in \mathfrak{p}$. Da \mathfrak{p} ein Primideal ist, folgt $x \in \mathfrak{p}$.

Somit können wir o.B.d.A. $I \subset S'_+$ annehmen. Also ist $A = (S'/I)_0$ und $S = S'/I$ wird als A -Algebra von S_1 endlich erzeugt.

Umgekehrt ist jeder graduierte Ring S , der von S_1 als $S_0 = A$ -Algebra endlich erzeugt ist, Quotient des Polynomrings und $\text{Proj}(S)$ ist projektiv. \square

Definition 5.30. Sei Y ein Schema. Der kanonische Morphismus $g : \mathbf{P}_Y^r = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r \times Y \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r$ definiert die *getwistete Garbe* $\mathcal{O}(1)$ auf \mathbf{P}_Y^r durch:

$$\mathcal{O}(1) = g^* \mathcal{O}(1)$$

Bemerkung. Ist $Y = \text{Spec}(A)$ affin, so ist $\mathcal{O}(1)$ die bereits in Definition 5.22 definierte Garbe auf \mathbf{P}_A^r .

Definition 5.31. Sei X ein Schema über Y . Eine invertierbare Garbe \mathcal{L} auf X heißt *sehr ample* bzgl. Y , wenn es eine Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$ für ein r gibt, so dass $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$.

Satz 5.32. Sei Y ein noethersches Schema und X ein Schema über Y . Dann ist X genau dann projektiv über Y , wenn:

- (i) X ist eigentlich über Y .
- (ii) Es gibt eine sehr ample Garbe auf X bzgl. Y .

Beweis. Sei X projektiv. Dann folgt (i) aus Theorem 4.24 und es gibt eine abgeschlossene Immersion $i : X \rightarrow \mathbf{P}_Y^r$ für ein r , so dass $i^*\mathcal{O}(1)$ sehr ampel ist.

Sei umgekehrt $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$ eine Immersion und $\mathcal{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$ eine sehr ample Garbe auf X bzgl. Y . Betrachte das kartesische Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_Y^r = Y \times \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

$\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r \rightarrow \mathbb{Z}$ ist separiert, da projektiv, also ist auch der Basiswechsel $\mathbf{P}_Y^r \rightarrow Y$ separiert. Ferner ist $X \rightarrow Y$ eigentlich, nach Korollar 4.22 (v) ist auch $X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$ eigentlich, also insbesondere abgeschlossen. \square

Definition 5.33. Sei X ein Schema und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. \mathcal{F} heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, wenn es eine Familie von globalen Schnitten $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, $i \in I$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Bilder der s_i den Halm \mathcal{F}_x als \mathcal{O}_X -Modul erzeugen. Dies ist äquivalent zu: Es gibt einen surjektiven Garbenmorphismus $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$.

Beispiel 5.34. Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für ein A -Modul M . Dann wird \mathcal{F} von globalen Schnitten erzeugt; jedes Erzeugendensystem von M als A -Modul liefern solche Schnitte. Die Surjektion $A^{(I)} \rightarrow M$ induziert surjektives $\mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$.

Beispiel 5.35. Sei $X = \operatorname{Proj}(S)$ mit einem graduierten Ring S , der von S_1 als S_0 -Algebra erzeugt wird. Dann liefern die Elemente aus S_1 globale Schnitte von $\mathcal{O}_X(1)$ und erzeugen diesen quasikohärenten Modul.

Lemma 5.36.

- (i) Abgeschlossene Immersionen sind endliche Morphismen.
- (ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus noetherscher Schemata und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist $f_*\mathcal{F}$ kohärent.

Beweis.

- (i) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine abgeschlossene Immersion. Sei $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$. Es ist $f^{-1}(V) = X \times_Y V \rightarrow V$ als Basiswechsel von f eine abgeschlossene Immersion. Somit ist $f^{-1}(V) \cong \operatorname{Spec}(B/I)$ für ein Ideal $I \subset B$ affin und ferner B/I ein endlich erzeugter B -Modul.

- (ii) Nach Satz 5.13 (iii) ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent. Sei $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$. Da f endlich ist, ist $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$ affin und es gilt $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} = \widetilde{N}$ für ein endlich erzeugter A -Modul N . Nach Satz 5.3 (iv) gilt:

$$f_*\mathcal{F}|_V = f_*\widetilde{N} = \widetilde{{}_B N}$$

Da f endlich ist, ist A ein endlich erzeugter B -Modul und somit auch ${}_B N$. \square

Satz 5.37. (*Serre*) Sei X ein projektives Schema über $\operatorname{Spec}(A)$ mit A noethersch. Sei $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf X und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $n \geq n_0$ der getwistete \mathcal{O}_X -Modul $\mathcal{F}(n)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird.

Beweis. Sei $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$ eine abgeschlossene Immersion mit $\mathcal{O}_X(1) \cong i^*(\mathcal{O}(1))$. Nach Lemma 5.36 ist $i_*\mathcal{F}$ kohärent auf \mathbf{P}_A^r und nach Satz 5.23 (iii) gilt $(i_*\mathcal{F})(n) = i_*(\mathcal{F}(n))$. Wird nun $i_*\mathcal{F}(n)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt, so ist dies auch für $\mathcal{F}(n)$ der Fall, betrachte dafür:

$$\Gamma(\mathbf{P}_A^r, i_*\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n)(i^{-1}(\mathbf{P}_A^r)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

$$(i_*\mathcal{F}(n))_x = \begin{cases} \mathcal{F}(n)_x, & x \in i(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei also o.B.d.A. $X = \mathbf{P}_A^r = \operatorname{Proj} A[X_0, \dots, X_r]$. Es ist $X = \bigcup_{i=0}^r D_+(X_i)$. Für jedes i ist $\mathcal{F}|_{D_+(X_i)} \cong \widetilde{M}_i$ für ein endlich erzeugter Modul M_i über $B_i = A[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_i}{X_i}, \dots, \frac{X_r}{X_i}]$. Sei $(s_{ij})_j$ ein Erzeugendensystem von M_i . Wegen Lemma 5.26 existiert ein $n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Schnitte $X_i^n s_{ij}$ sich zu globalen Schnitten t_{ij} von $\mathcal{F}(n)$ liften lassen. Wir können n_0 unabhängig von i und j wählen. Sei $\mathcal{F}(n)|_{D_+(X_i)} \cong \widetilde{M}'_i$ für ein B_i -Modul M'_i . Die Abbildungen $X_i^n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(n)$ induzieren Isomorphismen $M_i \rightarrow M'_i$. Da $\{X_i^n s_{ij} \mid j\}$ ganz M'_i erzeugen, erzeugen $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ als globale Schnitte ganz $\mathcal{F}(n)$. \square

Korollar 5.38. Sei X ein projektives Schema über $\operatorname{Spec}(A)$ mit A noethersch. Dann gibt es für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} eine Surjektion $\mathcal{O}_X(n)^N \rightarrow \mathcal{F}$ mit $n, N \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Satz 5.37 gibt es eine Surjektion $\mathcal{O}_X^N \rightarrow \mathcal{F}(n)$. Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(-n)$ gibt die Behauptung. \square

Satz 5.39. Sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k -Algebra und X projektives Schema über $\operatorname{Spec}(A)$. Ferner sei \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter A -Modul.

Beweis. Wir werden diesen Satz später kohomologisch beweisen.

Korollar 5.40. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver Morphismus von Schemata von endlichem Typ über einem Körper k . Ist \mathcal{F} kohärent auf X , so ist auch $f_*\mathcal{F}$ kohärent auf Y . Insbesondere ist für $A = k$ der Modul $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ein endlich dimensionierter k -Vektorraum.

Beweis. Sei o.B.d.A. $Y = \operatorname{Spec}(A)$ affin, wobei A eine endlich erzeugte k -Algebra ist. Da f projektiv ist, ist f eigentlich und somit separiert und von endlichem Typ, also quasikompakt. Wegen Satz 5.13 (iii) ist $f_*\mathcal{F}$ quasikohärent. Es gilt:

$$f_*\mathcal{F} = \Gamma(\widetilde{Y, f_*\mathcal{F}}) = \Gamma(\widetilde{X, \mathcal{F}})$$

Aber $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ist endlich erzeugter A -Modul nach Satz 5.39. □

2.6 Divisoren

Definition 6.1.

- (i) Ein noetherscher lokaler Ring (R, \mathfrak{m}) heißt *regulär*, falls für $k = R/\mathfrak{m}$ gilt:

$$\dim(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

Ist R ein noetherscher lokaler Ring, so gilt stets $\dim(R) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

- (ii) Ein Schema X heißt *regulär in Kodimension 1*, falls jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ von X mit $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$ regulär ist.

Definition 6.3. Ein Ring heißt *normal*, wenn er ganzabgeschlossen und nullteilerfrei ist. Ein Schema heißt *normal*, wenn seine Halme normal sind.

Theorem 6.4. Sei R ein noetherscher, normaler Ring und \mathfrak{p} ein Primideal der Höhe 1. Dann ist $R_{\mathfrak{p}}$ regulär. Genauer: Sei (R, \mathfrak{m}) ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist ein diskreter Bewertungsring.
- (ii) R ist ganzabgeschlossen.
- (iii) R ist regulär.
- (iv) \mathfrak{m} ist ein Hauptideal.

Beweis. Siehe z.B. Matsumura: „Commutative Algebra“, Theorem 3.9 und Atiyah-MacDonald: „Introduction to Commutative Algebra“, Proposition 9.2. □

Definition. Ein Schema habe die Eigenschaft (\star) , wenn es noethersch, separiert, integer und regulär in Kodimension 1 ist.

Definition 6.5. Sei X ein Schema mit (\star) . Dann gilt:

- (i) Ein *Primdivisor* auf X ist ein abgeschlossenes, integrires Unterschema der Kodimension 1.
- (ii) Ein *Weil-Divisor* ist ein Element der freien abelschen Gruppe $\text{Div}(X)$, die von den Primdivisoren erzeugt wird. Wir schreiben ein Divisor als $D = \sum_i n_i Y_i$ mit Primdivisoren Y_i und $n_i \in \mathbb{Z}$ mit $n_i = 0$ für fast alle i . Ein solcher Divisor heißt *effektiv*, falls alle $n_i \geq 0$ sind.
- (iii) Sei Y ein Primdivisor auf X und η ein generischer Punkt in Y . Dann ist $\mathcal{O}_{X,\eta}$ nach Theorem 6.4 ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K , der *Funktionenkörper* von X . Wir bezeichnen die zugehörige diskrete Bewertung mit $v_Y : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$. Sei $f \in K^\times$. Ist $v_Y(f) > 0$, so sagen wir, dass f eine *Nullstelle* entlang Y von der Ordnung $v_Y(f)$ hat. Ist $v_Y(f) < 0$, so sagen wir, dass f ein *Pol* entlang Y von der Ordnung $-v_Y(f)$ besitzt.

Lemma 6.6. Sei X ein Schema mit (\star) und $f \in K^\times$. Dann ist $v_Y(f) = 0$ für fast alle Primdivisoren Y .

Beweis. Sei $\emptyset \neq U = \text{Spec}(A) \subset_o X$ affin mit $f|_U$ regulär, d.h. $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$. Sei $Z = X \setminus U \subsetneq X$ abgeschlossen. Da X noethersch und irreduzibel ist, ist Z noethersch mit $\text{codim}(Z, X) \geq 1$ und besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten. Daher enthält Z höchstens endlich viele Primdivisoren von X , alle anderen treffen U . Es genügt also zu zeigen, dass es nur endlich viele Primdivisoren Y in U gibt mit $v_Y(f) \neq 0$, d.h. $v_Y(f) > 0$. Es gilt mit $Y = \overline{\{\eta\}}$:

$$v_Y(f) > 0 \iff f \notin \mathcal{O}_{U,\eta}^\times = A_\eta^\times \iff f \in \eta \iff Y = V(\eta) \subset V(f) \subset U$$

Da $f \neq 0$, ist $V(f) \subsetneq U$ eine echte abgeschlossene Teilmenge, und enthält daher nur endlich viele irreduzible Komponenten, also Primdivisoren in U . \square

Definition 6.7. Sei X ein Schema mit (\star) und $f \in K^\times$. Der Divisor $\text{div}(f)$ von f ist definiert als:

$$\text{div}(f) = \sum_Y v_Y(f) Y$$

wobei Y über die Primdivisoren in X läuft. Diese Summe ist nach Lemma 6.6 endlich und somit wohldefiniert. Jeder Divisor der Form $\text{div}(f)$ heißt *Hauptdivisor* oder *prinzipal*.

Bemerkung 6.8. Sei $f, g \in K^\times$. Dann gilt:

$$\operatorname{div}\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$$

Somit ist $K^\times \rightarrow \operatorname{Div}(X)$, $f \mapsto \operatorname{div}(f)$ ein Gruppenhomomorphismus, dessen Bild gerade die Gruppe der Hauptdivisoren in X sind.

Definition 6.9. Sei X ein Schema mit (\star) . Zwei Divisoren D, D' heißen *linear äquivalent* $D \sim D'$, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist. Die Gruppe der zugehörigen Äquivalenzklassen $\operatorname{Cl}(X)$ heißt *Divisorenklassengruppe*. Wir haben eine exakte Folge:

$$K^\times \rightarrow \operatorname{Div}(X) \rightarrow \operatorname{Cl}(X) \rightarrow 0$$

Satz 6.10. Sei A ein noetherscher, nullteilerfreier Ring. Dann gilt:

$$A \text{ ist faktoriell} \iff \operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(A)) = 0$$

Beweis. Siehe z.B. Bourbaki: Algèbre Commutative, Chapitre 7 §3 Proposition 2. \square

Beispiel 6.11.

1. Sei $X = \mathbf{A}_k^n$ für ein Körper k . Dann gilt $\operatorname{Cl}(X) = 0$, da $k[X_1, \dots, X_n]$ faktoriell ist.
2. Sei A ein Dedekindring. Dann ist $\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(A))$ gerade die Idealklassengruppe.

Satz 6.12. Sei k ein Körper.

- (i) Sei $X = \mathbf{A}_k^n$ und $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist Y genau dann ein Primdivisor, wenn:

$$Y = V(f) \quad \text{für ein irreduzibles, nicht-konstantes } f \in k[X_1, \dots, X_n]$$

- (ii) Sei $X = \mathbf{P}_k^n$ und $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist Y genau dann ein Primdivisor, wenn:

$$Y = V_+(f) \quad \text{für ein homogenes, irreduzibles } f \in k[X_0, \dots, X_n], \operatorname{deg}(f) = r > 0$$

Definition 6.13. Sei $X = \mathbf{P}_k^n$. Jeder Primdivisor Y in X hat die Form $Y = V_+(f_Y)$. Betrachte die Abbildung $Y \mapsto \operatorname{deg}(f_Y)$. Diese induziert ein Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Wir zeigen, dass dieser über $\operatorname{Cl}(X)$ faktorisiert. Sei $f \in K^\times$. Dann gilt:

$$\operatorname{deg} \operatorname{div}(f) = \sum_Y v_Y(f) \operatorname{deg}(Y) = \sum_Y v_Y(f) \operatorname{deg}(f_Y)$$

Sei $f = \frac{g}{h}$ mit homogenen g, h vom selben Grad d . Sei $g = g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$ eine Zerlegung in irreduzible Elemente g_i vom Grad d_i . Dann sind $Y_i = \text{div}(g_i)$ nach Satz 6.12 (ii) Primdivisoren. Es gilt:

$$\deg \text{div}(g) = \sum_i n_i \deg(g_i) = \sum_i n_i d_i = d$$

Analog ist $\deg \text{div}(h) = d$. Somit ist $\deg \text{div}(f) = \deg \text{div}(g) - \deg \text{div}(h) = 0$. \square

Satz 6.15. Sei $X = \mathbf{P}_k^n$. Dann gilt:

- (i) Ist D ein Divisor auf X , so ist $D \sim \deg(D) \cdot V_+(T_0)$
- (ii) $\deg : \text{Cl}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

- (i) Sei $D = \sum_Y n_Y Y$ ein Divisor mit Primdivisoren Y . Nach Satz 6.12 (ii) ist $Y = V_+(f_Y)$ mit irreduziblen, homogenen Polynomen f_Y vom Grad r_Y . Wir schreiben $f_Y = T_0^{r_Y} g_Y$, wobei g_Y ein Polynom in $\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}$ ist. Die g_Y sind rationale Funktionen auf \mathbf{P}_k^n und es gilt:

$$\text{div}(g_Y) = V_+(f_Y) - r_Y V_+(T_0) \implies V_+(f_Y) \sim r_Y V_+(T_0)$$

Also gilt $D = \sum_Y n_Y V_+(f_Y) \sim (\sum n_Y r_Y) V_+(T_0) = \deg(D) \cdot V_+(T_0)$.

- (ii) folgt aus (i) und wegen $\deg V_+(T_0) = 1$. \square

Satz 6.16. Sei X ein Schema mit (\star) , $Z \subsetneq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $U = X \setminus Z$. Dann gilt:

- (i) Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$, der durch $\sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$ gegeben ist, wobei wir die leeren $Y_i \cap U$ ignorieren.
- (ii) Ist $\text{codim}(Z, X) \geq 2$, dann ist die obige Abbildung ein Isomorphismus.
- (iii) Ist Z irreduzibel und $\text{codim}(Z, X) = 1$, so gibt es eine exakte Folge:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$$

wobei die erste Abbildung durch $1 \mapsto Z$ gegeben ist.

Beweis.

- (i) Ist Y ein Primdivisor auf X , so ist $Y \cap U$ leer oder ein Primdivisor auf U . Sei $f \in K^\times$ mit $\text{div}(f) = \sum n_i Y_i$. Fassen wir f als rationale Funktion auf U auf, so erhalten wir $\text{div}(f|_U) = \sum n_i (Y_i \cap U)$. Somit ist die Abbildung $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$ wohldefiniert.

Die Surjektivität sieht man wie folgt: Sei Y ein Primdivisor auf U und \bar{Y} der Abschluss von Y in X . Dann ist \bar{Y} ein Primdivisor auf X mit $\bar{Y} \cap U = Y$.

- (ii) $\text{Div}(X)$ bzw. $\text{Cl}(X)$ hängen nur von Teilmengen der Kodimension 1 ab.
- (iii) Es ist $\ker(\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)) = \{[D] \in \text{Cl}(X) \mid \text{supp}(D) \subset Z\} = \langle [Z] \rangle$, da Z irreduzibel ist. \square

Beispiel 6.17. Sei Y eine irreduzible Kurve vom Grad d in \mathbf{P}_k^2 . Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Cl}(\mathbf{P}_k^2) & \longrightarrow & \text{Cl}(\mathbf{P}_k^2 \setminus Y) & \longrightarrow & 0 \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow \text{deg} & & \downarrow \cong & & \\
 d\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Definition 6.18. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine *Kurve* über k ist ein intesres, separiertes Schema X von endlichem Typ über k der Dimension 1.

- X heißt *vollständig*, wenn $X \rightarrow k$ eigentlich ist.
- X heißt *nicht-singulär*, falls alle lokalen Ringe von X regulär sind.

Satz 6.19. Sei X eine vollständige, nicht-singuläre Kurve über k und Y eine beliebige Kurve über k mit einem Morphismus $f : X \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$f(X) = \text{Pt} \quad \text{oder} \quad f(X) = Y$$

Im zweiten Fall gilt:

- (i) Die Funktionenkörpererweiterung $K(X)/K(Y)$ ist endlich.
- (ii) f ist endlich.
- (iii) Y ist vollständig.

Lemma 6.20. Sei $f : X \rightarrow Y$ surjektiv, $g : Y \rightarrow Z$ separiert und von endlichem Typ, und $g \circ f : X \rightarrow Z$ eigentlich. Dann ist g eigentlich.

Beweis von 6.19. Da X eigentlich über k ist, ist $f(X) \subset Y$ ein abgeschlossenes Unterschema. Da X irreduzibel ist, ist $f(X)$ auch irreduzibel. Nun ist $\dim(Y) = 1$, folgt entweder $f(X) = \text{Pt}$ oder $f(X) = Y$. Betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) & \hookrightarrow & Y \\ & & & \searrow & \downarrow \\ & & & & k \end{array}$$

Es ist $f(X) \hookrightarrow Y$ eine abgeschlossene Immersion, also separiert nach Satz 4.17 (i). Somit ist auch $f(X)/k$ separiert. Nach Lemma 6.20 ist $f(X)/k$ eigentlich.

Sei nun $f(X) = Y$, also ist Y vollständig. Sei $Y = \overline{\{\eta\}}$ und $X = \overline{\{\xi\}}$. Da $f : X \rightarrow Y$ dominant ist, folgt $f(\xi) = \eta$ und wir erhalten eine Inklusion $K(Y) = \mathcal{O}_{Y,\eta} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = K(X)$. Da beide Körper endlich erzeugt über k vom Transzendenzgrad $\dim(X) = 1$ sind, ist $K(X)/K(Y)$ endlich.

Es bleibt zu zeigen, dass f endlich ist. Sei $V = \text{Spec}(B) \subset_o Y$ affin. Dann ist $B = \mathcal{O}_Y(V) \subset K(Y) \subset K(X)$. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}(V) = \text{Spec}(A)$ affin ist, wobei A ein endlich erzeugter B -Modul ist. In der Tat folgt aus der Normalität von X stets $f^{-1}(V) = \text{Spec}(A)$, wobei A der Ganzabschluss von B in $K(X)$ ist. Alles folgt nun aus dem folgenden Theorem 6.21. \square

Theorem 6.21. Sei B ein Integritätsring und eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper k . Setze $K = \text{Quot}(B)$ und sei L/K eine endliche Erweiterung. Dann ist der Ganzabschluss A von B in L ein endlich erzeugter B -Modul.

Beweis. Siehe z.B. Zariski-Samuel: Commutative Algebra I, Chapter V, Theorem 9. \square

Beweis von 6.20. Es reicht zu zeigen, dass g universell abgeschlossen ist. Sei $h : Y' \rightarrow Y$ ein beliebiger Morphismus und betrachte den Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Wir zeigen nun, dass f' surjektiv ist. Sei $y' \in Y'$ und sei $x \in X$ mit $f(x) = h(y') =: y$. Behauptung: Es gibt ein $z \in X \times_Y Y'$ mit $h'(z) = x$ und $f'(z) = y'$. Seien $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$, $i_{y'} : \{y'\} \hookrightarrow Y'$ die Inklusionen. Diese liefern einen Y -Morphismus:

$$\delta : \text{Spec } \kappa(x) \times_{\kappa(y)} \text{Spec } \kappa(y') = \text{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')) \hookrightarrow X \times_Y Y'$$

Da $\kappa(x) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y') \neq 0$, gilt für jedes $z \in \text{im}(\delta)$ stets $h'(z) = x$ und $f'(z) = y'$. Dies zeigt die Surjektivität von f' .

Also ist die Surjektivität von f stabil unter Basiswechsel. Da alle anderen Eigenschaften in den Voraussetzungen ebenfalls stabil unter Basiswechsel sind (siehe 4.17 (iii) und 4.22), reicht es zu zeigen, dass g abgeschlossen ist. Sei $Y' \subset Y$ eine abgeschlossene Teilmengen. Dann ist wegen der Surjektivität von f :

$$g(Y') = (g \circ f) \circ f^{-1}(Y')$$

$g(Y')$ ist abgeschlossen, da $g \circ f$ abgeschlossen ist. □

Definition 6.22. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus von Kurven. Dann heißt $\deg(f) = [K(X) : K(Y)]$ der *Grad* von f . Sei X eine nicht-singuläre Kurve, erfüllt also insbesondere (\star) . Ein Primdivisor von X ist genau ein abgeschlossener Punkt. Ein Divisor D ist somit von der folgenden Form:

$$D = \sum_i n_i P_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad P_i \text{ abgeschlossene Punkte}$$

Der *Grad* von D ist definiert als $\deg(D) = \sum n_i$.

Definition 6.23. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus nicht-singulärer Kurven. Wir definieren ein Homomorphismus $f^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ wie folgt:

Sei $Q \in Y$ ein abgeschlossener Punkt und wähle ein $t \in \mathcal{O}_{Y,Q} \subset K(Y)$ mit $v_Q(t) = 1$, wobei v_Q die diskrete Bewertung zu $\mathcal{O}_{Y,Q}$ ist. t heißt *lokaler Parameter* an der Stelle Q . Wir setzen:

$$f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_P(t) P$$

Da f endlich ist, ist obige Summe nach Lemma 6.24 endlich.

Lemma 6.24.

- (i) Die Eigenschaft endlich zu sein ist stabil unter Basiswechsel.
- (ii) Ist $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus und $y \in Y$, so ist $f^{-1}(y)$ endlich.

Beweis.

- (i) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus und $g : Z \rightarrow Y$ beliebig. Betrachte den folgenden Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{f_Z} & Z \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Sei $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$ affin. Dann existiert ein affines $W = \operatorname{Spec}(C) \subset_o Z$ mit $g(W) \subset V$. Es ist $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$ affin, wobei A ein endlich erzeugter B -Modul ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_Z^{-1}(W) &= (X \times_Y Z) \times_Z W \cong X \times_Y W \\ &\cong (X \times_Y V) \times_V W \\ &\cong f^{-1}(V) \times_V W = \operatorname{Spec}(A \otimes_B C) \end{aligned}$$

und $A \otimes_B C$ ist ein endlich erzeugter C -Modul.

(ii) Sei $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Betrachte den Morphismus:

$$f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \rightarrow \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

Dieser ist endlich nach (i). Also ist $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(A)$ affin, wobei A ein endlich dimensionierter $\kappa(y)$ -Vektorraum ist. Somit ist $\dim f^{-1}(y) = \dim \kappa(y) = 0$, als topologischer Raum ist $f^{-1}(y)$ also eine endliche Menge an Punkten. \square

Bemerkung.

- (i) In Definition 6.23 ist f^*Q unabhängig von der Wahl des lokalen Parameters, da ein lokaler Parameter eindeutig bis auf eine Einheit in $\mathcal{O}_{Y,Q}$ bestimmt ist.
- (ii) f^* respektiert lineare Äquivalenz, d.h. für $h \in K(Y)^\times$, $\operatorname{div}(h) = \sum_Q v_Q(h)Q$ gilt:

$$f^*(\operatorname{div}(h)) = \sum_Q v_Q(h) \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_P(t)P = \sum_P v_P(h)P = \operatorname{div}(h)$$

da $v_P(h) = v_P(t) \cdot v_Q(h)$ ist. Somit induziert f^* eine Abbildung $\operatorname{Cl}(Y) \rightarrow \operatorname{Cl}(X)$. \square

Satz 6.25. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus nicht-singulärer Kurven. Dann:

$$\deg(f^*D) = \deg(f) \cdot \deg(D)$$

Korollar 6.26. Hauptdivisoren auf einer vollständigen, nicht-singulären Kurve haben Grad 0. Wir erhalten eine surjektive Gradabbildung:

$$\deg : \operatorname{Cl}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Lemma 6.27. Sei X eine normale Kurve über k , $U \subset X$ offen, $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^n$ eine rationale Abbildung. Dann lässt sich φ zu einem Morphismus auf X fortsetzen.

Definition 6.28. Sei (X, \mathcal{O}) ein Schema.

- (i) Sei $U = \operatorname{Spec}(A) \subset_o X$ affin und S die Menge aller Nicht-Nullteiler in A . Dann heißt $K(U) = A_S$ *totaler Quotientenring* von A .
- (ii) Sei \mathcal{K} die Ringgarbe, die zur Prägarbe $U \mapsto \varprojlim_{V \subset U \text{ affin}} K(V)$ assoziiert ist. \mathcal{K} heißt *Garbe der totalen Quotientenringe* von \mathcal{O} .
- (iii) $\mathcal{K}^\times : U \mapsto \mathcal{K}(U)^\times$ sei die Garbe von multiplikativen Gruppe der invertierbaren Elemente in \mathcal{K} . \mathcal{O}^\times sei die Garbe der invertierbaren Elemente in \mathcal{O} .

Definition 6.29. Sei (X, \mathcal{O}) ein Schema. Ein Element aus $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$ heißt *Cartier-Divisor*. Ein Cartier-Divisor kann also durch ein System $(U_i, f_i)_i$ beschrieben werden, wobei $(U_i)_i$ eine offene Überdeckung von X ist, und $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times)$, so dass für alle i, j stets $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$ gilt.

Ein Cartier-Divisor heißt *prinzipal* oder *Hauptdivisor*, wenn er im Bild der kanonischen Abbildung $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$ ist. Zwei Cartier-Divisoren heißen *linear äquivalent*, falls ihre Differenz prinzipal ist.

Satz 6.30. Sei (X, \mathcal{O}) ein integres, separiertes, noethersches Schema. Ferner sei X *lokal faktoriell*, d.h. alle lokalen Ringe sind faktoriell. Dann ist die Gruppe $\operatorname{Div}(X)$ von Weil-Divisoren isomorph zur Gruppe der Cartier-Divisoren $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$. Prinzipale Weil-Divisoren entsprechen prinzipale Cartier-Divisoren.

Beweis. X ist normal, da faktorielle Ringe insbesondere ganzabgeschlossen sind. Nach Theorem 6.4 erfüllt X (\star) . Also können wir von Weil-Divisoren sprechen. Da X integer ist, ist $K(U) = \operatorname{Quot}(A) = K$ der Funktionenkörper von X für alle $U = \operatorname{Spec}(A) \subset_o X$. Somit ist \mathcal{K} konstante Garbe.

Sei $(U_i, f_i)_i$ ein Cartier-Divisor mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_i$ von X und $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times) = K^\times$. Wir ordnen diesen Cartier-Divisor den folgenden Weil-Divisor zu:

$$D = \sum_Y v_Y(f_{i_Y}) Y$$

wobei Y die Primdivisoren von X durchläuft und i_Y ein Index mit $U_i \cap Y \neq \emptyset$. Die Summe ist endlich, da X noethersch ist. D ist unabhängig von Wahl der Indizes i_Y :

Seien i, j mit $U_i \cap Y \neq \emptyset$ und $U_j \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist $\frac{f_i}{f_j}$ auf $U_i \cap U_j$ invertierbar, d.h. $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$. Es folgt $v_Y\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = 0$, also $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$.

Sei nun umgekehrt $D = \sum_Y n_Y Y$ ein Weil-Divisor auf X und $x \in X$. Dann induziert D ein Weil-Divisor D_x auf $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$, nämlich:

$$D_x = \sum_Y n_Y (Y \cap \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x))$$

Da \mathcal{O}_x als faktoriell vorausgesetzt wird, ist nach Satz 6.10 $\text{Cl}(\text{Spec } \mathcal{O}_x) = 0$ und D_x ein Hauptdivisor, d.h. $D_x = (f_x)$ für ein $f_x \in K^\times$. Fassen wir (f_x) als Weil-Divisor in X auf, so sehen wir, dass sich (f_x) und D nur bei Primdivisoren, die nicht durch x gehen, unterscheiden. Davon gibt es nur endlich viele, deren Koeffizienten nicht verschwinden. Daher existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $(f_x)|_{U_x} = D|_{U_x}$. Das System $(U_x, f_x)_{x \in X}$ liefert einen Cartier-Divisor.

Geben f, f' denselben Weil-Divisor auf $U \subset_o X$ offen, so ist $\frac{f}{f'} \in \Gamma(U, \mathcal{O}^\times)$, da X normal ist. Daher ist die Konstruktion wohldefiniert. Die obigen Konstruktionen sind invers zueinander. \square

Satz 6.31. Seien \mathcal{L}, \mathcal{M} invertierbare Garben auf einem Schema X . Dann gilt:

- (i) $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ ist invertierbar.
- (ii) $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ ist invertierbar und wird mit \mathcal{L}^{-1} bezeichnet.
- (iii) $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$
- (iv) $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X$

Definition 6.32.

- (i) Wir setzen:

$$\mathcal{L}^{\otimes m} = \underbrace{\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}}_{m\text{-mal}}, \quad \mathcal{L}^{\otimes -m} = (\mathcal{L}^{-1})^{\otimes m}, \quad m \geq 0$$

Also gilt $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{L}^{\otimes (n+m)}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

- (ii) Die *Picard-Gruppe* $\text{Pic}(X)$ eines Schemas X ist die abelsche Gruppe von Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf X mit der Operation \otimes .

Definition 6.33. Sei D ein Cartier-Divisor auf X repräsentiert durch $(U_i, f_i)_i$. Dann ist die Untergarbe $\mathcal{L}(D)$ von \mathcal{K} definiert durch:

$$\mathcal{L}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} f_i^{-1} \subset \mathcal{K}|_{U_i}$$

Diese ist wohldefiniert, denn auf $U_i \cap U_j$ haben wir $\mathcal{L}(D)|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_j^{-1}$, da $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$. $\mathcal{L}(D)$ heißt die zum Divisor D *assoziierte Garbe*.

Satz 6.34. Sei X ein Schema.

- (i) Für jeden Cartier-Divisor D ist $\mathcal{L}(D)$ eine invertierbare Garbe auf X . Die Abbildung $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ induziert eine Bijektion:

$$\{\text{Cartier-Divisoren auf } X\} \rightarrow \{\text{Invertierbare Untergarben von } \mathcal{K}\}$$

- (ii) $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ für Cartier-Divisoren D_1, D_2

- (iii) $D_1 \sim D_2 \iff \mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$

Beweis.

- (i) Sei repräsentiert durch $(U_i, f_i)_i$ mit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times)$. Dann ist $\mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}(D)|_{U_i}$, $1 \mapsto f_i^{-1}$ ein Isomorphismus, also $\mathcal{L}(D)$ invertierbar. Sei umgekehrt $\varphi : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}$ eine invertierbare Untergarbe und $\{U_i\}$ eine Überdeckung von X mit $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i} \hookrightarrow \mathcal{K}|_{U_i}$. Setze $f_i = \tilde{\varphi}(U_i)(1)^{-1}$. Dann definiert $(U_i, f_i)_i$ ein Cartier-Divisor D mit $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}$.
- (ii) Seien D_1, D_2 repräsentiert durch $(U_i, f_i)_i$ bzw. $(U_i, g_i)_i$. Dann wird $D_1 - D_2$ repräsentiert durch $(U_i, f_i g_i^{-1})_i$. Also gilt:

$$\mathcal{L}(D_1 - D_2)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}(f_i^{-1} g_i) = \mathcal{L}(D_1)|_{U_i} \otimes \mathcal{L}(D_2)|_{U_i}^{-1} \subset \mathcal{K}|_{U_i}$$

Somit folgt $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.

- (iii) Wegen (ii) reicht es zu zeigen, dass D genau dann ein Hauptdivisor ist, wenn $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$. Sei D prinzipal, d.h. $D = (f)$ für ein $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^\times)$. Somit ist $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_X f^{-1} \cong \mathcal{O}_X$. Sei umgekehrt $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}(D)$ ein Isomorphismus. Setze f als das Bild von 1 der folgenden Komposition:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^\times)$$

Dann ist $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}((f^{-1}))$, also $D = (f^{-1})$. □

Korollar 6.35. Sei X ein Schema. Dann induziert die Abbildung $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\text{CaCl}(X) \hookrightarrow \text{Pic}(X)$$

wobei $\text{CaCl}(X)$ die Cartier-Divisorenklassengruppe bezeichnet. Im Allgemeinen ist diese Abbildung nicht surjektiv.

Satz 6.36. Sei X ein integres Schema. Dann ist die Abbildung $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass jede invertierbare Garbe isomorph zu einer Untergarbe von \mathcal{K} ist. Da X integer ist, ist \mathcal{K} konstante Garbe mit $\mathcal{K}(U) = K$ der Funktionenkörper von X für alle U . Sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X und betrachte $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$. Sei $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$. Dann gilt:

$$(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})|_{U_i} = \mathcal{L}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{K}|_{U_i} = \mathcal{K}|_{U_i}$$

Da X irreduzibel ist, folgt $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$. Die kanonische Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ zeigt, dass \mathcal{L} isomorph zu einer Untergarbe von \mathcal{K} ist. \square

Korollar 6.37. Sei X ein noethersches, integrales, separiertes und lokal faktorielles Schema. Dann existiert ein Isomorphismus:

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$$

Beweis. Folgt aus Satz 6.30 und Satz 6.36. \square

Korollar 6.38. Sei k ein Körper und $X = \mathbf{P}_k^n$. Dann ist jede invertierbare Garbe auf X isomorph zu einem $\mathcal{O}(\ell)$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Korollar 6.37 und Satz 6.15 ist $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$. Ferner wird $\mathrm{Cl}(X)$ von der Hyperebene $D = V_+(T_0)$ erzeugt. Dann gilt $\mathcal{L}(D)T_0 = \mathcal{O}(1)$, da $\mathcal{O}(1)|_{D_+(T_i)} = \mathcal{O}_{D_+(T_i)}T_i$ und $\mathcal{L}(D)|_{D_+(T_i)} = \mathcal{O}_{D_+(T_i)}\frac{T_i}{T_0}$. \square

2.7 Projektive Morphismen

Ample Garben

Satz 7.1. Sei A ein Ring, X ein Schema über A und $\mathbf{P}_A^n = \mathrm{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$.

- (i) Ist $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ ein A -Morphismus. Dann ist $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ eine invertierbare Garbe auf X , die von globalen Schnitten $s_i = \varphi^*(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ erzeugt wird, wobei $x_i \in \Gamma(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(1))$.
- (ii) Sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X und $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte, die \mathcal{L} erzeugen. Dann existiert ein eindeutig bestimmter A -Morphismus $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ derart, dass $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ mit $s_i = \varphi^*(x_i)$.

Beweis.

- (i) Nach 5.35 erzeugen die globalen Schnitte x_0, \dots, x_n die Garbe $\mathcal{O}(1)$. Ferner ist $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ invertierbar und werden von $\varphi^*(x_i) = s_i$ erzeugt.

- (ii) Setze $X_i = \{P \in X \mid (s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\} \subset_o X$. Da die s_i die Garbe \mathcal{L} erzeugen, gilt $X = \bigcup_i X_i$. Sei $U_i = D_+(x_i) \cong \operatorname{Spec} A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n]$, $Y_j = \frac{x_j}{x_i}$. Betrachte den Ringhomomorphismus $\phi : A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$, $Y_j \mapsto \frac{s_j}{s_i}$. Dieser ist wohldefiniert, da $(s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P \cong \mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$ für alle $P \in X_i$ gilt und daher $\frac{s_j}{s_i} \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. Sei $X_i \rightarrow U_i$ der zu ϕ gehörige A -Morphismus von A -Schemata. Verkleben ergibt ein A -Morphismus $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$. Nach Konstruktion ist φ eindeutig bestimmt durch $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ und $s_i = \varphi^*(x_i)$. \square

Satz 7.2. Sei $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ ein A -Morphismus, der zu einer invertierbaren Garbe Z auf X und globale Schnitte $s_0, \dots, x_n \in \Gamma(X, Z)$ gehört, die \mathcal{L} erzeugen. Dann ist φ genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) Alle offenen Teilmengen X_i im Beweis von Satz 7.1 (ii) sind affin.
- (ii) Für alle i ist die Abbildung $A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$, $Y_j \mapsto \frac{s_j}{s_i}$ surjektiv.

Beweis. Sei φ eine abgeschlossene Immersion. Dann ist $X_i = U_i \cap X$ ein abgeschlossenes Unterschema von $U_i = D_+(x_i) \subset \mathbf{P}_A^n = \operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$. Da U_i affin ist, ist nach Korollar 5.18 auch X_i affin und wir erhalten einen surjektiven Ringhomomorphismus $A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$.

Sei nun umgekehrt (i) und (ii) erfüllt. Dann ist X_i nach (ii) ein abgeschlossenes Unterschema von U_i . Da $X = \bigcup_i X_i$ und $X_i = \varphi^{-1}(U_i)$, ist X ein abgeschlossenes Unterschema von \mathbf{P}_A^n . \square

Definition 7.3. Eine invertierbare Garbe \mathcal{L} auf einem noetherschen Schema X heißt *ampel*, falls für jede kohärente Garbe \mathcal{F} auf X ein $n_0 > 0$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ der \mathcal{O}_X -Modul $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

Beispiel 7.4. Ist X affin, so ist jede invertierbare Garbe ampel: Jede kohärente Garbe wird von globalen Schnitten endlich erzeugt, vgl. Korollar 5.10.

Bemerkung 7.5. Serres Theorem 5.37 besagt, dass jede sehr ample Garbe \mathcal{L} auf einem Schema X über einem noetherschen Ring ampel ist. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Satz 7.6. Sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf einem noetherschen Schema X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) \mathcal{L} ist ampel.
- (ii) \mathcal{L}^m ist ampel für alle $m > 0$.
- (iii) \mathcal{L}^m ist ampel für ein $m > 0$.

Beweis. (i) \implies (ii) \implies (iii) ist klar. Sei nun \mathcal{L}^m ampel für ein $m > 0$ und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Nach Definition existiert ein $n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Garbe $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L}^m)^n$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Betrachte die Garben $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k$ für $k = 1, \dots, m-1$. Diese sind kohärent, d.h. es gibt für jedes k ein $n_k > 0$, so dass für alle $n \geq n_k$ die Garbe $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k \otimes (\mathcal{L}^m)^n$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Setzen wir nun $N = m \cdot \max\{n_k \mid k = 1, \dots, m-1\}$, so wird $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ von globalen Schnitten erzeugt für alle $n \geq N$. Somit ist \mathcal{L} ampel. \square

Satz 7.7. Sei X ein Schema von endlichem Typ über einem noetherschen Ring A und \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X . Dann ist \mathcal{L} genau dann ampel, wenn \mathcal{L}^m sehr ampel bzgl. $\text{Spec}(A)$ für ein $m > 0$ ist.

Lemma 7.8. Sei X ein noethersches Schema, $U \subset_o X$ und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf U . Dann existiert eine kohärente Garbe \mathcal{F}' auf X mit $\mathcal{F}'|_U = \mathcal{F}$.

Beweis. Sei o.B.d.A. X affin. Sei $j : U \hookrightarrow X$ die Immersion. Dann ist $\mathcal{F}' = j_*\mathcal{F}$ nach Satz 5.13 (iii) quasikohärent. Ferner sind quasikohärente Garben auf einem noetherschen Schema Vereinigung seiner kohärenten Untergarben. Daher gilt:

$$j_*\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \bigcup_{\lambda} \mathcal{F}'_{\lambda}$$

mit kohärenten Untergarben \mathcal{F}'_{λ} . Nach Satz 5.13 (ii) sind $j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$ kohärent. Somit ist $\mathcal{F} = \bigcup_{\lambda} j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$, wobei $j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$ die kohärenten Untergarben von \mathcal{F} durchläuft. Da \mathcal{F} kohärent ist, gilt $\mathcal{F} = j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$ für ein λ . Somit ist $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_{\lambda}$ kohärent. \square

Beweis von Lemma 7.7. Sei zunächst \mathcal{L}^m sehr ampel für ein $m > 0$. Es existiert also eine Immersion $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ mit $\mathcal{L}^m \cong i^*(\mathcal{O}(1))$. Sei \overline{X} der Abschluss von X in \mathbf{P}_A^n . Dann ist \overline{X} ein projektives Schema über $\text{Spec}(A)$. Nach 7.5 ist $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$ ampel auf \overline{X} . Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X und $\overline{\mathcal{F}}$ die kohärente Garbe in Lemma 7.8 auf \overline{X} mit $\overline{\mathcal{F}}|_X = \mathcal{F}$. Wird $\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell)$ von globalen Schnitten erzeugt, so ist dies auch für $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(\ell)$ der Fall. Daher ist \mathcal{L}^m ampel auf X und nach Satz 7.6 auch \mathcal{L} . Die andere Richtung ist schwierig.

Projektive Vektorbündel

Definition. Sei X ein Schema. Ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{S} habe die Eigenschaft (\dagger) , wenn X noethersch ist und wenn er eine Struktur einer graduierten \mathcal{O}_X -Algebra trägt, d.h. $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$ mit homogenen Teilen \mathcal{S}_d , so dass:

- (i) $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$
- (ii) \mathcal{S}_1 ist ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul.
- (iii) \mathcal{S} wird lokal von \mathcal{S}_1 als \mathcal{O}_X -Modul erzeugt.

Definition 7.9. Sei X ein Schema und \mathcal{S} ein graduierter \mathcal{O}_X -Modul mit (\dagger) . Sei $U = \text{Spec}(A) \subset_{\circ} X$, $\mathcal{S}(U) = \Gamma(U, \mathcal{S}|_U)$ die graduierte A -Algebra und $\pi_U : \text{Proj } \mathcal{S}(U) \rightarrow U$ der kanonische Morphismus. Für $U, V \subset_{\circ} X$ affin gilt $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$. Verkleben von π_U liefert ein Schema $\mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ und ein Morphismus $\pi : \mathbf{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow X$, so dass für alle affinen $U \subset_{\circ} X$ stets $\pi^{-1}(U) \cong \text{Proj } \mathcal{S}(U)$ gilt. Die invertierbaren Garben $\mathcal{O}(1)$ auf $\text{Proj } \mathcal{S}(U)$ lassen sich zu einer invertierbaren Garbe $\mathcal{O}(1)$ auf $\mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ verkleben.

Beispiel 7.10. Sei $\mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n] = \mathcal{S}$. Dann ist $\mathbf{Proj}(\mathcal{S}) = \mathbf{P}_X^n = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times X$ mit der getwisteten Garbe $\mathcal{O}(1)$ wie in Definition 5.30.

Lemma 7.11. Sei \mathcal{S} eine Garbe graduierter Algebren mit (\dagger) auf X . Sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X und \mathcal{S}' die folgende Garbe graduierter Algebren:

$$\mathcal{S}'_d = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{L}^d, \quad d \geq 0$$

Dann erfüllt \mathcal{S}' ebenfalls (\dagger) und es gibt einen natürlichen Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} P' = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}') & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & P = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}) \\ \pi' \downarrow & \swarrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

Es gilt $\mathcal{O}_{P'}(1) \cong \varphi^* \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi'^* \mathcal{L}$. \mathcal{S}' wird auch mit $\mathcal{S} * \mathcal{L}$ bezeichnet.

Satz 7.12. Sei X und \mathcal{S} mit (\dagger) . Sei $P = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ mit $\pi : P \rightarrow X$. Dann gilt:

- (i) π ist eigentlicher Morphismus.
- (ii) Besitzt X eine ample Garbe \mathcal{L} , so ist π projektiv und $\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^n$ ist eine sehr ample invertierbare Garbe von P über X .

Definition 7.13.

- (i) Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Setze:

$$T^0(M) = A, \quad T^n(M) = M^{\otimes n}, \quad n \geq 1$$

Dann ist $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ eine A -Algebra mit \otimes als Multiplikation, die sogenannte *Tensor-Algebra* von M .

- (ii) Die *symmetrische (Tensor-)Algebra* von M ist definiert als der Quotient von $T(M)$ nach dem Ideal, das von den Elementen $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in M$ erzeugt wird. $S(M) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$ ist dann eine kommutative, graduierte A -Algebra. $S^n(M)$ heißt *n-tes symmetrisches Produkt* von M .

- (iii) Sei X ein Schema und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann wird die Tensor-Algebra $T(\mathcal{F})$ bzw. die symmetrische Algebra $S(\mathcal{F})$ von \mathcal{F} als assoziierte Garbe zur Prägarbe $U \mapsto T(\mathcal{F}(U))$ bzw. $U \mapsto S(\mathcal{F}(U))$ definiert. $T(\mathcal{F})$ und $S(\mathcal{F})$ sind \mathcal{O}_X -Algebren.

Beispiel. Sei M ein freier A -Modul vom Rang r . Dann gilt $S(M) \cong A[X_1, \dots, X_r]$.

Definition 7.14. Sei X ein noethersches Schema und \mathcal{E} eine lokal freie, kohärente Garbe auf X . Sei $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$ die symmetrische Algebra von \mathcal{E} und $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$. Dann ist \mathcal{S} eine Garbe von graduierten \mathcal{O}_X -Algebren, die (\dagger) erfüllt. $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ heißt *projektives Vektorbündel* über X .

Bemerkung. Ist \mathcal{E} frei vom Rang $n + 1$ über $U \subset_o X$, so ist $\pi^{-1}(U) \cong \mathbf{P}_U^n$.

Satz 7.15. Sei $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ ein projektives Vektorbündel über X . Dann gilt mit $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$:

- (i) Ist Rang von \mathcal{E} größer gleich 2, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von graduierten \mathcal{O}_X -Algebren:

$$\mathcal{S} \cong \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \pi_* \mathcal{O}(\ell)$$

Insbesondere folgt $\pi_*(\mathcal{O}(\ell)) = 0$ für $\ell < 0$ und $\pi_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_X$, $\pi_*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{E}$.

- (ii) Es gibt einen natürliche surjektiven Morphismus:

$$\pi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}(1)$$

Satz 7.16. (*Universaleigenschaft des projektiven Vektorbündels*) Sei $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ ein projektives Vektorbündel von X und $g : Y \rightarrow X$ ein Morphismus. Dann gibt es genau dann einen Morphismus f mit kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \\ g \downarrow & \swarrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

wenn es eine invertierbare Garbe \mathcal{L} auf Y zusammen mit einem surjektiven Garbenmorphismus $g^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ gibt.

Aufblasung

Definition 7.17. Sei X ein noethersches Schema und \mathcal{J} eine kohärente Idealgarbe auf X . Setze $\mathcal{J}^0 = \mathcal{O}_X$ und \mathcal{J}^d als das d -fache Produkt des Ideals \mathcal{J} . Sei $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d$. Dann erfüllen X und \mathcal{S} die Bedingung (\dagger) . $\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ heißt die *Aufblasung* von X bzgl. \mathcal{J} .

Ist Y das abgeschlossene Unterschema von X , das zu \mathcal{J} gehört, so sagen wir auch, dass \tilde{X} die Aufblasung von X entlang Y ist.

Beispiel 7.18. Sei $X = \mathbf{A}_k^n$ und $P \in X$ der Nullpunkt, d.h. $X = \text{Spec}(A)$, $A = k[X_1, \dots, X_n]$, $I = (X_1, \dots, X_n)$. Dann ist die Aufblasung von X bei P gegeben durch:

$$\tilde{X} = \text{Proj}(S), \quad S = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$$

Betrachte die surjektive Abbildung $\psi : A[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow S$, $Y_i \mapsto X_i$. Wir sehen, dass \tilde{X} isomorph zu dem abgeschlossenen Unterschema von \mathbf{P}_A^{n-1} ist, das durch die homogenen Polynome in den Y_i , die $\ker(\psi)$ erzeugen, definiert ist:

$$\ker(\psi) = \langle X_i Y_j - X_j Y_i \mid i, j = 1, \dots, n \rangle$$

Definition 7.19. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus und $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$ eine Idealgarbe auf Y . Wir definieren die *inverse Idealgarbe* $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}_X$ auf X wie folgt:

$\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_X$ liefert nach 5.1 (xi) ein \mathcal{O}_X -Modulmorphismus $f^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X$. Setze $\mathcal{J}' = \text{im}(f^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X)$.

Alternativ: Betrachte die Idealgarbe $f^{-1} \mathcal{J}$ auf $f^{-1} \mathcal{O}_Y$ und den Morphismus $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, der zu $f^\#$ adjungiert ist. Dann ist \mathcal{J}' die vom Bild von $f^{-1} \mathcal{J}$ in \mathcal{O}_X erzeugte Idealgarbe. Wir schreiben daher auch $\mathcal{J}' = f^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_X$.

Bemerkung. Im Allgemeinen sind $f^* \mathcal{J}$ und $f^{-1} \mathcal{J}$ verschiedene Idealgarben.

Satz 7.20. Sei X ein noethersches Schema und \mathcal{J} eine kohärente Idealgarbe auf X . Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X bzgl. \mathcal{J} . Dann gilt:

- (i) Die inverse Idealgarbe $\tilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ist invertierbar auf $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$.
- (ii) Sei Y das zu \mathcal{J} gehörige abgeschlossene Unterschema und $U = X \setminus Y$. Dann ist $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ ein Isomorphismus.

Beweis.

- (i) Sei $\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d$ und $V \subset_o X$ affin. Dann ist $\mathcal{O}(1)|_{\text{Proj} \mathcal{S}(V)}$ die assoziierte Garbe zum graduierten $\mathcal{S}(V)$ -Modul $\mathcal{S}(V)(1) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^{d+1}(V) = \mathcal{J}(V)$.

$\mathcal{S}(V)$ das von $\mathcal{J}(V)$ in $\mathcal{S}(V)$ erzeugte Ideal. Es folgt $\tilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$, also invertierbar.

- (ii) Es ist $\mathcal{J}|_U \cong \mathcal{O}_U$, da $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{i^\#} i_*\mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ exakt ist. Daher gilt $\pi^{-1}(U) = \mathbf{Proj} \mathcal{O}_U[T] = U$. Beachte, dass für ein allgemeines A stets $\mathbf{Proj} A[T] = D_+(T) = \mathbf{Spec} A[T]_{(T)} = \mathbf{Spec}(A)$ gilt. \square

Satz 7.21. (*Universaleigenschaft des Aufblasens*) Sei X ein noethersches Schema, \mathcal{J} eine kohärente Idealgarbe auf X und $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X bzgl. \mathcal{J} . Ist $f : Z \rightarrow X$ ein Morphismus, so dass $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z$ eine invertierbare Idealgarbe auf Z ist, so existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : Z \rightarrow \tilde{X}$ mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad g \quad} & \tilde{X} \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Lemma 7.22. Sei X ein Schema, $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ ein surjektiver Morphismus invertierbarer Garben. Dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis. Siehe Bourbaki: Commutative Algebra II, §3.2 Korollar zu Proposition 6. \square

Korollar 7.23. Sei $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus noetherscher Schemata und \mathcal{J} eine kohärente Idealgarbe auf X . Sei \tilde{X} die Aufblasung bzgl. \mathcal{J} und \tilde{Y} die Aufblasung bzgl. $\mathcal{J}_Y = f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Y$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus \tilde{f} mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & \tilde{X} \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \end{array}$$

Ist f eine abgeschlossene Immersion, so auch \tilde{f} .

Beweis. \mathcal{J}_Y ist kohärent, da nach Satz 5.13 (ii) $f^*\mathcal{J}$ kohärent ist und nach Satz 5.12 (ii) auch $\mathrm{im}(f^*\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_Y)$. Nach Satz 7.20 ist $\pi_Y^{-1}\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ eine invertierbare Garbe auf \tilde{Y} . Nach Satz 7.21 existiert \tilde{f} und ist eindeutig bestimmt.

Sei nun f eine abgeschlossene Immersion und:

$$\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}), \quad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d, \quad \tilde{Y} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}_Y), \quad \mathcal{S}_Y = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}_Y^d$$

Ist $Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, so ist $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_Y$ surjektiv und somit ist auch $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_Y$ als Homomorphismus graduerter Ringe surjektiv. Daher ist $\tilde{Y} \hookrightarrow \tilde{X}$ eine abgeschlossene Immersion. \square

Definition 7.24. Ist $Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion noetherscher Schemata. Dann heißt das abgeschlossene Unterschema \tilde{Y} von \tilde{X} auch *strikte Transformation* von Y bzgl. der Aufblasung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$.

2.8 Differentiale

Sei A ein Ring, B eine A -Algebra und M ein B -Modul.

Definition 8.1. Eine A -Derivation von B nach M ist eine Abbildung $d : B \rightarrow M$ mit:

- (i) d ist additiv
- (ii) $d(b \cdot b') = b \cdot d(b') + b' \cdot d(b)$
- (iii) $d(a) = 0$ für alle $a \in A$

Der B -Modul aller A -Derivationen von B nach M bezeichnen wir mit $D_A(B, M)$.

Definition 8.2. Der B -Modul $\Omega_{B/A}$ der *relativen Differentialformen* von B über A zusammen mit einer A -Derivation $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ ist definiert durch folgende Universaleigenschaft:

Für alle B -Moduln M und A -Derivationen $d' : B \rightarrow M$ gibt es genau ein B -Homomorphismus $f : \Omega_{B/A} \rightarrow M$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow d' & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

Die Eindeutigkeit von $\Omega_{B/A}$ ist klar. Für die Existenz betrachte den freien B -Modul F mit Basis $\{d_b \mid b \in B\}$. Dann gilt:

$$\Omega_{B/A} = F / \langle d_{b+b'} - d_b - d_{b'}, d_{bb'} - bd_{b'} - b'd_b, d_a \mid b, b' \in B, a \in A \rangle$$

Zusammen mit der A -Derivation $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$, $b \mapsto d_b$ erfüllt diese Konstruktion die Universaleigenschaft.

Satz 8.3. Sei B eine A -Algebra und $f : B \otimes_A B \rightarrow B$, $b \otimes b' \mapsto bb'$. Betrachte $B \otimes_A B$ als B -Modul via $b(b_1 \otimes b_2) = (bb_1) \otimes b_2$. $B \otimes_A B$ wird zur B -Algebra durch $(b_1 \otimes b'_1)(b_2 \otimes b'_2) = (b_1 b_2) \otimes (b'_1 b'_2)$. Sei $I = \ker(f)$. Dann ist I/I^2 ein B -Modul. Setze $d : B \rightarrow I/I^2$, $db = 1 \otimes b - b \otimes 1 \mod I^2$. Dann ist $\Omega_{B/A} = (I/I^2, d)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $I = \sum_{b \in B} Bdb$. Sei $\beta = \sum b_i \otimes c_i \in I$, also $\sum b_i c_i = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_i (b_i(1 \otimes c_i - c_i \otimes 1) + b_i c_i \otimes 1) \\ &= \sum_i b_i dc_i + \left(\sum_i b_i c_i \right) \otimes 1 \in \sum_{b \in B} Bdb \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass d eine A -Derivation ist. $d(A) = 0$ und die Additivität ist klar.

$$\begin{aligned} dbdc &= (1 \otimes b - b \otimes 1)(1 \otimes c - c \otimes 1) \\ &= bc \otimes 1 - b \otimes c - c \otimes b + 1 \otimes bc \\ &= d(bc) + 2bc \otimes 1 - b(dc + c \otimes 1) - c(db + b \otimes 1) \\ &= d(bc) - bdc - cdb \end{aligned}$$

Also ist $d(bc) \equiv bdc + cdb \pmod{I^2}$. Somit müssen wir noch zeigen, dass $(I/I^2, d)$ die Universaleigenschaft von $\Omega_{B/A}$ erfüllt. Sei M ein B -Modul und $D : B \rightarrow M$ eine A -Derivation. Zu zeigen ist die Existenz und Eindeutigkeit von einem B -Homomorphismus $f : I/I^2 \rightarrow M$ mit $D = f \circ d$. Da $I = \sum Bdb$ ist, folgt die Eindeutigkeit.

Betrachte die *triviale Erweiterung* $B * M$ von B mit M , d.h. $B \oplus M$ mit der Multiplikation $(b_1, m_1)(b_2, m_2) = (b_1 b_2, b_1 m_2 + b_2 m_1)$. Dann ist $B * M$ ein Ring mit Einselement $(1, 0)$. $B * M$ trägt eine B -Modulstruktur via $b'(b, m) = (bb', bm)$, d.h. $B * M$ ist eine B -Algebra. Wir haben kanonische B -Homomorphismen:

- Die Einbettung $M \hookrightarrow B * M$, $m \mapsto (0, m)$
- Die Projektion $B * M \rightarrow B$, $(b, m) \mapsto b$

Betrachte den B -Algebrenhomomorphismus $\varphi : B \otimes_A B \rightarrow B * M$, $x \otimes y \mapsto (xy, xDy)$. Es gilt $\varphi(I) \subset M \subset B * M$, da $\varphi(db) = \varphi(1 \otimes b - b \otimes 1) = (b, Db) - (b, bD1) = (0, Db)$. Da $M^2 = 0$ in $B * M$, induziert φ eine Abbildung $\phi : B \otimes_A B/I^2 \rightarrow B * M$. Dann erfüllt $f = \phi|_{I/I^2} : I/I^2 \rightarrow M$ die gewünschte Eigenschaft $f \circ d = D$. \square

Satz 8.4. Es gibt für jeden B -Modul M einen kanonischen B -Modulisomorphismus:

$$\text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \rightarrow \text{Der}_A(B, M), \quad f \mapsto f \circ d$$

Beweis. Folgt direkt aus der Universaleigenschaft. \square

Beispiel 8.5. Sei $B = A[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^n B dX_i$ ein freier B -Modul vom Rang n . Allgemein gilt: Wird B als A -Algebra von y_1, \dots, y_m erzeugt, so ist $\Omega_{B/A} = \sum_{i=1}^m B dy_i$, da:

$$d\left(\prod_i y_i^{n_i}\right) = \sum_i n_i \prod_{j \neq i} y_j^{n_j} y_i^{n_i-1} dy_i$$

Angenommen, $\sum_i b_i dX_i = 0$. Betrachte die Derivationen $\frac{\partial}{\partial X_i} \in \text{Der}_A(B)$. Nach Satz 8.4 existiert für jedes k ein $f_k \in \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B)$ mit $\frac{\partial}{\partial X_k} = f_k \circ d$. Es gilt für alle k :

$$0 = f_k \left(\sum_{i=1}^n b_i dX_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i f_k(dX_i) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial X_i}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{ik} = b_k$$

Somit ist $\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^n B dX_i$

Satz 8.6.

(i) Sei S eine multiplikative Teilmenge der A -Algebra B . Dann gilt:

$$S^{-1}\Omega_{B/A} \cong \Omega_{S^{-1}B/A}$$

(ii) Seien A', B A -Algebren und $B' = B \otimes_A A'$. Dann gilt:

$$\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B'$$

Satz 8.7. Seien $\phi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ Ringhomomorphismen. Dann gilt:

(i) (*Erste fundamentale exakte Sequenz*) Es gibt eine exakte Sequenz:

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \xrightarrow{u} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$

(ii) v ist injektiv und die Sequenz zerfällt, genau dann wenn für alle C -Moduln M und jedes $D \in \text{Der}_A(B, M)$ zu einer Derivation aus $\text{Der}_A(C, M)$ fortgesetzt werden kann.

Beweis. Definiere u und v durch:

$$v(db \otimes c) = cd\psi(b), \quad u(cdc') = cdc', \quad b \in B, \quad c, c' \in C$$

Äquivalent zu (i) bzw. (ii) ist die Exaktheit der 4-Term- bzw. 5-Termsequenzen:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \dashrightarrow 0$$

Da $\text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \cong \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$, ist nach Satz 8.4 ist die Exaktheit nachzuweisen von:

$$0 \longrightarrow \text{Der}_B(C, M) \longrightarrow \text{Der}_A(C, M) \longrightarrow \text{Der}_A(B, M) \dashrightarrow 0$$

Die vorletzte Abbildung ist gegeben durch $(\delta : C \rightarrow M) \mapsto (\delta \circ \psi : B \rightarrow M)$. Ohne die 0 rechts ist diese Folge per Definition exakt. Mit der 0 rechts ist die Folge genau dann exakt, wenn die Forderung in (ii) gilt. \square

Beispiel 8.8. Sei B eine A -Algebra und $C = B[x_1, \dots, x_n]$. Sei M ein beliebiger C -Modul und $D \in \text{Der}_A(B, M)$. Sei $\tilde{D} : C \rightarrow M$ die einem Polynom F , den Polynom F^D zuordnet, wobei F^D das Polynom ist, das man durch Anwenden von D auf die Koeffizienten von F erhält. Dann ist \tilde{D} eine Derivation mit $\tilde{D}|_B = D$. Nach Satz 8.7 (ii) gilt:

$$\Omega_{C/A} \cong (\Omega_{B/A} \otimes_B C) \oplus Cdx_1 \oplus \dots \oplus Cdx_n$$

Satz 8.9. (*Zweite fundamentale exakte Sequenz*) Sei B eine A -Algebra, I ein Ideal in B und $C = B/I$. Es gibt eine kanonische, exakte Folge von C -Moduln:

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

wobei $v(db \otimes c) = cd\bar{b}$ und δ die durch die Abbildung $I \rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$, $x \mapsto dx \otimes 1$ induzierte C -lineare Abbildung ist.

Beweis. Für $x, x' \in I$ gilt:

$$d(xx') \otimes 1 = dx \otimes x' + dx' \otimes x = 0$$

Daher ist δ wohldefiniert. Nun ist für alle C -Moduln M die folgenden Folgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(I/I^2, M) \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \text{Der}_A(B/I, M) & \longrightarrow & \text{Der}_A(B, M) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_B(I, M) \end{array}$$

wobei $\varphi(D : B \rightarrow M) = (D|_I : I \rightarrow M)$. □

Korollar 8.10. Ist B eine endlich erzeugte A -Algebra oder Lokalisierung einer endlich erzeugten A -Algebra, so ist $\Omega_{B/A}$ endlich erzeugter B -Modul.

Beweis. Es ist $B \cong A[x_1, \dots, x_n]/I$ für ein Ideal I . Wegen Beispiel 8.5 ist $\Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A}$ ein endlich erzeugter $A[x_1, \dots, x_n]$ -Modul. Nach Satz 8.9 ist $\Omega_{B/A}$ ein endlich erzeugter B -Modul. Die Aussage über die Lokalisierung folgt aus Satz 8.6 (i). □

Definition 8.11. Eine Körpererweiterung K/k heißt *separabel erzeugt*, falls es eine Transzendenzbasis $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ für K/k gibt, so dass $K/k[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ separabel ist.

Satz 8.12. Sei K/k eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann gilt:

(i) $\dim_K \Omega_{K/k} \geq \text{trdeg}(K/k)$

(ii) Gleichheit in (i) gilt genau dann, wenn K/k separabel erzeugt ist.

Korollar 8.13. Sei K/k eine endliche Erweiterung. Dann gilt:

$$\Omega_{K/k} = 0 \iff K/k \text{ ist separabel}$$

Satz 8.14. Sei B ein lokaler Ring mit Maximalideal \mathfrak{m} und Restklassenkörper k . Ferner gebe es einen Schnitt von $B \twoheadrightarrow k$, also ist B eine k -Algebra. Dann ist die Abbildung δ in der zweiten fundamentalen Sequenz ein Isomorphismus:

$$\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B k$$

Beweis. Es ist $\text{coker}(\delta) = \Omega_{k/k} = 0$. Die Injektivität von δ ist äquivalent zur Surjektivität von:

$$\delta^* : \text{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

Nun ist $\text{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k) = \text{Der}_k(B, k)$. Die Abbildung $\text{Der}_k(B, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$, $(d : B \rightarrow k) \mapsto (d|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \rightarrow k)$ kommutiert mit δ^* . Beachte, dass für $d \in \text{Der}_k(B, k)$ stets $d(\mathfrak{m}^2) = 0 \in k$ gilt.

Sei nun $h \in \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ und $b \in B$. Wegen des Schnitts $k \rightarrow B$, hat b eine eindeutige Darstellung $b = \lambda + c$, $\lambda \in k$, $c \in \mathfrak{m}$. Setze $d : B \rightarrow k$, $d(b) = h(\bar{c})$. Dann ist $d(k) = 0$, d additiv und es gilt:

$$\begin{aligned} d(bb') &= d(\lambda\lambda' + \lambda c' + \lambda'c + cc') \\ &= h(\overline{\lambda c' + \lambda'c}) \\ &= \lambda h(\bar{c}') + \lambda' h(\bar{c}) \\ &= \lambda d(b') + \lambda' d(b) = bd(b') + b'd(b) \in k \end{aligned}$$

für alle $b = \lambda + c$, $b' = \lambda' + c' \in B$. Es gilt $\delta^*(d) = h$. □

Satz 8.15. Sei B ein lokaler Ring und es gebe einen Schnitt von $B \rightarrow k$. Ferner sei der Restklassenkörper k vollkommen. Sei B die Lokalisierung einer endlich erzeugten k -Algebra. Dann ist $\Omega_{B/k}$ genau dann ein freier B -Modul vom Rang $\dim(B)$, wenn B regulär ist.

Beweis. Sei $\Omega_{B/k}$ frei vom Rang $\dim(B)$. Nach Satz 8.14 ist $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(B)$, also ist B per Definition regulär.

Sei umgekehrt B regulär von Dimension r . Nach Satz 8.14 gilt:

$$r = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_k \Omega_{B/k} \otimes_B k$$

Sei K der Quotientenkörper von B . Nach Satz 8.6 ist $\Omega_{B/k} \otimes_B K = \Omega_{K/k}$. Nun ist K/k separabel erzeugt, da k vollkommen (siehe z.B. Matsumura Chapter 10, Corollary p. 194). Nach Satz 8.12 gilt:

$$\dim_K \Omega_{K/k} = \text{trdeg}(K/k) = \dim(B) = r$$

Nach Korollar 8.10 ist $\Omega_{B/k}$ endlich erzeugter B -Modul. □

Lemma 8.16. Sei A ein noetherscher, lokaler, nullteilerfreier Ring mit Restklassenkörper k und Quotientenkörper K . Sei M ein endlich erzeugter A -Modul mit:

$$\dim_k(M \otimes_A k) = \dim_K(M \otimes_A K) = r$$

Dann ist M frei vom Rang r .

Beweis. Wegen $\dim_k(M \otimes_A k) = r$, gibt es nach Nakayama eine Surjektion $\varphi : A^r \rightarrow M$. Setze $N = \ker(\varphi)$. Da K flach über A ist, haben wir eine kurze exakte Folge:

$$0 \longrightarrow N \otimes_A K \longrightarrow K^r \longrightarrow M \otimes_A K \longrightarrow 0$$

Da $\dim_K(M \otimes_A K) = \dim_K K^r$, folgt $N \otimes_A K = 0$, also $N = 0$, da $N \subset A^r$ und A torsionsfrei ist. \square

Differentialgarben

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ die Diagonale. Δ ist nach Satz 3.30 eine Immersion und liefert ein Isomorphismus auf $\Delta(X)$, wobei $\Delta(X)$ ein abgeschlossenes Unterschema eines offenen Unterschema $W \subset X \times_Y X$ ist.

Definition 8.17. Sei \mathcal{J} die Idealgarbe von $\Delta(X)$ in W . Dann heißt

$$\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

die Garbe der *relativen Differentiale* von X über Y .

Bemerkung 8.18.

- (i) $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ ist ein $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$ -Modul und somit ist über den Isomorphismus $X \rightarrow \Delta(X)$ die Modulgarbe $\Omega_{X/Y}$ ein \mathcal{O}_X -Modul. Wegen Satz 5.13 (i) ist $\Omega_{X/Y}$ quasikohärent. Ist Y noethersch und $f : X \rightarrow Y$ von endlichem Typ, und somit X und $X \times_Y X$ noethersch, dann ist $\Omega_{X/Y}$ kohärent.
- (ii) Sei $U = \text{Spec}(A) \subset_o Y$ und $V = \text{Spec}(B) \subset_o X$ mit $f(V) \subset U$. Dann ist $V \times_U V$ affin offen in $X \times_Y X$ mit $V \times_U V = \text{Spec}(B \otimes_A B)$. Es ist

$$\Delta(X) \cap V \times_U V = \text{Spec}(B \otimes_A B / \ker(B \otimes_A B \rightarrow B))$$

ein abgeschlossenes Unterschema von $V \times_U V$. Sei $I = \ker(B \otimes_A B \rightarrow B)$, also gilt:

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_{\Delta(X) \cap V \times_U V} = \widetilde{I/I^2}$$

Nach Satz 8.3 folgt $\Omega_{V/U} = \widetilde{\Omega_{B/A}}$. Somit ist Definition 8.17 verträglich mit dem affinen Fall. Ist $X = \bigcup V$ eine Überdeckung durch affin offenen V und $Y = \bigcup U$ eine Überdeckung durch affin offenen U , so liefert die Verklebung von $\widetilde{\Omega_{B/A}}$, $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ gerade $\Omega_{X/Y}$, $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/Y}$. d ist ein Garbenmorphismus und ist in jedem Punkt eine Derivation von lokalen Ringen.

Satz 8.19. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus und $g : Y' \rightarrow Y$ ein weiterer Morphismus. Betrachte den Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Dann gilt $\Omega_{X'/Y'} \cong (g')^*(\Omega_{X/Y})$.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 8.18 (ii) und Satz 8.6 (ii). □

Satz 8.20. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen. Dann gibt es eine exakte Garbensequenz auf X :

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

Beweis. Es reicht, die Exaktheit lokal zu überprüfen. Dies folgt aus der ersten fundamentalen exakten Sequenz. □

Satz 8.21. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus und Z ein abgeschlossenes Unterschema von X zum Ideal \mathcal{J} . Dann gibt es eine exakte Sequenz von Garben auf Z :

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

Beweis. Folgt aus der zweiten fundamentalen exakten Sequenz. □

Satz 8.22. Sei $X = \mathbf{A}_Y^n$. Dann ist $\Omega_{X/Y}$ ein freier \mathcal{O}_X -Modul vom Rang n , erzeugt von globalen Schnitten dx_1, \dots, dx_n , wobei x_1, \dots, x_n die affinen Koordinaten von \mathbf{A}_Y^n sind.

Beweis. Folgt aus Beispiel 8.5. □

Satz 8.23. Sei A ein Ring und $Y = \text{Spec}(A)$. Sei $X = \mathbf{P}_A^n$. Dann gibt es eine exakte Sequenz von Garben auf X :

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Beweis. Sei $S = A[x_0, \dots, x_n]$ der homogene Koordinatenring von X und setze:

$$E = \bigoplus_{i=0}^n S(-1)e_i$$

als den graduierten S -Modul mit Basis e_0, \dots, e_n im Grad 1. Betrachte den S -Modulhomomorphismus $\varphi : E \rightarrow S$, $e_i \mapsto x_i$ im Grad 0 und $M = \ker(\varphi)$. Wir erhalten eine exakte Garbensequenz:

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

$\varphi : E \rightarrow S$ ist in allen Graden größer gleich 1 surjektiv, also ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Wir zeigen nun $\widetilde{M} = \Omega_{X/Y}$.

Lokalisierung nach x_i liefert eine Surjektion von freien S_{x_i} -Moduln $E_{x_i} \rightarrow S_{x_i}$. M_{x_i} ist frei vom Rang n mit Basis $\{e_j - \frac{x_j}{x_i}e_i \mid j \neq i\}$. Multiplikation mit $\frac{1}{x_i}$ liefert Elemente vom Grad 0 in M_{x_i} . Also ist $\widetilde{M}|_{D_+(x_i)}$ ein freier $\mathcal{O}_{D_+(x_i)}$ -Modul, der von den globalen Schnitten $\{\frac{1}{x_i}e_j - \frac{x_j}{x_i^2}e_i \mid j \neq i\}$ erzeugt wird. Definiere $\varphi_i : \Omega_{X/Y}|_{D_+(x_i)} \rightarrow \widetilde{M}|_{D_+(x_i)}$ wie folgt:

Es ist $D_+(x_i) = \text{Spec } A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$. Nach Satz 8.22 gilt:

$$\Omega_{X/Y}|_{D_+(x_i)} = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_{D_+(x_i)} d\frac{x_j}{x_i}$$

Setze nun $\varphi_i(d\frac{x_j}{x_i}) = \frac{1}{x_i^2}(x_i e_j - x_j e_i)$. φ_i ist ein Isomorphismus. Die φ_i lassen sich nun zu einem Isomorphismus $\varphi : \Omega_{X/Y} \rightarrow \widetilde{M}$ verkleben. \square

Nicht-singuläre Varietäten

Definition 8.24. Eine Varietät X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , d.h. ein integres, separiertes Schema von endlichem Typ, heißt *nicht-singulär*, wenn alle lokalen Ringe regulär sind.

Satz 8.25. Sei X ein irreduzibles, separiertes Schema von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann ist $\Omega_{X/k}$ genau dann lokal frei vom Rang $n = \dim(X)$, wenn X eine nicht-singuläre Varietät über k ist.

Lemma 8.26. Sei X ein noethersches Schema und \mathcal{F} eine kohärente Garbe. Dann ist \mathcal{F} genau dann lokal frei, wenn \mathcal{F}_x freier $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul für alle $x \in X$ ist.

Korollar 8.27. Sei X eine nicht-singuläre Varietät über k und $Y \subset X$ ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema zur Idealgarbe \mathcal{J} . Dann ist Y genau dann nicht-singulär, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\Omega_{Y/k}$ ist lokal frei.
- (ii) In der exakten Sequenz aus Satz 8.21 ist δ injektiv:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0$$

3 Kohomologie

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für abelsche Kategorien:

- **Ab**, die Kategorie der abelschen Gruppen
- **Mod**(A), die Kategorie der Moduln über einem kommutativen Ring A mit Eins
- **Ab**(X), die Kategorie der Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum X
- **Mod**(X) oder **Mod**(\mathcal{O}_X), die Kategorie der \mathcal{O}_X -Moduln auf einem geringten Raum X mit Strukturgarbe \mathcal{O}_X .
- **Qcoh**(X) oder **Qcoh**(\mathcal{O}_X), die Kategorie der quasikohärenten \mathcal{O}_X -Moduln auf einem Schema X
- **Coh**(X) oder **Coh**(\mathcal{O}_X), die Kategorie der kohärenten \mathcal{O}_X -Modulgarben auf einem noetherschen Schema X

3.1 Kohomologie von Garben

Satz 9.15. Sei A ein Ring. Dann ist jeder A -Modul isomorph zu einem Untermodul eines injektiven A -Moduls.

Satz 9.16. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Dann hat die Kategorie **Mod**(\mathcal{O}_X) genügend viele Injektive.

Beweis. Sei $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$. Dann ist $\mathcal{F}_x \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$. Nach Satz 9.15 gibt es ein Monomorphismus $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$ mit einem injektiven $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul I_x . Sei $j : \{x\} \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion und betrachte die I_x als Garben auf $\{x\}$. Setze $\mathcal{J} = \prod_{x \in X} j_* I_x$. Dann gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, j_* I_x) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, I_x)$$

Die $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ geben ein Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{J}$. Ferner gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((-)_x, I_x)$$

Da Halmbildung exakt und I_x injektive Objekte sind, ist dies ein exakter Funktor. Somit ist \mathcal{J} ein injektiver \mathcal{O}_X -Modul. □

Korollar 9.17. Sei X ein topologischer Raum. Dann besitzt $\mathbf{Ab}(X)$ genügend viele Injektive.

Beweis. Sei \mathcal{O}_X die konstante Garbe \mathbb{Z} auf X . Dann ist (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und es gilt $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) = \mathbf{Ab}(X)$. \square

Definition 9.18. Sei X ein topologischer Raum und $\Gamma(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ der globale Schnittfunktor. Wir definieren:

$$H^i(X, -) = R^i\Gamma(X, -)$$

$H^i(X, \mathcal{F})$ heißt *i-te Kohomologiegruppe* von der Garbe \mathcal{F} . Haben X und \mathcal{F} Zusatzstrukturen, z.B. X Schema oder $\mathcal{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$, so wird die Kohomologie trotzdem immer im obigen Sinne verstanden, d.h. $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(X)$.

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. \mathcal{F} heißt *welk*, falls für alle offenen $V \subset U$ die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist.

Lemma 9.19. Ist (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum, so ist jeder injektiver \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{J} welk.

Beweis. Seien $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow X$ die natürlichen Inklusionen. Betrachte die Inklusion $j_!\mathcal{O}_X|_V \hookrightarrow i_!\mathcal{O}_X|_U$ von \mathcal{O}_X -Moduln. Es folgt die Surjektivität von:

$$\mathcal{J}(U) = \mathrm{Hom}(i_!\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{J}) \rightarrow \mathrm{Hom}(j_!\mathcal{O}_X|_V, \mathcal{J}) = \mathcal{J}(V) \quad \square$$

Satz 9.20. Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} eine welke Garbe auf X . Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$.

Lemma 9.21. Sei X ein topologischer Raum. Sei $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben.

(i) Ist \mathcal{G}' eine welke Garbe, so ist für alle $U \subset_o X$ die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}'(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}''(U) \longrightarrow 0$$

(ii) Sind \mathcal{G}' und \mathcal{G} welk, so auch \mathcal{G}'' .

Beweis.

(i) Sei o.B.d.A. $U = X$ und sei $s'' \in \mathcal{G}''(X)$. Setze:

$$E = \{(U, s) \mid U \subset_o X, s \in \mathcal{G}(U), s \mapsto s''|_U\}$$

E ist partiell geordnet bzgl. Inklusion. Jede Kette in E besitzt eine obere Schranke in E . Nach Zorns Lemma gibt es ein maximales Element $(U, s) \in E$.

Gibt es ein $x \in X \setminus U$, so existiert eine offene Umgebung V von x und $t \in \mathcal{G}(V)$ mit $t \mapsto s''|_V$, da $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}''$ surjektiv ist. Da \mathcal{G}' welk ist, so setzt sich $s - t \in \mathcal{G}'(U \cap V)$ zu einem Schnitt auf $\mathcal{G}'(V)$ fort. Ersetzen wir t durch $s - t \in \mathcal{G}'(V)$, können wir o.B.d.A. $s = t$ auf V annehmen. Die Existenz von (V, s) ist ein Widerspruch zur Maximalität von (U, s) . Somit folgt $U = X$.

(ii) Für $V \subset U$ offen in X kommutiert das folgende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}''(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}''(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es folgt die Surjektivität von $\mathcal{G}''(U) \rightarrow \mathcal{G}''(V)$. □

Beweis von 9.20. Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ exakt mit \mathcal{J} injektiv. Nun sind \mathcal{F} und \mathcal{J} welk. Nach Lemma 9.21 ist auch \mathcal{G} welk und wir haben eine exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow 0$$

Da $H^i(X, \mathcal{J}) = 0$ für alle $i > 0$, gilt $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ und $H^i(X, \mathcal{F}) = H^{i-1}(X, \mathcal{G})$ für alle $i \geq 2$. Somit folgt die Aussage per Induktion nach i . □

Satz 9.22. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum. Dann sind die derivierten Funktoren von

$$\Gamma(X, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

gerade die Kohomologie-Funktoren.

Beweis. $R^i\Gamma(X, -)$ wird über eine injektive Auflösung in $\mathbf{Mod}(X)$ berechnet. Nun sind injektive Objekte in $\mathbf{Mod}(X)$ nach Lemma 9.19 welk und nach Satz 9.20 insbesondere azyklisch bzgl. $\Gamma(X, -)$. Somit ist $R^i\Gamma(X, -) = H^i(X, -)$. □

Bemerkung 9.23. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Da die Kohomologie durch Auflösungen in der Kategorie $\mathbf{Mod}(X)$ berechnet werden kann, haben alle Kohomologiegruppen von \mathcal{F} eine A -Modulstruktur mit $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Lemma 9.24. Sei X ein noetherscher topologischer Raum und $\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}$. Dann gilt:

(i) $\mathcal{F}(X) = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}(X)$

(ii) Sind alle \mathcal{F}_{α} welk, so auch \mathcal{F} .

Beweis.

- (ii) Für alle α und $V \subset U$ offen in X ist $\mathcal{F}_\alpha(U) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(V)$ surjektiv. Da \varinjlim exakt ist, folgt mit (i) die Surjektivität von:

$$\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha(U) \rightarrow \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha(V) = \mathcal{F}(V)$$

- (i) Der Funktor $\Gamma(X, -)$ vertauscht mit \varinjlim , siehe z.B. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, p. 169. \square

Satz 9.25. Sei X ein noetherscher topologischer Raum und $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein induktives System in $\mathbf{Ab}(X)$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$$

Beweis. Für alle α haben wir natürliche Abbildungen $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$. Wir erhalten $H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \rightarrow H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$ und daher eine Abbildung:

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \rightarrow H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$$

Dies ist nach Lemma 9.24 (i) für $i = 0$ ein Isomorphismus. Betrachte die abelsche Kategorie $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$ der direkten Limiten von Objekten aus $\mathbf{Ab}(X)$ indiziert durch A . Da \varinjlim exakt ist, haben wir eine natürliche Transformation von δ -Funktoren $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X)) \rightarrow \mathbf{Ab}$

$$\varinjlim H^i(X, -) \rightarrow H^i(X, \varinjlim -)$$

die für $i = 0$ übereinstimmt. Jetzt genügt es zu zeigen, dass beide Funktoren auslöschar sind. Dann sind beide universell und insbesondere gleich.

Sei $(\mathcal{F}_\alpha) \in \mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$. Zu α definieren wir die Garbe \mathcal{G}_α wie folgt:

$$U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \prod_{P \in U} (\mathcal{F}_\alpha)_P \mid s(P) \in (\mathcal{F}_\alpha)_P \right\}$$

Dann ist \mathcal{G}_α welk und $\mathcal{F}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{G}_\alpha$. Nach Konstruktion bilden die \mathcal{G}_α ein induktives System und wir erhalten einen Monomorphismus $u : (\mathcal{F}_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{G}_\alpha)$ in $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$. Ferner gilt $H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$ für alle $i > 0$ nach Satz 9.20, also $\varinjlim H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$ für alle $i > 0$. Somit ist $\varinjlim H^i(X, -)$ auslöschar.

Da $\varinjlim \mathcal{G}_\alpha$ nach Satz 9.24 (ii) welk ist, ist auch $H^i(X, \varinjlim \mathcal{G}_\alpha) = 0$ für alle $i > 0$, d.h. auch $H^i(X, \varinjlim -)$ ist auslöschar. \square

Lemma 9.26. Sei $Y \subset X$ abgeschlossen mit natürlicher Inklusion $i : Y \hookrightarrow X$ und $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(Y)$. Dann gilt:

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, i_* \mathcal{F})$$

Beweis. Sei \mathcal{J}^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{F} auf Y ; insbesondere ist \mathcal{J}^\bullet eine welke Auflösung. Dann ist $i_*\mathcal{J}^\bullet$ eine welke Auflösung von $i_*\mathcal{F}$ auf X . Für alle i gilt:

$$\Gamma(Y, \mathcal{J}^i) = \Gamma(X, i_*\mathcal{J}^i)$$

Somit ergeben sich die gleichen Kohomologiegruppen. \square

Satz 9.27. (*Verschwindungssatz von Grothendieck*) Sei X ein noetherscher topologischer Raum der Dimension n . Dann gilt für alle abelschen Garben \mathcal{F} auf X :

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für alle } i > n$$

Beweis. Sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X .

1. Schritt: (*Reduktion auf irreduzible X*) Sei X reduzibel und $Y \subset X$ eine irreduzible Komponente mit Einbettungen $i : Y \hookrightarrow X$, $j : U = X \setminus Y \hookrightarrow X$. Nach 1.16 ist die folgende Garbensequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0$$

wobei $\mathcal{F}_U = j_!(\mathcal{F}|_U)$ und $\mathcal{F}_Y = i_*(\mathcal{F}|_Y)$ ist. Es genügt zu zeigen, dass $H^i(X, \mathcal{F}_U) = 0 = H^i(X, \mathcal{F}_Y)$ für alle $i > n$ ist. Betrachte $g : \overline{U} \hookrightarrow X$. Nun hat \overline{U} weniger irreduzible Komponenten als X . Setze $\mathcal{F}_{\overline{U}} = g^*\mathcal{F}_U$. Es folgt nach Lemma 9.26:

$$H^i(\overline{U}, \mathcal{F}_{\overline{U}}) = H^i(X, g_*\mathcal{F}_{\overline{U}}) = H^i(X, \mathcal{F}_U)$$

$$H^i(X, \mathcal{F}_Y) = H^i(X, i_*\mathcal{F}|_Y) = H^i(Y, \mathcal{F}|_Y)$$

Per Induktion nach Anzahl der irreduziblen Komponenten von X können wir ohne Einschränkung X als irreduzibel annehmen.

2. Schritt: Sei X irreduzibel und $\dim(X) = 0$. Die einzigen offenen Mengen von X sind \emptyset und X , d.h. $\Gamma(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien. Insbesondere ist $\Gamma(X, -)$ exakt, d.h. $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$.
3. Schritt: Sei X irreduzibel und $\dim(X) = n$. Sei $j : U \hookrightarrow X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$. Da

$$\mathcal{F}(U) = \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{F}(U)) = \text{Hom}_U(\mathbb{Z}|_U, \mathcal{F}|_U) = \text{Hom}_X(j_!(\mathbb{Z}|_U), \mathcal{F})$$

wobei $\mathbb{Z}|_U$ die konstante Garbe bezeichnet, entspricht s einen Morphismus $j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$. Setze $\mathcal{F}_s = \text{im}(j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F})$. \mathcal{F}_s heißt die von s erzeugte Untergarbe von \mathcal{F} . Sei $\alpha = (s_i)_{i \in I}$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ eine beliebige Familie von Schnitten. Setze:

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{i \in I} \mathcal{F}_{s_i} \subset \mathcal{F}$$

Sei J die Menge aller endlichen Familien $\alpha = (s_i)$. J wird mit der folgenden partiellen Ordnung zu einem gerichteten System:

$$\alpha' \leq \alpha \iff \alpha' \text{ ist Unterfamilie von } \alpha$$

Für $\alpha' \leq \alpha$ gilt $\mathcal{F}_{\alpha'} \subset \mathcal{F}_{\alpha}$. Somit ist $\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha \in J} \mathcal{F}_{\alpha}$. Nach Satz 9.25 reicht es zu zeigen, dass $H^i(X, \mathcal{F}_{\alpha}) = 0$ für alle $i > n$ und alle $\alpha \in J$.

Sei nun $\alpha' \leq \alpha$. Betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha'} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$. \mathcal{G} ist erzeugt von $\#\alpha - \#\alpha'$ Schnitten über geeignete offenen Mengen. Per Induktion nach $\#\alpha$ können wir unter Betrachtung der langen exakten Kohomologiefolge o.B.d.A. annehmen, dass \mathcal{F} von einem Schnitt über einer geeigneten offenen Menge U erzeugt wird, d.h. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$. Die zu s gehörige Morphismus $\mathbb{Z}_U = j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$ ist surjektiv.

Definiere die Garbe \mathcal{R} durch die exakte Folge $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$. Unter Betrachtung der langen exakten Kohomologiefolge genügt es zu zeigen, dass $H^i(X, \mathcal{R}) = 0 = H^i(X, \mathbb{Z}_U)$ für alle $i > n$ ist.

4. Schritt: Wir zeigen $H^i(X, \mathcal{R}) = 0$ für alle $i > n$ per Induktion über $n = \dim(X)$. Für $x \in U$ ist \mathcal{R}_x eine Untergruppe von \mathbb{Z} . Ist $\mathcal{R} = 0$, so folgt $\mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_U$. Sei nun $\mathcal{R} \neq 0$. Setze:

$$d = \min\{m > 0 \mid m \in \mathcal{R}_x, x \in U\}$$

Es existiert ein $\emptyset \neq V \subset_o U$ mit $\mathcal{R}|_V \cong d \cdot \mathbb{Z}|_V \subset \mathbb{Z}|_V$. Wir erhalten $\mathcal{R}_V = j_!(\mathcal{R}|_V) = \mathbb{Z}_V$, wobei $j : V \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion ist. Wir erhalten die exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_V \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \rightarrow 0$$

Nun gilt $\text{supp}(\mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) \subset \overline{U \setminus V} \subset X$. Da X irreduzibel ist, gilt $\dim(\overline{U \setminus V}) < n$. Aus der Induktionsannahme folgt mit Lemma 9.26 für alle $i \geq n$:

$$H^i(X, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) = H^i(\overline{U \setminus V}, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V|_{\overline{U \setminus V}}) = 0$$

Nach der langen exakten Kohomologiesequenz reicht es zu zeigen, dass $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$ für $i > n$ gilt.

5. Schritt: Wir zeigen $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$ für alle $i > n$ per Induktion über $n = \dim(X)$. Sei $U \subset_o X$ und $Y = X \setminus U$. Dann ist $0 \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow 0$ exakt nach 1.16. Wegen $\dim(Y) < \dim(X)$ folgt nach der Induktionsannahme und Lemma 9.26 für alle $i \geq n$:

$$H^i(X, \mathbb{Z}_Y) = H^i(Y, \mathbb{Z}|_Y) = 0$$

Ferner ist die konstante Garbe \mathbb{Z} welk. Nach Satz 9.20 folgt $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $i > 0$. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert $H^i(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ für $i > n$. \square

Satz 9.28. Sei $X = \text{Spec}(A)$ noethersch. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$ und alle quasikohärenten Garben \mathcal{F} .

Bemerkung. Dieser Satz gilt auch für nicht-noethersche Ringe A .

Satz von Krull. Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $M \subset N$ endlich erzeugte A -Moduln. Dann ist die \mathfrak{a} -adische Topologie auf M induziert von der \mathfrak{a} -adischen Topologie auf N , d.h:

$$\forall n \geq 0, \exists m \geq n : \mathfrak{a}^n M \supset \mathfrak{a}^m N \cap M$$

Beweis. Siehe beispielsweise Bosch: Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2.3. Lemma 1. \square

Definition. Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein A -Modul. Wir definieren:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M \mid \exists n > 0 : \mathfrak{a}^n m = 0\}$$

Lemma 9.29. Sei A noethersch, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und I ein injektiver A -Modul. Dann ist $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ ebenfalls injektiv.

Beweis. Setze $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Wir zeigen zunächst: Für alle Ideale $\mathfrak{b} \subset A$ und alle A -Modulhomomorphismen $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$ gibt es einen A -Modulhomomorphismus $\psi : A \rightarrow J$ mit $\psi|_{\mathfrak{b}} = \varphi$.

Sei $\mathfrak{b} \subset A$ ein notwendigerweise endlich erzeugtes Ideal und $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$ ein A -Modulhomomorphismus. Zu $x \in J$ gibt es nach Definition ein $n > 0$ mit $\mathfrak{a}^n x = 0$. Da \mathfrak{b} endlich erzeugt ist, existiert ein n mit:

$$0 = \mathfrak{a}^n \varphi(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}^n \mathfrak{b})$$

Nach dem Satz von Krull gibt es ein $m \geq n$ mit $\mathfrak{a}^m \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m$, also $\varphi(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m) = 0$. Somit faktorisiert φ über $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m)$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}^m & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow \text{---} & \\ \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m) & \longrightarrow & J \hookrightarrow I \end{array}$$

Da I injektiv ist, gibt es eine Fortsetzung $\psi' : A/\mathfrak{a}^m \rightarrow I$ von φ , das obige Diagramm kommutativ macht. Nun gilt $\mathfrak{a}^m \psi'(A/\mathfrak{a}^m) = 0$, d.h. $\psi'(A/\mathfrak{a}^m) \subset J$. Somit ist $\psi : A \rightarrow J$ eine Fortsetzung von $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$.

Sei nun X ein A -Modul, $X' \subset X$ ein Untermodul und $f : X' \rightarrow J$ ein Homomorphismus. Betrachte:

$$\Sigma = \{(Y, g) \mid Y \subset X \text{ Untermodul, } X' \subset Y, g : Y \rightarrow J, g|_{X'} = f\}$$

Dann ist $(X', f) \in \Sigma$ und Σ ist induktiv geordnet. Nach Zorn gibt es ein maximales Element $(Y, g) \in \Sigma$. Angenommen, $Y \neq X$. Dann gibt es ein $x \in X \setminus Y$. Betrachte das Ideal $\mathfrak{b} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in Y\} \subset A$ und den A -Modulhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J, \lambda \mapsto g(\lambda x)$. Diese können wir zu einem $\psi : A \rightarrow J$ fortsetzen. Definiere $g' : \langle Y, x \rangle \rightarrow J$ durch $g'|_Y = g$ und $g'(x) = \psi(1)$. Diese Abbildung ist ein wohldefinierter A -Modulhomomorphismus, da $g'(y + \lambda x) = g'(y) + \psi(\lambda)$ für $y \in Y, \lambda \in A$ und ist $\lambda x \in Y$, so folgt $\lambda \in \mathfrak{b}$, d.h. $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) = g(\lambda x) = g'(\lambda x)$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (Y, g) , daher folgt $Y = X$. \square

Satz 9.30. Sei A ein noetherscher Ring und I ein injektiver A -Modul. Dann ist die Garbe \tilde{I} welk über $\text{Spec}(A)$.

Lemma 9.31. Sei A ein noetherscher Ring und I ein injektiver A -Modul. Dann ist für jedes $f \in A$ die natürliche Abbildung $\theta : I \rightarrow I_f$ surjektiv.

Beweis. Betrachte die folgenden Ideale in A :

$$\mathfrak{b}_i = \text{ann}(f^i) = \{x \in A \mid f^i x = 0\}$$

Dann gilt $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1} = \dots$ für ein r . Sei $x \in I_f$. Dann gibt es ein $y \in I$ und ein $n \geq 0$ mit $x = \frac{\theta(y)}{f^n}$. Definiere den A -Modulhomomorphismus:

$$\varphi : (f^{n+r}) \rightarrow I, f^{n+r} \mapsto f^r y$$

Dieser ist wohldefiniert, da $\text{ann}(f^{n+r}) = \mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r = \text{ann}(f^r) \subset \text{ann}(f^r y)$. Da I injektiv ist, gibt es eine Fortsetzung $\psi : A \rightarrow I$ von φ . Sei $z = \psi(1)$. Dann gilt $f^{n+r} z = f^r y$, also $\theta(z) = \frac{\theta(y)}{f^n} = x$. \square

Beweis von 9.30. Sei $Y = \overline{\text{supp}(\tilde{I})}$. Besteht Y nur aus einem abgeschlossenen Punkt, so ist \tilde{I} eine Wolkenkratzergarbe und somit welk.

Sei nun Y größer und die Aussage für alle kleineren Y bewiesen. Es genügt zu zeigen, dass alle Restriktionsabbildungen der Form $\Gamma(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$ surjektiv sind. Sei $U \subset_o X$. Ist $Y \cap U = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei $Y \cap U \neq \emptyset$. Es existiert ein $f \in A$ mit $X_f = D(f) \subset U$ und $X_f \cap Y \neq \emptyset$. Setze $Z = X \setminus X_f$ und $\Gamma_Z(U, \tilde{I}) = \{s \in \Gamma(U, \tilde{I}) \mid \text{supp}(s) \subset Z\}$. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma(X_f, \tilde{I}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Gamma_Z(X, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma_Z(U, \tilde{I}) & & \end{array}$$

Sei $s \in \Gamma(U, \tilde{I})$ und betrachte die Restriktion $s' \in \Gamma(X_f, \tilde{I}) = I_f$. Nach Lemma 9.31 gibt es ein $t \in I = \Gamma(X, \tilde{I})$ mit $t|_{X_f} = s'$. Sein t' die Restriktion von t auf U . Dann ist $(s - t')|_{X_f} = 0$, also $\text{supp}(s - t') \subset Z$. Bleibt noch zu zeigen, dass $\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ surjektiv ist. Dann existiert nämlich ein Urbild $x \in \Gamma_Z(X, \tilde{I})$ von $s - t'$ und daher:

$$(x + t)|_U = s - t' + t' = s$$

Sei $J = \Gamma_Z(X, \tilde{I})$ und $\mathfrak{a} = (f) \subset A$. Dann ist $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Nach Lemma 9.29 ist J ein injektiver A -Modul mit $\text{supp}(\tilde{J}) \subset Y \cap Z \subsetneq Y$. Nach Induktionsannahme ist \tilde{J} welk, also ist die Restriktionsabbildung surjektiv:

$$\Gamma_Z(X, \tilde{I}) = \Gamma(X, \tilde{J}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{J}) = \Gamma_Z(U, \tilde{I}) \quad \square$$

Beweis von 9.28. Sei $\mathcal{F} = \tilde{M}$ eine quasikohärente Garbe über einem noetherschen Ring A . Sei $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung in $\mathbf{Mod}(A)$. Wir erhalten eine exakte Folge $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \tilde{I}^\bullet$. Nach Satz 9.30 sind alle \tilde{I}^i welk und somit azyklisch für $\Gamma(X, -)$. Daher kann diese Auflösung zur Kohomologieberechnung benutzt werden. Anwendung von $\Gamma(X, -)$ gibt gerade die exakte Sequenz $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$. Also ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$. \square

Korollar 9.32. Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$. Dann kann \mathcal{F} in eine welke quasikohärente Garbe eingebettet werden.

Beweis. Sei $X = \bigcup_i U_i$ eine endliche, offen affine Überdeckung mit $U_i = \text{Spec}(A_i)$ und $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$. Setze:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_i f_{i*} \tilde{I}_i$$

wobei $f_i : U_i \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion und $M_i \hookrightarrow I_i$ mit injektivem I_i . Es folgt $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i \hookrightarrow \tilde{I}_i$. Betrachte den kanonischen Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow f_{i*} f_i^* \mathcal{F} = f_{i*} \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow f_{i*} \tilde{I}_i$. Dieser induziert einen Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_{i*} \tilde{I}_i = \mathcal{G}$. Betrachtet man die Halme, so sieht man, dass dieser Morphismus injektiv ist.

Nach Satz 9.30 sind \tilde{I}_i alle welk, daher sind die $f_{i*} \tilde{I}_i$ welk und somit auch \mathcal{G} . Da alle \tilde{I}_i quasikohärent sind, sind auch alle $f_{i*} \tilde{I}_i$ quasikohärent nach Satz 5.3 (iv) und somit ist auch \mathcal{G} quasikohärent. \square

Theorem 9.33. (*Serre*) Sei X ein noethersches Schema. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) X ist affin.
- (ii) $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle quasikohärenten \mathcal{F} und $i > 0$.
- (iii) $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ für alle kohärenten Idealgarben \mathcal{J} .

Beweis. Siehe z.B. Hartshorne: Algebraic Geometry III 3.7. □

3.2 Der Čech-Komplex

Definition 10–ε.1. Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X , I eine total geordnete Indexmenge und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Wir definieren:

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}), \quad k \geq 0$$

mit Randoperatoren

$$d : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

wobei diese für $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_k})_{i_0 < \dots < i_k}$ durch

$$(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \cdot \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_{k+1}} \big|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}}$$

definiert sind. Die Folge $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ heißt *Čech-Komplex* von \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F} .

Satz 10–ε.2. Es gilt für $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

(i) $d \circ d = 0$

(ii) Für eine Prägarbe \mathcal{F} auf X und eine offene Überdeckung \mathcal{U} setzen wir:

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker(C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}{\operatorname{im}(C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}, \quad k \geq 0$$

Dann ist $\check{H}^k(\mathcal{U}, -)$ ein Funktor nach **Ab**.

(iii) Es gilt $\check{H}^0(\mathcal{U}, -) = \Gamma(X, -)$.

Definition 10–ε.3. $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ heißt k -te *Čech-Kohomologiegruppe* von \mathcal{U} mit Koeffizienten in \mathcal{F} .

Bemerkung 10–ε.4. Es lässt sich auch bilden:

$$\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Es gilt stets $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$. Im Allgemeinen gibt es keine Isomorphie für höhere Kohomologiegruppen.

3.3 Kohomologie des projektiven Raumes

Satz 10.1. Sei A ein noetherscher Ring, $S = A[X_0, \dots, X_r]$ für ein $r \geq 1$ und $X = \text{Proj}(S) = \mathbf{P}_A^r$. Dann gilt:

- (i) $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong S$ ist ein Isomorphismus von graduierten S -Moduln.
- (ii) $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ für $0 < i < r$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.
- (iii) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$
- (iv) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die natürliche Paarung

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$$

eine perfekte Paarung freier A -Moduln, d.h. sie induziert einen Isomorphismus:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n))' \cong H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$$

wobei $'$ den Dualraum bezeichnet. Diese Paarung stimmt mit dem Cup-Produkt überein.

Lemma 10.2. Sei X ein separiertes, noethersches Schema, \mathcal{U} eine offen affine Überdeckung und \mathcal{F} eine quasikohärente Garbe auf X . Dann gilt:

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^\bullet(X, \mathcal{F})$$

Beweis von 10.1. Setze $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$. Da die Kohomologie mit direkten Summen vertauscht, liefert $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ gerade alle nötigen Daten. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0, \dots, r}$ mit $U_i = D_+(X_i)$. Nach Lemma 10.2 gilt $H^\bullet(X, \mathcal{F}) = \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Nach Satz 5.21 gilt:

$$\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) = \mathcal{F}(D_+(X_{i_0} \cdots X_{i_k})) \cong S_{X_{i_0} \cdots X_{i_k}}$$

Somit ist:

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \left(\prod_{i_0 \in I} S_{X_{i_0}} \rightarrow \prod_{i_0 < i_1} S_{X_{i_0} X_{i_1}} \rightarrow \dots \rightarrow S_{X_0 \cdots X_r} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \right)$$

(i) folgt aus Satz 5.25.

(iii) Es gilt:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = \text{coker} \left(d : \prod_k S_{X_0 \cdots \widehat{X_k} \cdots X_r} \rightarrow S_{X_0 \cdots X_r} \right)$$

Wir betrachten $S_{X_0 \cdots X_r}$ als freien A -Modul mit Basis $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i \in \mathbb{Z}\}$. Damit ist das Bild von d der freie Untermodul, der von den Monomen $X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r}$ mit $e_i \geq 0$

erzeugt wird. Somit ist $H^r(X, \mathcal{F})$ der freie A -Modul mit Basis $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0\}$. Nun ist $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ gerade die Elemente vom Grad $-r-1$ in $H^r(X, \mathcal{F})$, d.h. gerade der Untermodul, der von den Monomen $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0, \sum e_i = -r-1\}$ erzeugt wird. Somit ist:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = \frac{1}{X_0 \cdots X_r} A \cong A$$

- (iv) Sei zunächst $n < 0$. Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ nach (i). Da $-n-r-1 > -r-1$, folgt nach der Rechnung in (iii) auch $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$ und die Dualität ist trivial.

Sei nun $n \geq 0$. Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ ein freier A -Modul mit Basis $\{X_0^{m_0} \cdots X_r^{m_r} \mid m_i \geq 0, \sum m_i = n\}$ und $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ ein freier A -Modul mit Basis $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0, \sum e_i = -n-r-1\}$. Auf Ebene der Čech-Kohomologie ist die Paarung gegeben durch:

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) &\rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)), \\ (X_0^{m_0} \cdots X_r^{m_r}, X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r}) &\mapsto X_0^{m_0+e_0} \cdots X_r^{m_r+e_r} \end{aligned}$$

In $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ gilt $X_0^{m_0+e_0} \cdots X_r^{m_r+e_r} \neq 0$ genau dann, wenn $m_i + e_i = -1$, d.h. $e_i = -m_i - 1$, für alle i gilt. Somit bilden die dualen Elemente von $X_0^{-m_0-1} \cdots X_r^{-m_r-1}$, $m_i \geq 0$, $\sum m_i = n$ eine Basis von $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))^*$. Die Paarung ist somit perfekt.

- (ii) Wir zeigen die Aussage per Induktion über r . Für $r = 1$ ist die Aussage trivial. Wir lokalisieren $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ homogen nach X_r und setze $\mathcal{U}_r = (U_i \cap U_r)_{i=0, \dots, r}$. Dann gilt:

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)} = C^\bullet(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r})$$

Insbesondere ist $U_r \in \mathcal{U}_r$, also folgt $\check{H}^k(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r}) = 0$ für $k > 0$. Ferner ist die homogene Lokalisierung ein exakter Funktor und vertauscht somit mit der Kohomologie. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \check{H}^k(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r}) = H^k(C^\bullet(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r})) \\ &= H^k(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)}) = \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)} = H^k(X, \mathcal{F})_{(X_r)} \end{aligned}$$

Also wird für alle $k > 0$ jedes $\alpha \in H^k(X, \mathcal{F})$ durch eine Potenz von X_r annulliert. Wir zeigen nun, dass die X_r -Multiplikation $H^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$ für $0 < k < r$ injektiv ist. Daraus folgt die Behauptung.

Betrachte die exakte Sequenz von graduierten S -Moduln:

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{\cdot X_r} S \longrightarrow S/(X_r) \longrightarrow 0$$

Sie wird zu einer exakten Sequenz von Garben:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

mit $H = V_+(X_r)$. Twiste diese Sequenz mit allen $\mathcal{O}_X(n)$ und bilde direkte Summe. Diese Operationen sind alle exakt, daher erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\cdot X_r} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n) \longrightarrow 0$$

Betrachte die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^k(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow \dots$$

Nach Induktionsannahme ist $H^k(H, \mathcal{F}_H) = 0$ für $0 < k < r - 1$, da $H \cong \mathbf{P}_A^{r-1}$. Nach Lemma 9.26 gilt $H^k(H, \mathcal{F}_H) = H^k(X, \mathcal{F}_H)$. Somit sind die X_r -Multiplikationen $H^k(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$ für $1 < k < r - 1$ Isomorphismen.

Für $k = 1$ betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow S(-1) \rightarrow S \rightarrow S/(X_r) \rightarrow 0$:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(-1)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow 0$$

Wir erhalten die exakte Folge:

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}_H) = 0 \longrightarrow \dots$$

Für $k = r - 1$ betrachte die exakte Folge:

$$0 = H^{r-2}(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow H^{r-1}(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^{r-1}(X, \mathcal{F}) \quad \square$$

Satz 10.3. (*Serre*) Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A , $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf X über $\text{Spec}(A)$ und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Dann gilt:

- (i) $H^i(X, \mathcal{F})$ ist endlich erzeugter A -Modul für alle $i \geq 0$.
- (ii) Es gibt ein n_0 , so dass $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ für alle $i > 0$ und $n \geq n_0$.

Bemerkung 10.4. Als Spezialfall von (i) gilt Satz 5.39: $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ist endlich erzeugter A -Modul für kohärente Garben \mathcal{F} .

Beweis. Da $\mathcal{O}_X(1)$ sehr ampel ist, gibt es eine Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$ für ein r mit $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}(1)$. Aus der Projektivität folgt nach Theorem 4.24 die Eigentlichkeit von $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$. Nun ist $\mathbf{P}_A^r \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ separiert, also folgt nach Korollar 4.22 (v) die Eigentlichkeit von $X \rightarrow \mathbf{P}_A^r$, insbesondere ist i abgeschlossen. Da \mathcal{F} kohärent ist, ist auch $i_*\mathcal{F}$ nach Lemma 5.36 (ii) kohärent auf \mathbf{P}_A^r und nach Lemma 9.26 gilt $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = H^i(\mathbf{P}_A^r, i_*\mathcal{F}(n))$. Wir können also o.B.d.A. $X = \mathbf{P}_A^r$ annehmen.

Die Aussagen (i) und (ii) gelten für Garben der Form $\mathcal{O}_X(q)$, $q \in \mathbb{Z}$ nach Satz 10.1, dem Verschwindungssatz und der Tatsache, dass für $-q - r - 1 < 0$, also $q > -r - 1$, gilt:

$$H^r(X, \mathcal{O}_X(q)) \cong \operatorname{Hom}(H^0(X, \mathcal{O}_X(-q - r - 1)), A) = 0$$

Es folgt (i) und (ii) für endliche direkte Summen von $\mathcal{O}_X(q)$, $q \in \mathbb{Z}$. Sei nun \mathcal{F} beliebig kohärent. Die allgemeine Aussage beweisen wir nun per absteigende Induktion über i . Für $i > r$ folgt alles aus dem Verschwindungssatz. Sei nun $i \leq r$ und die Aussage für höhere i bewiesen. Nach Korollar 5.38 gibt es eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X(q)^N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

\mathcal{R} ist kohärent nach Satz 5.12. Betrachte die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(q)^N) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \cdots$$

Die äußeren beiden Gruppen sind endlich erzeugt. Da A noethersch ist, folgt die endliche Erzeugbarkeit von $H^i(X, \mathcal{F})$. Twisten wir die Folge um n ergibt:

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(q+n)^N) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \longrightarrow \cdots$$

Die äußeren beiden Gruppen verschwinden für hinreichend große n , daher verschwindet auch $H^i(X, \mathcal{F}(n))$ für $n \geq n_0$. Da die Kohomologiegruppen für fast alle i komplett verschwinden, kann n_0 unabhängig von i gewählt werden. \square

Satz 10.5. Sei A ein noetherscher Ring und X eigentlich über $\operatorname{Spec}(A)$. Sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe. Dann sind äquivalent:

- (i) \mathcal{L} ist ampel.
- (ii) Für alle kohärenten Garben \mathcal{F} auf X gibt es ein n_0 , so dass $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ für alle $i > 0$ und $n \geq n_0$.

Beweis.

- Sei \mathcal{L} ampel auf X . Nach Satz 7.7 existiert ein $m > 0$, so dass $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel auf X bzgl. $\operatorname{Spec}(A)$ ist. Da X eigentlich über A ist, folgt nach Satz 5.32 die Projektivität von $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$. Wenden wir Satz 10.3 auf \mathcal{F} , $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}$, \dots , $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m-1)}$ an, so erhalten wir (ii).

- Sei nun (ii) erfüllt und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Wir zeigen, dass es ein n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Garbe $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

3.4 Ext-Gruppen

Sei \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul auf einem geringten Raum (X, \mathcal{O}_X) . Wir haben folgende linksexakte Funktoren:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$$

Definition 11.1. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(X)$. Für $i \geq 0$ definieren wir:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, -) = \mathrm{R}^i \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -), \quad \mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, -) = \mathrm{R}^i \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, -)$$

Bemerkung 11.2. Es gilt:

- (i) $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$, $\mathcal{E}\mathrm{xt}^0 = \mathcal{H}\mathrm{om}$
- (ii) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = 0$ und $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = 0$ für alle $i > 0$ und injektive \mathcal{J} .

Lemma 11.3. Sei $\mathcal{J} \in \mathbf{Mod}(X)$ injektiv und $U \subset_o X$. Dann ist $\mathcal{J}|_U \in \mathbf{Mod}(U)$ injektiv.

Beweis. Sei $j : U \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ in $\mathbf{Mod}(U)$ und $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}|_U$ gegeben. Es gilt $j_! \mathcal{F} \subset j_! \mathcal{G}$ und wir erhalten einen Morphismus $j_! \mathcal{F} \rightarrow j_! (\mathcal{J}|_U) \hookrightarrow \mathcal{J}$. Da \mathcal{J} injektiv ist, existiert eine Fortsetzung $j_! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{J}$. Somit ist $\mathcal{G} = (j_! \mathcal{G})|_U \rightarrow \mathcal{J}|_U$ eine Fortsetzung von $\mathcal{F} = (j_! \mathcal{F})|_U \rightarrow \mathcal{J}|_U$. \square

Satz 11.4. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und $U \subset_o X$. Dann gilt für $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$ und alle $i \geq 0$:

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

Beweis. Beide Seiten sind δ -Funktoren $\mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$ und gleich für $i = 0$. Sie verschwinden beide auf Injektiven, sind somit auslöschar, also universell. \square

Satz 11.5. Sei \mathcal{G} ein \mathcal{O}_X -Modul. Dann gilt:

- (i) $\mathcal{E}\mathrm{xt}^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$
- (ii) $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ für alle $i > 0$
- (iii) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathcal{G})$ für alle $i \geq 0$

Beweis. Es gilt $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, -) = \text{Id}$ und $\text{Hom}(\mathcal{O}_X, -) = \Gamma(X, -)$. \square

Satz 11.6. Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Folge in $\mathbf{Mod}(X)$ und $\mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$. Dann ist die folgende Folge exakt:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

Analog für $\mathcal{H}om$ und $\mathcal{E}xt$.

Beweis. Sei $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$ eine injektive Auflösung. Dann ist $\text{Hom}(-, \mathcal{J}^i)$ exakt. Es folgt daher die Exaktheit von:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow 0$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert die Aussage. Die Aussage für $\mathcal{E}xt$ folgt analog mithilfe von Lemma 11.3. \square

Satz 11.7. Sei $\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln, wobei alle \mathcal{L}_i lokal frei von endlichem Rang ist. Dann gilt für alle \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{G} :

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong H^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G}))$$

Beweis. Beide Seiten sind δ -Funktoren $\mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$ in \mathcal{G} , die gleich für $i = 0$ sind. Beide Seiten verschwinden für injektive \mathcal{G} , also sind beide δ -Funktoren universell. \square

Beispiel 11.8. Sei X ein quasiprojektives Schema über $\text{Spec}(A)$ mit A noethersch. Nach Korollar 5.38 ist jede kohärente Garbe von X ein Quotient von einer lokal freien Garbe von endlichem Rang. Somit besitzt jede kohärente Garbe eine lokal freie Auflösung $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ von endlichem Rang. Somit kann $\mathcal{E}xt^\bullet(\mathcal{F}, -)$ durch eine lokal freie Auflösung von endlichem Rang in der ersten Variable berechnet werden. $\mathbf{Mod}(X)$ besitzt aber nicht genügend viele Projektive.

Lemma 11.9. Sei $\mathcal{L} \in \mathbf{Mod}(X)$ lokal frei von endlichem Rang und $\mathcal{J} \in \mathbf{Mod}(X)$ injektiv. Dann ist $\mathcal{J} \otimes \mathcal{L}$ injektiv.

Beweis. Wir zeigen, dass $\text{Hom}(-, \mathcal{J} \otimes \mathcal{L})$ exakter Funktor ist. Nun gilt:

$$\text{Hom}(-, \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}) = \text{Hom}(- \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{J})$$

mit $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Da \mathcal{J} injektiv und $- \otimes \mathcal{L}^\vee$ exakt ist, folgt die Behauptung. \square

Satz 11.10. Sei \mathcal{L} eine lokal freie Garbe von endlichem Rang und $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ sein Dual. Dann gilt für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) &\cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}) \\ \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) &\cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G})\end{aligned}$$

Beweis. Für $i = 0$ sind die Aussagen klar. Es ist $-\otimes \mathcal{L}^\vee$ ein exakter Funktor. Somit sind beide Seiten δ -Funktoren in \mathcal{G} , die auf Injektive \mathcal{G} verschwinden und daher universell. \square

Satz 11.11. Sei X ein noethersches Schema, \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X , \mathcal{G} ein \mathcal{O}_X -Modul und $x \in X$. Dann gilt:

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^i(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) = R^i \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, -)(\mathcal{G}_x)$$

Beweis. Die Aussage ist lokal, sei also o.B.d.A. X affin. Dann besitzt \mathcal{F} eine lokal freie Auflösung von endlichem Rang $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ nach 11.8. Somit ist $\mathcal{L}_{\bullet,x} \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow 0$ eine freie Auflösung. Wir können diese Auflösung zur Berechnung der Kohomologie verwenden. Da $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{G}_x)$ für lokal freie Garben \mathcal{L} und Halmbildung exakt ist, folgt die Gleichheit der Ext-Gruppen. \square

Satz 11.12. Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A , $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf X und \mathcal{F}, \mathcal{G} kohärente Garben auf X . Dann existiert ein $n_0 = n_0(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $i \geq 0$ gilt:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)))$$

Lemma 11.13. Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A , $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf X und $\mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^r$ eine exakte Folge kohärenter Garben. Dann gibt es ein m_0 , so dass für alle $m \geq m_0$ die folgende Sequenz exakt ist:

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^1(m)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2(m)) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^r(m))$$

Beweis von 11.12. Für $i = 0$ ist die Aussage klar. Sei zunächst $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Dann folgt aus Satz 11.5 und Satz 10.3 für alle $i > 0$ und hinreichend großes n :

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}(n)) = H^i(X, \mathcal{G}(n)) = 0 = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}(n)))$$

Sei nun \mathcal{F} lokal frei von endlichem Rang. Nach Satz 11.10 gilt für hinreichend große n :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) &= \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}(n)) = 0 \\ &= \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}(n))) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)))\end{aligned}$$

Sei nun \mathcal{F} beliebig kohärent. Nach Korollar 5.38 gibt es eine kurze exakte Folge $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ mit einem lokal freien \mathcal{L} von endlichem Rang. Wir erhalten für hinreichend große n die folgende exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow 0$$

Analog für $\mathcal{H}\operatorname{om}$ und $\mathcal{E}\operatorname{xt}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}\operatorname{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{H}\operatorname{om}(\mathcal{L}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{H}\operatorname{om}(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{E}\operatorname{xt}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow 0$$

Beachte $\operatorname{Ext}^j(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \cong \operatorname{Ext}^{j+1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))$ und $\mathcal{E}\operatorname{xt}^j(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \cong \mathcal{E}\operatorname{xt}^{j+1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))$ für $j \geq 1$. Da \mathcal{R} kohärent ist, folgt die Aussage per Induktion über j . Für $j = 0$ twisten wir die obige Folge genug und wenden $\Gamma(X, -)$ an. Lemma 11.13 gibt uns ein m , so dass:

$$\Gamma(X, \mathcal{E}\operatorname{xt}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n+m))) = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n+m)) \quad \square$$

3.5 Die Serre-Dualität

Satz 12.1. (*Dualität für den projektiven Raum*) Sei $X = \mathbf{P}_k^n$ und $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$ die n -te äußere Potenz von $\Omega_{X/k}$, die sogenannte *kanonische Garbe* auf X . Dann ist ω_X eine invertierbare Garbe und es gilt:

- (i) $H^n(X, \omega_X) \cong k$
- (ii) Sei \mathcal{F} kohärent auf X . Dann ist

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega_X) \cong k$$

eine perfekte Paarung endlich-dimensionierter k -Vektorräume.

- (iii) Für alle $i \geq 0$ gibt es eine natürliche Isomorphie von kontravarianten Funktoren $\mathbf{Coh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$:

$$\operatorname{Ext}^i(-, \omega_X) \cong H^{n-i}(X, -)'$$

wobei $'$ den Dualraum bezeichnet. Für $i = 0$ ist diese gerade durch die Paarung von (ii) induziert.

Beweis. Da die Garbe der relativen Differentiale $\Omega_{X/k}$ lokal frei vom Rang n ist, ist ω_X vom Rang $\binom{n}{n} = 1$, also invertierbar.

- (i) Aus der exakten Sequenz in Satz 8.23

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/k} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

folgt $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k} \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$. Nach Satz 10.1 (iii) gilt $H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \cong k$.

(ii) Ein $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X)$ liefert $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega_X)$. Dies induziert eine Paarung:

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega_X), (f, a) \mapsto H^n(f)(a)$$

Ist $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X(q)$, so gilt $\text{Hom}(\mathcal{O}_X(q), \omega_X) = \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \omega_X(-q)) \cong H^0(X, \omega_X(-q))$ nach Satz 11.5 (iii). Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \omega_X(-q)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(q)) & \longrightarrow & H^n(X, \omega_X) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^0(X, \mathcal{O}_X(-n-q-1)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(q)) & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \end{array}$$

Daher ist die Paarung nach Satz 10.1 (iv) nicht ausgeartet. Die Aussage folgt daher auch für endliche direkte Summen von $\mathcal{O}_X(q)$.

Sei nun \mathcal{F} beliebig kohärent. Nach Korollar 5.38 erhalten wir eine exakte Sequenz $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$, wobei \mathcal{E}_i endliche direkte Summen von $\mathcal{O}_X(q)$ ist. Sei $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz kohärenter Garben. Nach dem Verschwindungssatz und unter Betrachtung der langen exakten Kohomologiefolge folgt die Exaktheit von:

$$H^n(X, \mathcal{G}') \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{G}'') \rightarrow 0$$

Nun sind $\text{Hom}(-, \omega_X)$ und $\text{Hom}(H^n(X, -), k)$ linksexakte kontravariante Funktoren. Also folgt die Behauptung aus dem Fünferlemma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{E}_2, \omega_X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{E}_1, \omega_X) \\ & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{F})' & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{E}_2)' & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{E}_1)' \end{array}$$

(iii) Beide Seiten sind kontravariante δ -Funktoren $\mathbf{Coh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$. Für $i = 0$ sind sie isomorph nach (ii). Also reicht es zu zeigen, dass beide δ -Funktoren auslöschar, also universell sind. Für $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$, existiert nach Korollar 5.38 für alle hinreichend große q eine Surjektion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_X(-q)$. Nach Satz 11.5 (iii) und Satz 10.3 gilt für $i > 0$ und hinreichend große q :

$$\text{Ext}^i(\mathcal{E}, \omega_X) = \bigoplus_{i=1}^N H^i(X, \omega_X(q)) = 0$$

Ferner gilt $H^{n-i}(X, \mathcal{E})' = \bigoplus_{i=1}^N H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(-q))' = 0$ für $n > i > 0$ nach Satz 10.1. Ist $i = n$, so gilt $H^0(X, \mathcal{O}_X(-q)) = 0$ für alle $q > 0$. \square

Definition 12.2. Sei X ein eigentliches Schema über einem Körper k der Dimension n . Eine *dualisierende Garbe* für X ist eine kohärente Garbe ω_X^0 auf X zusammen mit einer *Spurabbildung*

$$t : H^n(X, \omega_X^0) \rightarrow k$$

derart, dass für alle kohärenten Garben \mathcal{F} auf X die natürliche Paarung perfekt ist:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X^0) \times H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X^0) \xrightarrow{t} k$$

Satz 12.3. Sei X eigentlich über einem Körper k . Seien (ω_X^0, t) und (ω_X^1, t') dualisierende Garben für X . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\varphi : \omega_X^0 \rightarrow \omega_X^1$, der mit der Spurabbildung verträglich ist, d.h. $t' \circ H^n(\varphi) = t$.

Beweis. Da ω_X^1 dualisierend und ω_X^0 kohärent ist, folgt:

$$\mathrm{Hom}(H^n(X, \omega_X^0), k) \cong \mathrm{Hom}(\omega_X^0, \omega_X^1)$$

Sei φ das Bild von $t \in \mathrm{Hom}(H^n(X, \omega_X^0), k)$ in $\mathrm{Hom}(\omega_X^0, \omega_X^1)$. Dann gilt $t' \circ H^n(\varphi) = t$. Analog erhalten wir für ω_X^0 dualisierend und ω_X^1 kohärent einen Morphismus $\psi : \omega_X^1 \rightarrow \omega_X^0$ mit $t \circ H^n(\psi) = t'$. Es folgt $t \circ H^n(\psi \circ \varphi) = t$. Da ω_X^0 dualisierend ist, folgt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Analog ist $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. \square

Lemma 12.4. Sei X ein abgeschlossenes Unterschema von $P = \mathbf{P}_k^N$ der Kodimension r und $j : X \hookrightarrow P$ die kanonische Inklusion. Dann gilt für alle $i < r$:

$$\mathcal{E}xt_P^i(j_* \mathcal{O}_X, \omega_P) = 0$$

Lemma 12.5. Sei X noethersch und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Coh}(X)$. Dann ist die Garbe $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kohärent für alle $i \geq 0$.

Beweis von 12.4 Für alle i ist nach Lemma 12.5 $\mathcal{F}^i = \mathcal{E}xt_P^i(j_* \mathcal{O}_X, \omega_P)$ kohärent auf P , da $j_* \mathcal{O}_X$ kohärent nach Satz 5.13 (iii) ist. Nach Satz 5.37 wird $\mathcal{F}^i(q)$ von globalen Schnitten erzeugt für hinreichend große q . Somit reicht es zu zeigen, dass $\Gamma(P, \mathcal{F}^i(q)) = 0$ für hinreichend große q und alle $i < r$. Nun gilt mit Satz 11.12 und Satz 12.1 (iii) für hinreichend große q :

$$\begin{aligned} \Gamma(P, \mathcal{F}^i(q)) &\cong \mathrm{Ext}_P^i(j_* \mathcal{O}_X, \omega_P(q)) \\ &\cong H^{N-i}(P, j_* \mathcal{O}_X(-q))' = H^{N-i}(X, \mathcal{O}_X(-q))' \end{aligned}$$

Für $N - i > \dim(X)$ verschwinden diese nach dem Verschwindungssatz, d.h. $i < N - \dim(X) = r$. \square

Lemma 12.6. Sei X ein abgeschlossenes Unterschema von $P = \mathbf{P}_k^N$ der Kodimension r und $j : X \hookrightarrow P$ die kanonische Inklusion. Sei $\omega_X^0 = j^* \mathcal{E}xt_P^r(j_* \mathcal{O}_X, \omega_P)$. Dann gibt es einen Isomorphismus von Funktoren $\mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$:

$$\mathrm{Hom}(-, \omega_X^0) \cong \mathrm{Ext}_P^r(j_* -, \omega_P)$$

Satz 12.7. Sei X/k ein projektives Schema. Dann besitzt X eine dualisierende Garbe.

Definition. Sei (A, \mathfrak{m}) ein lokaler, noetherscher Ring und M ein A -Modul. $x_1, \dots, x_r \in A$ heißt *reguläre Sequenz*, wenn x_1 kein Nullteiler von M ist und für $i > 1$ das Element x_i kein Nullteiler von $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ ist. Die *Tiefe* von M ist definiert als:

$$\mathrm{depth}(M) = \sup\{r \mid \text{es existiert eine reguläre Sequenz } x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}\}$$

A heißt *Cohen-Macaulay*, falls seine Tiefe gerade $\dim(A)$ ist.

Satz 12.8. (*Dualitätssatz für projektive Schemata*) Sei X ein projektives Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Dimension n . Sei ω_X^0 die dualisierende Garbe auf X und $\mathcal{O}(1)$ eine sehr ample Garbe auf X . Dann gilt:

- (i) Für alle $i \geq 0$ und alle kohärenten Garben \mathcal{F} auf X gibt es natürliche, in \mathcal{F} funktorielle Abbildungen:

$$\theta^i : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X^0) \rightarrow \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathcal{F})'$$

wobei θ^0 durch die Definition der dualisierenden Garbe gegeben ist.

- (ii) Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- (a) X ist *Cohen-Macaulay*, d.h. alle lokalen Ringe sind Cohen-Macaulay, und *äquidimensional*, d.h. alle irreduziblen Komponenten haben dieselbe Dimension.
- (b) Für alle lokal freien Garben \mathcal{F} auf X gilt $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}(-q)) = 0$ für alle $i < n$ und hinreichend große q .
- (c) Alle θ^i , $i \geq 0$ aus (i) sind Isomorphismen für alle $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$.

Bemerkung 12.9. Ist X/k nicht-singulär, so ist X Cohen-Macaulay, da reguläre Ringe stets Cohen-Macaulay sind.

Korollar 12.10. Sei X/k ein projektives, äquidimensionales Cohen-Macaulay Schema der Dimension n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Sei \mathcal{F} eine lokal freie Garbe von endlichem Rang auf X . Dann gibt es für $i \geq 0$ natürliche Isomorphismen:

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^0)'$$

Beweis. Nach Satz 11.10 und Satz 11.5 (iii) gilt:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong \text{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \omega_X^0)' = \text{Ext}^{n-i}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^0)' = H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^0)' \quad \square$$

Korollar 12.11. Sei X eine nicht-singuläre projektive Varietät der Dimension n über einem abgeschlossenen Körper k . Dann ist die dualisierende Garbe ω_X^0 isomorph zur kanonischen Garbe $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$.

Definition. Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Die *projektive Dimension* von M ist definiert als:

$$\text{pd}_A(M) = \inf\{m \mid \text{es gibt eine projektive Auflösung } 0 \rightarrow P_m \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0\}$$

Satz 12.12. Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Dann gilt:

- (i) $\text{pd}_A(M) \leq m \iff \text{Ext}^i(M, N) = 0$ für $i > m$ und alle A -Moduln N .
- (ii) Ist A regulär und M endlich erzeugter A -Modul, so gilt:

$$\text{pd}_A(M) + \text{depth}(M) = \dim(A)$$

Es ist $\text{pd}_A(M) \leq m$ genau dann, wenn $\text{Ext}^i(M, A) = 0$ für alle $i > m$.

Beweis von 12.8.

- (i) Sei q hinreichend groß, so dass wir eine Surjektion $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(-q)^N \rightarrow \mathcal{F}$ erhalten. Nach Satz 11.5 (iii) und Satz 10.3 (ii) gilt für alle $i > 0$ und hinreichend große q :

$$\text{Ext}^i(\mathcal{E}, \omega_X^0) \cong \bigoplus_{i=1}^N H^i(X, \omega_X^0(q)) = 0$$

Somit ist $\text{Ext}^i(-, \omega_X^0)$ auslöschbar für $i > 0$ und somit ein universeller, kontravarianter δ -Funktorkomplex $\mathbf{Coh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$. Da $H^{n-i}(X, -)'$ auch kontravarianter δ -Funktorkomplex ist, gibt es nach der Universaleigenschaft einen eindeutigen Morphismus $(\theta^i)_{i \geq 0}$ von δ -Funktoren, wobei θ^0 der vorgegebene ist.

- (ii) Sei (a) erfüllt. Sei $i : X \hookrightarrow P = \mathbf{P}_k^N$ eine abgeschlossene Immersion. Für alle lokal freien Garben \mathcal{F} auf X und jedem abgeschlossenen Punkt $x \in X$ gilt wegen Cohen-Macaulay und Äquidimensionalität:

$$\text{depth}(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) = n$$

Sei $A = \mathcal{O}_{P,x}$. Dann ist A ein regulärer lokaler Ring mit $\dim(A) = N$, da P nicht-singulär ist. Nach Satz 12.12 (ii) gilt:

$$\text{pd}_A(i_*\mathcal{F}_x) = \dim(A) - \text{depth}(\mathcal{F}_x) = N - n$$

Aus Satz 11.11 und Satz 12.12 (ii) folgt für $i > N - n$:

$$\mathcal{E}xt_P^i(i_*\mathcal{F}, -)_x = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{P,x}}^i(i_*\mathcal{F}_x, -_x) = 0$$

Für $i < n$ gilt somit $\mathcal{E}xt_P^{N-i}(i_*\mathcal{F}, -) = 0$. Für hinreichend große q folgt nach Lemma 9.26, Satz 12.1 und Satz 11.12:

$$\begin{aligned} H^i(X, \mathcal{F}(-q))' &= H^i(P, i_*\mathcal{F}(-q))' \\ &= \text{Ext}_P^{N-i}(i_*\mathcal{F}, \omega_P(q)) = \Gamma(P, \mathcal{E}xt_P^{N-i}(i_*\mathcal{F}, \omega_P(q))) = 0 \end{aligned}$$

Sei nun (b) erfüllt. Wie oben mit $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ folgt $\mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P) = 0$ für $i > N - n$. Da $\omega_P = \mathcal{O}_P(-N - 1)$, gilt für $i > N - n$:

$$\mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \omega_P) = \mathcal{E}xt_P^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_P)(-N - 1) = 0$$

Durch Halmbildung folgt $\text{Ext}_A^i(\mathcal{O}_{X,x}, A) = 0$ für $A = \mathcal{O}_{P,x}$ und $i > N - n$. Somit gilt nach Satz 12.12 (ii) $\text{pd}_A(\mathcal{O}_{X,x}) \leq N - n$ und somit $\text{depth}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq n = \dim(X)$. Da die andere Ungleichung stets gilt, folgt $\text{depth}(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(X)$ für alle abgeschlossenen Punkte $x \in X$. Somit ist X Cohen-Macaulay, da Lokalisierungen von Cohen-Macaulay Ringe bzgl. Primideale wieder Cohen-Macaulay sind. Es folgt (a).

Sei (b) erfüllt. Da $\text{Ext}^i(-, \omega_X^0)$ universeller δ -Funktoren ist, reicht es für (c) zu zeigen, dass auch $H^{n-i}(X, -)'$ universeller δ -Funktoren ist. Wir zeigen die Auslöschbarkeit. Sei \mathcal{F} kohärent und $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(-q)^N \rightarrow \mathcal{F}$ für hinreichend große q eine Surjektion. Wegen (b) ist $H^{n-i}(X, \mathcal{E})' = 0$ für $i > 0$ und hinreichend große q .

Sei (c) erfüllt. Seien alle θ^i Isomorphismen und \mathcal{F} lokal frei. Dann gilt nach Satz 10.3 für $n - i > 0$ und hinreichend große q :

$$H^i(X, \mathcal{F}(-q)) \cong \text{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}(-q), \omega_X^0)' = H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^0(q))' = 0 \quad \square$$

3.6 Der Satz von Riemann-Roch für Kurven

Eine Kurve ist ein eigentliches, nicht-singuläres, integrales Schema X der Dimension 1 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Dann ist X notwendigerweise projektiv, siehe z.B. Hartshorne II Proposition 6.7.

Definition 13.1. Sei X eine Kurve. Dann heißt

$$g = g(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k H^0(X, \omega_X) < \infty$$

das *Geschlecht* von X , wobei die letzte Gleichung aus der Serre-Dualität folgt.

Index

- \mathcal{O}_X -Modul, 54
 - ampel, 81
 - frei, 54
 - lokal frei, 54
 - quasikohärent, 56
 - sehr ampel, 66
 - von globalen Schnitten erzeugt, 67
 - welk, 96
- Adjunktionsabbildung, 14
- affine Gerade, 20
- affiner Raum, 4, 20
- algebraische Menge
 - affin, 4
 - projektiv, 5
- assozierte Garbe
 - Modul, 55
 - Prägarbe, 11
 - zum Divisor, 78
- Aufblasung, 85
- Basiswechsel, 39
- Bewertung
 - diskret, 20
- Bewertungsring, 43
 - diskret, 20
- Bewertungstheoretisches Kriterium, 43, 49
- Bild, 10, 12
- Cech-Kohomologie, 104
- Cech-Komplex, 104
- Cohen-Macaulay, 115
- Derivation, 87
- Diagonalmorphismus, 40
- Differentialform
 - relativ, 87, 92
- Dimension, 33
- direkte Bildgarbe, 14
- direktes Bild, 54
- Divisor
 - Cartier, 77
 - effektiv, 70
 - prinzipal, 70, 77
 - Weil, 70
- Divisorenklassengruppe, 71
- dominant, 24
- dominiert, 45
- eigentlich, 48
- endlich, 31
- Exaktheit, 12, 54
- Ext-Gruppen, 109
- Faser, 41
- Faserprodukt, 34
- Fundamentale exakte Sequenz, 89, 90
- Funktionenkörper, 7, 70
- Garbe, 8
 - dualisierend, 114
 - Fortsetzung, 15
 - getwistet, 63
 - invertierbar, 54
 - kanonisch, 112
 - konstant, 9
 - Untergarbe, 11
- generische Faser, 42
- generischer Punkt, 20, 23
- geringster Raum, 18
 - lokal, 18

- Geschlecht, 117
- Grad, 75
- Graph, 40
- Halm, 9
- Hauptdivisor, 70, 77
- Hom-Garbe, 13, 54
- homogene Elemente, 5
- homogene Lokalisierung, 26
- homogenes Ideal, 5
- Idealgarbe, 54, 61
 - invers, 85
- Immersion, 37
 - abgeschlossen, 32
 - offen, 32
- Injektivität, 12
- irreduzibel, 4
- Keim, 7, 9
- Kern, 10, 11
- Kodimension, 33
- Kohomologiegruppe, 96
- kohärent, 56
- Kokern, 10, 12
- Koordinate, 4
 - homogen, 5
- Koordinatenring, 4
 - homogen, 6
- Kurve, 73
 - vollständig, 73
- Limes
 - direkt, 13
 - projektiv, 13
- linear äquivalent, 71, 77
- lokal faktoriell, 77
- lokaler Parameter, 75
- Modul
 - assoziiert, 64
 - getwistet, 62
 - graduirt, 62
- Morphismus
 - S -Schemata, 27
 - \mathcal{O}_X -Moduln, 54
 - Garben, 9
 - geringte Räume, 18
 - lokal geringte Räume, 18
 - Prägarben, 9
 - Schemata, 19
 - Varietäten, 6
- nicht-singulär, 73, 94
- noethersch, 29, 30
 - lokal, 30
- Nullstelle, 70
- Nullstellenmenge, 4
- Picard-Gruppe, 78
- Pol, 70
- Primdivisor, 70
- projektive Dimension, 116
- projektiver Raum, 5, 27, 52
- Prägarbe, 8
- Punkt, 4, 5
 - K -wertig, 23
- quasikompakt, 29, 44
- quasiprojektiv, 52
- Quotientengarbe, 12
- Radikal, 5
- Radikalideal, 5
- Rang, 54
- rationale Funktion, 7
- regulär, 69
- reguläre Funktion, 6
- reguläre Sequenz, 115
- Restklassenkörper, 20
- Restriktionsabbildung, 8
- Ring
 - normal, 69

- Satz von Krull, 101
- Schema, 19
 - affin, 19
 - integer, 28
 - irreduzibel, 28
 - normal, 69
 - reduziert, 25, 28
 - Unterschema, 37
 - abgeschlossen, 32
 - offen, 21, 32
 - zusammenhängend, 28
 - über S , 27
- Schnitt, 8
- separabel erzeugt, 90
- separiert, 42
- Serre-Dualität, 112, 115
- Spektrum, 16
- Spezialisierung, 44
- Spurabbildung, 114
- strikte Transformation, 87
- Strukturgarbe, 16, 19
- Strukturmorphismus, 27
- Summe, 13
- Support, 13
- Surjektivität, 12
- symmetrisches Produkt, 83

- Tensor-Algebra, 83
 - symmetrisch, 83
- Tensorprodukt, 54
- Tiefe, 115
- totaler Quotientenring, 77

- universell abgeschlossen, 48
- Urbild, 54
- Urbildgarbe, 14

- Varietät
 - abstrakt, 53
 - affin, 4
 - eigentlich, 53
 - projektiv, 6
 - quasi-affin, 4
 - quasi-projektiv, 6
- Vektorbündel
 - projektiv, 84
- Verklebung
 - Garbe, 33
 - Morphismus, 34
 - Schema, 21
- Verschwindungssatz, 99
- volltreuer Funktor, 27
- von endlichem Typ, 31
 - lokal, 31

- Wolkenkratzergarbe, 15

- Zariski-Topologie, 4, 5, 15

- äquidimensional, 115