

# Algebraische Geometrie

Vorlesung von PROF. DR. KAY WINGBERG



gesetzt von  
YICHUAN SHEN

2014/2015  
14. Juni 2015

**Lizenz & Quellcode.** Dieses Dokument steht unter einer Creative Commons Attribution Lizenz. Weitere Informationen findet man auf <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/>. Der Quellcode ist auf <http://github.com/yishn/Uni> zu finden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>3</b>
<b>1 Varietäten</b>	<b>4</b>
1.1 Affine Varietäten . . . . .	4
1.2 Projektive Varietäten . . . . .	5
1.3 Morphismen . . . . .	6
<b>2 Schemata</b>	<b>8</b>
2.1 Garben . . . . .	8
2.2 Schemata . . . . .	15
2.3 Erste Eigenschaften von Schemata . . . . .	28
2.4 Separierte & eigentliche Morphismen . . . . .	42
2.5 Modulgarben . . . . .	53
2.6 Divisoren . . . . .	69
2.7 Projektive Morphismen . . . . .	80
2.8 Differentiale . . . . .	87
<b>3 Kohomologie</b>	<b>95</b>
3.1 Kohomologie von Garben . . . . .	95
3.2 Der Čech-Komplex . . . . .	104
3.3 Kohomologie des projektiven Raumes . . . . .	105
3.4 Ext-Gruppen . . . . .	109
<b>Index</b>	<b>113</b>

# 1 Varietäten

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

## 1.1 Affine Varietäten

**Definition.**

- (i) Die Menge aller  $n$ -Tupeln über  $k$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}_k^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k\}$$

heißt *affiner  $n$ -dimensionaler Raum* über  $k$ . Ein Element  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$  heißt *Punkt* und die  $a_i$  heißen *Koordinaten* von  $P$ .

- (ii) Der Polynomring über  $k$  in  $n$  Variablen bezeichnen wir mit  $A = k[X_1, \dots, X_n]$ . Für  $T \subset A$  definieren wir die *Nullstellenmenge* von  $T$  wie folgt:

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{A}^n \mid \forall f \in T: f(P) = 0\}$$

Es gilt  $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$ , wobei  $\mathfrak{a}$  das von  $T$  erzeugte Ideal in  $A$  ist.

- (iii) Eine Teilmenge  $Y \subset \mathbf{A}^n$  der Form  $Y = Z(T)$  für ein  $T \subset A$  heißt *affine algebraische Menge*. Für algebraische Mengen  $Y_i = Z(\mathfrak{a}_i)$  mit Ideale  $\mathfrak{a}_i \subset A$ ,  $i \in I$  gilt:

$$Y_1 \cup Y_2 = Z(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2), \quad \bigcap_{i \in I} Y_i = Z\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Ferner gilt  $\mathbf{A}^n = Z(0)$  und  $\emptyset = Z(1)$ . Wir statten  $\mathbf{A}^n$  mit der sogenannten *Zariski-Topologie* aus, in dem wir eine Menge  $U \subset \mathbf{A}^n$  genau dann offen nennen, wenn  $\mathbf{A}^n \setminus U$  eine algebraische Menge ist.

- (iv) Eine *affine Varietät*  $V$  ist eine *irreduzible* abgeschlossene Menge in  $\mathbf{A}^n$ , d.h. aus  $V = V_1 \cup V_2$  mit abgeschlossenen Mengen  $V_1, V_2 \subset \mathbf{A}^n$  folgt  $V_1 = \emptyset$  oder  $V_2 = \emptyset$ .

Eine offene Teilmenge einer affinen Varietät bzgl. der induzierten Topologie nennt man *quasi-affine Varietät*.

- (v) Sei  $Y \subset \mathbf{A}^n$  eine algebraische Menge. Dann definieren wir das Ideal:

$$I(Y) = \{f \in A \mid \forall P \in Y: f(P) = 0\}$$

Der *Koordinatenring* von  $Y$  ist definiert als  $A(Y) = A/I(Y)$ .

**Definition.** Sei  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal. Das *Radikal* von  $\mathfrak{a}$  ist definiert als:

$$\text{Rad}(\mathfrak{a}) = \{f \in A \mid \exists r > 0: f^r \in \mathfrak{a}\}$$

Ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$  heißt *Radikalideal*, wenn  $\mathfrak{a} = \text{Rad}(\mathfrak{a})$  gilt.

**Satz.** Es gibt eine inklusionsumkehrende Bijektion:

$$\{\text{Algebraische Mengen in } \mathbf{A}^n\} \rightarrow \{\text{Radikalideale in } k[X_1, \dots, X_n]\}, \quad Y \mapsto I(Y)$$

mit der Umkehrabbildung  $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ . Eine algebraische Menge  $Y$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(Y) \subset A$  ein Primideal ist.

## 1.2 Projektive Varietäten

**Definition.**

- (i) Zwei Punkte  $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$  heißen äquivalent, wenn ein  $\lambda \in k^\times$  existiert, so dass  $a_i = \lambda b_i$  für alle  $i$  gilt. Die Äquivalenzklasse von  $(a_0, \dots, a_n)$  wird mit  $(a_0 : \dots : a_n)$  bezeichnet. Der *projektiver  $n$ -dimensionaler Raum* über  $k$  wird definiert als:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}_k^n = \{(a_0 : \dots : a_n) \mid a_i \in k \text{ nicht alle } 0\}$$

Ein Element  $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{P}^n$  heißt *Punkt* und die  $a_i$  heißen *homogene Koordinaten* von  $P$ .

- (ii) Der Polynomring über  $k$  in  $n+1$  Variablen  $S = k[X_0, \dots, X_n]$  wird mit der folgenden Zerlegung zu einem graduierten Ring:

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d, \quad S_d = \left\{ \sum a_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} \mid a_{i_0, \dots, i_n} \in k, \sum_{j=0}^n i_j = d \right\}$$

Die Elemente in  $S_d$  heißen *homogene Elemente vom Grad  $d$* . Ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset S$  heißt *homogenes Ideal*, wenn  $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (S_d \cap \mathfrak{a})$  gilt.

- (iii) Sei  $\mathfrak{a} \subset S$  ein homogenes Ideal. Dann setzen wir:

$$Z(\mathfrak{a}) = \{P \in \mathbf{P}^n \mid \forall f \in \mathfrak{a} \text{ homogen: } f(P) = 0\}$$

Diese ist wohldefiniert, da  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$  für  $f \in S_d$ . Eine Menge  $Y \subset \mathbf{P}^n$  heißt *projektive algebraische Menge*, wenn  $Y = Z(\mathfrak{a})$  für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subset S$  gilt.

Analog wie im affinen Fall, können wir auch  $\mathbf{P}^n$  mit der *Zariski-Topologie* ausstatten, d.h. eine Menge  $U \subset \mathbf{P}^n$  ist genau dann offen, wenn  $\mathbf{P}^n \setminus U$  eine projektive algebraische Menge ist.

- (iv) Eine *projektive Varietät*  $V$  ist eine irreduzible abgeschlossene Menge in  $\mathbf{P}^n$ . Eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät bzgl. der induzierten Topologie nennt man *quasi-projektive Varietät*.
- (v) Sei  $Y \subset \mathbf{P}^n$  eine algebraische Menge. Dann setzen wir  $I(Y)$  als das Ideal in  $S$ , das von der folgenden Menge erzeugt wird:

$$\{f \in S \text{ homogen} \mid \forall P \in Y: f(P) = 0\}$$

$I(Y)$  ist ein homogenes Ideal in  $S$ . Der *homogene Koordinatenring* von  $Y$  ist definiert als  $S(Y) = S/I(Y)$ .

**Satz.** Wir haben eine inklusionsumkehrende Bijektion:

$$\{\text{Algebraische Mengen in } \mathbf{P}^n\} \rightarrow \{\text{Radikalideale in } k[X_0, \dots, X_n]\}, \quad Y \mapsto I(Y)$$

mit der Umkehrabbildung  $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ .

**Satz.** Sei  $Y$  eine (quasi-)projektive Varietät. Dann wird  $Y$  von offenen Mengen der Form  $Y \cap U_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  überdeckt mit:

$$U_i = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{P}^n \mid a_i \neq 0\}$$

Die Abbildungen  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbf{A}^n$ ,  $(a_0 : \dots : a_n) \mapsto (\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\widehat{a_i}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$  sind wohldefiniert und Homöomorphismen, d.h. die  $Y \cap U_i$  sind (quasi-)affine Varietäten.

## 1.3 Morphismen

**Definition.**

- (i) Sei  $Y \subset \mathbf{A}^n$  eine quasi-affine Varietät. Eine Abbildung  $f : Y \rightarrow k$  heißt *reguläre Funktion* in  $P \in Y$ , wenn eine offene Umgebung  $U \subset Y$  mit  $P \in U$  existiert, so dass  $f = \frac{g}{h}$  auf  $U$  für gewisse  $g, h \in A$  gilt.

Sei  $Y \subset \mathbf{P}^n$  eine quasi-projektive Varietät. Eine Abbildung  $f : Y \rightarrow k$  heißt *reguläre Funktion* in  $P \in Y$ , wenn eine offene Umgebung  $U \subset Y$  mit  $P \in U$  existiert, so dass  $f = \frac{g}{h}$  auf  $U$  für gewisse homogene Polynome  $g, h \in S$  vom gleichen Grad.

Identifizieren wir  $k \cong \mathbf{A}^1$  so ist eine reguläre Funktion notwendigerweise stetig.

- (ii) Eine stetige Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  zwischen zwei (quasi-)projektiven Varietäten heißt *Morphismus*, wenn für jede offene Menge  $V \subset Y$  und reguläre Funktion  $f : V \rightarrow k$  auch  $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow k$  regulär ist.

Damit erhält man die Kategorie  $\mathbf{Var}(k)$  aller Varietäten auf  $k$ .

**Definition.** Sei  $Y$  eine Varietät und  $P \in Y$  ein Punkt.

- (i) Wir bezeichnen den Ring aller regulären Funktionen auf  $Y$  mit  $\mathcal{O}(Y)$ .
- (ii)  $\mathcal{O}_{P,Y} = \{\langle U, f \rangle \mid P \in U \subset_o Y, f \text{ ist auf } U \text{ regulär}\}$  heißt der Ring der *Keime* regulärer Funktionen auf  $Y$  in  $P$ . Wir identifizieren zwei Keime  $\langle U, f \rangle = \langle V, g \rangle$ , wenn  $f = g$  auf  $U \cap V$  gilt.  
 $\mathcal{O}_{P,Y}$  ist ein lokaler Ring, dessen Maximalideal wir mit  $\mathfrak{m}_P$  bezeichnen.
- (iii)  $K(Y) = \{\langle U, f \rangle \mid \emptyset \neq U \subset_o Y, f \text{ ist auf } U \text{ regulär}\}$  heißt der *Funktionenkörper* von  $Y$ . Die Elemente von  $K(Y)$  heißen *rationale Funktionen* auf  $Y$ .

Es gilt  $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}_{P,Y} \subset K(Y)$ .

**Theorem.** Sei  $Y \subset \mathbf{A}^n$  eine affine Varietät. Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$
- (ii) Die Abbildung  $Y \rightarrow \{\text{Maximale Ideale in } A(Y)\}, P \mapsto \mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{P,Y}$  ist eine Bijektion.
- (iii)  $\mathcal{O}_{P,Y} \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$  und  $\dim \mathcal{O}_{P,Y} = \dim Y$ .
- (iv)  $K(Y) \cong \text{Quot}(A(Y))$

**Theorem.** Sei  $Y \subset \mathbf{P}^n$  eine projektive Varietät. Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{O}(Y) = k$
- (ii)  $\mathcal{O}_{P,Y} \cong S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$
- (iii)  $K(Y) \cong S(Y)_{((0))}$

**Theorem.** Sei  $X$  eine beliebige Varietät und  $Y$  eine affine Varietät. Dann haben wir eine Bijektion:

$$\text{Mor}_{\mathbf{Var}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A(Y), \mathcal{O}(X)), f \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \circ f)$$

Ist  $X$  ebenfalls affin, so gilt  $X \cong Y$ , genau dann wenn  $A(X) \cong A(Y)$ . Der Funktor **affine Var** $(k) \rightarrow \mathbf{nullteilerfreie } k\text{-Alg}$ ,  $X \mapsto A(X)$  ist eine pfeilumkehrende Äquivalenz von Kategorien.

## 2 Schemata

### 2.1 Garben

**Definition 1.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Die Menge aller offenen Teilmengen in  $X$  bilden zusammen mit den natürlichen Inklusionen eine Kategorie  $\mathbf{Top}(X)$ .
- (ii) Eine *Prägarbe*  $F$  abelscher Gruppen ist nichts anderes als ein kontravarianter Funktor  $F : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$  mit  $F(\emptyset) = 0$ .

**Bemerkung.**

- 1. Eine Prägarbe besteht also aus abelschen Gruppen  $F(U)$ ,  $U \subset_o X$  und Homomorphismen abelscher Gruppen  $\text{res}_V^U : F(U) \rightarrow F(V)$  für alle offenen  $V \subset U$ , so dass  $\text{res}_U^U = \text{id}_{F(U)}$ . Für offene Mengen  $W \subset V \subset U$  gelte ferner  $\text{res}_W^U = \text{res}_W^V \circ \text{res}_V^U$ .
- 2. Ebenso können Prägarben in eine beliebige Kategorie gebildet werden, z.B. **Ringe** und **Mengen**.
- 3. Die Elemente von  $F(U)$  heißen *Schnitte* von  $F$  über  $U$ . Manchmal schreiben wir auch  $\Gamma(U, F) = F(U)$ . Die  $\text{res}_V^U$  heißen *Restriktionsabbildungen*. Wir schreiben auch  $\text{res}_V^U(s) = s|_V$ .

**Definition 1.2.** Eine Prägarbe  $F$  auf einem topologischen Raum  $X$  heißt *Garbe*, falls die folgenden Diagramme exakt sind:

$$0 \longrightarrow F(U) \xrightarrow{\text{res}} \prod_i F(U_i) \xrightarrow{\text{res}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

für alle  $U \subset_o X$  und jede offene Überdeckung  $U = \bigcup_i U_i$ , d.h:

- (i)  $s \mapsto (\text{res}_{U_i}^U(s))_i$  ist injektiv, d.h. aus  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i$  folgt  $s = 0$ .
- (ii) Sei  $s_i \in F(U_i)$  für alle  $i$  gegeben, so dass  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$ . Dann gibt es ein  $s \in F(U)$  mit  $s|_{U_i} = s_i$  für alle  $i$ .



**Definition 1.3.**

- (i) Ein *Morphismus*  $\varphi : F \rightarrow G$  von Prägarben auf  $X$  ist ein Morphismus kontravarianter Funktoren, d.h. eine Kollektion von Morphismen  $(\varphi(U))_{U \subset_o X}$ , so dass für alle offenen Mengen  $V \subset U$  folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & G(U) \\ \text{res}_V^U \downarrow & & \downarrow \text{res}_V^U \\ F(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & G(V) \end{array}$$

- (ii) Ein *Morphismus* von Garben ist ein Morphismus von Prägarben. Die (Prä-)Garben bilden eine Kategorie.

**Beispiel 1.4.**

1. Sei  $X$  eine Varietät über  $k$ . Betrachte den Funktor  $\mathcal{O} : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathbf{komm Ringe}$  mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen  $\text{res}_V^U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$  ist offensichtlich eine Prägarbe von Ringen. Da ferner reguläre Funktionen 0 ist, wenn sie lokal 0 ist, und eine lokal reguläre Funktion auch global regulär ist, ist  $\mathcal{O}$  auch eine Garbe.
2. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  eine abelsche Gruppe. Die *konstante Garbe*  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist folgendermaßen definiert: Wir statten  $A$  mit der diskreten Topologie aus. Für jedes  $U \subset_o X$  setze:

$$\mathcal{A}(U) = \{f : U \rightarrow A \mid f \text{ stetig}\}$$

Ist  $U$  zusammenhängend, so gilt  $\mathcal{A}(U) \xrightarrow{\sim} A$ ,  $f \mapsto f(x)$ , wobei  $x \in U$  beliebig.

**Definition 1.5.** Sei  $F$  eine Prägarbe auf  $X$  und  $P \in X$ . Der *Halm*  $F_P$  von  $F$  in  $P$  ist definiert als:

$$F_P = \varinjlim_{\substack{U \subset_o X \\ P \in U}} F(U) = \coprod_{\substack{U \subset_o X \\ P \in U}} F(U) / \sim$$

wobei zwei Elemente  $s \in F(U)$ ,  $t \in F(V)$  genau dann äquivalent  $s \sim t$  sind, wenn es ein  $\emptyset \neq W \subset_o X$  mit  $W \subset U \cap V$  existiert, so dass  $s|_W = t|_W$  gilt. Die Elemente eines Halms heißen *Keime* der Schnitte von  $F$  in  $P$ .

**Beispiel.** Sei  $X$  eine Varietät,  $P \in X$  ein Punkt und  $\mathcal{O}$  die Garbe der regulären Funktionen. Dann ist der Halm in  $P$  gerade der lokale Ring  $\mathcal{O}_{P,X}$ .

**Bemerkung.** Ein Morphismus  $\phi : F \rightarrow G$  von Prägarben induziert für alle  $P \in X$  ein Gruppenhomomorphismus  $\phi_P : F_P \rightarrow G_P$ .

**Satz 1.6.** Sei  $\phi : F \rightarrow G$  ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum  $X$ . Dann gilt:

$$\phi : F \rightarrow G \text{ ist Isomorphismus} \iff \phi_P : F_P \rightarrow G_P \text{ ist Isomorphismus für alle } P \in X$$

Für Prägarben gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht.

**Beweis.** Ist  $\phi$  ein Isomorphismus, so auch alle  $\phi_P$ ,  $P \in X$ . Sei umgekehrt  $\phi_P$  Isomorphismen für alle  $P \in X$ . Es genügt zu zeigen, dass  $\phi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$  für alle  $U \subset_o X$  ein Isomorphismus ist. Sei  $U \subset_o X$  und setze  $\varphi = \phi(U)$ .

- *Injektivität von  $\varphi$ :* Sei  $s \in F(U)$  mit  $0 = \varphi(s) \in G(U)$ . Dann gilt für das Bild  $\varphi(s)_P$  von  $\varphi(s)$  im Halm  $0 = \varphi(s)_P \in F_P$ . Wegen  $\varphi(s)_P = \phi_P(s_P)$  für das Bild  $s_P \in F_P$  von  $s$ , folgt wegen der Injektivität von  $\phi_P$  nun  $s_P = 0$  für alle  $P \in U$ .

Per Definition gibt es für jedes  $P \in U$  eine offene Umgebung  $W_P \subset_o X$  von  $P$  mit  $W_P \subset U$ , so dass  $s|_{W_P} = 0$  gilt. Dann bilden die  $W_P$  eine offene Überdeckung von  $U = \bigcup_{P \in U} W_P$ . Da  $F$  eine Garbe ist, folgt  $s = 0$ .

Wir haben gezeigt, dass  $\phi(U)$  für alle  $U \subset_o X$  injektiv ist, genau dann wenn  $\phi_P$  für alle  $P \in X$  injektiv ist.

- *Surjektivität von  $\varphi$ :* Sei  $t \in G(U)$  ein Schnitt und  $t_P \in G_P$  sein Keim in  $P$ . Da  $\phi_P$  surjektiv ist, existiert ein  $s_P \in F_P$  mit  $\phi_P(s_P) = t_P$ . Sei  $s_P$  durch den Schnitt  $s(P) \in F(V_P)$  mit  $V_P \subset_o U$ ,  $P \in V_P$  repräsentiert. Dann sind  $\phi(V_P)(s(P))$  und  $t|_{V_P}$  zwei Elemente aus  $G(V_P)$  mit demselben Keim. Durch das Verkleinern von  $V_P$  folgt  $\phi(V_P)(s(P)) = t|_{V_P}$  in  $G(V_P)$ .

Dann bilden die  $V_P$  eine offene Überdeckung von  $U = \bigcup_{P \in U} V_P$ . Es gilt außerdem  $s(P)|_{V_P \cap V_Q} = s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$  für alle  $P, Q \in U$ , denn beide Elemente sind Schnitte aus  $F(V_P \cap V_Q)$ , die durch  $\phi(V_P \cap V_Q)$  auf  $t|_{V_P \cap V_Q}$  abgebildet werden, und  $\phi(V_P \cap V_Q)$  aus dem ersten Teil injektiv ist.

Da  $F$  eine Garbe ist, existiert ein  $s \in F(U)$  mit  $s|_{V_P} = s(P)$  für alle  $P \in U$ . Schließlich gilt  $\varphi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$  für alle  $P \in U$ , d.h.  $(\varphi(s) - t)|_{V_P} = 0$ . Da  $G$  eine Garbe ist, folgt  $\varphi(s) = t$ .  $\square$

**Definition 1.7.** Sei  $\varphi : F \rightarrow G$  ein Morphismus von Prägarben. Die Prägarben

$$U \mapsto \ker \varphi(U), \quad U \mapsto \operatorname{coker} \varphi(U), \quad U \mapsto \operatorname{im} \varphi(U)$$

heißen *Prägarbenkern*, *-kokern* und *-bild* von  $\varphi$ . Sind  $F$  und  $G$  Garben, so sind Kokern und Bild nicht notwendig Garben.

**Satz & Definition 1.8.** Sei  $F$  eine Prägarbe. Dann existiert eine Garbe  $F^+$  und ein Morphismus von Prägarben  $\theta : F \rightarrow F^+$  mit folgender Universaleigenschaft:

Sei  $G$  eine Garbe und  $\phi : F \rightarrow G$  ein Morphismus von Prägarben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $\psi : F^+ \rightarrow G$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & F^+ \\ \phi \downarrow & \swarrow \psi & \\ G & & \end{array}$$

$F^+$  ist somit eindeutig bestimmt und heißt die zu  $F$  assoziierte Garbe.

**Beweis.** Für jede offene Menge  $U \subset X$  setze  $F^+(U)$  als die Menge aller Abbildungen  $s : U \rightarrow \coprod_{P \in U} F_P$ , so dass:

- (i) Für alle  $P \in U$  gilt  $s(P) \in F_P$ .
- (ii) Für alle  $P \in U$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $P$  mit  $V \subset U$  und ein Element  $t \in F(V)$ , so dass für alle  $Q \in V$  der Keim  $t_Q$  von  $t$  in  $Q$  gleich  $s(Q)$  ist.

Somit wird  $F^+$  zu einer Garbe bzgl. der natürlichen Restriktionsabbildungen und besitzt die verlangte Universaleigenschaft. Für jeden Punkt  $P \in X$  gilt  $F_P^+ = F_P$ . Ist  $F$  eine Garbe, so ist  $F^+ \cong F$  via  $\theta$ .  $\square$

### Definition 1.9.

- (i) Eine *Untergarbe* von  $F$  ist eine Garbe  $F'$  derart, dass:
  - (a)  $F'(U) \subset F(U)$  ist eine Untergruppe für alle  $U \subset X$ .
  - (b) Für offene Mengen  $V \subset U$  gilt  $\text{res}'_V^U = \text{res}_V^U|_{F'(U)}$ .

Insbesondere ist  $F'_P \subset F_P$  eine Untergruppe.

- (ii) Der *Kern* von  $\varphi$  ist die Prägarbe  $\ker(\varphi)$ , die bereits eine Garbe ist. *Grund:*

Sei  $U \subset X$  und  $U = \bigcup U_i$  eine offene Überdeckung. Sei  $s \in \ker \varphi(U)$  mit  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i$ . Da  $F$  eine Garbe ist und  $s \in F(U)$ , folgt  $s = 0$ . Sei nun  $s_i \in \ker \varphi(U_i)$  für alle  $i$  gegeben mit  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$ . Da  $F$  eine Garbe ist, existiert ein  $s \in F(U)$  mit  $s|_{U_i} = s_i$  für alle  $i$ . Zu zeigen ist noch  $s \in \ker \varphi(U)$ . Es gilt für alle  $i$ :

$$0 = \varphi(U_i)(s_i) = \varphi(U_i)(s|_{U_i}) = \varphi(U)(s)|_{U_i} \in G(U_i)$$

Da nun auch  $G$  eine Garbe ist, folgt  $\varphi(U)(s) = 0$ .

(iii)  $\varphi$  heißt *injektiv*, falls  $\ker(\varphi) = 0$ .

Mit anderen Worten:  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn  $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$  für alle  $U \subset_o X$  injektiv ist.

(iv) Das *Bild*  $\text{im}(\varphi)$  von  $\varphi$  ist die assoziierte Garbe des Prägarbenbilds von  $\varphi$ .

Nach der Universaleigenschaft gibt es einen natürlichen Morphismus  $\psi : \text{im}(\varphi) \rightarrow G$ . Dieser ist injektiv, da  $(\text{im}(\varphi))_P : \text{im}(\varphi_P) \rightarrow G_P$  für alle  $P \in X$  injektiv ist.

(v)  $\varphi$  heißt *surjektiv*, wenn  $\text{im}(\varphi) = G$ .

(vi) Eine Garbensequenz

$$\cdots \longrightarrow F^i \xrightarrow{\varphi^i} F^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} F^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, falls  $\ker(\varphi^{i+1}) = \text{im}(\varphi^i)$  für alle  $i$  gilt.

(vii) Sei  $F'$  eine Untergarbe von  $F$ . Die *Quotientengarbe*  $F/F'$  ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe  $U \mapsto F(U)/F'(U)$ . Offensichtlich gilt  $(F/F')_P = F_P/F'_P$  für alle  $P \in X$ .

(viii) Der *Kokern* von  $\varphi$  ist die assoziierte Garbe zum Prägarbenkokern von  $\varphi$ .

**Regeln 1.10.** Seien  $F, G$  Garben auf  $X$  und  $\varphi : F \rightarrow G$  ein Morphismus von Garben.

(i)  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn  $0 \rightarrow F \rightarrow G$  exakt ist und genau dann surjektiv, wenn  $F \rightarrow G \rightarrow 0$  exakt ist.

(ii) Eine Garbensequenz  $\cdots \rightarrow F^i \rightarrow F^{i+1} \rightarrow F^{i+2} \rightarrow \cdots$  ist genau dann exakt, wenn ihre entsprechenden Halmsequenzen in allen Punkten  $P \in X$  exakt ist. *Grund:*

$$(\text{im } \varphi^i)_P = \text{im}(\varphi_P^i), \quad (\ker \varphi^{i+1})_P = \ker(\varphi_P^{i+1})$$

Insbesondere ist ein Garbenmorphismus genau dann injektiv bzw. surjektiv falls alle Halmabbildungen injektiv bzw. surjektiv sind.

(iii)  $\varphi$  ist genau dann surjektiv, wenn für alle  $U \subset_o X$  und  $s \in G(U)$  eine Überdeckung  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit Schnitten  $t_i \in F(U_i)$ ,  $i \in I$  existieren, so dass  $\varphi(t_i) = s|_{U_i}$ .

Ist  $\varphi$  surjektiv, so muss im Allgemeinen  $\varphi(U) : F(U) \rightarrow G(U)$  nicht surjektiv sein.

(iv) Sei  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$  eine exakte Garbensequenz und  $U \subset_o X$ . Dann ist auch die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(U, F') \rightarrow \Gamma(U, F) \rightarrow \Gamma(U, F'')$$

Der Funktor  $\Gamma(U, -)$  ist linksexakt, aber nicht exakt.

(v) Sei  $\varphi : F \rightarrow G$  ein injektiver Morphismus von Prägarben. Dann ist der induzierte Morphismus  $\varphi^+ : F^+ \rightarrow G^+$  der assoziierten Garben auch injektiv. Der Funktor  $-^+$  ist sogar exakt.

**Regeln 1.11.**

- (i) Sei  $F'$  eine Untergarbe von  $F$ . Dann ist die Sequenz  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F/F' \rightarrow 0$  exakt, da sie halmweise exakt ist.
- (ii) Sei  $\varphi : F \rightarrow G$  ein Garbenmorphismus. Dann gilt:

$$\operatorname{im}(\varphi) \cong F / \ker(\varphi), \quad \operatorname{coker}(\varphi) \cong G / \operatorname{im}(\varphi)$$

d.h. die Folgen  $0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow F \rightarrow \operatorname{im}(\varphi) \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow \operatorname{im}(\varphi) \rightarrow G \rightarrow \operatorname{coker}(\varphi) \rightarrow 0$  sind exakt.

**Definition 1.12.**

- (i) Seien  $F$  und  $G$  Garben auf  $X$ . Die *Summe*  $F \oplus G$  von  $F$  und  $G$  ist die Garbe  $U \mapsto F(U) \oplus G(U)$ .
- (ii) Sei  $(F_i, \varphi_{i,j})$  ein direktes System von Garben auf  $X$ . Der *direkte Limes*  $(\varinjlim F_i, \varphi_i)$  ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe  $U \mapsto \varinjlim F_i(U)$ .

Der direkte Limes besitzt die übliche Universaleigenschaft: Sei  $G$  eine Garbe und  $\psi_i : F_i \rightarrow G$  Morphismen mit  $\varphi_k \varphi_{ik} = \psi_i$  für alle  $i \leq k$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $\psi : \varinjlim F_i \rightarrow G$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varinjlim F_i \\ \psi_i \downarrow & \swarrow \psi & \\ G & & \end{array}$$

- (iii) Ebenso wird der *projektive Limes* definiert, wobei alle Pfeile umgedreht werden. Es ist außerdem  $U \mapsto \varprojlim F_i(U)$  bereits eine Garbe.
- (iv) Sei  $F$  eine Garbe auf  $X$  und  $s \in F(U)$  ein Schnitt über  $U \subset_o X$ . Dann heißt

$$\operatorname{supp}(s) = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$$

wobei  $s_P \in F_P$  der Keim von  $s$  in  $P$  bezeichnet, der *Support* von  $s$ .  $\operatorname{supp}(s)$  ist abgeschlossen in  $U$ .

$$\operatorname{supp}(F) = \{P \in X \mid F_P \neq 0\}$$

heißt *Support* von  $F$ . Dieser ist nicht notwendigerweise abgeschlossen.

- (v) Seien  $F, G$  Garben abelscher Gruppen auf  $X$ . Für ein  $U \subset_o X$  sei  $F|_U$  die Einschränkung von  $F$  auf  $U$ , d.h.  $F|_U(V) = F(V)$  für alle  $V \subset_o U$ . Dann ist die Menge  $\operatorname{Hom}(F|_U, G|_U)$  der Morphismen von  $F|_U$  nach  $G|_U$  eine abelsche Gruppe.

$$U \mapsto \operatorname{Hom}(F|_U, G|_U)$$

definiert eine Garbe und wird die *Hom-Garbe* genannt. Sie wird mit  $\mathcal{H}\operatorname{om}(F, G)$  bezeichnet.

**Definition 1.13.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung topologischer Räume,  $F$  eine Garbe auf  $X$  und  $G$  eine Garbe auf  $Y$ .

- (i) Die *direkte Bildgarbe*  $f_*F$  von  $F$  auf  $Y$  ist die Garbe

$$V \mapsto (f_*F)(V) = F(f^{-1}(V))$$

- (ii) Die *Urbildgarbe*  $f^{-1}G$  von  $G$  auf  $X$  ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto (f^{-1}G)(U) = \varinjlim_{\substack{V \subset_o Y \\ f(U) \subset V}} G(V)$$

**Regeln 1.14.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.

- (i) Sei  $Z \subset X$  ein Teilraum mit der Inklusionsabbildung  $i : Z \hookrightarrow X$  und  $F$  eine Garbe auf  $X$ . Dann gilt:

$$i^{-1}F = F|_Z$$

Offensichtlich gilt  $(F|_Z)_P = F_P$  für  $P \in Z$ .

- (ii) Seien  $\mathbf{Ab}(X)$  und  $\mathbf{Ab}(Y)$  die Kategorien der Garben auf  $X$  bzw.  $Y$ . Dann sind  $f_* : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}(Y)$  und  $f^{-1} : \mathbf{Ab}(Y) \rightarrow \mathbf{Ab}(X)$  Funktoren.

- (iii) Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann sind die *Adjunktionsabbildungen*

$$\mathrm{ad} : f^{-1}f_*F \rightarrow F, \quad \mathrm{ad} : G \rightarrow f_*f^{-1}G$$

für Garben  $F$  auf  $X$  bzw.  $G$  auf  $Y$  Garbenmorphismen und wie folgt definiert:

- Sei  $U \subset_o X$  und  $s \in (f^{-1}f_*F)(U)$  ein Schnitt, das durch  $s' \in (f_*F)(V)$  mit  $f(U) \subset V \subset_o Y$  repräsentiert wird, d.h.  $s' \in F(f^{-1}(V))$  mit  $U \subset f^{-1}(V)$ . Dann setzen wir:

$$(f^{-1}f_*F)(U) \rightarrow F(U), \quad s \mapsto \mathrm{res}_U^{f^{-1}(V)} s' \in F(U)$$

- Sei  $V \subset_o Y$ . Es besteht  $(f_*f^{-1}G)(V) = (f^{-1}G)(f^{-1}(V))$  aus Abbildungen der Form  $f^{-1}(V) \rightarrow \coprod_{P \in f^{-1}(V)} (f^{-1}G)_P$ . Setze nun:

$$G(V) \rightarrow (f_*f^{-1}G)(V), \quad s \mapsto (s \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \coprod f^{-1}(G)_P, \quad P \mapsto s_{f(P)})$$

Es existiert eine natürliche Bijektion:

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}G, F) \cong \mathrm{Hom}_Y(G, f_*F)$$

in dem wir ein  $\varphi : f^{-1}(G) \rightarrow F$  auf  $\psi : G \xrightarrow{\mathrm{ad}} f_*f^{-1}G \xrightarrow{f_*(\varphi)} f_*F$  schicken und ein  $\psi : G \rightarrow f_*F$  auf  $\varphi : f^{-1}G \xrightarrow{f^{-1}(\psi)} f^{-1}f_*F \xrightarrow{\mathrm{ad}} F$  schicken. Somit ist  $f^{-1}$  linksadjungiert zu  $f_*$ .

**Definition 1.15.** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit  $P \in X$  und  $A$  eine abelsche Gruppe. Sei  $\mathcal{A}$  die konstante Garbe auf  $\overline{\{P\}}$  und  $i : \overline{\{P\}} \hookrightarrow X$  die natürliche Inklusion. Dann heißt die Garbe  $i_*\mathcal{A}$  *Wolkenkratzergarbe*. Es gilt:

$$(i_*\mathcal{A})(U) = \begin{cases} A, & \text{wenn } P \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (i_*\mathcal{A})_Q = \begin{cases} A, & \text{wenn } Q \in \overline{\{P\}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

**Definition 1.16.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Z \subset X$  abgeschlossen und  $U = X \setminus Z$ . Seien  $j : U \hookrightarrow X$ ,  $i : Z \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildungen. Ist  $F$  eine Garbe auf  $Z$ , so gilt:

$$(i_*F)_P = \begin{cases} F_P, & \text{wenn } P \in Z \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei  $F$  eine Garbe auf  $U$  und  $j_!(F)$  die Garbe auf  $X$ , die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} F(V), & \text{wenn } V \subset U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziiert ist. Sie heißt die *außerhalb  $U$  durch Null fortgesetzte Garbe* von  $F$ . Es gilt:

$$(j_!F)_P = \begin{cases} F_P, & \text{wenn } P \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei  $F$  eine Garbe auf  $X$ . Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow j_!(F|_U) \longrightarrow F \longrightarrow i_*(F|_Z) \longrightarrow 0$$

## 2.2 Schemata

Sei  $A$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $\text{Spec}(A)$  die Menge aller Primideale von  $A$ . Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$ , setzen wir:

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

**Lemma 2.1.**

- (i) Sind  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  zwei Ideale von  $A$ , so gilt  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ .
- (ii) Sind  $\mathfrak{a}_i \subset A$ ,  $i \in I$  Ideale, so gilt  $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$ .
- (iii) Sind  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  Ideale, gilt:  $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}) \iff \text{Rad}(\mathfrak{a}) \supset \text{Rad}(\mathfrak{b})$

Wegen  $V(A) = \emptyset$  und  $V(0) = \text{Spec}(A)$  sehen wir, dass wir Teilmengen der Form  $V(\mathfrak{a})$  zu abgeschlossene Mengen in  $\text{Spec}(A)$  erklären können. Somit erhalten wir die *Zariski-Topologie* auf  $\text{Spec}(A)$ .

Setzen wir  $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$  für  $f \in A$ , so bilden diese offene Mengen eine Basis der Topologie auf  $\text{Spec}$ .

**Definition 2.2.** Wir definieren eine Ringgarbe  $\mathcal{O}$  auf  $\text{Spec}(A)$  wie folgt: Sei  $U \subset_o \text{Spec}(A)$ . Setze  $\mathcal{O}(U)$  als die Menge aller Abbildungen  $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ , so dass:

- (i) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gilt  $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ .
- (ii) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathfrak{p}$  mit  $V \subset U$  und Elemente  $a, f \in A$ , so dass für alle  $\mathfrak{q} \in V$  stets  $f \notin \mathfrak{q}$  und  $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$  in  $A_{\mathfrak{q}}$  gilt.

Offensichtlich ist mit  $s, t \in \mathcal{O}(U)$  auch  $s + t, st \in \mathcal{O}(U)$ . Ferner ist für  $V \subset U$  offen  $\text{res}_V^U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$  ein Ringhomomorphismus.  $\mathcal{O}$  heißt *Strukturgarbe*. Das *Spektrum* von  $A$  ist das Paar  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ .

**Satz 2.3.** Sei  $A$  ein Ring und  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  sein Spektrum. Dann gilt:

- (i) Der Halm  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  ist isomorph zu  $A_{\mathfrak{p}}$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ .
- (ii)  $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$  für alle  $f \in A$
- (iii)  $\Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) = A$

**Beweis.** (iii) folgt aus (ii) mit  $f = 1$ .

(i) Die Abbildungen  $\mathcal{O}(U) \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ ,  $s \mapsto s(\mathfrak{p})$  mit  $\mathfrak{p} \in U \subset_o \text{Spec}(A)$  sind kompatibel und induzieren einen Homomorphismus  $\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ .

- *Surjektivität:* Sei  $\frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$  mit  $a, f \in A$ ,  $f \notin \mathfrak{p}$ . Dann ist  $D(f)$  eine offene Umgebung von  $\mathfrak{p}$  und es gibt ein  $s \in \mathcal{O}(D(f))$  mit  $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}$ .
- *Injektivität:* Sei  $U$  eine Umgebung von  $\mathfrak{p}$  und  $s, t \in \mathcal{O}(U)$  mit  $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ . Verkleinern wir  $U$  wenn nötig, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass:

$$s = \frac{a}{f}, \quad t = \frac{b}{g} \quad \text{für gewisse } a, b, g, f \in A, \quad g, f \notin \mathfrak{p}$$

Wegen  $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ , gibt es ein  $h \notin \mathfrak{p}$ , so dass  $h(ga - bf) = 0$  in  $A$ . Insbesondere ist  $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$  in  $A_{\mathfrak{q}}$  für alle  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  mit  $g, f, h \notin \mathfrak{q}$ . Somit ist  $s = t$  auf der offenen Umgebung  $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$  von  $\mathfrak{p}$  und haben daher denselben Keim.

(ii) Sei  $f \in A$  und  $\mathfrak{p} \in D(f)$ , d.h.  $(f) \subset A \setminus \mathfrak{p}$ . Betrachte die kanonische Abbildung  $\lambda_{\mathfrak{p}} : A_f \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ . Setze:

$$\psi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D(f)), \quad \frac{a}{f^n} \mapsto \left( \mathfrak{p} \mapsto \lambda_{\mathfrak{p}} \left( \frac{a}{f^n} \right) \right)$$



- *Injektivität:* Sei  $\psi(\frac{a}{f^n}) = \psi(\frac{b}{f^m})$  und  $\mathfrak{p} \in D(f)$ . Dann ist  $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$  in  $A_{\mathfrak{p}}$ , d.h. es gibt ein  $h \notin \mathfrak{p}$  mit  $h(f^m a - f^n b) = 0$ . Setze  $\mathfrak{a} = \text{Ann}(f^m a - f^n b)$ . Dann ist  $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ , da  $h \in \mathfrak{a}$ , also folgt  $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ . Wir haben also  $V(\mathfrak{a}) \subset V(f)$  gezeigt. Nach Lemma 2.1 (iii) folgt  $f \in \text{Rad}(\mathfrak{a})$ , d.h.  $f^e \in \mathfrak{a}$  für ein  $e > 0$ . Per Definition gilt  $f^e(f^n a - f^m b) = 0$ , also  $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$  in  $A_f$ .
- *Surjektivität:* Sei  $s \in \mathcal{O}(D(f))$ . Nach Definition von  $\mathcal{O}$  ist  $D(f) = \bigcup V_i$  mit  $s = \frac{a_i}{g_i}$  auf  $V_i$  für gewisse  $a_i, g_i \in A$ ,  $g_i \notin \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in V_i$ . Insbesondere gilt  $V_i \subset D(g_i)$ . Da die  $D(h)$  eine Basis der Topologie bilden, können wir o.B.d.A.  $V_i = D(h_i)$  annehmen, also  $D(h_i) \subset D(g_i)$ . Es folgt  $V(h_i) \supset V(g_i)$  und nach Lemma 2.1 (iii) auch  $\text{Rad}(h_i) \subset \text{Rad}(g_i)$ . Wähle ein  $n$ , so dass  $h_i^n \in (g_i)$  für alle  $i$ , d.h.  $h_i^n = c_i g_i$  für ein  $c_i \in A$ . Es folgt:

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{c_i a_i}{h_i^n}$$

Ersetzt man  $a_i$  durch  $c_i a_i$  und  $h_i$  durch  $h_i^n$ , so können wir o.B.d.A.  $D(f) \subset \bigcup D(h_i)$  und  $s = \frac{a_i}{h_i}$  auf  $D(h_i)$  annehmen.

Wir zeigen nun, dass  $D(f)$  durch endlich viele  $D(h_i)$  überdeckt werden kann. Wir haben mit Lemma 2.1 Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} D(f) \subset \bigcup_i D(h_i) &\iff V(f) \supset \bigcap_i V(h_i) = V\left(\sum_i (h_i)\right) \\ &\iff f \in \text{Rad}\left(\sum_i (h_i)\right) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in \sum_i (h_i) \end{aligned}$$

Daher ist  $f^n$  eine endliche Summe der Form  $f^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i$  für gewisse  $b_i \in A$ , d.h.  $D(f) \subset D(h_1) \cup \dots \cup D(h_r)$ .

Nun gilt:

$$D(h_i) \cap D(h_j) = \text{Spec}(A) \setminus (V(h_i) \cup V(h_j)) = \text{Spec}(A) \setminus V(h_i h_j) = D(h_i h_j)$$

Auf  $D(h_i h_j)$  wird  $s$  repräsentiert durch  $\frac{a_i}{h_i}$  und  $\frac{a_j}{h_j}$  in  $A_{h_i h_j}$ . Wenden wir die Injektivität von  $\psi$  auf  $D(h_i h_j)$  an, so erhalten wir  $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$  in  $A_{h_i h_j}$ . Es folgt  $(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0$  für ein  $m$ . Sei  $m$  so groß, dass dies für alle endlich vielen  $i, j$  gilt, also gilt für alle  $i, j$ :

$$h_j^{m+1} (h_i^m a_i) - h_i^{m+1} (h_j^m a_j) = 0$$

Ersetzen wir nun  $h_i$  durch  $h_i^{m+1}$  und  $a_i$  durch  $a_i h_i^m$ , so wird  $s$  auf  $D(h_i)$  immer noch durch  $\frac{a_i}{h_i}$  repräsentiert und es gilt  $h_j a_i = h_i a_j$  für alle  $i, j$ .

Schreibe nun  $f^n = \sum b_i h_i$  für ein  $n$  und setze  $a = \sum b_i a_i$ . Es folgt für alle  $j$ :

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = f^n a_j$$

Also gilt  $\frac{a}{f^n} = \frac{a_j}{h_j}$  auf  $D(h_j)$  für alle  $j$ , d.h.  $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = s$ . □

#### Definition 2.4.

- (i) Ein *geringter Raum*  $(X, \mathcal{O}_X)$  besteht aus einem topologischen Raum  $X$  und einer Ringgarbe  $\mathcal{O}_X$  auf  $X$ . Ein *Morphismus von geringten Räumen* ist ein Paar

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

wobei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  ein Morphismus von Ringgarben auf  $Y$  ist.

- (ii) Ein geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *lokal*, falls für alle  $P \in X$  der Halm  $\mathcal{O}_{X,P}$  ein lokaler Ring ist. Ein *Morphismus von lokal geringten Räumen* ist ein Morphismus  $(f, f^\#)$  von geringten Räumen derart, dass für alle  $P \in X$  die induzierte Abbildung  $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$  lokale Homomorphismen sind.

#### Bemerkung 2.5.

- Die (lokal) geringte Räume bilden eine Kategorie.
- Ein Morphismus  $(f, f^\#)$  von (lokal) geringten Räumen ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f$  ein Homöomorphismus ist und  $f^\#$  ein Garbenisomorphismus ist.

**Satz 2.6.** Seien  $A, B$  Ringe.

- (i)  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  ist ein lokal geringter Raum.
- (ii) Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Dann induziert  $\varphi$  einen natürlichen Morphismus von lokal geringten Räumen:

$$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A), \quad f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

- (iii) Jeder Morphismus  $(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A)$  von lokal geringten Räumen ist induziert von einem Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$ .

**Beweis.**

- (i) folgt aus Satz 2.3 (i).
- (ii) Definiere  $f$  durch  $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$ . Sei  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal. Dann ist  $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$ . Daher ist  $f$  stetig. Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$ . Dann liefert  $\varphi$  einen lokalen Homomorphismus  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ . Das liefert für  $V \subset_{\circ} \text{Spec}(A)$  einen Ringhomomorphismus:

$$f^{\sharp}(V) : \mathcal{O}_A(V) \rightarrow \mathcal{O}_B(f^{-1}(V))$$

indem man eine Abbildung  $s : V \rightarrow \coprod_{\mathfrak{q} \in V} A_{\mathfrak{q}}$  auf die folgende Abbildung  $f^{\sharp}(s) : f^{-1}(V) \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)} B_{\mathfrak{p}}$  schickt:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{s} & A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) & \longmapsto & s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) & \longmapsto & \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))) \end{array}$$

Die  $f^{\sharp}(V)$  gibt uns einen Garbenmorphismus  $f^{\sharp} : \mathcal{O}_A \rightarrow f_*\mathcal{O}_B$ . Die durch  $f^{\sharp}$  induzierte Abbildungen auf den Halmen sind gerade die  $\varphi_{\mathfrak{p}}$ . Somit ist  $(f, f^{\sharp})$  ein Morphismus lokal geringten Räumen.

- (iii) Sei  $(f, f^{\sharp}) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_A)$  ein Morphismus von lokal geringten Räumen.  $f^{\sharp}$  induziert einen Ringhomomorphismus:

$$\varphi : A = \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_A) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } B, \mathcal{O}_B) = B$$

Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$ . Dann haben wir induzierte lokale Homomorphismen mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A_{f(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{A, f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}} & \mathcal{O}_{B, \mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Da die  $f_{\mathfrak{p}}^{\sharp}$  lokale Homomorphismen sind, folgt  $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Somit ist  $f^{\sharp}$  von dem Ringhomomorphismus  $\varphi$  induziert.  $\square$

**Definition 2.7.**

- (i) Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der als lokal geringter Raum isomorph zum Spektrum eines Rings ist.
- (ii) Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  derart, dass jeder Punkt  $P \in X$  eine offene Umgebung  $U \subset X$  besitzt, so dass  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  ein affines Schema ist.

$\mathcal{O}_X$  heißt *Strukturgarbe*. Ein *Morphismus* von Schemata ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

**Beispiel 2.8.**

1. Sei  $k$  ein Körper.  $\text{Spec}(k)$  ist ein affines Schema, dessen topologischer Raum aus einem Punkt besteht.

**Definition 2.9.** Sei  $K$  ein Körper. Eine *diskrete Bewertung* von  $K$  ist eine Abbildung  $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , so dass für alle  $x, y \in K$  gilt:

- (i)  $v(xy) = v(x) + v(y)$
- (ii)  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$
- (iii)  $v(x) = \infty \iff x = 0$

$R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$  definiert einen Teilring von  $K$  und heißt *diskreter Bewertungsring* von  $v$ .  $R$  ist ein lokaler Hauptidealring mit Maximalideal  $\mathfrak{m} = \{x \in R \mid v(x) > 0\}$ .  $R/\mathfrak{m}$  heißt *Restklassenkörper* von  $v$ . Ein *diskreter Bewertungsring*  $A$  ist ein nullteilerfreier Ring, der diskreter Bewertungsring für eine Bewertung seines Quotientenkörpers ist.

**Beispiel 2.8**

2. Sei  $R$  ein diskreter Bewertungsring. Es ist  $T = \text{Spec}(R)$  ein affines Schema, bestehend aus zwei Punkten:
  - Der Punkt  $t_0 = \mathfrak{m} \in \text{Spec}(R)$  ist abgeschlossen, da  $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$  und besitzt  $R = R_{t_0}$  als lokalen Ring.
  - Der Punkt  $t_1 = (0) \in \text{Spec}(R)$  ist offen und dicht in  $\text{Spec}(R)$ , da  $V(0) = \text{Spec}(R)$ .  $t_1$  besitzt  $K = \text{Quot}(R) = R_{t_1}$  als lokalen Ring.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & \text{Spec}(R) & \longleftarrow & \text{Spec}(R/\mathfrak{m}) \\ (0) & \longmapsto & t_1 & & t_0 \longleftarrow (0) \end{array}$$

3. Sei  $k$  ein Körper. Die *affine Gerade*  $\mathbf{A}_k^1$  über  $k$  ist  $\text{Spec } k[X]$ . Sei  $\xi$  das Nullideal in  $\text{Spec } k[X]$ . Dann ist  $\overline{\{\xi\}} = \mathbf{A}_k^1$ . Ein solcher Punkt heißt *generischer Punkt*. Alle anderen Punkte sind abgeschlossen, da diese den maximalen Idealen in  $k[X]$  entsprechen. Es besteht eine Bijektion zwischen den irreduziblen, nicht-konstanten, normierten Polynomen aus  $k[X]$  und den abgeschlossenen Punkten von  $\mathbf{A}_k^1$ .

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so besteht eine Bijektion zwischen den Elementen aus  $k$  und den abgeschlossenen Punkten von  $\mathbf{A}_k^1$ .

4. Allgemeiner definieren wir den *affinen  $n$ -dimensionalen Raum* über  $k$  als:

$$\mathbf{A}_k^n = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$$

5. Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Dann entsprechen die abgeschlossenen Punkte von  $\mathbf{A}_k^n$  nach dem hilbertschen Nullstellensatz bijektiv den  $n$ -Tupeln von Elementen aus  $k$ . Ferner gibt es einen generischen Punkt  $\xi$ , der dem Nullideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  entspricht, d.h.  $\overline{\{\xi\}} = \mathbf{A}_k^n$ .

**Definition 2.10.** (*Offene Unterschemata*) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema und  $U \subset X$  offen. Dann ist  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  ein Schema. Diese Aussage ist nichttrivial und wir werden sie später zeigen. Die offene Menge  $U$  besitzt die *induzierte Unterschemastruktur*.

**Definition 2.11.** (*Verkleben von Schemata*) Sei  $\{X_i\}$  eine Familie von Schemata und  $U_{ij} \subset X_i$ ,  $i \neq j$  offene Teilmengen mit induzierter Struktur. Ferner haben wir für  $i \neq j$  Isomorphismen von Schemata:

$$\varphi_{ij} : (U_{ij}, \mathcal{O}_{X_i}|_{U_{ij}}) \xrightarrow{\sim} (U_{ji}, \mathcal{O}_{X_j}|_{U_{ji}})$$

mit  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$  und  $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$  und  $\varphi_{jk} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{ij}$  auf  $U_{ij} \cap U_{ik}$  für alle paarweise verschiedene  $i, j, k$ . Wir erhalten ein Schema  $X$  durch *Verkleben* der  $X_i$  längst  $U_{ij}$  bzgl.  $\varphi_{ij}$ :

$$X = \bigcup_i X_i / \sim, \quad x_i \sim \varphi_{ij}(x_i) \text{ für alle } x_i \in U_{ij}, i \neq j$$

$X$  besitze die Quotiententopologie. Es existiert für jedes  $j$  ein Morphismus  $\psi_j : X_j \rightarrow X$  von Schemata, das ein Isomorphismus auf einem offenen Unterschema in  $X$  induziert mit  $X = \bigcup \psi_j(X_j)$  und  $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$  und  $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$  auf  $U_{ij}$  für alle  $i \neq j$ . Die Strukturgarbe auf  $X$  ist folgendermaßen gegeben: Sei  $V \subset_o X$ . Setze:

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ (s_i) \in \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V)) \mid \varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V) \cap U_{ij}}) = s_j|_{\psi_j^{-1}(V) \cap U_{ji}} \right\}$$

Somit ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum. Da alle  $X_i$  Schemata sind, besitzt jeder Punkt von  $X$  eine affine Umgebung. Also ist  $X$  ein Schema.

**Beispiel 2.12.** Sei  $k$  ein Körper,  $X_1 = X_2 = \mathbf{A}_k^1$  und  $U_1 = U_2 = \mathbf{A}_k^1 \setminus \{P\}$  mit einem abgeschlossenen Punkt  $P$ . Ist  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  die Identität, so ist die Verklebung  $X$  von  $X_1$  und  $X_2$  längst  $\varphi$  die affine Gerade, wobei der Punkt  $P$  verdoppelt wurde.  $X$  ist selbst nicht mehr affin.

**Satz 2.13.** Sei  $A$  ein Ring und  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Dann ist die Abbildung bijektiv:

$$\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \text{Spec } A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ringe}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

wobei wir  $(f : X \rightarrow \text{Spec } A, f^\# : \mathcal{O}_A \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$  durch das Nehmen der globalen Schnitte auf den Ringhomomorphismus  $A = \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_A) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  schicken.

**Beweis.** Sei  $X = \bigcup_\nu X_\nu$  eine affine Überdeckung. Ein Morphismus  $(f, f^\#)$  ist eindeutig durch seine Einschränkungen  $(f_\nu, f_\nu^\#)$  auf  $X_\nu$  bestimmt. Diese sind nach Satz 2.6 wiederum eindeutig bestimmt durch  $\alpha(f_\nu)$ . Ferner kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha(f_\nu)} & \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu}) \\ \alpha(f) \downarrow & \nearrow \text{res} & \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & & \end{array}$$

weshalb  $\alpha(f)$  schon alle  $\alpha(f_\nu)$  eindeutig bestimmt. Somit ist  $\alpha$  injektiv. Sei nun ein Ringhomomorphismus  $h : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  gegeben und  $h_\nu : A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu})$ . Nach Satz 2.6 (iii) existiert ein  $f_\nu : X_\nu \rightarrow \text{Spec}(A)$  mit  $\alpha(f_\nu) = h_\nu$ . Für alle  $\nu, \mu$  ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(X_\nu, \mathcal{O}_{X_\nu}) & & \\ & \nearrow h_\nu & & \searrow \text{res} & \\ A & & & & \Gamma(X_\nu \cap X_\mu, \mathcal{O}_X) \\ & \searrow h_\mu & & \nearrow \text{res} & \\ & & \Gamma(X_\mu, \mathcal{O}_{X_\mu}) & & \end{array}$$

Aus der Injektivität von  $\alpha$  folgt  $f_\nu = f_\mu$  auf  $X_\nu \cap X_\mu$ . Kleben wir die  $f_\nu$  nun zusammen, so erhalten wir ein  $f : X \rightarrow \text{Spec}(A)$  mit  $\alpha(f) = h$ .  $\square$

**Korollar 2.14.** Es gibt eine pfeilumkehrende Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der affinen Schemata und der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1.

**Korollar 2.15.**  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  ist Endobjekt in der Kategorie der Schemata, d.h. für jedes Schema  $X$  existiert ein eindeutiger Morphismus  $f : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

**Satz 2.16.** Sei  $A$  ein Ring,  $X = \text{Spec}(A)$  und  $f \in A$ . Dann gilt:

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \text{Spec}(A_f)$$

**Beweis.** Die natürliche Abbildung  $\varphi : A \rightarrow A_f$  induziert einen Homöomorphismus:

$$\psi : \text{Spec}(A_f) \rightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} = D(f), \quad \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \square$$

**Beweis zu Definition 2.10.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema und  $U \subset X$  offen. Dann ist  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  ein lokal geringter Raum. Sei  $P \in U$ . Wir zeigen, dass eine Umgebung  $V \subset_\circ U$  von  $P$  existiert, so dass  $(V, \mathcal{O}_X|_V)$  affin ist. Da  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema ist, existiert ein  $V' \subset_\circ X$ ,  $P \in V'$  mit  $(V', \mathcal{O}_X|_{V'})$  affin. Sei also  $V' = \text{Spec}(A)$  für einen Ring  $A$ . Da die  $D(f)$ ,  $f \in A$  eine Basis der Topologie auf  $X$  bilden, existiert ein  $f \in A$ , so dass  $P \in D(f) \subset V' \cap U$ . Wegen Satz 2.16 ist  $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \text{Spec}(A_f)$  affin.  $\square$

**Satz 2.17.** Sei  $X$  ein Schema und  $Z \subset X$  irreduzibel und abgeschlossen. Dann existiert genau ein Punkt  $\xi \in Z$  derart, dass  $\overline{\{\xi\}} = Z$ .  $\xi$  heißt *generischer Punkt* von  $Z$ .

**Beweis.**

- *Existenz:* Sei  $U \subset_o X$  affin mit  $Z \cap U \neq \emptyset$ . Da  $Z \cap U$  abgeschlossen in  $U$  ist, gibt es ein Radikalideal  $\mathfrak{p}$  mit  $Z \cap U = V(\mathfrak{p})$ .

Nun ist  $Z \cap U$  irreduzibel, da für offene Mengen  $V_1, V_2 \subset_o Z \cap U$  stets  $V_1, V_2 \subset_o Z$  gilt und aus der Irreduzibilität von  $Z$  stets  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  folgt.

Ferner ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal, denn ist  $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$  für gewisse Ideale  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ , so folgt  $\text{Rad}(\mathfrak{ab}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ . Dies ist äquivalent zu  $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ , daher:

$$Z \cap U = V(\mathfrak{p}) = (V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{a})) \cup (V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{b}))$$

Da  $Z \cap U$  irreduzibel ist, folgt o.B.d.A.  $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{a})$ , d.h.  $\mathfrak{a} \subset \text{Rad}(\mathfrak{a}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ .

$\mathfrak{p}$  ist nun generischer Punkt von  $Z \cap U$ , da:

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{p})$$

Die andere Inklusion folgt aus  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ . Da  $\mathfrak{p}$  prim ist, folgt  $\text{Rad}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}$  und somit  $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{a})$ . Somit ist  $Z \cap U = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ .

Bezeichne mit  $\overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$  den topologischen Abschluss in  $X$ . Dann ist  $Z \cap U \subset \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$ . Da  $Z$  irreduzibel ist, gilt  $Z = \overline{Z \cap U} \subset \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$ , also  $Z = \overline{\{\mathfrak{p}\}}^X$ .

- *Eindeutigkeit:* Sei  $\overline{\{\xi\}}^X = Z = \overline{\{\xi'\}}^X$ . Sei  $U \subset_o X$  eine affine Umgebung von  $\xi \in U$ . Dann ist  $\xi' \in U$ , da aus  $\xi' \in Z \setminus U$  der Widerspruch  $\xi \in Z = \overline{\{\xi'\}}^X \subset X \setminus U$  folgt. Wähle nun Radikalideale  $\mathfrak{p}'$  und  $\mathfrak{p}$  mit:

$$V(\mathfrak{p}') = \overline{\{\xi'\}}^U = U \cap \overline{\{\xi'\}}^X = U \cap \overline{\{\xi\}}^X = \overline{\{\xi\}}^U = V(\mathfrak{p})$$

Es folgt  $\xi' = \mathfrak{p}' = \text{Rad}(\mathfrak{p}') = \text{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} = \xi$ . □

**Satz 2.18.** Sei  $X$  ein Schema und  $K$  ein Körper. Dann gibt es eine Bijektion:

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } K, X) \xrightarrow{\sim} \{(x, i) \mid x \in X, i : \kappa(x) \hookrightarrow K \text{ Ringhomomorphismus}\}$$

wobei  $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  der Restklassenkörper von  $\mathcal{O}_{X,x}$  bezeichnet. Die Elemente heißen *K-wertige Punkte* von  $X$ .

**Beweis.** Sei ein Morphismus  $f : \operatorname{Spec}(K) \rightarrow X$  gegeben. Setze  $x = f((0)) \in X$ .  $f^\#$  induziert einen lokalen Homomorphismus  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{K,(0)} = K$ .  $f^\#$  faktorisiert daher über  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \kappa(x)$  und induziert einen Homomorphismus  $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$ .

Sei nun umgekehrt ein  $x \in X$  und  $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$  gegeben.  $i$  definiert nach Satz 2.6 ein Schemamorphismus:

$$f : \operatorname{Spec}(K) \rightarrow \operatorname{Spec} \kappa(x) \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\psi} X$$

wobei  $\psi$  die folgende kanonische Abbildung ist:

Sei  $U \subset_o X$  eine affine Umgebung von  $x$  mit  $U = \operatorname{Spec}(A)$ . Nach Satz 2.3 (i) gilt  $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} = A_x$ . Die kanonische Abbildung  $A \rightarrow A_x$  induziert  $\psi : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow U \hookrightarrow X$ . Diese Abbildung ist unabhängig von  $U$ :

Sei  $U' \subset_o X$  eine weitere affine Umgebung von  $x$ . Dann existiert eine affine Umgebung  $U'' \subset_o U \cap U'$  mit  $x \in U''$ , also können wir o.B.d.A.  $\operatorname{Spec}(A) = U \subset U' = \operatorname{Spec}(A')$  annehmen. Es existiert ein kanonischer Homomorphismus  $A' \rightarrow A$  derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\quad} & A \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A'_x = \mathcal{O}_{X,x} = A_x \end{array}$$

Somit kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & U' & \xleftarrow{\quad} & U \\ & & \swarrow & & \uparrow \\ & & & & \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \end{array}$$

□

### Satz 2.19.

(i) Sei  $A$  ein Ring und  $f \in A$ . Dann gilt:

$$D(f) = \emptyset \iff f \text{ nilpotent}$$

(ii) Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $f : Y = \operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A) = X$  der durch  $\varphi$  induzierte Morphismus affiner Schemata. Dann gilt:

- (a)  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$  injektiv ist. In diesem Fall ist  $f$  *dominant*, d.h.  $f(Y) \subset X$  ist dicht.
- (b)  $\varphi$  ist genau dann surjektiv, wenn  $f^\#$  surjektiv ist und  $f$  ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist.

**Beweis.** Übung.

□



**Definition 2.20.** Ein Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *reduziert*, falls  $\mathcal{O}_X(U)$  für alle  $U \subset_o X$  reduziert sind, d.h. keine nilpotente Elemente besitzt.

**Regeln 2.21.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema.

- (i)  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist genau dann reduziert, wenn  $\mathcal{O}_{X,P}$  für alle  $P \in X$  keine nilpotente Elemente besitzt.
- (ii) Sei  $\mathcal{O}_X^{\text{red}}$  die assoziierte Garbe zur folgenden Prägarbe:

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\mathfrak{N}_U$$

wobei  $\mathfrak{N}_U$  das Nilradikal von  $\mathcal{O}_X(U)$  bezeichnet. Dann ist  $(X, \mathcal{O}_X^{\text{red}})$  ein Schema, das zu  $X$  assoziierte *reduzierte Schema*  $X_{\text{red}}$ . Es gibt einen Morphismus  $f : X_{\text{red}} \rightarrow X$  mit dem Homöomorphismus  $\text{id}$  auf den unterliegenden topologischen Räumen und  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_X^{\text{red}}$  gegeben durch:

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X^{\text{red}}(U), \quad s \mapsto \left( U \xrightarrow{s} \coprod_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P} \rightarrow \coprod_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}^{\text{red}} \right)$$

- (iii) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata mit  $X$  reduziert. Setze  $g = f$  auf den unterliegenden topologischen Räumen. Da  $X$  reduziert ist, faktorisiert  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  über  $\mathcal{O}_Y^{\text{red}}$ .  $f^\#$  induziert  $g^\# : \mathcal{O}_Y^{\text{red}} \rightarrow g_* \mathcal{O}_X = f_* \mathcal{O}_X$ . Es gibt also einen eindeutig bestimmten Morphismus  $g : X \rightarrow Y_{\text{red}}$  mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \uparrow \\ & & Y_{\text{red}} \end{array}$$

Sei  $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$  ein graduierter Ring und  $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$ . Ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset S$  ist genau dann homogen, wenn aus  $fg \in \mathfrak{p}$  für gewisse homogene Elemente  $f, g \in S$  stets  $f \in \mathfrak{p}$  oder  $g \in \mathfrak{p}$  folgt. Für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subset S$  setze:

$$\text{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \subset S \text{ homogenes Primideal} \mid S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}, \quad V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

**Lemma 2.22.**

- (i) Sind  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset S$  homogene Ideale, so gilt  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ .
- (ii) Ist  $(\mathfrak{a}_i)_i$  eine Familie homogener Ideale in  $S$ , so folgt  $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$ .

Damit wird auf  $\text{Proj}(S)$  eine Topologie definiert. Die abgeschlossenen Mengen sind genau die Mengen der Form  $V(\mathfrak{a})$  für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \subset S$ .

**Beweis.** Wie in Lemma 2.1 unter Beachtung, dass homogene Ideale von homogene Elemente erzeugt werden.  $\square$

**Definition.** Sei  $T \subset S$  multiplikativ abgeschlossen, die aus homogenen Elementen besteht. Dann wird  $T^{-1}S = \bigoplus_{i \geq 0} (T^{-1}S)_i$  zu einem graduierten Ring:

$$(T^{-1}S)_i = \left\{ \frac{s}{t} \in T^{-1}S \mid s \in S \text{ homogen, } t \in T, \deg(s) - \deg(t) = i \right\}$$

Ist  $\mathfrak{p} \subset S$  ein homogenes Primideal und  $f \in S$  ein homogenes Element, so ist die *homogene Lokalisierung* bzgl.  $\mathfrak{p}$  bzw.  $f$  definiert als:

$$S_{(\mathfrak{p})} = (S_{\mathfrak{p}})_0, \quad S_{(f)} = (S_f)_0$$

**Definition.** Wir definieren eine Ringgarbe  $\mathcal{O}$  auf  $\text{Proj}(S)$  wie folgt: Sei  $U \subset_o \text{Proj}(S)$  und setze  $\mathcal{O}(U)$  als die Menge aller Abbildungen  $s : U \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$ , so dass:

- (i) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gilt  $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ .
- (ii) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathfrak{p}$  mit  $V \subset U$  und homogene Elemente  $a, f \in S$  mit  $\deg(a) = \deg(f)$  derart, dass für alle  $\mathfrak{q} \in V$  stets  $f \notin \mathfrak{q}$  und  $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$  in  $S_{(\mathfrak{q})}$  gilt.

**Satz 2.23.** Sei  $S$  ein graduierter Ring. Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$ .
- (ii) Für ein homogenes  $f \in S_+$  setze  $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ . Dann ist  $D_+(f)$  offen in  $\text{Proj}(S)$  und es gilt:

$$\text{Proj}(S) = \bigcup_{f \in S_+ \text{ homogen}} D_+(f)$$

Es gibt einen Isomorphismus lokal geringter Räume  $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \cong \text{Spec } S_{(f)}$ .

- (iii)  $(\text{Proj } S, \mathcal{O})$  ist ein Schema.

**Beweis.**

- (i) Die Abbildung  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \rightarrow S_{(\mathfrak{p})}$ ,  $s_{\mathfrak{p}} \mapsto s(\mathfrak{p})$ , wobei  $s$  ein Repräsentant von  $s_{\mathfrak{p}}$  ist, ist ein Isomorphismus. Beweis analog wie Satz 2.3 (i).
- (ii) Da  $D_+(f) = \text{Proj}(S) \setminus V(f)$ , ist  $D_+(f)$  offen. Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$ , d.h.  $\mathfrak{p} \subset S$  ist ein homogenes Primideal mit  $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$ . Sei  $f \in S_+ \setminus \mathfrak{p}$ . Dann ist  $\mathfrak{p} \notin V(f)$ , also  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ . Daher ist  $\text{Proj}(S) = \bigcup D_+(f)$ .

Sei  $f \in S_+$ . Wir definieren ein Morphismus lokal geringter Räume  $(\phi, \phi^\#) : D_+(f) \rightarrow \text{Spec } S_{(f)}$  wie folgt: Sei  $S \rightarrow S_f$  der natürliche Homomorphismus. Sei  $\mathfrak{a} \subset S$  ein homogenes Ideal und setze  $\phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)}$ . Beachte, dass  $S_{(f)} = (S_f)_0 \subset S_f$  ein Teilring ist. Für  $\mathfrak{p} \in D_+(f)$  ist  $\phi(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } S_{(f)}$ , siehe Satz 2.16, und  $\phi$  ist bijektiv. Sei  $\mathfrak{a} \subset S$  ein homogenes Ideal. Dann ist  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$  genau dann, wenn  $\phi(\mathfrak{p}) \supset \phi(\mathfrak{a})$ . Daher ist  $\phi$  ein Homöomorphismus.

$\phi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow \phi_* (\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}|_{D_+(f)})$  wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}(\phi^{-1}(U)), \quad s \mapsto \left( \phi^{-1}(U) \xrightarrow{s \circ \phi} \coprod (S_f)_{\phi(\mathfrak{p})} \cong \coprod S_{(\mathfrak{p})} \right)$$

Dieses ist ein Isomorphismus.

(iii) folgt aus (i) und (ii). □

**Beispiel 2.24.** Sei  $A$  ein Ring. Dann heißt

$$\mathbf{P}_A^n = \text{Proj } A[X_0, \dots, X_n]$$

der *n-dimensionaler projektiver Raum* über  $A$ . Ist speziell  $A = k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist  $\mathbf{P}_k^n$  ein Schema. Dessen Teilraum aller abgeschlossenen Punkte ist homöomorph zur projektiven  $n$ -dimensionalen Varietät.

**Definition 2.25.** Sei  $S$  ein beliebiges Schema. Ein *Schema über  $S$*  ist ein Schema  $X$  zusammen mit einem Morphismus  $X \rightarrow S$ , der sogenannte *Strukturmorphismus*. Ein Morphismus zweier Schemata  $X$  und  $Y$  über  $S$  ist ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

So ein Morphismus nennt man auch *S-Morphismus*. Bezeichne die Kategorie aller Schemata über  $S$  mit  $S$ -Morphismen mit  $\mathbf{Sch}(S)$ . Für einen Ring  $A$  setzen wir auch  $\mathbf{Sch}(A) = \mathbf{Sch}(\text{Spec } A)$ .

**Satz 2.26.** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gibt es einen natürlichen Funktor

$$t : \mathbf{Var}(k) \rightarrow \mathbf{Sch}(k)$$

der *volltreu* ist, d.h. für zwei Varietäten  $V, W$  ist die durch  $t$  auf den Morphismen induzierte Abbildung  $\text{Hom}_{\mathbf{Var}(k)}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sch}(k)}(tV, tW)$  bijektiv. Für eine Varietät  $V$  setze  $\mathfrak{M}(V)$  als die Menge aller abgeschlossenen Punkte des Schemas  $tV$  mit der Teilraumtopologie. Es gibt einen Homöomorphismus topologischer Räume  $V \cong \mathfrak{M}(V)$ . Die Garbe der regulären Funktionen ist via diesen Homöomorphismus isomorph zu  $\mathcal{O}_{tV}|_{\mathfrak{M}(V)}$ .

**Beweis.** Siehe z.B. Hartshorne Kapitel II, Proposition 2.6 oder Mumford, Theorem 2 auf Seite 168.

## 2.3 Erste Eigenschaften von Schemata

### Definition 3.1.

- (i) Ein Schema heißt *zusammenhängend*, falls es als topologischer Raum zusammenhängend ist.
- (ii) Ein Schema heißt *irreduzibel*, falls es als topologischer Raum irreduzibel ist.
- (iii) Ein Schema heißt *reduziert* falls für alle  $U \subset_o X$  der Ring  $\mathcal{O}_X(U)$  reduziert ist.
- (iv) Ein Schema heißt *integer*, falls für alle  $U \subset_o X$  der Ring  $\mathcal{O}_X(U)$  nullteilerfrei ist.

**Beispiel 3.2.** Sei  $X = \text{Spec}(A)$  ein affines Schema. Dann gilt:

- (i)  $X$  ist irreduzibel  $\iff \mathfrak{N}(A)$  ist ein Primideal
- (ii)  $X$  ist reduziert  $\iff A$  ist reduziert  $\iff \mathfrak{N}(A) = 0$
- (iii)  $X$  ist integer  $\iff A$  ist nullteilerfrei

**Beweis.** (i) und (ii) sind klar. Ist  $X$  integer, so ist  $A = \mathcal{O}_X(X)$  nullteilerfrei. Sei nun umgekehrt  $A$  nullteilerfrei, d.h.  $\mathfrak{N}(A) = 0$  ist ein Primideal. Nach (i) und (ii) ist  $X$  irreduzibel und reduziert. Daher folgt die Aussage aus dem nächsten Satz.  $\square$

**Satz 3.3.** Ein Schema  $X$  ist genau dann integer, wenn  $X$  reduziert und irreduzibel ist.

**Beweis.** Sei  $X$  integer. Dann ist  $X$  offensichtlich reduziert. Wäre  $X$  nicht irreduzibel, so gäbe es  $\emptyset \neq U_1, U_2 \subset_o X$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Dann ist:

$$\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$$

Somit ist  $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2)$  nicht nullteilerfrei. Sei nun umgekehrt  $X$  irreduzibel und reduziert.

Sei  $V \subset_o X$  affin mit  $V = \text{Spec}(A)$ . Sei  $a, b \in A$  mit  $ab = 0$ . Es folgt:

$$\text{Spec}(A) = V(ab) = V(a) \cup V(b)$$

Da  $V$  irreduzibel ist, folgt o.B.d.A.  $\text{Spec}(A) = V(a)$ . Da  $A = \mathcal{O}_X(V)$  reduziert ist, folgt  $\text{Rad}(a) = (0)$ , also  $a = 0$ . Daher ist  $\mathcal{O}_X(V)$  für jedes affine  $V \subset_o X$  nullteilerfrei.

Sei nun  $U \subset_o X$  beliebig und  $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$  mit  $fg = 0$ . Für  $V \subset_o U$  affin, folgt aus  $f|_V \cdot g|_V = 0$  o.B.d.A.  $f|_V = 0$ . Nun ist  $U$  der Abschluss von  $V$  in  $U$ . Sei  $x \in U$  und

$U(x) \subset_o U$  eine affine Umgebung von  $x$  mit  $U(x) = \text{Spec}(B)$ . Sei  $f(x) = \frac{a}{h} \in B_x$  für alle  $x \in U(x)$ . Es ist  $U(x) \cap V \neq \emptyset$ , da  $U$  irreduzibel ist. Wähle ein  $y \in U(x) \cap V$ ; es folgt  $0 = f(y) = \frac{a}{h} \in B_y$ , also gibt es ein  $k \in B \setminus y$  mit  $ka = 0$ . Da  $B$  nullteilerfrei ist, folgt  $a = 0$  und  $f = 0$  auf  $U(x)$ . Somit folgt  $f = 0$ .  $\square$

**Definition.**

- (i) Ein Schema  $X$  heißt *quasikompakt*, wenn sein unterliegender topologischer Raum quasikompakt ist.
- (ii) Ein topologischer Raum  $X$  heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen in  $X$  stationär wird.

**Bemerkung.** Sei  $X$  ein noetherscher Raum. Nach Zorns Lemma besitzt jede nichtleere Menge  $\Sigma$  von abgeschlossenen Mengen in  $X$  ein minimales Element, da jede Kette in  $\Sigma$  ein minimales Element besitzt.

**Satz 3.4.**

- (i) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $X$  genau dann noethersch, wenn alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  quasikompakt sind.
- (ii) Sei  $X$  ein affines Schema. Dann ist  $X$  quasikompakt, aber nicht notwendig noethersch.
- (iii) Sei  $A$  ein noetherscher Ring. Dann ist der  $\text{Spec}(A)$  unterliegender Raum noethersch.

**Beweis.**

- (i) Sei  $U \subset_o X$  und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung. Für eine endliche Teilmenge  $J \subset I$  setze  $V_J = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Dann ist  $V_J \subset X$  offen und es gilt:

$$U = \bigcup_{J \subset I \text{ endlich}} V_J$$

Wählt man aus  $\Sigma = \{X \setminus V_J \mid J \subset I \text{ endlich}\}$  ein minimales Element  $X \setminus V_{J'}$ . Dann gilt  $V_{J'} \supset V_J$  für alle  $J$ . Also ist  $U = V_{J'} = \bigcup_{i \in J'} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung.

Sei umgekehrt  $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$  eine Kette abgeschlossener Mengen in  $X$ , so ist die Menge  $U = \bigcup_{j \geq 1} X \setminus Y_j$  offen in  $X$ . Wir erhalten eine endliche Teilüberdeckung  $U = \bigcup_{r \geq j \geq 1} X \setminus Y_j = X \setminus Y_r$ , also folgt  $Y_s = Y_r$  für alle  $s \geq r$ .

- (ii) Sei  $X = \text{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung. Wir können o.B.d.A.  $U_i = D(f_i)$  für gewisse  $f_i \in A$  annehmen. Sei  $\mathfrak{a} = (f_i \mid i \in I) \subset A$ . Dann gilt:

$$X = \bigcup_{i \in I} X \setminus V(f_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} V(f_i) = X \setminus V(\mathfrak{a})$$

Es folgt  $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ , also  $1 \in \mathfrak{a}$ . Somit gibt es endlich viele  $g_j \in A$  und  $i_j \in I$  mit  $1 = \sum_j g_j f_{i_j}$ . Wir erhalten die endliche Teilüberdeckung  $X = \bigcup_j D(f_{i_j})$ .

- (iii) Sei  $V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset \dots$  eine Kette abgeschlossener Mengen in  $\text{Spec}(A)$  mit Radikalidealen  $\mathfrak{a}_i \subset A$ . Sie wird stationär, da die Kette  $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$  stationär wird.  $\square$

**Definition 3.5.** Sei  $X$  ein Schema.

- (i)  $X$  heißt *lokal noethersch*, falls  $X$  von offenen, affinen Teilmengen  $\text{Spec}(A_i)$  mit noetherschen Ringen  $A_i$  überdeckt werden kann.
- (ii)  $X$  heißt *noethersch*, falls  $X$  lokal noethersch und quasikompakt ist. Dies ist äquivalent dazu, dass  $X$  von endlich vielen offenen, affinen Teilmengen  $\text{Spec}(A_i)$  mit noetherschen Ringen  $A_i$  überdeckt werden kann.

**Bemerkung.** Ist ein Schema  $X$  noethersch, so ist nach Satz 3.4 (iii) der unterliegender Raum von  $X$  noethersch. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Satz 3.6.** Sei  $X$  ein Schema. Dann ist  $X$  genau dann lokal noethersch, wenn für alle offenen, affinen Teilmengen  $U = \text{Spec}(A)$  stets  $A$  ein noetherscher Ring ist.

**Beweis.** Die Rückrichtung ist trivial. Sei also  $X$  lokal noethersch und  $U = \text{Spec}(A)$  offen in  $X$ . Wir haben eine offene affine Überdeckung  $X = \bigcup_i \text{Spec}(B_i)$  mit noetherschen Ringen  $B_i$ . Da die offenen Mengen  $D(f)$  eine offene Basis der Topologie bilden, haben wir eine Darstellung:

$$U = \bigcup_{i,j} D(f_{ij}), \quad f_{ij} \in B_i, \quad D(f_{ij}) \subset U \cap \text{Spec}(B_i)$$

mit  $D(f_{ij}) = \text{Spec}(B_i)_{f_{ij}}$ . Da  $B_i$  noethersch sind, sind die Lokalisierungen  $(B_i)_{f_{ij}}$  ebenfalls noethersche Ringe. Da  $U$  affin und somit quasikompakt ist, kann  $U$  von endlich vielen Spektren noetherscher Ringe überdeckt werden.

Sei  $V = \text{Spec}(B)$  offen in  $U$  mit noetherschen Ring  $B$ . Sei  $f \in A$  und betrachte  $D(f) \subset V$ . Die natürliche Inklusion  $V \hookrightarrow U$  induziert einen Ringhomomorphismus  $A \rightarrow B$ . Sei  $\bar{f}$  das Bild von  $f$  in  $B$ . Es gilt:

$$\text{Spec}(A_f) = D(f) = D(\bar{f}) = \text{Spec}(B_{\bar{f}})$$

Es folgt  $A_f \cong B_{\bar{f}}$  und  $A_f$  ist noethersch. Wir haben nun gezeigt, dass  $U$  von endlich vielen offenen Mengen der Form  $D(f) = \text{Spec}(A_f)$  überdeckt werden kann mit noetherschen Ringen  $A_f$ . Somit folgt die Aussage aus dem nächsten Lemma.  $\square$

**Lemma 1.** Sei  $A$  ein Ring und  $f_1, \dots, f_r \in A$  mit  $1 = (f_1, \dots, f_r)$ . Sind alle  $A_{f_i}$  noethersch, so ist auch  $A$  noethersch.

**Lemma 2.** Sei  $A$  ein Ring und  $f_1, \dots, f_r \in A$  mit  $1 = (f_1, \dots, f_r)$ . Sei  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal und  $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$  die Lokalisierungsabbildung. Dann gilt:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i})$$

**Beweis.** Für die nichttriviale Inklusion sei  $b \in A$  mit  $\varphi_i(b) \in \varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i}$  für alle  $i$ . Schreibe:

$$\varphi_i(b) = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \in A_{f_i}, \quad a_i \in \mathfrak{a}, \quad n_i > 0$$

Sei o.B.d.A.  $n = n_1 = \dots = n_r$ . Somit gibt es für alle  $i$  ein  $m_i \geq 0$  mit:

$$f_i^{m_i}(f_i^n b - a_i) = 0$$

Sei o.B.d.A.  $m = m_1 = \dots = m_r$ . Es folgt  $f_i^{m+n}b \in \mathfrak{a}$  für alle  $i$ . Aus  $1 = (f_1, \dots, f_r)$  folgt  $1 = (f_1^N, \dots, f_r^N)$  für alle  $N \geq 0$ , insbesondere für  $N = m + n$ . Sei also  $1 = \sum_{i=1}^r c_i f_i^N$  für gewisse  $c_i \in A$ . Dann gilt:

$$b = \sum_{i=1}^r c_i f_i^N b \in \mathfrak{a} \quad \square$$

**Beweis von Lemma 1.** Sei  $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots$  eine Kette von Idealen in  $A$ . Diese induziert für alle  $i$  eine Kette von Idealen in  $A_{f_i}$ :

$$\varphi_i(\mathfrak{a}_1)A_{f_i} \subset \varphi_i(\mathfrak{a}_2)A_{f_i} \subset \dots$$

Da  $A_{f_i}$  noethersch ist, wird diese Kette stationär für alle  $i$ . Es existiert also ein  $s$  mit  $\varphi_i(\mathfrak{a}_s)A_{f_i} = \varphi_i(\mathfrak{a}_{s+1})A_{f_i} = \dots$  für alle  $i$ . Mit Lemma 2 wird auch die ursprüngliche Kette von Idealen in  $A$  stationär.  $\square$

**Definition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.

- (i)  $f$  heißt *lokal von endlichem Typ*, falls  $Y$  eine offene affine Überdeckung  $\bigcup_i \text{Spec}(B_i)$  besitzt, so dass  $f^{-1}(\text{Spec } B_i)$  für alle  $i$  eine offene affine Überdeckung  $\bigcup_j \text{Spec}(A_{ij})$  besitzt, wobei alle  $A_{ij}$  endlich erzeugte  $B_i$ -Algebren sind.
- (ii)  $f$  heißt *von endlichem Typ*, falls  $Y$  eine offene affine Überdeckung  $\bigcup_i \text{Spec}(B_i)$  besitzt, so dass  $f^{-1}(\text{Spec } B_i)$  für alle  $i$  eine endliche, offene affine Überdeckung  $\bigcup_j \text{Spec}(A_{ij})$  besitzt, wobei alle  $A_{ij}$  endlich erzeugte  $B_i$ -Algebren sind.
- (iii)  $f$  heißt *endlich*, falls eine offene affine Überdeckung  $Y = \bigcup_i \text{Spec}(B_i)$  existiert, so dass  $f^{-1}(\text{Spec } B_i) = \text{Spec}(A_i)$  für alle  $i$  ist, wobei  $A_i$  eine  $B_i$ -Algebra ist, die als  $B_i$ -Modul endlich erzeugt ist.

**Bemerkung 3.7.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.

- (i)  $f$  ist genau dann lokal von endlichem Typ, wenn für alle offene, affine  $V = \operatorname{Spec}(B)$  in  $Y$  es eine offene affine Überdeckung  $f^{-1}(V) = \bigcup_j \operatorname{Spec}(A_j)$  gibt, wobei  $A_j$  endlich erzeugte  $B$ -Algebren sind.
- (ii)  $f$  ist genau dann von endlichem Typ, wenn für alle offene, affine  $V = \operatorname{Spec}(B)$  in  $Y$  es eine endliche, offene affine Überdeckung  $f^{-1}(V) = \bigcup_j \operatorname{Spec}(A_j)$  gibt, wobei  $A_j$  endlich erzeugte  $B$ -Algebren sind.
- (iii)  $f$  ist genau dann endlich, wenn für alle offene, affine  $V = \operatorname{Spec}(B)$  in  $Y$  die Menge  $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$  affin ist, wobei  $A$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul ist.

**Beweis.** Dies werden wir später zeigen.

**Beispiel 3.8.** Sei  $V$  eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Dann ist das Schema  $t(V)$  in Satz 2.26 ein integres, noethersches Schema von endlichem Typ über  $k$ .

**Beispiel 3.9.** Sei  $P$  ein Punkt einer Varietät und  $\mathcal{O}_P$  der zugehörige Halm. Dann ist  $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_P)$  ein integres, noethersches Schema, aber nicht von endlichem Typ über  $k$ .

**Definition 3.10.** Ein *offenes Unterschema* eines Schemas  $X$  ist ein Schema  $U$ , dessen unterliegender topologischer Raum eine offene Teilmenge von  $X$  ist und dessen Strukturgarbe  $\mathcal{O}_U$  isomorph zu  $\mathcal{O}_X|_U$  ist.

Ein Schemamorphismus  $f : X \rightarrow Y$  heißt *offene Immersion*, falls  $f$  ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema in  $Y$  induziert.

**Bemerkung.** Jede offene Teilmenge eines Schemas  $X$  trägt eine eindeutig bestimmte Struktur als offenes Unterschema, siehe auch Definition 2.10.

**Definition 3.11.** Ein *abgeschlossenes Unterschema* eines Schemas  $X$  ist ein Schema  $Y$ , zusammen mit einem Morphismus  $(i, i^\#) : Y \rightarrow X$ , so dass:

- (i) Der  $Y$  unterliegender Raum ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ .
- (ii)  $i : Y \hookrightarrow X$  ist die natürliche Inklusion.
- (iii)  $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$  ist surjektiv.

Ein Schemamorphismus  $f : X \rightarrow Y$  heißt *abgeschlossene Immersion*, falls  $f$  ein Isomorphismus auf ein abgeschlossenes Unterschema in  $Y$  induziert.



**Beispiel 3.12.** Sei  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal und  $X = \operatorname{Spec}(A)$ ,  $Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ . Der Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  induziert  $f : Y \rightarrow X$ ,  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Dies induziert ein Morphismus von Schemata.  $f$  ist ein Homöomorphismus von  $Y$  auf  $V(\mathfrak{a})$  und die Abbildung  $f^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  induziert:

$$f_{\mathfrak{p}}^\sharp : \mathcal{O}_{X, f(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{Y, \mathfrak{p}}$$

$f_{\mathfrak{p}}^\sharp$  ist surjektiv für alle  $\mathfrak{p} \in Y$ , also ist nach 1.10 (ii) auch  $f^\sharp$  surjektiv. Somit erhält man für jedes  $\mathfrak{a} \subset A$  auf  $V(\mathfrak{a}) \subset X$  eine Struktur als abgeschlossenes Unterschema in  $X$ .

**Bemerkung.** Ist  $Y \subset X = \operatorname{Spec}(A)$  eine abgeschlossene Teilmenge, so existieren auf  $Y$  viele abgeschlossene Unterschemastrukturen. Wir werden später sehen, dass sie genau den Idealen  $\mathfrak{a} \subset A$  mit  $Y = V(\mathfrak{a})$  entsprechen.

**Satz 3.14.** Sei  $X$  ein Schema und  $Y$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ . Dann besitzt  $Y$  eine eindeutig bestimmte induzierte Struktur als reduziertes, abgeschlossenes Unterschema.

**Lemma 3.15.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $X = \bigcup_i U_i$  eine offene Überdeckung. Ferner sei für jedes  $i$  eine Garbe  $F_i$  auf  $U_i$  gegeben und für alle  $i, j$  seien Isomorphismen gegeben:

$$\varphi_{ij} : F_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} F_j|_{U_i \cap U_j}$$

so dass  $\varphi_{ii} = \operatorname{id}$  und  $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$  auf  $U_i \cap U_j \cap U_k$  gilt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Garbe  $F$  auf  $X$  und Isomorphismen  $\psi_i : F|_{U_i} \xrightarrow{\sim} F_i$  mit  $\psi_j = \varphi_{ij}\psi_i$  auf  $U_i \cap U_j$ . Wir sagen auch, dass  $F$  durch *Verkleben* der  $F_i$  längst  $\varphi_{ij}$  entsteht.

**Beweis.** Folgt direkt aus der Definition einer Garbe. □

**Definition 3.16.**

- (i) Die *Dimension*  $\dim(X)$  eines Schemas  $X$  ist die Dimension von  $X$  als topologischer Raum, d.h:

$$\dim(X) = \sup\{n \mid \text{es gibt eine Kette } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \\ \text{von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen in } X\}$$

- (ii) Sei  $Z$  eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge eines Schemas  $X$ . Dann ist die *Kodimension*  $\operatorname{codim}(Z, X)$  von  $Z$  in  $X$  definiert als:

$$\operatorname{codim}(Z, X) = \sup\{n \mid \text{es gibt eine Kette } Z = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \\ \text{von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen in } X\}$$

Ist  $Y$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , so setzen wir:

$$\text{codim}(Y, X) = \inf\{\text{codim}(Z, X) \mid Z \subset Y \text{ irreduzibel, abgeschlossen}\}$$

**Definition 3.17.** Sei  $S$  ein Schema und  $X, Y$   $S$ -Schemata. Das *Faserprodukt*  $X \times_S Y$  von  $X$  und  $Y$  über  $S$  ist ein Schema, zusammen mit Projektionsmorphisimen  $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$  und  $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$  derart, dass:

(i) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

(ii) Ist  $Z$  ein  $S$ -Schema und  $f : Z \rightarrow X$ ,  $g : Z \rightarrow Y$  Morphismen derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & & g & \\ & & & \searrow & \\ Z & \xrightarrow{\theta} & X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow f & \downarrow p_1 & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & S \end{array}$$

so existiert einen eindeutig bestimmten Morphismus  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$  mit  $f = p_1 \theta$  und  $g = p_2 \theta$ .

Wird für Schemata  $X$  und  $Y$  kein Bezug zu einer Basis angegeben, so ist immer das Endobjekt  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  gemeint, d.h.  $X \times Y = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$ .

**Theorem 3.18.** Seien  $X$  und  $Y$   $S$ -Schemata. Dann existiert das Faserprodukt  $X \times_S Y$  und ist auf Isomorphie eindeutig.

**Lemma 3.19.** (*Verkleben von Morphismen*, vgl. Satz 2.13) Seien  $X, Y$  Schemata und  $\{U_i\}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Ferner seien  $f_i : U_i \rightarrow Y$  Morphismen gegeben, wobei  $U_i$  mit der offenen Unterschemastruktur versehen ist. Es gelte  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j$ . Dann gibt es einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i$ .

**Beweis von Theorem 3.18.** Die Eindeutigkeit ist klar.

1. Schritt: Seien  $X = \operatorname{Spec}(A)$ ,  $Y = \operatorname{Spec}(B)$ ,  $S = \operatorname{Spec}(R)$  affin. Somit sind  $A$  und  $B$   $R$ -Algebren. Wir zeigen  $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ . Die Projektionsabbildung  $p_1 : \operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$  ist durch die natürliche Abbildung  $\tilde{p}_1 : A \rightarrow A \otimes_R B$  gegeben, analog für  $p_2$ . Offensichtlich kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{p}_1} & A \otimes_R B \\ \uparrow & & \uparrow \tilde{p}_2 \\ R & \longrightarrow & B \end{array}$$

Sei also  $Z$  ein  $S$ -Schema und Morphismen  $f : Z \rightarrow X$ ,  $g : Z \rightarrow Y$  gegeben, die über  $S$  gleich sind. Diese entsprechen Ringhomomorphismen  $\tilde{f} : A \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  und  $\tilde{g} : B \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  nach Satz 2.13. Es kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \\ & & \tilde{f} & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{\tilde{p}_2} & A \otimes_R B & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \\ \uparrow & & \uparrow \tilde{p}_2 & & \uparrow \tilde{g} \\ R & \longrightarrow & B & & \end{array}$$

Wegen der Universaleigenschaft des Tensorprodukts gibt es genau einen Ringhomomorphismus  $\tilde{\theta} : A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  mit  $\tilde{f}\tilde{\theta} = \tilde{p}_1$  und  $\tilde{g}\tilde{\theta} = \tilde{p}_2$ . Satz 2.13 liefert ein eindeutiges  $\theta : Z \rightarrow \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$  mit  $f = p_1\theta$  und  $g = p_2\theta$ .

2. Schritt: Seien  $X, Y$  beliebige  $S$ -Schemata und  $U \subset_o X$ . Wir nehmen an, dass das Faserprodukt  $X \times_S Y$  mit Projektionen  $p_1, p_2$  existiert. Wir zeigen, dass für die offene Teilmenge  $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$  stets  $p_1^{-1}(U) = U \times_S Y$  gilt.

Da  $p_1^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ , kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} p_1^{-1}(U) & \xrightarrow{p_2} & Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & S \end{array}$$

Sei  $Z$  ein  $S$ -Schema und Morphismen  $f : Z \rightarrow U$ ,  $g : Z \rightarrow Y$  gegeben, so dass  $(Z \xrightarrow{f} U \xrightarrow{i} X \rightarrow S) = (Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow S)$ . Nach der Universaleigenschaft von  $X \times_S Y$  existiert ein eindeutiges  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$  mit  $if = p_1\theta$  und  $g = p_2\theta$ . Insbesondere gilt  $\theta(Z) \subset p_1^{-1}(U)$ , also  $\theta : Z \rightarrow p_1^{-1}(U)$ . Somit erfüllt  $p_1^{-1}(U)$  die Universaleigenschaft von  $U \times_S Y$ .

3. Schritt: Seien  $X, Y$   $S$ -Schemata und  $\{X_i\}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Wir nehmen an, dass alle Faserprodukte  $X_i \times_S Y$  mit Projektionen  $p_{1i}, p_{2i}$  existieren. Wir zeigen, dass in diesem Fall auch  $X \times_S Y$  existiert.

Setze  $X_{ij} = X_i \cap X_j$  und  $U_{ij} = p_{1i}^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_S Y$ . Nach Schritt 2 folgt nun  $U_{ij} = X_{ij} \times_S Y$ . Wegen Eindeutigkeit existieren nun Isomorphismen  $\varphi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$  mit  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ ,  $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$  und  $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$  auf  $U_{ij} \cap U_{jk}$ . Mithilfe 2.11 verkleben wir die  $X_i \times_S Y$  via  $\varphi_{ij}$  und erhalten so ein Schema  $Z$  mit Morphismen  $\psi_j : X_j \times_S Y \rightarrow Z$ , die Isomorphismen auf einem offenen Unterschema induzieren. Seien  $p_1, p_2$  die Morphismen, die durch Verkleben der  $p_{1i}$  bzw.  $p_{2i}$  entstehen, siehe Lemma 3.19. Wir zeigen nun, dass  $Z$  gerade das Faserprodukt  $X \times_S Y$  mit Projektionsmorphismen  $p_1, p_2$  ist.

Es gilt  $Z = \bigcup_j \psi_j(X_j \times_S Y)$ . Also folgt die Kommutativität des zweiten Diagramms aus dem ersten:

$$\begin{array}{ccc} X_j \times_S Y & \xrightarrow{p_{1j}} & X_j \\ p_{2j} \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

Sei nun  $Z'$  ein weiteres  $S$ -Schema und  $f : Z' \rightarrow X$ ,  $g : Z' \rightarrow Y$  gegeben, die über  $S$  gleich sind. Setze  $Z'_i = f^{-1}(X_i)$  für alle  $i$ . Zu jedem  $i$  existiert genau ein Morphismus  $\theta_i : Z'_i \rightarrow X_i \times_S Y \hookrightarrow Z$  mit  $f|_{Z'_i} = p_{1i} \circ \theta_i$  und  $g|_{Z'_i} = p_{2i} \circ \theta_i$ . Es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X_i \times_S Y & \hookrightarrow & Z \\ p_{1i} \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X_i & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Es gilt  $Z'_i \cap Z'_j = f^{-1}(X_i \cap X_j) = f^{-1}(X_{ij})$  und daher  $f|_{Z'_i \cap Z'_j} = p_{1i} \circ \theta_i|_{Z'_i \cap Z'_j} = p_{1j} \circ \theta_j|_{Z'_i \cap Z'_j}$ , entsprechend für  $g$ . Wegen Eindeutigkeit folgt  $\theta_i|_{Z'_i \cap Z'_j} = \theta_j|_{Z'_i \cap Z'_j}$ . Daher können wir die  $\theta_i$  zu einem Morphismus  $\theta : Z' \rightarrow Z$  verkleben mit  $f = p_1 \theta$  und  $g = p_2 \theta$ .  $\theta$  ist eindeutig, da  $\theta|_{Z'_i} = \theta_i$  und alle  $\theta_i$  eindeutig sind.

4. Schritt: Seien  $X, Y$   $S$ -Schemata und  $S$  affin. Wir zeigen, dass  $X \times_S Y$  existiert.

Seien  $X = \bigcup_i X_i$  und  $Y = \bigcup_j Y_j$  offene affine Überdeckungen. Nach Schritt 1 existieren  $X_i \times_S Y_j$  für alle  $i, j$ . Nach Schritt 3 existieren  $X \times_S Y_j$  für alle  $j$ . Wegen Symmetrie, existiert somit  $X \times_S Y$  nach Schritt 3.

5. Schritt: Seien  $X, Y$   $S$ -Schemata mit  $S$  beliebig. Wir zeigen, dass  $X \times_S Y$  existiert.

Seien  $q : X \rightarrow S$  und  $r : Y \rightarrow S$  die Strukturmorphismen und  $S = \bigcup_i S_i$  eine offene affine Überdeckung. Setze  $X_i = q^{-1}(S_i)$  und  $Y_i = r^{-1}(S_i)$ . Nach Schritt 4 existieren  $X_i \times_{S_i} Y_i$ . Wir zeigen, dass  $X_i \times_{S_i} Y_i$  die Universaleigenschaft von  $X_i \times_S Y$  erfüllt.

Seien  $f : Z \rightarrow X_i$  und  $g : Z \rightarrow Y$  gegeben, die über  $S$  gleich sind. Dann gilt  $rg(Z) = qf(Z) \subset q(X_i) \subset S_i$ , also  $g(Z) \subset Y_i$ . Wir erhalten kommutatives Diagramm:



Es existiert genau ein  $\theta : Z \rightarrow X_i \times_{S_i} Y_i$  mit  $f = p_1\theta$  und  $g = p_2\theta$ . Somit existieren auch  $X_i \times_S Y$ . Nach Schritt 3 existiert auch  $X \times_S Y$ .  $\square$

**Lemma 3.20.** Seien  $X, Y$   $S$ -Schemata mit Strukturmorphismen  $\xi : X \rightarrow S$ ,  $\eta : Y \rightarrow S$  und  $U, V, W$  offen in  $X, Y$  bzw.  $S$ , so dass  $\xi(U) \subset W$  und  $\eta(V) \subset W$ . Ferner seien  $p_1, p_2$  die Projektionsmorphismen von  $X \times_S Y$ . Dann gibt es einen  $S$ -Schemaisomorphismus:

$$p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \cong U \times_W V = U \times_S V$$

**Beweis.**  $E = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$  ist offenes Unterschema von  $X \times_S Y$ . Die Projektionsmorphismen von  $X \times_S Y$  induzieren  $p_1 : E \rightarrow U$ ,  $p_2 : E \rightarrow V$ . Sei  $Z$  ein  $W$ -Schema und Morphismen  $\varphi : Z \rightarrow U$ ,  $\psi : Z \rightarrow V$  gegeben, die über  $W$  gleich sind. Wir erhalten Morphismen  $\varphi' : Z \rightarrow U \hookrightarrow X$ ,  $\psi' : Z \rightarrow V \hookrightarrow Y$ , die über  $S$  gleich sind. Es existiert einen eindeutigen Morphismus  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$  mit  $\varphi' = p_1\theta$  und  $\psi' = p_2\theta$ . Nun gilt  $\theta(Z) \subset E$ , da  $p_1\theta(Z) = \varphi'(Z) \subset U$  und  $p_2\theta(Z) = \psi'(Z) \subset V$ . Somit ist  $\theta : Z \rightarrow E$  mit  $\varphi = p_1\theta$ ,  $\psi = p_2\theta$ . Es folgt  $E \cong U \times_W V$ . Da  $W$  beliebig war, folgt auch  $E \cong U \times_S V$ .  $\square$

**Definition.** Ein *Unterschema*  $Y$  eines Schemas  $X$  ist ein abgeschlossenes Unterschema eines offenen Unterschemas von  $X$ . Mit anderen Worten haben wir eine abgeschlossene Immersion  $\phi$  und eine offene Immersion  $\psi$ :

$$Y \xrightarrow{\phi} U \xrightarrow{\psi} X$$

Ein Morphismus  $i : Y \rightarrow X$  heißt *Immersion*, wenn  $i$  einen Isomorphismus von  $Y$  auf ein Unterschema in  $X$  induziert.

**Satz 3.21.** Seien  $X, Y, Z$   $S$ -Schemata und  $W$  ein  $Z$ -Schema. Dann gilt:

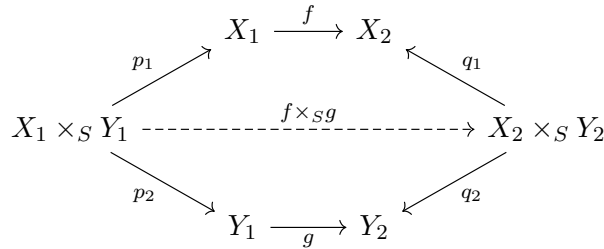
- (i)  $X \times_S S \cong X$
- (ii)  $X \times_S Y \cong Y \times_S X$
- (iii)  $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$
- (iv)  $(X \times_S Z) \times_Z W \cong X \times_S W$
- (v)  $(X \times_S Y) \times_S Z \cong (X \times_S Z) \times_Z (Y \times_S Z)$
- (vi) Ist  $\sigma : S \rightarrow T$  eine Immersion, so ist  $X \times_S Y \cong X \times_T Y$ .

**Beweis.** (i) bis (v) folgen direkt aus der Universaleigenschaft des Faserprodukts. Für (vi) seien  $\varphi : Z \rightarrow X$ ,  $\psi : Z \rightarrow Y$  Morphismen über  $T$  und  $\xi : X \rightarrow S$ ,  $\eta : Y \rightarrow S$  die Strukturmorphismen. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:



Wegen der Injektivität von  $\sigma$ , folgt aus  $\sigma\xi\varphi = \sigma\eta\psi$  stets  $\xi\varphi = \eta\psi$ . Es existiert ein eindeutiges, kompatibles  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$ . Somit erfüllt  $X \times_S Y$  die Universaleigenschaft von  $X \times_T Y$ .  $\square$

**Definition 3.22.** Seien  $f : X_1 \rightarrow X_2$  und  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$   $S$ -Morphismen mit kommutativen Diagramm:



Es existiert genau ein Morphismus  $f \times_S g : X_1 \times_S Y_1 \rightarrow X_2 \times_S Y_2$  mit  $fp_1 = q_1(f \times_S g)$  und  $gp_2 = q_2(f \times_S g)$ .

**Definition 3.23.** Sei  $f : X \rightarrow S$  ein Morphismus von Schemata. Für ein Morphismus  $g : T \rightarrow S$  erhält man ein  $T$ -Schema  $X_T = X \times_S T$  mit:

$$\begin{array}{ccc} X_T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Man sagt, dass  $X_T$  durch *Basiswechsel* von  $X$  über  $S$  durch  $T$  erhalten bleibt.

**Lemma 3.24.** Sei  $U \subset S$  ein offenes Unterschema. Dann gilt für den Basiswechsel  $X_U$  von  $f : X \rightarrow S$ :

$$X_U = X \times_S U \cong f^{-1}(U)$$

**Beweis.** Nach Satz 3.21 (i) ist die Projektion  $p_1 : X \times_S S \xrightarrow{\sim} X$  ein Isomorphismus. Sei in Lemma 3.20  $Y = S$  und setze  $f = p_2 : X \rightarrow S$ . Wir erhalten:

$$f^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(U) \cong X \times_S U \quad \square$$

**Definition.** Sei  $\mathcal{P}$  eine Eigenschaft eines Morphismus'  $f : X \rightarrow S$ . Man sagt, dass  $\mathcal{P}$  bei Basiswechsel *erhalten* bleibt, wenn  $f_T : X_T \rightarrow T$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  besitzt für alle Morphismen  $g : T \rightarrow S$ .

**Bemerkung.** Hat  $f : X \rightarrow S$  eine Eigenschaft  $\mathcal{P}$ , die stabil unter Basiswechsel ist, so hat insbesondere  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  für alle offenen  $U \subset S$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ .

**Satz 3.25.**

- (i) Die Eigenschaft (abgeschlossene, offene) Immersion zu sein bleibt bei Basiswechsel erhalten.
- (ii) Die Eigenschaft von endlichem Typ zu sein bleibt stabil unter Basiswechsel.

**Beweis.** Wird ausgelassen.

**Bemerkung.** Irreduzibilität, Reduziertheit und Integrität bleiben unter Basiswechsel nicht notwendig erhalten.

**Lemma 3.26.** Sei  $\psi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus, so dass  $\alpha(\psi) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  eine abgeschlossene Immersion ist. Sei ferner  $C$  ein beliebiger Ring. Dann ist  $\alpha(\psi \otimes \text{id}_C) : \text{Spec}(B \otimes_A C) \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_A C) = \text{Spec}(C)$  eine abgeschlossene Immersion, wobei  $\alpha$  die Abbildung aus Satz 2.13 bezeichnet.

**Beweis.** Da  $\tilde{\psi} = \alpha(\psi)$  eine abgeschlossene Immersion ist, ist  $\tilde{\psi}^\# : \mathcal{O}_A \rightarrow \tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B$  surjektiv.  $\tilde{\psi}$  ist Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge, daher ist  $(\tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B)_{\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{B,\mathfrak{p}}$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$ . Nach Beispiel 3.12 ist die auf den Halmen induzierte Abbildung  $\tilde{\psi}_\mathfrak{p}^\#$  surjektiv:

$$\tilde{\psi}_\mathfrak{p}^\# : A_{\psi^{-1}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{A,\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} \rightarrow (\tilde{\psi}_* \mathcal{O}_B)_{\tilde{\psi}(\mathfrak{p})} = B_\mathfrak{p}$$

Betrachte nun die exakte  $A$ -Modulsequenz  $A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow B/\psi(A) \rightarrow 0$ . Diese induziert unter  $-\otimes_A A_\mathfrak{q}$  für alle  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  die exakte Folge:

$$A_\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A A_\mathfrak{q} \rightarrow B/\psi(A) \otimes_A A_\mathfrak{q} \rightarrow 0$$

Sei das Bild von  $\tilde{\psi}$  von der Form  $V(\mathfrak{a}) \cong \text{Spec}(B)$  für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$ . Für ein Primideal  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  gilt:

$$\begin{aligned} B \otimes_A A_\mathfrak{q} \neq 0 &\iff \mathfrak{q} \in \text{supp}(B), \text{ wobei } B \text{ als } A\text{-Modul aufgefasst wird} \\ &\iff \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a} \\ &\iff \mathfrak{q} \in \text{im}(\tilde{\psi}) \\ &\iff \mathfrak{q} = \psi^{-1}(\mathfrak{p}) \text{ für ein } \mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \\ &\implies B/\psi(A) \otimes_A A_\mathfrak{q} = 0 \end{aligned}$$

Somit ist  $A_\mathfrak{q} \rightarrow B \otimes_A A_\mathfrak{q}$  surjektiv für alle  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ . Es folgt die Surjektivität von  $\psi$ . Wir erhalten unter  $-\otimes_A C$  die surjektive Abbildung  $C \rightarrow B \otimes_A C$ . Nach Beispiel 3.12 folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 3.27.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus und  $Y = \bigcup_\lambda Y_\lambda$  eine offene Überdeckung. Dann ist  $f$  genau dann eine (abgeschlossene, offene) Immersion, wenn  $f_\lambda = f|_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  mit  $X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$  die Eigenschaft hat.

**Beweis.** Kein Beweis.

**Bemerkung 3.28.** Sind  $Y_1, Y_2$  Unterschemata von  $X$ , so ist  $Y_1 \times_X Y_2 \rightarrow X$  ein Unterschema von  $X$ , d.h. eine Immersion.

**Definition 3.29.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein  $S$ -Morphismus von  $S$ -Schemata. Der Morphismus  $\Gamma_f = (\text{id}_X, f)_S : X \rightarrow X \times_S Y$  heißt  $S$ -Graph von  $f$  und  $\Gamma_f(X)$  heißt Graph von  $f$ . Ist  $f = \text{id}_X$  die Identität, so heißt  $\Delta_{X/S} = \Gamma_{\text{id}_X}$  der *Diagonalmorphismus*.

**Satz 3.30.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein  $S$ -Morphismus von  $S$ -Schemata.

- (i) Sind  $Y$  und  $S$  affine Schemata, so ist  $\Gamma_f$  eine abgeschlossene Immersion. Insbesondere ist für  $X, S$  affin  $\Delta_{X/S}$  eine abgeschlossene Immersion.
- (ii)  $\Gamma_f$  ist allgemein eine Immersion.



**Beweis.**

- (i) Sei  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  eine offene affine Überdeckung und  $X \times_S Y$  das Faserprodukt. Nach Lemma 3.24 ist  $p_1^{-1}(X_{\alpha}) \cong X_{\alpha} \times_S Y$  affin. Da  $p_1 \circ \Gamma_f = \text{id}_X$ , gilt  $\Gamma_f^{-1}(p_1^{-1}(X_{\alpha})) = X_{\alpha}$ . Da  $\Gamma_f : \bigcup_{\alpha} \Gamma_f^{-1}(X_{\alpha} \times_S Y) \rightarrow \bigcup_{\alpha} (X_{\alpha} \times_S Y) = X \times_S Y$ , können wir nach Lemma 3.27 o.B.d.A. annehmen, dass  $X$  affin ist.

Sei also  $S = \text{Spec}(R)$ ,  $X = \text{Spec}(B)$  und  $Y = \text{Spec}(A)$ . Sei  $f$  induziert von  $\varphi : A \rightarrow B$  und  $\Gamma_f$  induziert von  $\psi : B \otimes_R A \rightarrow A$ ,  $b \otimes a \mapsto b\varphi(a)$ .  $\psi$  ist offensichtlich surjektiv, daher ist  $\Gamma_f$  nach Satz 2.19 (ii) eine abgeschlossene Immersion.

- (ii) Sei zunächst  $S$  affin und  $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$  eine offene affine Überdeckung. Setze  $X_{\alpha} = f^{-1}(Y_{\alpha})$ ,  $\Gamma_{f\alpha} = \Gamma_f|_{X_{\alpha}}$  und  $f_{\alpha} = f|_{X_{\alpha}} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$ . Es ist  $\Gamma_{f\alpha}(X_{\alpha}) \subset X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha}$  nach (i) ein abgeschlossenes Unterschema und  $X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha} \subset X \times_S Y_{\alpha}$  nach Satz 3.25 (i) ein offenes Unterschema ist. Nach (i) ist  $\Gamma_{f\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow X_{\alpha} \times_S Y_{\alpha}$  eine Immersion. Nach Lemma 3.27 ist auch  $\Gamma_f$  eine Immersion.

Sei nun  $S$  beliebig und  $S = \bigcup_{\lambda} S_{\lambda}$  eine offene affine Überdeckung. Nach Satz 3.21 (v) ist  $(X \times_S Y) \times_S S_{\lambda} = X_{\lambda} \times_{S_{\lambda}} Y_{\lambda}$ , wobei  $X_{\lambda} = X \times_S S_{\lambda}$  und  $Y_{\lambda} = Y \times_S S_{\lambda}$ . Ferner ist  $\Gamma_{f_{\lambda}}$  der Graph von  $f_{\lambda} : X_{\lambda} \rightarrow Y_{\lambda}$  eine Immersion. Nach Lemma 3.27 ist auch  $\Gamma_f$  eine Immersion.  $\square$

**Definition 3.31.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata und  $y \in Y$  ein Punkt mit Restklassenkörper  $\kappa(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}$ . Sei weiter  $i : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$  der natürliche Morphismus gegeben durch  $(y, \text{id}_{\kappa(y)})$  (siehe Satz 2.18). Dann heißt das Faserprodukt  $X_y = X \times_Y \text{Spec } \kappa(y)$  die *Faser* von  $f$  über dem Punkt  $y$ .

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{p_2} & \text{Spec } \kappa(y) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Satz.**  $X_y$  ist ein  $\kappa(y)$ -Schema mit  $f^{-1}(y)$  als unterliegender topologischer Raum.

**Beweis.** Es ist  $fp_1(X_y) = ip_2(X_y) = y$ , also folgt  $p_1(X_y) \subset f^{-1}(y)$  und somit  $X_y = p_1^{-1}(f^{-1}(y))$ . Sei  $V \subset_{\circ} X$  affin mit  $V \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$p_1^{-1}(V) = V_y \cong X \times_Y \text{Spec } \kappa(y) \times_X V = X_y \times_X V$$

Wir können somit o.B.d.A.  $X$  und  $Y$  als affin annehmen, sei also  $X = \text{Spec}(B)$ ,  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $y = \mathfrak{p}$ . Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  assoziiert zu  $f$ . Setze  $\varphi' : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B' = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} =$

$\varphi(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$ . Es gibt eine Folge von Homöomorphismen:

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(y) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} \\
 &\cong \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B') \mid \varphi'^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\} \\
 &\cong \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B') \mid \mathfrak{q} \supset (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})B'\} \\
 &= \operatorname{Spec}(B'/(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})B') \\
 &= \operatorname{Spec}(B' \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \\
 &= \operatorname{Spec}((B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \quad \square
 \end{aligned}$$

**Definition 3.32.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata, so dass  $f(X) \subset Y$  dicht liegt, und  $Y$  irreduzibel mit generischer Punkt  $\xi$  mit  $\xi \in f(X)$ . Dann heißt  $f^{-1}(\xi)$  *generische Faser* von  $f$ .

**Beispiel 3.33.** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und:

$$X = \operatorname{Spec} k[X, Y, t]/(tY - X^2), \quad Y = \operatorname{Spec} k[t]$$

Sei  $f : X \rightarrow Y$  gegeben durch die kanonische Abbildung  $\varphi : k[t] \rightarrow k[X, Y, t]/(tY - X^2)$ .  $X$  und  $Y$  sind integrale Schemata von endlichem Typ über  $k$ . Ferner ist  $f$  surjektiv, da  $\varphi$  injektiv ist (vgl. Satz 2.19 (ii)). Abgeschlossene Punkte von  $Y$  entsprechen  $k$ . Sei  $a \in Y$  ein abgeschlossener Punkt und betrachte die Faser:

$$X_a = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(a) = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(aY - X^2)$$

Im Fall  $a \neq 0$  ist  $X_a$  eine ebene Kurve in  $\mathbf{A}_k^2$ , die irreduzibel und reduziert ist. Für  $a = 0$  ist  $X_0 = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(X^2)$  die  $Y$ -Achse. Diese ist nicht reduziert.

## 2.4 Separierte & eigentliche Morphismen

**Definition 4.1.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.  $f$  heißt *separiert*, falls  $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$  eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall sagen wir auch, dass  $X$  über  $Y$  separiert ist.

Ein Schema  $X$  heißt *separiert*, falls  $X \rightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$  separiert ist.

**Beispiel 4.2.** Sei  $k$  ein Körper und  $X$  die affine Gerade über  $k$  mit doppeltem Nullpunkt wie in Beispiel 2.12. Dann ist  $X \times_k X$  die affine Ebene mit vierfachen Nullpunkt und  $\Delta(X)$  die gewöhnliche Diagonale, die zwei Nullpunkte besitzt.  $\Delta(X)$  ist nicht abgeschlossen, da  $\overline{\Delta(X)}$  vier Nullpunkte besitzt.

**Beispiel 4.3.** Ist  $V$  eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , so ist  $t(V)$  separiert über  $k$ . Dies werden wir später zeigen.

**Beispiel 4.4.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus affiner Schemata, so ist  $f$  separiert nach Satz 3.30 (i).

**Beispiel 4.5.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Immersion, so ist  $f$  separiert, da nach Satz 3.21 (vi)  $X \cong X \times_X X \cong X \times_Y X$  gilt, d.h.  $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X$  ist ein Isomorphismus.

**Satz 4.6.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata. Dann ist  $f$  genau dann separiert, wenn  $\Delta(X) \subset X \times_Y X$  abgeschlossen ist.

**Beweis.** Für die nicht-triviale Richtung sei  $\Delta(X) \subset X \times_Y X$  abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass  $X \rightarrow \Delta(X)$  ein Homöomorphismus ist, und dass der Morphismus  $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X$  surjektiv ist.

- Sei  $p_1 : X \times_Y X \rightarrow X$  die erste Projektion. Da  $p_1 \circ \Delta = \text{id}_X$ , induziert  $\Delta$  ein Homöomorphismus auf sein Bild.
- Sei  $P \in X$  und  $V \subset_o Y$  affin. Wähle  $U \subset_o X$  affin mit  $P \in U$  und  $f(U) \subset V$ . Dann ist  $U \times_V U$  eine offene, affine Umgebung von  $\Delta(P)$ . Nach Beispiel 4.4 ist  $\Delta : U \rightarrow U \times_V U$  eine abgeschlossene Immersion. Somit ist  $\mathcal{O}_{X \times_Y X}|_{U \times_V U} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_X|_U$  surjektiv.  $\square$

**Definition 4.7.** Ein Ring  $R$  heißt *Bewertungsring*, wenn  $R$  nullteilerfrei ist, wenn von der folgenden Form ist:

$$R = \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\}$$

wobei  $v : K^\times \rightarrow G$  eine Bewertung ist, d.h.  $v(xy) = v(x) + v(y)$  und  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ , und  $G$  eine total geordnete abelsche Gruppe ist.  $R$  ist dann lokaler Ring mit Maximalideal  $\mathfrak{m} = \{x \in K^\times \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$  und  $K = \text{Quot}(R)$ .

**Theorem 4.8.** (*Bewertungstheoretisches Kriterium für Separiertheit*) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata mit  $X$  noethersch. Es sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist separiert.
- (ii) Sei  $R$  ein Bewertungsring des Körpers  $K = \text{Quot}(R)$  und  $i : U = \text{Spec}(K) \hookrightarrow T = \text{Spec}(R)$  die kanonische Inklusion. Seien ferner Morphismen  $T \rightarrow Y$ ,  $U \rightarrow X$  derart gegeben, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dann gibt es höchstens eine Abbildung  $h : T \rightarrow X$ , die das obige Diagramm kommutativ macht. Mit anderen Worten: Die folgende kanonische Abbildung ist für jeden Bewertungsring  $R$  über  $Y$  injektiv:

$$\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(R), X) \rightarrow \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spec}(K), X), \quad h \mapsto h \circ i$$

**Definition 4.9.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Ein Punkt  $x' \in X$  heißt *Spezialisierung* von  $x$ , wenn  $x' \in \overline{\{x\}}$  gilt. Ist  $x''$  Spezialisierung von  $x'$  und  $x'$  Spezialisierung von  $x$ , so ist  $x''$  auch Spezialisierung von  $x$ .

Eine Teilmenge  $Z \subset X$  heißt *stabil unter Spezialisierungen*, falls mit  $x \in Z$  auch jede Spezialisierung in  $Z$  ist. Abgeschlossene Mengen sind stabil unter Spezialisierungen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Ein Morphismus von Schemata  $f$  heißt *quasikompakt*, falls es eine offene affine Überdeckung  $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$  existiert, so dass alle  $f^{-1}(Y_{\alpha})$  quasikompakt sind. Es gilt:

$$f \text{ quasikompakt} \iff \forall V \subset_{\circ} Y \text{ affin: } f^{-1}(V) \text{ quasikompakt}$$

**Satz 4.10.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein quasikompakter Morphismus von Schemata. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist abgeschlossen.
- (ii) Ist  $x \in X$  und  $y'$  eine Spezialisierung von  $y = f(x)$ , so gibt es eine Spezialisierung  $x'$  von  $x$  mit  $f(x') = y'$ . Mit anderen Worten:  $f(\overline{\{x\}})$  ist stabil unter Spezialisierungen für alle  $x \in X$ .

**Beweis.** (i)  $\implies$  (ii) ist trivial. Sei also  $X' \subset X$  abgeschlossen und setze  $Y' = \overline{f(X')}$ . Wir zeigen  $Y' = f(X')$ . Wir versehen  $X'$  und  $Y'$  mit der eindeutig bestimmten, reduzierte abgeschlossene Unterschemastruktur in  $X$  bzw.  $Y$ . Seien  $i : X' \hookrightarrow X$  und  $j : Y' \hookrightarrow Y$  die natürlichen Inklusionen. Das Urbildschema  $(f \circ i)^{-1}(Y')$  ist reduziert, besitzt  $X'$  als unterliegender topologischer Raum und ist als Schema gleich  $X'$ , da die reduzierte Unterschemastrukturen eindeutig sind. Somit existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $f' : X' \rightarrow Y'$ :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$f'$  erfüllt ebenfalls die Voraussetzung (ii). Ferner ist  $f'$  quasikompakt.  $i$  ist als abgeschlossene Immersion quasikompakt, also auch  $f \circ i = j \circ f' : X' \rightarrow Y$ . Unter Basiswechsel sehen wir, dass  $X' \times_Y Y' \rightarrow Y'$  quasikompakt ist. Da  $j$  eine Immersion ist, ist  $X' \cong X' \times_Y Y' = X' \times_Y Y'$ , also ist  $X' \rightarrow Y'$  quasikompakt.

Wir müssen noch zeigen: Ist  $f : X \rightarrow Y$  ein quasikompakter, dominanter Morphismus reduzierter Schema, welcher (ii) erfüllt, so ist  $f$  surjektiv. Sei dazu  $y' \in Y$  gegeben und  $y$  ein generischer Punkt der irreduziblen Komponente von  $Y$ , in der  $y'$  liegt. Somit ist  $y'$  eine Spezialisierung von  $y$ . Gilt nun  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , so gibt es ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ . Wegen (ii) gibt es eine Spezialisierung  $x'$  von  $x$  mit  $f(x') = y'$  und wir sind fertig. Somit ist noch das nächste Lemma zu zeigen.  $\square$

**Lemma 4.12.** Für einen quasikompakten Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist äquivalent:

- (i)  $f$  ist dominant.
- (ii) Für die generischen Punkte  $y$  von  $Y$  der irreduziblen Komponenten gilt  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ .

**Korollar 4.13.** Eine quasikompakte Immersion  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn  $f(X)$  in  $Y$  stabil unter Spezialisierungen ist.

**Beweis.**  $f$  faktorisiert in eindeutiger Weise in der Form  $X \xrightarrow{\sim} Z \xrightarrow{i} Y$ , wobei  $i$  die kanonische Inklusion des Unterschema  $Z \subset Y$  ist. Es ist  $i$  quasikompakt. Ist  $f(X) = Z$  stabil unter Spezialisierungen, ist (ii) in Satz 4.10 erfüllt, daher ist  $i : Z \rightarrow Y$  abgeschlossen und  $Z$  ein abgeschlossenes Unterschema in  $Y$ .  $\square$

**Lemma 4.14.** Sei  $R$  ein Bewertungsring eines Körpers  $K$  und  $T = \text{Spec}(R)$ ,  $U = \text{Spec}(K)$ . Sei  $X$  ein Schema. Dann gilt:

- (i)  $\text{Hom}(U, X)$  ist die Menge aller Paare  $(x, i)$  mit  $x \in X$  und Körperhomomorphismus  $i : \kappa(x) \hookrightarrow K$ , wobei  $\kappa(x)$  der Restklassenkörper in  $x$  bezeichnet.
- (ii)  $\text{Hom}(T, X)$  ist die Menge aller Tripel  $(x_0, x_1, i)$  mit  $x_0, x_1 \in X$ ,  $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$  und Körperhomomorphismus  $\kappa(x_1) \hookrightarrow K$ , so dass  $R$  über  $\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}$  dominiert, wobei  $\overline{\{x_1\}}$  mit der reduzierten Unterschemastruktur ausgestattet ist.

**Definition 4.15.** Seien  $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$  lokale Ringe, die in einem Körper  $K$  eingebettet sind. Wir sagen  $B$  dominiert  $A$ , wenn  $A \subset B$  und  $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$  gilt. Mit anderen Worten, wenn die natürliche Inklusion  $A \hookrightarrow B$  ein lokaler Homomorphismus ist.

**Beweis von Lemma 4.14.** (i) ist gerade Satz 2.18. Setze  $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$  und  $t_1 = (0) \in T$ . Für (ii) sei  $f : T \rightarrow X$  ein Morphismus. Setze  $x_i = f(t_i)$  und  $Z = \overline{\{x_1\}}$  mit der reduzierten Unterschemastruktur. Dann gilt  $f^{-1}(Z) = T$  als Mengen. Nach Regeln 2.21 (iii) faktorisiert  $f$  in der Form:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Z \end{array}$$

Beachte, dass für  $U \subset_o Z$  mit  $x_0 \in U$  auch  $x_1 \in U$  gilt. Das induziert  $\mathcal{O}_{Z,x_0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,x_1}$ , analog haben wir  $\mathcal{O}_{T,t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t_1}$ . Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{Z,x_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T,t_1} = K \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{O}_{Z,x_0} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{T,t_0} = R \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{m}_{Z,x_0} & \longrightarrow & \mathfrak{m}_{T,t_0}
 \end{array}$$

Da  $Z$  reduziert und irreduzibel ist, ist  $Z$  integer. Daher ist  $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1)$ , alle Abbildungen sind injektiv und wir sehen, dass  $R$  über  $\mathcal{O}_{Z,x_0}$  dominiert.

Sei umgekehrt  $x_0, x_1 \in X$  mit  $x_0 \in \overline{\{x_1\}} = Z$  und  $\mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$  ein lokaler Homomorphismus. Das induziert  $T = \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \rightarrow Z \rightarrow X$ . Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander.  $\square$

**Beweis zu Theorem 4.8.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata mit  $X$  noethersch.

- Sei zunächst  $f$  separiert und  $R$  ein Bewertungsring des Körpers  $K = \text{Quot}(R)$  mit Inklusion  $i : U = \text{Spec}(K) \hookrightarrow \text{Spec}(R) = T$ . Seien  $T \rightarrow Y$ ,  $U \rightarrow X$  gegeben und  $h_1, h_2 : T \rightarrow X$  mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow f \\
 T & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Setze  $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$  und  $t_1 = (0) \in T$ . Aus der Kommutativität  $h_1 i = h_2 i$  folgt insbesondere  $h_1(t_1) = h_2(t_1)$ . Setze  $h'' = (h_1, h_2)_Y : T \rightarrow X \times_Y X$ . Betrachte nun folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & X & & \\
 \downarrow i & & \downarrow \Delta & & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{h''} & X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\
 & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

$h_1 i$  (oben, von  $U$  nach  $X$ )  
 $h_2 i$  (unten, von  $T$  nach  $X$ )

Es gilt  $\{h''(t_1)\} = h''i(U) \subset \Delta(X)$ . Da  $f$  separiert ist, ist  $\Delta(X)$  abgeschlossen und es folgt  $h''(t_0) \in h''(\overline{\{t_1\}}) \subset \overline{\{h''(t_1)\}} \subset \Delta(X)$ . Es folgt:

$$h_1(t_0) = p_1 h''(t_0) = p_2 h''(t_0) = h_2(t_0)$$

Aus der Kommutativität folgt, dass  $h_1^\#$  und  $h_2^\#$  dieselbe Abbildung  $\kappa(x_1) \hookrightarrow K$  mit  $x_1 = h_1(t_1) = h_2(t_1)$  induzieren. Mit Lemma 4.14 (ii) folgt  $h_1 = h_2$ .

- Für die andere Richtung genügt es nach Satz 4.6 zu zeigen, dass  $\Delta(X) \subset X \times_Y X$  abgeschlossen ist. Nach Satz 3.30 (ii) ist  $\Delta$  eine Immersion. Da  $X$  noethersch ist, ist  $\Delta$  quasikompakt. Nach Korollar 4.13 genügt es zu zeigen, dass  $\Delta(X)$  stabil unter Spezialisierungen ist.

Sei also  $\xi_1 \in \Delta(X)$  und  $\xi_0 \in \overline{\{\xi_1\}}$ . Sei  $K = \kappa(\xi_1)$  und  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overline{\{\xi_1\}}, \xi_0}$ , wobei  $\overline{\{\xi_1\}}$  mit der reduzierten Unterschemastruktur versehen ist, d.h.  $\mathcal{O}$  ist ein lokaler Ring in  $K$ . Mit Satz 4.16 und dem Lemma von Zorn sehen wir, dass für jeden lokalen Ring  $\mathcal{O}$  in  $K$  einen Bewertungsring  $R$  gibt, der  $\mathcal{O}$  dominiert. Sei  $R$  ein solcher Bewertungsring. Nach 4.14 (ii) haben wir einen Morphismus  $h : T = \text{Spec}(R) \rightarrow X \times_Y X$  mit  $t_i \mapsto \xi_i$ , wobei  $t_0 = \mathfrak{m}_R \in T$ ,  $t_1 = (0) \in T$ . Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(K) & \xrightarrow{i} & T & \xrightarrow{p_1 h} & X \\
 & & \searrow h & & \downarrow p_1 \\
 & & & X \times_Y X & \downarrow p_2 \\
 & & \searrow p_2 h & & X \\
 & & & & \downarrow f \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

Ist  $x \in X$ , so ist  $\kappa(x) \cong \kappa(\Delta(x))$ , wegen:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times_Y X \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow p_i \\
 & & X
 \end{array}$$

Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\quad g \quad} & X \\
 & \searrow hi & \downarrow \Delta \\
 & & X \times_Y X
 \end{array}$$

Wähle ein  $x_1 \in X$  mit  $\Delta(x_1) = \xi_1$  und  $j : \kappa(x_1) \hookrightarrow K$  als den von  $hi$  induzierten  $\kappa(\Delta(x_1)) \hookrightarrow K$ . Nach Lemma 4.14 (i) erhalten wir den zu  $(x_1, j)$  passenden Morphismus  $g : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ , das das obige Diagramm kommutativ macht. Also faktorisiert  $\text{Spec}(K) \rightarrow X \times_Y X$  über  $\text{Spec}(K) \rightarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X$ , d.h.  $p_1 hi = p_2 hi$ . Nach Voraussetzung folgt  $p_1 h = p_2 h$ , d.h. auch  $T \rightarrow X \times_Y X$  faktorisiert über  $T \rightarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X$ . Somit folgt  $\xi_0 \in \Delta(X)$ .  $\square$

**Satz 4.16.** Sei  $K$  ein Körper und  $R \subset K$  ein lokaler Ring. Dann ist  $R$  genau dann ein Bewertungsring, wenn für jeden lokalen Ring  $R \subset S \subset K$  mit lokalem Homomorphismus  $R \hookrightarrow S$  stets  $R = S$  folgt.

**Beweis.** Siehe z.B. Bourbaki, Algebra VI §13.

**Satz 4.17.** Alle involvierten Schemata sind noethersch. Dann gilt:

- (i) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.
- (ii) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
- (iii) Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel.
- (iv) Sind  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f' : X' \rightarrow Y'$  separierte Morphismen von  $S$ -Schemata, so ist auch  $f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$  separiert.
- (v) Ist  $f \circ f'$  separiert, so ist auch  $f$  separiert.
- (vi)  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann separiert, wenn es eine offene Überdeckung  $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$  gibt, so dass alle  $f^{-1}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$  separiert sind.

**Beweis.** Folgt alles aus Theorem 4.8. □

**Definition 4.18.** Ein Morphismus von Schemata  $f : X \rightarrow Y$  heißt *eigentlich*, wenn gilt:

- (i)  $f$  ist von endlichem Typ.
- (ii)  $f$  ist separiert.
- (iii)  $f$  ist *universell abgeschlossen*, d.h. für jeden Morphismus  $Y' \rightarrow Y$  ist der Morphismus  $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  abgeschlossen.

In diesem Fall heißt  $X$  auch *eigentlich über  $Y$* .

**Beispiel 4.19.** Sei  $k$  ein Körper und  $X = \mathbf{A}_k^1$  die affine Gerade. Dann ist  $X$  separiert und von endlichem Typ. Basiserweiterung mit  $X \rightarrow k$  ergibt  $X \times_k X \rightarrow X$ , die Projektionsabbildung  $\mathbf{A}_k^2 \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ . Sei  $Y = \text{Spec}(k[X, Y]/(XY - 1))$  die hyperbolische Kurve in  $\mathbf{A}_k^2$ .  $Y \subset \mathbf{A}_k^2$ . Diese ist abgeschlossen in  $\mathbf{A}_k^2$  und projiziert sich in  $\mathbf{A}_k^1$  auf  $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$ , die in  $\mathbf{A}_k^1$  nicht abgeschlossen ist. Daher ist die Projektionsabbildung nicht abgeschlossen. In diesem Beispiel fehlt der unendliche Punkt von  $Y$ . Wir werden später zeigen, dass  $X$  eigentlich über  $k$  ist, wenn  $X$  eine sogenannte projektive Varietät.





Wir erhalten ein  $\theta : U \rightarrow X_T$ , so dass das obige Diagramm kommutiert. Sei  $\xi_1 \in X_T$  das Bild des einzigen Punktes  $t_1 \in U$  und  $Z = \overline{\{\xi_1\}} \subset X_T$  mit der reduzierten Unterschemastruktur. Da  $f$  universell abgeschlossen ist, ist  $f'$  abgeschlossen, somit ist  $f'(Z) \subset T$  abgeschlossen. Da  $f'(\xi_1) = t_1$  und  $t_1$  der generische Punkt von  $T$  ist, gilt  $f'(Z) = T$ . Es existiert also ein  $\xi_0 \in Z$  mit  $f'(\xi_0) = t_0$ , wobei  $t_0$  der abgeschlossene Punkt in  $T$  ist.

Betrachte den zu  $f'$  gehörigen lokalen Homomorphismus  $R \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z, \xi_0}$ . Da  $\xi_1$  der generische Punkt von  $Z$  ist, gilt  $\kappa(\xi_1) = \mathcal{O}_{Z, \xi_1}$  und nach Lemma 4.14 (i) erhalten wir  $\kappa(\xi_1) \subset K$ , der durch  $U \rightarrow Z$  induziert wird. Nach Satz 4.16 ist  $R$  als Bewertungsring maximal unter allen lokalen Ringen in  $K$  bzgl. Dominanz. Ferner gilt  $\mathcal{O}_{Z, \xi_0} \subset \mathcal{O}_{Z, \xi_1} = \kappa(\xi_1) \subset K$  und  $\mathcal{O}_{Z, \xi_0} \subsetneq K$ , da  $\xi_0 \neq \xi_1$ . Wegen  $f'(\xi_0) = t_0$  dominiert  $\mathcal{O}_{Z, \xi_0}$  den Ring  $R$ , d.h.  $R \cong \mathcal{O}_{Z, \xi_0}$ , insbesondere dominiert  $R$  über  $\mathcal{O}_{Z, \xi_0}$ . Nach Lemma 4.14 (ii) erhalten wir Morphismus  $h' : T \cong \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z, \xi_0}) \rightarrow X_T$ ,  $t_i \mapsto \xi_i$ . Wir erhalten  $h : T \xrightarrow{h'} X_T \xrightarrow{p_1} X$  mit  $fh = fp_1h' = tf'h' = t$  und  $hi = p_1h'i = p_1h'f'\theta = p_1\theta = u$ .

- Es gelte (ii).  $f$  ist nach Voraussetzung von endlichem Typ und separiert nach Theorem 4.8. Sei also  $Y' \rightarrow Y$  ein Morphismus und  $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  die Basiserweiterung von  $f$ . Wir zeigen, dass  $f'$  abgeschlossen ist. Sei  $Z \subset X'$  abgeschlossen mit der reduzierten Unterschemastruktur. Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \hookrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Da  $f$  von endlichem Typ ist, ist nach Satz 3.25 (ii) auch  $f'$  von endlichem Typ. Es folgt, dass  $f'|_Z : Z \rightarrow Y'$  von endlichem Typ ist und somit quasikompakt.  $f'|_Z$  faktorisiert über  $Z \rightarrow f'(Z) \hookrightarrow Y'$ . Wir sehen, dass  $f'(Z) \hookrightarrow Y'$  quasikompakt ist. Nach Korollar 4.13 genügt es zu zeigen, dass  $f'(Z)$  stabil unter Spezialisierungen ist.

Sei also  $z_1 \in Z$  und  $y_1 = f'(z_1)$ ,  $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ . Wir versehen  $\overline{\{y_1\}}$  mit der reduzierten Unterschemastruktur. Sei  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overline{\{y_1\}}, y_0}$ . Dann ist  $\text{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \hookrightarrow \kappa(z_1) =: K$ . Sei  $R$  ein Bewertungsring von  $K$ , der  $\mathcal{O}$  dominiert. Nach Lemma 4.14 haben wir Morphismen:

$$U = \text{Spec}(K) \rightarrow Z, \quad t_1 \mapsto z_1$$

$$T = \text{Spec}(R) \rightarrow Y', \quad t_i \mapsto y_i$$

Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & Z & \hookrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & & \searrow & \downarrow f' & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\quad} & & & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein Morphismus  $h : T \rightarrow X$ , der das Diagramm kommutativ macht. Aus der Universaleigenschaft des Faserprodukts  $X'$  erhalten wir ein Morphismus  $h' : T \rightarrow X'$ , der  $h : T \rightarrow X$  liftet. Nach Voraussetzung ist  $Z$  abgeschlossen und da der generische Punkt  $t_1 \in T$  auf  $z_1 \in X'$  abgebildet wird, faktorisiert  $h' : T \rightarrow X'$  über  $h' : T \rightarrow Z \rightarrow X'$ . Setze  $z_0 = h'(t_0) \in Z$ . Dann ist  $f'(z_0) = y_0$ , also  $y_0 \in f'(Z)$ .  $\square$

**Korollar 4.22.** Alle vorkommenden Schemata seien noethersch.

- (i) Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich.
- (ii) Kompositum zweier eigentlicher Morphismen ist eigentlich.
- (iii) Eigentliche Morphismen sind stabil unter Basiserweiterung.
- (iv) Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $f' : X' \rightarrow Y'$  eigentliche Morphismen von  $S$ -Schemata. Dann ist  $f \times f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$  eigentlich.
- (v) Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  Morphismen. Ist  $g \circ f$  eigentlich und  $g$  separabel, so ist  $f$  eigentlich.
- (vi) Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann eigentlich, wenn es eine offene Überdeckung  $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$  gibt, so dass  $f^{-1}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$  für alle  $\alpha$  eigentlich ist.

**Beweis.** Wir zeigen nur (v). Da  $X$  noethersch ist, ist  $f$  quasikompakt. Nach Lemma 4.21 ist  $f$  von endlichem Typ. Nach Satz 4.17 ist  $f$  separiert. Sei nun  $R$  ein Bewertungsring und seien Morphismen  $U \rightarrow X$ ,  $T \rightarrow Y$  gegeben mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{t} & Y \\ & \searrow t' & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Wir wollen ein  $h : T \rightarrow X$  konstruieren mit  $fh = t$  und  $hi = u$ . Setze  $t' = gt$ . Da  $gf$  eigentlich ist, gibt es genau ein  $h : T \rightarrow X$  mit  $gf h = t'$  und  $hi = u$ . Sei  $t'' = fh$ . Nun ist  $g$  separabel und  $ti = fu = fhi = t''i$  und  $gt = t' = gfh = gt''$ . Nach Theorem 4.8 folgt  $t = t''$  und somit  $fh = t$ .  $\square$

Ist  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  der zugehörige Morphismus, so gilt:

$$\mathbf{P}_B^n \cong \mathbf{P}_A^n \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$$

Insbesondere gilt  $\mathbf{P}_A^n \cong \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} A$ .

**Definition 4.23.**

- (i) Sei  $Y$  ein Schema. Dann heißt  $\mathbf{P}_Y^n = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y$  der  $n$ -dimensionale projektive Raum über  $Y$ .
- (ii) Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  von Schemata heißt *projektiv*, wenn er eine Faktorisierung  $f : X \xrightarrow{i} \mathbf{P}_Y^n \xrightarrow{p_2} Y$  besitzt, wobei  $i$  eine abgeschlossene Immersion ist.
- (iii) Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  von Schemata heißt *quasiprojektiv*, falls er eine Faktorisierung der Form  $f : X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p} Y$  besitzt, wobei  $i$  eine offene Immersion und  $p$  projektiv ist.

**Theorem 4.24.** Ein projektiver Morphismus von noetherschen Schemata ist eigentlich. Ein quasiprojektiver Morphismus von noetherschen Schemata ist von endlichem Typ und separiert.

**Beweis.** Es reicht zu zeigen, dass  $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n$  eigentlich über  $\mathbb{Z}$  ist, da der Basiswechsel nach Korollar 4.22 (iii) eigentlich über  $Y$  ist. Ist  $f : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$  projektiv, so ist er als Verkettung von eigentlichen Morphismen wieder eigentlich, siehe Korollar 4.22. Ist  $f : X \hookrightarrow X' \rightarrow Y$  quasiprojektiv, so ist  $f$  als Verkettung separierter Morphismen separiert, siehe Korollar 4.17. Da  $X$  noethersch ist, ist  $X \hookrightarrow X'$  eine quasikompakte offene Immersion, also nach Lemma 4.21 (i) vom endlichem Typ.

Sei also  $X = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n$  und  $X = \bigcup V_i$  eine offene affine Überdeckung mit  $V_i = D_+(x_i) = \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ . Es ist also  $X$  von endlichem Typ. Sei nun  $R$  ein Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K = \text{Quot}(R)$  und  $U \rightarrow X$ ,  $T \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  Morphismen mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{t} & \text{Spec}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass genau ein Morphismus  $h : T \rightarrow X$  existiert, der das obige Diagramm kommutativ ergänzt. Für  $n = 0$  ist  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  und die Aussage ist klar. Sei  $n \geq 1$  und  $\xi_1$  das Bild des einzigen Punktes aus  $U$  in  $X$ . Ist  $\xi_1 \in X \setminus V_i$  für ein  $i$ , so folgt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung, da die Hyperebene  $X \setminus V_i$  isomorph zu  $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$  ist.

Sei also  $\xi_1 \in \bigcap V_i$ , d.h. alle Funktionen der Form  $\frac{x_i}{x_j}$  sind invertierbar in  $\mathcal{O}_{\xi_1}$ . Der Morphismus  $U \rightarrow X$  liefert Inklusion  $\kappa(\xi_1) \hookrightarrow K$ . Sei weiter  $f_{ij} \in K^\times$  das Bild von  $\frac{x_i}{x_j}$  unter  $\mathcal{O}_{\xi_1} \rightarrow \kappa(\xi_1) \hookrightarrow K$ . Dann folgt  $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$  für alle  $i, j, k$ . Sei  $v : K \rightarrow G$  die zu  $R$  gehörige Bewertung und setze  $g_i = v(f_{i0})$  für alle  $i$ . Sei  $k$  derart, dass  $g_k$  minimal unter  $g_0, \dots, g_n$  ist. Es gilt für alle  $i$ :

$$v(f_{ik}) = v(f_{i0}) - v(f_{k0}) = g_i - g_k \geq 0$$

Es folgt  $f_{ik} \in R$  für alle  $i$ . Es gibt Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\left[\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}\right] & \xrightarrow[\frac{x_i}{x_k} \mapsto f_{ik}]{\varphi} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\xi_1} & \longrightarrow \kappa(\xi_1) \longrightarrow & K \end{array}$$

Wir erhalten den zu  $\varphi$  gehörige Morphismus  $T \rightarrow V_k$  und somit  $h : T \rightarrow V_k \hookrightarrow X$ . Offensichtlich ist  $T \rightarrow X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  der Morphismus  $t$  und  $U \rightarrow T \rightarrow X$  der Morphismus  $u$ . Ferner ist  $h$  eindeutig nach Konstruktion.  $\square$

**Satz 4.25.** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Das Bild des Funktors  $t : \mathbf{Var}(k) \rightarrow \mathbf{Sch}(k)$  ist die Menge aller quasiprojektiven, integren Schemata über  $k$ . Insbesondere ist  $t(V)$  integer, separiert und von endlichem Typ für jede Varietät  $V$ .

**Beweis.** Ohne Beweis.

**Satz 4.26.** Sei  $X$  ein Schema von endlichem Typ über einem Körper  $k$ . Dann ist die Menge der abgeschlossenen Punkte in  $X$  dicht in  $X$ .

**Definition 4.27.** Eine (*abstrakte*) *Varietät* ist ein integrales, separiertes Schema  $X$  von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Ist  $X$  über  $k$  eigentlich, so heißt  $X$  *vollständig*. Quasiprojektive abstrakte Varietäten entsprechen den klassischen Varietäten.

**Bemerkung 4.28.**

- (i) Eine projektive, abstrakte Varietät ist vollständig nach Theorem 4.24.
- (ii) Es gibt vollständige Varietäten, die nicht projektiv sind, d.h. die Klasse der abstrakten Varietäten ist größer als die Klasse der klassischen Varietäten.
- (iii) Jede vollständige abstrakte Varietät der Dimension 1, d.h. eine vollständige Kurve, ist projektiv.
- (iv) Jede Varietät kann als offene Menge in eine vollständige Varietät eingebettet werden.

## 2.5 Modulgarben

**Definition 5.1.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum.

- (i) Eine *Garbe von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln* bzw.  *$\mathcal{O}_X$ -Modul* ist eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  derart, dass  $\mathcal{F}(U)$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul für alle  $U \subset_o X$  ist und alle  $\text{res} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ,  $V \subset U$  verträglich mit den Modulstrukturen via  $\text{res} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  ist.
- (ii) Ein *Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$*  von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln ist ein Garbenmorphismus, so dass  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus für alle  $U \subset_o X$  ist.
- (iii) Eine Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln heißt *exakt*, wenn sie exakt als Garbensequenz abelscher Garben ist.
- (iv) Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Moduln, so bezeichnet  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  die Gruppe der Morphismen von  $\mathcal{F}$  nach  $\mathcal{G}$ .
- (v) Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Moduln, so heißt die Garbe  $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  die *Hom-Garbe* und wird mit  $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  bezeichnet. Diese ist ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (vi) Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Dann heißt die zur Prägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  assoziierte Garbe das *Tensorprodukt* von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ . Diese wird mit  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  bezeichnet.
- (vii) Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  heißt *frei*, wenn  $\mathcal{F}$  isomorph zu einer direkten Summe von Exemplaren von  $\mathcal{O}_X$  ist.
- (viii) Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  heißt *lokal frei*, wenn  $X$  durch offene Mengen  $U$  überdeckt werden kann, so dass  $\mathcal{F}|_U$  freier  $\mathcal{O}_X|_U$ -Modul ist.

Der *Rang*  $r$  von  $\mathcal{F}$  auf  $U$  ist gerade die Anzahl der Kopien von  $\mathcal{O}_X|_U$ . Wir schreiben  $\text{rang}(\mathcal{F}|_U) = r$ . Ist  $X$  zusammenhängend, so ist dieser Rang überall gleich.

- (ix) Ein lokal freier  $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang 1 heißt *invertierbare Garbe*.
- (x) Eine *Idealgarbe* auf  $X$  ist ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{I}$ , der Untergarbe von  $\mathcal{O}_X$  ist, d.h.  $\mathcal{I}(U)$  ist ein Ideal von  $\mathcal{O}_X(U)$  für  $U \subset_o X$ .
- (xi) Sei  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  ein Morphismus von geringten Räumen und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist  $f_*\mathcal{F}$  ein  $f_*\mathcal{O}_X$ -Modul und somit auch ein  $\mathcal{O}_Y$ -Modul unter dem Garbenmorphismus  $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ .  $f_*\mathcal{F}$  heißt *direktes Bild* von  $\mathcal{F}$  unter  $f$ .  
Sei  $\mathcal{G}$  ein  $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Dann ist  $f^{-1}\mathcal{G}$  ein  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul. Betrachte das Bild  $\theta$  von  $f^\sharp$  unter dem Adjunktionsisomorphismus  $\text{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ . Durch  $\theta$  wird  $\mathcal{O}_X$  zu einem  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul. Wir definieren:

$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

Somit ist  $f^*\mathcal{G}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul, das *Urbild* von  $\mathcal{G}$  unter  $f$ .

Für jeden  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{O}_Y$ -Modul  $\mathcal{G}$  gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Somit ist  $f^*$  linksadjungiert zu  $f_*$ .

**Bemerkung.**

- (i) Kern, Bild und Kokern eines Morphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln ist wieder ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (ii) Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$   $\mathcal{O}_X$ -Moduln und  $\mathcal{F}'$  eine Untergarbe von  $\mathcal{F}$ , so ist  $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (iii) Direkte Summen, direkte Produkte und projektive Limiten von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln sind wieder  $\mathcal{O}_X$ -Moduln.

**Definition.** Sei  $A$  ein Ring und  $M$  ein  $A$ -Modul. Wir definieren die zu  $M$  assoziierte Garbe  $\widetilde{M}$  auf  $\text{Spec}(A)$  wie folgt: Für  $U \subset_o \text{Spec}(A)$  setzen wir  $\widetilde{M}(U)$  als die Menge aller Abbildungen  $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$ , so dass:

- (i) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gilt  $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ .
- (ii) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathfrak{p}$  mit  $V \subset U$  und Elemente  $m \in M, f \in A$ , so dass für alle  $\mathfrak{q} \in V$  stets  $f \notin \mathfrak{q}$  und  $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_{\mathfrak{q}}$  gilt.

Dann ist  $\widetilde{M}$  mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe.

**Satz 5.2.** Sei  $A$  ein Ring und  $M$  ein  $A$ -Modul mit der assoziierten Garbe  $\widetilde{M}$  auf  $X = \text{Spec}(A)$ . Dann gilt:

- (i)  $\widetilde{M}$  ist ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (ii) Für jedes  $\mathfrak{p} \in X$  gilt für den Halm von  $\widetilde{M}$  in  $\mathfrak{p}$  stets  $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$ .
- (iii) Für alle  $f \in A$  gibt es einen  $A_f$ -Modulisomorphismus  $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ .
- (iv) Insbesondere gilt  $\Gamma(X, \widetilde{M}) \cong M$ .

**Beweis.** (i) ist klar. (iv) folgt aus (iii) mit  $f = 1$ . (ii) und (iii) gehen analog zu 2.3.  $\square$

**Satz 5.3.** Sei  $A$  ein Ring und  $X = \text{Spec}(A)$ . Ferner sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  der entsprechende Morphismus. Dann gilt:

- (i) Die Abbildung  $M \mapsto \widetilde{M}$  liefert einen exakten, volltreuen Funktor von der Kategorie der  $A$ -Moduln in die Kategorie der  $\mathcal{O}_X$ -Moduln.
- (ii) Seien  $M, N$   $A$ -Moduln. Dann gilt  $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ .
- (iii) Sei  $(M_i)_i$  eine Familie von  $A$ -Moduln. Dann gilt  $\widetilde{\bigoplus_i M_i} \cong \bigoplus_i \widetilde{M_i}$ .
- (iv) Sei  $N$  ein  $B$ -Modul. Dann gilt  $f_* \widetilde{N} \cong \widetilde{{}_A N}$ , wobei  ${}_A N$  den Modul  $N$  als  $A$ -Modul via  $\varphi$  bezeichnet.
- (v) Sei  $M$  ein  $A$ -Modul. Dann gilt  $f^* \widetilde{M} \cong \widetilde{M \otimes_A B}$ .

**Beweis.** Für (i) zeigen wir:

- *Funktorialität:* Sei  $\psi : M \rightarrow N$  ein  $A$ -Modulhomomorphismus. Dieser induziert für alle  $f \in A$  einen  $A_f$ -Modulhomomorphismus  $\psi_f : M_f \rightarrow N_f$ . Ist  $D(f) \supset D(g)$ , so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\psi_f} & N_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_g & \xrightarrow{\psi_g} & N_g \end{array}$$

Da  $D(f)$ ,  $f \in A$  eine Basis der Topologie bilden, induzieren  $\psi_f$ ,  $f \in A$  einen  $\tilde{A}$ -Homomorphismus  $\tilde{\psi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$  mit  $\tilde{\psi}|_{D(f)} = \psi_f$ .

- *Volltreu:* Die Umkehrabbildung zu  $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$  ist gegeben durch das Bilden der globalen Schnitte:

$$\text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N}) \rightarrow \text{Hom}_A(\Gamma(X, \tilde{M}), \Gamma(X, \tilde{N})) = \text{Hom}_A(M, N)$$

- *Exaktheit:* Sei  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von  $A$ -Moduln. Da Lokalisierungen exakt sind, ist  $0 \rightarrow M'_p \rightarrow M_p \rightarrow M''_p \rightarrow 0$  exakt. Nach Satz 5.2 (ii) ist  $\tilde{M}_p = M_p$ . Da jede Halmsequenz exakt ist, folgt nach 1.10 die Exaktheit von  $0 \rightarrow \tilde{M}' \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'' \rightarrow 0$ .

(ii) und (iii) folgen, da direkte Summen und Tensorprodukte mit Lokalisierungen kommutieren. Für (iv) sei  $g \in A$ . Es gilt:

$$\Gamma(D(g), f_* \tilde{N}) = \Gamma(f^{-1}(D(g)), \tilde{N}) = \Gamma(D(\varphi(g)), \tilde{N}) \cong N_{\varphi(g)} = N_g \cong \Gamma(D(g), \tilde{N})$$

Für (v) sei  $N$  ein  $B$ -Modul. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\tilde{B}}(f^* \tilde{M}, \tilde{N}) &= \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, f_* \tilde{N}) \stackrel{(iv)}{=} \text{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \widetilde{AN}) \\ &= \text{Hom}_A(M, {}_A N) \stackrel{\star}{\cong} \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \cong \text{Hom}_{\tilde{B}}(\widetilde{M \otimes_A B}, \tilde{N}) \end{aligned}$$

wobei  $\star$  durch die Abbildung  $\eta \mapsto (m \otimes b \mapsto \eta(m)b)$  gegeben ist. □

#### Definition 5.4.

- (i) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  heißt *quasikohärent*, falls es eine offene affine Überdeckung  $U_i = \text{Spec}(A_i)$ ,  $i \in I$  von  $X$  gibt, so dass für jedes  $i$  ein  $A_i$ -Modul  $M_i$  existiert mit  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ .
- (ii)  $\mathcal{F}$  heißt *kohärent*, falls  $\mathcal{F}$  quasikohärent ist und alle vorkommenden  $M_i$  in (i) endlich erzeugte  $A_i$ -Moduln sind.



**Beispiel 5.5.** Für jedes Schema  $X$  ist  $\mathcal{O}_X$  kohärent, da  $\mathcal{O}_X|_{\mathrm{Spec}(A)} = \widetilde{A}$ .

**Beispiel 5.6.** Sei  $X = \mathrm{Spec}(A)$  affin und  $Y \subset X$  ein abgeschlossenes Unterschema, das durch das Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$  definiert ist. Sei  $i : Y \hookrightarrow X$  die natürliche Inklusion. Es ist  $\mathcal{O}_Y \cong \widetilde{A/\mathfrak{a}}$  und somit  $i_*\mathcal{O}_Y = \widetilde{A/\mathfrak{a}}$ , wobei hier  $A/\mathfrak{a}$  als  $A$ -Modul aufgefasst wird. Somit ist  $i_*\mathcal{O}_Y$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul.

**Beispiel 5.7.** Sei  $X = \mathrm{Spec}(A)$  affin und  $U \subsetneq X$  mit der natürlichen Inklusion  $j : U \hookrightarrow X$ . Betrachte die Garbe  $j_!\mathcal{O}_U$ , die außerhalb  $U$  durch Null fortgesetzte Garbe von  $\mathcal{O}_U$ .  $j_!\mathcal{O}_U$  ist nicht quasikohärent:

Sei  $X$  irreduzibel und  $V = \mathrm{Spec}(A) \subsetneq X$  mit  $V \subsetneq U$ . Wäre  $j_!\mathcal{O}_U|_V \cong \widetilde{M}$  für einen  $A$ -Modul  $M$ , so ist  $(j_!\mathcal{O}_U|_V)(V) = M$ , aber  $(j_!\mathcal{O}_U|_V)(V) = 0$  und  $j_!\mathcal{O}_U|_V \neq 0$ .

**Lemma 5.8.** Sei  $X = \mathrm{Spec}(A)$  ein affines Schema,  $f \in A$  und  $\mathcal{F}$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul.

- (i) Sei  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  mit  $s|_{D(f)} = 0$ . Dann existiert ein  $n > 0$  mit  $f^n s = 0$ .
- (ii) Sei  $t \in \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ . Dann existiert ein  $n > 0$  und  $t' \in \mathcal{F}(X)$  mit  $f^n t = t'|_{D(f)}$ .

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, dass es eine Überdeckung der Form  $X = \bigcup_{i=1}^m D(g_i)$  gibt, so dass  $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$  für einen  $A_{g_i}$ -Modul  $M_i$ .

Da  $\mathcal{F}$  quasikohärent ist, existiert eine offene affine Überdeckung aus Mengen der Form  $V = \mathrm{Spec}(B)$  mit  $\mathcal{F}|_V = \widetilde{M}$  für einen  $B$ -Modul  $M$ . Wir schreiben  $V = \bigcup_{\text{gewisse } g \in A} D(g)$ . Die natürlichen Morphismen  $D(g) \hookrightarrow V$  liefern Ringhomomorphismen  $B \rightarrow A_g$ . Nach Satz 5.3 (v) ist  $\mathcal{F}|_{D(g)} \cong \widetilde{M \otimes_B A_g}$ . Da  $X$  affin und somit quasikompakt ist, kann  $X$  durch solche Mengen endlich überdeckt werden.

- (i) Setze  $s_i$  als das Bild von  $s|_{D(g_i)}$  unter  $\Gamma(D(g_i), \mathcal{F}) = \Gamma(D(g_i), \widetilde{M_i}) \cong M_i$ . Wegen  $D(fg_i) = D(f) \cap D(g_i)$  folgt nach Satz 5.2 (iii)  $\Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}) = (M_i)_f$ . Also ist  $s_i = 0$  in  $(M_i)_f$ . Nach Definition gibt es ein  $n_i \in \mathbb{N}$  mit  $f^{n_i} s_i = 0$  in  $M_i$ . Sei  $n$  das Maximum aller  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Dann folgt  $f^n s = 0$  aus der ersten Garbeneigenschaft.
- (ii) Betrachte die Einschränkungen  $t \in \Gamma(D(fg_i), \mathcal{F}) = (M_i)_f$ . Für alle  $i$  gibt es ein  $n_i \in \mathbb{N}$ , so dass  $f^{n_i} t = t_i|_{D(fg_i)}$  für ein  $t_i \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F}) = M_i$ . Sei  $n$  das Maximum aller  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Dann gibt es für alle  $i$  ein  $t_i \in \Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$  mit  $f^n t = t_i|_{D(fg_i)}$ . Auf  $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$  haben wir Schnitte  $t_i, t_j$  konstruiert, die auf  $D(fg_i g_j)$  übereinstimmen. Nach (i) gibt es ein  $m_{ij}$ , so dass  $f^{m_{ij}}(t_i - t_j) = 0$  auf  $D(g_i g_j)$  gilt. Sei  $m$  das Maximum aller  $m_{ij}$ , so dass  $f^m(t_i - t_j) = 0$  auf  $D(g_i g_j)$  für alle  $i, j$  gilt. Die lokalen Schnitte  $f^m t_i$  in  $\Gamma(D(g_i), \mathcal{F})$  verkleben sich somit zu einem globalen Schnitt  $t'$  von  $\mathcal{F}$  zusammen mit  $t'|_{D(f)} = f^{n+m} t$ .  $\square$

**Satz 5.9.** Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist  $\mathcal{F}$  genau dann quasikohärent, wenn für alle affinen  $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$  ein  $A$ -Modul  $M$  existiert mit  $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ .

Ist  $X$  noethersch, so ist  $\mathcal{F}$  genau dann kohärent, wenn für alle affinen  $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul  $M$  existiert mit  $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ .

**Lemma.** Sei  $X = \text{Spec}(A)$  affin,  $M$  ein  $A$ -Modul und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \rightarrow \text{Hom}_{\widetilde{A}}(\widetilde{M}, \mathcal{F}), \quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$$

ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung  $\theta \mapsto \Gamma(X, \theta)$ .

**Beweis von Satz 5.9.** Die Rückrichtungen der beiden Aussagen sind trivial. Sei  $U \subset_o X$  affin. Nach dem Beweis von Lemma 5.8 gibt es eine Basis der Topologie von  $U$ , bestehend aus affinen Teilmengen  $V_i$  derart, dass  $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \widetilde{N_i}$  mit einem Modul  $N_i$  ist. Somit ist  $\mathcal{F}|_U$  quasikohärent. Wir können somit o.B.d.A.  $X = U = \text{Spec}(A)$  als affin annehmen.

Setze  $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  und  $\alpha : \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}$  als das Bild von  $\text{id}_M$  unter der Abbildung im vorherigen Lemma. Wie im Beweis von Lemma 5.8 gezeigt, gibt es eine Überdeckung der Form  $X = \bigcup_{i=1}^n D(g_i)$  mit  $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$  für einen  $A_{g_i}$ -Modul  $M_i$ . Es gilt  $M_i = \mathcal{F}(D(g_i)) \cong M_{g_i}$  und wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X)_{g_i} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(D(g_i)) \\ \uparrow & \nearrow \text{res} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

Somit ist  $\alpha|_{D(g_i)}$  ein Isomorphismus für alle  $i$ . Da die  $D(g_i)$  ganz  $X$  überdecken, ist  $\alpha$  ein Isomorphismus.

Sei nun  $X$  zusätzlich noethersch. Dann sind die  $A_{g_i}$ -Moduln  $M_{g_i}$  endlich erzeugt. Wir zeigen, dass  $M$  endlich erzeugt ist. Da  $A$  noethersch ist, sind alle  $A_{g_i}$  noethersch. Also sind die endlich erzeugten  $A_{g_i}$ -Moduln  $M_{g_i}$  noethersch. Analog zu Satz 3.6 folgt  $M$  noethersch. Insbesondere ist  $M$  endlich erzeugt.  $\square$

**Korollar 5.10.** Sei  $A$  ein Ring und  $X = \text{Spec}(A)$ . Dann ist

$$\{\text{Kategorie der } A\text{-Moduln}\} \rightarrow \{\text{Kategorie der quasikohärenten } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}\}, \quad M \mapsto \widetilde{M}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit der Umkehrabbildung  $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ . Ist  $A$  noethersch, so geben dieselben Funktoren eine Kategorienäquivalenz zwischen den endlich erzeugten  $A$ -Moduln und den kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduln.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{F}$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Nach Satz 5.9 existiert ein  $A$ -Modul  $M$  mit  $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ . Nach Satz 5.2 (iv) ist  $\Gamma(X, \mathcal{F}) = M$ , also:

$$M \mapsto \widetilde{M} \mapsto \Gamma(X, \widetilde{M}) = M, \quad \mathcal{F} = \widetilde{M} \mapsto \Gamma(X, \widetilde{M}) = M \mapsto \widetilde{M} \quad \square$$

**Satz 5.11.** Sei  $X = \text{Spec}(A)$  ein affines Schema und sei  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln, wobei  $\mathcal{F}'$  quasikohärent ist. Dann ist die Sequenz der globalen Schnitte ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

**Beweis.** Da  $\Gamma(X, -)$  linksexakt ist, bleibt nur die Surjektivität von  $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'')$  zu zeigen. Sei  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$  gegeben. Für  $x \in X$  gibt es ein  $f \in A$  mit  $x \in D(f) \subset X$ , so dass  $s|_{D(f)}$  sich zu einem  $t \in \mathcal{F}(D(f))$  liftet. Wir zeigen nun, dass es ein  $r > 0$  existiert, so dass sich  $f^r s$  zu einem  $t'' \in \mathcal{F}(X)$  liftet.

Sei  $X = \bigcup_i D(g_i)$  eine endliche offene Überdeckung, so dass sich  $s|_{D(g_i)}$  zu einem  $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$  liftet. Auf  $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$  liften  $t_i, t \in \mathcal{F}(D(fg_i))$  beide  $s$ . Aus der Linksexaktheit von  $\Gamma(D(fg_i), -)$  folgt  $t - t_i \in \mathcal{F}'(D(fg_i))$ . Da  $\mathcal{F}'$  quasikohärent ist, folgt aus Lemma 5.8 (ii) die Existenz eines  $n > 0$  und  $u_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$  mit  $u_i|_{D(fg_i)} = f^n(t - t_i)$ . Wir können  $n$  unabhängig von  $i$  wählen. Setze  $t'_i = f^n t_i + u_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ . Dann ist  $t'_i$  ein Lift von  $f^n s|_{D(g_i)}$  und  $\star t'_i = f^n t$  auf  $\mathcal{F}(D(fg_i))$ . Auf  $D(g_i g_j)$  liften  $t'_i$  und  $t'_j$  beide  $f^n s$ , also  $t'_i - t'_j \in \mathcal{F}'(D(g_i g_j))$  und daher  $t'_i = t'_j$  auf  $\mathcal{F}(D(fg_i g_j))$  wegen  $\star$ . Nach Lemma 5.8 (i) existiert ein  $m > 0$ , so dass  $f^m(t'_i - t'_j) = 0$  auf  $\mathcal{F}(D(g_i g_j))$ . Wir können  $m$  unabhängig von  $i, j$  wählen. Somit verkleben sich die  $f^m t'_i$  zu einem  $t'' \in \mathcal{F}(X)$  zusammen und  $t''$  ist ein Lift von  $f^{n+m} s$ .

Sei nun  $X = \bigcup_i D(f_i)$  eine endliche offene Überdeckung, so dass sich  $s|_{D(f_i)}$  zu einem Schnitt aus  $\mathcal{F}(D(f_i))$  liften lässt. Für alle  $i$  existiert ein  $n$  und ein Lift  $t_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  von  $f_i^n s$ . Wir können o.B.d.A.  $n$  unabhängig von  $i$  annehmen. Da  $X = \bigcup_i D(f_i)$ , gilt  $(f_1^n, \dots, f_k^n) = A$ , also  $1 = \sum_{i=1}^k a_i f_i^n$  für gewisse  $a_i \in A$ . Setze  $t = \sum_{i=1}^k a_i t_i \in \mathcal{F}(X)$ . Dann ist  $t$  ein Lift von  $\sum_{i=1}^k a_i f_i^n s = s \in \mathcal{F}''(X)$ .  $\square$

**Satz 5.12.** Sei  $X$  ein Schema.

- (i) Kern, Kokern und Bild eines Morphismus von quasikohärenten Garben ist wieder quasikohärent.
- (ii) Ist  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln und  $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$  quasikohärent, so ist  $\mathcal{F}$  quasikohärent.
- (iii) Ist  $X$  noethersch, so gilt (i) und (ii) auch für kohärente Garben.

**Beweis.** Da Quasikohärenz bzw. Kohärenz eine lokale Eigenschaft ist, können wir ohne Einschränkung  $X = \text{Spec}(A)$  als affin annehmen. Nach Korollar 5.10 gelten (i) und (ii) für Modulgarben der Form  $\widetilde{M}$ . Da  $M \mapsto \widetilde{M}$  nach 5.3 (i) ein exakter, volltreuer Funktor ist, folgt die Aussage über Kern, Kokern und Bild.

Sei nun  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln mit  $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$  quasikohärent. Nach Satz 5.11 ist die folgende Folge exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

Da  $M \mapsto \widetilde{M}$  ein exakter Funktor ist, folgt die Exaktheit von:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}')} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}'')} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile links und rechts sind nach Korollar 5.10 Isomorphismen. Nach dem 5er Lemma ist somit auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus und  $\mathcal{F}$  ist quasikohärent.

Sei nun  $X$  noethersch und  $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$  kohärent. Dann sind  $\Gamma(X, \mathcal{F}'), \Gamma(X, \mathcal{F}'')$  endlich erzeugt und somit auch  $\Gamma(X, \mathcal{F})$ . Es folgt die Kohärenz von  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Satz 5.13.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.

- (i) Sei  $\mathcal{G}$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Dann ist  $f^*\mathcal{G}$  quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (ii) Seien  $X, Y$  noethersch und  $\mathcal{G}$  kohärenter  $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Dann ist  $f^*\mathcal{G}$  kohärent.
- (iii) Sei  $X$  noethersch oder  $f$  quasikompakt und separiert. Ist  $\mathcal{F}$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul, so ist  $f_*\mathcal{F}$  quasikohärenter  $\mathcal{O}_Y$ -Modul.

**Lemma 5.14.** Sei  $Y$  ein affines Schema,  $f : X \rightarrow Y$  ein separierter Morphismus und  $U, V \subset_o X$  affin. Dann ist  $U \cap V$  ein abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas. Wir werden in Korollar 5.18 sehen, dass  $U \cap V$  sogar affin ist. Insbesondere ist  $U \cap V$  quasikompakt.

**Beweis.** Betrachte das kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Nach Lemma 3.20 ist  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times_Y V$  affin. Es gilt:

$$U \cap V \cong \Delta_{X/Y}(X) \cap U \times_Y V \subset U \times_Y V$$

Nun ist  $\Delta_{X/Y}(X)$  abgeschlossen in  $X \times_Y X$ , d.h.  $U \cap V$  ist ein abgeschlossenes Unterschema in  $U \times_Y V$ .  $\square$

**Beweis von Satz 5.13.** Für (i) und (ii) ist die Aussage lokal in  $X$  und in  $Y$ . Daher können wir o.B.d.A.  $X = \text{Spec}(B)$  und  $Y = \text{Spec}(A)$  als affin annehmen. Dann folgt die Behauptung aus der Kategorienäquivalenz Korollar 5.10 und Satz 5.3 (v)  $f^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}$ .

Für (iii) können wir nur  $Y$  als affin annehmen. Sei  $X = \bigcup_i U_i$  eine endliche, offene affine Überdeckung, da in beiden Fällen  $X$  quasikompakt ist. Setze  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ . In beiden Fällen sind  $U_{ij}$  quasikompakt, siehe Lemma 5.14 und 3.5, 3.4. Sei also  $U_{ij} = \bigcup_k U_{ijk}$  eine endliche, offene affine Überdeckung. Nach der Garbeneigenschaft haben wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \rightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$$

Wegen Satz 5.3 (iv) sind  $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$  und  $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$  quasikohärent. Nach Satz 5.12 (ii) sind  $\bigoplus_i f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$  und  $\bigoplus_{i,j,k} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$  quasikohärent. Nach 5.12 (i) ist daher auch  $f_*\mathcal{F}$  quasikohärent.  $\square$

**Bemerkung.** Sind  $X, Y$  noethersch und  $\mathcal{F}$  kohärent, so muss  $f_*\mathcal{F}$  nicht notwendigerweise kohärent sein.

**Definition 5.16.** Sei  $Y$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$  und  $i : Y \hookrightarrow X$  der Inklusionsmorphismus. Dann ist die *zu  $Y$  gehörige Idealgarbe* auf  $X$ , wie folgt definiert:

$$\mathcal{I}_Y = \ker(i^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$$

**Satz 5.17.** Sei  $X$  ein Schema. Dann gilt:

- (i) Ist  $Y$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$ , so ist  $\mathcal{I}_Y$  eine quasikohärente Idealgarbe auf  $X$ .
- (ii) Ist  $X$  zusätzlich noethersch, so ist  $\mathcal{I}_Y$  kohärent.
- (iii) Jede quasikohärente Idealgarbe auf  $X$  bestimmt in eindeutiger Weise ein abgeschlossenes Unterschema.

**Beweis.**

- (i) Sei  $Y \subset X$  abgeschlossen. Dann ist  $i : Y \hookrightarrow X$  ein quasikompakter Morphismus. Wegen Satz 4.17 (i) ist  $i$  separiert. Nach Satz 5.13 (iii) ist  $i_*\mathcal{O}_Y$  quasikohärent, also  $\mathcal{I}_Y$  quasikohärent nach Satz 5.12 (i).
- (ii) Ist  $X$  noethersch und  $U \subset_o X$  affin mit  $U = \text{Spec}(A)$ , so ist auch  $A$  noethersch nach Satz 3.6. Daher ist  $I = \Gamma(U, \mathcal{I}_Y|_U)$  ein endlich erzeugtes Ideal in  $A$ . Nach Satz 5.9 ist  $\mathcal{I}_Y$  kohärent.

(iii) Sei  $\mathcal{J}$  eine quasikohärente Idealgarbe auf  $X$ . Setze:

$$Y = \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \{x \in X \mid (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x \neq 0\} \subset X$$

Wir zeigen, dass  $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$  ist. Dies ist eine lokale Frage, sei o.B.d.A.  $X = \text{Spec}(A)$  affin. Da  $\mathcal{J}$  quasikohärent ist, folgt  $\mathcal{J} = \widetilde{\mathfrak{a}}$  für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} Y &= \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \text{supp}(\widetilde{A/\mathfrak{a}}) \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid (A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \neq 0\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} = \text{Spec}(A/\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit ist klar. □

**Korollar 5.18.** Sei  $X = \text{Spec}(A)$  affin. Dann haben wir eine Bijektion:

$$\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset A \text{ Ideal}\} \rightarrow \{Y \mid Y \subset X \text{ abgeschlossenes Unterschema}\}, \quad \mathfrak{a} \mapsto \text{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

**Definition 5.19.** Sei  $S = \bigoplus_d S_d$  ein graduierter Ring. Ein  $S$ -Modul heißt *graduierter  $S$ -Modul*, falls  $M = \bigoplus_d M_d$  mit  $S_d \cdot M_e \subset M_{d+e}$  gilt. Sei  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Dann definieren wir den *gewisteten  $S$ -Modul*  $M(\ell)$  von  $M$  durch:

$$M(\ell)_d = M_{d+\ell}$$

**Definition 5.20.** Sei  $S$  ein graduierter Ring und  $M$  ein graduierter  $S$ -Modul. Die zu  $M$  assoziierte Garbe  $\widetilde{M}$  auf  $\text{Proj}(S)$  ist wie folgt definiert: Sei  $U \subset_{\circ} \text{Proj}(S)$  und setze  $\widetilde{M}(U)$  als die Menge aller Abbildungen  $s : U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$ , so dass:

- (i) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  gilt  $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$ .
- (ii) Für alle  $\mathfrak{p} \in U$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathfrak{p}$  mit  $V \subset U$  und homogene Elemente  $m \in M$ ,  $f \in S$  mit  $\deg(m) = \deg(f)$  derart, dass für alle  $\mathfrak{q} \in V$  stets  $f \notin \mathfrak{q}$  und  $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f}$  in  $M_{(\mathfrak{q})}$  gilt.

$\widetilde{M}$  wird zu einer Garbe mit den gewöhnlichen Restriktionsabbildungen.

**Satz 5.21.** Sei  $S$  ein graduierter Ring,  $M$  ein graduierter  $S$ -Modul und  $X = \text{Proj}(S)$ . Dann gilt:

- (i)  $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$  für alle  $\mathfrak{p} \in X$ .

- (ii) Für alle homogene Elemente  $f \in S_+$  ist  $\widetilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M}_{(f)}$  bzgl. des Isomorphismus'  $D_+(f) \cong \text{Spec } S_{(f)}$ .
- (iii)  $\widetilde{M}$  ist ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Ist  $X$  noethersch und  $M$  endlich erzeugt, so ist  $\widetilde{M}$  kohärent.

**Beweis.** (i) und (ii) sind analog zu Satz 2.23. (iii) folgt aus (ii). □

**Definition 5.22.** Sei  $S$  ein graduierter Ring,  $X = \text{Proj}(S)$  und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Für  $n \in \mathbb{Z}$  definieren wir die *getwistete Garbe*  $\mathcal{F}(n)$  von  $\mathcal{F}$  wie folgt:

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$$

**Satz 5.23.** Sei  $S$  ein graduierter Ring und  $X = \text{Proj}(S)$ , wobei  $S$  als  $S_0$ -Algebra von  $S_1$  erzeugt wird. Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{O}_X(n)$  ist eine invertierbare Garbe auf  $X$ .
- (ii) Sind  $M, N$  graduierte  $S$ -Moduln, so ist  $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ . Insbesondere gilt  $\widetilde{M(n)} \cong \widetilde{M}(n)$  und  $\mathcal{O}_X(n+m) \cong \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$ .
- (iii) Sei  $T$  ein weiterer graduierter Ring, der von  $T_1$  als  $T_0$ -Algebra erzeugt wird und  $\varphi : S \rightarrow T$  ein Homomorphismus graduierter Ringe. Sei  $U \subset_o Y = \text{Proj}(T)$  und  $f : U \rightarrow X$  der durch  $\varphi$  induzierte Morphismus. Dann gilt für jeder graduierte  $S$ -Modul  $M$  und jeder graduierte  $T$ -Modul  $N$ :

$$f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_S T}|_U, \quad f_*(\widetilde{N}|_U) \cong \widetilde{(S N)}$$

Insbesondere gilt  $f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)|_U$  und  $f_*(\mathcal{O}_X(n)|_U) = (f_*\mathcal{O}_U)(n)$ .

**Beweis.**

- (i) Sei  $f \in S_1$  und betrachte  $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} \cong \widetilde{S(n)}_{(f)}$  auf  $\text{Spec } S_{(f)}$ . Es ist  $S(n)_{(f)}$  freier  $S_{(f)}$ -Modul vom Rang 1 via dem Isomorphismus  $(S_f)_0 \rightarrow (S_f)_n$ ,  $s \mapsto f^n s$  für alle  $n$ . Da  $S$  von  $S_1$  als  $S_0$ -Algebra erzeugt wird, gilt  $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$ . Daher ist  $\mathcal{O}_X(n)$  invertierbar.
- (ii) Sei  $f \in S_1$ . Es gilt  $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ . Da  $S$  von  $S_1$  erzeugt wird, folgt  $\widetilde{M \otimes_S N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ .
- (iii) Analog wie im affinen Fall. □

**Definition 5.24.** Sei  $S$  ein graduierter Ring,  $X = \text{Proj}(S)$  und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Der zu  $\mathcal{F}$  assoziierte graduierte  $S$ -Modul  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  ist definiert als die Gruppe

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

mit der folgenden  $S$ -Wirkung: Ein  $s \in S_d$  induziert ein  $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$ . Für  $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$  setze  $st = s \otimes t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$ .

**Satz 5.25.** Sei  $A$  ein Ring und  $X = \mathbf{P}_A^r$  mit  $r \geq 1$  und  $S = A[X_0, \dots, X_r]$ . Dann gilt:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$$

**Beweis.** Sei  $X = \bigcup_{i=0}^r D_+(X_i)$ . Ein  $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  entspricht eine Familie  $t_i \in \Gamma(D_+(X_i), \mathcal{O}_X(n))$ ,  $i = 1, \dots, r$  mit  $t_i = t_j$  auf  $D_+(X_i X_j)$ .  $t_i$  ist ein homogenes Element  $s_i \in S_{X_i}$  vom Grad  $n$  und  $t_i|_{D_+(X_i X_j)}$  entspricht dem Bild von  $s_i$  in  $S_{X_i X_j}$ . Es folgt:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \left\{ (t_0, \dots, t_r) \in \prod_{i=0}^r S_{X_i} \mid t_i = t_j \text{ auf } S_{X_i X_j} \text{ für alle } i, j \right\}$$

Da keine  $X_i$  Nullteiler sind, haben wir Inklusionen  $S \hookrightarrow S_{X_i} \hookrightarrow S_{X_i X_j} \hookrightarrow S_{X_0 \dots X_r}$  und:

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigcap_{i=0}^r S_{X_i} \subset S_{X_0 \dots X_r}$$

Jedes homogene  $t \in S_{X_0 \dots X_r}$  lässt sich eindeutig in der folgenden Form schreiben:

$$t = X_0^{i_0} \cdots X_r^{i_r} f, \quad i_j \in \mathbb{Z}$$

wobei  $f \in S$  ein homogenes Element ist, das durch kein  $X_i$  teilbar ist. Es ist  $t$  genau dann in  $S_{X_i}$ , wenn  $i_j \geq 0$  für alle  $j \neq i$  gilt. Also ist  $\bigcap S_{X_i} = S$ .  $\square$

**Lemma 5.26.** Sei  $X$  ein Schema,  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X$  und  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ . Setze  $X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\} \subset_{\circ} X$  und sei  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente Garbe auf  $X$ .

- (i) Sei  $X$  quasikompakt und  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  mit  $s|_{X_f} = 0$ . Dann gibt es ein  $n > 0$ , so dass  $f^n s = 0 \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ .
- (ii) Sei  $X = \bigcup U_i$  eine endliche, offene affine Überdeckung, so dass  $\mathcal{L}|_{U_i}$  für alle  $i$  frei und  $U_i \cap U_j$  für alle  $i, j$  quasikompakt sind. Zu  $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$  gibt es ein  $n > 0$ , so dass sich  $f^n t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  zu einem globalen Schnitt auf ganz  $X$  fortsetzen lässt.

**Bemerkung 5.27.** Voraussetzungen in Lemma 5.26 (i) und (ii) sind erfüllt, wenn  $X$  noethersch ist, oder wenn  $X$  quasikompakt und separiert ist.



**Beweis von Lemma 5.26.**

- (i) Sei  $X = \bigcup U_i$  eine endliche, offene affine Überdeckung mit  $\mathcal{L}|_{U_i}$  frei. Betrachte  $U = U_i$  und sei  $\psi : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$  ein Isomorphismus. Da  $\mathcal{F}$  quasikohärent ist, folgt  $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$  für ein  $A$ -Modul  $M$ , wobei  $U = \text{Spec}(A)$ . Für ein  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  ist  $s|_U \in M$ . Setze  $g := \psi(f|_U) \in A$ . Es ist  $X_f \cap U = D(g)$  und  $s|_{X_f} = 0$ . Nach Lemma 5.8 (i) gibt es ein  $n > 0$  mit  $g^n s = 0 \in M$ . Der Isomorphismus

$$\text{id} \otimes \psi^{\otimes n} : \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$$

liefert  $0 = f^n s = \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  für alle  $U = U_i$ . Wählt man  $n$  so groß, dass die obige Aussage für alle  $U_i$  gilt, so folgt  $f^n s = 0$  auf  $X$ .

- (ii) Analog zu (i) mit Lemma 5.8 (ii). □

**Satz 5.28.** Sei  $S$  ein graduierter Ring, der durch  $S_1$  als  $S_0$ -Algebra endlich erzeugt wird. Sei  $X = \text{Proj}(S)$  und  $\mathcal{F}$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:

$$\beta : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

**Beweis.** Es ist  $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$  eine endliche Vereinigung. Für  $f \in S_1$  definiere:

$$\beta_f : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}_{(f)} = \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}|_{D_+(f)} \rightarrow \mathcal{F}|_{D_+(f)}$$

durch  $\bigoplus_d \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d)) \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$ , das induziert wird durch:

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d)) \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}(d) \otimes \mathcal{O}_X(-d)) = \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}), \quad \frac{m}{f^d} \mapsto m \otimes f^{-d}$$

Wir erhalten eine Abbildung  $\beta : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \rightarrow \mathcal{F}$ . Wir zeigen nun, dass alle  $\beta_f$  Isomorphismen sind. Es genügt zu zeigen, dass  $\Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)} \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$  Isomorphismen sind. Lemma 5.26 (i) liefert die Injektivität und Lemma 5.26 (ii) die Surjektivität. □

**Korollar 5.29.** Sei  $A$  ein Ring. Dann gilt:

- (i) Ist  $Y \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$  ein abgeschlossenes Unterschema, so existiert ein homogenes Ideal  $I \subset S = A[X_0, \dots, X_r]$ , so dass  $Y = \text{Proj}(S/I) \hookrightarrow \text{Proj}(S) = X$ .
- (ii) Sei  $Y$  ein Schema über  $\text{Spec}(A)$ . Dann ist  $Y$  genau dann projektiv, wenn  $Y \cong \text{Proj}(S)$  für einen graduerten Ring  $S$ , der von  $S_1$  als  $S_0 = A$ -Algebra endlich erzeugt wird.

**Beweis.**

- (i) Sei  $\mathcal{J}_Y \subset \mathcal{O}_X$  die Idealgarbe von  $Y$  auf  $X = \mathbf{P}_A^r$ . Da  $\mathcal{J}_Y(d) \subset \mathcal{O}_X(d)$ , folgt  $\Gamma_*(\mathcal{J}_Y) \subset \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ . Nach Satz 5.25 ist  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$ , d.h.  $I = \Gamma_*(\mathcal{J}_Y)$  ist ein homogenes Ideal in  $S$ . Setze  $Y' = \text{Proj}(S/I)$ .  $Y'$  ist ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$  mit Idealgarbe  $\mathcal{J}_{Y'} = \tilde{I}$ . Da  $\mathcal{J}_Y$  nach Satz 5.17 (i) quasikohärent ist, folgt  $\mathcal{J}_Y \cong \Gamma_* (\widetilde{\mathcal{J}_Y})$  nach Satz 5.28. Nun gilt:

$$\mathcal{J}_Y \cong \Gamma_* (\widetilde{\mathcal{J}_Y}) = \tilde{I} = \mathcal{J}_{Y'}$$

Nach Satz 5.17 folgt  $Y = Y'$ , also ist  $Y$  das abgeschlossene Unterschema, das durch  $I$  definiert ist.

- (ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} Y \text{ projektiv} &\iff Y \text{ ist abgeschlossenes Unterschema von } \mathbf{P}_A^r \text{ für ein } r \\ &\iff Y \cong \text{Proj}(S'/I) \text{ für ein homogenes Ideal } I \subset S' = A[X_0, \dots, X_r] \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass  $I$  und  $I' = \bigoplus_{d \geq d_0} I_d$  dasselbe abgeschlossene Unterschema bestimmen. Dafür zeigen wir  $\mathfrak{p} \supset I$ , wenn  $\mathfrak{p} \supset I'$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S')$ . Wegen  $\mathfrak{p} \not\supset S_+$  gibt es ein  $x_i \notin \mathfrak{p}$ . Sei nun  $x \in I_r$ ,  $r < d_0$ , dann ist  $x_i^{d_0-r} x \in I_{d_0} \in \mathfrak{p}$ . Da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist, folgt  $x \in \mathfrak{p}$ .

Somit können wir o.B.d.A.  $I \subset S'_+$  annehmen. Also ist  $A = (S'/I)_0$  und  $S = S'/I$  wird als  $A$ -Algebra von  $S_1$  endlich erzeugt.

Umgekehrt ist jeder graduierte Ring  $S$ , der von  $S_1$  als  $S_0 = A$ -Algebra endlich erzeugt ist, Quotient des Polynomrings und  $\text{Proj}(S)$  ist projektiv.  $\square$

**Definition 5.30.** Sei  $Y$  ein Schema. Der kanonische Morphismus  $g : \mathbf{P}_Y^r = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r \times Y \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r$  definiert die *getwistete Garbe*  $\mathcal{O}(1)$  auf  $\mathbf{P}_Y^r$  durch:

$$\mathcal{O}(1) = g^* \mathcal{O}(1)$$

**Bemerkung.** Ist  $Y = \text{Spec}(A)$  affin, so ist  $\mathcal{O}(1)$  die bereits in Definition 5.22 definierte Garbe auf  $\mathbf{P}_A^r$ .

**Definition 5.31.** Sei  $X$  ein Schema über  $Y$ . Eine invertierbare Garbe  $\mathcal{L}$  auf  $X$  heißt *sehr ample* bzgl.  $Y$ , wenn es eine Immersion  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$  für ein  $r$  gibt, so dass  $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$ .

**Satz 5.32.** Sei  $Y$  ein noethersches Schema und  $X$  ein Schema über  $Y$ . Dann ist  $X$  genau dann projektiv über  $Y$ , wenn:

- (i)  $X$  ist eigentlich über  $Y$ .
- (ii) Es gibt eine sehr ample Garbe auf  $X$  bzgl.  $Y$ .

**Beweis.** Sei  $X$  projektiv. Dann folgt (i) aus Theorem 4.24 und es gibt eine abgeschlossene Immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_Y^r$  für ein  $r$ , so dass  $i^*\mathcal{O}(1)$  sehr ampel ist.

Sei umgekehrt  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$  eine Immersion und  $\mathcal{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$  eine sehr ample Garbe auf  $X$  bzgl.  $Y$ . Betrachte das kartesische Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_Y^r = Y \times \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

$\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^r \rightarrow \mathbb{Z}$  ist separiert, da projektiv, also ist auch der Basiswechsel  $\mathbf{P}_Y^r \rightarrow Y$  separiert. Ferner ist  $X \rightarrow Y$  eigentlich, nach Korollar 4.22 (v) ist auch  $X \hookrightarrow \mathbf{P}_Y^r$  eigentlich, also insbesondere abgeschlossen.  $\square$

**Definition 5.33.** Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.  $\mathcal{F}$  heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, wenn es eine Familie von globalen Schnitten  $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ ,  $i \in I$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  die Bilder der  $s_i$  den Halm  $\mathcal{F}_x$  als  $\mathcal{O}_X$ -Modul erzeugen. Dies ist äquivalent zu: Es gibt einen surjektiven Garbenmorphismus  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Beispiel 5.34.** Sei  $X = \operatorname{Spec}(A)$  und  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  für ein  $A$ -Modul  $M$ . Dann wird  $\mathcal{F}$  von globalen Schnitten erzeugt; jedes Erzeugendensystem von  $M$  als  $A$ -Modul liefern solche Schnitte. Die Surjektion  $A^{(I)} \rightarrow M$  induziert surjektives  $\mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$ .

**Beispiel 5.35.** Sei  $X = \operatorname{Proj}(S)$  mit einem graduierten Ring  $S$ , der von  $S_1$  als  $S_0$ -Algebra erzeugt wird. Dann liefern die Elemente aus  $S_1$  globale Schnitte von  $\mathcal{O}_X(1)$  und erzeugen diesen quasikohärenten Modul.

**Lemma 5.36.**

- (i) Abgeschlossene Immersionen sind endliche Morphismen.
- (ii) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus noetherscher Schemata und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist  $f_*\mathcal{F}$  kohärent.

**Beweis.**

- (i) Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine abgeschlossene Immersion. Sei  $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$ . Es ist  $f^{-1}(V) = X \times_Y V \rightarrow V$  als Basiswechsel von  $f$  eine abgeschlossene Immersion. Somit ist  $f^{-1}(V) \cong \operatorname{Spec}(B/I)$  für ein Ideal  $I \subset B$  affin und ferner  $B/I$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul.

- (ii) Nach Satz 5.13 (iii) ist  $f_*\mathcal{F}$  quasikohärent. Sei  $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$ . Da  $f$  endlich ist, ist  $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$  affin und es gilt  $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} = \tilde{N}$  für ein endlich erzeugter  $A$ -Modul  $N$ . Nach Satz 5.3 (iv) gilt:

$$f_*\mathcal{F}|_V = f_*\tilde{N} = \widetilde{{}_B N}$$

Da  $f$  endlich ist, ist  $A$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul und somit auch  ${}_B N$ .  $\square$

**Satz 5.37.** (*Serre*) Sei  $X$  ein projektives Schema über  $\operatorname{Spec}(A)$  mit  $A$  noethersch. Sei  $\mathcal{O}_X(1)$  eine sehr ample Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann existiert ein  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  der getwistete  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}(n)$  von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird.

**Beweis.** Sei  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$  eine abgeschlossene Immersion mit  $\mathcal{O}_X(1) \cong i^*(\mathcal{O}(1))$ . Nach Lemma 5.36 ist  $i_*\mathcal{F}$  kohärent auf  $\mathbf{P}_A^r$  und nach Satz 5.23 (iii) gilt  $(i_*\mathcal{F})(n) = i_*(\mathcal{F}(n))$ . Wird nun  $i_*\mathcal{F}(n)$  von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt, so ist dies auch für  $\mathcal{F}(n)$  der Fall, betrachte dafür:

$$\Gamma(\mathbf{P}_A^r, i_*\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n)(i^{-1}(\mathbf{P}_A^r)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

$$(i_*\mathcal{F}(n))_x = \begin{cases} \mathcal{F}(n)_x, & x \in i(X) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei also o.B.d.A.  $X = \mathbf{P}_A^r = \operatorname{Proj} A[X_0, \dots, X_r]$ . Es ist  $X = \bigcup_{i=0}^r D_+(X_i)$ . Für jedes  $i$  ist  $\mathcal{F}|_{D_+(X_i)} \cong \widetilde{M}_i$  für ein endlich erzeugter Modul  $M_i$  über  $B_i = A[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_i}{X_i}, \dots, \frac{X_r}{X_i}]$ . Sei  $(s_{ij})_j$  ein Erzeugendensystem von  $M_i$ . Wegen Lemma 5.26 existiert ein  $n_0 > 0$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Schnitte  $X_i^n s_{ij}$  sich zu globalen Schnitten  $t_{ij}$  von  $\mathcal{F}(n)$  liften lassen. Wir können  $n_0$  unabhängig von  $i$  und  $j$  wählen. Sei  $\mathcal{F}(n)|_{D_+(X_i)} \cong \widetilde{M}'_i$  für ein  $B_i$ -Modul  $M'_i$ . Die Abbildungen  $X_i^n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(n)$  induzieren Isomorphismen  $M_i \rightarrow M'_i$ . Da  $\{X_i^n s_{ij} \mid j\}$  ganz  $M'_i$  erzeugen, erzeugen  $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$  als globale Schnitte ganz  $\mathcal{F}(n)$ .  $\square$

**Korollar 5.38.** Sei  $X$  ein projektives Schema über  $\operatorname{Spec}(A)$  mit  $A$  noethersch. Dann gibt es für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  eine Surjektion  $\mathcal{O}_X(n)^N \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $n, N \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Nach Satz 5.37 gibt es eine Surjektion  $\mathcal{O}_X^N \rightarrow \mathcal{F}(n)$ . Tensorieren mit  $\mathcal{O}_X(-n)$  gibt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.39.** Sei  $k$  ein Körper,  $A$  eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra und  $X$  projektives Schema über  $\operatorname{Spec}(A)$ . Ferner sei  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul.

**Beweis.** Wir werden diesen Satz später kohomologisch beweisen.

**Korollar 5.40.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein projektiver Morphismus von Schemata von endlichem Typ über einem Körper  $k$ . Ist  $\mathcal{F}$  kohärent auf  $X$ , so ist auch  $f_*\mathcal{F}$  kohärent auf  $Y$ . Insbesondere ist für  $A = k$  der Modul  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  ein endlich dimensionierter  $k$ -Vektorraum.

**Beweis.** Sei o.B.d.A.  $Y = \operatorname{Spec}(A)$  affin, wobei  $A$  eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra ist. Da  $f$  projektiv ist, ist  $f$  eigentlich und somit separiert und von endlichem Typ, also quasikompakt. Wegen Satz 5.13 (iii) ist  $f_*\mathcal{F}$  quasikohärent. Es gilt:

$$f_*\mathcal{F} = \Gamma(\widetilde{Y}, \widetilde{f_*\mathcal{F}}) = \Gamma(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$$

Aber  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  ist endlich erzeugter  $A$ -Modul nach Satz 5.39. □

## 2.6 Divisoren

**Definition 6.1.**

- (i) Ein noetherscher lokaler Ring  $(R, \mathfrak{m})$  heißt *regulär*, falls für  $k = R/\mathfrak{m}$  gilt:

$$\dim(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

Ist  $R$  ein noetherscher lokaler Ring, so gilt stets  $\dim(R) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ .

- (ii) Ein Schema  $X$  heißt *regulär in Kodimension 1*, falls jeder Halm  $\mathcal{O}_{X,x}$  von  $X$  mit  $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$  regulär ist.

**Definition 6.3.** Ein Ring heißt *normal*, wenn er ganzabgeschlossen und nullteilerfrei ist. Ein Schema heißt *normal*, wenn seine Halme normal sind.

**Theorem 6.4.** Sei  $R$  ein noetherscher, normaler Ring und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal der Höhe 1. Dann ist  $R_{\mathfrak{p}}$  regulär. Genauer: Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $R$  ist ein diskreter Bewertungsring.
- (ii)  $R$  ist ganzabgeschlossen.
- (iii)  $R$  ist regulär.
- (iv)  $\mathfrak{m}$  ist ein Hauptideal.

**Beweis.** Siehe z.B. Matsumura: „Commutative Algebra“, Theorem 3.9 und Atiyah-MacDonald: „Introduction to Commutative Algebra“, Proposition 9.2. □

**Definition.** Ein Schema habe die Eigenschaft  $(\star)$ , wenn es noethersch, separiert, integer und regulär in Kodimension 1 ist.

**Definition 6.5.** Sei  $X$  ein Schema mit  $(\star)$ . Dann gilt:

- (i) Ein *Primdivisor* auf  $X$  ist ein abgeschlossenes, integrires Unterschema der Kodimension 1.
- (ii) Ein *Weil-Divisor* ist ein Element der freien abelschen Gruppe  $\text{Div}(X)$ , die von den Primdivisoren erzeugt wird. Wir schreiben ein Divisor als  $D = \sum_i n_i Y_i$  mit Primdivisoren  $Y_i$  und  $n_i \in \mathbb{Z}$  mit  $n_i = 0$  für fast alle  $i$ . Ein solcher Divisor heißt *effektiv*, falls alle  $n_i \geq 0$  sind.
- (iii) Sei  $Y$  ein Primdivisor auf  $X$  und  $\eta$  ein generischer Punkt in  $Y$ . Dann ist  $\mathcal{O}_{X,\eta}$  nach Theorem 6.4 ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K$ , der *Funktionenkörper* von  $X$ . Wir bezeichnen die zugehörige diskrete Bewertung mit  $v_Y : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ . Sei  $f \in K^\times$ . Ist  $v_Y(f) > 0$ , so sagen wir, dass  $f$  eine *Nullstelle* entlang  $Y$  von der Ordnung  $v_Y(f)$  hat. Ist  $v_Y(f) < 0$ , so sagen wir, dass  $f$  ein *Pol* entlang  $Y$  von der Ordnung  $-v_Y(f)$  besitzt.

**Lemma 6.6.** Sei  $X$  ein Schema mit  $(\star)$  und  $f \in K^\times$ . Dann ist  $v_Y(f) = 0$  für fast alle Primdivisoren  $Y$ .

**Beweis.** Sei  $\emptyset \neq U = \text{Spec}(A) \subset_o X$  affin mit  $f|_U$  regulär, d.h.  $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ . Sei  $Z = X \setminus U \subsetneq X$  abgeschlossen. Da  $X$  noethersch und irreduzibel ist, ist  $Z$  noethersch mit  $\text{codim}(Z, X) \geq 1$  und besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten. Daher enthält  $Z$  höchstens endlich viele Primdivisoren von  $X$ , alle anderen treffen  $U$ . Es genügt also zu zeigen, dass es nur endlich viele Primdivisoren  $Y$  in  $U$  gibt mit  $v_Y(f) \neq 0$ , d.h.  $v_Y(f) > 0$ . Es gilt mit  $Y = \overline{\{\eta\}}$ :

$$v_Y(f) > 0 \iff f \notin \mathcal{O}_{U,\eta}^\times = A_\eta^\times \iff f \in \eta \iff Y = V(\eta) \subset V(f) \subset U$$

Da  $f \neq 0$ , ist  $V(f) \subsetneq U$  eine echte abgeschlossene Teilmenge, und enthält daher nur endlich viele irreduzible Komponenten, also Primdivisoren in  $U$ .  $\square$

**Definition 6.7.** Sei  $X$  ein Schema mit  $(\star)$  und  $f \in K^\times$ . Der Divisor  $\text{div}(f)$  von  $f$  ist definiert als:

$$\text{div}(f) = \sum_Y v_Y(f) Y$$

wobei  $Y$  über die Primdivisoren in  $X$  läuft. Diese Summe ist nach Lemma 6.6 endlich und somit wohldefiniert. Jeder Divisor der Form  $\text{div}(f)$  heißt *Hauptdivisor* oder *prinzipal*.

**Bemerkung 6.8.** Sei  $f, g \in K^\times$ . Dann gilt:

$$\operatorname{div}\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$$

Somit ist  $K^\times \rightarrow \operatorname{Div}(X)$ ,  $f \mapsto \operatorname{div}(f)$  ein Gruppenhomomorphismus, dessen Bild gerade die Gruppe der Hauptdivisoren in  $X$  sind.

**Definition 6.9.** Sei  $X$  ein Schema mit  $(\star)$ . Zwei Divisoren  $D, D'$  heißen *linear äquivalent*  $D \sim D'$ , wenn  $D - D'$  ein Hauptdivisor ist. Die Gruppe der zugehörigen Äquivalenzklassen  $\operatorname{Cl}(X)$  heißt *Divisorenklassengruppe*. Wir haben eine exakte Folge:

$$K^\times \rightarrow \operatorname{Div}(X) \rightarrow \operatorname{Cl}(X) \rightarrow 0$$

**Satz 6.10.** Sei  $A$  ein noetherscher, nullteilerfreier Ring. Dann gilt:

$$A \text{ ist faktoriell} \iff \operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(A)) = 0$$

**Beweis.** Siehe z.B. Bourbaki: Algèbre Commutative, Chapitre 7 §3 Proposition 2.  $\square$

**Beispiel 6.11.**

1. Sei  $X = \mathbf{A}_k^n$  für ein Körper  $k$ . Dann gilt  $\operatorname{Cl}(X) = 0$ , da  $k[X_1, \dots, X_n]$  faktoriell ist.
2. Sei  $A$  ein Dedekindring. Dann ist  $\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(A))$  gerade die Idealklassengruppe.

**Satz 6.12.** Sei  $k$  ein Körper.

- (i) Sei  $X = \mathbf{A}_k^n$  und  $Y \subset X$  ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist  $Y$  genau dann ein Primdivisor, wenn:

$$Y = V(f) \quad \text{für ein irreduzibles, nicht-konstantes } f \in k[X_1, \dots, X_n]$$

- (ii) Sei  $X = \mathbf{P}_k^n$  und  $Y \subset X$  ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist  $Y$  genau dann ein Primdivisor, wenn:

$$Y = V_+(f) \quad \text{für ein homogenes, irreduzibles } f \in k[X_0, \dots, X_n], \operatorname{deg}(f) = r > 0$$

**Definition 6.13.** Sei  $X = \mathbf{P}_k^n$ . Jeder Primdivisor  $Y$  in  $X$  hat die Form  $Y = V_+(f_Y)$ . Betrachte die Abbildung  $Y \mapsto \operatorname{deg}(f_Y)$ . Diese induziert ein Gruppenhomomorphismus  $\operatorname{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Wir zeigen, dass dieser über  $\operatorname{Cl}(X)$  faktorisiert. Sei  $f \in K^\times$ . Dann gilt:

$$\operatorname{deg} \operatorname{div}(f) = \sum_Y v_Y(f) \operatorname{deg}(Y) = \sum_Y v_Y(f) \operatorname{deg}(f_Y)$$

Sei  $f = \frac{g}{h}$  mit homogenen  $g, h$  vom selben Grad  $d$ . Sei  $g = g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$  eine Zerlegung in irreduzible Elemente  $g_i$  vom Grad  $d_i$ . Dann sind  $Y_i = \text{div}(g_i)$  nach Satz 6.12 (ii) Primdivisoren. Es gilt:

$$\deg \text{div}(g) = \sum_i n_i \deg(g_i) = \sum_i n_i d_i = d$$

Analog ist  $\deg \text{div}(h) = d$ . Somit ist  $\deg \text{div}(f) = \deg \text{div}(g) - \deg \text{div}(h) = 0$ .  $\square$

**Satz 6.15.** Sei  $X = \mathbf{P}_k^n$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $D$  ein Divisor auf  $X$ , so ist  $D \sim \deg(D) \cdot V_+(T_0)$
- (ii)  $\deg : \text{Cl}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  ist ein Isomorphismus.

**Beweis.**

- (i) Sei  $D = \sum_Y n_Y Y$  ein Divisor mit Primdivisoren  $Y$ . Nach Satz 6.12 (ii) ist  $Y = V_+(f_Y)$  mit irreduziblen, homogenen Polynomen  $f_Y$  vom Grad  $r_Y$ . Wir schreiben  $f_Y = T_0^{r_Y} g_Y$ , wobei  $g_Y$  ein Polynom in  $\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}$  ist. Die  $g_Y$  sind rationale Funktionen auf  $\mathbf{P}_k^n$  und es gilt:

$$\text{div}(g_Y) = V_+(f_Y) - r_Y V_+(T_0) \implies V_+(f_Y) \sim r_Y V_+(T_0)$$

Also gilt  $D = \sum_Y n_Y V_+(f_Y) \sim (\sum n_Y r_Y) V_+(T_0) = \deg(D) \cdot V_+(T_0)$ .

- (ii) folgt aus (i) und wegen  $\deg V_+(T_0) = 1$ .  $\square$

**Satz 6.16.** Sei  $X$  ein Schema mit  $(\star)$ ,  $Z \subsetneq X$  eine abgeschlossene Teilmenge und  $U = X \setminus Z$ . Dann gilt:

- (i) Es gibt einen surjektiven Homomorphismus  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$ , der durch  $\sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$  gegeben ist, wobei wir die leeren  $Y_i \cap U$  ignorieren.
- (ii) Ist  $\text{codim}(Z, X) \geq 2$ , dann ist die obige Abbildung ein Isomorphismus.
- (iii) Ist  $Z$  irreduzibel und  $\text{codim}(Z, X) = 1$ , so gibt es eine exakte Folge:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$$

wobei die erste Abbildung durch  $1 \mapsto Z$  gegeben ist.



**Beweis.**

- (i) Ist  $Y$  ein Primdivisor auf  $X$ , so ist  $Y \cap U$  leer oder ein Primdivisor auf  $U$ . Sei  $f \in K^\times$  mit  $\text{div}(f) = \sum n_i Y_i$ . Fassen wir  $f$  als rationale Funktion auf  $U$  auf, so erhalten wir  $\text{div}(f|_U) = \sum n_i (Y_i \cap U)$ . Somit ist die Abbildung  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$  wohldefiniert.

Die Surjektivität sieht man wie folgt: Sei  $Y$  ein Primdivisor auf  $U$  und  $\bar{Y}$  der Abschluss von  $Y$  in  $X$ . Dann ist  $\bar{Y}$  ein Primdivisor auf  $X$  mit  $\bar{Y} \cap U = Y$ .

- (ii)  $\text{Div}(X)$  bzw.  $\text{Cl}(X)$  hängen nur von Teilmengen der Kodimension 1 ab.
- (iii) Es ist  $\ker(\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)) = \{[D] \in \text{Cl}(X) \mid \text{supp}(D) \subset Z\} = \langle [Z] \rangle$ , da  $Z$  irreduzibel ist.  $\square$

**Beispiel 6.17.** Sei  $Y$  eine irreduzible Kurve vom Grad  $d$  in  $\mathbf{P}_k^2$ . Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Cl}(\mathbf{P}_k^2) & \longrightarrow & \text{Cl}(\mathbf{P}_k^2 \setminus Y) & \longrightarrow & 0 \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow \text{deg} & & \downarrow \cong & & \\
 d\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

**Definition 6.18.** Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine *Kurve* über  $k$  ist ein intesres, separiertes Schema  $X$  von endlichem Typ über  $k$  der Dimension 1.

- $X$  heißt *vollständig*, wenn  $X \rightarrow k$  eigentlich ist.
- $X$  heißt *nicht-singulär*, falls alle lokalen Ringe von  $X$  regulär sind.

**Satz 6.19.** Sei  $X$  eine vollständige, nicht-singuläre Kurve über  $k$  und  $Y$  eine beliebige Kurve über  $k$  mit einem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$ . Dann gilt:

$$f(X) = \text{Pt} \quad \text{oder} \quad f(X) = Y$$

Im zweiten Fall gilt:

- (i) Die Funktionenkörpererweiterung  $K(X)/K(Y)$  ist endlich.
- (ii)  $f$  ist endlich.
- (iii)  $Y$  ist vollständig.

**Lemma 6.20.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv,  $g : Y \rightarrow Z$  separiert und von endlichem Typ, und  $g \circ f : X \rightarrow Z$  eigentlich. Dann ist  $g$  eigentlich.

**Beweis von 6.19.** Da  $X$  eigentlich über  $k$  ist, ist  $f(X) \subset Y$  ein abgeschlossenes Unterschema. Da  $X$  irreduzibel ist, ist  $f(X)$  auch irreduzibel. Nun ist  $\dim(Y) = 1$ , folgt entweder  $f(X) = \text{Pt}$  oder  $f(X) = Y$ . Betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) & \hookrightarrow & Y \\ & & & \searrow & \downarrow \\ & & & & k \end{array}$$

Es ist  $f(X) \hookrightarrow Y$  eine abgeschlossene Immersion, also separiert nach Satz 4.17 (i). Somit ist auch  $f(X)/k$  separiert. Nach Lemma 6.20 ist  $f(X)/k$  eigentlich.

Sei nun  $f(X) = Y$ , also ist  $Y$  vollständig. Sei  $Y = \overline{\{\eta\}}$  und  $X = \overline{\{\xi\}}$ . Da  $f : X \rightarrow Y$  dominant ist, folgt  $f(\xi) = \eta$  und wir erhalten eine Inklusion  $K(Y) = \mathcal{O}_{Y,\eta} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} = K(X)$ . Da beide Körper endlich erzeugt über  $k$  vom Transzendenzgrad  $\dim(X) = 1$  sind, ist  $K(X)/K(Y)$  endlich.

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  endlich ist. Sei  $V = \text{Spec}(B) \subset_o Y$  affin. Dann ist  $B = \mathcal{O}_Y(V) \subset K(Y) \subset K(X)$ . Es ist zu zeigen, dass  $f^{-1}(V) = \text{Spec}(A)$  affin ist, wobei  $A$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul ist. In der Tat folgt aus der Normalität von  $X$  stets  $f^{-1}(V) = \text{Spec}(A)$ , wobei  $A$  der Ganzabschluss von  $B$  in  $K(X)$  ist. Alles folgt nun aus dem folgenden Theorem 6.21.  $\square$

**Theorem 6.21.** Sei  $B$  ein Integritätsring und eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper  $k$ . Setze  $K = \text{Quot}(B)$  und sei  $L/K$  eine endliche Erweiterung. Dann ist der Ganzabschluss  $A$  von  $B$  in  $L$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul.

**Beweis.** Siehe z.B. Zariski-Samuel: Commutative Algebra I, Chapter V, Theorem 9.  $\square$

**Beweis von 6.20.** Es reicht zu zeigen, dass  $g$  universell abgeschlossen ist. Sei  $h : Y' \rightarrow Y$  ein beliebiger Morphismus und betrachte den Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Wir zeigen nun, dass  $f'$  surjektiv ist. Sei  $y' \in Y'$  und sei  $x \in X$  mit  $f(x) = h(y') =: y$ . Behauptung: Es gibt ein  $z \in X \times_Y Y'$  mit  $h'(z) = x$  und  $f'(z) = y'$ . Seien  $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$ ,  $i_{y'} : \{y'\} \hookrightarrow Y'$  die Inklusionen. Diese liefern einen  $Y$ -Morphismus:

$$\delta : \text{Spec } \kappa(x) \times_{\kappa(y)} \text{Spec } \kappa(y') = \text{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')) \hookrightarrow X \times_Y Y'$$

Da  $\kappa(x) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y') \neq 0$ , gilt für jedes  $z \in \text{im}(\delta)$  stets  $h'(z) = x$  und  $f'(z) = y'$ . Dies zeigt die Surjektivität von  $f'$ .

Also ist die Surjektivität von  $f$  stabil unter Basiswechsel. Da alle anderen Eigenschaften in den Voraussetzungen ebenfalls stabil unter Basiswechsel sind (siehe 4.17 (iii) und 4.22), reicht es zu zeigen, dass  $g$  abgeschlossen ist. Sei  $Y' \subset Y$  eine abgeschlossene Teilmengen. Dann ist wegen der Surjektivität von  $f$ :

$$g(Y') = (g \circ f) \circ f^{-1}(Y')$$

$g(Y')$  ist abgeschlossen, da  $g \circ f$  abgeschlossen ist. □

**Definition 6.22.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein dominanter Morphismus von Kurven. Dann heißt  $\deg(f) = [K(X) : K(Y)]$  der *Grad* von  $f$ . Sei  $X$  eine nicht-singuläre Kurve, erfüllt also insbesondere  $(\star)$ . Ein Primdivisor von  $X$  ist genau ein abgeschlossener Punkt. Ein Divisor  $D$  ist somit von der folgenden Form:

$$D = \sum_i n_i P_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad P_i \text{ abgeschlossene Punkte}$$

Der *Grad* von  $D$  ist definiert als  $\deg(D) = \sum n_i$ .

**Definition 6.23.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus nicht-singulärer Kurven. Wir definieren ein Homomorphismus  $f^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$  wie folgt:

Sei  $Q \in Y$  ein abgeschlossener Punkt und wähle ein  $t \in \mathcal{O}_{Y,Q} \subset K(Y)$  mit  $v_Q(t) = 1$ , wobei  $v_Q$  die diskrete Bewertung zu  $\mathcal{O}_{Y,Q}$  ist.  $t$  heißt *lokaler Parameter* an der Stelle  $Q$ . Wir setzen:

$$f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_P(t) P$$

Da  $f$  endlich ist, ist obige Summe nach Lemma 6.24 endlich.

**Lemma 6.24.**

- (i) Die Eigenschaft endlich zu sein ist stabil unter Basiswechsel.
- (ii) Ist  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus und  $y \in Y$ , so ist  $f^{-1}(y)$  endlich.

**Beweis.**

- (i) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus und  $g : Z \rightarrow Y$  beliebig. Betrachte den folgenden Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{f_Z} & Z \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Sei  $V = \operatorname{Spec}(B) \subset_o Y$  affin. Dann existiert ein affines  $W = \operatorname{Spec}(C) \subset_o Z$  mit  $g(W) \subset V$ . Es ist  $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec}(A)$  affin, wobei  $A$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_Z^{-1}(W) &= (X \times_Y Z) \times_Z W \cong X \times_Y W \\ &\cong (X \times_Y V) \times_V W \\ &\cong f^{-1}(V) \times_V W = \operatorname{Spec}(A \otimes_B C) \end{aligned}$$

und  $A \otimes_B C$  ist ein endlich erzeugter  $C$ -Modul.

(ii) Sei  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Betrachte den Morphismus:

$$f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \rightarrow \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

Dieser ist endlich nach (i). Also ist  $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(A)$  affin, wobei  $A$  ein endlich dimensionierter  $\kappa(y)$ -Vektorraum ist. Somit ist  $\dim f^{-1}(y) = \dim \kappa(y) = 0$ , als topologischer Raum ist  $f^{-1}(y)$  also eine endliche Menge an Punkten.  $\square$

### Bemerkung.

- (i) In Definition 6.23 ist  $f^*Q$  unabhängig von der Wahl des lokalen Parameters, da ein lokaler Parameter eindeutig bis auf eine Einheit in  $\mathcal{O}_{Y,Q}$  bestimmt ist.
- (ii)  $f^*$  respektiert lineare Äquivalenz, d.h. für  $h \in K(Y)^\times$ ,  $\operatorname{div}(h) = \sum_Q v_Q(h)Q$  gilt:

$$f^*(\operatorname{div}(h)) = \sum_Q v_Q(h) \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_P(t)P = \sum_P v_P(h)P = \operatorname{div}(h)$$

da  $v_P(h) = v_P(t) \cdot v_Q(h)$  ist. Somit induziert  $f^*$  eine Abbildung  $\operatorname{Cl}(Y) \rightarrow \operatorname{Cl}(X)$ .  $\square$

**Satz 6.25.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus nicht-singulärer Kurven. Dann:

$$\deg(f^*D) = \deg(f) \cdot \deg(D)$$

**Korollar 6.26.** Hauptdivisoren auf einer vollständigen, nicht-singulären Kurve haben Grad 0. Wir erhalten eine surjektive Gradabbildung:

$$\deg : \operatorname{Cl}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

**Lemma 6.27.** Sei  $X$  eine normale Kurve über  $k$ ,  $U \subset X$  offen,  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^n$  eine rationale Abbildung. Dann lässt sich  $\varphi$  zu einem Morphismus auf  $X$  fortsetzen.

**Definition 6.28.** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein Schema.

- (i) Sei  $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$  affin und  $S$  die Menge aller Nicht-Nullteiler in  $A$ . Dann heißt  $K(U) = A_S$  *totaler Quotientenring* von  $A$ .
- (ii) Sei  $\mathcal{K}$  die Ringgarbe, die zur Prägarbe  $U \mapsto \varprojlim_{V \subset U \text{ affin}} K(V)$  assoziiert ist.  $\mathcal{K}$  heißt *Garbe der totalen Quotientenringe* von  $\mathcal{O}$ .
- (iii)  $\mathcal{K}^\times : U \mapsto \mathcal{K}(U)^\times$  sei die Garbe von multiplikativen Gruppe der invertierbaren Elemente in  $\mathcal{K}$ .  $\mathcal{O}^\times$  sei die Garbe der invertierbaren Elemente in  $\mathcal{O}$ .

**Definition 6.29.** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein Schema. Ein Element aus  $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$  heißt *Cartier-Divisor*. Ein Cartier-Divisor kann also durch ein System  $(U_i, f_i)_i$  beschrieben werden, wobei  $(U_i)_i$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist, und  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times)$ , so dass für alle  $i, j$  stets  $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$  gilt.

Ein Cartier-Divisor heißt *prinzipal* oder *Hauptdivisor*, wenn er im Bild der kanonischen Abbildung  $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$  ist. Zwei Cartier-Divisoren heißen *linear äquivalent*, falls ihre Differenz prinzipal ist.

**Satz 6.30.** Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein integres, separiertes, noethersches Schema. Ferner sei  $X$  *lokal faktoriell*, d.h. alle lokalen Ringe sind faktoriell. Dann ist die Gruppe  $\text{Div}(X)$  von Weil-Divisoren isomorph zur Gruppe der Cartier-Divisoren  $\Gamma(X, \mathcal{K}^\times / \mathcal{O}^\times)$ . Prinzipale Weil-Divisoren entsprechen prinzipale Cartier-Divisoren.

**Beweis.**  $X$  ist normal, da faktorielle Ringe insbesondere ganzabgeschlossen sind. Nach Theorem 6.4 erfüllt  $X$   $(\star)$ . Also können wir von Weil-Divisoren sprechen. Da  $X$  integer ist, ist  $K(U) = \text{Quot}(A) = K$  der Funktionenkörper von  $X$  für alle  $U = \text{Spec}(A) \subset_o X$ . Somit ist  $\mathcal{K}$  konstante Garbe.

Sei  $(U_i, f_i)_i$  ein Cartier-Divisor mit einer offenen Überdeckung  $(U_i)_i$  von  $X$  und  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times) = K^\times$ . Wir ordnen diesen Cartier-Divisor den folgenden Weil-Divisor zu:

$$D = \sum_Y v_Y(f_{i_Y})Y$$

wobei  $Y$  die Primdivisoren von  $X$  durchläuft und  $i_Y$  ein Index mit  $U_i \cap Y \neq \emptyset$ . Die Summe ist endlich, da  $X$  noethersch ist.  $D$  ist unabhängig von Wahl der Indizes  $i_Y$ :

Seien  $i, j$  mit  $U_i \cap Y \neq \emptyset$  und  $U_j \cap Y \neq \emptyset$ . Dann ist  $\frac{f_i}{f_j}$  auf  $U_i \cap U_j$  invertierbar, d.h.  $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$ . Es folgt  $v_Y(\frac{f_i}{f_j}) = 0$ , also  $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$ .

Sei nun umgekehrt  $D = \sum_Y n_Y Y$  ein Weil-Divisor auf  $X$  und  $x \in X$ . Dann induziert  $D$  ein Weil-Divisor  $D_x$  auf  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$ , nämlich:

$$D_x = \sum_Y n_Y (Y \cap \text{Spec}(\mathcal{O}_x))$$

Da  $\mathcal{O}_x$  als faktoriell vorausgesetzt wird, ist nach Satz 6.10  $\text{Cl}(\text{Spec } \mathcal{O}_x) = 0$  und  $D_x$  ein Hauptdivisor, d.h.  $D_x = (f_x)$  für ein  $f_x \in K^\times$ . Fassen wir  $(f_x)$  als Weil-Divisor in  $X$  auf, so sehen wir, dass sich  $(f_x)$  und  $D$  nur bei Primdivisoren, die nicht durch  $x$  gehen, unterscheiden. Davon gibt es nur endlich viele, deren Koeffizienten nicht verschwinden. Daher existiert eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  mit  $(f_x)|_{U_x} = D|_{U_x}$ . Das System  $(U_x, f_x)_{x \in X}$  liefert einen Cartier-Divisor.

Geben  $f, f'$  denselben Weil-Divisor auf  $U \subset_o X$  offen, so ist  $\frac{f}{f'} \in \Gamma(U, \mathcal{O}^\times)$ , da  $X$  normal ist. Daher ist die Konstruktion wohldefiniert. Die obigen Konstruktionen sind invers zueinander.  $\square$

**Satz 6.31.** Seien  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  invertierbare Garben auf einem Schema  $X$ . Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  ist invertierbar.
- (ii)  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$  ist invertierbar und wird mit  $\mathcal{L}^{-1}$  bezeichnet.
- (iii)  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$
- (iv)  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X$

**Definition 6.32.**

- (i) Wir setzen:

$$\mathcal{L}^{\otimes m} = \underbrace{\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}}_{m\text{-mal}}, \quad \mathcal{L}^{\otimes -m} = (\mathcal{L}^{-1})^{\otimes m}, \quad m \geq 0$$

Also gilt  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{L}^{\otimes (n+m)}$  für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

- (ii) Die *Picard-Gruppe*  $\text{Pic}(X)$  eines Schemas  $X$  ist die abelsche Gruppe von Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf  $X$  mit der Operation  $\otimes$ .

**Definition 6.33.** Sei  $D$  ein Cartier-Divisor auf  $X$  repräsentiert durch  $(U_i, f_i)_i$ . Dann ist die Untergarbe  $\mathcal{L}(D)$  von  $\mathcal{K}$  definiert durch:

$$\mathcal{L}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} f_i^{-1} \subset \mathcal{K}|_{U_i}$$

Diese ist wohldefiniert, denn auf  $U_i \cap U_j$  haben wir  $\mathcal{L}(D)|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_j^{-1}$ , da  $\frac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$ .  $\mathcal{L}(D)$  heißt die zum Divisor  $D$  *assoziierte Garbe*.

**Satz 6.34.** Sei  $X$  ein Schema.

- (i) Für jeden Cartier-Divisor  $D$  ist  $\mathcal{L}(D)$  eine invertierbare Garbe auf  $X$ . Die Abbildung  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  induziert eine Bijektion:

$$\{\text{Cartier-Divisoren auf } X\} \rightarrow \{\text{Invertierbare Untergarben von } \mathcal{K}\}$$

- (ii)  $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$  für Cartier-Divisoren  $D_1, D_2$

- (iii)  $D_1 \sim D_2 \iff \mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$

**Beweis.**

- (i) Sei repräsentiert durch  $(U_i, f_i)_i$  mit  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^\times)$ . Dann ist  $\mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}(D)|_{U_i}$ ,  $1 \mapsto f_i^{-1}$  ein Isomorphismus, also  $\mathcal{L}(D)$  invertierbar. Sei umgekehrt  $\varphi : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}$  eine invertierbare Untergarbe und  $\{U_i\}$  eine Überdeckung von  $X$  mit  $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i} \hookrightarrow \mathcal{K}|_{U_i}$ . Setze  $f_i = \tilde{\varphi}(U_i)(1)^{-1}$ . Dann definiert  $(U_i, f_i)_i$  ein Cartier-Divisor  $D$  mit  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}$ .
- (ii) Seien  $D_1, D_2$  repräsentiert durch  $(U_i, f_i)_i$  bzw.  $(U_i, g_i)_i$ . Dann wird  $D_1 - D_2$  repräsentiert durch  $(U_i, f_i g_i^{-1})_i$ . Also gilt:

$$\mathcal{L}(D_1 - D_2)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}(f_i^{-1} g_i) = \mathcal{L}(D_1)|_{U_i} \otimes \mathcal{L}(D_2)|_{U_i}^{-1} \subset \mathcal{K}|_{U_i}$$

Somit folgt  $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ .

- (iii) Wegen (ii) reicht es zu zeigen, dass  $D$  genau dann ein Hauptdivisor ist, wenn  $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$ . Sei  $D$  prinzipal, d.h.  $D = (f)$  für ein  $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^\times)$ . Somit ist  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_X f^{-1} \cong \mathcal{O}_X$ . Sei umgekehrt  $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}(D)$  ein Isomorphismus. Setze  $f$  als das Bild von 1 der folgenden Komposition:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^\times)$$

Dann ist  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}((f^{-1}))$ , also  $D = (f^{-1})$ . □

**Korollar 6.35.** Sei  $X$  ein Schema. Dann induziert die Abbildung  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  einen injektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\text{CaCl}(X) \hookrightarrow \text{Pic}(X)$$

wobei  $\text{CaCl}(X)$  die Cartier-Divisorenklassengruppe bezeichnet. Im Allgemeinen ist diese Abbildung nicht surjektiv.

**Satz 6.36.** Sei  $X$  ein integres Schema. Dann ist die Abbildung  $\text{CaCl}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  ein Gruppenisomorphismus.

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, dass jede invertierbare Garbe isomorph zu einer Untergarbe von  $\mathcal{K}$  ist. Da  $X$  integer ist, ist  $\mathcal{K}$  konstante Garbe mit  $\mathcal{K}(U) = K$  der Funktionenkörper von  $X$  für alle  $U$ . Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X$  und betrachte  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ . Sei  $X = \bigcup_i U_i$  eine offene Überdeckung mit  $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ . Dann gilt:

$$(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})|_{U_i} = \mathcal{L}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{K}|_{U_i} = \mathcal{K}|_{U_i}$$

Da  $X$  irreduzibel ist, folgt  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ . Die kanonische Abbildung  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$  zeigt, dass  $\mathcal{L}$  isomorph zu einer Untergarbe von  $\mathcal{K}$  ist.  $\square$

**Korollar 6.37.** Sei  $X$  ein noethersches, integrales, separiertes und lokal faktorielles Schema. Dann existiert ein Isomorphismus:

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$$

**Beweis.** Folgt aus Satz 6.30 und Satz 6.36.  $\square$

**Korollar 6.38.** Sei  $k$  ein Körper und  $X = \mathbf{P}_k^n$ . Dann ist jede invertierbare Garbe auf  $X$  isomorph zu einem  $\mathcal{O}(\ell)$  für ein  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Nach Korollar 6.37 und Satz 6.15 ist  $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$ . Ferner wird  $\mathrm{Cl}(X)$  von der Hyperebene  $D = V_+(T_0)$  erzeugt. Dann gilt  $\mathcal{L}(D)T_0 = \mathcal{O}(1)$ , da  $\mathcal{O}(1)|_{D_+(T_i)} = \mathcal{O}_{D_+(T_i)}T_i$  und  $\mathcal{L}(D)|_{D_+(T_i)} = \mathcal{O}_{D_+(T_i)}\frac{T_i}{T_0}$ .  $\square$

## 2.7 Projektive Morphismen

### Ample Garben

**Satz 7.1.** Sei  $A$  ein Ring,  $X$  ein Schema über  $A$  und  $\mathbf{P}_A^n = \mathrm{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$ .

- (i) Ist  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$  ein  $A$ -Morphismus. Dann ist  $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$  eine invertierbare Garbe auf  $X$ , die von globalen Schnitten  $s_i = \varphi^*(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  erzeugt wird, wobei  $x_i \in \Gamma(\mathbf{P}_A^n, \mathcal{O}(1))$ .
- (ii) Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X$  und  $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  globale Schnitte, die  $\mathcal{L}$  erzeugen. Dann existiert ein eindeutig bestimmter  $A$ -Morphismus  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$  derart, dass  $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$  mit  $s_i = \varphi^*(x_i)$ .

**Beweis.**

- (i) Nach 5.35 erzeugen die globalen Schnitte  $x_0, \dots, x_n$  die Garbe  $\mathcal{O}(1)$ . Ferner ist  $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$  invertierbar und werden von  $\varphi^*(x_i) = s_i$  erzeugt.



- (ii) Setze  $X_i = \{P \in X \mid (s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\} \subset_o X$ . Da die  $s_i$  die Garbe  $\mathcal{L}$  erzeugen, gilt  $X = \bigcup_i X_i$ . Sei  $U_i = D_+(x_i) \cong \operatorname{Spec} A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n]$ ,  $Y_j = \frac{x_j}{x_i}$ . Betrachte den Ringhomomorphismus  $\phi : A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ ,  $Y_j \mapsto \frac{s_j}{s_i}$ . Dieser ist wohldefiniert, da  $(s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P \cong \mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$  für alle  $P \in X_i$  gilt und daher  $\frac{s_j}{s_i} \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ . Sei  $X_i \rightarrow U_i$  der zu  $\phi$  gehörige  $A$ -Morphismus von  $A$ -Schemata. Verkleben ergibt ein  $A$ -Morphismus  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ . Nach Konstruktion ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt durch  $\mathcal{L} \cong \varphi^*(\mathcal{O}(1))$  und  $s_i = \varphi^*(x_i)$ .  $\square$

**Satz 7.2.** Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$  ein  $A$ -Morphismus, der zu einer invertierbaren Garbe  $Z$  auf  $X$  und globale Schnitte  $s_0, \dots, x_n \in \Gamma(X, Z)$  gehört, die  $\mathcal{L}$  erzeugen. Dann ist  $\varphi$  genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) Alle offenen Teilmengen  $X_i$  im Beweis von Satz 7.1 (ii) sind affin.
- (ii) Für alle  $i$  ist die Abbildung  $A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ ,  $Y_j \mapsto \frac{s_j}{s_i}$  surjektiv.

**Beweis.** Sei  $\varphi$  eine abgeschlossene Immersion. Dann ist  $X_i = U_i \cap X$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $U_i = D_+(x_i) \subset \mathbf{P}_A^n = \operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$ . Da  $U_i$  affin ist, ist nach Korollar 5.18 auch  $X_i$  affin und wir erhalten einen surjektiven Ringhomomorphismus  $A[Y_0, \dots, \widehat{Y}_i, \dots, Y_n] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ .

Sei nun umgekehrt (i) und (ii) erfüllt. Dann ist  $X_i$  nach (ii) ein abgeschlossenes Unterschema von  $U_i$ . Da  $X = \bigcup_i X_i$  und  $X_i = \varphi^{-1}(U_i)$ , ist  $X$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $\mathbf{P}_A^n$ .  $\square$

**Definition 7.3.** Eine invertierbare Garbe  $\mathcal{L}$  auf einem noetherschen Schema  $X$  heißt *ampel*, falls für jede kohärente Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ein  $n_0 > 0$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0$  der  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$  von globalen Schnitten erzeugt wird.

**Beispiel 7.4.** Ist  $X$  affin, so ist jede invertierbare Garbe ampel: Jede kohärente Garbe wird von globalen Schnitten endlich erzeugt, vgl. Korollar 5.10.

**Bemerkung 7.5.** Serres Theorem 5.37 besagt, dass jede sehr ample Garbe  $\mathcal{L}$  auf einem Schema  $X$  über einem noetherschen Ring ampel ist. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

**Satz 7.6.** Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf einem noetherschen Schema  $X$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\mathcal{L}$  ist ampel.
- (ii)  $\mathcal{L}^m$  ist ampel für alle  $m > 0$ .
- (iii)  $\mathcal{L}^m$  ist ampel für ein  $m > 0$ .

**Beweis.** (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii) ist klar. Sei nun  $\mathcal{L}^m$  ampel für ein  $m > 0$  und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ . Nach Definition existiert ein  $n_0 > 0$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Garbe  $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L}^m)^n$  von globalen Schnitten erzeugt wird. Betrachte die Garben  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k$  für  $k = 1, \dots, m-1$ . Diese sind kohärent, d.h. es gibt für jedes  $k$  ein  $n_k > 0$ , so dass für alle  $n \geq n_k$  die Garbe  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k \otimes (\mathcal{L}^m)^n$  von globalen Schnitten erzeugt wird. Setzen wir nun  $N = m \cdot \max\{n_k \mid k = 1, \dots, m-1\}$ , so wird  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$  von globalen Schnitten erzeugt für alle  $n \geq N$ . Somit ist  $\mathcal{L}$  ampel.  $\square$

**Satz 7.7.** Sei  $X$  ein Schema von endlichem Typ über einem noetherschen Ring  $A$  und  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{L}$  genau dann ampel, wenn  $\mathcal{L}^m$  sehr ampel bzgl.  $\text{Spec}(A)$  für ein  $m > 0$  ist.

**Lemma 7.8.** Sei  $X$  ein noethersches Schema,  $U \subset_o X$  und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $U$ . Dann existiert eine kohärente Garbe  $\mathcal{F}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F}'|_U = \mathcal{F}$ .

**Beweis.** Sei o.B.d.A.  $X$  affin. Sei  $j : U \hookrightarrow X$  die Immersion. Dann ist  $\mathcal{F}' = j_*\mathcal{F}$  nach Satz 5.13 (iii) quasikohärent. Ferner sind quasikohärente Garben auf einem noetherschen Schema Vereinigung seiner kohärenten Untergarben. Daher gilt:

$$j_*\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \bigcup_{\lambda} \mathcal{F}'_{\lambda}$$

mit kohärenten Untergarben  $\mathcal{F}'_{\lambda}$ . Nach Satz 5.13 (ii) sind  $j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$  kohärent. Somit ist  $\mathcal{F} = \bigcup_{\lambda} j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$ , wobei  $j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$  die kohärenten Untergarben von  $\mathcal{F}$  durchläuft. Da  $\mathcal{F}$  kohärent ist, gilt  $\mathcal{F} = j^*\mathcal{F}'_{\lambda}$  für ein  $\lambda$ . Somit ist  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_{\lambda}$  kohärent.  $\square$

**Beweis von Lemma 7.7.** Sei zunächst  $\mathcal{L}^m$  sehr ampel für ein  $m > 0$ . Es existiert also eine Immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$  mit  $\mathcal{L}^m \cong i^*(\mathcal{O}(1))$ . Sei  $\overline{X}$  der Abschluss von  $X$  in  $\mathbf{P}_A^n$ . Dann ist  $\overline{X}$  ein projektives Schema über  $\text{Spec}(A)$ . Nach 7.5 ist  $\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$  ampel auf  $\overline{X}$ . Sei  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$  und  $\overline{\mathcal{F}}$  die kohärente Garbe in Lemma 7.8 auf  $\overline{X}$  mit  $\overline{\mathcal{F}}|_X = \mathcal{F}$ . Wird  $\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(\ell)$  von globalen Schnitten erzeugt, so ist dies auch für  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(\ell)$  der Fall. Daher ist  $\mathcal{L}^m$  ampel auf  $X$  und nach Satz 7.6 auch  $\mathcal{L}$ . Die andere Richtung ist schwierig.

## Projektive Vektorbündel

**Definition.** Sei  $X$  ein Schema. Ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{S}$  habe die Eigenschaft  $(\dagger)$ , wenn  $X$  noethersch ist und wenn er eine Struktur einer graduierten  $\mathcal{O}_X$ -Algebra trägt, d.h.  $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$  mit homogenen Teilen  $\mathcal{S}_d$ , so dass:

- (i)  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$
- (ii)  $\mathcal{S}_1$  ist ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul.
- (iii)  $\mathcal{S}$  wird lokal von  $\mathcal{S}_1$  als  $\mathcal{O}_X$ -Modul erzeugt.

**Definition 7.9.** Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{S}$  ein graduierter  $\mathcal{O}_X$ -Modul mit  $(\dagger)$ . Sei  $U = \text{Spec}(A) \subset_{\circ} X$ ,  $\mathcal{S}(U) = \Gamma(U, \mathcal{S}|_U)$  die graduierte  $A$ -Algebra und  $\pi_U : \text{Proj } \mathcal{S}(U) \rightarrow U$  der kanonische Morphismus. Für  $U, V \subset_{\circ} X$  affin gilt  $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$ . Verkleben von  $\pi_U$  liefert ein Schema  $\mathbf{Proj}(\mathcal{S})$  und ein Morphismus  $\pi : \mathbf{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow X$ , so dass für alle affinen  $U \subset_{\circ} X$  stets  $\pi^{-1}(U) \cong \text{Proj } \mathcal{S}(U)$  gilt. Die invertierbaren Garben  $\mathcal{O}(1)$  auf  $\text{Proj } \mathcal{S}(U)$  lassen sich zu einer invertierbaren Garbe  $\mathcal{O}(1)$  auf  $\mathbf{Proj}(\mathcal{S})$  verkleben.

**Beispiel 7.10.** Sei  $\mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n] = \mathcal{S}$ . Dann ist  $\mathbf{Proj}(\mathcal{S}) = \mathbf{P}_X^n = \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^n \times X$  mit der getwisteten Garbe  $\mathcal{O}(1)$  wie in Definition 5.30.

**Lemma 7.11.** Sei  $\mathcal{S}$  eine Garbe graduierter Algebren mit  $(\dagger)$  auf  $X$ . Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{S}'$  die folgende Garbe graduierter Algebren:

$$\mathcal{S}'_d = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{L}^d, \quad d \geq 0$$

Dann erfüllt  $\mathcal{S}'$  ebenfalls  $(\dagger)$  und es gibt einen natürlichen Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} P' = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}') & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & P = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}) \\ \pi' \downarrow & \swarrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

Es gilt  $\mathcal{O}_{P'}(1) \cong \varphi^* \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi'^* \mathcal{L}$ .  $\mathcal{S}'$  wird auch mit  $\mathcal{S} * \mathcal{L}$  bezeichnet.

**Satz 7.12.** Sei  $X$  und  $\mathcal{S}$  mit  $(\dagger)$ . Sei  $P = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$  mit  $\pi : P \rightarrow X$ . Dann gilt:

- (i)  $\pi$  ist eigentlicher Morphismus.
- (ii) Besitzt  $X$  eine ample Garbe  $\mathcal{L}$ , so ist  $\pi$  projektiv und  $\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^n$  ist eine sehr ample invertierbare Garbe von  $P$  über  $X$ .

**Definition 7.13.**

- (i) Sei  $A$  ein Ring und  $M$  ein  $A$ -Modul. Setze:

$$T^0(M) = A, \quad T^n(M) = M^{\otimes n}, \quad n \geq 1$$

Dann ist  $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$  eine  $A$ -Algebra mit  $\otimes$  als Multiplikation, die sogenannte *Tensor-Algebra* von  $M$ .

- (ii) Die *symmetrische (Tensor-)Algebra* von  $M$  ist definiert als der Quotient von  $T(M)$  nach dem Ideal, das von den Elementen  $x \otimes y - y \otimes x$ ,  $x, y \in M$  erzeugt wird.  $S(M) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$  ist dann eine kommutative, graduierte  $A$ -Algebra.  $S^n(M)$  heißt *n-tes symmetrisches Produkt* von  $M$ .

- (iii) Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann wird die Tensor-Algebra  $T(\mathcal{F})$  bzw. die symmetrische Algebra  $S(\mathcal{F})$  von  $\mathcal{F}$  als assoziierte Garbe zur Prägarbe  $U \mapsto T(\mathcal{F}(U))$  bzw.  $U \mapsto S(\mathcal{F}(U))$  definiert.  $T(\mathcal{F})$  und  $S(\mathcal{F})$  sind  $\mathcal{O}_X$ -Algebren.

**Beispiel.** Sei  $M$  ein freier  $A$ -Modul vom Rang  $r$ . Dann gilt  $S(M) \cong A[X_1, \dots, X_r]$ .

**Definition 7.14.** Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{E}$  eine lokal freie, kohärente Garbe auf  $X$ . Sei  $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$  die symmetrische Algebra von  $\mathcal{E}$  und  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ . Dann ist  $\mathcal{S}$  eine Garbe von graduierten  $\mathcal{O}_X$ -Algebren, die  $(\dagger)$  erfüllt.  $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  heißt *projektives Vektorbündel* über  $X$ .

**Bemerkung.** Ist  $\mathcal{E}$  frei vom Rang  $n + 1$  über  $U \subset_o X$ , so ist  $\pi^{-1}(U) \cong \mathbf{P}_U^n$ .

**Satz 7.15.** Sei  $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  ein projektives Vektorbündel über  $X$ . Dann gilt mit  $\mathcal{S} = S(\mathcal{E})$ :

- (i) Ist Rang von  $\mathcal{E}$  größer gleich 2, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von graduierten  $\mathcal{O}_X$ -Algebren:

$$\mathcal{S} \cong \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \pi_* \mathcal{O}(\ell)$$

Insbesondere folgt  $\pi_*(\mathcal{O}(\ell)) = 0$  für  $\ell < 0$  und  $\pi_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_X$ ,  $\pi_*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{E}$ .

- (ii) Es gibt einen natürliche surjektiven Morphismus:

$$\pi^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}(1)$$

**Satz 7.16.** (*Universaleigenschaft des projektiven Vektorbündels*) Sei  $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  ein projektives Vektorbündel von  $X$  und  $g : Y \rightarrow X$  ein Morphismus. Dann gibt es genau dann einen Morphismus  $f$  mit kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \\ g \downarrow & \swarrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

wenn es eine invertierbare Garbe  $\mathcal{L}$  auf  $Y$  zusammen mit einem surjektiven Garbenmorphismus  $g^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$  gibt.

## Aufblasung

**Definition 7.17.** Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{J}$  eine kohärente Idealgarbe auf  $X$ . Setze  $\mathcal{J}^0 = \mathcal{O}_X$  und  $\mathcal{J}^d$  als das  $d$ -fache Produkt des Ideals  $\mathcal{J}$ . Sei  $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d$ . Dann erfüllen  $X$  und  $\mathcal{S}$  die Bedingung (†).  $\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$  heißt die *Aufblasung* von  $X$  bzgl.  $\mathcal{J}$ .

Ist  $Y$  das abgeschlossene Unterschema von  $X$ , das zu  $\mathcal{J}$  gehört, so sagen wir auch, dass  $\tilde{X}$  die Aufblasung von  $X$  entlang  $Y$  ist.

**Beispiel 7.18.** Sei  $X = \mathbf{A}_k^n$  und  $P \in X$  der Nullpunkt, d.h.  $X = \mathrm{Spec}(A)$ ,  $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $I = (X_1, \dots, X_n)$ . Dann ist die Aufblasung von  $X$  bei  $P$  gegeben durch:

$$\tilde{X} = \mathrm{Proj}(S), \quad S = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$$

Betrachte die surjektive Abbildung  $\psi : A[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow S$ ,  $Y_i \mapsto X_i$ . Wir sehen, dass  $\tilde{X}$  isomorph zu dem abgeschlossenen Unterschema von  $\mathbf{P}_A^{n-1}$  ist, das durch die homogenen Polynome in den  $Y_i$ , die  $\ker(\psi)$  erzeugen, definiert ist:

$$\ker(\psi) = \langle X_i Y_j - X_j Y_i \mid i, j = 1, \dots, n \rangle$$

**Definition 7.19.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$  eine Idealgarbe auf  $Y$ . Wir definieren die *inverse Idealgarbe*  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{O}_X$  auf  $X$  wie folgt:

$\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_X$  liefert nach 5.1 (xi) ein  $\mathcal{O}_X$ -Modulmorphismus  $f^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X$ . Setze  $\mathcal{J}' = \mathrm{im}(f^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X)$ .

Alternativ: Betrachte die Idealgarbe  $f^{-1} \mathcal{J}$  auf  $f^{-1} \mathcal{O}_Y$  und den Morphismus  $f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ , der zu  $f^\#$  adjungiert ist. Dann ist  $\mathcal{J}'$  die vom Bild von  $f^{-1} \mathcal{J}$  in  $\mathcal{O}_X$  erzeugte Idealgarbe. Wir schreiben daher auch  $\mathcal{J}' = f^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_X$ .

**Bemerkung.** Im Allgemeinen sind  $f^* \mathcal{J}$  und  $f^{-1} \mathcal{J}$  verschiedene Idealgarben.

**Satz 7.20.** Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{J}$  eine kohärente Idealgarbe auf  $X$ . Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  bzgl.  $\mathcal{J}$ . Dann gilt:

- (i) Die inverse Idealgarbe  $\tilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  ist invertierbar auf  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ .
- (ii) Sei  $Y$  das zu  $\mathcal{J}$  gehörige abgeschlossene Unterschema und  $U = X \setminus Y$ . Dann ist  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  ein Isomorphismus.

**Beweis.**

- (i) Sei  $\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d$  und  $V \subset_o X$  affin. Dann ist  $\mathcal{O}(1)|_{\mathrm{Proj} \mathcal{S}(V)}$  die assoziierte Garbe zum graduierten  $\mathcal{S}(V)$ -Modul  $\mathcal{S}(V)(1) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^{d+1}(V) = \mathcal{J}(V)$ .

$\mathcal{S}(V)$  das von  $\mathcal{J}(V)$  in  $\mathcal{S}(V)$  erzeugte Ideal. Es folgt  $\tilde{\mathcal{J}} = \pi^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$ , also invertierbar.

- (ii) Es ist  $\mathcal{J}|_U \cong \mathcal{O}_U$ , da  $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{i^\#} i_*\mathcal{O}_Y \rightarrow 0$  exakt ist. Daher gilt  $\pi^{-1}(U) = \mathbf{Proj} \mathcal{O}_U[T] = U$ . Beachte, dass für ein allgemeines  $A$  stets  $\mathbf{Proj} A[T] = D_+(T) = \mathbf{Spec} A[T]_{(T)} = \mathbf{Spec}(A)$  gilt.  $\square$

**Satz 7.21.** (*Universaleigenschaft des Aufblasens*) Sei  $X$  ein noethersches Schema,  $\mathcal{J}$  eine kohärente Idealgarbe auf  $X$  und  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  bzgl.  $\mathcal{J}$ . Ist  $f : Z \rightarrow X$  ein Morphismus, so dass  $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Z$  eine invertierbare Idealgarbe auf  $Z$  ist, so existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $g : Z \rightarrow \tilde{X}$  mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad g \quad} & \tilde{X} \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

**Lemma 7.22.** Sei  $X$  ein Schema,  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  ein surjektiver Morphismus invertierbarer Garben. Dann ist  $f$  ein Isomorphismus.

**Beweis.** Siehe Bourbaki: Commutative Algebra II, §3.2 Korollar zu Proposition 6.  $\square$

**Korollar 7.23.** Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus noetherscher Schemata und  $\mathcal{J}$  eine kohärente Idealgarbe auf  $X$ . Sei  $\tilde{X}$  die Aufblasung bzgl.  $\mathcal{J}$  und  $\tilde{Y}$  die Aufblasung bzgl.  $\mathcal{J}_Y = f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Y$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus  $\tilde{f}$  mit kommutativem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & \tilde{X} \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \end{array}$$

Ist  $f$  eine abgeschlossene Immersion, so auch  $\tilde{f}$ .

**Beweis.**  $\mathcal{J}_Y$  ist kohärent, da nach Satz 5.13 (ii)  $f^*\mathcal{J}$  kohärent ist und nach Satz 5.12 (ii) auch  $\mathrm{im}(f^*\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_Y)$ . Nach Satz 7.20 ist  $\pi_Y^{-1}\mathcal{J}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$  eine invertierbare Garbe auf  $\tilde{Y}$ . Nach Satz 7.21 existiert  $\tilde{f}$  und ist eindeutig bestimmt.

Sei nun  $f$  eine abgeschlossene Immersion und:

$$\tilde{X} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}), \quad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d, \quad \tilde{Y} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S}_Y), \quad \mathcal{S}_Y = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}_Y^d$$

Ist  $Y \hookrightarrow X$  eine abgeschlossene Immersion, so ist  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_Y$  surjektiv und somit ist auch  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_Y$  als Homomorphismus graduerter Ringe surjektiv. Daher ist  $\tilde{Y} \hookrightarrow \tilde{X}$  eine abgeschlossene Immersion.  $\square$

**Definition 7.24.** Ist  $Y \hookrightarrow X$  eine abgeschlossene Immersion noetherscher Schemata. Dann heißt das abgeschlossene Unterschema  $\tilde{Y}$  von  $\tilde{X}$  auch *strikte Transformation* von  $Y$  bzgl. der Aufblasung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ .

## 2.8 Differentiale

Sei  $A$  ein Ring,  $B$  eine  $A$ -Algebra und  $M$  ein  $B$ -Modul.

**Definition 8.1.** Eine  $A$ -Derivation von  $B$  nach  $M$  ist eine Abbildung  $d : B \rightarrow M$  mit:

- (i)  $d$  ist additiv
- (ii)  $d(b \cdot b') = b \cdot d(b') + b' \cdot d(b)$
- (iii)  $d(a) = 0$  für alle  $a \in A$

Der  $B$ -Modul aller  $A$ -Derivationen von  $B$  nach  $M$  bezeichnen wir mit  $D_A(B, M)$ .

**Definition 8.2.** Der  $B$ -Modul  $\Omega_{B/A}$  der *relativen Differentialformen* von  $B$  über  $A$  zusammen mit einer  $A$ -Derivation  $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  ist definiert durch folgende Universaleigenschaft:

Für alle  $B$ -Moduln  $M$  und  $A$ -Derivationen  $d' : B \rightarrow M$  gibt es genau ein  $B$ -Homomorphismus  $f : \Omega_{B/A} \rightarrow M$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow d' & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

Die Eindeutigkeit von  $\Omega_{B/A}$  ist klar. Für die Existenz betrachte den freien  $B$ -Modul  $F$  mit Basis  $\{d_b \mid b \in B\}$ . Dann gilt:

$$\Omega_{B/A} = F / \langle d_{b+b'} - d_b - d_{b'}, d_{bb'} - bd_{b'} - b'd_b, d_a \mid b, b' \in B, a \in A \rangle$$

Zusammen mit der  $A$ -Derivation  $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ ,  $b \mapsto d_b$  erfüllt diese Konstruktion die Universaleigenschaft.

**Satz 8.3.** Sei  $B$  eine  $A$ -Algebra und  $f : B \otimes_A B \rightarrow B$ ,  $b \otimes b' \mapsto bb'$ . Betrachte  $B \otimes_A B$  als  $B$ -Modul via  $b(b_1 \otimes b_2) = (bb_1) \otimes b_2$ .  $B \otimes_A B$  wird zur  $B$ -Algebra durch  $(b_1 \otimes b'_1)(b_2 \otimes b'_2) = (b_1 b_2) \otimes (b'_1 b'_2)$ . Sei  $I = \ker(f)$ . Dann ist  $I/I^2$  ein  $B$ -Modul. Setze  $d : B \rightarrow I/I^2$ ,  $db = 1 \otimes b - b \otimes 1 \mod I^2$ . Dann ist  $\Omega_{B/A} = (I/I^2, d)$ .

**Beweis.** Wir zeigen zunächst  $I = \sum_{b \in B} Bdb$ . Sei  $\beta = \sum b_i \otimes c_i \in I$ , also  $\sum b_i c_i = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_i (b_i(1 \otimes c_i - c_i \otimes 1) + b_i c_i \otimes 1) \\ &= \sum_i b_i dc_i + \left( \sum_i b_i c_i \right) \otimes 1 \in \sum_{b \in B} Bdb \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $d$  eine  $A$ -Derivation ist.  $d(A) = 0$  und die Additivität ist klar.

$$\begin{aligned} dbdc &= (1 \otimes b - b \otimes 1)(1 \otimes c - c \otimes 1) \\ &= bc \otimes 1 - b \otimes c - c \otimes b + 1 \otimes bc \\ &= d(bc) + 2bc \otimes 1 - b(dc + c \otimes 1) - c(db + b \otimes 1) \\ &= d(bc) - bdc - cdb \end{aligned}$$

Also ist  $d(bc) \equiv bdc + cdb \pmod{I^2}$ . Somit müssen wir noch zeigen, dass  $(I/I^2, d)$  die Universaleigenschaft von  $\Omega_{B/A}$  erfüllt. Sei  $M$  ein  $B$ -Modul und  $D : B \rightarrow M$  eine  $A$ -Derivation. Zu zeigen ist die Existenz und Eindeutigkeit von einem  $B$ -Homomorphismus  $f : I/I^2 \rightarrow M$  mit  $D = f \circ d$ . Da  $I = \sum Bdb$  ist, folgt die Eindeutigkeit.

Betrachte die *triviale Erweiterung*  $B * M$  von  $B$  mit  $M$ , d.h.  $B \oplus M$  mit der Multiplikation  $(b_1, m_1)(b_2, m_2) = (b_1 b_2, b_1 m_2 + b_2 m_1)$ . Dann ist  $B * M$  ein Ring mit Einselement  $(1, 0)$ .  $B * M$  trägt eine  $B$ -Modulstruktur via  $b'(b, m) = (bb', bm)$ , d.h.  $B * M$  ist eine  $B$ -Algebra. Wir haben kanonische  $B$ -Homomorphismen:

- Die Einbettung  $M \hookrightarrow B * M$ ,  $m \mapsto (0, m)$
- Die Projektion  $B * M \rightarrow B$ ,  $(b, m) \mapsto b$

Betrachte den  $B$ -Algebrenhomomorphismus  $\varphi : B \otimes_A B \rightarrow B * M$ ,  $x \otimes y \mapsto (xy, xDy)$ . Es gilt  $\varphi(I) \subset M \subset B * M$ , da  $\varphi(db) = \varphi(1 \otimes b - b \otimes 1) = (b, Db) - (b, bD1) = (0, Db)$ . Da  $M^2 = 0$  in  $B * M$ , induziert  $\varphi$  eine Abbildung  $\phi : B \otimes_A B/I^2 \rightarrow B * M$ . Dann erfüllt  $f = \phi|_{I/I^2} : I/I^2 \rightarrow M$  die gewünschte Eigenschaft  $f \circ d = D$ .  $\square$

**Satz 8.4.** Es gibt für jeden  $B$ -Modul  $M$  einen kanonischen  $B$ -Modulisomorphismus:

$$\text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \rightarrow \text{Der}_A(B, M), \quad f \mapsto f \circ d$$

**Beweis.** Folgt direkt aus der Universaleigenschaft.  $\square$

**Beispiel 8.5.** Sei  $B = A[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^n B dX_i$  ein freier  $B$ -Modul vom Rang  $n$ . Allgemein gilt: Wird  $B$  als  $A$ -Algebra von  $y_1, \dots, y_m$  erzeugt, so ist  $\Omega_{B/A} = \sum_{i=1}^m B dy_i$ , da:

$$d\left(\prod_i y_i^{n_i}\right) = \sum_i n_i \prod_{j \neq i} y_j^{n_j} y_i^{n_i-1} dy_i$$



Angenommen,  $\sum_i b_i dX_i = 0$ . Betrachte die Derivationen  $\frac{\partial}{\partial X_i} \in \text{Der}_A(B)$ . Nach Satz 8.4 existiert für jedes  $k$  ein  $f_k \in \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B)$  mit  $\frac{\partial}{\partial X_k} = f_k \circ d$ . Es gilt für alle  $k$ :

$$0 = f_k \left( \sum_{i=1}^n b_i dX_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i f_k(dX_i) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial X_i}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^n b_i \delta_{ik} = b_k$$

Somit ist  $\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^n B dX_i$

**Satz 8.6.**

(i) Sei  $S$  eine multiplikative Teilmenge der  $A$ -Algebra  $B$ . Dann gilt:

$$S^{-1}\Omega_{B/A} \cong \Omega_{S^{-1}B/A}$$

(ii) Seien  $A', B$   $A$ -Algebren und  $B' = B \otimes_A A'$ . Dann gilt:

$$\Omega_{B'/A'} \cong \Omega_{B/A} \otimes_B B'$$

**Satz 8.7.** Seien  $\phi : A \rightarrow B$ ,  $\psi : B \rightarrow C$  Ringhomomorphismen. Dann gilt:

(i) (*Erste fundamentale exakte Sequenz*) Es gibt eine exakte Sequenz:

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \xrightarrow{u} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0$$

(ii)  $v$  ist injektiv und die Sequenz zerfällt, genau dann wenn für alle  $C$ -Moduln  $M$  und jedes  $D \in \text{Der}_A(B, M)$  zu einer Derivation aus  $\text{Der}_A(C, M)$  fortgesetzt werden kann.

**Beweis.** Definiere  $u$  und  $v$  durch:

$$v(db \otimes c) = cd\psi(b), \quad u(cdc') = cdc', \quad b \in B, \quad c, c' \in C$$

Äquivalent zu (i) bzw. (ii) ist die Exaktheit der 4-Term- bzw. 5-Termsequenzen:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \dashrightarrow 0$$

Da  $\text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \cong \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$ , ist nach Satz 8.4 ist die Exaktheit nachzuweisen von:

$$0 \longrightarrow \text{Der}_B(C, M) \longrightarrow \text{Der}_A(C, M) \longrightarrow \text{Der}_A(B, M) \dashrightarrow 0$$

Die vorletzte Abbildung ist gegeben durch  $(\delta : C \rightarrow M) \mapsto (\delta \circ \psi : B \rightarrow M)$ . Ohne die 0 rechts ist diese Folge per Definition exakt. Mit der 0 rechts ist die Folge genau dann exakt, wenn die Forderung in (ii) gilt.  $\square$

**Beispiel 8.8.** Sei  $B$  eine  $A$ -Algebra und  $C = B[x_1, \dots, x_n]$ . Sei  $M$  ein beliebiger  $C$ -Modul und  $D \in \text{Der}_A(B, M)$ . Sei  $\tilde{D} : C \rightarrow M$  die einem Polynom  $F$ , den Polynom  $F^D$  zuordnet, wobei  $F^D$  das Polynom ist, das man durch Anwenden von  $D$  auf die Koeffizienten von  $F$  erhält. Dann ist  $\tilde{D}$  eine Derivation mit  $\tilde{D}|_B = D$ . Nach Satz 8.7 (ii) gilt:

$$\Omega_{C/A} \cong (\Omega_{B/A} \otimes_B C) \oplus Cdx_1 \oplus \dots \oplus Cdx_n$$

**Satz 8.9.** (*Zweite fundamentale exakte Sequenz*) Sei  $B$  eine  $A$ -Algebra,  $I$  ein Ideal in  $B$  und  $C = B/I$ . Es gibt eine kanonische, exakte Folge von  $C$ -Moduln:

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

wobei  $v(db \otimes c) = cd\bar{b}$  und  $\delta$  die durch die Abbildung  $I \rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$ ,  $x \mapsto dx \otimes 1$  induzierte  $C$ -lineare Abbildung ist.

**Beweis.** Für  $x, x' \in I$  gilt:

$$d(xx') \otimes 1 = dx \otimes x' + dx' \otimes x = 0$$

Daher ist  $\delta$  wohldefiniert. Nun ist für alle  $C$ -Moduln  $M$  die folgenden Folgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(I/I^2, M) \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \text{Der}_A(B/I, M) & \longrightarrow & \text{Der}_A(B, M) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_B(I, M) \end{array}$$

wobei  $\varphi(D : B \rightarrow M) = (D|_I : I \rightarrow M)$ . □

**Korollar 8.10.** Ist  $B$  eine endlich erzeugte  $A$ -Algebra oder Lokalisierung einer endlich erzeugten  $A$ -Algebra, so ist  $\Omega_{B/A}$  endlich erzeugter  $B$ -Modul.

**Beweis.** Es ist  $B \cong A[x_1, \dots, x_n]/I$  für ein Ideal  $I$ . Wegen Beispiel 8.5 ist  $\Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A}$  ein endlich erzeugter  $A[x_1, \dots, x_n]$ -Modul. Nach Satz 8.9 ist  $\Omega_{B/A}$  ein endlich erzeugter  $B$ -Modul. Die Aussage über die Lokalisierung folgt aus Satz 8.6 (i). □

**Definition 8.11.** Eine Körpererweiterung  $K/k$  heißt *separabel erzeugt*, falls es eine Transzendenzbasis  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  für  $K/k$  gibt, so dass  $K/k[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$  separabel ist.

**Satz 8.12.** Sei  $K/k$  eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann gilt:

(i)  $\dim_K \Omega_{K/k} \geq \text{trdeg}(K/k)$

(ii) Gleichheit in (i) gilt genau dann, wenn  $K/k$  separabel erzeugt ist.

**Korollar 8.13.** Sei  $K/k$  eine endliche Erweiterung. Dann gilt:

$$\Omega_{K/k} = 0 \iff K/k \text{ ist separabel}$$

**Satz 8.14.** Sei  $B$  ein lokaler Ring mit Maximalideal  $\mathfrak{m}$  und Restklassenkörper  $k$ . Ferner gebe es einen Schnitt von  $B \twoheadrightarrow k$ , also ist  $B$  eine  $k$ -Algebra. Dann ist die Abbildung  $\delta$  in der zweiten fundamentalen Sequenz ein Isomorphismus:

$$\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B k$$

**Beweis.** Es ist  $\text{coker}(\delta) = \Omega_{k/k} = 0$ . Die Injektivität von  $\delta$  ist äquivalent zur Surjektivität von:

$$\delta^* : \text{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$$

Nun ist  $\text{Hom}_k(\Omega_{B/k} \otimes_B k, k) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/k}, k) = \text{Der}_k(B, k)$ . Die Abbildung  $\text{Der}_k(B, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ ,  $(d : B \rightarrow k) \mapsto (d|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \rightarrow k)$  kommutiert mit  $\delta^*$ . Beachte, dass für  $d \in \text{Der}_k(B, k)$  stets  $d(\mathfrak{m}^2) = 0 \in k$  gilt.

Sei nun  $h \in \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$  und  $b \in B$ . Wegen des Schnitts  $k \rightarrow B$ , hat  $b$  eine eindeutige Darstellung  $b = \lambda + c$ ,  $\lambda \in k$ ,  $c \in \mathfrak{m}$ . Setze  $d : B \rightarrow k$ ,  $d(b) = h(\bar{c})$ . Dann ist  $d(k) = 0$ ,  $d$  additiv und es gilt:

$$\begin{aligned} d(bb') &= d(\lambda\lambda' + \lambda c' + \lambda'c + cc') \\ &= h(\overline{\lambda c' + \lambda'c}) \\ &= \lambda h(\bar{c}') + \lambda' h(\bar{c}) \\ &= \lambda d(b') + \lambda' d(b) = bd(b') + b'd(b) \in k \end{aligned}$$

für alle  $b = \lambda + c$ ,  $b' = \lambda' + c' \in B$ . Es gilt  $\delta^*(d) = h$ . □

**Satz 8.15.** Sei  $B$  ein lokaler Ring und es gebe einen Schnitt von  $B \rightarrow k$ . Ferner sei der Restklassenkörper  $k$  vollkommen. Sei  $B$  die Lokalisierung einer endlich erzeugten  $k$ -Algebra. Dann ist  $\Omega_{B/k}$  genau dann ein freier  $B$ -Modul vom Rang  $\dim(B)$ , wenn  $B$  regulär ist.

**Beweis.** Sei  $\Omega_{B/k}$  frei vom Rang  $\dim(B)$ . Nach Satz 8.14 ist  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(B)$ , also ist  $B$  per Definition regulär.

Sei umgekehrt  $B$  regulär von Dimension  $r$ . Nach Satz 8.14 gilt:

$$r = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_k \Omega_{B/k} \otimes_B k$$

Sei  $K$  der Quotientenkörper von  $B$ . Nach Satz 8.6 ist  $\Omega_{B/k} \otimes_B K = \Omega_{K/k}$ . Nun ist  $K/k$  separabel erzeugt, da  $k$  vollkommen (siehe z.B. Matsumura Chapter 10, Corollary p. 194). Nach Satz 8.12 gilt:

$$\dim_K \Omega_{K/k} = \text{trdeg}(K/k) = \dim(B) = r$$

Nach Korollar 8.10 ist  $\Omega_{B/k}$  endlich erzeugter  $B$ -Modul. □

**Lemma 8.16.** Sei  $A$  ein noetherscher, lokaler, nullteilerfreier Ring mit Restklassenkörper  $k$  und Quotientenkörper  $K$ . Sei  $M$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul mit:

$$\dim_k(M \otimes_A k) = \dim_K(M \otimes_A K) = r$$

Dann ist  $M$  frei vom Rang  $r$ .

**Beweis.** Wegen  $\dim_k(M \otimes_A k) = r$ , gibt es nach Nakayama eine Surjektion  $\varphi : A^r \rightarrow M$ . Setze  $N = \ker(\varphi)$ . Da  $K$  flach über  $A$  ist, haben wir eine kurze exakte Folge:

$$0 \longrightarrow N \otimes_A K \longrightarrow K^r \longrightarrow M \otimes_A K \longrightarrow 0$$

Da  $\dim_K(M \otimes_A K) = \dim_K K^r$ , folgt  $N \otimes_A K = 0$ , also  $N = 0$ , da  $N \subset A^r$  und  $A$  torsionsfrei ist.  $\square$

## Differentialgarben

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata und  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  die Diagonale.  $\Delta$  ist nach Satz 3.30 eine Immersion und liefert ein Isomorphismus auf  $\Delta(X)$ , wobei  $\Delta(X)$  ein abgeschlossenes Unterschema eines offenen Unterschema  $W \subset X \times_Y X$  ist.

**Definition 8.17.** Sei  $\mathcal{J}$  die Idealgarbe von  $\Delta(X)$  in  $W$ . Dann heißt

$$\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

die Garbe der *relativen Differentiale* von  $X$  über  $Y$ .

## Bemerkung 8.18.

- (i)  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  ist ein  $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$ -Modul und somit ist über den Isomorphismus  $X \rightarrow \Delta(X)$  die Modulgarbe  $\Omega_{X/Y}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Wegen Satz 5.13 (i) ist  $\Omega_{X/Y}$  quasikohärent. Ist  $Y$  noethersch und  $f : X \rightarrow Y$  von endlichem Typ, und somit  $X$  und  $X \times_Y X$  noethersch, dann ist  $\Omega_{X/Y}$  kohärent.
- (ii) Sei  $U = \text{Spec}(A) \subset_o Y$  und  $V = \text{Spec}(B) \subset_o X$  mit  $f(V) \subset U$ . Dann ist  $V \times_U V$  affin offen in  $X \times_Y X$  mit  $V \times_U V = \text{Spec}(B \otimes_A B)$ . Es ist

$$\Delta(X) \cap V \times_U V = \text{Spec}(B \otimes_A B / \ker(B \otimes_A B \rightarrow B))$$

ein abgeschlossenes Unterschema von  $V \times_U V$ . Sei  $I = \ker(B \otimes_A B \rightarrow B)$ , also gilt:

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_{\Delta(X) \cap V \times_U V} = \widetilde{I/I^2}$$

Nach Satz 8.3 folgt  $\Omega_{V/U} = \widetilde{\Omega_{B/A}}$ . Somit ist Definition 8.17 verträglich mit dem affinen Fall. Ist  $X = \bigcup V$  eine Überdeckung durch affin offenen  $V$  und  $Y = \bigcup U$  eine Überdeckung durch affin offenen  $U$ , so liefert die Verklebung von  $\widetilde{\Omega_{B/A}}$ ,  $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  gerade  $\Omega_{X/Y}$ ,  $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/Y}$ .  $d$  ist ein Garbenmorphismus und ist in jedem Punkt eine Derivation von lokalen Ringen.

**Satz 8.19.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus und  $g : Y' \rightarrow Y$  ein weiterer Morphismus. Betrachte den Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Dann gilt  $\Omega_{X'/Y'} \cong (g')^*(\Omega_{X/Y})$ .

**Beweis.** Folgt aus Bemerkung 8.18 (ii) und Satz 8.6 (ii). □

**Satz 8.20.** Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Morphismen. Dann gibt es eine exakte Garbensequenz auf  $X$ :

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

**Beweis.** Es reicht, die Exaktheit lokal zu überprüfen. Dies folgt aus der ersten fundamentalen exakten Sequenz. □

**Satz 8.21.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus und  $Z$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$  zum Ideal  $\mathcal{J}$ . Dann gibt es eine exakte Sequenz von Garben auf  $Z$ :

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

**Beweis.** Folgt aus der zweiten fundamentalen exakten Sequenz. □

**Satz 8.22.** Sei  $X = \mathbf{A}_Y^n$ . Dann ist  $\Omega_{X/Y}$  ein freier  $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang  $n$ , erzeugt von globalen Schnitten  $dx_1, \dots, dx_n$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  die affinen Koordinaten von  $\mathbf{A}_Y^n$  sind.

**Beweis.** Folgt aus Beispiel 8.5. □

**Satz 8.23.** Sei  $A$  ein Ring und  $Y = \operatorname{Spec}(A)$ . Sei  $X = \mathbf{P}_A^n$ . Dann gibt es eine exakte Sequenz von Garben auf  $X$ :

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

**Beweis.** Sei  $S = A[x_0, \dots, x_n]$  der homogene Koordinatenring von  $X$  und setze:

$$E = \bigoplus_{i=0}^n S(-1)e_i$$

als den graduierten  $S$ -Modul mit Basis  $e_0, \dots, e_n$  im Grad 1. Betrachte den  $S$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : E \rightarrow S$ ,  $e_i \mapsto x_i$  im Grad 0 und  $M = \ker(\varphi)$ . Wir erhalten eine exakte Garbensequenz:

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

$\varphi : E \rightarrow S$  ist in allen Graden größer gleich 1 surjektiv, also ist  $\tilde{\varphi}$  surjektiv. Wir zeigen nun  $\widetilde{M} = \Omega_{X/Y}$ .

Lokalisierung nach  $x_i$  liefert eine Surjektion von freien  $S_{x_i}$ -Moduln  $E_{x_i} \rightarrow S_{x_i}$ .  $M_{x_i}$  ist frei vom Rang  $n$  mit Basis  $\{e_j - \frac{x_j}{x_i}e_i \mid j \neq i\}$ . Multiplikation mit  $\frac{1}{x_i}$  liefert Elemente vom Grad 0 in  $M_{x_i}$ . Also ist  $\widetilde{M}|_{D_+(x_i)}$  ein freier  $\mathcal{O}_{D_+(x_i)}$ -Modul, der von den globalen Schnitten  $\{\frac{1}{x_i}e_j - \frac{x_j}{x_i^2}e_i \mid j \neq i\}$  erzeugt wird. Definiere  $\varphi_i : \Omega_{X/Y}|_{D_+(x_i)} \rightarrow \widetilde{M}|_{D_+(x_i)}$  wie folgt:

Es ist  $D_+(x_i) = \text{Spec } A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ . Nach Satz 8.22 gilt:

$$\Omega_{X/Y}|_{D_+(x_i)} = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_{D_+(x_i)} d \frac{x_j}{x_i}$$

Setze nun  $\varphi_i(d \frac{x_j}{x_i}) = \frac{1}{x_i^2}(x_i e_j - x_j e_i)$ .  $\varphi_i$  ist ein Isomorphismus. Die  $\varphi_i$  lassen sich nun zu einem Isomorphismus  $\varphi : \Omega_{X/Y} \rightarrow \widetilde{M}$  verkleben.  $\square$

## Nicht-singuläre Varietäten

**Definition 8.24.** Eine Varietät  $X$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , d.h. ein integres, separiertes Schema von endlichem Typ, heißt *nicht-singulär*, wenn alle lokalen Ringe regulär sind.

**Satz 8.25.** Sei  $X$  ein irreduzibles, separiertes Schema von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Dann ist  $\Omega_{X/k}$  genau dann lokal frei vom Rang  $n = \dim(X)$ , wenn  $X$  eine nicht-singuläre Varietät über  $k$  ist.

**Lemma 8.26.** Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe. Dann ist  $\mathcal{F}$  genau dann lokal frei, wenn  $\mathcal{F}_x$  freier  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul für alle  $x \in X$  ist.

**Korollar 8.27.** Sei  $X$  eine nicht-singuläre Varietät über  $k$  und  $Y \subset X$  ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema zur Idealgarbe  $\mathcal{J}$ . Dann ist  $Y$  genau dann nicht-singulär, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\Omega_{Y/k}$  ist lokal frei.
- (ii) In der exakten Sequenz aus Satz 8.21 ist  $\delta$  injektiv:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0$$

# 3 Kohomologie

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für abelsche Kategorien:

- **Ab**, die Kategorie der abelschen Gruppen
- **Mod**( $A$ ), die Kategorie der Moduln über einem kommutativen Ring  $A$  mit Eins
- **Ab**( $X$ ), die Kategorie der Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum  $X$
- **Mod**( $X$ ) oder **Mod**( $\mathcal{O}_X$ ), die Kategorie der  $\mathcal{O}_X$ -Moduln auf einem geringten Raum  $X$  mit Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$ .
- **Qcoh**( $X$ ) oder **Qcoh**( $\mathcal{O}_X$ ), die Kategorie der quasikohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduln auf einem Schema  $X$
- **Coh**( $X$ ) oder **Coh**( $\mathcal{O}_X$ ), die Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben auf einem noetherschen Schema  $X$

## 3.1 Kohomologie von Garben

**Satz 9.15.** Sei  $A$  ein Ring. Dann ist jeder  $A$ -Modul isomorph zu einem Untermodul eines injektiven  $A$ -Moduls.

**Satz 9.16.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum. Dann hat die Kategorie **Mod**( $\mathcal{O}_X$ ) genügend viele Injektive.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ . Dann ist  $\mathcal{F}_x \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$ . Nach Satz 9.15 gibt es ein Monomorphismus  $\mathcal{F}_x \rightarrow I_x$  mit einem injektiven  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul  $I_x$ . Sei  $j : \{x\} \hookrightarrow X$  die kanonische Inklusion und betrachte die  $I_x$  als Garben auf  $\{x\}$ . Setze  $\mathcal{J} = \prod_{x \in X} j_* I_x$ . Dann gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, j_* I_x) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, I_x)$$

Die  $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$  geben ein Monomorphismus  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{J}$ . Ferner gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{J}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((-)_x, I_x)$$

Da Halmbildung exakt und  $I_x$  injektive Objekte sind, ist dies ein exakter Funktor. Somit ist  $\mathcal{J}$  ein injektiver  $\mathcal{O}_X$ -Modul. □

**Korollar 9.17.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann besitzt  $\mathbf{Ab}(X)$  genügend viele Injektive.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{O}_X$  die konstante Garbe  $\mathbb{Z}$  auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum und es gilt  $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) = \mathbf{Ab}(X)$ .  $\square$

**Definition 9.18.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\Gamma(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$  der globale Schnittfunktor. Wir definieren:

$$H^i(X, -) = R^i\Gamma(X, -)$$

$H^i(X, \mathcal{F})$  heißt *i-te Kohomologiegruppe* von der Garbe  $\mathcal{F}$ . Haben  $X$  und  $\mathcal{F}$  Zusatzstrukturen, z.B.  $X$  Schema oder  $\mathcal{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , so wird die Kohomologie trotzdem immer im obigen Sinne verstanden, d.h.  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(X)$ .

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.  $\mathcal{F}$  heißt *welk*, falls für alle offenen  $V \subset U$  die Restriktionsabbildung  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  surjektiv ist.

**Lemma 9.19.** Ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum, so ist jeder injektiver  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{J}$  welk.

**Beweis.** Seien  $i : U \hookrightarrow X$  und  $j : V \hookrightarrow X$  die natürlichen Inklusionen. Betrachte die Inklusion  $j_!\mathcal{O}_X|_V \hookrightarrow i_!\mathcal{O}_X|_U$  von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Es folgt die Surjektivität von:

$$\mathcal{J}(U) = \mathrm{Hom}(i_!\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{J}) \rightarrow \mathrm{Hom}(j_!\mathcal{O}_X|_V, \mathcal{J}) = \mathcal{J}(V) \quad \square$$

**Satz 9.20.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  eine welke Garbe auf  $X$ . Dann ist  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für alle  $i > 0$ .

**Lemma 9.21.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von Garben.

(i) Ist  $\mathcal{G}'$  eine welke Garbe, so ist für alle  $U \subset_o X$  die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}'(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}''(U) \longrightarrow 0$$

(ii) Sind  $\mathcal{G}'$  und  $\mathcal{G}$  welk, so auch  $\mathcal{G}''$ .

**Beweis.**

(i) Sei o.B.d.A.  $U = X$  und sei  $s'' \in \mathcal{G}''(X)$ . Setze:

$$E = \{(U, s) \mid U \subset_o X, s \in \mathcal{G}(U), s \mapsto s''|_U\}$$



$E$  ist partiell geordnet bzgl. Inklusion. Jede Kette in  $E$  besitzt eine obere Schranke in  $E$ . Nach Zorns Lemma gibt es ein maximales Element  $(U, s) \in E$ .

Gibt es ein  $x \in X \setminus U$ , so existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  und  $t \in \mathcal{G}(V)$  mit  $t \mapsto s''|_V$ , da  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}''$  surjektiv ist. Da  $\mathcal{G}'$  welk ist, so setzt sich  $s - t \in \mathcal{G}'(U \cap V)$  zu einem Schnitt auf  $\mathcal{G}'(V)$  fort. Ersetzen wir  $t$  durch  $s - t \in \mathcal{G}'(V)$ , können wir o.B.d.A.  $s = t$  auf  $V$  annehmen. Die Existenz von  $(V, s)$  ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $(U, s)$ . Somit folgt  $U = X$ .

(ii) Für  $V \subset U$  offen in  $X$  kommutiert das folgende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}''(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}''(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es folgt die Surjektivität von  $\mathcal{G}''(U) \rightarrow \mathcal{G}''(V)$ . □

**Beweis von 9.20.** Sei  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  exakt mit  $\mathcal{J}$  injektiv. Nun sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{J}$  welk. Nach Lemma 9.21 ist auch  $\mathcal{G}$  welk und wir haben eine exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow 0$$

Da  $H^i(X, \mathcal{J}) = 0$  für alle  $i > 0$ , gilt  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$  und  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^{i-1}(X, \mathcal{G})$  für alle  $i \geq 2$ . Somit folgt die Aussage per Induktion nach  $i$ . □

**Satz 9.22.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum. Dann sind die derivierten Funktoren von

$$\Gamma(X, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

gerade die Kohomologie-Funktoren.

**Beweis.**  $R^i\Gamma(X, -)$  wird über eine injektive Auflösung in  $\mathbf{Mod}(X)$  berechnet. Nun sind injektive Objekte in  $\mathbf{Mod}(X)$  nach Lemma 9.19 welk und nach Satz 9.20 insbesondere azyklisch bzgl.  $\Gamma(X, -)$ . Somit ist  $R^i\Gamma(X, -) = H^i(X, -)$ . □

**Bemerkung 9.23.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum und  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Da die Kohomologie durch Auflösungen in der Kategorie  $\mathbf{Mod}(X)$  berechnet werden kann, haben alle Kohomologiegruppen von  $\mathcal{F}$  eine  $A$ -Modulstruktur mit  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ .

**Lemma 9.24.** Sei  $X$  ein noetherscher topologischer Raum und  $\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}$ . Dann gilt:

(i)  $\mathcal{F}(X) = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}(X)$

(ii) Sind alle  $\mathcal{F}_{\alpha}$  welk, so auch  $\mathcal{F}$ .

**Beweis.**

- (ii) Für alle  $\alpha$  und  $V \subset U$  offen in  $X$  ist  $\mathcal{F}_\alpha(U) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(V)$  surjektiv. Da  $\varinjlim$  exakt ist, folgt mit (i) die Surjektivität von:

$$\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha(U) \rightarrow \varinjlim_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha(V) = \mathcal{F}(V)$$

- (i) Der Funktor  $\Gamma(X, -)$  vertauscht mit  $\varinjlim$ , siehe z.B. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, p. 169.  $\square$

**Satz 9.25.** Sei  $X$  ein noetherscher topologischer Raum und  $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$  ein induktives System in  $\mathbf{Ab}(X)$ . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus:

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$$

**Beweis.** Für alle  $\alpha$  haben wir natürliche Abbildungen  $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ . Wir erhalten  $H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \rightarrow H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$  und daher eine Abbildung:

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \rightarrow H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$$

Dies ist nach Lemma 9.24 (i) für  $i = 0$  ein Isomorphismus. Betrachte die abelsche Kategorie  $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$  der direkten Limiten von Objekten aus  $\mathbf{Ab}(X)$  indiziert durch  $A$ . Da  $\varinjlim$  exakt ist, haben wir eine natürliche Transformation von  $\delta$ -Funktoren  $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X)) \rightarrow \mathbf{Ab}$

$$\varinjlim H^i(X, -) \rightarrow H^i(X, \varinjlim -)$$

die für  $i = 0$  übereinstimmt. Jetzt genügt es zu zeigen, dass beide Funktoren auslöschar sind. Dann sind beide universell und insbesondere gleich.

Sei  $(\mathcal{F}_\alpha) \in \mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$ . Zu  $\alpha$  definieren wir die Garbe  $\mathcal{G}_\alpha$  wie folgt:

$$U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \prod_{P \in U} (\mathcal{F}_\alpha)_P \mid s(P) \in (\mathcal{F}_\alpha)_P \right\}$$

Dann ist  $\mathcal{G}_\alpha$  welk und  $\mathcal{F}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{G}_\alpha$ . Nach Konstruktion bilden die  $\mathcal{G}_\alpha$  ein induktives System und wir erhalten einen Monomorphismus  $u : (\mathcal{F}_\alpha) \hookrightarrow (\mathcal{G}_\alpha)$  in  $\mathbf{Ind}_A(\mathbf{Ab}(X))$ . Ferner gilt  $H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$  für alle  $i > 0$  nach Satz 9.20, also  $\varinjlim H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$  für alle  $i > 0$ . Somit ist  $\varinjlim H^i(X, -)$  auslöschar.

Da  $\varinjlim \mathcal{G}_\alpha$  nach Satz 9.24 (ii) welk ist, ist auch  $H^i(X, \varinjlim \mathcal{G}_\alpha) = 0$  für alle  $i > 0$ , d.h. auch  $H^i(X, \varinjlim -)$  ist auslöschar.  $\square$

**Lemma 9.26.** Sei  $Y \subset X$  abgeschlossen mit natürlicher Inklusion  $i : Y \hookrightarrow X$  und  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(Y)$ . Dann gilt:

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, i_* \mathcal{F})$$

**Beweis.** Sei  $\mathcal{J}^\bullet$  eine injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$  auf  $Y$ ; insbesondere ist  $\mathcal{J}^\bullet$  eine welke Auflösung. Dann ist  $i_*\mathcal{J}^\bullet$  eine welke Auflösung von  $i_*\mathcal{F}$  auf  $X$ . Für alle  $i$  gilt:

$$\Gamma(Y, \mathcal{J}^i) = \Gamma(X, i_*\mathcal{J}^i)$$

Somit ergeben sich die gleichen Kohomologiegruppen. □

**Satz 9.27.** (*Verschwindungssatz von Grothendieck*) Sei  $X$  ein noetherscher topologischer Raum der Dimension  $n$ . Dann gilt für alle abelschen Garben  $\mathcal{F}$  auf  $X$ :

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{für alle } i > n$$

**Beweis.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$ .

1. Schritt: (*Reduktion auf irreduzible  $X$* ) Sei  $X$  reduzibel und  $Y \subset X$  eine irreduzible Komponente mit Einbettungen  $i : Y \hookrightarrow X$ ,  $j : U = X \setminus Y \hookrightarrow X$ . Nach 1.16 ist die folgende Garbensequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0$$

wobei  $\mathcal{F}_U = j_!(\mathcal{F}|_U)$  und  $\mathcal{F}_Y = i_*(\mathcal{F}|_Y)$  ist. Es genügt zu zeigen, dass  $H^i(X, \mathcal{F}_U) = 0 = H^i(X, \mathcal{F}_Y)$  für alle  $i > n$  ist. Betrachte  $g : \overline{U} \hookrightarrow X$ . Nun hat  $\overline{U}$  weniger irreduzible Komponenten als  $X$ . Setze  $\mathcal{F}_{\overline{U}} = g^*\mathcal{F}_U$ . Es folgt nach Lemma 9.26:

$$H^i(\overline{U}, \mathcal{F}_{\overline{U}}) = H^i(X, g_*\mathcal{F}_{\overline{U}}) = H^i(X, \mathcal{F}_U)$$

$$H^i(X, \mathcal{F}_Y) = H^i(X, i_*\mathcal{F}|_Y) = H^i(Y, \mathcal{F}|_Y)$$

Per Induktion nach Anzahl der irreduziblen Komponenten von  $X$  können wir ohne Einschränkung  $X$  als irreduzibel annehmen.

2. Schritt: Sei  $X$  irreduzibel und  $\dim(X) = 0$ . Die einzigen offenen Mengen von  $X$  sind  $\emptyset$  und  $X$ , d.h.  $\Gamma(X, -) : \mathbf{Ab}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$  ist eine Äquivalenz von Kategorien. Insbesondere ist  $\Gamma(X, -)$  exakt, d.h.  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für alle  $i > 0$ .
3. Schritt: Sei  $X$  irreduzibel und  $\dim(X) = n$ . Sei  $j : U \hookrightarrow X$  offen und  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Da

$$\mathcal{F}(U) = \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{F}(U)) = \text{Hom}_U(\mathbb{Z}|_U, \mathcal{F}|_U) = \text{Hom}_X(j_!(\mathbb{Z}|_U), \mathcal{F})$$

wobei  $\mathbb{Z}|_U$  die konstante Garbe bezeichnet, entspricht  $s$  einen Morphismus  $j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$ . Setze  $\mathcal{F}_s = \text{im}(j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F})$ .  $\mathcal{F}_s$  heißt die von  $s$  erzeugte Untergarbe von  $\mathcal{F}$ . Sei  $\alpha = (s_i)_{i \in I}$ ,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  eine beliebige Familie von Schnitten. Setze:

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{i \in I} \mathcal{F}_{s_i} \subset \mathcal{F}$$

Sei  $J$  die Menge aller endlichen Familien  $\alpha = (s_i)$ .  $J$  wird mit der folgenden partiellen Ordnung zu einem gerichteten System:

$$\alpha' \leq \alpha \iff \alpha' \text{ ist Unterfamilie von } \alpha$$

Für  $\alpha' \leq \alpha$  gilt  $\mathcal{F}_{\alpha'} \subset \mathcal{F}_{\alpha}$ . Somit ist  $\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha \in J} \mathcal{F}_{\alpha}$ . Nach Satz 9.25 reicht es zu zeigen, dass  $H^i(X, \mathcal{F}_{\alpha}) = 0$  für alle  $i > n$  und alle  $\alpha \in J$ .

Sei nun  $\alpha' \leq \alpha$ . Betrachte die exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha'} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ .  $\mathcal{G}$  ist erzeugt von  $\#\alpha - \#\alpha'$  Schnitten über geeignete offenen Mengen. Per Induktion nach  $\#\alpha$  können wir unter Betrachtung der langen exakten Kohomologiefolge o.B.d.A. annehmen, dass  $\mathcal{F}$  von einem Schnitt über einer geeigneten offenen Menge  $U$  erzeugt wird, d.h.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$ . Die zu  $s$  gehörige Morphismus  $\mathbb{Z}_U = j_!(\mathbb{Z}|_U) \rightarrow \mathcal{F}$  ist surjektiv.

Definiere die Garbe  $\mathcal{R}$  durch die exakte Folge  $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ . Unter Betrachtung der langen exakten Kohomologiefolge genügt es zu zeigen, dass  $H^i(X, \mathcal{R}) = 0 = H^i(X, \mathbb{Z}_U)$  für alle  $i > n$  ist.

4. Schritt: Wir zeigen  $H^i(X, \mathcal{R}) = 0$  für alle  $i > n$  per Induktion über  $n = \dim(X)$ . Für  $x \in U$  ist  $\mathcal{R}_x$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ . Ist  $\mathcal{R} = 0$ , so folgt  $\mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_U$ . Sei nun  $\mathcal{R} \neq 0$ . Setze:

$$d = \min\{m > 0 \mid m \in \mathcal{R}_x, x \in U\}$$

Es existiert ein  $\emptyset \neq V \subset_o U$  mit  $\mathcal{R}|_V \cong d \cdot \mathbb{Z}|_V \subset \mathbb{Z}|_V$ . Wir erhalten  $\mathcal{R}_V = j_!(\mathcal{R}|_V) = \mathbb{Z}_V$ , wobei  $j : V \hookrightarrow X$  die kanonische Inklusion ist. Wir erhalten die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_V \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \longrightarrow 0$$

Nun gilt  $\text{supp}(\mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) \subset \overline{U \setminus V} \subset X$ . Da  $X$  irreduzibel ist, gilt  $\dim(\overline{U \setminus V}) < n$ . Aus der Induktionsannahme folgt mit Lemma 9.26 für alle  $i \geq n$ :

$$H^i(X, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) = H^i(\overline{U \setminus V}, \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V|_{\overline{U \setminus V}}) = 0$$

Nach der langen exakten Kohomologiesequenz reicht es zu zeigen, dass  $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$  für  $i > n$  gilt.

5. Schritt: Wir zeigen  $H^i(X, \mathbb{Z}_V) = 0$  für alle  $i > n$  per Induktion über  $n = \dim(X)$ . Sei  $U \subset_o X$  und  $Y = X \setminus U$ . Dann ist  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow 0$  exakt nach 1.16. Wegen  $\dim(Y) < \dim(X)$  folgt nach der Induktionsannahme und Lemma 9.26 für alle  $i \geq n$ :

$$H^i(X, \mathbb{Z}_Y) = H^i(Y, \mathbb{Z}|_Y) = 0$$

Ferner ist die konstante Garbe  $\mathbb{Z}$  welk. Nach Satz 9.20 folgt  $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$  für alle  $i > 0$ . Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert  $H^i(X, \mathbb{Z}_U) = 0$  für  $i > n$ .  $\square$

**Satz 9.28.** Sei  $X = \text{Spec}(A)$  noethersch. Dann ist  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für alle  $i > 0$  und alle quasikohärenten Garben  $\mathcal{F}$ .

**Bemerkung.** Dieser Satz gilt auch für nicht-noethersche Ringe  $A$ .

**Satz von Krull.** Sei  $A$  ein noetherscher Ring,  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal und  $M \subset N$  endlich erzeugte  $A$ -Moduln. Dann ist die  $\mathfrak{a}$ -adische Topologie auf  $M$  induziert von der  $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie auf  $N$ , d.h:

$$\forall n \geq 0, \exists m \geq n : \mathfrak{a}^n M \supset \mathfrak{a}^m N \cap M$$

**Beweis.** Siehe beispielsweise Bosch: Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2.3. Lemma 1.  $\square$

**Definition.** Sei  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal und  $M$  ein  $A$ -Modul. Wir definieren:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M \mid \exists n > 0 : \mathfrak{a}^n m = 0\}$$

**Lemma 9.29.** Sei  $A$  noethersch,  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal und  $I$  ein injektiver  $A$ -Modul. Dann ist  $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$  ebenfalls injektiv.

**Beweis.** Setze  $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ . Wir zeigen zunächst: Für alle Ideale  $\mathfrak{b} \subset A$  und alle  $A$ -Modulhomomorphismen  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$  gibt es einen  $A$ -Modulhomomorphismus  $\psi : A \rightarrow J$  mit  $\psi|_{\mathfrak{b}} = \varphi$ .

Sei  $\mathfrak{b} \subset A$  ein notwendigerweise endlich erzeugtes Ideal und  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$  ein  $A$ -Modulhomomorphismus. Zu  $x \in J$  gibt es nach Definition ein  $n > 0$  mit  $\mathfrak{a}^n x = 0$ . Da  $\mathfrak{b}$  endlich erzeugt ist, existiert ein  $n$  mit:

$$0 = \mathfrak{a}^n \varphi(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}^n \mathfrak{b})$$

Nach dem Satz von Krull gibt es ein  $m \geq n$  mit  $\mathfrak{a}^m \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m$ , also  $\varphi(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m) = 0$ . Somit faktorisiert  $\varphi$  über  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m)$ :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}^m & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow \text{---} & \\ \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^m) & \longrightarrow & J \hookrightarrow I \end{array}$$

Da  $I$  injektiv ist, gibt es eine Fortsetzung  $\psi' : A/\mathfrak{a}^m \rightarrow I$  von  $\varphi$ , das obige Diagramm kommutativ macht. Nun gilt  $\mathfrak{a}^m \psi'(A/\mathfrak{a}^m) = 0$ , d.h.  $\psi'(A/\mathfrak{a}^m) \subset J$ . Somit ist  $\psi : A \rightarrow J$  eine Fortsetzung von  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$ .

Sei nun  $X$  ein  $A$ -Modul,  $X' \subset X$  ein Untermodul und  $f : X' \rightarrow J$  ein Homomorphismus. Betrachte:

$$\Sigma = \{(Y, g) \mid Y \subset X \text{ Untermodul, } X' \subset Y, g : Y \rightarrow J, g|_{X'} = f\}$$

Dann ist  $(X', f) \in \Sigma$  und  $\Sigma$  ist induktiv geordnet. Nach Zorn gibt es ein maximales Element  $(Y, g) \in \Sigma$ . Angenommen,  $Y \neq X$ . Dann gibt es ein  $x \in X \setminus Y$ . Betrachte das Ideal  $\mathfrak{b} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in Y\} \subset A$  und den  $A$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J, \lambda \mapsto g(\lambda x)$ . Diese können wir zu einem  $\psi : A \rightarrow J$  fortsetzen. Definiere  $g' : \langle Y, x \rangle \rightarrow J$  durch  $g'|_Y = g$  und  $g'(x) = \psi(1)$ . Diese Abbildung ist ein wohldefinierter  $A$ -Modulhomomorphismus, da  $g'(y + \lambda x) = g'(y) + \psi(\lambda)$  für  $y \in Y, \lambda \in A$  und ist  $\lambda x \in Y$ , so folgt  $\lambda \in \mathfrak{b}$ , d.h.  $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) = g(\lambda x) = g'(\lambda x)$ . Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $(Y, g)$ , daher folgt  $Y = X$ .  $\square$

**Satz 9.30.** Sei  $A$  ein noetherscher Ring und  $I$  ein injektiver  $A$ -Modul. Dann ist die Garbe  $\tilde{I}$  welk über  $\text{Spec}(A)$ .

**Lemma 9.31.** Sei  $A$  ein noetherscher Ring und  $I$  ein injektiver  $A$ -Modul. Dann ist für jedes  $f \in A$  die natürliche Abbildung  $\theta : I \rightarrow I_f$  surjektiv.

**Beweis.** Betrachte die folgenden Ideale in  $A$ :

$$\mathfrak{b}_i = \text{ann}(f^i) = \{x \in A \mid f^i x = 0\}$$

Dann gilt  $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{r+1} = \dots$  für ein  $r$ . Sei  $x \in I_f$ . Dann gibt es ein  $y \in I$  und ein  $n \geq 0$  mit  $x = \frac{\theta(y)}{f^n}$ . Definiere den  $A$ -Modulhomomorphismus:

$$\varphi : (f^{n+r}) \rightarrow I, f^{n+r} \mapsto f^r y$$

Dieser ist wohldefiniert, da  $\text{ann}(f^{n+r}) = \mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r = \text{ann}(f^r) \subset \text{ann}(f^r y)$ . Da  $I$  injektiv ist, gibt es eine Fortsetzung  $\psi : A \rightarrow I$  von  $\varphi$ . Sei  $z = \psi(1)$ . Dann gilt  $f^{n+r} z = f^r y$ , also  $\theta(z) = \frac{\theta(y)}{f^n} = x$ .  $\square$

**Beweis von 9.30.** Sei  $Y = \overline{\text{supp}(\tilde{I})}$ . Besteht  $Y$  nur aus einem abgeschlossenen Punkt, so ist  $\tilde{I}$  eine Wolkenkratzergarbe und somit welk.

Sei nun  $Y$  größer und die Aussage für alle kleineren  $Y$  bewiesen. Es genügt zu zeigen, dass alle Restriktionsabbildungen der Form  $\Gamma(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{I})$  surjektiv sind. Sei  $U \subset_o X$ . Ist  $Y \cap U = \emptyset$ , so ist nichts zu zeigen. Sei  $Y \cap U \neq \emptyset$ . Es existiert ein  $f \in A$  mit  $X_f = D(f) \subset U$  und  $X_f \cap Y \neq \emptyset$ . Setze  $Z = X \setminus X_f$  und  $\Gamma_Z(U, \tilde{I}) = \{s \in \Gamma(U, \tilde{I}) \mid \text{supp}(s) \subset Z\}$ . Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma(X_f, \tilde{I}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Gamma_Z(X, \tilde{I}) & \longrightarrow & \Gamma_Z(U, \tilde{I}) & & \end{array}$$

Sei  $s \in \Gamma(U, \tilde{I})$  und betrachte die Restriktion  $s' \in \Gamma(X_f, \tilde{I}) = I_f$ . Nach Lemma 9.31 gibt es ein  $t \in I = \Gamma(X, \tilde{I})$  mit  $t|_{X_f} = s'$ . Sein  $t'$  die Restriktion von  $t$  auf  $U$ . Dann ist  $(s - t')|_{X_f} = 0$ , also  $\text{supp}(s - t') \subset Z$ . Bleibt noch zu zeigen, dass  $\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma_Z(U, \tilde{I})$  surjektiv ist. Dann existiert nämlich ein Urbild  $x \in \Gamma_Z(X, \tilde{I})$  von  $s - t'$  und daher:

$$(x + t)|_U = s - t' + t' = s$$

Sei  $J = \Gamma_Z(X, \tilde{I})$  und  $\mathfrak{a} = (f) \subset A$ . Dann ist  $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ . Nach Lemma 9.29 ist  $J$  ein injektiver  $A$ -Modul mit  $\text{supp}(\tilde{J}) \subset Y \cap Z \subsetneq Y$ . Nach Induktionsannahme ist  $\tilde{J}$  welk, also ist die Restriktionsabbildung surjektiv:

$$\Gamma_Z(X, \tilde{I}) = \Gamma(X, \tilde{J}) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{J}) = \Gamma_Z(U, \tilde{I}) \quad \square$$

**Beweis von 9.28.** Sei  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  eine quasikohärente Garbe über einem noetherschen Ring  $A$ . Sei  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$  eine injektive Auflösung in  $\mathbf{Mod}(A)$ . Wir erhalten eine exakte Folge  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \tilde{I}^\bullet$ . Nach Satz 9.30 sind alle  $\tilde{I}^i$  welk und somit azyklisch für  $\Gamma(X, -)$ . Daher kann diese Auflösung zur Kohomologieberechnung benutzt werden. Anwendung von  $\Gamma(X, -)$  gibt gerade die exakte Sequenz  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ . Also ist  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für alle  $i > 0$ .  $\square$

**Korollar 9.32.** Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ . Dann kann  $\mathcal{F}$  in eine welke quasikohärente Garbe eingebettet werden.

**Beweis.** Sei  $X = \bigcup_i U_i$  eine endliche, offen affine Überdeckung mit  $U_i = \text{Spec}(A_i)$  und  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ . Setze:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_i f_{i*} \tilde{I}_i$$

wobei  $f_i : U_i \hookrightarrow X$  die kanonische Inklusion und  $M_i \hookrightarrow I_i$  mit injektivem  $I_i$ . Es folgt  $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i \hookrightarrow \tilde{I}_i$ . Betrachte den kanonischen Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow f_{i*} f_i^* \mathcal{F} = f_{i*} \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow f_{i*} \tilde{I}_i$ . Dieser induziert einen Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i f_{i*} \tilde{I}_i = \mathcal{G}$ . Betrachtet man die Halme, so sieht man, dass dieser Morphismus injektiv ist.

Nach Satz 9.30 sind  $\tilde{I}_i$  alle welk, daher sind die  $f_{i*} \tilde{I}_i$  welk und somit auch  $\mathcal{G}$ . Da alle  $\tilde{I}_i$  quasikohärent sind, sind auch alle  $f_{i*} \tilde{I}_i$  quasikohärent nach Satz 5.3 (iv) und somit ist auch  $\mathcal{G}$  quasikohärent.  $\square$

**Theorem 9.33.** (*Serre*) Sei  $X$  ein noethersches Schema. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $X$  ist affin.
- (ii)  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  für alle quasikohärenten  $\mathcal{F}$  und  $i > 0$ .
- (iii)  $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$  für alle kohärenten Idealgarben  $\mathcal{J}$ .

**Beweis.** Siehe z.B. Hartshorne: Algebraic Geometry III 3.7. □

## 3.2 Der Čech-Komplex

**Definition 10–ε.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe abelscher Gruppen auf  $X$ ,  $I$  eine total geordnete Indexmenge und  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Wir definieren:

$$C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}), \quad k \geq 0$$

mit Randoperatoren

$$d : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

wobei diese für  $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_k})_{i_0 < \dots < i_k}$  durch

$$(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \cdot \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_{k+1}}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}}$$

definiert sind. Die Folge  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  heißt *Čech-Komplex* von  $\mathcal{U}$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$ .

**Satz 10–ε.2.** Es gilt für  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ :

(i)  $d \circ d = 0$

(ii) Für eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  und eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  setzen wir:

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker(C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}{\operatorname{im}(C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}, \quad k \geq 0$$

Dann ist  $\check{H}^k(\mathcal{U}, -)$  ein Funktor nach **Ab**.

(iii) Es gilt  $\check{H}^0(\mathcal{U}, -) = \Gamma(X, -)$ .

**Definition 10–ε.3.**  $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  heißt  $k$ -te *Čech-Kohomologiegruppe* von  $\mathcal{U}$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$ .

**Bemerkung 10–ε.4.** Es lässt sich auch bilden:

$$\check{H}^\bullet(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Es gilt stets  $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$ . Im Allgemeinen gibt es keine Isomorphie für höhere Kohomologiegruppen.



### 3.3 Kohomologie des projektiven Raumes

**Satz 10.1.** Sei  $A$  ein noetherscher Ring,  $S = A[X_0, \dots, X_r]$  für ein  $r \geq 1$  und  $X = \text{Proj}(S) = \mathbf{P}_A^r$ . Dann gilt:

- (i)  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong S$  ist ein Isomorphismus von graduierten  $S$ -Moduln.
- (ii)  $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$  für  $0 < i < r$  und alle  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$
- (iv) Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist die natürliche Paarung

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$$

eine perfekte Paarung freier  $A$ -Moduln, d.h. sie induziert einen Isomorphismus:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n))^* \cong H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$$

Diese Paarung stimmt mit dem Cup-Produkt überein.

**Lemma 10.2.** Sei  $X$  ein separiertes, noethersches Schema,  $\mathcal{U}$  eine offen affine Überdeckung und  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente Garbe auf  $X$ . Dann gilt:

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^\bullet(X, \mathcal{F})$$

**Beweis von 10.1.** Setze  $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$ . Da die Kohomologie mit direkten Summen vertauscht, liefert  $H^\bullet(X, \mathcal{F})$  gerade alle nötigen Daten. Sei  $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0, \dots, r}$  mit  $U_i = D_+(X_i)$ . Nach Lemma 10.2 gilt  $H^\bullet(X, \mathcal{F}) = \check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ . Nach Satz 5.21 gilt:

$$\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) = \mathcal{F}(D_+(X_{i_0} \cdots X_{i_k})) \cong S_{X_{i_0} \cdots X_{i_k}}$$

Somit ist:

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \left( \prod_{i_0 \in I} S_{X_{i_0}} \rightarrow \prod_{i_0 < i_1} S_{X_{i_0} X_{i_1}} \rightarrow \dots \rightarrow S_{X_0 \cdots X_r} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \right)$$

(i) folgt aus Satz 5.25.

(iii) Es gilt:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = \text{coker} \left( d : \prod_k S_{X_0 \cdots \widehat{X_k} \cdots X_r} \rightarrow S_{X_0 \cdots X_r} \right)$$

Wir betrachten  $S_{X_0 \cdots X_r}$  als freien  $A$ -Modul mit Basis  $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i \in \mathbb{Z}\}$ . Damit ist das Bild von  $d$  der freie Untermodul, der von den Monomen  $X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r}$  mit  $e_i \geq 0$  erzeugt wird. Somit ist  $H^r(X, \mathcal{F})$  der freie  $A$ -Modul mit Basis  $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0\}$ .

Nun ist  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$  gerade die Elemente vom Grad  $-r-1$  in  $H^r(X, \mathcal{F})$ , d.h. gerade der Untermodul, der von den Monomen  $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0, \sum e_i = -r-1\}$  erzeugt wird. Somit ist:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = \frac{1}{X_0 \cdots X_r} A \cong A$$

- (iv) Sei zunächst  $n < 0$ . Dann ist  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$  nach (i). Da  $-n-r-1 > -r-1$ , folgt nach der Rechnung in (iii) auch  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$  und die Dualität ist trivial.

Sei nun  $n \geq 0$ . Dann ist  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $\{X_0^{m_0} \cdots X_r^{m_r} \mid m_i \geq 0, \sum m_i = n\}$  und  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$  ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $\{X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r} \mid e_i < 0, \sum e_i = -n-r-1\}$ . Auf Ebene der Čech-Kohomologie ist die Paarung gegeben durch:

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) &\rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)), \\ (X_0^{m_0} \cdots X_r^{m_r}, X_0^{e_0} \cdots X_r^{e_r}) &\mapsto X_0^{m_0+e_0} \cdots X_r^{m_r+e_r} \end{aligned}$$

In  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$  gilt  $X_0^{m_0+e_0} \cdots X_r^{m_r+e_r} \neq 0$  genau dann, wenn  $m_i + e_i = -1$ , d.h.  $e_i = -m_i - 1$ , für alle  $i$  gilt. Somit bilden die dualen Elemente von  $X_0^{-m_0-1} \cdots X_r^{-m_r-1}$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $\sum m_i = n$  eine Basis von  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))^*$ . Die Paarung ist somit perfekt.

- (ii) Wir zeigen die Aussage per Induktion über  $r$ . Für  $r = 1$  ist die Aussage trivial. Wir lokalisieren  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  homogen nach  $X_r$  und setze  $\mathcal{U}_r = (U_i \cap U_r)_{i=0, \dots, r}$ . Dann gilt:

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)} = C^\bullet(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r})$$

Insbesondere ist  $U_r \in \mathcal{U}_r$ , also folgt  $\check{H}^k(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r}) = 0$  für  $k > 0$ . Ferner ist die homogene Lokalisierung ein exakter Funktor und vertauscht somit mit der Kohomologie. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \check{H}^k(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r}) = H^k(C^\bullet(\mathcal{U}_r, \mathcal{F}|_{U_r})) \\ &= H^k(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)}) = \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})_{(X_r)} = H^k(X, \mathcal{F})_{(X_r)} \end{aligned}$$

Also wird für alle  $k > 0$  jedes  $\alpha \in H^k(X, \mathcal{F})$  durch eine Potenz von  $X_r$  annulliert. Wir zeigen nun, dass die  $X_r$ -Multiplikation  $H^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$  für  $0 < k < r$  injektiv ist. Daraus folgt die Behauptung.

Betrachte die exakte Sequenz von graduierten  $S$ -Moduln:

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{\cdot X_r} S \longrightarrow S/(X_r) \longrightarrow 0$$

Sie wird zu einer exakten Sequenz von Garben:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

mit  $H = V_+(X_r)$ . Twiste diese Sequenz mit allen  $\mathcal{O}_X(n)$  und bilde direkte Summe. Diese Operationen sind alle exakt, daher erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\cdot X_r} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n) \longrightarrow 0$$

Betrachte die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^k(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow \dots$$

Nach Induktionsannahme ist  $H^k(H, \mathcal{F}_H) = 0$  für  $0 < k < r - 1$ , da  $H \cong \mathbf{P}_A^{r-1}$ . Nach Lemma 9.26 gilt  $H^k(H, \mathcal{F}_H) = H^k(X, \mathcal{F}_H)$ . Somit sind die  $X_r$ -Multiplikationen  $H^k(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^k(X, \mathcal{F})$  für  $1 < k < r - 1$  Isomorphismen.

Für  $k = 1$  betrachte die exakte Sequenz  $0 \rightarrow S(-1) \rightarrow S \rightarrow S/(X_r) \rightarrow 0$ :

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(-1)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow 0$$

Wir erhalten die exakte Folge:

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}_H) = 0 \longrightarrow \dots$$

Für  $k = r - 1$  betrachte die exakte Folge:

$$0 = H^{r-2}(X, \mathcal{F}_H) \longrightarrow H^{r-1}(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{\cdot X_r} H^{r-1}(X, \mathcal{F}) \quad \square$$

**Satz 10.3.** (*Serre*) Sei  $X$  ein projektives Schema über einem noetherschen Ring  $A$ ,  $\mathcal{O}_X(1)$  eine sehr ample Garbe auf  $X$  über  $\text{Spec}(A)$  und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ . Dann gilt:

- (i)  $H^i(X, \mathcal{F})$  ist endlich erzeugter  $A$ -Modul für alle  $i \geq 0$ .
- (ii) Es gibt ein  $n_0$ , so dass  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  für alle  $i > 0$  und  $n \geq n_0$ .

**Bemerkung 10.4.** Als Spezialfall von (i) gilt Satz 5.39:  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  ist endlich erzeugter  $A$ -Modul für kohärente Garben  $\mathcal{F}$ .

**Beweis.** Da  $\mathcal{O}_X(1)$  sehr ampel ist, gibt es eine Immersion  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r$  für ein  $r$  mit  $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}(1)$ . Aus der Projektivität folgt nach Theorem 4.24 die Eigentlichkeit von  $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ . Nun ist  $\mathbf{P}_A^r \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$  separiert, also folgt nach Korollar 4.22 (v) die Eigentlichkeit von  $X \rightarrow \mathbf{P}_A^r$ , insbesondere ist  $i$  abgeschlossen. Da  $\mathcal{F}$  kohärent ist, ist auch  $i_*\mathcal{F}$  nach Lemma 5.36 (ii) kohärent auf  $\mathbf{P}_A^r$  und nach Lemma 9.26 gilt  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = H^i(\mathbf{P}_A^r, i_*\mathcal{F}(n))$ . Wir können also o.B.d.A.  $X = \mathbf{P}_A^r$  annehmen.

Die Aussagen (i) und (ii) gelten für Garben der Form  $\mathcal{O}_X(q)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  nach Satz 10.1, dem Verschwindungssatz und der Tatsache, dass für  $-q - r - 1 < 0$ , also  $q > -r - 1$ , gilt:

$$H^r(X, \mathcal{O}_X(q)) \cong \operatorname{Hom}(H^0(X, \mathcal{O}_X(-q - r - 1)), A) = 0$$

Es folgt (i) und (ii) für endliche direkte Summen von  $\mathcal{O}_X(q)$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ . Sei nun  $\mathcal{F}$  beliebig kohärent. Die allgemeine Aussage beweisen wir nun per absteigende Induktion über  $i$ . Für  $i > r$  folgt alles aus dem Verschwindungssatz. Sei nun  $i \leq r$  und die Aussage für höhere  $i$  bewiesen. Nach Korollar 5.38 gibt es eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X(q)^N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$\mathcal{R}$  ist kohärent nach Satz 5.12. Betrachte die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(q)^N) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \cdots$$

Die äußeren beiden Gruppen sind endlich erzeugt. Da  $A$  noethersch ist, folgt die endliche Erzeugbarkeit von  $H^i(X, \mathcal{F})$ . Twisten wir die Folge um  $n$  ergibt:

$$\cdots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(q+n)^N) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \longrightarrow \cdots$$

Die äußeren beiden Gruppen verschwinden für hinreichend große  $n$ , daher verschwindet auch  $H^i(X, \mathcal{F}(n))$  für  $n \geq n_0$ . Da die Kohomologiegruppen für fast alle  $i$  komplett verschwinden, kann  $n_0$  unabhängig von  $i$  gewählt werden.  $\square$

**Satz 10.5.** Sei  $A$  ein noetherscher Ring und  $X$  eigentlich über  $\operatorname{Spec}(A)$ . Sei  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe. Dann sind äquivalent:

- (i)  $\mathcal{L}$  ist ampel.
- (ii) Für alle kohärenten Garben  $\mathcal{F}$  auf  $X$  gibt es ein  $n_0$ , so dass  $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$  für alle  $i > 0$  und  $n \geq n_0$ .

**Beweis.**

- Sei  $\mathcal{L}$  ampel auf  $X$ . Nach Satz 7.7 existiert ein  $m > 0$ , so dass  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  sehr ampel auf  $X$  bzgl.  $\operatorname{Spec}(A)$  ist. Da  $X$  eigentlich über  $A$  ist, folgt nach Satz 5.32 die Projektivität von  $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ . Wenden wir Satz 10.3 auf  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m-1)}$  an, so erhalten wir (ii).

- Sei nun (ii) erfüllt und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ . Wir zeigen, dass es ein  $n_0$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0$  die Garbe  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  von globalen Schnitten erzeugt wird.

### 3.4 Ext-Gruppen

Sei  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul auf einem geringten Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Wir haben folgende linksexakte Funktoren:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, -) : \mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$$

**Definition 11.1.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum und  $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(X)$ . Für  $i \geq 0$  definieren wir:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, -) = \mathrm{R}^i \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -), \quad \mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, -) = \mathrm{R}^i \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, -)$$

**Bemerkung 11.2.** Es gilt:

- (i)  $\mathrm{Ext}^0 = \mathrm{Hom}$ ,  $\mathcal{E}\mathrm{xt}^0 = \mathcal{H}\mathrm{om}$
- (ii)  $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = 0$  und  $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = 0$  für alle  $i > 0$  und injektive  $\mathcal{J}$ .

**Lemma 11.3.** Sei  $\mathcal{J} \in \mathbf{Mod}(X)$  injektiv und  $U \subset_o X$ . Dann ist  $\mathcal{J}|_U \in \mathbf{Mod}(U)$  injektiv.

**Beweis.** Sei  $j : U \hookrightarrow X$  die natürliche Inklusion. Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  in  $\mathbf{Mod}(U)$  und  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}|_U$  gegeben. Es gilt  $j_! \mathcal{F} \subset j_! \mathcal{G}$  und wir erhalten einen Morphismus  $j_! \mathcal{F} \rightarrow j_! (\mathcal{J}|_U) \hookrightarrow \mathcal{J}$ . Da  $\mathcal{J}$  injektiv ist, existiert eine Fortsetzung  $j_! \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{J}$ . Somit ist  $\mathcal{G} = (j_! \mathcal{G})|_U \rightarrow \mathcal{J}|_U$  eine Fortsetzung von  $\mathcal{F} = (j_! \mathcal{F})|_U \rightarrow \mathcal{J}|_U$ .  $\square$

**Satz 11.4.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum und  $U \subset_o X$ . Dann gilt für  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$  und alle  $i \geq 0$ :

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

**Beweis.** Beide Seiten sind  $\delta$ -Funktoren  $\mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$  und gleich für  $i = 0$ . Sie verschwinden beide auf Injektiven, sind somit auslöschar, also universell.  $\square$

**Satz 11.5.** Sei  $\mathcal{G}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{E}\mathrm{xt}^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$
- (ii)  $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$  für alle  $i > 0$
- (iii)  $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathcal{G})$  für alle  $i \geq 0$

**Beweis.** Es gilt  $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, -) = \text{Id}$  und  $\text{Hom}(\mathcal{O}_X, -) = \Gamma(X, -)$ .  $\square$

**Satz 11.6.** Sei  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  eine exakte Folge in  $\mathbf{Mod}(X)$  und  $\mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$ . Dann ist die folgende Folge exakt:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

Analog für  $\mathcal{H}om$  und  $\mathcal{E}xt$ .

**Beweis.** Sei  $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$  eine injektive Auflösung. Dann ist  $\text{Hom}(-, \mathcal{J}^i)$  exakt. Es folgt daher die Exaktheit von:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{J}^\bullet) \longrightarrow 0$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert die Aussage. Die Aussage für  $\mathcal{E}xt$  folgt analog mithilfe von Lemma 11.3.  $\square$

**Satz 11.7.** Sei  $\dots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln, wobei alle  $\mathcal{L}_i$  lokal frei von endlichem Rang ist. Dann gilt für alle  $\mathcal{O}_X$ -Moduln  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong H^i(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G}))$$

**Beweis.** Beide Seiten sind  $\delta$ -Funktoren  $\mathbf{Mod}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}(X)$  in  $\mathcal{G}$ , die gleich für  $i = 0$  sind. Beide Seiten verschwinden für injektive  $\mathcal{G}$ , also sind beide  $\delta$ -Funktoren universell.  $\square$

**Beispiel 11.8.** Sei  $X$  ein quasiprojektives Schema über  $\text{Spec}(A)$  mit  $A$  noethersch. Nach Korollar 5.38 ist jede kohärente Garbe von  $X$  ein Quotient von einer lokal freien Garbe von endlichem Rang. Somit besitzt jede kohärente Garbe eine lokal freie Auflösung  $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  von endlichem Rang. Somit kann  $\mathcal{E}xt^\bullet(\mathcal{F}, -)$  durch eine lokal freie Auflösung von endlichem Rang in der ersten Variable berechnet werden.  $\mathbf{Mod}(X)$  besitzt aber nicht genügend viele Projektive.

**Lemma 11.9.** Sei  $\mathcal{L} \in \mathbf{Mod}(X)$  lokal frei von endlichem Rang und  $\mathcal{J} \in \mathbf{Mod}(X)$  injektiv. Dann ist  $\mathcal{J} \otimes \mathcal{L}$  injektiv.

**Beweis.** Wir zeigen, dass  $\text{Hom}(-, \mathcal{J} \otimes \mathcal{L})$  exakter Funktor ist. Nun gilt:

$$\text{Hom}(-, \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}) = \text{Hom}(- \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{J})$$

mit  $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ . Da  $\mathcal{J}$  injektiv und  $- \otimes \mathcal{L}^\vee$  exakt ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 11.10.** Sei  $\mathcal{L}$  eine lokal freie Garbe von endlichem Rang und  $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$  sein Dual. Dann gilt für alle  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(X)$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) &\cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}) \\ \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) &\cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G})\end{aligned}$$

**Beweis.** Für  $i = 0$  sind die Aussagen klar. Es ist  $-\otimes \mathcal{L}^\vee$  ein exakter Funktor. Somit sind beide Seiten  $\delta$ -Funktoren in  $\mathcal{G}$ , die auf Injektive  $\mathcal{G}$  verschwinden und daher universell.  $\square$

**Satz 11.11.** Sei  $X$  ein noethersches Schema,  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ ,  $\mathcal{G}$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul und  $x \in X$ . Dann gilt:

$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^i(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) = R^i \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, -)(\mathcal{G}_x)$$

**Beweis.** Die Aussage ist lokal, sei also o.B.d.A.  $X$  affin. Dann besitzt  $\mathcal{F}$  eine lokal freie Auflösung von endlichem Rang  $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  nach 11.8. Somit ist  $\mathcal{L}_{\bullet,x} \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow 0$  eine freie Auflösung. Wir können diese Auflösung zur Berechnung der Kohomologie verwenden. Da  $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{G})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{G}_x)$  für lokal freie Garben  $\mathcal{L}$  und Halmbildung exakt ist, folgt die Gleichheit der Ext-Gruppen.  $\square$

**Satz 11.12.** Sei  $X$  ein projektives Schema über einem noetherschen Ring  $A$ ,  $\mathcal{O}_X(1)$  eine sehr ample Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  kohärente Garben auf  $X$ . Dann existiert ein  $n_0 = n_0(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  und alle  $i \geq 0$  gilt:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)))$$

**Lemma 11.13.** Sei  $X$  ein projektives Schema über einem noetherschen Ring  $A$ ,  $\mathcal{O}_X(1)$  eine sehr ample Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^r$  eine exakte Folge kohärenter Garben. Dann gibt es ein  $m_0$ , so dass für alle  $m \geq m_0$  die folgende Sequenz exakt ist:

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^1(m)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2(m)) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^r(m))$$

**Beweis von 11.12.** Für  $i = 0$  ist die Aussage klar. Sei zunächst  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ . Dann folgt aus Satz 11.5 und Satz 10.3 für alle  $i > 0$  und hinreichend großes  $n$ :

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}(n)) = H^i(X, \mathcal{G}(n)) = 0 = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}(n)))$$

Sei nun  $\mathcal{F}$  lokal frei von endlichem Rang. Nach Satz 11.10 gilt für hinreichend große  $n$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) &= \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}(n)) = 0 \\ &= \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}(n))) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)))\end{aligned}$$

Sei nun  $\mathcal{F}$  beliebig kohärent. Nach Korollar 5.38 gibt es eine kurze exakte Folge  $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  mit einem lokal freien  $\mathcal{L}$  von endlichem Rang. Wir erhalten für hinreichend große  $n$  die folgende exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow 0$$

Analog für  $\mathcal{H}\mathrm{om}$  und  $\mathcal{E}\mathrm{xt}$ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) \longrightarrow 0$$

Beachte  $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \cong \mathrm{Ext}^{j+1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))$  und  $\mathcal{E}\mathrm{xt}^j(\mathcal{R}, \mathcal{G}(n)) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{j+1}(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n))$  für  $j \geq 1$ . Da  $\mathcal{R}$  kohärent ist, folgt die Aussage per Induktion über  $j$ . Für  $j = 0$  twisten wir die obige Folge genug und wenden  $\Gamma(X, -)$  an. Lemma 11.13 gibt uns ein  $m$ , so dass:

$$\Gamma(X, \mathcal{E}\mathrm{xt}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n+m))) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n+m)) \quad \square$$



# Index

- $\mathcal{O}_X$ -Modul, 54
  - ampel, 81
  - frei, 54
  - lokal frei, 54
  - quasikohärent, 56
  - sehr ampel, 66
  - von globalen Schnitten erzeugt, 67
  - welk, 96
- Adjunktionsabbildung, 14
- affine Gerade, 20
- affiner Raum, 4, 20
- algebraische Menge
  - affin, 4
  - projektiv, 5
- assozierte Garbe
  - Modul, 55
  - Prägarbe, 11
  - zum Divisor, 78
- Aufblasung, 85
- Basiswechsel, 39
- Bewertung
  - diskret, 20
- Bewertungsring, 43
  - diskret, 20
- Bewertungstheoretisches Kriterium, 43, 49
- Bild, 10, 12
- Cech-Kohomologie, 104
- Cech-Komplex, 104
- Derivation, 87
- Diagonalmorphismus, 40
- Differentialform
  - relativ, 87, 92
- Dimension, 33
- direkte Bildgarbe, 14
- direktes Bild, 54
- Divisor
  - Cartier, 77
  - effektiv, 70
  - prinzipal, 70, 77
  - Weil, 70
- Divisorenklassengruppe, 71
- dominant, 24
- dominiert, 45
- eigentlich, 48
- endlich, 31
- Exaktheit, 12, 54
- Ext-Gruppen, 109
- Faser, 41
- Faserprodukt, 34
- Fundamentale exakte Sequenz, 89, 90
- Funktionenkörper, 7, 70
- Garbe, 8
  - Fortsetzung, 15
  - getwistet, 63
  - invertierbar, 54
  - konstant, 9
  - Untergarbe, 11
- generische Faser, 42
- generischer Punkt, 20, 23
- geringster Raum, 18
  - lokal, 18
- Grad, 75
- Graph, 40
- Halm, 9

- Hauptdivisor, 70, 77
- Hom-Garbe, 13, 54
- homogene Elemente, 5
- homogene Lokalisierung, 26
- homogenes Ideal, 5
- Idealarbe, 54, 61
  - invers, 85
- Immersion, 37
  - abgeschlossen, 32
  - offen, 32
- Injektivität, 12
- irreduzibel, 4
- Keim, 7, 9
- Kern, 10, 11
- Kodimension, 33
- Kohomologiegruppe, 96
- kohärent, 56
- Kokern, 10, 12
- Koordinate, 4
  - homogen, 5
- Koordinatenring, 4
  - homogen, 6
- Kurve, 73
  - vollständig, 73
- Limes
  - direkt, 13
  - projektiv, 13
- linear äquivalent, 71, 77
- lokal faktoriell, 77
- lokaler Parameter, 75
- Modul
  - assoziiert, 64
  - getwistet, 62
  - graduiert, 62
- Morphismus
  - $S$ -Schemata, 27
  - $\mathcal{O}_X$ -Moduln, 54
- Garben, 9
  - geringste Räume, 18
  - lokal geringste Räume, 18
- Prägarben, 9
- Schemata, 19
- Varietäten, 6
- nicht-singulär, 73, 94
- noethersch, 29, 30
  - lokal, 30
- Nullstelle, 70
- Nullstellenmenge, 4
- Picard-Gruppe, 78
- Pol, 70
- Primdivisor, 70
- projektiver Raum, 5, 27, 52
- Prägarbe, 8
- Punkt, 4, 5
  - $K$ -wertig, 23
- quasikompakt, 29, 44
- quasiprojektiv, 52
- Quotientengarbe, 12
- Radikal, 5
- Radikalideal, 5
- Rang, 54
- rationale Funktion, 7
- regulär, 69
- reguläre Funktion, 6
- Restklassenkörper, 20
- Restriktionsabbildung, 8
- Ring
  - normal, 69
- Satz von Krull, 101
- Schema, 19
  - affin, 19
  - integer, 28
  - irreduzibel, 28
  - normal, 69

- reduziert, 25, 28
- Unterschema, 37
  - abgeschlossen, 32
  - offen, 21, 32
  - zusammenhängend, 28
  - über  $S$ , 27
- Schnitt, 8
- separabel erzeugt, 90
- separiert, 42
- Spektrum, 16
- Spezialisierung, 44
- strikte Transformation, 87
- Strukturgarbe, 16, 19
- Strukturmorphismus, 27
- Summe, 13
- Support, 13
- Surjektivität, 12
- symmetrisches Produkt, 83
- Tensor-Algebra, 83
  - symmetrisch, 83
- Tensorprodukt, 54
- totaler Quotientenring, 77
- universell abgeschlossen, 48
- Urbild, 54
- Urbildgarbe, 14
- Varietät
  - abstrakt, 53
  - affin, 4
  - eigentlich, 53
  - projektiv, 6
  - quasi-affin, 4
  - quasi-projektiv, 6
- Vektorbündel
  - projektiv, 84
- Verklebung
  - Garbe, 33
  - Morphismus, 34
  - Schema, 21
  - Verschwindungssatz, 99
  - volltreuer Funktor, 27
  - von endlichem Typ, 31
    - lokal, 31
  - Wolkenkratzergarbe, 15
  - Zariski-Topologie, 4, 5, 15