Ebene Graphen

von YICHUAN SHEN

5. Juli 2016

1 Maximale Planarität

Definition. Ein *ebener Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ endlicher Mengen (Elemente von V heißen *Knoten*, Elemente von E heißen *Kanten*), so dass:

(i) V ist Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(ii) Jedes Element in E ist ein Polygonzug zwischen zwei Knoten.

(iii) Verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten.

(iv) Das Innere einer Kante enthält keine Knote oder einen Punkt einer anderen Kante.

Bemerkung.

- Ein ebener Graph G definiert in natürlicher Weise einen (abstrakten) Graphen, den wir ebenfalls mit G bezeichnen.
- Die unterliegende Punktmenge eines ebenen Graphens bezeichnen wir auch mit G:

$$G = V \cup \bigcup_{e \in E} e$$

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein ebener Graph.

- Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ heißen *Gebiete* von G.
- Die Menge aller Gebiete von G bezeichnen wir mit $F(G)$.
- Sei $f \in F(G)$. Der Rand von f bezeichnen wir mit $G[f]$. Wir können $G[f]$ als Teilgraph von G auffassen.

Definition. Sei G ein ebener Graph.

- G heißt *maximal eben*, wenn durch das Hinzufügen einer Kante G kein ebener Graph mehr ist.
- G heißt *ebener Dreiecksgraph*, wenn jedes seiner Gebiete durch einen K^3 berandet ist.

Satz 1. Ein ebener Graph G mit $|G| \geq 3$ ist genau dann maximal eben, wenn er ein ebener Dreiecksgraph ist.

Beweis. Sei G ein ebener Dreiecksgraph und e eine zusätzliche Kante. Dann hat e ihr Inneres in einem Gebiet f von G und ihre Endpunkte auf dem Rand von f. Per Definition ist $G[f] = K^3$ ein vollständiger Graph, also sind die Endpunkte von e bereits in G benachbart. Da Multikanten in einem ebenen Graphen nicht erlaubt sind, war G schon maximal eben.

Sei nun umgekehrt G ein maximal ebener Graph und f ein Gebiet von G. Setze $H = G[f]$ und betrachte den induzierten Untergraphen $G[H]$. Angenommen, es gibt zwei Knoten x, y in $G[H]$, die nicht benachbart sind. Aber dann könnten wir einen Polygonzug zwischen x und y in f konstruieren und diese als ebene Kante zu G hinzufügen, ein Widerspruch zur Maximalität von G. Also muss $G[H]$ vollständig sein.

Sei $n = |H|$. Angenommen, H enthält keinen Kreis. Ist $n \geq 3$, so ist $K^3 \subseteq G[H] \subseteq G$, d.h. G enthält einen Kreis und daher $G \setminus H \neq \varnothing$. Für $n < 3$ gilt auch $G \setminus H \neq \varnothing$, da $|G| \geq 3$. Andererseits ist H ein Wald und hat daher genau einen Gebiet. f ist ein Gebiet von $G[f] = H$, also ist f das einzige Gebiet von H, d.h. $f \cup H = \mathbb{R}^2$. Insgesamt erhalten wir $G \setminus H \subseteq f$ und es folgt der Widerspruch:

$$G \setminus H = G \setminus H \cap f \subseteq G \cap f = \varnothing$$

Also muss H einen Kreis enthalten.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $n \leq 3$ ist. Nehmen wir an, dass $n \geq 4$. Sei $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ ein Kreis in $G[H]$. Wegen $C \subseteq G$ liegt f in einem Gebiet $c \in F(C)$. Sei $c' \in F(C)$ das andere Gebiet. v_1 und v_3 liegen auf dem Rand von f. Wir können sie mit einem Polygonzug P in c verbinden, das sich mit G nicht schneidet. Daher muss die ebene Kante zwischen v_2 und v_4 in c' befinden, da sich diese mit P nicht schneiden darf. Das gleiche Argument für v_2 und v_4 zeigt, dass die ebene Kante zwischen v_1 und v_3 in c' befinden muss. Dies ein Widerspruch, da eine solche Kante mit der Kante zwischen v_2 und v_4 schneiden muss. □

Korollar 2. Ein ebener Graph G der Ordnung $n \geq 3$ hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

Beweis. Jeder ebene Dreiecksgraph mit n Ecken hat $3n - 6$ Kanten. □

Korollar 3. Kein ebener Graph enthält einen K^5 oder $K_{3,3}$ als einen topologischen Minor.

Beweis. K^5 hat $10 > 3 \cdot 5 - 6$ Kanten. Für $K_{3,3}$ kann man mithilfe der Euler-Charakteristik für ebene Graphen auch eine widersprüchliche Abschätzung für die Kantenzahl finden, siehe Korollar 3.2.11 in [Diestel: Graphentheorie]. Mit K^5 und $K_{3,3}$ können natürlich auch deren Unterteilungen nicht als ebene Graphen auftreten. □

Definition.

- Eine *Einbettung in die Ebene* eines (abstrakten) Graphen G ist ein abstrakter Graphenisomorphismus zwischen G und einem ebenen Graphen H.
- H nennen wir auch eine *Zeichnung* von G.
- Ein Graph G heißt *plättbar*, wenn es eine Einbettung in die Ebene für G gibt.

2 Satz von Kuratowski

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung von Korollar 3:

Theorem 4 (*Satz von Kuratowski, 1930*)**.** Die folgenden Aussagen sind für einen Graphen G äquivalent:

(i) G ist plättbar.

(ii) G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor.

(iii) G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor.

Wir zeigen die Umkehrung zunächst für 3-zusammenhängende Graphen. Dazu brauchen wir zunächst die folgenden Lemmata:

Lemma 5. In einem 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist jedes Gebiet durch einen Kreis berandet.

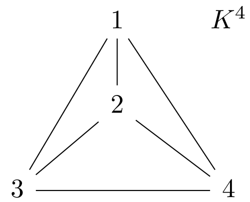
Beweis. Siehe Lemma 3.2.6 in [Diestel: Graphentheorie]. □

Lemma 6. Ist G 3-zusammenhängend und $|G| > 4$, so hat G eine Kante e, so dass G/e wieder 3-zusammenhängend ist.

Beweis. Siehe Lemma 2.2.1 in [Diestel: Graphentheorie]. □

Satz 7. Ist ein Graph G 3-zusammenhängend, und enthält G weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor, so ist G plättbar.

Beweis. Per Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 4$ ist $G = K^4$ und G plättbar:



Sei nun $|G| > 4$ und die Aussage wahr für kleinere Graphen. Nach Lemma 6 haben wir eine Kante xy, so dass G/xy wieder 3-zusammenhängend ist. Nun enthält G/xy ebenfalls weder K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor. Nach Induktionsvoraussetzung ist G/xy plättbar. Sei also H eine Zeichnung von G/xy.

Sei v der Knoten in H, das die Kante xy repräsentiert. Betrachte das Gebiet f von $H - v$, das den Punkt v enthält, und sei C der Rand von f. Setze:

$$X = N(x) \setminus y, \quad Y = N(y) \setminus x$$

Dann gilt $X \cup Y \subseteq N(v) \subseteq C$. Da $H - v$ 2-zusammenhängend ist, ist C nach Lemma 5 ein Kreis. Seien $x_1, \ldots, x_k$ die Elemente in X in natürlicher Reihenfolge entlang C und P_i der Verbindungsweg auf C zwischen x_i und x_{i+1}, wobei $x_{k+1} = x_1$. Betrachte den folgenden ebenen Graphen:

$$H' = H - \{vw \mid w \in Y \setminus X\}$$

Wir können H' auch als Zeichnung von $G - y$ deuten, indem wir den Knoten v als x auffassen. Ziel ist es nun, auch y in der Zeichnung unterzubringen.

Dafür reicht es zu zeigen, dass ein i existiert, so dass $Y \subseteq V(P_i)$. Dann können wir y in dem Gebiet platzieren, der durch $x_i P_i x_{i+1} x x_i$ definiert ist. Angenommen, es existiert kein i mit $Y \subseteq V(P_i)$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: Es gibt ein $y' \in Y \setminus X$. Sei etwa $y' \in P_i$ und $y'' \in C \setminus P_i$ ein weiterer Nachbar von y. Setze $x' = x_i$ und $x'' = x_{i+1}$. Dann werden y' und y'' durch x' und x'' in C getrennt.

2. Fall: Es ist $Y \subseteq X$ und $|Y| \leq 2$, d.h. y hat genau zwei Nachbarn y' und y'' auf C, die nicht im gleichen P_i liegen. Diese werden durch zwei $x', x'' \in X$ in C getrennt.

3. Fall: Es ist $Y \subseteq X$ und $|Y| \geq 3$.

In den ersten beiden Fällen bilden x, y', y'' und y, x', x'' einen $\mathrm{T}K_{3,3}$ in G. Im dritten Fall haben y und x drei gemeinsame Nachbarn auf C. Diese bilden zusammen mit x und y einen $\mathrm{T}K^5$ in G. □

Um den Beweis von Satz von Kuratowski abzuschließen, muss man noch die folgenden Lemmata beweisen:

Lemma 8. Ein Graph enthält genau dann einen $\mathrm{T}K^5$ oder einen $\mathrm{T}K_{3,3}$, wenn er einen K^5 oder einen $K_{3,3}$ als Minor enthält.

Beweis. Siehe Lemma 3.4.2 in [Diestel: Graphentheorie]. □

Lemma 9. Ist G ein Graph mit $|G| > 4$, der kantenmaximal mit $\mathrm{T}K^5, \mathrm{T}K_{3,3} \not\subseteq G$ ist, so ist G 3-zusammenhängend.

Beweis. Siehe Lemma 3.4.5 in [Diestel: Graphentheorie]. □

3 Algebraisches Plättbarkeitskriterium

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Der *Kantenraum* von G ist definiert als den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum

$$\{\text{Abbildungen } h : E \to \mathbb{F}_2\}$$

  mit komponentenweiser Addition. Wir identifizieren Vektoren darin mit Teilmengen von E. Somit ist die Addition von Teilmengen nichts anderes als das Bilden der symmetrischen Differenz der beiden Mengen:

$$E_1 + E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$$

- Der *Schnittraum* $\mathcal{C}^*(G)$ von G ist definiert als der $\mathbb{F}_2$-Untervektorraum des Kantenraums, der nur aus den Schnittmengen in G besteht, d.h. Mengen der Form $E(V', V'')$ für eine Partition $\{V', V''\}$ in G.

- Der *Zyklenraum* $\mathcal{C}(G)$ von G ist definiert als der $\mathbb{F}_2$-Untervektorraum des Kantenraums, der von den Kantenmengen von Kreisen in G erzeugt wird. Vektoren in $\mathcal{C}(G)$ kann man als Summe von disjunkten Kreisen in G schreiben.

- Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ des Kantenraums von G heißt *schlicht*, wenn jede Kante in G in höchstens zwei Mengen aus $\mathcal{F}$ liegt.

Lemma 10. Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten. Dann gilt für die Dimension des Zyklenraums:

$$\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$$

Beweis. Siehe Satz 0.9.6 in [Diestel: Graphentheorie]. □

Theorem 11 (*MacLane 1937*)**.** Ein Graph G ist genau dann plättbar, wenn sein Zyklenraum $\mathcal{C}(G)$ eine schlichte Basis besitzt.

Beweis. Für $|G| \leq 2$ ist die Aussage trivial. Sei $|G| \geq 3$. Sei G zunächst einmal höchstens 1-zusammenhängend, d.h. G ist die Vereinigung zweier Untergraphen $G', G'' \subset G$ mit $|G' \cap G''| \leq 1$. Ein Kreis in G ist entweder ein Kreis in G' oder ein Kreis in G'', also folgt:

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(G') \oplus \mathcal{C}(G'')$$

Somit hat $\mathcal{C}(G)$ genau dann eine schlichte Basis, wenn $\mathcal{C}(G')$ und $\mathcal{C}(G'')$ eine haben. Ferner ist G genau dann plättbar, wenn G' und G'' es sind. Somit folgt die Aussage induktiv. Sei ab jetzt G 2-zusammenhängend.

Sei G plättbar und wähle eine Zeichnung. Nach Lemma 5 sind alle Gebietsränder Kreise, liegen also in $\mathcal{C}(G)$. Wir zeigen, dass die Gebietsränder schon ganz $\mathcal{C}(G)$ erzeugen. Da eine ebene Kante auf dem Rand höchstens zweier Gebiete liegen kann, besitzt $\mathcal{C}(G)$ dann eine schlichte Basis.

Sei $C \subset G$ ein Kreis und f sein Innengebiet. Jede Kante e liegt auf einem Kreis von G. Liegt das Innere von e in f, so liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete von G, die in f enthalten sind. Liegt e dagegen auf C, so liegt e genau auf einem Gebiet, das in f enthalten ist. Somit gilt:

$$C = \sum_{\substack{f' \in F(G) \\ f' \subseteq f}} E(G[f'])$$

Sei nun umgekehrt $\{C_1, \ldots, C_k\}$ eine schlichte Basis von $\mathcal{C}(G)$. Für jede Kante e besitzt $\mathcal{C}(G - e)$ auch eine schlichte Basis, denn:

- Liegt e in nur einem Basiszyklus, etwa C_1, so ist $\{C_2, \ldots, C_k\}$ eine Basis von $\mathcal{C}(G-e)$.

- Liegt e in zwei Basiszyklen, etwa C_1 und C_2, so ist $\{C_1 + C_2, \ldots, C_k\}$ eine Basis von $\mathcal{C}(G - e)$.

Angenommen, G ist nicht plättbar. Nach dem Satz von Kuratowski enthält G einen $\mathrm{T}K^5$ oder einen $\mathrm{T}K_{3,3}$. Als Teilgraphen von G hat dann $\mathcal{C}(\mathrm{T}K^5)$ bzw. $\mathcal{C}(\mathrm{T}K_{3,3})$ eine schlichte Basis. Da topologische Minoren keine Kreise hinzufügen bzw. entfernen bleibt der Zyklenraum gleich, d.h. $\mathcal{C}(K^5)$ bzw. $\mathcal{C}(K_{3,3})$ hat eine schlichte Basis. Wir führen nun beide Fälle in den folgenden Lemmata zum Widerspruch. □

Lemma 12. $\mathcal{C}(K^5)$ hat keine schlichte Basis.

Beweis. Nach der Dimensionsformel Lemma 10 gilt $\dim \mathcal{C}(K^5) = 6$. Angenommen, $\mathcal{C}(K^5)$ habe eine schlichte Basis $B = \{C_1, \ldots, C_6\}$. Setze:

$$C_0 = C_1 + \ldots + C_6$$

Keines der $C_0, C_1, \ldots, C_6$ sind leer und enthalten alle mindestens drei Kanten. Da eine Kante in höchstens zwei Zyklen aus B liegt, liegt jede Kante in C_0 in nur einem der Basiszyklen in B. Daher ist die Menge $\{C_0, C_1, \ldots, C_6\}$ ebenfalls schlicht, also folgt:

$$21 = 7 \cdot 3 \leq |C_0| + \ldots + |C_6| \leq 2 \cdot \|K^5\| = 20 \qquad \square$$

Lemma 13. $\mathcal{C}(K_{3,3})$ hat keine schlichte Basis.

Beweis. Nach der Dimensionsformel Lemma 10 gilt $\dim \mathcal{C}(K_{3,3}) = 4$. Angenommen, $\mathcal{C}(K_{3,3})$ habe eine schlichte Basis $B = \{C_1, \ldots, C_4\}$. Setze:

$$C_0 = C_1 + \ldots + C_4$$

Keines der $C_0, C_1, \ldots, C_4$ sind leer und enthalten alle mindestens vier Kanten wegen der Bipartität. Mit dem gleichen Argument wie im vorherigen Lemma ist $\{C_0, C_1, \ldots, C_4\}$ ebenfalls schlicht, also folgt:

$$20 = 5 \cdot 4 \leq |C_0| + \ldots + |C_4| \leq 2 \cdot \|K_{3,3}\| = 18 \qquad \square$$

4 Plättbarkeit & Dualität

Definition. Ein *ebener Multigraph* ist ein Paar $G = (V, E)$ endlicher Mengen (Elemente von V heißen *Knoten*, Elemente von E heißen *Kanten*), so dass:

(i) V ist Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(ii) Jedes Element in E ist ein Polygonzug zwischen zwei Knoten oder ein Polygon, das genau eine Knote enthält.

(iii) Das Innere einer Kante enthält keine Knote oder einen Punkt einer anderen Kante.

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein ebener Multigraph. Wir setzen in jedes ebiet von G einen neuen Knoten und verbinden diese zu einem neuen ebenen Multigraphen G^*:

- Für jede Kante e von G verbinden wir die neuen Knoten in den beiden Gebieten, auf deren Rand e liegt, durch eine neue Kante e^*.
- Liegt e nur auf dem Rand eines Gebiets, so legen wir an dessen neue Knote eine Schlinge e^* durch e.

Der neue Graph G^* heißt *topologisches Dual* zu G.

Wir finden den folgenden einfachen Zusammenhang zwischen einem Graphen und sein topologisches Dual:

Satz 14. Sei G ein zusammenhängender ebener Multigraph und $E \subseteq E(G)$ eine Kantenmenge. E ist genau dann von einem Kreis induziert, wenn $E^* = \{e^* \mid e \in E\}$ ein minimaler Schnitt in G^* ist.

Beweis. Siehe Proposition 3.6.1 in [Diestel: Graphentheorie]. □

Definition. Sei G ein abstrakter Multigraph. Ein abstrakter Multigraph G^* heißt zu G *kombinatorisch dual*, wenn $E(G^*) = E(G)$ und die Minimalschnitte von G^* gerade die Kantenmengen von Kreise in G sind.

Satz 15. Sei G^* kombinatorisch dual zu G. Dann gilt:

$$\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G)$$

Beweis. $\mathcal{C}^*(G^*)$ wird erzeugt durch die Minimalschnitte von G^*, während $\mathcal{C}(G)$ von den Kantenmengen von Kreise in G erzeugt wird. □

Lemma 16. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann wird $\mathcal{C}^*(G)$ erzeugt von Schnitten der Form $E(v) = \{vw \mid w \in N(v)\},\ v \in V$.

Beweis. Sei $\{V', V''\}$ eine Partition von G und betrachte den Schnitt $E(V', V'')$. Da jede Kante vw in genau $E(v)$ und $E(w)$ liegt, gilt:

$$E(V', V'') = \sum_{v \in V'} E(v)$$ □

Korollar 17. Sei G ein Graph. Dann hat $\mathcal{C}^*(G)$ eine schlichte Basis.

Theorem 18 (*Whitney 1993*)**.** Ein Graph G ist genau dann plättbar, wenn ein zu ihm kombinatorisch dualer Multigraph existiert.

Beweis. Eine Richtung folgt aus Satz 14. Sei G^* ein kombinatorisches Dual zu G. Nach Satz 15 gilt $\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G)$. Nach MacLane Theorem 11 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{C}^*(G^*)$ eine schlichte Basis besitzt. Dies folgt aus Korollar 17. □