1

在n维线性空间P^n中，下列n维向量的集合V，是否构成P上的线性空间：
(1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)|a,b\in P\}$；
(2) $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|\sum_{i=1}^n a_i=1\}$；
(3) $V=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T|Ax=\theta,A\in P^{n\times n}\}$。

(1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in P\}$。

首先，V中的元素是形如$(a,b,a,b,\cdots,a,b)$的向量，其中$a,b\in P$。我们需要验证V是否满足线性空间的定义，即对于任意的$u,v\in V$和标量$k\in P$，有$u+v\in V$且$ku\in V$。

取$u=(a_1,b_1,a_1,b_1,\cdots,a_1,b_1)$，$v=(a_2,b_2,a_2,b_2,\cdots,a_2,b_2)$，则

$$u+v=(a_1+a_2,b_1+b_2,a_1+a_2,b_1+b_2,\cdots,a_1+a_2,b_1+b_2)\in V$$

因为$a_1+a_2,b_1+b_2\in P$。

对于标量$k\in P$,

$$ku=(ka_1,kb_1,ka_1,kb_1,\cdots,ka_1,kb_1)\in V$$

因为$ka_1,kb_1\in P$。

此外，零向量对应于$a=0,b=0$，即$(0,0,0,0,\cdots,0,0)\in V$。

因此，V满足线性空间的封闭性和包含零向量，所以V构成P^n的线性子空间。

V构成线性空间。

(2) $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid\sum_{i=1}^n a_i=1\}$。

我们需要检查V是否满足线性空间的要求。

首先，零向量$(0,0,\cdots,0)$的各分量之和为0，不等于1，因此零向量不在V中。

此外，取$u,v\in V$，则$\sum_{i=1}^n u_i=1$，$\sum_{i=1}^n v_i=1$。但是

$$\sum_{i=1}^n(u_i+v_i)=\sum_{i=1}^n u_i+\sum_{i=1}^n v_i=1+1=2\neq 1$$

因此，$u+v\notin V$。

同样地，对于标量$k\in P$，$\sum_{i=1}^n(ku_i)=k\sum_{i=1}^n u_i=k\cdot 1\neq 1$（除非$k=1$）。

因此，V不满足线性空间的封闭性，不构成线性空间。

答V不构成线性空间。

(3) $V = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \mid Ax = \theta, A \in P^{n\times n}\}$。

集合V实际上是矩阵A的解齐次线性方程$Ax = 0$的解集，即A的零空间（核）。线性方程组的解空间构成线性空间，因为：

- 零向量满足$A0 = 0$，因此$0 \in V$。
- 如果$x_1, x_2 \in V$，则$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$，因此$x_1 + x_2 \in V$。
- 对于标量$k \in P$，$A(kx_1) = kAx_1 = k \cdot 0 = 0$，因此$kx_1 \in V$。

因此，V是P^n的线性子空间。

V构成线性空间。

2

按通常矩阵的加法及数与矩阵的乘法，下列的数域 P 上方阵集合是否构成 P 上的线性空间：

(1) 全体形如 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}$ 的二阶方阵的集合；

(2) 全体 n 阶对称（或反对称，上三角）矩阵的集合。

(1) 全体形如 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}$ 的二阶方阵的集合

令集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in P \right\}$。

（a）零矩阵是否属于 V：

当 $a = 0, b = 0$ 时，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V。$$

因此，零矩阵属于 V。

（b）加法封闭性：

取任意 $M_1, M_2 \in V$，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & b_2 \end{pmatrix}。$$

则它们的和为

$$M_1+M_2=\begin{pmatrix}0+0 & a_1+a_2\\ -a_1-a_2 & b_1+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a_1+a_2\\ -(a_1+a_2) & b_1+b_2\end{pmatrix}。$$

由于 $a_1+a_2, b_1+b_2\in P$，所以 $M_1+M_2\in V$。因此，加法封闭性成立。

（c）数乘封闭性：

对任意 $k\in P$ 和 $M\in V$，

$$M=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & b\end{pmatrix},\quad kM=\begin{pmatrix}0 & ka\\ -ka & kb\end{pmatrix}。$$

由于 $ka, kb\in P$，所以 $kM\in V$。因此，数乘封闭性成立。

结论：

集合 V 满足线性空间的所有条件。因此，V 构成 P 上的线性空间。

(2) 全体 n 阶对称（或反对称，上三角）矩阵的集合

我们分别讨论这三个集合。

(2a) 全体 n 阶对称矩阵的集合

定义： 矩阵 A 是对称的，当且仅当 $A^T=A$。

验证：

（a）零矩阵属于该集合：

零矩阵 O 满足 $O^T=O$，因此是对称矩阵。

（b）加法封闭性：

设 A, B 为对称矩阵，则

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B。$$

因此，$A+B$ 也是对称矩阵。

（c）数乘封闭性：

对任意 $k\in P$，

$$(kA)^T=kA^T=kA。$$

因此，kA 也是对称矩阵。

结论：

全体 n 阶对称矩阵的集合构成 P 上的线性空间。

(2b) 全体 n 阶反对称矩阵（斜对称矩阵）的集合

定义： 矩阵 A 是反对称的，当且仅当 $A^T = -A$。

验证：

（a）零矩阵属于该集合：

零矩阵 O 满足 $O^T = -O$，因为 $O^T = O$ 且 $-O = O$。

（b）加法封闭性：

设 A, B 为反对称矩阵，则

$$(A+B)^T = A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A+B)。$$

因此，$A+B$ 也是反对称矩阵。

（c）数乘封闭性：

对任意 $k \in P$,

$$(kA)^T = kA^T = k(-A) = -(kA)。$$

因此，kA 也是反对称矩阵。

结论：

全体 n 阶反对称矩阵的集合构成 P 上的线性空间。

(2c) 全体 n 阶上三角矩阵的集合

定义： 矩阵 A 是上三角矩阵，当且仅当 $A_{ij} = 0$ （当 $i > j$ 时）。

验证：

（a）零矩阵属于该集合：

零矩阵的所有元素都为零，满足上三角矩阵的条件。

（b）加法封闭性：

设 A, B 为上三角矩阵，对于 $i > j$，有

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0。$$

因此，$A+B$ 也是上三角矩阵。

（c）数乘封闭性：

对任意 $k \in P$，对于 $i > j$，有

$$(kA)_{ij} = kA_{ij} = k \times 0 = 0。$$

因此，kA 也是上三角矩阵。

结论：

全体 n 阶上三角矩阵的集合构成 P 上的线性空间。

总结：

- **(1)** 是的，集合 V 构成 P 上的线性空间。
- **(2)** 是的，全体 n 阶对称矩阵、反对称矩阵和上三角矩阵的集合都构成 P 上的线性空间。

4

在 R^4 中，有两组基：
(1) $\alpha_1 = (1,0,0,0); \alpha_2 = (0,1,0,0); \alpha_3 = (0,0,1,0); \alpha_4 = (0,0,0,1).$
(2) $\beta_1 = (2,1,-1,1); \beta_2 = (0,3,1,0); \beta_3 = (5,3,2,1); \beta_4 = (6,6,1,3).$

试求：
(1) 从第(1)组到第(2)组基的过渡矩阵；
(2) 向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 对第(2)组基的坐标；
(3) 对两组基有相同坐标的非零向量.

(1) 求从第(1)组到第(2)组基的过渡矩阵

设从基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵为$A$，根据过渡矩阵的定义，有$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A$。

已知$\alpha_1 = (1,0,0,0), \alpha_2 = (0,1,0,0), \alpha_3 = (0,0,1,0), \alpha_4 = (0,0,0,1)$，$\beta_1 = (2,1,-1,1), \beta_2 = (0,3,1,0), \beta_3 = (5,3,2,1), \beta_4 = (6,6,1,3)$。

则A可通过将β_i关于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的坐标作为列向量来构造，即：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 求向量$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$对第(2)组基的坐标

设向量x在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标为$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的坐标为$(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$。

已知x在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标就是其本身$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T$，且从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为$A$，根据坐标变换公式$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T=A(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，那么$(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=A^{-1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T$。

先求A^{-1}（可通过伴随矩阵法或初等行变换法等求逆矩阵的方法来计算），这里通过初等行变换求A^{-1}：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

经过一系列初等行变换（具体过程略）可得A^{-1}，然后将向量$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$代入$(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=A^{-1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T$即可求出$x$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

(3) 求对两组基有相同坐标的非零向量

设向量γ在两组基下的坐标均为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有：

$$\begin{cases} \gamma = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4 \\ \gamma = x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4 \end{cases}$$

即$x_1(\alpha_1-\beta_1)+x_2(\alpha_2-\beta_2)+x_3(\alpha_3-\beta_3)+x_4(\alpha_4-\beta_4)=0$。

7

求 R^4 的子空间

$$V=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)|a_1-a_2+a_3-a_4=0\},$$

$$W=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)|a_1+a_2+a_3+a_4=0\}$$

的交 $V\cap W$ 的一组基.

要找到 $V\cap W$ 的一组基，我们需要求出同时满足两个子空间定义的向量。

求解步骤：

1. **同时满足两个条件：**

$$\begin{cases} a_1-a_2+a_3-a_4=0 \quad (1) \\ a_1+a_2+a_3+a_4=0 \quad (2) \end{cases}$$

因此，$V\cap W$ 的一组基为：

$$\{\,(-1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1,\ 0,\ 1\,)\,\}$$

8

设向量组
(1) $\alpha_1=(1,0,2,1);\alpha_2=(2,0,1,-1);\alpha_3=(3,0,3,0)$,
(2) $\beta_1=(1,1,0,1);\beta_2=(4,1,3,1)$.

若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$, 求 V_1+V_2 的维数及一组基.

思路

1 2 3 1 4
0 0 0 1 1
2 1 3 0 3
1 -1 0 1 1
初等行变换，r为3

V_1+V_2的维数为3，一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$。

11

设 T 是 R^3 的线性变换，它定义为

$$T(x,y,z)=(0,x,y),$$

求 T^2 的象集及核.

对于一个线性变换 $T:V\to W$，其中 V 和 W 是向量空间，**象集**（$\mathrm{Im}(T)$）和**核**（$\ker(T)$）是描述这个变换性质的两个基本概念。

象集（Image）

对于线性变换 $T:V\to W$，**象集**（有时称为**像**或**值域**）是所有可能的输出向量的集合。即：

$$\mathrm{Im}(T)=\{T(\mathbf{v})\mid\mathbf{v}\in V\}$$

换句话说，象集包含了 V 中所有向量经过 T 变换后在 W 中的“影子”。

设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是定义为：

$$T(x,y)=(x,y,x+y)$$

那么，象集 $\mathrm{Im}(T)$ 包含所有形如 $(x,y,x+y)$ 的向量，即：

$$\mathrm{Im}(T)=\{(x,y,x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

核（Kernel）

对于线性变换 $T : V \to W$，**核**（有时称为**零空间**）是所有被 T 映射到零向量的输入向量的集合。即：

$$\ker(T) = \left\{ \mathbf{v} \in V \;\middle|\; T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \right\}$$

核描述了哪些向量在变换过程中被“消除”或“忽略”了。

继续以上的例子，设 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 定义为：

$$T(x, y) = (x, y, x + y)$$

求核 $\ker(T)$：

$$T(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y, x + y) = (0, 0, 0)$$

这意味着：

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 0$$

唯一解是 $x = y = 0$，所以：

$$\ker(T) = \{(0, 0)\}$$

这表明，只有零向量被映射到零向量。

象集与核之间的关系

根据**秩-核定理**（Rank-Nullity Theorem），对于有限维向量空间，线性变换的象集和核之间存在以下关系：

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$$

其中，$\dim(\ker(T))$ 被称为**零空间的维数**或**核的维数**，$\dim(\operatorname{Im}(T))$ 被称为**秩**（rank）或**像集的维数**。

示例应用

回到之前的例子，$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$：

- $\dim(V) = 2$
- $\dim(\ker(T)) = 0$（因为核仅包含零向量）
- $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$

验证秩-核定理：

$$2 = 0 + 2$$

另一个例子

设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定义为：

$$T(x,y,z)=(x+y,y+z)$$

求象集

象集 $\mathrm{Im}(T)$ 包含所有形如 $(x+y,y+z)$ 的向量。代换，比如设 $a=x+y$， $b=y+z$，则：

$$\mathrm{Im}(T)=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^2$$

说明 T 是满射，能够覆盖整个目标空间。

求核

求解 $T(x,y,z)=(0,0)$，即：

$$\begin{gathered}x+y=0\\y+z=0\end{gathered}$$

解得：

$$y=-x,\quad z=x$$

所以，核是所有形如 $(x,-x,x)$ 的向量，即：

$$\ker(T)=\left\{x(1,-1,1)\mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

这是一个一维子空间，沿着向量 $(1,-1,1)$ 的直线。

根据秩-核定理：

$$\dim(V)=3=\dim(\ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))=1+2$$

符合定理。

要确定线性变换 T^2 的象集（$\mathrm{Im}(T^2)$）及核（$\ker(T^2)$），我们需要按照以下步骤进行分析。

1. 计算 T^2

首先，明确线性变换 T 的定义：

$$T(x,y,z)=(0,x,y)$$

接下来，计算 T^2 即 T 的复合变换：

$$T^2(x, y, z) = T(T(x, y, z))$$

执行变换：

$$\begin{gathered}T(x, y, z) = (0, x, y) \\ T^2(x, y, z) = T(0, x, y) = (0, 0, x)\end{gathered}$$

因此，

$$T^2(x, y, z) = (0, 0, x)$$

2. 求 T^2 的象集（$\operatorname{Im}(T^2)$）

象集是所有可能的输出向量的集合。根据上面的计算，

$$T^2(x, y, z) = (0, 0, x)$$

由此可见，象集由所有形如 $(0, 0, x)$ 的向量组成，其中 $x \in \mathbb{R}$。

象集表示为：

$$\operatorname{Im}(T^2) = \left\{ (0, 0, x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

3. 求 T^2 的核（$\ker(T^2)$）

核是所有被变换映射到零向量的输入向量的集合。即，

$$\ker(T^2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T^2(x, y, z) = (0, 0, 0) \right\}$$

根据 $T^2(x, y, z) = (0, 0, x)$，要使得 $T^2(x, y, z) = (0, 0, 0)$，必须满足：

$$x = 0$$

因此，核中的向量必须满足 $x = 0$，即形如 $(0, y, z)$，其中 $y, z \in \mathbb{R}$。

核表示为：

$$\ker(T^2) = \left\{ (0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

4. 总结

- **象集**（$\operatorname{Im}(T^2)$）：

$$\operatorname{Im}(T^2) = \left\{ (0, 0, x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

  这是 z-轴所张成的一维子空间。

- **核**（$\ker(T^2)$）：

$$\ker(T^2) = \left\{ (0, y, z) \,\middle|\, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

12

在 R^3 中，求下列各线性变换 T 在所指定基下的矩阵：
(1) $T_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0); \varepsilon_2 = (0, 1, 0); \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵；
(2) 已知线性变换 T 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1); \eta_2 = (1, 0, -1); \eta_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵为
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
求 T 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0); \varepsilon_2 = (0, 1, 0); \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

（1）求 T_1 在标准基下的矩阵

步骤 1： 标准基 $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$，其中

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

步骤 2： 计算 T_1 在每个基向量上的作用，即 $T_1(\varepsilon_1), T_1(\varepsilon_2), T_1(\varepsilon_3)$。

- **计算 $T_1(\varepsilon_1)$**

$$T_1(1, 0, 0) = (2 \cdot 1 - 0,\ 0 + 0,\ 1) = (2, 0, 1)$$

- **计算 $T_1(\varepsilon_2)$**

$$T_1(0, 1, 0) = (2 \cdot 0 - 1,\ 1 + 0,\ 0) = (-1, 1, 0)$$

- **计算 $T_1(\varepsilon_3)$**

$$T_1(0, 0, 1) = (2 \cdot 0 - 0,\ 0 + 1,\ 0) = (0, 1, 0)$$

结论：

线性变换 T_1 在标准基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 下的矩阵表示为

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）求 T 在标准基下的矩阵

- 若T在基$\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$下的矩阵为$A$，在基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$下的矩阵为$B$，且从基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$到基$\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$的过渡矩阵为$P$，则$B = P^{-1}AP$。

- 已知$\eta_1=(-1,1,1),\eta_2=(1,0,-1),\eta_3=(0,1,1)$，$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$。
- 根据过渡矩阵的定义，$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P$。
- 计算P：
  - $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

综上，

$$[T]_\varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

13

设 $x=(\xi_1,\xi_2),y=(\eta_1,\eta_2)$ 是二维实线性空间 R^2 的任意两向量，R^2 对以下定义的内积是否构成欧氏空间：
(1) $(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+1$；
(2) $(x,y)=\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2$；
(3) $(x,y)=3\xi_1\eta_1+5\xi_2\eta_2$.

1. **正定性**：$(x,x)>0$ 对于所有非零向量 x，且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；
2. **对称性**：$(x,y)=(y,x)$；
3. **线性性**：$(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$；

(1) $(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+1$

1. 正定性：

$(x,x)=\xi_1^2+\xi_2^2+1$。
对于任意非零向量 $x=(\xi_1,\xi_2)$，$\xi_1^2+\xi_2^2>0$，因此 $(x,x)>0$。
但当 $x=0$，$(0,0)=0^2+0^2+1=1\neq 0$。
不满足正定性。

因此，$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+1$ **不是内积**，R^2 在此定义下不构成欧氏空间。

(2) $(x,y)=\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2$

1. 正定性：

$(x,x)=\xi_1^2-\xi_2^2$。
若 $\xi_2^2>\xi_1^2$，则 $(x,x)<0$。例如，当 $x=(1,2)$，$(x,x)=1^2-2^2=-3<0$。
因此，(x,x) 不总是正的，**不满足正定性**。

因此，$(x,y)=\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2$ **不是内积**，R^2 在此定义下不构成欧氏空间。

(3) $(x, y) = 3\xi_1\eta_1 + 5\xi_2\eta_2$

1. 正定性：

$(x, x) = 3\xi_1^2 + 5\xi_2^2$。
对于任意非零向量 $x = (\xi_1, \xi_2)$，由于 $3 > 0, 5 > 0$，显然 $3\xi_1^2 + 5\xi_2^2 > 0$。
当 $x = 0$，$(x, x) = 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 = 0$。
满足正定性。

2. 对称性：

$(x, y) = 3\xi_1\eta_1 + 5\xi_2\eta_2 = 3\eta_1\xi_1 + 5\eta_2\xi_2 = (y, x)$。
满足对称性。

3. 线性性：

$(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$，且 $(x, ay + bz) = a(x, y) + b(x, z)$。
由于内积的定义是线性组合的形式，显然满足线性性和双线性性。

因此，$(x, y) = 3\xi_1\eta_1 + 5\xi_2\eta_2$ 是一个**合法的内积**，且 R^2 在此定义下构成欧氏空间。

20

设 V 是 n 维欧氏空间，α 为 V 中一个取定的非零向量，证明：
(1) $V_1 = \{x|(x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 的子空间，
(2) $\dim V_1 = n - 1$.

(1) 证明 $V_1 = \{x \mid (x, \alpha) = 0, x \in V\}$ 是 V 的子空间

1. $V_1 \neq \emptyset$（非空性）；
2. V_1 对加法封闭：若 $x, y \in V_1$，则 $x + y \in V_1$；
3. V_1 对数乘封闭：若 $x \in V_1$，则 $\lambda x \in V_1$ 对任意标量 λ。

1. 非空性：

因为 $\alpha \neq 0$，而零向量 $0 \in V$ 且 $(0, \alpha) = 0$。因此 $0 \in V_1$，故 V_1 非空。

2. 加法封闭性：

设 $x, y \in V_1$，则 $(x, \alpha) = 0$ 且 $(y, \alpha) = 0$。
考虑 $(x + y, \alpha)$：

$$(x + y, \alpha) = (x, \alpha) + (y, \alpha) = 0 + 0 = 0.$$

因此，$x + y \in V_1$。

3. 数乘封闭性：

设 $x \in V_1$，则 $(x, \alpha) = 0$。
考虑 $(\lambda x, \alpha)$ 对任意标量 λ：

$$(\lambda x, \alpha) = \lambda(x, \alpha) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

因此，$\lambda x \in V_1$。

综上，V_1 满足子空间的所有性质，故 V_1 是 V 的子空间。

(2) 证明 $\dim V_1 = n - 1$

3. 维数计算

在 n-维欧氏空间 V 中，α 是一个固定的非零向量。
α 生成了一维子空间 $W = \text{span}(\alpha)$，即所有 α 的标量倍数构成的空间。
V_1 是 V 中与 W 正交的子空间。因此，有如下直和分解：

$$V = V_1 \oplus W,$$

其中 $\dim(W) = 1$。根据维数公式：

$$\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(W).$$

由于 $\dim(V) = n$ 且 $\dim(W) = 1$，可得：

$$\dim(V_1) = n - 1.$$

21

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维欧氏空间 V 的一组标准正交基，求 V 的一个正交变换 T，使得

$$\begin{cases} T\alpha_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3, \\ T\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_3. \end{cases}$$

正交变换：正交变换 T 满足

$$(T(x), T(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in V,$$

步骤一：利用正交变换的性质确定 $T\alpha_3$

设 $T\alpha_3 = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$。

因为 T 是正交变换，所以对于标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 有：

1. **保持向量的内积不变**：

$$\begin{aligned}(T\alpha_1,T\alpha_3)&=\left(\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3\right)\\&=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T\alpha_2,T\alpha_3)&=\left(\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3,x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3\right)\\&=\frac{2}{3}x(\alpha_1,\alpha_1)-\frac{1}{3}y(\alpha_2,\alpha_2)+\frac{2}{3}z(\alpha_3,\alpha_3)\\&\quad+\left(\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x\right)(\alpha_1,\alpha_2)+\left(\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}x\right)(\alpha_1,\alpha_3)+\left(\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}y\right)(\alpha_2,\alpha_3)\\&=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=0\end{aligned}$$

2. **保持向量的模长不变**：
   又因为 T 是正交变换，$|T\alpha_3|=|\alpha_3|=1$，则 $(T\alpha_3,T\alpha_3)=(\alpha_3,\alpha_3)=1$，即：

$$\begin{aligned}(T\alpha_3,T\alpha_3)&=(x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3,x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3)\\&=x^2+y^2+z^2=1\end{aligned}$$

联立方程组：

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z=0 & (1)\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=0 & (2)\\ x^2+y^2+z^2=1 & (3)\end{cases}$$

取$x=\frac{1}{3}$，则$y=-\frac{2}{3}$，$z=-\frac{2}{3}$。

所以 $T\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3$。

则 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A 为：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

22

证明：欧氏空间中两个正交变换的乘积也是正交变换；正交变换的逆变换也是正交变换

1. **证明两个正交变换的乘积也是正交变换**
   - 设V是欧氏空间，T_1和T_2是V上的两个正交变换。

- 对于任意的$\alpha,\beta\in V$，因为T_1是正交变换，所以$(T_1\alpha,T_1\beta)=(\alpha,\beta)$，同理，因为$T_2$是正交变换，所以$(T_2(T_1\alpha),T_2(T_1\beta))=(T_1\alpha,T_1\beta)$。
- 令$T=T_2T_1$，则$(T\alpha,T\beta)=(T_2(T_1\alpha),T_2(T_1\beta))=(T_1\alpha,T_1\beta)=(\alpha,\beta)$，这说明$T$保持向量的内积不变。
- 又因为对于任意$\alpha\in V$，$|T\alpha|=\sqrt{(T\alpha,T\alpha)}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|\alpha|$，所以$T$也保持向量的长度不变。
- 综上，$T=T_2T_1$是正交变换，即欧氏空间中两个正交变换的乘积也是正交变换。

2. **证明正交变换的逆变换也是正交变换**
   - 设T是欧氏空间V上的正交变换，对于任意$\alpha,\beta\in V$，有$(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)$。
   - 因为T是可逆的，设T^{-1}是T的逆变换。对于任意$\xi,\eta\in V$，令$\alpha=T^{-1}\xi$，$\beta=T^{-1}\eta$。
   - 则$(\xi,\eta)=(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)=(T^{-1}\xi,T^{-1}\eta)$，这说明$T^{-1}$保持向量的内积不变。
   - 又对于任意$\xi\in V$，设$\alpha=T^{-1}\xi$，则$|\xi|=|T\alpha|=|\alpha|=|T^{-1}\xi|$，所以$T^{-1}$也保持向量的长度不变。
   - 综上，正交变换T的逆变换T^{-1}也是正交变换。

23

证明：n 阶方阵 A 为酉矩阵的充要条件，是对任何行向量 $x\in C^n$，都有 $|xA|=|x|$.

1. **复数的共轭**
   - 对于一个复数$z=a+bi$，它的共轭复数$\overline{z}$定义为$\overline{z}=a-bi$。例如，若$z=3+2i$，则$\overline{z}=3-2i$；若$z=4i$（此时$a=0$，$b=4$），则$\overline{z}=-4i$。
2. **共轭对称性的定义**
   - 在酉空间中，对于任意两个向量α和β，内积(α,β)和(β,α)满足$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$。
   - 例如，设$\alpha=(1,i)$，$\beta=(2,1)$是C^2（二维复数向量空间）中的两个向量，定义内积$(\alpha,\beta)=\alpha^H\beta$（这里$\alpha^H$是$\alpha$的共轭转置）。
     - 先计算(α,β)：$\alpha^H=(1,-i)$，则$(\alpha,\beta)=(1,-i)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2-i$。
     - 再计算(β,α)：$\beta^H=(2,1)$，则$(\beta,\alpha)=(2,1)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=2+i$。
     - 可以看到$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$，这里$\overline{2+i}=2-i$，这就体现了共轭对称性。
3. **酉空间定义**
   - 设V是复数域C上的线性空间，对于V中任意两个向量α,β，有一个复数与之对应，这个复数记作(α,β)，并且满足以下条件：
     - **共轭对称性**：$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$，其中$\overline{(\beta,\alpha)}$表示$(\beta,\alpha)$的共轭复数。
     - **对第一变元的线性性**：$(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$，这里$k,l\in C$，$\alpha,\beta,\gamma\in V$。
     - **正定性**：$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，当且仅当$\alpha=0$时$(\alpha,\alpha)=0$。
   - 这样的线性空间V称为**酉空间**。
4. **标准正交基**
   - 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是酉空间$V$的一组基，若$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$，则称$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组标准正交基。
   - 对于酉空间V中的任意向量α，若$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$，且$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是标准正交基，则$(\alpha,\beta)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$。
5. **酉变换**

- 设T是酉空间V上的线性变换，若对于任意$\alpha, \beta \in V$，都有$(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$，则称$T$为酉变换。
- 设T是酉空间V上的线性变换，T是酉变换的充分必要条件是对于V的任意一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，$T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n$也是$V$的一组标准正交基。

6. **酉矩阵**
   - 设A是n阶复矩阵，若$A^H A = I$（其中$A^H = \overline{A}^T$，$\overline{A}$表示A的共轭矩阵，A^T表示A的转置矩阵)，则称A为酉矩阵。
   - 酉空间V上的线性变换T是酉变换的充分必要条件是T在标准正交基下的矩阵是酉矩阵。

24

设 A, B 均为厄米特矩阵，证明：AB 为厄米特矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

正规矩阵

有一类矩阵A如对角矩阵、实对称矩阵$(A^T = A)$、实反对称矩阵$(A^T = -A)$、厄米特矩阵$(A^H = A)$、反厄米特矩阵$(A^H = -A)$、正交矩阵$(A^T A = AA^T = E)$以及酉矩阵$(A^H A = AA^H = E)$等，都有一个共同的性质：$A^H A = AA^H$

定理2.8 矩阵$A \in C^{n\times n}$为正规矩阵的充要条件是：存在酉矩阵Q，使得A相似于对角矩阵，即

$$Q^H AQ = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

这里$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值。

根据共轭转置的性质$(AB)^H = B^H A^H$。

25

证明：设 A 为任一复数方阵. 我们想要证明存在一个厄米特矩阵 H 和一个反厄米特矩阵 S, 使得 $A = H + S$.

复数方阵就是一个形状为正方形，并且其所有元素都是复数的矩阵。

厄米特矩阵 H 满足 $H^* = H$, 其中 H^* 是 H 的共轭转置.
反厄米特矩阵 S 满足 $S^* = -S$.

假设存在这样的厄米特矩阵 H 和反厄米特矩阵 S, 使得 $A = H + S$.
对等式两边取共轭转置，我们有：
$A^* = (H + S)^* = H^* + S^*$
由于 H 是厄米特矩阵，所以 $H^* = H$.

由于 S 是反厄米特矩阵，所以 $S^* = -S$.
因此，$A^* = H - S$.

现在我们有以下两个等式：

1. $A = H + S$
2. $A^* = H - S$

将等式 (1) 和等式 (2) 相加，得到：
$A + A^* = (H + S) + (H - S) = 2H$
解得 H:
$H = \frac{A+A^*}{2}$

将等式 (1) 减去等式 (2)，得到：
$A - A^* = (H + S) - (H - S) = 2S$
解得 S:
$S = \frac{A-A^*}{2}$

接下来，我们需要验证这样定义的 H 是否是厄米特矩阵，以及 S 是否是反厄米特矩阵.

验证 H 是厄米特矩阵：
$H^* = \left(\frac{A+A^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = \frac{A+A^*}{2} = H$
因此，H 是厄米特矩阵.

验证 S 是反厄米特矩阵：
$S^* = \left(\frac{A-A^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* - A) = -\frac{1}{2}(A - A^*) = -S$
因此，S 是反厄米特矩阵.

最后，我们验证 $H + S$ 是否等于 A:
$H + S = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*+A-A^*}{2} = \frac{2A}{2} = A$

所以，任一复数方阵 A 都可以表示成一个厄米特矩阵 $H = \frac{A+A^*}{2}$ 与一个反厄米特矩阵 $S = \frac{A-A^*}{2}$ 的和.

结论成立.

最终答案：我们设 $H = \frac{A+A^*}{2}$ 和 $S = \frac{A-A^*}{2}$.
首先验证 H 是厄米特矩阵：
$H^* = \left(\frac{A+A^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(A^* + (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = H.$
所以 H 是厄米特矩阵.
然后验证 S 是反厄米特矩阵：
$S^* = \left(\frac{A-A^*}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(A^* - (A^*)^*) = \frac{1}{2}(A^* - A) = -\frac{1}{2}(A - A^*) = -S.$
所以 S 是反厄米特矩阵.
最后验证 $A = H + S$:
$H + S = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2} = \frac{A+A^*+A-A^*}{2} = \frac{2A}{2} = A.$
因此，任一复数方阵都可以表示成厄米特矩阵与反厄米特矩阵之和.
证毕.

32

在复数域上，求下列矩阵的约当标准形：

约当标准形

1. **定义**
   - 约当标准形（Jordan Canonical Form）是复数域上矩阵的一种特殊形式。一个n阶矩阵A的约当标准形J是一个分块对角矩阵，它由若干个Jordan块$J_k(\lambda)$组成，即

$$J=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

   其中λ_i是矩阵A的特征值，k_i表示相应Jordan块的阶数，且$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$。
2. **约当块**
   - 例如，二阶Jordan块$J_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$，三阶Jordan块$J_3(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$。

（1）

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

要求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 的约当标准形，我们首先需要找到矩阵的特征值。

特征多项式为：
$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$
$=-\lambda^3+2\lambda^2=\lambda^2(2-\lambda)$

令特征多项式为零，得到特征值 $\lambda_1=0$（代数重数为 2）和 $\lambda_2=2$（代数重数为 1）。

所以，对应于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$。

令 $y=1, z=0$，得到特征向量 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

令 $y=0, z=1$，得到特征向量 $p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2)

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 7 & -3 \\ -2 & -5-\lambda & 2 \\ -4 & -10 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 1) + 1(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$$

The roots are:

$$\lambda - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

The Jordan Standard Form J is:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

(3)

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

1. **计算特征多项式**:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda + 1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= (\lambda + 1) \times \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -8 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

展开行列式可得:

$$f(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

2. **求特征值**:
   由特征多项式$f(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = 0$,可得特征值$\lambda = -1$(三重根)。

计算$(A + I)$的秩,$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,对其进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1, r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其秩$r(A + I) = 1$,$n - r(A + I) = 3 - 1 = 2$,这表明对应于三重特征值$\lambda = -1$,有一个二阶约当块和一个一阶约当块,即约当块为$J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$和$J_1(-1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$。

3. **步骤三:写出约当标准形**
   根据上述求出的约当块,该矩阵A的约当标准形J为:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4)

$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

33

求下列多项式矩阵的史密斯标准形:
(1) $\begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$.

42

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，试求 e^A.

步骤一：求矩阵 A 的特征值

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，其特征方程为$|\lambda I-A|=0$，其中$I$是二阶单位矩阵

解上述一元二次方程$\lambda^2-2\lambda-3=0$，因式分解得$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$，可得特征值$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$。

步骤二：求对应的特征向量

1. **当$\lambda_1=3$时**：

可得方程组$\begin{cases} 2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1+2x_2=0 \end{cases}$，取$x_1=1$，则$x_2=1$，对应的特征向量$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

2. **当$\lambda_2=-1$时**：

可得方程组$\begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-2x_2=0 \end{cases}$，取$x_1=1$，则$x_2=-1$，对应的特征向量$\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

步骤三：对矩阵 A 进行对角化

令矩阵$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，其逆矩阵$P^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，且有$A=P\Lambda P^{-1}$，其中$\Lambda=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
。

步骤四：计算 e^A

根据矩阵指数函数的性质，若$A=P\Lambda P^{-1}$，则$e^A=Pe^{\Lambda}P^{-1}$。

对于e^{Λ}，因为$\Lambda=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则$e^{\Lambda}=\begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$。

$$
\begin{aligned}
e^A &= Pe^{\Lambda}P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^3}{2} & \frac{e^3}{2} \\ \frac{e^{-1}}{2} & -\frac{e^{-1}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^3+e^{-1}}{2} & \frac{e^3-e^{-1}}{2} \\ \frac{e^3-e^{-1}}{2} & \frac{e^3+e^{-1}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

43

对下列方阵 A，求矩阵函数 e^{At}.

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;

(1) 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

首先，我们求矩阵 A 的特征值。特征方程为 $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$
\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(-2) = 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0
$$

所以，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -2$.

取特征向量 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

取特征向量 $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

构造矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$，其逆矩阵为 $P^{-1} = \frac{1}{-2-(-1)} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.
对角矩阵为 $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，则 $e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$.

计算 $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$:

最终答案为：

$$
e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

(3) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -12 & -6\end{bmatrix}$;

(4) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$.

44

设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$, 求 e^A, $\sin A$, $\cos At$。

Given the matrix $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$.
The characteristic equation is $det(A-\lambda I)=\lambda^2+2=0$, so the eigenvalues are $\lambda=\pm i\sqrt{2}$.
Let $\omega=\sqrt{2}$.

For e^A, we use the formula $e^A=I\cos(\omega)+\frac{A}{\omega}\sin(\omega)$.

$$e^A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cos(\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\sin(\sqrt{2})$$
$$e^A=\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{2}) & 0\\ 0 & \cos(\sqrt{2})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2})\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}) & 0\end{bmatrix}$$
$$e^A=\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{2}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2})\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}) & \cos(\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

For $\sin A$, we use the formula $\sin A=A\frac{\sin(\omega)}{\omega}$.

$$\sin A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\\ -2\frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}) & 0\end{bmatrix}$$

For $\cos At$, we use the formula $\cos At=I\cos(\omega t)$.

$$\cos At=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cos(\sqrt{2}t)=\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{2}t) & 0\\ 0 & \cos(\sqrt{2}t)\end{bmatrix}$$

Final Answer: The final answer is

$$\boxed{e^A=\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{2}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2})\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}) & \cos(\sqrt{2})\end{bmatrix}, \sin A=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}) & 0\end{bmatrix}, \cos At=\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{2}t) & 0\\ 0 & \cos(\sqrt{2}t)\end{bmatrix}}$$

45

设 $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$，求 $\frac{d}{dt}A(t)$，$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$，$\frac{d}{dt}|A(t)|$，$\left|\frac{d}{dt}A(t)\right|$。

1. 求 $\frac{d}{dt}A(t)$：

$$\frac{d}{dt}A(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\cos t) & \frac{d}{dt}(\sin t) \\ \frac{d}{dt}(-\sin t) & \frac{d}{dt}(\cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

2. 求 $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$：
   The inverse of a 2×2 matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   So, $A^{-1}(t) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
   Now, we differentiate $A^{-1}(t)$ with respect to t:

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\cos t) & \frac{d}{dt}(-\sin t) \\ \frac{d}{dt}(\sin t) & \frac{d}{dt}(\cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

3. 求 $\frac{d}{dt}|A(t)|$：
   We already found that $|A(t)| = 1$.
   So, $\frac{d}{dt}|A(t)| = \frac{d}{dt}(1) = 0$.
4. 求 $\left|\frac{d}{dt}A(t)\right|$：
   From step 1, we have $\frac{d}{dt}A(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$.
   The determinant of this matrix is:

$$\left|\frac{d}{dt}A(t)\right| = (-\sin t)(-\sin t) - (\cos t)(-\cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Final Answer: The final answer is

$$\boxed{\frac{d}{dt}A(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \frac{d}{dt}A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \frac{d}{dt}|A(t)| = 0, \left|\frac{d}{dt}A(t)\right| = 1}$$

46

设 $A(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^t & 1 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $\int A(t)dt$，$\int_0^1 A(t)dt$。

$$\int A(t)dt = \begin{bmatrix} \int e^{2t}dt & \int te^t dt & \int 1dt \\ \int e^{-t}dt & \int 2e^{2t}dt & \int 0dt \\ \int 3tdt & \int 0dt & \int 0dt \end{bmatrix}$$

$$\int A(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t \\ -e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + C$$

where C is a matrix of integration constants.

To find the definite integral $\int_0^1 A(t)dt$, we evaluate the definite integral of each element from 0 to 1:

$$\int_0^1 A(t)dt = \begin{bmatrix} \int_0^1 e^{2t}dt & \int_0^1 te^t dt & \int_0^1 1dt \\ \int_0^1 e^{-t}dt & \int_0^1 2e^{2t}dt & \int_0^1 0dt \\ \int_0^1 3tdt & \int_0^1 0dt & \int_0^1 0dt \end{bmatrix}$$

So,

$$\int_0^1 A(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^2-1) & 1 & 1 \\ 1-e^{-1} & e^2-1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

48

求微分方程的解：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

首先，求解矩阵 A 的特征值 λ：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

因此，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ 和 $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$。

由于特征值是纯虚数，矩阵指数 e^{At} 将涉及到三角函数形式。

对于满足 $A^2 = -\omega^2 I$ 的矩阵 A（其中 $\omega = \sqrt{3}$），矩阵指数可以表示为：

$$e^{At} = \cos(\omega t)I + \frac{A}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$e^{At} = \cos(\sqrt{3}t)I + \frac{A}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$$

具体展开：

$$e^{At} = \cos(\sqrt{3}t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} & \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

根据矩阵指数的定义，系统的解为：

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

其中，初始条件为 $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。因此，

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} & \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} & \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

进行矩阵乘法：

$$x(t) = \begin{pmatrix} \left(\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}}\right) \cdot 0 + \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \cdot 1 \\ -\frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \left(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \\ \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

简化表达式，得到最终解：

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

49

求非齐次微分方程的解：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$