题目 1

下列所取近似值有多少位有效数字？其误差和相对误差有多大？

(1) $e = 2.718281828459045\cdots$，取 $x_1^* = 2.71828$

a. 有效数字位数

有效数字是指一个数中从第一个非零数字到最后一个确定的数字。对于 $x_1^* = 2.71828$：

- 整数部分：2
- 小数部分：71828

总共有 **6 位有效数字**。

b. 绝对误差计算

绝对误差定义为实际值与近似值的差的绝对值。

$$\text{绝对误差} = |e - x_1^*| = |2.718281828459045 - 2.71828| = 0.000001828459045 \approx 1.828459 \times 10^{-6}$$

c. 相对误差计算

相对误差定义为绝对误差与实际值的比值。

$$\text{相对误差} = \frac{|e - x_1^*|}{|e|} = \frac{1.828459 \times 10^{-6}}{2.718281828459045} \approx 6.7307 \times 10^{-7}$$

(2) 我国古代数学家祖冲之以 $\frac{355}{113}$ 作 π 的近似值

a. 有效数字位数

首先计算 $\frac{355}{113}$ 的值：

$$\frac{355}{113} \approx 3.1415929203539825$$

与实际值 $\pi \approx 3.141592653589793$ 对比：

- 小数点后 6 位（3.141592）完全一致。
- 第 7 位出现差异（实际值为 3.1415926，近似值为 3.1415929）。

因此，有 **7 位有效数字**（包括整数部分的 1 位和小数部分的 6 位）。

b. 绝对误差计算

$$\text{绝对误差} = \left|\frac{355}{113} - \pi\right| = |3.1415929203539825 - 3.141592653589793| \approx 2.66764 \times 10^{-7}$$

c. 相对误差计算

$$\text{相对误差} = \frac{\left|\frac{355}{113} - \pi\right|}{|\pi|} = \frac{2.66764 \times 10^{-7}}{3.141592653589793} \approx 8.495 \times 10^{-8}$$

题目 2

使用不同的方法解以下方程组：

(1) 顺序Gauss消元法解

给定的线性方程组为：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \quad (\text{方程}1) \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6 \quad (\text{方程}2) \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \quad (\text{方程}3) \end{cases}$$

步骤1：构造增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 5 \\ 3 & 4 & 7 & | & 6 \\ 1 & 3 & 3 & | & 5 \end{bmatrix}$$

步骤2：消元

目标：将系数矩阵化为上三角矩阵。

此时，增广矩阵进一步简化为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & | & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

步骤3：回代求解

从方程3''开始：

$$-1x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

解的结果

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}}$$

(2) 列主元Gauss消元法解

给定的线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad (\text{方程}1) \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \quad (\text{方程}2) \\ 3x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{方程}3) \end{cases}$$

步骤1：构造增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 5 & 4 & 10 & | & 0 \\ 3 & -0.1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

步骤2：选择列主元

第一列主元：在第一列中，绝对值最大的元素是5（第二行），故交换方程1和方程2。

交换后增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 3 & -0.1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

步骤3：消元

第一步：以新的第一行的第一个元素（5）作为主元，消去下面两行的第一个元素。

- 用方程2减去$\frac{1}{5}$倍的方程1：

$$\text{方程}2' = \text{方程}2 - \frac{1}{5} \times \text{方程}1$$

此时，增广矩阵变为：

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & | & 0 \\ 0 & 1.2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2.5 & -5 & | & 2 \end{bmatrix}$$

第二步：以第二列的主元为1.2（方程2'），消去下方的元素。

- 用方程3' 加上$\frac{2.5}{1.2}$倍的方程2'：

$$\text{方程3'' = 方程3' } + \frac{2.5}{1.2} \times \text{方程2'}$$

此时，增广矩阵进一步简化为：

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & | & 0 \\ 0 & 1.2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2.9167 & | & 4.0833 \end{bmatrix}$$

步骤4：回代求解

从方程3''开始：

$$-2.9167x_3 = 4.0833 \Rightarrow x_3 = -\frac{4.0833}{2.9167} \approx -1.4$$

解的结果

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 1.2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1.4 \end{cases}}$$

(3) 直接三角分解法解

给定的线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 5 \quad (\text{方程}1) \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 3 \quad (\text{方程}2) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 17 \quad (\text{方程}3) \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 7 \quad (\text{方程}4) \end{cases}$$

步骤1：构造增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & | & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 7 \end{bmatrix}$$

步骤2：进行高斯消元（LU分解）

第一步：选取第一列的主元为第1行的1，消去下面的元素。

- 用方程3减去方程1：

$$\text{方程}3' = \text{方程}3 - \text{方程}1$$

得到新方程3'：

$$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \quad (\text{方程3'})$$

其余方程无需操作。

第二步：选取第二列的主元。观察第二列，方程2和方程4中的第二个系数都是1，选择方程2作为主元。

- 用方程3'减去2倍的方程2：

$$\text{方程3''} = \text{方程3'} - 2 \times \text{方程}2$$

得到新方程3''：

$$0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 6 \quad (\text{方程3''})$$

- 用方程4减去方程2：

$$\text{方程}4' = \text{方程}4 - \text{方程}2$$

计算：
得到新方程4'：

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 4 \quad (\text{方程4'})$$

此时，增广矩阵简化为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

步骤3：回代求解

从方程4'开始：

$$2x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2$$

解的结果

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 2 \end{cases}}$$

题目 11

设 $f(-1) = -1$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，$f'(0) = 0$，试用多种方法求一次数不大于3的插值多项式 $H_3(x)$ 满足条件：

$$H_3(-1) = -1, \quad H_3(0) = H_3'(0) = 0, \quad H_3(1) = 1.$$

方法一：构造一般三次多项式并解方程组

假设插值多项式 $H_3(x)$ 为一般的三次多项式：

$$H_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

根据题目给定的条件，列出方程：

1. $H_3(-1) = -1$:
2. $H_3(0) = 0$:
3. $H_3'(0) = 0$:

首先求导：

$$H_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

代入 $x = 0$：

$$H_3'(0) = c = 0 \quad (\text{方程3})$$

4. $H_3(1) = 1$:

$$a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 1$$
$$a + b + c + d = 1 \quad (\text{方程4})$$

由方程2和方程3，$d = 0$ 且 $c = 0$，将其代入方程1和方程4，得到：

$$a + b = 1 \quad (\text{方程4'})$$

解方程1'和方程4'：

将方程1'和方程4'相加：

$$(-a + b) + (a + b) = -1 + 1$$
$$2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

代入方程4':

$$a + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

因此，多项式为：

$$H_3(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^3$$

方法二：使用Hermite插值法

方法三：插值法

题目12

已知$y = \sin x$，其函数关系见下表：

	1.5	**1.6**	**1.7**
$\sin x$	0.997 49	0.999 57	0.991 66

试构造出差商表，利用二次牛顿插值公式计算 $\sin(1.609)$（保留5位小数），并估计其误差。

例 7.2 给出函数 $y=f(x)$ 的函数表,

x_i	-2	0	1	2
$f(x_i)$	17	1	2	17

写出 $f(x)$ 的差商表,并求 $f(x)$ 的节点为 x_0,x_1 的一次插值,x_0,x_1,x_2 的二次插值和 x_0,x_1,x_2,x_3 的三次插值多项式.

解 差商表如下:

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
$x_0=-2$	17			
$x_1=0$	1	-8		
$x_2=1$	2	1	3	
$x_3=2$	17	15	7	1

因此

$$N_1(x)=17-8(x+2)=1-8x,$$
$$N_2(x)=N_1(x)+3(x+2)(x-0)=3x^2-2x+1,$$
$$N_3(x)=N_2(x)+1(x+2)x(x-1)=x^3+4x^2-4x+1.$$

牛顿插值多项式的构造形式

1. **一次牛顿插值多项式($n=1$时)**:

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

2. **二次牛顿插值多项式($n=2$时)**:

$$N_2(x)=N_1(x)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

步骤一:构造差商表

设 $x_0=1.5$,$x_1=1.6$,$x_2=1.7$,$y_0=0.99749$,$y_1=0.99957$,$y_2=0.99166$。

一阶差商:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0.99957-0.99749}{1.6-1.5}=0.0208$$
$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{0.99166-0.99957}{1.7-1.6}=-0.0791$$

二阶差商:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-0.0791-0.0208}{1.7-1.5} = \frac{-0.0999}{0.2} = -0.4995$$

差商表如下：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商
1.5	0.99749		
1.6	0.99957	0.0208	
1.7	0.99166	-0.0791	-0.4995

步骤二：利用二次牛顿插值公式计算$\sin(1.609)$

牛顿二次插值多项式为：

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

将 $x=1.609$，$x_0=1.5$，$x_1=1.6$，$x_2=1.7$以及相应的差商值代入上式：

$$\begin{aligned}N_2(1.609) &= 0.99749 + 0.0208\times(1.609-1.5) + (-0.4995)\times(1.609-1.5)\times(1.609-1.6)\\ &= 0.99749 + 0.0208\times 0.109 + (-0.4995)\times 0.109\times 0.009\\ &= 0.99749 + 0.00227 + (-0.4995)\times 0.000981\\ &= 0.99749 + 0.00227 - 0.00049\\ &= 0.99927\end{aligned}$$

所以$\sin(1.609)\approx 0.99927$（保留5位小数）。

步骤三：估计误差

对于牛顿插值多项式的误差估计，使用余项公式：

题目17

17. 若$f(x)$在$[a,b]$上有三阶连续导数，且已知$f(x)$在$[a,b]$上两个互异的点x_0,x_1上的函数值$f(x_0),f(x_1)$和一阶导数值$f'(x_0)$。试利用插值法导出$f(x)$的下述表达式：

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_1)^2}f(x_1) + \frac{1}{6}(x-x_0)^2(x-x_1)f''(\xi) \quad \xi\in(a,b).$$

题目19

用代数精度定义直接验证抛物线求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

具有三次代数精度。

牛顿莱布尼兹公式

如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那么$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

积分中值定理

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，那么在$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

梯形公式

对于函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$，梯形公式为$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$。

中矩形公式（也叫中点公式）

对于函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$，中矩形公式为$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$。

以下是用代数精度的定义来直接验证抛物线求积公式具有三次代数精度的详细过程：

代数精度

若求积公式对于次数不超过m的多项式都能准确成立，但对于$m+1$次多项式就不能准确成立，则称该求积公式具有m次代数精度。

验证步骤

我们分别对$f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$等不同次数的多项式来验证上述求积公式是否精确成立。

1. **当$f(x)=1$时**：
   左边$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$。
   右边$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{b-a}{6}(1+4\times1+1) = b-a$。
   此时，左边等于右边，求积公式对于$f(x)=1$（零次多项式）准确成立。
2. **当$f(x)=x$时**：
   左边$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$。
   右边$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left[a+4\times\frac{a+b}{2}+b\right] = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$。
   此时，左边等于右边，求积公式对于$f(x)=x$（一次多项式）准确成立。
3. **当$f(x)=x^2$时**：
   左边$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$。
   右边$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left[a^2+4\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right] = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$。
   此时，左边等于右边，求积公式对于$f(x)=x^2$（二次多项式）准确成立。
4. **当$f(x)=x^3$时**：
   左边$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$。
   右边$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left[a^3+4\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right] = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$。
   此时，左边等于右边，求积公式对于$f(x)=x^3$（三次多项式）准确成立。
5. **当$f(x)=x^4$时**：
   左边$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^4dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_a^b = \frac{1}{5}(b^5-a^5)$。
   右边$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left[a^4+4\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right] = \frac{b-a}{6}\left(a^4+4\times\frac{(a+b)^4}{16}+b^4\right)$，经展开化简后会发现右边$\neq \frac{1}{5}(b^5-a^5)$（即左边不等于右边）。
   此时，求积公式对于$f(x)=x^4$（四次多项式）不能准确成立。

根据代数精度的定义，该抛物线求积公式对于次数不超过3的多项式都能准确成立，但对于4次多项式不能准确成立，所以抛物线求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$具有三次代数精度。

题目20

确定下列求积公式的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出其所具有的代数精度。

(1) $\int_0^2 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$；
(2) $\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + ah^2[f'(0) + f'(h)]$

例 8.1 设有求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

试确定系数 A_0, A_1, A_2，使上述求积公式的代数精度尽量高，并指出该求积公式所具有的代数精度.

解 令求积公式依次对 $f(x) = 1, x, x^2$ 都精确成立，即系数 A_0, A_1, A_2 应满足方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2 \\ -A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0 \\ A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3} \end{cases},$$

解得

$$A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = \frac{4}{3},\ A_2 = \frac{1}{3}.$$

因此，该求积公式应为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).$$

又容易验证，该求积公式对于 $f(x) = x^3$ 也精确成立，但对 $f(x) = x^4$，求积公式不能精确成立. 因此，该求积公式具有三次代数精度.

(1)

- **当$f(x) = 1$时**：
  左边$\int_0^2 1dx = 2$,
  右边$A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) = A_0 + A_1 + A_2$,
  则有$A_0 + A_1 + A_2 = 2$ ①。
- **当$f(x) = x$时**：
  左边$\int_0^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2$,
  右边$A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) = A_0 \times 0 + A_1 \times 1 + A_2 \times 2 = A_1 + 2A_2$,
  则有$A_1 + 2A_2 = 2$ ②。
- **当$f(x) = x^2$时**：
  左边$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$,
  右边$A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) = A_0 \times 0^2 + A_1 \times 1^2 + A_2 \times 2^2 = A_1 + 4A_2$,
  则有$A_1 + 4A_2 = \frac{8}{3}$ ③。

联立方程 ①②③ 求解：

由 ② - ①可得：$-A_0 + A_2 = 0$，即$A_0 = A_2$。

将$A_0 = A_2$代入 ① 得$2A_2 + A_1 = 2$ ④。
由 ③ - ②可得$2A_2 = \frac{2}{3}$，解得$A_2 = \frac{1}{3}$，进而可得$A_0 = \frac{1}{3}$，再代入 ④ 可得$A_1 = \frac{4}{3}$。

(2)

(1) 对于 $f(x) = x^0 = 1$：

- 实际积分：

$$I(1) = \int_0^h 1\,dx = h$$

- 近似积分：

$$Q(1) = \frac{h}{2}[1+1] + ah^2[0+0] = h$$

- **结论：** $Q(1) = I(1)$

(2) 对于 $f(x) = x$：

- 实际积分：

$$I(x) = \int_0^h x\,dx = \frac{h^2}{2}$$

- 计算导数：

$$f'(x) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f'(h) = 1$$

- 近似积分：

$$Q(x) = \frac{h}{2}[0+h] + ah^2[1+1] = \frac{h^2}{2} + 2ah^2$$

- 设置 $Q(x) = I(x)$：

$$\frac{h^2}{2} + 2ah^2 = \frac{h^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2ah^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

- **结论：** 当 $a = 0$ 时，$Q(x) = I(x)$

(3) 对于 $f(x) = x^2$：

- 实际积分：

$$I(x^2) = \int_0^h x^2\,dx = \frac{h^3}{3}$$

- 计算导数：

$$f'(x) = 2x, \quad f'(0) = 0, \quad f'(h) = 2h$$

- 近似积分：

$$Q(x^2) = \frac{h}{2}[0+h^2] + ah^2[0+2h] = \frac{h^3}{2} + 2ah^3$$

- 设置 $Q(x^2) = I(x^2)$：

$$\frac{h^3}{2} + 2ah^3 = \frac{h^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)h^3 + 2ah^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h^3}{6} + 2ah^3 = 0$$

$$\frac{1}{6}+2a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{12}$$

- **结论：** 当 $a=-\frac{1}{12}$ 时，$Q(x^2)=I(x^2)$

(4) 对于 $f(x)=x^3$：

- 实际积分：

$$I(x^3)=\int_0^h x^3\,dx=\frac{h^4}{4}$$

- 计算导数：

$$f'(x)=3x^2, \quad f'(0)=0, \quad f'(h)=3h^2$$

- 近似积分：

$$Q(x^3)=\frac{h}{2}[0+h^3]+ah^2[0+3h^2]=\frac{h^4}{2}+3ah^4$$

- 设置 $Q(x^3)=I(x^3)$：

$$\frac{h^4}{2}+3ah^4=\frac{h^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)h^4+3ah^4=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h^4}{4}+3ah^4=0$$

$$\frac{1}{4}+3a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{12}$$

- **结论：** 当 $a=-\frac{1}{12}$ 时，$Q(x^3)=I(x^3)$

(5) 对于 $f(x)=x^4$：

- 实际积分：

$$I(x^4)=\int_0^h x^4\,dx=\frac{h^5}{5}$$

- 计算导数：

$$f'(x)=4x^3, \quad f'(0)=0, \quad f'(h)=4h^3$$

- 近似积分：

$$Q(x^4)=\frac{h}{2}[0+h^4]+ah^2[0+4h^3]=\frac{h^5}{2}+4ah^5$$

- 设置 $Q(x^4)=I(x^4)$：

$$\frac{h^5}{2}+4ah^5=\frac{h^5}{5} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)h^5+4ah^5=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3h^5}{10}+4ah^5=0$$

$$\frac{3}{10}+4a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{3}{40}$$

- **结论：** 要使 $Q(x^4)=I(x^4)$，a 需要取 $-\frac{3}{40}$，这与之前 $a=-\frac{1}{12}$ 的取值不一致。因此，无法找到一个 a 使得公式对 $f(x)=x^4$ 精确。

总结：

- 当参数 $a = -\dfrac{1}{12}$ 时，求积公式对次数不超过 3 的多项式（$f(x) = x^k,\ k = 0, 1, 2, 3$）精确。
- 对于 $f(x) = x^4$，无法取得相同的 a 值，使得公式精确。
- 因此，该求积公式的**代数精度**为 3。

答案：

取 $a = -\dfrac{1}{12}$，此时公式具有三次代数精度。