

Ψ & π

SMO 1st

YiShui No.1 Middle School Mathematical Olympiad (1st)

2025. 1. 20

命题人: (2023级) Sife Cleak (2023级) Zhao New

提交单个题解(自主命题, 将无法在网络上找到答案)、贡献题目、试题勘误: sife@sife.is-a.dev

参考答案与试题文件(包括排版代码)将于2025. 1. 22发布至<https://sife.is-a.dev/smo/1st.html>



1. (阿贝尔群性质, 皮亚诺公理) $1+2=2+1=()$ 。(Zhao New)

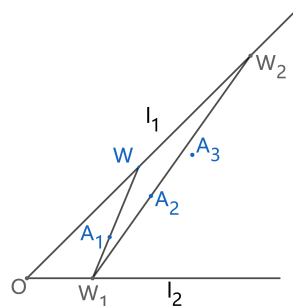
2. 证明: 沂水一中任意42名学生中, 必有4人相互认识或相互不认识。(这里规定, 若A认识B, 那么B也认识A; 若A认识B, B认识C, 那么A不一定认识C)。(Sife Cleak)

3. 证明:

$$4^{n-1}(\cos\alpha)^{2n-1} = \sum_{m=1}^n C_{2n-1}^{n-m} \cos(2m-1)\alpha$$

(Sife Cleak)

4. l_1 上一点W, 作 WA_1 延长与 l_2 交于 W_2 , 操作下去直至 W_{2025} , 取 l_1 上不同于W的两点P、U, 作 P_{2025} 、 U_{2025} 。证明: WU_{2025} 与 UW_{2025} 的交点、 WP_{2025} 与 PW_{2025} 的交点、 PU_{2025} 与 UP_{2025} 的交点三点共线。



(Sife Cleak)

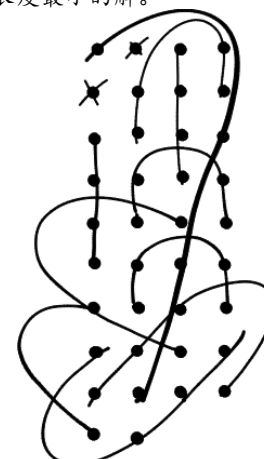
5. 双曲线 $W: x^2 - y^2 = 2025$ 上过点(75, 60)作斜率为 k_1 、 k_2 的直线 l_1 、 l_2 , 分别于W交于另外两点A、B, 其中有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2 + e^{\cos k_1}}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2 + e^{\cos k_2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2 + e^{\cos k_1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2 + e^{\cos k_2}}\right)$$

证明: 直线AB过定点。

(Sife Cleak)

6. 2024高考数学 T_{19} 加强: 寻找(2, 5)可分序列。这里给出一个手算得到的一个解, 探究这是否是长度最小的解。



(Sife Cleak)

7. 定义 $f(n, m)$ 为十进制下数字 n 自右至左第 m 位数字(若超过了该数长度就取0), 即($\%$ 是取余运算)

$$f(n, m) = \left\lfloor \frac{n}{10^{m-1}} \right\rfloor \% 10, m, n \in N^*$$

$$D(h(A)) = f\left(\sum_{j=1}^{\infty} h(A + j - 1), j\right), A \in N^*$$

$$K(A) = D\left(D\left(D\left(\dots D\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^A - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^A\right)\right)\right)\right)\right), A \in N^*$$

(注: $D(h(A))$ 的作用是将函数 $h(A)$ 转变为另一个函数, 因此 $K(A)$ 右式指的是关于 A 的函数而非直接代入求值)

(I) 求 $K(2025^{2025^{2025}})$

(II) 证明: $K(n) = K(88 + n), n \in N^*$

(Sife Cleak)