&π

SMO 1st

YiShui No.1 Middle School Mathematical Olympiad (1st)

2025.1.20

命题人：Sife Cleak　　　Zhao New

提交单个题解(自主命题，将无法在网络上找到答案)、贡献题目、试题勘误：sife@sife.is-a.dev

参考答案与试题文件(包括排版代码)将于2025.3.14发布至https://ysyz.is-a.dev/smo/1st.html

审核：Kung Kim Bon　　　Wang Kim Bon

1. (阿贝尔群性质，皮亚诺公理) 1+2=2+1=（ ）。　　　(Zhao New)

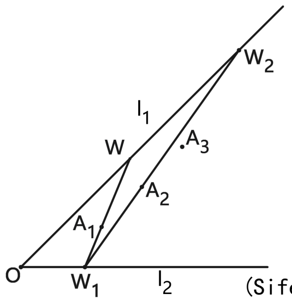
2. 证明：沂水一中任意42名学生中，必有4人相互认识或相互不认识。(这里规定，若A认识B，那么B也认识A；若A认识B，B认识C，那么A不一定认识C)。　　　(Sife Cleak)

3. 证明：

$$4^{n-1}(cos\alpha)^{2n-1}=\sum_{m=1}^{n}C_{2n-1}^{n-m}cos(2m-1)\alpha$$

(Sife Cleak)

4. l_1上一点W，作WA_1延长与l_2交于W_1，操作下去直至W_{2025}，取l_1上不同于W的两点P、U，作P_{2025}、U_{2025}。证明：WU_{2025}与UW_{2025}的交点、WP_{2025}与PW_{2025}的交点、$PU_{2025}PU_{2025}$与UP_{2025}的交点三点共线。



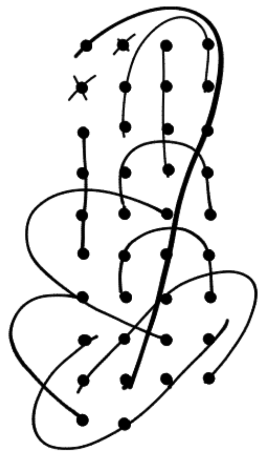
(Sife Cleak , Wang Kim Bon)

5. 双曲线W:$x^2-y^2=2025$上过点$(75,60)$作斜率为k_1、k_2的直线l_1、l_2，分别于W交于另外两点A、B，其中有

$$tan\left(\frac{\pi}{2+e^{log_{10}k_1}}\right)+tan\left(\frac{\pi}{2+e^{log_{10}k_2}}\right)=tan\left(\frac{\pi}{2+e^{log_{10}k_1}}\right)tan\left(\frac{\pi}{2+e^{log_{10}k_2}}\right)$$

证明：直线AB过定点。　　　(Sife Cleak , Kung Kim Bon)

6. 2024高考数学T_{19}加强：寻找$(2,5)$可分序列。这里给出一个手算得到的一个解，探究这是否是长度最小的解。



(Sife Cleak)

7. 定义$f(n,m)$为十进制下数字n自右至左第m位数字(若超过了该数长度就取0)，即(%是取余运算)

$$f(n,m)=\left[\frac{n}{10^{m-1}}\right]\%10, m,n\in N^* \qquad D(h(A))=f(\sum_{j=1}^{\infty}h(A+j-1),j), A\in N^*$$

$$K(A)=\underbrace{D(D(D(\dots D(}_{\infty\text{个}D}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^A-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^A\right))))), A\in N^*$$

(注：$D(h(A))$的作用是将函数$h(A)$转变为另一个函数，因此$K(A)$右式指的是关于A的函数而非直接代入求值)

(I)求 $K(2025^{2025^{2025}})$

(II)证明：$K(n)=K(88+n), n\in N^*$　　　(Sife Cleak)