Sistema Cefalorraquídeo: Hidrocefalia

Mancilla Chávez Brenda, 21212745; Reyes Galvan Miriam, 21212174; Felix Gastelum Jesus, 2021078
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 13, 2024

Palabras clave: Factores de riesgo; Síndrome; Válvula;Acumulación de flujo;Absorción.

Correo: **l21212745; l21212174; jesus.felix201@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

La siguiente ecuación representa la presión de entrada $P_e(t)$ del sistema de circulación del líquido cefalorraquídeo, tomando en cuenta el efecto de la resistencia del conducto y diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de absorción acumulado en el tiempo.

$$P_e(t) = R_c Q(t) + \frac{1}{C_s}\int \left[Q(t) - Q_A(t)\right] dt$$

debido a la acumulación de flujo en términos de resistencia de absorción y la capacitancia combinada del sistema:

$$\frac{1}{C_s}\int \left[Q(t) - Q_A(t)\right] dt = R_p Q_A(t) + \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_w}\right)\int Q_A(t)\, dt$$

aquí se determina la presión arterial $P_A(t)$ por el flujo de absorción acumulado a través de las capacitancias del líquido de las paredes del sistema.

$$P_A(t) = \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_w}\right)\int Q_A(t)\, dt$$

1.2 Transformada de Laplace

A continuación, se incorpora la ecuación de presión de entrada al dominio de Laplace, facilitando el análisis de sistemas dinámicos:

$$P_{ao}\left(s\right) = R_C Q\left(s\right) + \frac{Q\left(s\right) - Q_A\left(s\right)}{C_S S}$$

se relacionan los términos del flujo y su absorción, considerando resistencias y capacitancias.

$$\frac{Q\left(s\right) - Q_A\left(s\right)}{C_S S} = R_P Q_A\left(s\right) + \left(\frac{1}{C_L s} + \frac{1}{C_w s}\right) Q_A\left(s\right)$$

para la presión arterial, se muestra cómo responde al flujo de absorción en frecuencia

$$P_A\left(s\right) = \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_W}\right) Q_A\left(s\right)$$

1.3 Procedimiento algebraíco

Se desarrolla algebraicamente para despejar $Q\left(s\right)$ en términos de $Q_A\left(s\right)$, facilitando el analisis matemático del sistema.

$$\frac{Q\left(s\right) - Q_A\left(s\right)}{C_S S} = R_P Q_A\left(s\right) + \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_W}\right) Q_A\left(s\right)$$

Se ordenan los términos para separar $Q\left(s\right)$, en el lado izquierdo:

$$\frac{Q\left(s\right)}{C_S S} - \frac{Q_A\left(s\right)}{C_S S} = R_P Q_A\left(s\right) + \left(\frac{1}{C_L s} + \frac{1}{C_w s}\right) Q_A\left(s\right)$$

Multiplicamos toda la ecuación por $C_S S$ para simplificar los denominadores:

$$Q\left(s\right) = \left(R_P Q_A\left(s\right) C_S S + \frac{Q_A\left(s\right) C_S S}{C_L s} + \frac{Q_A\left(s\right) C_S S}{C_w s} + \frac{Q_A\left(s\right) C_S S}{C_S S}\right)$$

Resultado final del procedimiento, donde se expresa el flujo $Q\left(s\right)$ en términos de todos los parámetros del sistema.

$$Q\left(s\right) = sQ_A\left(s\right) \frac{C_L C_s + C_L C_W + C_s C_W + sC_L C_s R_P C_W}{C_L C_W}$$

Ahora se relaciona el flujo $Q\left(s\right)$con la presión de entrada $P_e\left(s\right)$:

Ecuación inicial para $P_e\left(s\right)$:

$$P_e(s) = R_C\left(Q_A \frac{C_L C_s s + C_s C_W s + ss C_L C_S R_P C_W}{C_L C_W}\right) + \frac{\left(Q_A \frac{C_L C_S S + C_L C_W S + C_S C_W S + ss C_L R_P C_W}{C_L C_W}\right) Q_A(s)}{C_S s}$$

Sumando y agrupando términos comunes:

$$P_e(s) = \frac{1}{C_L}\frac{Q_A}{C_W}\left(C_L + C_W + sC_L C_S R_C + sC_L R_C C_W + sC_S R_C C_W + sC_L R_P C_W + s^2 C_L C_S R_C R_P C_W\right)$$

Finalmente se determina la función de transferencia entre la presión de salida $P_A(s)$ y la presión de entrada $P_e(s)$:

$$\frac{P_A(s)}{P_a(s)} = \frac{\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_w}}{\frac{1}{C_L}\frac{Q_A}{C_W}\left(C_L + C_W + sC_L C_S R_C + sC_L R_C C_W + sC_S R_C C_W + sC_L R_P C_W + s^2 C_L C_S R_C R_P C_W\right)}$$

La función de transferencia se simplifica para expresar la relación directa:

$$\frac{P_A(s)}{P_e(s)} = \frac{C_L + C_W}{Q_A(C_L + C_W + sC_L(C_S R_C + R_C C_W + R_P C_W) + sC_S R_C C_W + s^2 C_L C_S R_C R_P C_W)}$$

1.4 Resultado

Entonces, la función de transferencia está dada por:

$$\frac{P_A(s)}{P_e(s)} = \frac{C_L + C_W}{Q_A(C_L + C_W + sC_L(C_S R_C + R_C C_W + R_P C_W) + sC_S R_C C_W + s^2 C_L C_S R_C R_P C_W)}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

Para determinar la estabilidad de lazo abierto, se deben calcular las raices de la función de transferencia:

$$a_{s^2} + b_s + c = 0$$

Valores de los parametros para el control:

$$C_L = 1.5, C_W = 1.7, C_S = 2, R_C = 0.95, R = 0.6, R_P = 1.2$$

Estabilidad para el control:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.498\\ \lambda_2 &= -2.974\end{aligned}$$

Valores de los parametros para el caso:

$$C_L = 1, C_W = 1.3, C_S = 1.8, R_C = 0.85, R = 0.7, R_P = 1.1$$

Estabilidad para el caso:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.204 \\ \lambda_2 &= -0.469 \end{aligned}$$

Se observa que ambos casos analizados (caso y control), las raíces tienen parte real negativa. Esto confirma que el sistema es estable en lazo abierto bajo las condiciones planteadas.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

Estas ecuaciones describen un sistema dinámico que la presión de entrada influye en el flujo de entrada, la diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de absorción se acumula en el sistema y afecta al flujo de absorción y la acumulación del flujo de absorción determina la presión arterial.

La ecuación $Q\left(t\right)$ describe el flujo de entrada en función de la presión de entrada $P_e(t)$ y las resistencias del sistema:

$$Q\left(t\right) = \left[P_e(t) - \frac{1}{C_S}\int (Q(t) - Q_A(t))dt\right]\frac{1}{R_C}$$

La ecuación para $Q_A\left(t\right)$ describe el flujo de absorción como una función de las integrales de $Q\left(t\right)$ y $Q_A\left(t\right)$:

$$Q_A\left(t\right) = \left[\frac{1}{C_S}\int [Q(t) - Q_A(t)]dt - \left(\frac{1}{C_S} + \frac{1}{C_w}\right)\int Q_A(t)dt\right]\frac{1}{R_p}$$

La ecuación $P_A\left(t\right)$ describe cómo la acumulación de flujo de absorción determina la presión arterial:

$$P_A\left(t\right) = \frac{1}{C_L}\int Q_A(t)dt + \frac{1}{C_w}\int Q_A(t)dt$$

4 Error en estado estacionario

El erro en estado estacionario del sistema se calcula considerando la diferencia entre la entrada deseada y la respuesta del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, la formula general para el error es:

$$e\left(t\right) = \lim_{s \to 0} sR\left(s\right) 1 - G\left(s\right)]$$

Al sustituir $R(s)$ y $G(s)$ con la función de transferencia del sistema, se obtiene:

$$e(t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[1 - \frac{1}{Q_A} \frac{C_L + C_W}{C_L + C_W + sC_LC_SR_C + sC_LR_CC_W + sC_SR_CC_W + sC_LR_PC_W + s^2C_LC_SR_CR_PC_W} \right] = 0$$

El resultado dado calculado:

$$e(t) = \lim_{s \to 0} sR(s) \left[1 - \frac{1}{Q_A} \frac{C_L + C_W}{C_L + C_W} \right] = 0\ V.$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

El controlador PID se utiliza para ajustar la respuesta del sistema, mejorando su estabilidad y rendimiento. En este caso, se calculan las constantes del controlador k_P (proporcional) y k_I (integral) a partir de los parámetros del sistema.

La constante integral se define como:

$$k_I = \frac{1}{R_eC_r} = 78.7835$$

La constante proporcional está relacionada con las resistencias R_e y R_r, y se define como:

$$k_P = \frac{R_r}{R_e} = 21.0822$$

Capacitancia del sistema se da como:

$$C_r = 1 \times 10 - 6$$

Resistencia equivalente se calcula en la función de k_I y C_r :

$$R_e = \frac{1}{k_IC_r} = \frac{1}{78.7835 \times 1 \times 10 - 6} = 1.279 \times 10^{-3}$$

Resistencia de control se calcula a partir de k_P y R_e :

$$R_r = k_PR_e = 21.0822 \times 1.279 \times 10^{-3} = 2.6964 \times 10^{-2}$$