

## 2-1 簡單多項式函數及其圖形

多項式函數是數學上重要的函數之一。本節我們先介紹多項式函數中較為簡單的三個成員，它們是一次函數、二次函數與單項函數。至於較一般的多項式函數，則留待 2-4 節。

### ※函數的概念

設  $x$  與  $y$  是兩個變數。當  $x$  的值給定時， $y$  的值也隨著  $x$  的值而唯一確定，我們稱這種對應關係為  $y$  是  $x$  的函數，而  $x$  稱為自變數， $y$  稱為應變數。若此函數命名為  $f$ ，則用記號  $y = f(x)$  表示，並以  $f(a)$  表示當  $x = a$  時所對應的函數值。

常數函數：函數值恆為一常數的函數。常數函數的圖形都是水平直線。

例題 1 -

描繪函數  $f(x) = 2$  的圖形。

一次函數：設  $a, b$  為實數，形如  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) 的函數稱為一次函數

例題 2 -

設一次函數  $f(x) = 2x - 4$ 。

(1) 描繪函數  $y = f(x)$  的圖形。

(2) 當  $0 \leq x \leq 3$  時，求  $f(x)$  的最大值與最小值。

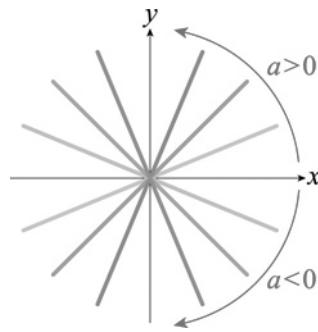
隨堂練習 -

設  $f(x)$  為一次函數，且  $f(1) = 5$ ， $f(2) = 8$ ，求  $f(3)$  的值。

係數  $a$  的值決定直線的傾斜程度

(1) 當  $a > 0$  時，點  $(1, a)$  在  $x$  軸的上方，此時直線  $L$  由左下向右上傾斜，而且  $a$  的值愈大，直線的傾斜程度愈大。

(2) 當  $a < 0$  時，點  $(1, a)$  在  $x$  軸的下方，此時直線  $L$  由左上向右下傾斜，而且  $|a|$  的值愈大，直線的傾斜程度愈大。



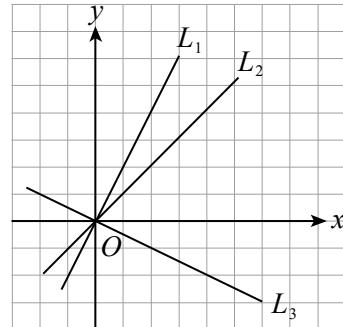
例題 3 -

已知直線  $L$  通過  $(0,0)$  與  $(2,3)$  兩點，求(1)直線  $L$  的方程式。(2)直線  $L$  的斜率。

隨堂練習 -

設  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  分別為右圖中直線  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  的斜率。

(1) 求  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  的值。(2) 比較  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  的大小關係。



※一次函數  $y = ax + b$  的圖形就是斜率為  $a$ ，且與  $y$  軸交於  $(0, b)$  的直線。

例題 4 -

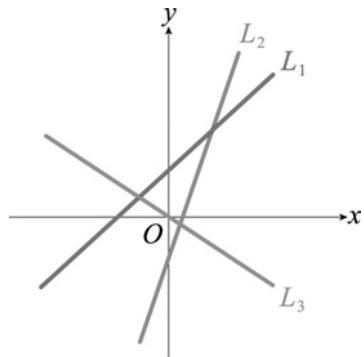
在同一坐標平面上，描繪一次函數  $f(x) = -2x$ ,  $g(x) = -2x + 3$  與  $h(x) = -2x - 3$  的圖形。

## 隨堂練習 -----

如右圖，三直線  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  的方程式分別為  $L_1 : y = a_1x + b_1$ ,  $L_2 : y = a_2x + b_2$ ,  $L_3 : y = a_3x + b_3$ .

選出正確的選項：

- (1)  $a_1 > 0$
- (2)  $a_1 > a_2$
- (3)  $a_3 < 0$
- (4)  $b_1 > 0$
- (5)  $b_2 > b_3$

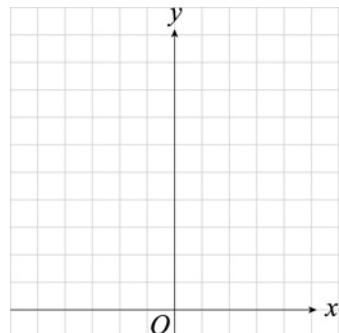


## 二次函數

設  $a$ ,  $b$ ,  $c$  為實數，形如  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的函數稱為二次函數。由於向上斜拋一物體時，物體落下的路徑是二次函數圖形的一部分，因此也稱二次函數圖形為拋物線

## 例題 5 -----

描繪二次函數  $y = f(x) = x^2$  的圖形。

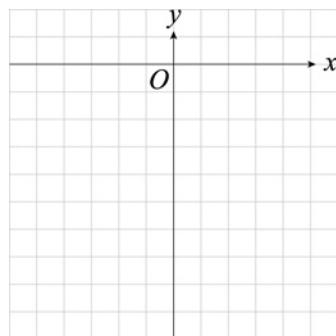
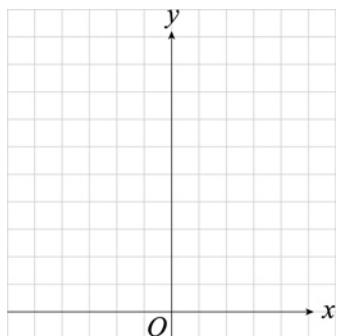


## 隨堂練習 -----

- (1) 請在坐標平面(1)上，描繪二次函數  $y = 2x^2$  的圖形。
- (2) 請在坐標平面(2)上，描繪二次函數  $y = -x^2$  的圖形。

(1)

(2)



### 重要性質

設實數  $a \neq 0$

- (1)  $y = ax^2$  的圖形是以原點為頂點，以  $y$  軸為對稱軸的拋物線。
- (2) 當  $a > 0$  時， $y = ax^2$  的圖形開口都向上，而且  $a$  的值愈大，開口愈小；  
當  $a < 0$  時， $y = ax^2$  的圖形開口都向下，而且  $|a|$  的值愈大，開口愈小。
- (3)  $y = ax^2$  的圖形與  $y = -ax^2$  的圖形對稱於  $x$  軸。

### 圖形平移

$y = ax^2$   
的圖形

水平右移  $h$  單位  
水平左移  $h$  單位

$y = a(x-h)^2$   
的圖形

鉛直上移  $k$  單位  
鉛直下移  $k$  單位

$y = a(x-h)^2 + k$   
的圖形

### 例題 6 -----

在同一坐標平面上，描繪二次函數  $f(x) = 3x^2$ ,  $g(x) = 3(x-2)^2$  與  $h(x) = 3(x-2)^2 + 2$  的圖形。

### 隨堂練習 -----

在同一坐標平面上， $y = 2x^2$  與  $y = 2(x+2)^2 - 3$  的圖形是否可以經由適當的平移而完全重疊？若是可以，如何平移呢？



例題 7 -

描繪二次函數  $y = -2x^2 + 4x + 3$  的圖形，並求出其頂點及對稱軸。

---

隨堂練習 -

要如何將  $y = 3x^2$  的圖形平移才能得到  $y = 3x^2 + 18x + 29$  的圖形？

---

### 二次函數的圖形

二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形是一條拋物線，而且具有下列特徵：

(1) 當  $a > 0$  時，拋物線的開口向上，頂點是圖形的最低點。

當  $a < 0$  時，拋物線的開口向下，頂點是圖形的最高點。

(2) 此拋物線的對稱軸為直線  $x = -\frac{b}{2a}$ ，頂點坐標為  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

隨堂練習 -

將  $y = 2x^2 + 8x + 5$  的圖形向左平移 2 個單位，再往上平移 5 個單位得到函數  $y = f(x)$  的圖形，求  $f(x)$ 。

---

## 例題 8 -----

已知二次函數  $y = -x^2 + 3x + 1$ , 求函數值的最大值為何？又發生最大值時的  $x$  值為何？

---

## 隨堂練習 -----

已知二次函數  $y = x^2 + x + 1$ , 求函數值的最小值及發生最小值時之  $x$  值。

---

## 例題 9 -----

已知二次函數  $y = 2(x-1)^2 - 3$ , 在下列  $x$  的範圍內，求  $y$  的最大值與最小值：

- (1)  $-2 \leq x \leq -1$  .
  - (2)  $2 \leq x \leq 3$  .
  - (3)  $-1 \leq x \leq 2$  .
-

隨堂練習 -----

在  $2 \leq x \leq 4$  的範圍內，求二次函數  $y = -2x^2 + 4x + 3$  的最大值。

---

例題 10-----

如右圖，要在牆邊用圍籬圍出 3 間面積相等的矩形豬圈（牆邊不圍）。

若圍籬的長度有 48 公尺，則 3 間豬圈的最大面積是多少平方公尺？

---



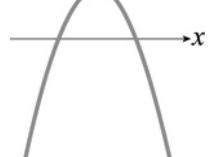
隨堂練習 -----

小明想用 12 公尺長的圍籬圍出一矩形區域飼養兔子。問：要如何才能圍出最大面積？

---

二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形與  $x$  軸的相交狀況

由係數  $a$  及判別式  $D = b^2 - 4ac$  的值來判定

$a$	$D$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$ 開口向上				
$a < 0$ 開口向下				

二次函數值的恆正與恆負條件

設二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )，判別式  $D = b^2 - 4ac$  .

(1) 若函數值  $f(x)$  恒正，則  $a > 0$  且  $D < 0$ ；反之亦成立 .

(2) 若函數值  $f(x)$  恒負，則  $a < 0$  且  $D < 0$ ；反之亦成立 .

例題 11-----

已知對任意實數  $x$ ， $x^2 - 6x + k$  的值恆為正數，求實數  $k$  的範圍 .

隨堂練習 -----

已知二次函數  $f(x) = -2x^2 + 8x + (k - 3)$  的值恆負，求實數  $k$  的範圍 .

**單項函數：**設  $a$  為實數， $n$  為正整數或零，形如  $f(x) = ax^n$  的函數稱為單項函數，當  $a \neq 0$  時，稱  $f(x)$  為  $n$  次單項函數。

**例題 12-----**

描繪函數  $y = x^3$  的圖形。

---

**重要性質**

設實數  $a \neq 0$ 。

(1) 當  $a > 0$  時， $y = ax^3$  的圖形愈往右邊的點，會愈往上攀升；

當  $a < 0$  時， $y = ax^3$  的圖形愈往右邊的點，會愈往下降低。

(2)  $y = ax^3$  的圖形對稱於原點。

(3)  $y = ax^3$  的圖形與  $y = -ax^3$  的圖形對稱於  $x$  軸。

**隨堂練習-----**

(連連看) 將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上：

$$y = -x^3 \quad \bullet$$

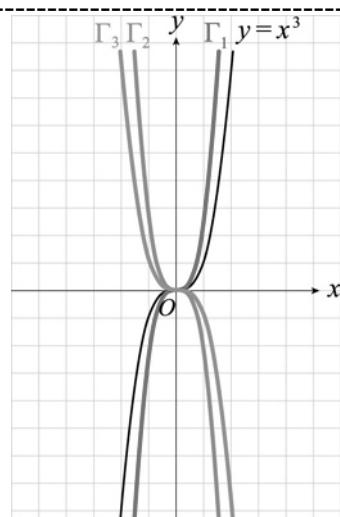
•  $\Gamma_1$

$$y = 2x^3 \quad \bullet$$

•  $\Gamma_2$

$$y = -2x^3 \quad \bullet$$

•  $\Gamma_3$



例題 13-

描繪函數  $y = x^4$  的圖形。

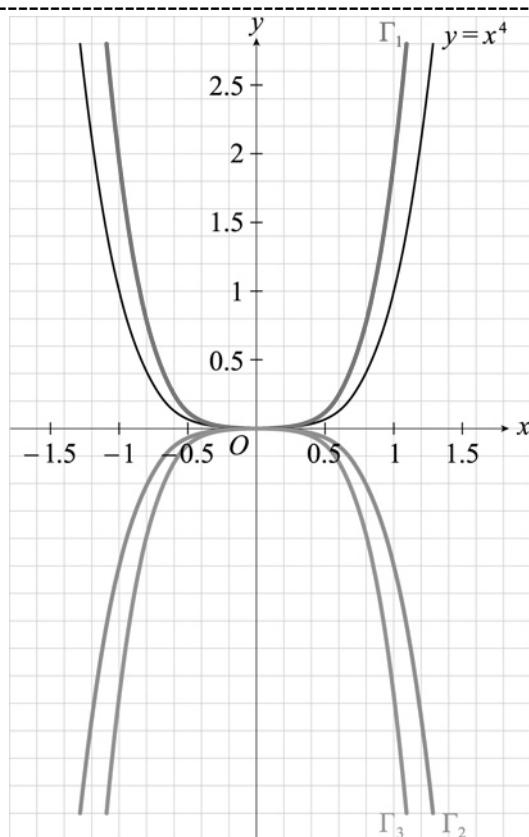
## 隨堂練習 -

(連連看) 將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上：

$y = -x^4 \bullet \Gamma_1$

$y = 2x^4 \bullet \Gamma_2$

$y = -2x^4 \bullet \Gamma_3$

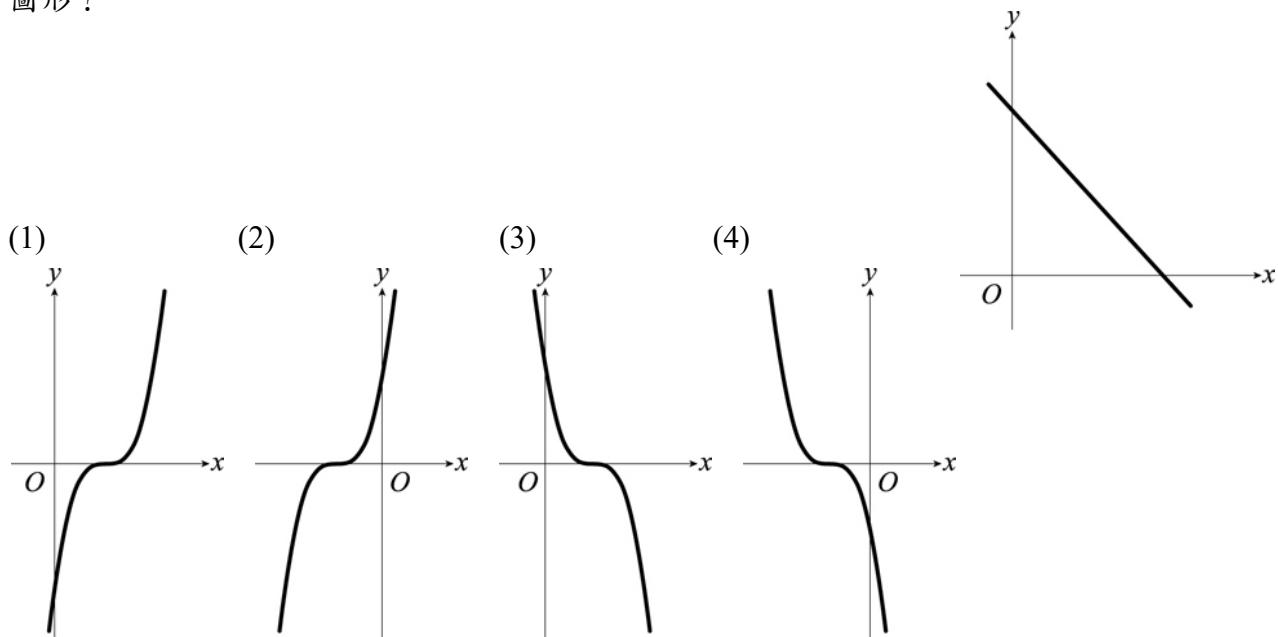


## 重要性質

設實數  $a \neq 0$ 。(1) 當  $a > 0$  時， $y = ax^4$  的圖形除了原點外都在  $x$  軸的上方；當  $a < 0$  時， $y = ax^4$  的圖形除了原點外都在  $x$  軸的下方。(2)  $y = ax^4$  的圖形對稱於  $y$  軸。(3)  $y = ax^4$  的圖形與  $y = -ax^4$  的圖形對稱於  $x$  軸

## 隨堂練習 -----

已知一次函數  $f(x) = ax + b$  的圖形如右，下列哪一個選項可能為三次函數  $g(x) = a(x - b)^3$  的圖形？



## 單項式函數的奇偶性

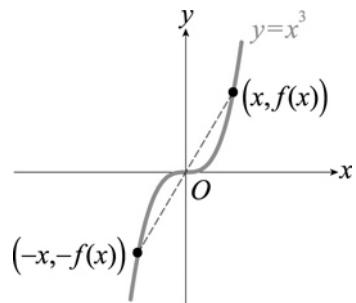
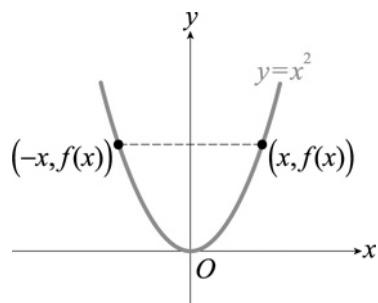
$f(x)$  具有  $f(-x) = f(x)$  的特性，我們稱具有這樣特性的函數為偶函數

$f(x)$  具有  $f(-x) = -f(x)$  的特性，我們稱具有這樣特性的函數為奇函數

由上述的定義可以知道：

(1) 偶函數的圖形對稱於  $y$  軸。

(2) 奇函數的圖形對稱於原點。



## 隨堂練習 -----

已知函數  $f(x) = 5x^4 + 3$ ,  $g(x) = x^3 - 2x$ ,  $h(x) = x^3 + 2$ 。選出正確的選項：

(1)  $f(x)$  為偶函數

(2)  $f(x)$  的圖形對稱於  $y$  軸

(3)  $g(x)$  的圖形對稱於原點

(4)  $h(x)$  為偶函數

(5)  $h(x)$  為奇函數。

## 2-1 習題

## 一、基礎題

1. 設  $f(x)$  為一次函數，而且每當  $x$  增加 1 單位時，其相對應的函數值減少 2 單位， $f(3)=0$ 。  
選出正確的選項：

  - (1)  $f(x)$  的圖形之斜率為 2
  - (2)  $f(x)$  的圖形為一由左上向右下傾斜之直線
  - (3)  $f(x)$  的圖形不通過第四象限
  - (4)  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於點  $(3, 0)$
  - (5)  $f(5)=-5$  .

2. 描繪下列二次函數的圖形，並求出頂點坐標及對稱軸方程式：

  - (1)  $y = x^2 - 2x - 3$  .
  - (2)  $y = -2x^2 + x + 3$  .

3. 設將  $y = 4x^2 - 8x$  的圖形沿  $x$  軸向左平移  $h$  單位，再沿  $y$  軸向上平移  $k$  單位後恰與  $y = 4x^2 + 8x + 9$  的圖形重合，求  $h, k$  的值。

4. 已知二次函數  $y = 3x^2 - 12x + 8$ ，在下列  $x$  的範圍內，求  $y$  的最大值及最小值：

  - (1)  $0 \leq x \leq 3$  .
  - (2)  $3 \leq x \leq 5$  .

5. 已知對任意實數  $x$ ,  $kx^2 + 2x - 1$  的值恆負, 求實數  $k$  的範圍.

6. 右圖為下列三個函數的圖形:  $y = a_1x^3$ ,  $y = a_2(x-3)^3$ ,

$y = a_3(x-h)^4$ . 選出正確的選項:

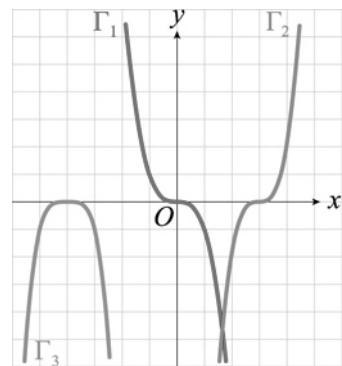
(1)  $\Gamma_1$  為  $y = a_1x^3$  的圖形

(2)  $a_1 > 0$

(3)  $a_2 > 0$

(4)  $a_3 > 0$

(5)  $h > 0$ .



## 二、進階題

7. 已知二次函數  $y = f(x)$  的圖形為開口向上的拋物線, 且與  $x$  軸交於  $(1,0)$  與  $(2,0)$  兩點; 二次函數  $y = g(x)$  的圖形為開口向下的拋物線, 且與  $x$  軸相交於  $(2,0)$  與  $(3,0)$  兩點. 下列各選項中, 哪些可能是  $y = f(x) + g(x)$  的圖形?

(1) 水平直線

(2) 斜率為正的直線

(3) 和  $x$  軸無交點的拋物線

(4) 和  $x$  軸僅交於一點的拋物線

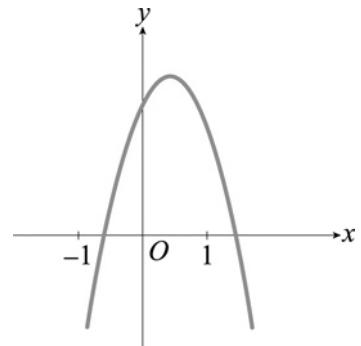
(5) 和  $x$  軸交於兩點的拋物線.

8. 已知二次函數  $f(x)$  滿足  $f(2) = f(-1) = -4$ , 且  $f(x)$  有最大值 5, 求  $f(x)$ .

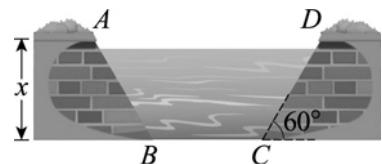
9. 已知二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$  在  $x=3$  時有最大值 8，求實數  $a, b$  的值。

10. 若函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形如右圖，則下列各數哪些為負數？

- (1)  $a$  (2)  $2a+b$  (3)  $c$  (4)  $b^2 - 4ac$  (5)  $a-b+c$  .



11. 右圖是某灌溉渠道的橫截面，其中  $ABCD$  是一個等腰梯形。已知其邊坡的傾角為  $60^\circ$ ，且  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 6$ ，請問渠深  $x$  為多少時，可使橫截面的面積最大？



12. 身高 1.8 公尺的小明站在距海面 78 公尺高的懸崖上，向空中斜拋一球，球經過的路線是拋物線（球距離海面的高度  $y$  公尺是時間  $t$  秒的二次函數）。在這次拋擲中，球在頭頂上方 0.2 公尺處出手，經 6 秒後球與出手處等高，再經 2 秒，球恰好掉入海中。問：球的最高點距離海面多少公尺？

