

## 2-2 多項式的運算與應用

我們常利用符號代表數來描述數與數之間的關係。例如：當攝氏溫度為  $x$  度時，華氏溫度為  $\frac{9}{5}x + 32$  度。像這種用數及符號  $x$  經過加、減、乘運算所形成的式子稱為  $x$  的多項式。

### ※ 多項式的定義

設  $n$  是正整數或零，而  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  是給定的  $n+1$  個常數，凡是可以寫成

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  形式的式子，稱為  $x$  的多項式。

- (1) 係數： $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$  分別為  $x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x$  的係數。
- (2) 次數：當係數  $a_n \neq 0$  時，稱  $n$  為多項式  $f(x)$  的次數，以符號  $\deg f(x) = n$  表示。
- (3) 領導係數： $a_n$  為  $f(x)$  的首項係數或是領導係數。
- (4) 項： $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots, a_1x$ ，分別為此多項式的  $n$  次項， $n-1$  次項， $\dots$ ，1 次項。
- (5) 常數項： $a_0$
- (6) 整係數多項式：所有係數  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  都是整數的多項式  $f(x)$ 。
- (7) 多項式的值： $f(a)$  為  $f(x)$  在  $x=a$  的值。
- (8) 零次多項式：多項式  $f(x)$  只有一個非零常數項  $a_0$  時。
- (9) 零多項式： $f(x)=0$
- (10) 常數多項式：零次多項式與零多項式統稱零次多項式。
- (11) 多項式的降次(幕)排列：將多項式的每一項，由高而低的排列稱為。
- (12) 多項式的升次(幕)排列：將多項式的每一項，由低而高的排列稱為。
- (13) 多項式相等：「次數相等」且「同次項的係數都相等」時，我們稱兩多項式相等。

### 例題 1 -----

已知兩多項式  $f(x) = 3x^2 + ax + 5$  與  $g(x) = bx^3 + cx^2 - 2x + d$  相等，求實數  $a, b, c$  及  $d$  的值

---

### 隨堂練習 -----

已知兩多項式  $f(x) = -2x^2 - ax + (b+4)$  與  $g(x) = (c+3)x^3 + dx^2 + 5x - 3$  相等，求實數  $a, b, c$  及  $d$  的值

---

**多項式的加減法**

- (1) 橫式計算
- (2) 直式計算
- (3) 分離係數法

例題 2 -----

已知  $f(x) = 3x^3 + 4x - 5$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + 1$ , 求(1)  $f(x) + g(x)$  . (2)  $f(x) - g(x)$  .  
並整理成降次排列的多項式 .

---

隨堂練習 -----

已知  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ ,  $g(x) = 2x^3 - 3x + 4$ , 求  $f(x) + g(x)$  與  $f(x) - g(x)$  .

---

**多項式的乘法**

- (1) 橫式計算
- (2) 直式計算
- (3) 分離係數法

最高次數：設  $f(x)$  是  $m$  次多項式， $g(x)$  是  $n$  次多項式，則  $f(x) \cdot g(x)$  是  $(m+n)$  次多項式  
即  $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

**例題 3** -----

求多項式  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  與  $g(x) = 2x - 1$  的乘積

---

**隨堂練習** -----

已知  $f(x) = x + 3x^2 + 2$ ， $g(x) = 1 + x^3 - 2x$ ，求  $f(x) \cdot g(x)$  及其次數。

---

**多項式的除法：**

- (1) 長除法
- (2) 分離係數法

**隨堂練習** -----

求  $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$  除以  $x^2 - x + 2$  的商式與餘式。

---

**除式定理**

設  $f(x)$  與  $g(x)$  為兩個多項式且  $g(x) \neq 0$ ，在計算「 $f(x)$  除以  $g(x)$ 」時，可求得唯一的一組商式  $q(x)$  及餘式  $r(x)$  讓它們滿足  $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$  其中  $r(x) = 0$  或  $\deg r(x) < \deg g(x)$

**例題 4** -----

已知  $x^3 + x^2 + ax + 2$  除以  $x^2 + 2x + b$  的商式為  $x - 1$ ，餘式為  $x + 5$ ，求實數  $a, b$  的值

---

**隨堂練習** -----

已知  $x^3 + ax^2 + 3x - 1$  除以  $x^2 - x + 2$  的商式為  $x + 1$ ，餘式為  $2x + b$ ，求實數  $a, b$  的值

---

**綜合除法****(1)除式方面：**

當除式為  $x - a$  時，算式的右側要用  $a$  當乘數。

**(2)操作方面：**

第一列與第二列相加得第三列。(遇缺項補 0)

**例題 5** -----

使用綜合除法求  $x^4 + 2x^3 + 5x - 7$  除以  $x + 3$  的商式及餘式

---

隨堂練習 -----

使用綜合除法，求

- (1)  $x^3 + 2x - 1$ 除以  $x + 4$ 的商式及餘式 .  
(2)  $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ 除以  $x - 2$ 的商式及餘式 .
- 

綜合除法

- (1) 當除式是  $(ax - b)$  時，綜合除法所得的商需再乘以  $\frac{1}{a}$   
(2) 多項式  $f(x)$ 除以  $ax - b$ 的餘式也是  $f(x)$ 除以  $x - \frac{b}{a}$ 的餘式 .

例題 6 -----

求  $4x^4 + 5x^2 + x + 3$ 除以  $2x - 1$ 的商式及餘式

---

隨堂練習 -----

使用綜合除法，求  $3x^3 - x^2 + 2x + 5$ 除以  $3x + 2$ 的商式及餘式

---

**連續綜合除法****例題 7** -----

設  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3$  .

(1) 已知  $f(x)$  表成  $(x-1)$  的多項式之形式為  $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$  ,

求實數  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  的值 .

(2) 求  $f(0.99)$  的近似值到小數點以下第二位 (第三位四捨五入)

---

**隨堂練習** -----

把多項式  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10x + 5$  表示為  $a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$  的形式 ,

並計算  $f(2.001)$  的近似值到小數點以下第三位 (第四位四捨五入)

---

**餘式定理**

多項式  $f(x)$  除以一次式  $ax-b$  的餘式等於  $f\left(\frac{b}{a}\right)$ .

**例題 8** -----

已知  $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)^3$ , 分別求  $f(x)$  除以  $x+1$  與  $2x-1$  的餘式

---

**隨堂練習** -----

已知  $f(x) = (2x^2 - x - 3)^4$ , 分別求  $f(x)$  除以  $x-2$  與  $2x+1$  的餘式

---

**例題 9** -----

已知  $f(x) = 123x^4 - 389x^3 + 68x^2 - 32x - 19$ , 求  $f(3)$  的值

---

隨堂練習 -----

(1) 求  $f(x) = 3x^{10} - 7x^5 + 6x^2 - 3$  除以  $x+1$  的餘式 .

(2) 已知  $f(x) = 3x^5 - 22x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 10x + 5$ , 求  $f(8)$  的值

---

例題 10-----

已知多項式  $f(x)$  除以  $x-1$  的餘式為 6；除以  $x-2$  的餘式為 4，求  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-2)$  的餘式

---

隨堂練習 -----

已知多項式  $f(x)$  除以  $x-3$  的餘式為 16；除以  $x+4$  的餘式為 -19，求  $f(x)$  除以  $x^2 + x - 12$  的餘式

---

例題 11-----

已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 5x + 4$  的餘式為  $x + 2$ ；除以  $x^2 - 5x + 6$  的餘式為  $3x + 4$ ，求  $f(x)$  除以  $x^2 - 4x + 3$  的餘式

---

隨堂練習 -----

已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 2x - 3$  的餘式為  $3x - 4$ ；除以  $x - 1$  的餘式為 1，求  $f(x)$  除以  $x^2 - 1$  的餘式

---

**因式與倍式**

當多項式  $f(x)$  除以非零多項式  $g(x)$  的餘式為 0 時，滿足  $f(x)=g(x)\cdot q(x)$ ，  
 $f(x)$  可被  $g(x)$  整除，稱  $g(x)$  為  $f(x)$  的因式，或稱  $f(x)$  為  $g(x)$  的倍式

**※ 因式定理**

設  $f(x)$  為多項式， $ax-b$  為一次多項式。

(1) 若  $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$ ，則  $ax-b$  是  $f(x)$  的因式。

(2) 若  $ax-b$  是  $f(x)$  的因式，則  $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$ 。

**例題 12-**

設  $f(x)=x^{13}+2x^3+3$ ，分別檢查  $x-1$  與  $x+1$  是否為  $f(x)$  的一次因式？

**隨堂練習**

已知  $2x+1$  是  $f(x)=2x^3+ax^2+1$  的因式，求實數  $a$  的值

對於正整數  $n$ ，因為  $1^n - 1 = 0$ ，所以  $x-1$  為  $x^n - 1$  的因式。另外，

當  $n$  是正奇數時，因為  $(-1)^n + 1 = 0$ ，所以  $x+1$  為  $x^n + 1$  的因式。

利用綜合除法可以得到下列的結果：

$$(1) x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \quad (2) x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) \\ (3) x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad (4) x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

**因式定理**

若  $a, b$  是兩個不同的實數，且多項式  $f(x)$  滿足  $f(a)=f(b)=0$ ，

則  $(x-a)(x-b)$  是  $f(x)$  的因式

**※因式定理的推廣**

若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  個不同的實數，且多項式  $f(x)$  滿足

$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$ ，則  $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$  是  $f(x)$  的因式

**例題 13-----**

已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(1)=f(2)=0$ ， $f(3)=2$  與  $f(4)=18$ ，求  $f(x)$

---

**隨堂練習 -----**

已知  $f(x)$  是三次多項式，滿足  $f(0)=f(1)=f(2)=0$  且  $f(3)=24$ ，求  $f(x)$

---

牛頓定理（或稱整係數一次因式檢查法）

設  $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  是一個整係數  $n$  次多項式。若一次式  $ax - b$  是  $f(x)$  的因式（其中  $a$  是正整數， $b$  是整數且  $a, b$  互質），則

(1)  $a$  是  $f(x)$  的最高次項係數  $a_n$  的因數

(2)  $b$  是  $f(x)$  的常數項  $a_0$  的因數

例題 14-----

求  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$  的整係數一次因式

---

隨堂練習 -----

求  $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x + 1$  的整係數一次因式

---

**插值多項式**

底下我們將介紹一種較特殊的方法，可以將多項式  $f(x)$  直接表示出來

**二次插值公式**

設  $x_1, x_2, x_3$  是三個不同的實數， $y_1, y_2, y_3$  為實數。若多項式  $f(x)$  的次數不超過 2 次，且滿足  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$ ，則

$$f(x) = y_1 \cdot k_1(x) + y_2 \cdot k_2(x) + y_3 \cdot k_3(x),$$

其中

$$k_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad k_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \quad k_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

這樣的表示式稱為拉格朗日插值多項式。

**隨堂練習** -----

已知二次多項式  $f(x)$  滿足  $f(-1) = 3, f(1) = 1, f(2) = 3$ ，求  $f(3)$  的值

**例題 15** -----

已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(1) = 7, f(2) = 6, f(3) = 11, f(4) = 28$ ，求  $f(5)$  的值

隨堂練習 -----

已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(-2)=13$ ,  $f(-1)=9$ ,  $f(0)=5$ ,  $f(1)=7$ , 求  $f(2)$  的值

### 牛頓插值法

例題 15 為例介紹如下：

設  $f(x)$  除以  $(x-1)$ , 得商式為二次式  $q_1(x)$ , 餘式為  $d$ ;

$q_1(x)$  除以  $(x-2)$ , 得商式為一次式  $q_2(x)$ , 餘式為  $c$ ;

$q_2(x)$  除以  $(x-3)$ , 得商式為  $a$ , 餘式為  $b$ .

由除法定理, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)q_1(x) + d \\ &= (x-1)((x-2)q_2(x) + c) + d \\ &= (x-1)(x-2)q_2(x) + c(x-1) + d \\ &= (x-1)(x-2)((x-3)\cdot a + b) + c(x-1) + d \\ &= a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d. \end{aligned}$$

再將  $x=1, 2, 3, 4$  分別代入  $f(x)$ , 得

$$\begin{cases} f(1) = d = 7 \\ f(2) = c + d = 6 \\ f(3) = 2b + 2c + d = 11 \\ f(4) = 6a + 6b + 3c + d = 28 \end{cases}.$$

解得  $a=1$ ,  $b=3$ ,  $c=-1$ ,  $d=7$ , 即

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 3(x-1)(x-2) - (x-1) + 7.$$

得

$$f(5) = 24 + 36 - 4 + 7 = 63,$$

實驗時，當兩個變量對應的函數尚未找到時，有時會借用插值多項式來做估計

例題 16-----

下表是某燒瓶中的水冷卻時，在三個時間點水溫的紀錄表：

時間 $x$ (分)	5	6	8
水溫 $y$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	77	68	32

(1)求滿足  $f(5)=77$ ,  $f(6)=68$ ,  $f(8)=32$  的二次函數  $f(x)$ .

(2)借用(1)中的  $f(x)$  估計當時間  $x=7$  (分) 時的水溫

---

隨堂練習 -----

小明在懸崖上，向空中斜拋一球，下表是拋出後三個時間點測得球距海面高度的紀錄表：

時間 $x$ (秒)	1	2	4
高度 $y$ (公尺)	53	56	32

已知球距海面高度  $y$  (公尺) 是時間  $x$  (秒) 的二次函數，根據上述資料，求球拋出的剎那距離海平面的高度。

---

## 2-2 習題

## 一、基礎題

1. 已知  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ,  $g(x) = -3x^2 - x + 2$ ,  $h(x) = 3x^4 - 5x^3 - 6$ , 求

(1)  $f(x) + g(x)$  .

(2)  $f(x) - g(x)$  .

(3)  $f(x) \cdot g(x)$  .

(4)  $h(x)$ 除以  $g(x)$ 的商式與餘式 .

2. 利用綜合除法求下列各小題的商式及餘式：

(1)以  $x - 2$ 除  $5x^3 - 8x^2 + 3x - 5$  .

(2)以  $x + 3$ 除  $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 4$  .

(3)以  $2x - 1$ 除  $4x^3 + 5x - 3$  .

3. 已知  $2x^3 - x^2 + ax + b$ 除以  $x^2 - 2x - 1$ 的餘式為  $5x + 8$ , 求實數  $a$ ,  $b$ 的值 .

4. 已知  $x^3 + 4x^2 + 5x - 3$  除以  $g(x)$  的商式為  $x + 2$ ，餘式為  $2x - 1$ ，求多項式  $g(x)$  .

5. 已知兩多項式  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + 3$  與  $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$  相等，求實數  $a, b, c, d$  的值 .

6. 已知  $f(x) = x^{95} - 5x^9 + 8$ ，求  $f(x)$  除以  $x+1$  的餘式 .

7. 計算  $12^5 - 7 \cdot 12^4 - 58 \cdot 12^3 + 16 \cdot 12^2 - 465 \cdot 12 + 100$  的值 .

8. 已知多項式  $f(x)$  除以  $x-2$  的餘式為 8；除以  $x+1$  的餘式為 2，求  $f(x)$  除以  $(x-2)(x+1)$  的餘式 .

9. 設多項式  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx - 2$  可被  $x - 1$  整除，且  $f(x)$  除以  $x - 2$  的餘式為 2，求實數  $a$ ,  $b$  的值。

10. 求多項式  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$  的整係數一次因式。

11. 求多項式  $(x^4 - x^3 + x)(x^3 + x^2 + x + 1)$  除以  $x^2 + x + 1$  的餘式。

12. 設  $f(x)$  與  $g(x)$  都是五次多項式，而  $h(x)$  是四次多項式。選出正確的選項：

- (1)  $f(x) + g(x)$  的次數超過五次
- (2)  $f(x) - g(x)$  的次數小於五次
- (3)  $f(x)$  除以  $h(x)$  的餘式為三次多項式

(4) 若  $f(x)$  除以  $2x + 1$  的餘式為 8，則  $f(x)$  除以  $x + \frac{1}{2}$  的餘式為 4

(5) 若  $f(x)$  除以  $3x - 1$  的商式為  $q(x)$ ，則  $f(x)$  除以  $6x - 2$  的商式為  $\frac{1}{2} \cdot q(x)$ 。

## 二、進階題

13. 已知多項式  $f(x)$  與  $g(x)$  滿足  $2f(x)+g(x)=x^3-3x^2+5x+2$ ，且  $g(x)$  除以  $x+2$  的餘式為  $-10$ ，求  $f(x)$  除以  $x+2$  的餘式。

14. 設  $f(x)$  為三次多項式。

(1) 已知  $f(-1)=f(-2)=0$ ,  $f(1)=6$ ,  $f(2)=48$ , 求  $f(x)$ 。

(2) 已知  $f(-1)=f(-2)=f(-3)=5$ ,  $f(-4)=-7$ , 求  $f(x)$ 。

15. 已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2-4x-5$  的餘式為  $3x-2$ ；除以  $x-2$  的餘式為  $4$ ，求  $f(x)$  除以  $x^2-x-2$  的餘式。

16. 設三次多項式  $f(x)$  除以  $x^2+x+2$  的餘式為  $x+2$ ；除以  $x^2+x-2$  的餘式為  $5x-2$ ，求  $f(x)$ 。

17. 設  $a$  為正整數，且多項式  $f(x)=x^3-ax^2+x-2$  有整係數一次因式，求  $a$  的值。

18. 設  $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x + 7$  .

(1)連續使用綜合除法，將  $f(x)$  表示成以下的形式：求實數  $A, B, C, D$  的值 .

$$f(x) = A\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + B\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + C\left(x - \frac{1}{2}\right) + D$$

(2)將(1)所得的形式改成底下的形式：求實數  $a, b, c, d$  的值 .

$$f(x) = a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d$$

(3)求  $f(0.505)$  的近似值到小數點以下第二位 (第三位四捨五入) .

19. 已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(1)=1, f(2)=4, f(3)=9$ ，選出正確的選項：

(1)  $f(4)=16$

(2)  $f(x)$  除以  $x-1$  的餘式為 1

(3)  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-2)$  的餘式為  $x$

(4)  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-2)(x-3)$  的餘式為

$$1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

(5)若  $g(x) = f(x) - x^2$ ，則  $(x-1)(x-2)(x-3)$  是  $g(x)$  的因式 .

20. 已知二次函數  $f(x) = 8 \cdot \frac{(x-5)(x-7)}{(3-5)(3-7)} + 8 \cdot \frac{(x-3)(x-7)}{(5-3)(5-7)} + 24 \cdot \frac{(x-3)(x-5)}{(7-3)(7-5)}$  的圖形通過相異

兩點  $A(r, 24)$  與  $B(s, 24)$  . (1)求  $f(x)$  的圖形之頂點坐標 . (2)求  $r \cdot s$  的值 .