

计算方法编程作业 6 实验报告

张博厚 PB22071354

1 实验目的

通过快速傅里叶变换和快速傅里叶逆变换实现对给定函数的 Fourier 分析及重建，分析采样数目、去除高频系数对函数重建的影响。

2 问题描述与算法

2.1 快速傅里叶（逆）变换

快速傅里叶变换与快速傅里叶逆变换的算法伪代码由教材及实验文档附录给出，如下所示：

Algorithm 9.1 Fast Fourier Transform Algorithm

```
1: function FFT(f)
2:    $n \leftarrow \text{length}[f]$ ; ▷  $n$  is a power of 2
3:   if  $n = 1$  then return f;
4:    $\omega_n \leftarrow e^{-i2\pi/n}$ ;
5:    $\omega \leftarrow 1$ ;
6:    $f^0 \leftarrow (f_0, f_2, \dots, f_{n-2})$ ;
7:    $f^1 \leftarrow (f_1, f_3, \dots, f_{n-1})$ ;
8:    $g^0 \leftarrow \text{FFT}(f^0)$ ; ▷ Apply FFT to even coefficients
9:    $g^1 \leftarrow \text{FFT}(f^1)$ ; ▷ Apply FFT to odd coefficients
10:  for  $k \leftarrow 0$  to  $n/2 - 1$  do
11:     $g_k \leftarrow (g_k^0 + \omega g_k^1)/2$ ; ▷ Synthesize coefficients using Eq. (9.26)
12:     $g_{k+n/2} \leftarrow (g_k^0 - \omega g_k^1)/2$ ;
13:     $\omega \leftarrow \omega \omega_n$ ;
14:  end for
15:  return g;
16: end function
```

(a) FFT 算法

Algorithm 1 IFFT

```
 $n \leftarrow \text{length}[f]$ 
if  $n = 1$  then
  return f
end if
 $\omega_n \leftarrow e^{i2\pi/n}$ 
 $\omega \leftarrow 1$ 
 $f^0 \leftarrow (f_0, f_2, \dots, f_{n-2})$ 
 $f^1 \leftarrow (f_1, f_3, \dots, f_{n-1})$ 
 $g^0 \leftarrow \text{IFFT}(f^0)$ 
 $g^1 \leftarrow \text{IFFT}(f^1)$ 
for  $k \leftarrow 0$  to  $n/2 - 1$  do
   $g_k \leftarrow (g_k^0 + \omega g_k^1)/2$ 
   $g_{k+n/2} \leftarrow (g_k^0 - \omega g_k^1)/2$ 
   $\omega \leftarrow \omega \omega_n$ 
end for
return g
```

(b) IFFT 算法

比较两图不难发现，FFT 与 IFFT 算法十分相似，在实现时可作为一个函数来编写，并由一参数 NonInverse 来标识区分即可。

2.2 数据可视化

数据可视化部分使用 python+matplotlib 实现，通过对实验要求的分析，可知共需绘制以下三种图像：

- 1 对于函数 f 与频率 n ，对 f 执行快速傅里叶变换 $\text{FFT}(f, n)$ ，绘制执行后的结果 $|g_i|$ 与频率的关系。
- 2 对 f ，频率 n ，执行 FFT 后的结果 g ，对 g 作快速傅里叶逆变换 $\text{IFFT}(g, n)$ ，将所得结果与 f 作比较，绘制到同一张图里。
- 3 特别地，对于 f_2 ，还需取经 FFT 后频率域前 25% 的系数作 IFFT ，并和 f_2 进行比较。

对于 f_2 ，上述 2,3 图像可绘制到同一张图内。由于 python 不支持本地函数重载，共需编写三个函数，分别对应上述三种图像。

3 实验结果

3.1 输出结果

对于 $f_1, n = 2^4$, 结果为:

```
实部: -1.52858e-16 虚部: 0
实部: 4.49243e-17 虚部: 1.06074e-17
实部: 1.358e-16 虚部: -0.35
实部: 2.03037e-17 虚部: 1.66533e-16
实部: -2.01933e-19 虚部: 1.11022e-16
实部: -2.97456e-16 虚部: -0.5
实部: -1.08449e-16 虚部: -8.32667e-17
实部: 1.48257e-16 虚部: -1.96518e-16
实部: 3.18987e-16 虚部: 0
实部: 1.09565e-16 虚部: 2.39193e-16
实部: -3.07331e-17 虚部: 1.11022e-16
实部: -3.68274e-16 虚部: 0.5
实部: -2.01933e-19 虚部: -1.11022e-16
实部: 6.33669e-17 虚部: -1.66533e-16
实部: 5.80848e-17 虚部: 0.35
实部: 5.88842e-17 虚部: -5.32825e-17
```

图 1: $f_1, n = 2^4$ 结果

对于 $f_1, n = 2^7$, 结果为:

实部: 9.94942e-18 虚部: 0 实部: 4.60206e-18 虚部: 2.34187e-17 实部: -3.84163e-18 虚部: -0.35 实部: 2.34576e-17 虚部: 6.37171e-17
 实部: 1.11669e-17 虚部: 4.67666e-17 实部: -3.28615e-16 虚部: -0.5 实部: 5.19354e-18 虚部: -7.23115e-17 实部: 3.11155e-17 虚部: -6.45398e-17
 实部: 1.67357e-17 虚部: -7.1156e-17 实部: 1.00213e-17 虚部: -2.06139e-17 实部: 3.34761e-17 虚部: -5.73339e-17 实部: 6.63212e-17 虚部: 3.16268e-17
 实部: 5.1475e-17 虚部: -5.47011e-17 实部: 5.33627e-18 虚部: 3.70922e-17 实部: 2.00613e-17 虚部: 3.38358e-18 实部: -3.47925e-17 虚部: -4.66321e-18
 实部: -1.45434e-17 虚部: -6.08056e-18 实部: 8.58805e-18 虚部: -1.26446e-17 实部: 1.2254e-17 虚部: -4.2762e-17 实部: 1.86727e-17 虚部: 6.85434e-18
 实部: 4.02872e-17 虚部: -3.67946e-17 实部: -3.91586e-18 虚部: 7.0689e-17 实部: -1.30726e-17 虚部: 2.5866e-17 实部: -1.00543e-17 虚部: 5.30283e-18
 实部: -3.85811e-17 虚部: -4.20874e-17 实部: 3.25196e-17 虚部: 1.5768e-17 实部: -4.10314e-17 虚部: 1.15271e-17 实部: -1.76378e-16 虚部: -1.08145e-16
 实部: -9.69667e-17 虚部: -1.90439e-17 实部: 1.75647e-17 虚部: -1.39908e-16 实部: -1.18253e-17 虚部: -1.02885e-16 实部: -1.14204e-18 虚部: 3.66467e-17
 实部: -3.38523e-17 虚部: -1.86483e-17 实部: 1.50502e-17 虚部: 8.34161e-18 实部: -2.2962e-17 虚部: -2.91532e-17 实部: -5.96922e-18 虚部: 3.2694e-18
 实部: -5.46887e-17 虚部: -1.77047e-17 实部: 8.67765e-18 虚部: 1.34488e-17 实部: -9.62839e-17 虚部: -2.02166e-17 实部: 1.82446e-17 虚部: -1.43069e-16
 实部: 9.99284e-17 虚部: -3.26591e-17 实部: 2.05949e-17 虚部: 1.47676e-17 实部: 2.66237e-17 虚部: -3.42658e-17 实部: 6.80705e-18 虚部: 4.02969e-17
 实部: -8.76435e-18 虚部: -1.28715e-17 实部: -2.9766e-18 虚部: -1.45544e-17 实部: -1.88106e-17 虚部: 1.53597e-17 实部: 2.97316e-17 虚部: -5.07051e-17
 实部: 1.79624e-17 虚部: -4.34584e-18 实部: -1.57057e-17 虚部: 2.56896e-18 实部: 2.27224e-17 虚部: -2.8278e-17 实部: 1.90175e-17 虚部: 1.25361e-17
 实部: 5.21889e-18 虚部: 1.492e-17 实部: 1.86434e-17 虚部: -1.57718e-17 实部: -5.81151e-17 虚部: -3.88631e-17 实部: 4.90872e-17 虚部: -5.54712e-17
 实部: 8.14106e-17 虚部: -3.39722e-17 实部: -1.71555e-17 虚部: -6.7188e-18 实部: 7.02254e-17 虚部: -8.63982e-18 实部: 2.68241e-17 虚部: -1.66533e-16
 实部: 5.20697e-17 虚部: -1.72185e-17 实部: -1.24371e-17 虚部: 2.76803e-18 实部: 8.70579e-17 虚部: -1.11022e-16 实部: 4.01437e-17 虚部: 2.47217e-17

 实部: -1.0194e-16 虚部: 0 实部: 3.08028e-17 虚部: -2.85814e-17 实部: 1.00242e-16 虚部: -5.55112e-17 实部: -1.64301e-17 虚部: 3.80393e-18
 实部: 5.20697e-17 虚部: 1.72185e-17 实部: 4.45141e-18 虚部: 0 实部: 6.02611e-17 虚部: 1.85151e-18 实部: -7.7404e-18 虚部: 1.33595e-17
 实部: 8.14106e-17 虚部: 3.39722e-17 实部: 4.10328e-17 虚部: 5.52113e-17 实部: -4.75288e-17 虚部: 3.96303e-17 实部: -1.28505e-18 虚部: 4.06553e-17
 实部: 5.21889e-18 虚部: -1.492e-17 实部: 3.4109e-17 虚部: -8.05802e-18 实部: 2.61535e-17 虚部: 5.03081e-17 实部: -1.17429e-17 虚部: 8.8427e-18
 实部: 1.79624e-17 虚部: 4.34584e-18 实部: 2.69833e-17 虚部: 5.45749e-17 实部: -4.45484e-17 虚部: 1.11749e-17 实部: -1.00174e-17 虚部: 1.46185e-17
 实部: -8.76435e-18 虚部: 1.28715e-17 实部: 2.02118e-17 虚部: -2.04654e-17 实部: 9.74901e-18 虚部: 2.39917e-17 实部: 1.67524e-17 虚部: -1.26805e-17
 实部: 9.99284e-17 虚部: 3.26591e-17 实部: 9.13474e-18 虚部: 1.40392e-16 实部: -9.08808e-17 虚部: 2.81856e-17 实部: 1.4676e-16 虚部: -1.41655e-16
 实部: -5.46887e-17 虚部: 1.77047e-17 实部: 3.61124e-18 虚部: -1.14692e-17 实部: 6.79799e-17 虚部: -6.36486e-17 实部: 1.07103e-17 虚部: -6.67036e-18
 实部: -3.38523e-17 虚部: 1.86483e-17 实部: -8.601e-18 虚部: -3.47203e-17 实部: 9.16065e-17 虚部: 1.39761e-18 实部: 9.19828e-18 虚部: 1.1255e-16
 实部: -9.69667e-17 虚部: 1.90439e-17 实部: -5.5286e-17 虚部: -1.34488e-17 实部: -5.07821e-17 虚部: -2.98962e-17 实部: 3.92794e-17 虚部: -1.09465e-17
 实部: -3.85811e-17 虚部: 1.86483e-17 实部: -1.52919e-17 虚部: -1.65583e-17 实部: -9.66146e-18 虚部: -1.5234e-17 实部: -2.0058e-17 虚部: -5.70678e-17
 实部: 4.02872e-17 虚部: 3.67946e-17 实部: 1.43591e-17 虚部: -1.50121e-18 实部: -2.61173e-17 虚部: 6.97264e-17 实部: 1.43645e-17 虚部: 1.31921e-17
 实部: -1.45434e-17 虚部: 6.08056e-18 实部: -1.67954e-17 虚部: -2.35053e-18 实部: -1.96723e-17 虚部: 3.21095e-17 实部: -1.76256e-17 虚部: -5.08163e-17
 实部: 5.1475e-17 虚部: 5.47011e-17 实部: 3.83775e-17 虚部: -3.44518e-17 实部: 3.46013e-17 虚部: 2.63115e-17 实部: 1.15722e-17 虚部: 7.15272e-17
 实部: 1.67357e-17 虚部: 7.1156e-17 实部: 2.87091e-17 虚部: 5.69452e-17 实部: 2.20443e-17 虚部: 1.47153e-16 实部: -4.17265e-16 虚部: 0.5
 实部: 1.11669e-17 虚部: -4.67666e-17 实部: 3.80028e-18 虚部: -3.09026e-17 实部: -8.64145e-17 虚部: 0.35 实部: 1.16118e-17 虚部: -7.46469e-17

图 2: $f_1, n = 2^7$ 结果

对于 f2, 结果为:

实部: 0.131538 虚部: 0 实部: 6.19639e-18 虚部: 2.17646e-17 实部: -7.71952e-18 虚部: -0.35 实部: 2.67351e-17 虚部: 5.58959e-17
 实部: 1.44811e-17 虚部: 4.72664e-17 实部: -3.33845e-16 虚部: -0.5 实部: 9.54238e-18 虚部: -7.04229e-17 实部: 2.48178e-17 虚部: -6.14412e-17
 实部: 1.5699e-17 虚部: -6.90635e-17 实部: 7.51383e-18 虚部: -2.23204e-17 实部: 2.12986e-17 虚部: -5.7639e-17 实部: 7.39034e-17 虚部: 3.40059e-17
 实部: 5.07646e-17 虚部: -5.17897e-17 实部: 1.09097e-17 虚部: 4.07031e-17 实部: 1.18448e-17 虚部: 1.42897e-18 实部: -3.51123e-17 虚部: -4.68278e-18
 实部: -1.71729e-17 虚部: -5.92272e-18 实部: 2.25291e-18 虚部: -1.3047e-17 实部: 2.26472e-17 虚部: -3.64721e-17 实部: 1.60401e-17 虚部: 5.84142e-18
 实部: 4.19125e-17 虚部: -3.82007e-17 实部: 2.10982e-18 虚部: 7.11965e-17 实部: -1.13003e-17 虚部: 3.07024e-17 实部: -1.28711e-17 虚部: 6.98045e-18
 实部: -4.01896e-17 虚部: -4.37559e-17 实部: 3.31526e-17 虚部: 1.84164e-17 实部: -4.7914e-17 虚部: 7.63029e-18 实部: -1.55587e-16 虚部: -1.08145e-16
 实部: -9.43235e-17 虚部: -1.55861e-17 实部: 2.14924e-17 虚部: -1.39157e-16 实部: -4.78476e-18 虚部: -1.21942e-16 实部: -5.9691e-18 虚部: 3.61704e-17
 实部: -2.77556e-17 虚部: -1.38778e-17 实部: 7.68267e-18 虚部: 8.28499e-18 实部: -2.0411e-17 虚部: -2.04545e-17 实部: -1.62757e-18 虚部: 1.01054e-17
 实部: -5.6555e-17 虚部: -2.31e-17 实部: 1.7326e-17 虚部: 1.34488e-17 实部: -9.39331e-17 虚部: -1.90972e-17 实部: 1.91034e-17 虚部: -1.42471e-16
 实部: 9.79074e-17 虚部: -2.71783e-17 实部: 1.77032e-17 虚部: 1.71918e-17 实部: 1.59177e-17 虚部: -3.19441e-17 实部: -2.29576e-19 虚部: 3.5538e-17
 实部: -5.84265e-18 虚部: -1.5803e-17 实部: -9.76196e-20 虚部: -1.86588e-17 实部: -1.16515e-17 虚部: 1.97558e-17 实部: 2.83249e-17 虚部: -5.0765e-17
 实部: 1.71729e-17 虚部: 1.01618e-18 实部: -1.71343e-17 虚部: 3.01228e-18 实部: 2.70331e-17 虚部: -2.39058e-17 实部: 2.83585e-17 虚部: 1.23356e-17
 实部: 3.51566e-18 虚部: 1.42738e-17 实部: 2.55556e-17 虚部: -1.86637e-17 实部: -5.61543e-17 虚部: -4.55694e-17 实部: 4.79534e-17 虚部: -5.56046e-17
 实部: 8.61777e-17 虚部: -3.16692e-17 实部: -2.16072e-17 虚部: -4.62149e-18 实部: 7.72688e-17 虚部: -4.73277e-18 实部: 5.98217e-18 虚部: -1.66533e-16
 实部: 5.99257e-17 虚部: -1.37263e-17 实部: -9.73559e-18 虚部: -1.89163e-18 实部: 7.27716e-17 虚部: -8.32667e-17 实部: 4.18863e-17 虚部: 2.51347e-17
 实部: -9.71445e-17 虚部: 0 实部: 3.38785e-17 虚部: -2.8538e-17 实部: 8.24861e-17 虚部: -5.55112e-17 实部: -1.48686e-17 虚部: -3.76272e-18
 实部: 5.99257e-17 虚部: 1.37263e-17 实部: -7.78e-19 虚部: 0 实部: 6.83116e-17 虚部: 1.26452e-18 实部: -1.06888e-17 虚部: 1.56192e-17

图 3: f2 结果第一部分

```

实部: 8.61777e-17 虚部: 3.16692e-17 实部: 4.01835e-17 虚部: 5.69328e-17 实部: -4.39326e-17 虚部: 4.93963e-17 实部: 3.32135e-18 虚部: 4.48181e-17
实部: 3.51566e-18 虚部: -1.42738e-17 实部: 3.41556e-17 虚部: -8.98706e-18 实部: 2.06189e-17 虚部: 4.61525e-17 实部: -1.16692e-17 虚部: 6.17023e-18
实部: 1.71729e-17 虚部: -1.01618e-18 实部: 2.58717e-17 虚部: 5.61089e-17 实部: -3.65622e-17 虚部: 9.24983e-18 实部: -1.36833e-17 虚部: 1.49989e-17
实部: -5.84265e-18 虚部: 1.5803e-17 实部: 1.43341e-17 虚部: -2.70925e-17 实部: 2.1028e-18 虚部: 2.33055e-17 实部: 1.3644e-17 虚部: -1.11777e-17
实部: 9.79074e-17 虚部: 2.71783e-17 实部: 1.38734e-17 虚部: 1.4086e-16 实部: -8.521e-17 虚部: 2.80733e-17 实部: 1.67551e-16 虚部: -1.41655e-16
实部: -5.65555e-17 虚部: 2.31e-17 实部: 4.20597e-19 虚部: -1.00198e-17 实部: 7.40002e-17 虚部: -7.23473e-17 实部: 7.65105e-18 虚部: -8.45774e-18
实部: -2.77556e-17 虚部: 1.38778e-17 实部: -1.42711e-17 虚部: -3.62583e-17 实部: 9.51776e-17 虚部: 2.04545e-17 实部: 1.37945e-17 虚部: 1.21102e-16
实部: -9.43235e-17 虚部: 1.55861e-17 实部: -4.66376e-17 虚部: -1.34488e-17 实部: -5.43446e-17 虚部: -2.70065e-17 实部: 3.92992e-17 虚部: -1.36976e-17
实部: -4.01896e-17 虚部: 4.37559e-17 实部: -1.47556e-17 虚部: -1.57922e-17 实部: 1.17067e-18 虚部: -2.17059e-17 实部: -2.5311e-17 虚部: -5.88508e-17
实部: 4.19125e-17 虚部: 3.82007e-17 实部: 1.26981e-17 虚部: -7.87536e-20 实部: -2.11591e-17 虚部: 7.14406e-17 实部: 1.0305e-17 虚部: 1.27387e-17
实部: -1.71729e-17 虚部: 5.92272e-18 实部: -1.62876e-17 虚部: -7.13079e-18 实部: -3.01184e-17 虚部: 5.1128e-17 实部: -6.89132e-18 虚部: -4.99833e-17
实部: 5.07646e-17 虚部: 5.17897e-17 实部: 3.81552e-17 虚部: -2.54404e-17 实部: 2.40593e-17 虚部: 2.35568e-17 实部: 1.02636e-17 虚部: 7.16855e-17
实部: 1.5699e-17 虚部: 6.90635e-17 实部: 2.2077e-17 虚部: 5.4937e-17 实部: 2.74002e-17 虚部: 1.41944e-16 实部: -4.38107e-16 虚部: 0.5
实部: 1.44811e-17 虚部: -4.72664e-17 实部: 7.19962e-18 虚部: -2.8444e-17 实部: -8.68229e-17 虚部: 0.35 实部: 1.20433e-17 虚部: -7.60017e-17

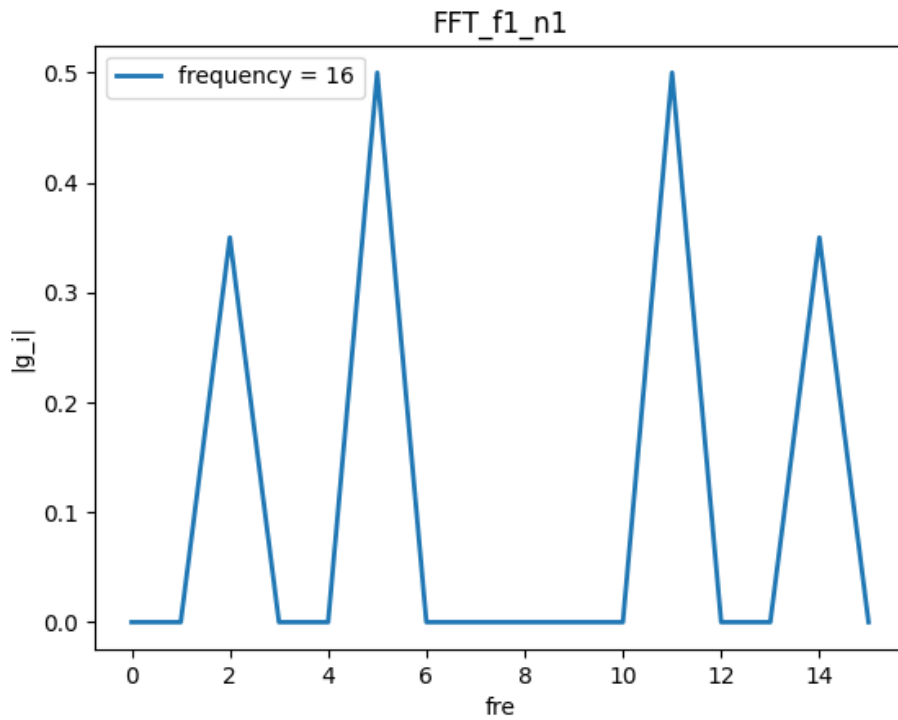
```

图 4: f2 结果第二部分

3.2 绘制实验图像

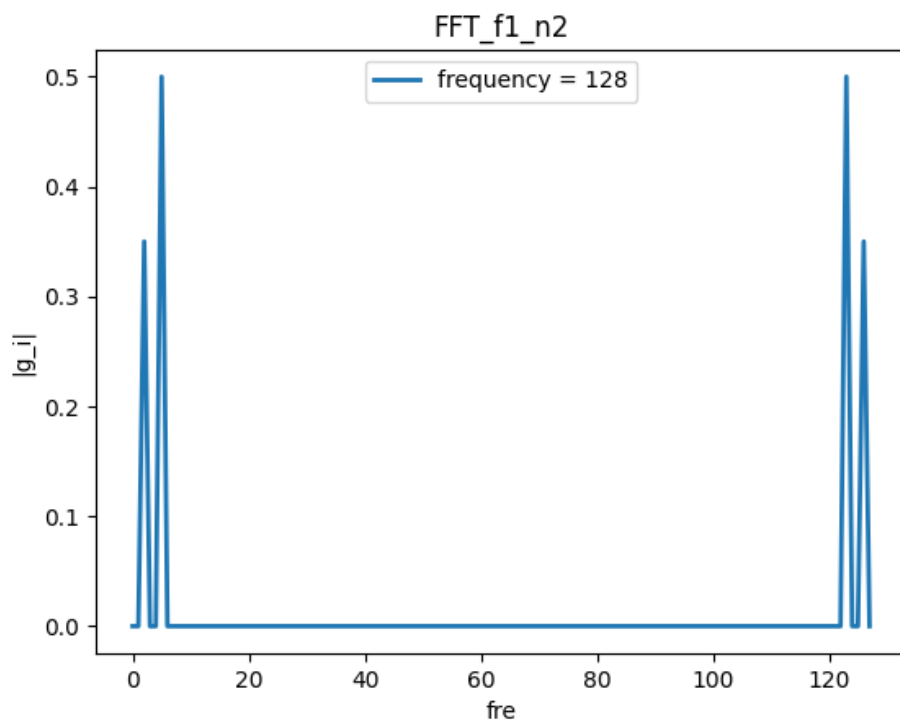
3.2.1 FFT 结果图像

$f1, n = 2^4 :$



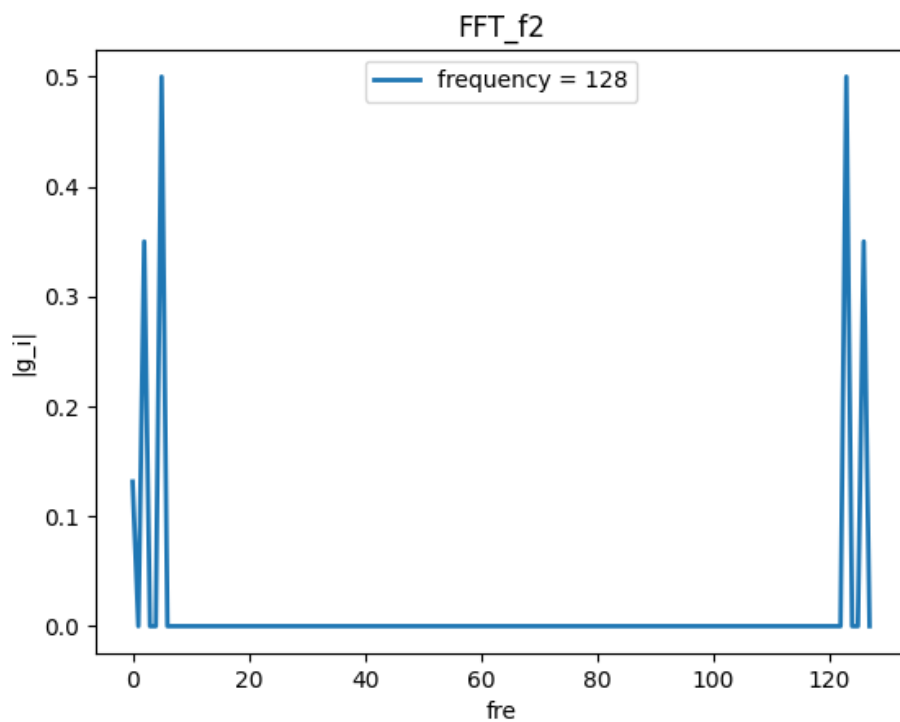
从图像可知，结果满足共轭对称性，在频率为 2Hz(14Hz), 5Hz(11Hz) 处取得振幅峰值，其他频率处振幅最小。振幅峰值分别为 0.35,0.5，即各自为 f1 峰值 0.7 与 1 的一半，与预期符合得较好。

$f1, n = 2^7 :$



与频率为 2^4 时类似，仍在频率为 2Hz、5Hz 及他们的对称位置取得振幅峰值，峰值仍分别为 0.35，0.5.

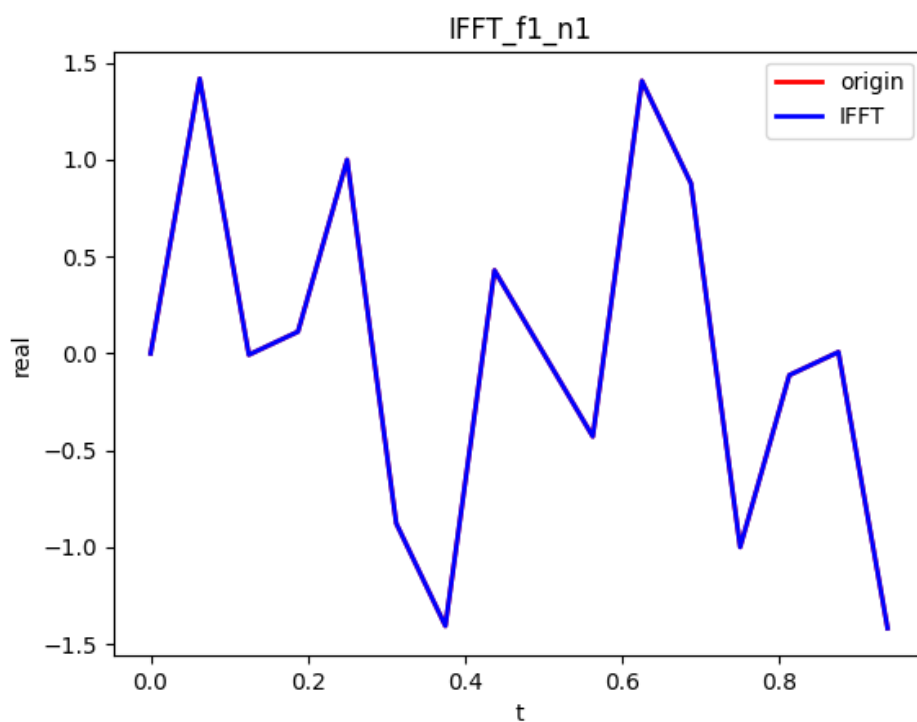
$f2, n = 2^7$:



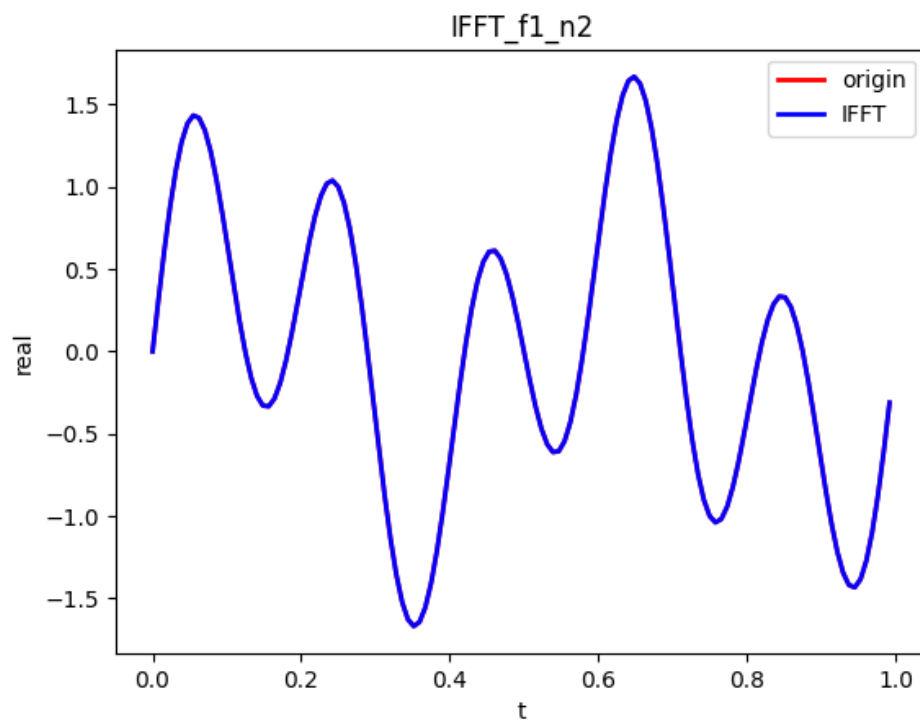
可以看出，假如随机扰动之后，结果在一定程度上不再满足共轭对称性（如 0Hz 处），但仍然满足在频率为 2Hz、5Hz 及他们的对称位置取得振幅峰值，峰值仍分别为 0.35，0.5。这说明在带有噪声影响的情况下，FFT 仍然适用。

3.3 原图与重建后图像对比

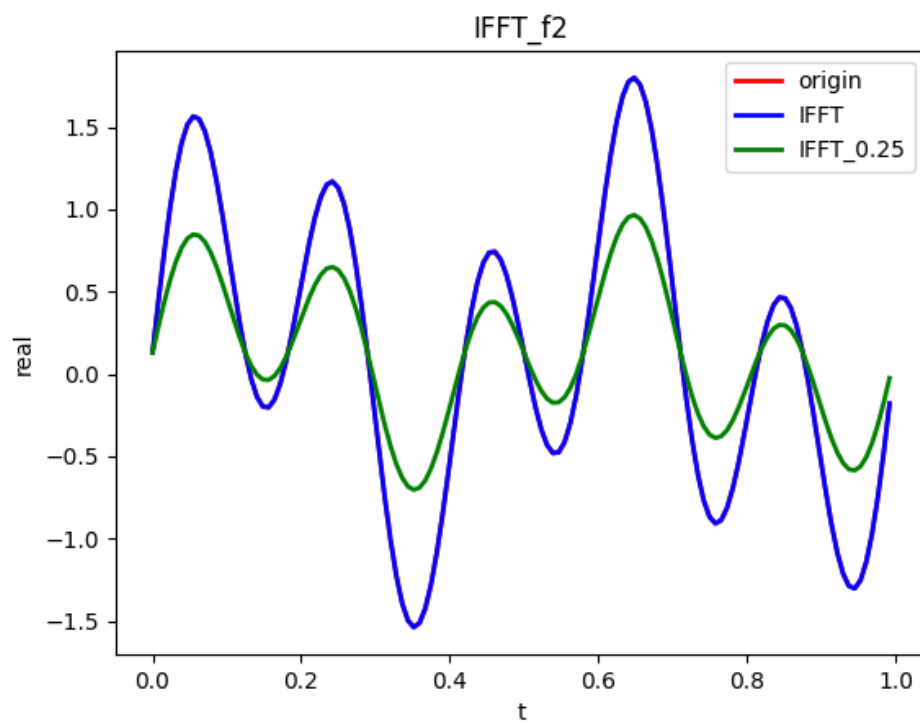
$f1, n = 2^4$:



$f1, n = 2^7$:



$f2, n = 2^7$:



4 结果分析

1. 采样数对结果影响：采样数目越多，结果点数相应也越多，体现在图像上更加光滑，准确程度更好。但此次实验中，f1 在选取两种 n 情况下，原图像与重建后图像均符合较好，因此采样数对该项的影响并未有明显体现。
2. 对 f2，去掉高频系数后使得结果振幅缩小为原本的一半。此外图像更光滑、更接近 f1，一定程度上起到了去噪的作用。