计算方法编程作业 2 实验报告

张博厚 PB22071354

目录

1 实验目的

通过 C++ 语言实现两种求解线性方程组的算法: 列主元 Gauss 消元法与 Gauss-Seidel 迭代, 分别将所求结果与真实值比较, 分析两种算法的表现.

2 实验内容

对系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} -(2\epsilon+h) & \epsilon+h & & & \\ \epsilon & -(2\epsilon+h) & \epsilon+h & & \\ & \epsilon & -(2\epsilon+h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \epsilon+h \\ & & & \epsilon & -(2\epsilon+h) \end{pmatrix}$$

对 $\epsilon = 1/0.1/0.01, a = 0.5, n = 100$, 分别使用两种算法求解, 并比较与精确值的误差.

3 算法实现

使用 C++ 中的 std::vector 构造二维数组来表示矩阵, 以提供更好的可变大小扩展性和成员函数. 对涉及的数学运算 (如计算矩阵范数, 计算真实值) 等, 调用了 cmath 标准库中的方法来进行.

3.1 列主元消元,Gauss-Seidel 迭代

按照书中描述的算法步骤执行即可.

3.2 计算精确值

精确解已在实验文档中给出, 由

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-1/\epsilon}}(1-e^{-\frac{x}{\epsilon}}) + ax \tag{1}$$

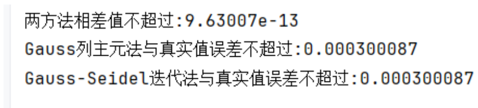
对每个离散的 x_i, 分别代入上式计算精确值 y_i, 结果存入容器 Tvalue 中并返回.

3.3 计算范数

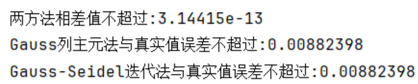
此函数用于计算两向量之差的无穷范数, 用于判断 Guass-Seidel 迭代的停止条件, 以及计算最终结果与真实值的误差. 函数首先判断两输入向量 a 与 b 是否同维, 之后对两向量同时遍历, 找到 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 中的绝对值最大分量.

4 实验结果与分析

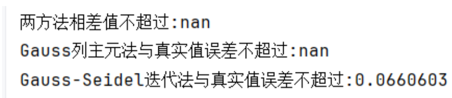
分别令 $\epsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.0001$, 所得结果如下:



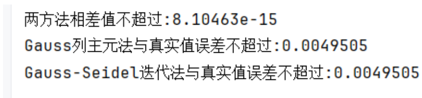
(a) $\epsilon = 1$



(b) $\epsilon = 0.1$



(c) $\epsilon = 0.01$



(d) $\epsilon = 0.0001$

其中, " 误差不超过" 是指将两向量做比较, 其差的无穷范数的最大值, 即将各自分量对比所得的偏差最大值. 从结果可以看出, Gauss 列主元消元法和 Gauss-Seidel 迭代法所得结果一般相差不大, 与真实值相差 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 数量级. 误差的主要来源是差分法造成的系统误差, 若提高 n 的值, 将区间做更细划分, 则可显著减小此类误差; 次要原因是 C++ 语言中 double 类型计算带来的误差.

特别地, 当 $\epsilon = 0.01$ 时, Gauss 消元法不能正常工作, 这是由于此时系数矩阵的条件数 Cond(A) 太大, 求解稳定性弱, 误差被放大, 可能造成除 0 的情况.