

计算方法编程作业 3 实验报告

张博厚 PB22071354

目录

1	问题描述	2
2	问题分析与算法	2
2.1	反幂法	2
2.2	LU 分解	2
3	实验结果	2
4	结果分析	3

1 问题描述

使用 C++ 实现带规范方法的反幂法，求解给定矩阵的按模最小特征值及相应的特征向量，其中迭代方程 $X^{k+1} = A^{-1}Y^k$ 使用 LU 分解（Doolittle 分解）来求解。

2 问题分析与算法

2.1 反幂法

算法执行过程如下：

1. 初始化 X^0, Y^0 , 对矩阵 A 做 LU(Doolittle) 分解，转 2.
2. 解方程 $AX^{k+1} = Y^k$ ，转 3.
3. 计算 λ 与 Y_{k+1} ，转 4.
4. 若两次 λ 之差小于给定精度，则退出，否则转 2.

2.2 LU 分解

矩阵 L, U 分别为下/上三角矩阵，L 的对角元已知，均为 1, 按照分别计算 U 的第 k 行，L 的第 k 列的顺序 ($k=1, 2, \dots, n-1$), 最后计算 U 的第 n 行。按此方法，L 与 U 均只需计算一次，可以减少在迭代中解方程的开支。

3 实验结果

实验结果如下：

A1:

k	X^k	Y^k	λ
0	(1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1)	1
1	(630, -1120, 630, -120, 5)	(0.5625, -1, 0.5625, -0.1071, 0.00446)	1120
2	(146253, -297849, 196175, -45114.4, 2377.25)	(0.49103, -1, 0.658639, -0.151467, 0.00798141)	297849
3	(149113, -304047, 200595, -46244.7, 2446.56)	(0.490426, -1, 0.65975, -0.152097, 0.00804664)	304047
4	(149157, -304142, 200661, -46261.1, 2447.54)	(0.49042, -1, 0.659762, -0.152104, 0.00804735)	304142
5	(149158, -304143, 200662, -46261.3, 2447.55)	(0.49042, -1, 0.659762, -0.152104, 0.00804736)	304143
6	(149158, -304143, 200662, -46261.3, 2447.55)	(0.49042, -1, 0.659762, -0.152104, 0.00804736)	304143
7	(149158, -304143, 200662, -46261.3, 2447.55)	(0.49042, -1, 0.659762, -0.152104, 0.00804736)	304143

故 A1 的按模最小的特征值为 $1/304143 = 3.2879 \times 10^{-6}$, 对应的特征向量为 (0.49042, -1, 0.659762, -0.152104, 0.00804736).

A2:

k	X^k	Y^k	λ
0	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)	1
1	(0, 2, -0, 1)	(0, 1, -0, 0.5)	2
2	(-0.625, 5.625, -2.375, 3.5)	(-0.111111, 1, -0.422222, 0.622222)	5.625
3	(-0.933333, 8.07778, -3.43333, 5.04444)	(-0.115543, 1, -0.425034, 0.624484)	8.07778
4	(-0.93621, 8.08992, -3.44378, 5.05433)	(-0.115725, 1, -0.425687, 0.624769)	8.08992
5	(-0.936712, 8.09382, -3.44549, 5.05681)	(-0.115732, 1, -0.425694, 0.624774)	8.09382
6	(-0.936719, 8.09386, -3.44551, 5.05684)	(-0.115732, 1, -0.425695, 0.624775)	8.09386

故 A2 的按模最小的特征值为 $1/8.09386 = 0.12355$, 对应的特征向量为 $(-0.115732, 1, -0.425695, 0.624775)$.

4 结果分析

1. 是否有“A 的按模最小特征值越趋近 0, 收敛越快”?

比较可知, A1 的按模最小特征值更趋近 0, 但迭代次数多于 A2, 因此不满足上述条件。事实上, 反幂法收敛快慢取决于 A 的按模最小特征值与按模次小特征值的比值大小, 该比值越接近 0, 则收敛越快。

2. 估计每次特征值中是否遇到问题? 如何解决?

通过观察每次迭代后 X^k, Y^k 的值, 发现 $\{X^k\}$ 收敛, 这说明 A 的按模最小特征值仅有一个且为正, 因此每次取 X^k 中模最大的分量, 即近似于 A^{-1} 的按模最大特征值 (A 的按模最小特征值倒数), 同时 Y^k 近似为对应特征向量。