

计算方法编程作业一实验报告

张博厚 PB22071354

1 实验内容

本实验要求编程求解一反射问题的二维简化模型: 将镜面假定为圆形, 给定观察点 P 与物点 Q , 输出反射点 T 和像点 R .

2 算法

2.1 计算反射点 T

对于反射点 T , 参考《Computational Mirror Cup and Saucer Art》中的方法, 使用二分法数值求解: 假定观察点 P 在 x 轴负半轴, 物点 Q 在第二象限, P 与 Q 均在圆外, G 为过点 P 在第二象限内所作切线的切点, 如图 1 所示.

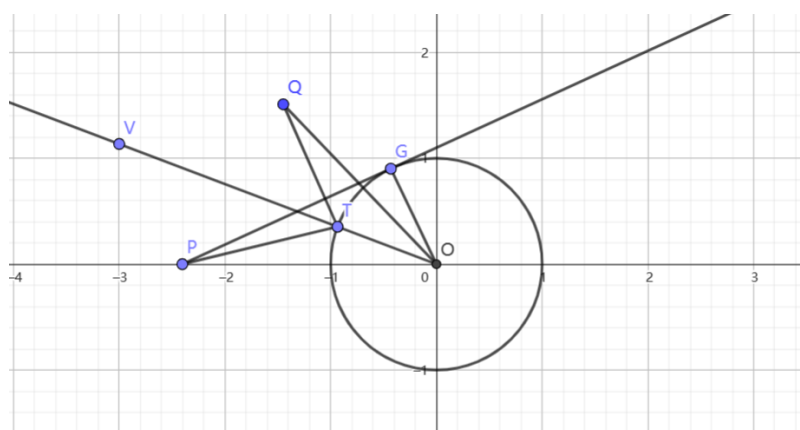


图 1: 反射模型及各点示意图

通过二分法确定 $\angle POT$ 的大小, 进而确定 T 的位置, 首先应分别计算 $\angle POG, \angle POQ$ 的大小:

$$\begin{aligned}\angle POG &= \arccos \frac{1}{|x_P|} \\ \angle POQ &= \arccos \frac{|x_Q|}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}}\end{aligned}$$

用二分的方式, 取初值 $high = \min\{\angle POG, \angle POQ\}$, $low = 0$, 每次令 $\angle POT = \frac{1}{2}(low + high)$, 可知 T 的坐标为 $(-\cos \angle POT, \sin \angle POT)$. 下面分别计算 $\angle PTV, \angle QTV$: 由 T 坐标可得直线 OT 方程:

$$\sin \angle POT \ x + \cos \angle POT \ y = 0 \quad (1)$$

故 P, Q 两点到直线 OT 的距离分别为

$$\begin{aligned}l_1 &= \frac{|\sin \angle POT \ x_P + \cos \angle POT \ y_P|}{\sin^2 \angle POT + \cos^2 \angle POT} = |\sin \angle POT \ x_P + \cos \angle POT \ y_P| \\ l_2 &= |\sin \angle POT \ x_Q + \cos \angle POT \ y_Q|\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\angle PTV &= \arcsin \frac{l_1}{|PT|} \\ \angle QTV &= \arcsin \frac{l_2}{|QT|}\end{aligned}$$

比较 $\angle PTV$ 与 $\angle QTV$ 的大小, 并据此调整二分的上限或下限, 直到两角误差在可接受的范围内 (实验中设置为 double 类型的精度 15 位), 此时的 T 即为所求反射点.

2.2 计算像点 R

对于像点 R, 在已知 Q 与 T 的前提下用解析法求解.