

计算方法编程作业一实验报告

张博厚 PB22071354

目录

1	实验内容	1
2	算法	1
2.1	计算反射点 T	1
2.2	计算像点 R	3
3	实验结果	3
4	分析与思考	4

1 实验内容

本实验要求编程求解一反射问题的二维简化模型: 将镜面假定为圆形, 给定观察点 P 与物点 Q , 输出反射点 T 和像点 R .

2 算法

2.1 计算反射点 T

对于反射点 T , 参考《Computational Mirror Cup and Saucer Art》中的方法, 使用二分法数值求解: 假定观察点 P 在 x 轴负半轴, 物点 Q 在第二象限, P 与 Q 均在圆外, G 为过点 P 在第二象限内所作切线的切点, 如图 1 所示.

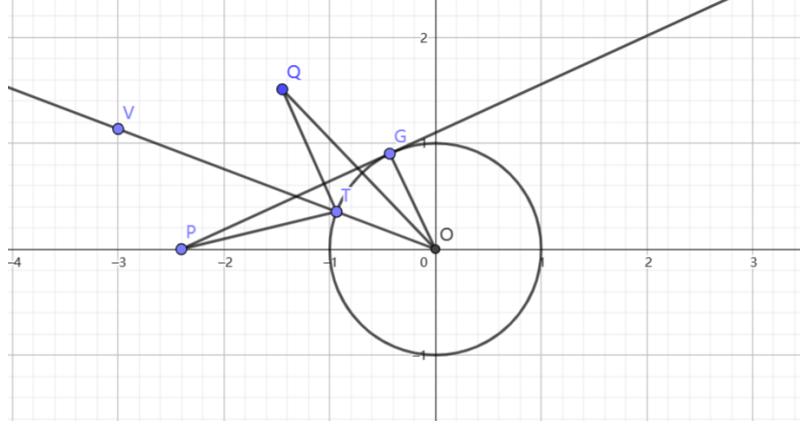


图 1: 反射模型及各点示意图

通过二分法确定 $\angle POT$ 的大小, 进而确定 T 的位置, 首先应分别计算 $\angle POG, \angle POQ$ 的大小:

$$\angle POG = \arccos \frac{1}{|x_P|}$$

$$\angle POQ = \arccos \frac{|x_Q|}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}}$$

用二分的方式, 取初值 $high = \min\{\angle POG, \angle POQ\}$, $low = 0$, 每次令 $\angle POT = \frac{1}{2}(low + high)$, 可知 T 的坐标为 $(-\cos \angle POT, \sin \angle POT)$. 下面分别计算 $\angle PTV, \angle QTV$: 由 T 坐标可得直线 OT 方程:

$$\sin \angle POT \ x + \cos \angle POT \ y = 0 \quad (1)$$

故 P, Q 两点到直线 OT 的距离分别为

$$l_1 = \frac{|\sin \angle POT \ x_P + \cos \angle POT \ y_P|}{\sin^2 \angle POT + \cos^2 \angle POT} = |\sin \angle POT \ x_P + \cos \angle POT \ y_P|$$

$$l_2 = |\sin \angle POT \ x_Q + \cos \angle POT \ y_Q|$$

于是

$$\angle PTV = \arcsin \frac{l_1}{|PT|}$$

$$\angle QTV = \arcsin \frac{l_2}{|QT|}$$

比较 $\angle PTV$ 与 $\angle QTV$ 的大小, 并据此调整二分的上限或下限, 直到两角误差在可接受的范围内 (实验中设置为 double 类型的精度 15 位), 此时的 T 即为所求反射点.

2.2 计算像点 R

对于像点 R, 在已知 Q 与 T 的前提下用解析法求解, 实质上即为求解 Q 关于圆上过 T 切线的对称点. (1) 式写出直线 OT 方程, 由切线过 T 且与 OT 垂直, 可知切线方程为:

$$l: y - y_T = -\frac{x_T}{y_T}(x - x_T) \quad (2)$$

直线 QR 与直线 l 垂直, 因此 QR 的方程为:

$$y - y_Q = \frac{y_T}{x_T}(x - x_Q) \quad (3)$$

设直线 QR 与直线 l 的交点为 M, 联立 (2)(3) 式可得 M 坐标为:

$$\begin{cases} x_M = x_T y_T (y_T - y_Q) + x_T^3 + y_T^2 x_Q \\ y_M = y_T - \frac{x_T}{y_T}(x_M - x_T) \end{cases} \quad (4)$$

点 Q 与 R 关于切线 l 对称, 因而关于交点 M 中心对称, 由关系

$$\begin{cases} x_R = 2x_M - x_Q \\ y_R = 2y_M - y_Q \end{cases} \quad (5)$$

即可求得像点 R 的坐标.

3 实验结果

对所给样例, 计算结果如下:

请输入观察点横坐标: -2
请输入物点坐标: -1 1
反射点T的坐标为: (-0.88567, 0.464316)
像点R的坐标为: (-0.380057, 0.674993)

请输入观察点横坐标: -10
请输入物点坐标: -2 1
反射点T的坐标为: (-0.959312, 0.28235)
像点R的坐标为: (0.304214, 0.321811)

图 2: 所给样例

与参考数据相比, 误差在允许范围内 (10^{-6}).

对自测数据, 计算结果如下:

请输入观察点横坐标: -1.000001 请输入物点坐标: -2 2 反射点T的坐标为: (-1, 1.99998e-06) 像点R的坐标为: (7.99992e-06, 2)	请输入观察点横坐标: -2 请输入物点坐标: -1 0.000001 反射点T的坐标为: (-1, 1.00004e-06) 像点R的坐标为: (-1, 1.00009e-06)
请输入观察点横坐标: -2.33 请输入物点坐标: -3 1 反射点T的坐标为: (-0.989279, 0.146038) 像点R的坐标为: (1.18242, 0.38259)	请输入观察点横坐标: -3 请输入物点坐标: -1 0.5 反射点T的坐标为: (-0.922615, 0.385721) 像点R的坐标为: (-0.78692, 0.410917)
请输入观察点横坐标: -3 请输入物点坐标: -2 10 反射点T的坐标为: (-0.827028, 0.56216) 像点R的坐标为: (8.3803, 2.94415)	请输入观察点横坐标: -3 请输入物点坐标: -3 1 反射点T的坐标为: (-0.987408, 0.158192) 像点R的坐标为: (1.18744, 0.329136)
请输入观察点横坐标: -10 请输入物点坐标: -2 1 反射点T的坐标为: (-0.959312, 0.28235) 像点R的坐标为: (0.304214, 0.321811)	请输入观察点横坐标: -1024 请输入物点坐标: -8 4 反射点T的坐标为: (-0.970066, 0.242842) 像点R的坐标为: (7.00089, 0.244735)

图 3: 自测数据

4 分析与思考

对比参考数据而言, 计算结果符合 4 位有效数字精度要求, 但仍有一定误差存在, 主要原因如下:

- 1.double 类型精度仅为 15 位, 进行多次计算后误差会逐次放大.
2. 函数中调用了 c++ 的 cmath 库, 进行了三角函数, 反三角函数等计算, 也会造成一定误差.
3. 特别地, 在计算 $\angle PTV, \angle QTV$ 时, 需要将 $|PT|, |QT|$ 作为分母, 因此当 P 与 T, Q 与 T 接近时 (如自测数据 1,2), 误差会比较大.