切变模量实验报告

张博厚 PB22071354

2023.6.12

目录

1 实验背景与目的

切变模量, 又称剪切模量/刚性模量, 材料的力学性能指标之一, 是指材料在剪切应力作用下, 在弹性变形比例极限范围内, 切应力与切应变的比值. 切变模量表征材料抵抗切应变的能力, 模量大, 则表示材料的刚性强. 本实验中采用扭摆实验装置来测量金属丝的切变模量, 尽量避免测量较难测准的物理量, 提高实验精度.

2 实验原理

本实验的实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝, 在几何上可认为是一个半径为 R, 长度为 L 的细长圆柱体. 将钢丝上端固定, 下端面发生扭转, 则在弹性限度内有

$$\tau = G\gamma \tag{1}$$

式中 G 即为材料的切变模量, 如下图所示:

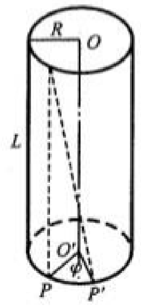

图 1: 金属丝扭转形变示意图

设钢丝下端面绕中轴线转过的角度为 ϕ(图中 P 点转到 P' 点), 根据位错理论, 金属丝各截面均相应地发生了转动, 其单位长度的转角 $\frac{d\phi}{dl} = \frac{\phi}{L}$, 选取其中长为 dl 的体积元, 可以推知在其中半径为 ρ 的位置, 切应变为

$$\gamma_\rho = \rho\frac{d\phi}{dl} \tag{2}$$

其产生的恢复力矩

$$dM = \tau_\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G\rho^3\frac{d\phi}{dl} \cdot d\rho \tag{3}$$

故总力矩为

$$M = \int_0^R 2\pi G\rho^3 \frac{d\phi}{dl} \cdot d\rho = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{d\phi}{dl} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{\phi}{L} \tag{4}$$

为求出钢丝的恢复力矩, 在其下端悬挂一圆盘, 可绕中轴线自由扭动, 则摆扭过的角度正比于所受的扭力矩:

$$M = D\phi \tag{5}$$

又由转动定律,

$$M = I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} \tag{6}$$

联立 (5)(6), 得

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\phi = 0 \tag{7}$$

这是一个简谐运动微分方程, 其周期为

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{8}$$

但作为扭摆的圆盘上有一个夹具, 并不对称, 直接计算 I_0 比较困难, 因此可将一个金属环对称地置于圆盘上. 设环的质量为 m, 内外半径分别为 r_1, r_2, 易知其转动惯量为 $I_1 = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$, 则此时扭摆周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \tag{9}$$

联立 (4)(5)(6)(8)(9), 得

$$D = \frac{2\pi^2 m(r_1^2 + r_2^2)}{T_1^2 - T_0^2} \tag{10}$$

$$G = \frac{4\pi L m(r_1^2 + r_2^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \tag{11}$$

3 实验内容

3.1 实验仪器

扭摆装置, 螺旋测微器, 游标卡尺, 米尺, 秒表

3.2 实验步骤

1. 调整扭摆装置, 使钢丝与圆盘面垂直, 圆环能方便地置于圆盘上.
2. 用螺旋测微器测量钢丝直径, 用游标卡尺测量环的内外径, 用米尺测量钢丝的有效长度.
3. 写出相对误差公式, 据此估算应测量的周期数目.
4. 选定扭转角度, 测量放置金属环前后多个周期的时长.
5. 计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D, 完成误差分析.
6. 测量不同扭转角度下的周期, 研究钢丝的切变模量与其扭转角度的关系.

3.3 方案设计

在实验中, 直接测量量为金属丝, 金属环的直径, 将式 (11) 改写为

$$G = \frac{16\pi Lm(d_1^2 + d_2^2)}{d^4(T_1^2 - T_0^2)} \tag{12}$$

根据最大不确定度公式, 有

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2d_1\Delta d_1}{d_1^2 + d_2^2} + \frac{2d_2\Delta d_2}{d_1^2 + d_2^2} + 4\frac{\Delta d}{d} + \frac{2T_0\Delta t_0}{N_0(T_1^2 - T_0^2)} + \frac{2T_1\Delta T_1}{N_1(T_1^2 - T_0^2)}$$

粗侧数据及相应的实验设计见附录 1: 实验方案设计

4 数据记录与处理

原始数据见附录 2: 实验原始数据
考虑零点误差 $d_0 = -0.019mm$, 钢丝直径 d 的平均值为

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{0.779 + 0.782 + 0.786 + 0.789 + 0.783 + 0.787}{6}\,\mathrm{mm} = 0.78433\,\mathrm{mm}$$

钢丝直径 d 的标准差

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2} = 0.0036697\,\mathrm{mm}$$

其 A 类不确定度为

$$\Delta_{A,d}=\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}=1.498\times10^{-3}mm$$

B 类不确定度为

$$\Delta_{B,d}=0.004\,\mathrm{mm}$$

钢丝直径 d 的展伸不确定度

$$\begin{aligned}U_d&=\sqrt{(t_P\Delta_{A,d})^2+\left(k_P\frac{\Delta_{B,d}}{C}\right)^2}\\&=\sqrt{(2.57\times1.498\times10^{-3})^2+\left(1.96\times\frac{0.004}{3}\right)^2}\,\mathrm{mm}\\&=0.004653\,\mathrm{mm}\qquad(P=0.95)\end{aligned}$$

环内直径

$$d_1=79.62\,\mathrm{mm}$$

其 A 类不确定度为 0,B 类不确定度为

$$\Delta_{B,d1}=0.02\,\mathrm{mm}$$

展伸不确定度为

$$U_{d1}=k_P\frac{\Delta_{B,d1}}{C}=1.96\times\frac{0.02}{\sqrt{3}}\,\mathrm{mm}=0.022632\,\mathrm{mm}\qquad(P=0.95)$$

环外直径

$$d_2=100.16\,\mathrm{mm}$$

其 A 类不确定度为 0,B 类不确定度为

$$\Delta_{B,d2}=0.02\,\mathrm{mm}$$

展伸不确定度为

$$U_{d2}=k_P\frac{\Delta_{B,d2}}{C}=1.96\times\frac{0.02}{\sqrt{3}}\,\mathrm{mm}=0.022632\,\mathrm{mm}\qquad(P=0.95)$$

钢丝长度

$$L=48.3\,\mathrm{cm}$$

B 类不确定度

$$\Delta_{B,L}=\sqrt{\Delta_{仪}^2+\Delta_{估}^2}=\sqrt{0.1^2+0.05^2}\,\mathrm{cm}=0.1118\,\mathrm{cm}$$

展伸不确定度

$$U_L=k_P\frac{\Delta_{B,L}}{C}=1.96\times\frac{0.1118}{3}\,\mathrm{cm}=0.073045\,\mathrm{cm},P=0.95$$

圆环质量

$$m=478.4\,\mathrm{g}$$

B 类不确定度为 (采用七级物理天平)

$$\Delta_{B,m}=0.08\,\mathrm{g}$$

展伸不确定度为

$$U_m=k_P\frac{\Delta_{B,m}}{C}=1.96\times\frac{0.08}{3}\,\mathrm{g}=0.0523\,\mathrm{g}\qquad(P=0.95)$$

不带圆环时,$N_0=33$, 所用时间的平均值

$$\overline{t_0}=\frac{1}{3}(83.58s+83.63s+83.64s)=83.62s$$

周期平均值

$$\overline{T_0}=\frac{\overline{t_0}}{N_0}=2.5339\,\mathrm{s}$$

t_0 的标准差为

$$\sigma_{t_0}=\sqrt{\frac{(83.58-83.62)^2+(83.63-83.62)^2+(83.64-83.62)^2}{2}}=0.0324s$$

其 A 类不确定度为

$$\Delta_{A,t_0}=\frac{\sigma_{t_0}}{\sqrt{n}}=0.0187s$$

B 类不确定度

$$\Delta_{B,t0}=0.2\,\mathrm{s}$$

展伸不确定度为

$$U_{t0}=\sqrt{(2.57\times0.0187)^2+(1.96\times\frac{0.2}{3})^2}=0.1392s\qquad(P=0.95)$$

带圆环时,$N_1 = 49$, 所用时间的平均值

$$\overline{t_1} = \frac{1}{3}(184.39s + 184.54s + 184.89s) = 184.61s$$

周期 T1 的平均值

$$\overline{T_1} = \frac{\overline{t_1}}{N_1}\,\mathrm{s} = 3.7676\,\mathrm{s}$$

t_1 的标准差为

$$\sigma_{t1} = \sqrt{\frac{(184.39 - 184.61)^2 + (184.54 - 184.61)^2 + (184.89 - 184.61)^2}{2}} = 0.2566s$$

其 A 类不确定度为

$$\Delta_{A,t_1} = \frac{\sigma_{t1}}{\sqrt{n}} = 0.1481s$$

B 类不确定度

$$\Delta_{B,t_1} = 0.2\,\mathrm{s}$$

展伸不确定度

$$U_{t1} = \sqrt{(2.57 \times 0.1481)^2 + (1.96 \times \frac{0.2}{3})^2} = 0.4024s \qquad (P = 0.95)$$

由式 (10), 改写得

$$D = \frac{\pi^2 m(d_1^2 + d_2^2)}{2(T_1^2 - T_0^2)} \tag{13}$$

代入数据得, 扭转模量

$$D = \frac{\pi^2 \times 0.4784\,(0.07962^2 + 0.10016^2)}{2 \times (3.7676^2 - 2.5339^2)}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 4.9719 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

展伸不确定度

$$\frac{U_D}{D} = \sqrt{(\frac{U_m}{m})^2 + (\frac{2d_1U_{d_1}}{d_1^2 + d_2^2})^2 + (\frac{2d_2U_{d_2}}{d_1^2 + d_2^2})^2 + (\frac{2T_1U_{t_1}}{N_1(T_1^2 - T_0^2)})^2 + (\frac{2T_0U_{t_0}}{N_0(T_1^2 - T_0^2)})^2}$$

得

$$U_D = 4 \times 10^{-5} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \qquad (P = 0.95)$$

故

$$D = (0.00497 \pm 0.00004)\, kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

由式 (12), 切变模量

$$G=\frac{16\pi\times0.483\times0.4784\,(0.07962^2+0.10016^2)}{0.00078433^4\times(3.7676^2-2.5339^2)}\,\mathrm{kg/(m\cdot s^2)}=6.4635\times10^{10}\,\mathrm{kg/(m\cdot s^2)}$$

其展伸不确定度

$$\frac{U_G}{G}=\sqrt{(\frac{U_L}{L})^2+4(\frac{U_d}{d})^2+(\frac{U_m}{m})^2+(\frac{2d_1U_{d_1}}{d_1^2+d_2^2})^2+(\frac{2d_2U_{d_2}}{d_1^2+d_2^2})^2+(\frac{2T_1U_{t_1}}{N_1(T_1^2-T_0^2)})^2+(\frac{2T_0U_{t_0}}{N_0(T_1^2-T_0^2)})^2}$$

得

$$U_G=2.8\times10^9kg/(m\cdot s^2)\qquad(P=0.95)$$

故

$$G=(6.46\pm0.28)\times10^{10}\,\mathrm{kg/(m\cdot s^2)}$$

5 思考与讨论

5.1 本题是否满足 $\gamma << 1$ 的条件?

本题中扭转角度 $\phi=270^\circ=4.712rad$, 由式 (2), 知

$$\gamma_{max}=\frac{\overline{d}}{2}\cdot\frac{\phi}{L}=3.826\times10^{-3}<<1$$

满足条件

5.2 为提高精度, 本实验在设计上做了哪些安排? 实验中应注意什么?

在设计上, 本实验设法避免测量难以测量的物理量. 由于圆盘的转动惯量难以计算和测量, 利用摆上放置圆盘前后的周期关系, 将转动惯量这一难测量的量转化为测量金属环的质量与内外径, 提高了实验精度; 此外在设计实验时, 找到对结果影响最大的主要误差项, 对其进行多次测量减小误差; 测量多个周期的总时间, 也减小了时间测量误差对结果的影响.

在实验操作中, 应注意规范使用千分尺, 游标卡尺等实验仪器, 避免出现读数错误; 在测量前应调整扭摆装置, 使得钢丝与圆盘面垂直; 测量时应适当调整扭摆, 使之仅围绕其中轴线自转, 避免其做圆锥摆运动.

6 附录

6.1 实验方案设计

6.2 实验原始数据