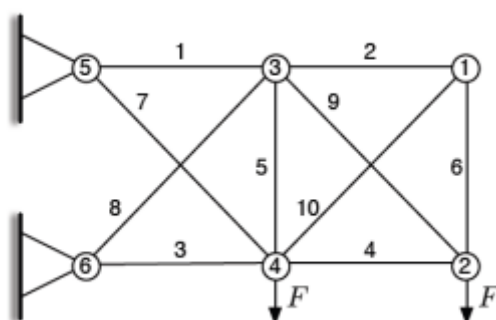


Ten-Bar Truss Optimization

巫泓毅

August 2024

1 題目說明



最佳化數學表示式：

$$\min_{r_1, r_2} f(r_1, r_2) = \sum_{i=1}^6 m_i(r_1) + \sum_{i=7}^{10} m_i(r_2)$$

subject to $|\sigma_i| \leq \sigma_y$

$$\Delta s_2 \leq 0.02$$

where f : 所有桿件的質量

Δs_2 : node 2 的位移

σ_y : 降伏應力

σ_i : 所有桿件的應力

在以下的已知條件下，給定桿件截面半徑，試求各桿件的位移、應力與反作用力：

- 整體架構處在靜力平衡的情況下
- 所有桿件截面皆為圓形
- 材料為鋼，楊氏係數 $E = 200 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ，

降伏強度 $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$

- 平行桿件與鉛直桿件（桿件 1 至桿件 6）長度皆為 9.14 m
- 桿件 1 至桿件 6 截面半徑相同為 r_1 ，桿件 7 至桿件 10 截面半徑相同為 r_2
- 所有桿件半徑的最佳化範圍為 0.001 至 0.5 m 之間
- 在節點 2 和節點 4 上的負載 F 皆為 $1.0 \times 10^7 \text{ N}$ 向下

2 求解過程

2.1 有限元素建立

2.1.1 基本參數定義

定義節點座標、桿長、截面積、楊氏係數、矩陣自由度編號、桿件以及剛性矩陣。

```
function [Q, stress, R, K] = sol_TenBarTruss(r)

% 定義各參數數值

%節點座標
node = [18.28 9.14;18.28 0;9.14 9.14;9.14 0;0 9.14;0 0];
ec=[3 5;1 3;4 6;2 4;3 4;1 2;4 5;3 6;2 3;1 4];
ed=[5 6 9 10; 1 2 5 6; 7 8 11 12; 3 4 7 8; 5 6 7 8; 1 2 3 4; 7 8 9 10; 5 6 11 12; 3 4 5 6; 1 2 7 8];
E = 200 *10^9;
A(1:6) = pi*r(1)^2;
A(7:10) = pi*r(2)^2;
L(1:6) = 9.14;
L(7:10) = 9.14*sqrt(2);
```

2.1.2 剛性矩陣建立

使用 for 迴圈建立 12x12 的剛性矩陣(K)

```
% 開一個空白的剛性矩陣 (stiffness matrix)
K = zeros(12);

% 計算 stiffness matrix
for i=1:10
    C=(node(ec(i,2),1)-node(ec(i,1),1))/L(i);
    S=(node(ec(i,2),2)-node(ec(i,1),2))/L(i);
    k=(A(i)*E/L(i)*[C*C C*S -C*C -C*S;C*S S*S -C*S -S*S;-C*C -C*S C*C C*S; -C*S -S*S C*S S*S]);
    ev=ed(i,:);
    for x=1:4
        for y=1:4
            K( ev(1,x), ev(1,y) ) = K( ev(1,x), ev(1,y) ) + k(x,y);
        end
    end
end
end
```

2.1.3 其他矩陣建立

建立並設定力矩陣(F)的初始值，並利用力、剛性和位移三者之間的關係，得出位移及反作用力。

```
% 建立力矩陣
F(4) = -10^7 ;
F(8) = -10^7 ;

% 計算位移量 (F = KQ)
Q = inv(K(1:8,1:8))*F';
Q(12)=0;

% 計算應力 (stress)
for i=1:10
    C=(node(ec(i,2),1)-node(ec(i,1),1))/L(i);
    S=(node(ec(i,2),2)-node(ec(i,1),2))/L(i);
    stress(i)=(E/L(i))*[-C -S C S]*Q((ed(i,:)));
end

% (optional) compute reactions
R = K(9:12,1:12) * Q;
```

2.2 最佳化程式

2.2.1 主程式 main.m 建立

設定初始起點(r0)、拘束條件、目標值上下限(UB、LB)，利用最佳化函數並設定最後輸出結果

```
clc;
clear;
obj = @object;
nonlcon = @nonlcon;
sol_TenBarTruss = @sol_TenBarTruss;
%-----GA algorithm Demo-----%
r0 = [0.1,0.1];
A = []; % 輸入線性不等式拘束條件的係數矩陣A與B
% A*X<B
b = [];
Aeq = []; % 輸入線性等式的拘束條件係數矩陣Aeq與Beq
beq = []; % Aeq*X=Beq
LB = [0.001;0.001]; % 設計變數的下限
UB = [0.5;0.5]; % 設計變數的上限
options = optimoptions('fmincon','Display','final','Algorithm','sqp'); % 演算法的參數使用內設值
[r,fval,exitflag] = fmincon(obj,r0,A,b,Aeq,beq,LB,UB,nonlcon,options);
[Q, stress, R, K] = sol_TenBarTruss(r);
% x:最佳解
```

2.2.2 副程式 nonlcon.m 建立

設定邊界條件

```
function [g,geq]=nonlcon(r)
[Q, stress ] = sol_TenBarTruss(r);
g(1) = (Q(3,1)^2 + Q(4,1)^2)^0.5-0.02;
g(2) = max(abs(stress))-250*10^6;
geq = [];
end
```

2.2.3 副程式 object.m 建立

設定目標函數的數學式。

```
function f = object(r)
length = 9.14;
density = 7860;
f = (6*r(1)^2+4*r(2)^2*sqrt(2))*pi*length*density;
end
```

2.3 最佳化求解

2.3.1 剛性矩陣

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 7.9110e+09 | 1.7231e+09 | 0 | 0 | -6.1879e+... | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1.7231e+09 | 7.9110e+09 | 0 | -6.1879e+... | 0 | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 7.9110e+09 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 1.7231e+09 | -6.1879e+... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | -6.1879e+... | -1.7231e+... | 7.9110e+09 | 1.7231e+09 | -1.7231e+... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | -6.1879e+... | 0 | -1.7231e+... | 1.7231e+09 | 1.5822e+10 | 0 | 0 | 0 | -6.1879e+... | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... |
| 6 | 0 | 0 | 1.7231e+09 | -1.7231e+... | 0 | 9.6341e+09 | 0 | -6.1879e+... | 0 | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... |
| 7 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | -6.1879e+... | 0 | 0 | 0 | 1.5822e+10 | 0 | -1.7231e+... | 1.7231e+09 | -6.1879e+... | 0 |
| 8 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 0 | 0 | 0 | -6.1879e+... | 0 | 9.6341e+09 | 1.7231e+09 | -1.7231e+... | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -6.1879e+... | 0 | -1.7231e+... | 1.7231e+09 | 7.9110e+09 | -1.7231e+... | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.7231e+09 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 1.7231e+09 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | -6.1879e+... | 0 | 0 | 0 | 7.9110e+09 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1.7231e+... | -1.7231e+... | 0 | 0 | 0 | 1.7231e+09 | 1.7231e+09 |

2.3.2 反作用力矩陣

| | 1 |
|---|------------|
| 1 | -30000000 |
| 2 | 1.0407e+07 |
| 3 | 3.0000e+07 |
| 4 | 9.5932e+06 |

2.3.3 應力矩陣

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|
| 1 | 6.9286e+07 | 1.4647e+07 | -7.2163e+07 | -2.0715e+07 | 1.3209e+07 | 1.4647e+07 | 6.6079e+07 | -6.0913e+07 | 3.7195e+07 | -2.6301e+07 |

2.3.4 位移

| | 1 |
|----|---------|
| 1 | 0.0038 |
| 2 | -0.0189 |
| 3 | -0.0042 |
| 4 | -0.0195 |
| 5 | 0.0032 |
| 6 | -0.0087 |
| 7 | -0.0033 |
| 8 | -0.0093 |
| 9 | 0 |
| 10 | 0 |
| 11 | 0 |
| 12 | 0 |

2.3.5 最佳化結果

| | |
|-----------------|-----------------------|
| A | [] |
| Aeq | [] |
| b | [] |
| beq | [] |
| exitflag | 1 |
| fval | 2.1241e+05 |
| K | 12x12 double |
| LB | [1.0000e-03;1.0000... |
| nonlcon | @nonlcon |
| obj | @object |
| options | 1x1 Fmincon |
| Q | 12x1 double |
| r | [0.3000,0.2663] |
| R | [-30000000;1.0407e... |
| r0 | [0.1000,0.1000] |
| sol_TenBarTruss | @sol_TenBarTruss |
| stress | [6.9286e+07,1.4647... |
| UB | [0.5000;0.5000] |