零空间阻抗控制

一、笛卡尔空间控制

本节讲述刚体机器人的经典笛卡尔阻抗控制理论，关节柔性没有考虑在内。机器人的动力学模型为

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=\tau+\tau_{ext}$$

τ_{ext} 为外部力矩向量。

其中 M 为惯性矩阵，通过函数返回，C 为科里奥利项与离心力项，离心力项可以忽略，科里奥利项通过函数返回，不过在预期速度为 0 的情况下该项会被消掉，τ为施加的关节力矩，g 为重力，可以通过函数返回。

在非冗余情况，笛卡尔空间 x 中描述阻抗控制，采用弹簧-阻尼模型，控制目标为

$$\Lambda_d\ddot{\tilde{x}}+D_d\dot{\tilde{x}}+K_d\tilde{x}=F_{ext}$$

其中$\tilde{x}=x-x_d$

上面的机器人模型被表述在关节坐标 q 中，而期望阻抗表现定义在任务坐标 x 中。出于控制器设计的考虑，我们将机器人模型也表述在任务坐标中。将 $\ddot{q}=J(q)^{-1}(\ddot{x}-\dot{J}(q)\dot{q})$ 和 $\tau_{ext}=J(q)^TF_{ext}$ 代入机器人动力学模型中可以得到

$$M(q)J(q)^{-1}(\ddot{x}-\dot{J}(q)\dot{q})+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=\tau+J(q)^TF_{ext}$$

再将 $\dot{q}=J(q)^{-1}\dot{x}$ 代入上式并将得到的式子左乘 $J(q)^{-T}$ ，我们有

$$J(q)^{-T}M(q)J(q)^{-1}\ddot{x}+J(q)^{-T}C(q,\dot{q})J(q)^{-1}\dot{x}-J(q)^{-T}M(q)J(q)^{-1}\dot{J}(q)J(q)^{-1}\dot{x}$$
$$+J(q)^{-T}g(q)=J(q)^{-T}\tau+F_{ext}$$

这个式子可以写成如下形式

$$\Lambda(x)\ddot{x}+\mu(x,\dot{x})\dot{x}+J(q)^{-T}g(q)=J(q)^{-T}\tau+F_{ext}$$

其中

$$\Lambda(x)=J(q)^{-T}M(q)J(q)^{-1}$$

$$\mu(x,\dot{x})=J(q)^{-T}\left(C(q,\dot{q})-M(q)J(q)^{-1}\dot{J}(q)\right)J(q)^{-1}$$

且有 $q=f^{-1}(x)$ 和 $\dot{q}=J(f^{-1}(x))\dot{x}$ 。从控制的观点看同时使用关节变量 q 和笛卡尔坐标 x 有一些误导性，因为所考虑的状态变量只有 x 和 $\dot{x}$ 。但是直接将一些项用 q 表示出来会使公式显得更加清晰且简单。类似于外部力矩，重力力矩 $g(q)$ 和关节力矩 τ 可以表示为等价的任务空间重力 $F_g(x)=J(q)^{-T}g(q)$ 以及与关节力矩的关系为 $\tau=J(q)^TF_\tau$ 的新的输入向量 F_τ 。因此系统方程最终有如下形式:

$$\Lambda(x)\ddot{x}+\mu(x,\dot{x})\dot{x}+F_g(x)=F_\tau+F_{ext}$$

可以得到上述期望阻抗表现的控制输入 F_τ 由下式给出

$$F_\tau = F_g(x) + \Lambda(x)\ddot{x}_d + \mu(x,\dot{x})\dot{x} - \Lambda(x)\Lambda_d^{-1}(K_d\tilde{x} + D_d\dot{\tilde{x}}) + \left(\Lambda(x)\Lambda_d^{-1} - I\right)F_{ext}$$

这一笛卡尔阻抗控制器实际上通过如下关节力矩 τ 执行

$$\tau = J(q)^T F_\tau = g(q) + J(q)^T\left(\Lambda(x)\ddot{x}_d + \mu(x,\dot{x})\dot{x}\right) - J(q)^T\Lambda(x)\Lambda_d^{-1}(K_d\tilde{x} + D_d\dot{\tilde{x}})$$
$$+ J(q)^T\left(\Lambda(x)\Lambda_d^{-1} - I\right)F_{ext}$$

可以看到在这种情况下对于期望阻抗的塑造也包含了外力 F_{ext} 的反馈。这些力通常通过安装在末端执行器的力-力矩传感器测量。但是一般情况下还存在一些不作用在末端工具而是直接作用于机器人本体的外力，这些力无法通过安装在末端的力-力矩传感器测量，很明显关于这些力的闭环阻抗表现是不一样的。从实际应用的角度来讲，相比于工业机器人，外力作用于本体的的情况在服务机器人上更容易发生，当机器人和人发生碰撞时这一接触并不会只限制在机器人的末端上。对于外力反馈的需要不仅是出于刚度与阻尼表现的要求，还是由于惯性表现 $\Lambda(x)$ 重塑的需要，然而在很多场合这并不是必要的。

外力反馈 F_{ext} 可以通过令期望惯性 Λ_d 与机器人惯性 Λ 相等来避免

$$\Lambda_d = \Lambda(x)$$

在这种情况下期望惯性依赖于位置 x ，此时相应的离心力与科里奥利力项 $\mu(x,\dot{x})$ 也应考虑在期望闭环表现的指定中。这对于引理2的满足以及确保调节控制情况下系统的无源性是很有必要的。此时 $\tilde{x}$ 和 F_{ext} 之间的期望动力学关系为

$$\Lambda(x)\ddot{\tilde{x}} + \left(\mu(x,\dot{x}) + D_d\right)\dot{\tilde{x}} + K_d\tilde{x} = F_{ext}$$

其中 K_d 和 D_d 为对称正定的期望刚度和期望阻尼矩阵。在调节控制的情况下（即 $\dot{x}_d = 0$ ）这个控制目标也被称为柔顺控制问题。

二、零空间控制

对于冗余情况，上述会多一项。不过首先需要推导一个 6x7 的 Jacobi 的右零空间矩阵 Z 如何构造。

当冗余度 $r = n - m$ 为一时，上一部分所要求的可逆子矩阵 $J_m(q)$ 的构造可以避免。此时的矩阵 $\bar{Z}(q) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 是一个行向量 $z(q) = \left[z_1(q) \quad \cdots \quad z_n(q)\right]$ 。考虑矩阵

$$J_z(q) = \begin{bmatrix} J(q) \\ z(q) \end{bmatrix}$$

接下来 $z(q)$ 将会被构造为使矩阵 $J_z(q)$ 可逆的行向量。这时 $J_z(q)$ 的逆可以被写为 $J_z(q)^{-1} = \mathrm{adj}(J_z(q))/\det(J_z(q))$ 。由于 $J_z(q)\mathrm{adj}(J_z(q)) = \det(J_z(q))I$ ，显然 $\mathrm{adj}(J_z(q))$ 的最后一列 $c_n(q)$ 满足条件 $J(q)c_n(q) = 0$ 。由伴随矩阵的定义，列向量 $c_n(q)$ 的元素由 $J_z(q)$ 的第 (n,i) 个代数余子式给出。因为第 (n,i) 个代数余子式仅由子矩阵 $J(q)$ 算出而不依赖于 $z(q)$ ，我们可以选择 $z(q) = c_n(q)^T$ 。因此 $z(q)$ 的元素 $z_i(q)$ 可以由

$$z_i(q) = (-1)^{n+i}\det(J_i(q))$$

算出，其中 $J_i(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是省略了第 i 列的矩阵 $J(q)$ 。

不过作者在此处构造的是一个 1*7 的矩阵，应该找到一个 7*1 的向量，不清楚是否笔误，放上作者的前述论断

接下来首先引入一个概念：零空间基矩阵 $Z(q) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 由 r 个行向量组成，这些行向量线性无关且张成雅可比矩阵 $J(q) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的（右）零空间。

一般情况

正如之前所提的，矩阵 $J(q)$ 是行满秩的，通过重新排列 $J(q)$ 的列，总可以将 $J(q)$ 写成分块的形式

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_m(q) & J_r(q) \end{bmatrix}$$

使得左边部分，即二次矩阵 $J_m(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是（至少是局部）可逆的。进一步让期望零空间基矩阵也相应的拆解为 $Z(q) = \begin{bmatrix} Z_m(q) & Z_r(q) \end{bmatrix}$，其中矩阵 $Z_m(q) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ 和 $Z_r(q) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是待定的，使得 $J(q)Z(q)^T = 0$ 成立并且 $Z(q)$ 行满秩。利用上面的拆解分块形式，条件 $J(q)Z(q)^T = 0$ 可以写为

$$J_m(q)Z_m(q)^T + J_r(q)Z_r(q)^T = 0$$

这个方程的一个可能的解可以由下面这个特殊的选择给出：

$$Z_m(q)^T = -J_m(q)^{-1}J_r(q)$$

$$Z_r(q)^T = I$$

这样通过构造给出了满秩的零空间基矩阵。矩阵 $Z(q)$ 写为

$$Z(q) = \begin{bmatrix} -J_r(q)^T J_m(q)^{-T} & I \end{bmatrix}$$

这个形式的 $Z(q)$ 在很多论文中都有使用，但是显然矩阵 $Z(q)$ 不是唯一的并且可以选为不同的形式。一个重要的修改是用因子 $\det(J_m(q))$ 来缩放 $Z(q)$，即 $\bar{Z}(q) = \det(J_m(q))Z(q)$。注意到 $J_m(q)$ 的逆可以写为

$$J_m(q)^{-1} = \mathrm{adj}(J_m(q))/\det(J_m(q))$$

其中 $\mathrm{adj}(J_m(q))$ 是 $J_m(q)$ 的伴随矩阵，此时新的零空间基矩阵写为

$$\bar{Z}(q) = \begin{bmatrix} -J_r(q)^T \mathrm{adj}(J_m(q))^T & \det(J_m(q))I \end{bmatrix}$$

有了以上零空间后，还需要将其转换为投影矩阵，原文有三种，第一种没考虑机械臂动力学，第三种不需要计算 Z，但是需要算 M 的逆，计算量很大。以下为第二种方法

动力学一致投影

上一节中出现的度量 $G(q)$ 可以任意选取的现象是仅考虑运动学而不考虑动力学的结果。为了将机械臂的动力学考虑在内，我们可以考虑笛卡尔加速度 $\ddot{x}$ 和关节力矩 τ 之间的关系。将机械臂的动力学模型左乘 $J(q)M(q)^{-1}$ 并利用 $\ddot{x}=J(q)\ddot{q}+\dot{J}(q)\dot{q}$ 可以得到

$$\ddot{x}-J(q)\dot{q}+J(q)M(q)^{-1}(C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q))=J(q)M(q)^{-1}(\tau+\tau_{ext})$$

可以看出来一般情况下被 $P_1(q)$ 投影的力矩 τ_0 也会产生末端执行器的加速度 $\ddot{x}$ 。但这并不是我们所期望的，因为笛卡尔阻抗控制器与零空间阻抗控制器不应该互相干扰。不允许从 τ_0 到 $\ddot{x}$ 有直接联通的力矩 τ_0 的投影被称为是动力学一致的。当

$$J(q)M(q)^{-1}P(q)=0 \tag{5}$$

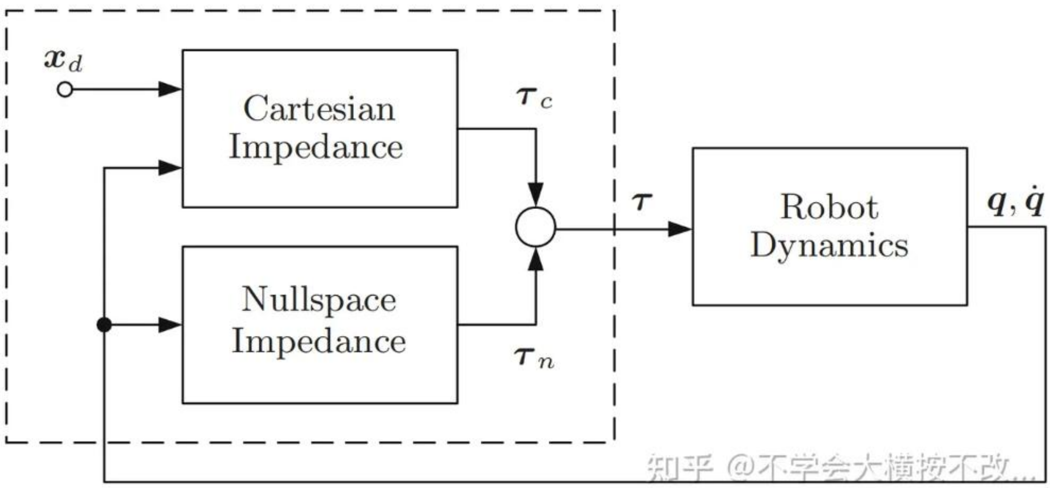
成立时，可以实现动力学一致。从（5）可以看出来用 $M(q)$ 左乘 $P_1(q)$ 所得到的矩阵是动力学一致的。

$$P_2(q)=M(q)P_1(q)$$

但是此时 $P_2(q)$ 不再是投影矩阵，因为它不满足幂等性质 $P(q)P(q)=P(q)$ 。一种更简洁的解法是选择惯性矩阵的逆 $M(q)^{-1}$ 作为关节力矩的度量 $G(q)$ 。这个度量被称为自然度量并且因此可以得到投影

$$P_3(q)=M(q)Z(q)^T(Z(q)M(q)Z(q)^T)^{-1}Z(q) \tag{6}$$

将两者结合，即可得到如下的控制器结构



其中

$$\tau_c=g(q)+J(q)^TF_{imp}$$

$$F_{imp}=\Lambda(x)\ddot{x}_d+\mu(x,\dot{x})\dot{x}_d-K_d\tilde{x}-D_d\dot{\tilde{x}}$$

、

$$\tau_n = P(q)\tau_0$$

$$\tau_0 = -D_n\dot{q} - K_n(q - q_{d,0})$$

三、伪代码

（1） 配置文件或其他地方：设置 Kd,Dd,Kn,Dn

（2） Starting:上电位置=initial_pose=x_d

上电关节角度=q_d0

（3） Update:

1、获取重力 g，Jacobi，惯性矩阵 M

2、函数计算 Z

3、读取 x,x_dot,q,d_dot

4、计算输出力矩

$$\tau = g + J^T[-K_d(x - x_d) - D_d\dot{x}] + MZ^T(ZMZ^T)^{-1}Z[-K_n(q - q_{d0}) - D_n\dot{q}]$$

5、setCommand 关节力矩