Problem 2.

a. $P(R|S) = P(S|R) \cdot P(R) / P(S) = 0.7$

$P(R|\neg S) = P(\neg S|R) \cdot P(R) / P(\neg S) = 0.3.$

$P(\neg S|R) = 1 - P(S|R)$, $P(S) = 0.25$, so $P(\neg S) = 0.75$.

$P(S|R) \cdot P(R) = 0.7 \times 0.25$ and $P(\neg S|R) \cdot P(R) = 0.3 \times 0.75$

$P(S|R) \cdot P(R) + P(\neg S|R) \cdot P(R) = P(R) \cdot (P(S|R) + 1 - P(S|R))$

$= P(R).$

$\therefore P(R) = 0.7 \times 0.25 + 0.3 \times 0.75 = 0.4.$

b. $P(We) = P(S, R, Wo, We) + P(S, \neg R, Wo, We)$.

$+ P(S, R, \neg Wo, We) + P(\neg S, R, Wo, We)$

$+ P(S, \neg R, \neg Wo, We) + P(\neg S, \neg R, Wo, We)$.

$+ P(\neg S, R, \neg Wo, We) + P(\neg S, \neg R, \neg Wo, We)$

$P(S, R, Wo, We) = P(We|Wo, R) \cdot P(Wo, R, S)$

$= P(We|Wo, R) \cdot P(Wo|R) \cdot P(R|S) \cdot P(S)$

$= 0.12 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.25$

$= 0.0147.$

$P(S, \neg R, Wo, We) = P(We|Wo, \neg R) \cdot P(Wo, \neg R, S)$.

$= P(We|Wo, \neg R) \cdot P(Wo|\neg R) \cdot P(1 - P(R|S)) \cdot P(S)$

$= 0.1 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.25$

$= 0.0015$

$P(\neg S, R, WO, WE) = P(WE \mid WO, R) \cdot P(WO, R, \neg S)$

$= P(WE \mid WO, R) \cdot P(WO \mid R) \cdot P(R \mid \neg S) \cdot P(\neg S)$

$= 0.12 \times 0.7 \times 0.3 \times (1 - 0.25)$

$= 0.0189$

$P(S, \neg R, \neg WO, WE) = P(WE \mid \neg WO, \neg R) \cdot P(\neg WO, \neg R, S)$

$= P(WE \mid \neg WO, \neg R) \cdot P(\neg WO \mid \neg R) \cdot P(\neg R \mid S) \cdot P(S)$

$= 0.08 \times (1 - 0.2) \times (1 - 0.7) \times 0.25$

$= 0.0048.$

$P(\neg S, \neg R, WO, WE) = P(WE \mid WO, \neg R) \cdot P(WO, \neg R, \neg S)$

$= P(WE \mid WO, \neg R) \cdot P(WO \mid \neg R) \cdot P(\neg R \mid \neg S) \cdot P(\neg S)$

$= 0.1 \times 0.2 \cdot (1 - 0.3) \times (1 - 0.25)$

$= 0.0105$

$P(M,S)=P(M,S,R,Wo,We)+P(M,S,\neg R,Wo,We)$
$+P(M,S,R,\neg Wo,We)+P(M,S,R,Wo,\neg We)$
$+P(M,S,\neg R,\neg Wo,We)+P(M,S,\neg R,Wo,\neg We)$
$+P(M,S,R,\neg Wo,\neg We)+P(M,S,\neg R,\neg Wo,\neg We)$

$P(M,S,R,Wo,We)=P(M|We)\cdot P(We,Wo,R,S)$
$=P(M|We)\cdot P(We|R,Wo)\cdot P(Wo|R)\cdot P(R|S)\cdot P(S)$
$=0.02\times 0.12\times 0.7\times 0.7\times 0.25$
$=0.000294$

$P(M,S,\neg R,Wo,We)=P(M|We)\cdot P(We,Wo,\neg R,S)$
$=P(M|We)\cdot P(We|\neg R,Wo)\cdot P(Wo|\neg R)\cdot P(\neg R|S)\cdot P(S)$
$=0.02\times 0.1\times 0.2\times(1-0.7)\times 0.25$
$=0.00003$

$P(M,S,R,\neg Wo,We)=P(M|We)\cdot P(We,\neg Wo,R,S)$
$=P(M|We)\cdot P(We|R,\neg Wo)\cdot P(Wo|R)\cdot P(R|S)\cdot P(S)$
$=0.02\times 0.25\times(1-0.7)\times 0.7\times 0.25$
$=0.000525$

$P(M,S,R,Wo,\neg We)=P(M|\neg We)\cdot P(\neg We,Wo,R,S)$
$=P(M|\neg We)\cdot P(\neg We|R,Wo)\cdot P(Wo|R)\cdot P(R|S)\cdot P(S)$
$=0.42\times(1-0.12)\times 0.7\times 0.7\times 0.25$
$=0.04528$

$P(M,S,\neg R,\neg Wo,We)=P(M|We)\cdot P(We,\neg Wo,\neg R,S)$
$=P(M|We)\cdot P(We|\neg R,\neg Wo)\cdot P(\neg Wo|\neg R)\cdot P(\neg R|S)\cdot P(S)$
$=0.02\times 0.8\times(1-0.2)\times(1-0.7)\times 0.25$
$=0.000096$

$= 0.42 \times (1-0.25) \times (1-0.7) \times 0.7 \times 0.25$

$= 0.016538.$

$P(M, S, \cancel{R}, \neg wo, \neg we) = P(M|\neg we) \cdot P(\neg we, \neg wo, \neg R, S)$

$= P(M|\neg we) \cdot P(\neg we|\neg R, \neg wo) \cdot P(\neg wo|\neg R) \cdot P(\neg R|S) \cdot P(\neg S)$

$= 0.42 \times (1-0.08) \times (1-0.2) \times (1-0.7) \times 0.25$

$= 0.023184$

$P(M, S) = 0.023184 + 0.016538 + 0.00567 + 0.000096 + 0.045276 + 0.00026254 + 0.00003 + 0.000294$

$= 0.09135.$

$$P(B, S, R, \neg W_0) = P(B|S, \neg W_0) \cdot P(R, S, \neg W_0)$$
$$= P(B|S, \neg W_0) \cdot P(\neg W_0|R) \cdot P(R|S) \cdot P(S)$$
$$= 0.4 \times (1-0.7) \times 0.7 \times 0.25$$
$$= 0.021$$

$$P(B, S, \neg R, \neg W_0) = P(B|S, \neg W_0) \cdot P(\neg R, S, \neg W_0)$$
$$= P(B|S, \neg W_0) \cdot P(\neg W_0|\neg R) \cdot P(\neg R|S) \cdot P(S)$$
$$= 0.4 \times (1-0.2) \times (1-0.7) \times 0.25$$
$$= 0.024$$

$P(S, B, \neg W_0, \neg R) = P(B|S, \neg W_0) \cdot P(S, \neg W_0, \neg R)$

$= P(B|S, \neg W_0) \cdot P(\neg W_0, R) \cdot P(R|S) \cdot P(S)$

$= 0.4 \times (1-0.7) \times (1-0.7) \times 0.25$

$= 0.009.$

$P(S, B, \neg W_0) = 0.009 + 0.021 = 0.03.$

$P(B, \neg W_0) = P(S, B, \neg W_0, R) + P(\neg S, B, \neg W_0, R)$

$+ P(S, B, \neg W_0, \neg R) + P(\neg S, B, \neg W_0, \neg R).$

$P(\neg S, B, \neg W_0, R) = P(B|\neg S, \neg W_0) \cdot P(\neg W_0|R) \cdot P(R|\neg S) \cdot P(\neg S)$

$= 0.4 \times (1-0.7) \times 0.3 \times (1-0.25)$

$= 0.027.$

$P(\neg S, B, \neg W_0, \neg R) = P(B|\neg S, \neg W_0) \cdot P(\neg W_0|\neg R) \cdot P(\neg R|\neg S) \cdot P(\neg S)$

$= 0.4 \times (1-0.2) \times (1-0.3) \times (1-0.25)$

$= 0.168.$

$P(S|B, \neg W_0) = 0.03 / (0.03 + 0.027 + 0.168)$

$= 0.1333.$