# Les voisins dans le triangle de Pascal

*Maths en Jeans 2025*

Yannick, Mathis, Isaac, Timéo

# FACTORIELLE !

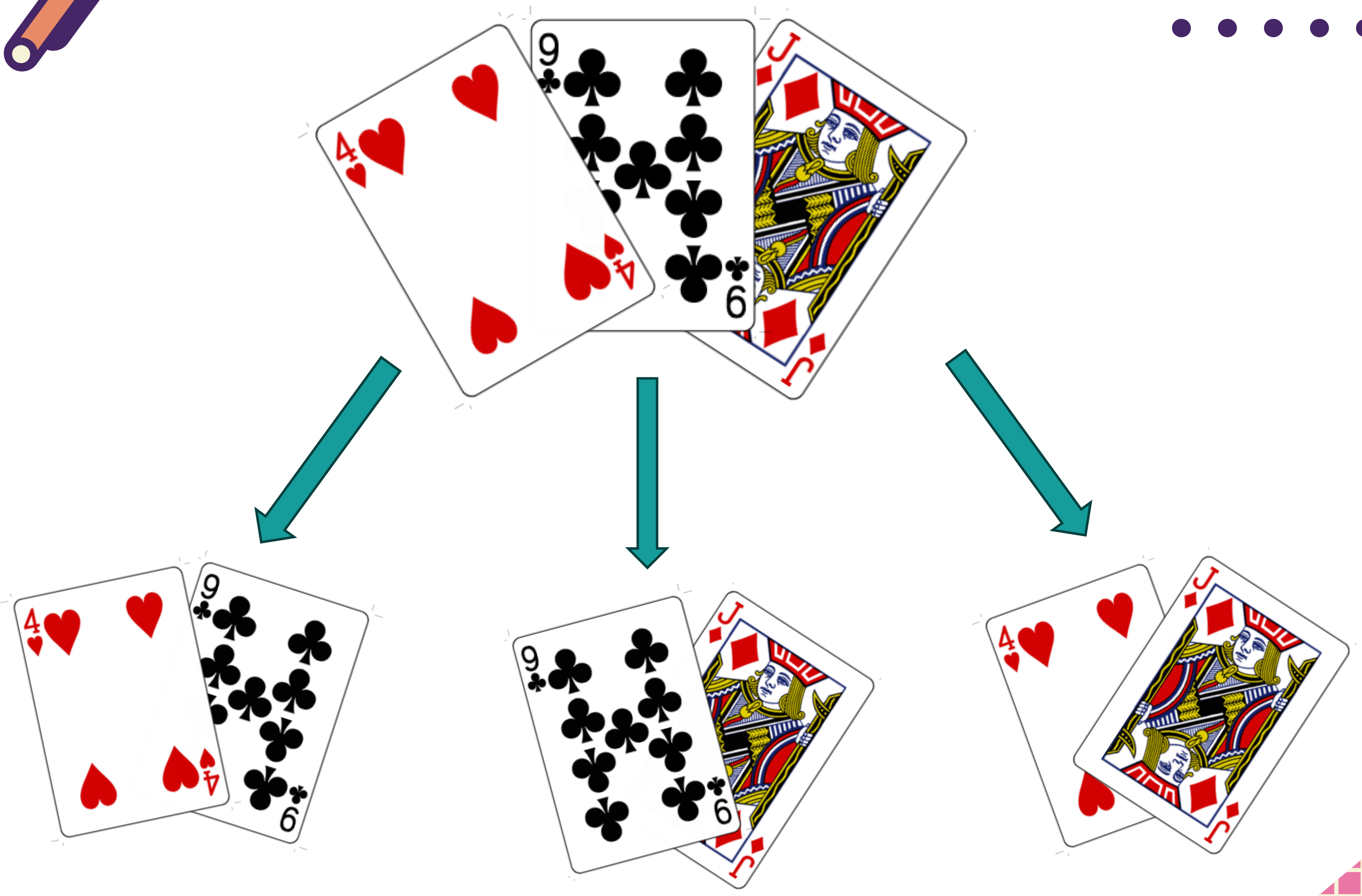
$5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$n\,! = n(n-1)(n-2)\ldots \times 2 \times 1$

$0! = 1$

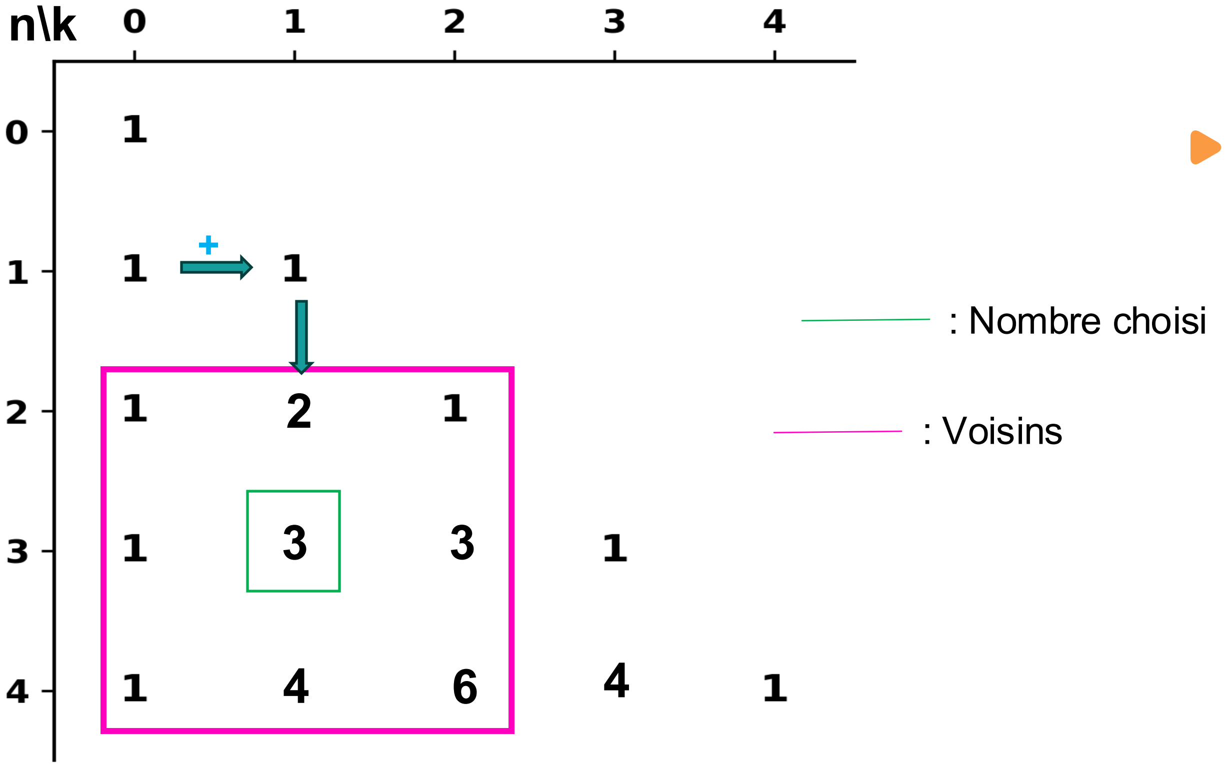
# COEFFICIENT BINOMIAL

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$



$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

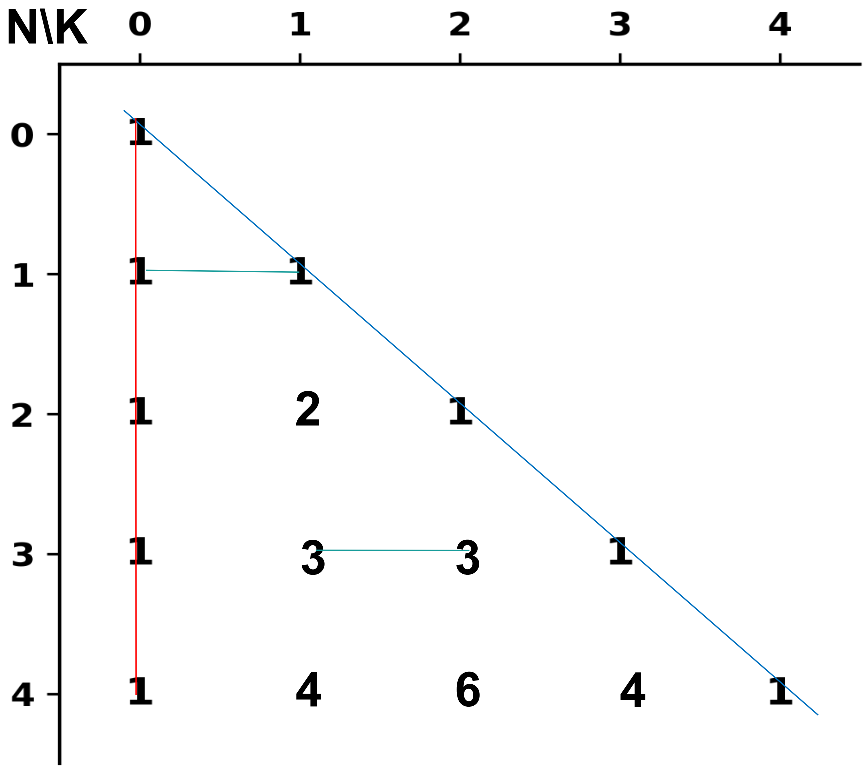
# Triangle de Pascal



# LES DOUBLONS

| n\k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

# VERTICAL, HORIZONTAL ET "HYPOTHENUSE"




Voisins Verticaux : K = 0

Voisins Horizontaux : N impair

1ers Voisins Diagonaux : N = K

# La diagonale ascendante

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | $\boxed{1}$ | | | |
| 2 | $\boxed{1}$ | 2 | 1 | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

k

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | | | | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | | | | |
| 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | | | | |
| 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 | | | |
| 1 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | 1287 | 715 | 286 | 78 | 13 | 1 | | |
| 1 | 14 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | 3003 | 2002 | 1001 | 364 | 91 | 14 | 1 | |
| 1 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 | 5005 | 3003 | 1365 | 455 | 105 | 15 | 1 |

n

# Une expression de *k*

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k-1} \Longleftrightarrow k^2 - (3n+1)k + n^2 + n = 0$$

$$k = \frac{3n+1+\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$$

$$k = \frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$$

Entier

$$k = \boxed{\frac{\boxed{3n+1-\sqrt{\boxed{5n^2+2n+1}}}}{2}}$$

Pair

Carré parfait

$$5n^2 + 2n + 1 = Y^2$$

$$25n^2 + 10n + 5 = 5Y^2$$

$$(5n + 1)^2 + 4 = 5Y^2$$

$$X^2 - 5Y^2 = -4$$

# Équation à résoudre

$$X^2 - 5\alpha^2 = -4$$

# Nouvelle approche

2 ... 14 ... 103 ... 713

$$\frac{14}{2} = 7 \qquad \frac{103}{14} \approx 7,357... \qquad \frac{713}{103} \approx 6,92...$$

Tend vers $6,854$...

# Le nombre d'or

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

$$\varphi^4 = 6.854$$

# Équation à résoudre

$$X^2 - 5Y^2 = -4$$

$$(X + Y\sqrt{5})(X - Y\sqrt{5}) = -4$$

$$\left(\frac{X + Y\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{X - Y\sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi \times \bar{\varphi} = -1$$

$$\varphi^2 \times \bar{\varphi}^2 = 1$$

$$\varphi^3 \times \bar{\varphi}^3 = -1$$

**On a donc:** $$\varphi^{2n+1} \times \bar{\varphi}^{2n+1} = -1$$

# Un théorème en or

Soit X et Y deux nombres entiers,  tels que:

$$X^2 - 5Y^2 = -4$$

Alors, il existe n tel que:

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{2n+1}$$

Exemple:

$$4^2 - 5 \times 2^2 = -4 \qquad et \qquad \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = \varphi^3$$

# Idée de la démonstration

On veut prouver que si X et Y vérifient cette équation $X^2 - 5Y^2 = -4$

Alors $\dfrac{X + Y\sqrt{5}}{2}$ est une puissance de phi, le nombre d'or

On va donc diviser plusieurs fois notre expression par phi, et si c'est effectivement une puissance de phi, on arrivera forcément à 1

# Conséquence du théorème

On obtient facilement X car $\frac{X+Y\sqrt{5}}{2}+\frac{X-Y\sqrt{5}}{2}=X$

D'après le théorème précédent, on peut sommer les puissances impaires de phi

$$X=\varphi^{2n+1}+\bar{\varphi}^{2n+1}$$

Et donc

$$N=\frac{X-1}{5}=\frac{\varphi^{4n+1}+\bar{\varphi}^{4n+1}-1}{5}$$

Exemple:

$$\varphi^5 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi^5 + \bar{\varphi}^5 = 11 \qquad n = 2$$

Mais

$$\varphi^7 = \frac{29 + 13\sqrt{5}}{2} \qquad 29 - 1 \quad \text{n'est pas un multiple de 5}$$

# La suite de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

# Petite simplification

$$N = \frac{\varphi^{4n+1} + \bar{\varphi}^{4n+1} - 1}{5} = F_{2n}F_{2n+1}$$

$$k = F_{2n}F_{2n-1}$$

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1}F_{2n} - 1 \\ F_{2n}F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2n}F_{2n+1} \\ F_{2n-1}F_{2n} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\binom{1}{1} = \binom{2}{0} = 1$$

$$\binom{F_4 F_5 - 1}{F_3 F_4} = \binom{F_4 F_5}{F_3 F_4 - 1} \Leftrightarrow \binom{14}{6} = \binom{15}{5} = 3003$$

$$\binom{103}{40} = \binom{104}{39} = \textbf{Grand nombre}$$

# Merci !

# Pascal dans les réels ?!

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$