Premiers cas

Cas vertical : la première colonne (k = 0) est constituée que de 1. On trouve donc une infinité de doublons. En dehors de cette colonne, on somme des termes positifs non nuls en obtenir un suivant. Aucune chance que d'autres termes soient égaux.

Cas horizontal : Nous avons remarqué que les lignes numérotés impairs (les n impairs) possédaient une symétrie au milieu, et donc des coefficients égaux. Plus précisément, on peut utiliser la formule de symétrie pour s'assurer qu'il s'agisse bien d'une symétrie.

Diagonale descendante : la diagonale n = k est une diagonale ne comportant que des 1. On trouve bien une infinité de doublons en diagonale descendante.

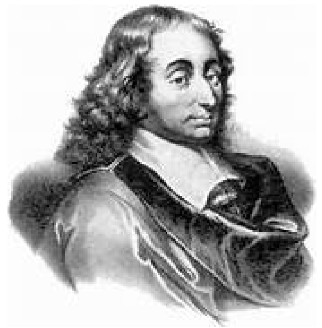
Un des problèmes que nous avons rencontré est de s'assurer à ce qu'on ait oublié aucun autre doublon dans chacun des cas. Pour cela, nous avons décidé de procéder de manière algébrique, en posant les équations correspondant à chaque cas à l'aide des coefficients binomiaux.

Une construction récurrente

n\k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Chaque terme est la somme des deux termes au-dessus de lui.

Formule de Pascal



$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

La formule de Pascal nous donne un lien entre le triangle et les coefficients binomiaux : ils traduisent la même relation de récurrence. On peut ainsi numéroter chaque ligne par un entier n, chaque colonne par un entier k et ainsi définir le triangle avec des coefficients binomiaux.

Γ(x) Γ(x)

Doublons dans le triangle de Pascal

n\k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Dans la célèbre construction du triangle de Pascal, certains coefficients sont égaux deux à deux. On retrouve des doublons à l'horizontal, à la verticale ou encore en diagonal.

En existe-il une infinité ? Si oui, lesquels ? Comment peut-on tous les trouver ?

Extension aux réels ?!

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = (-1)^\beta \cdot \binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\sin(\beta\pi)}{\sin(\alpha\pi)} \cdot \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

Γ(x) Γ(x)

Une solution élégante pour la diagonale montante

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k-1}$$

Toutes les solutions de ce cas sont données par :

$$\binom{F_{2i}F_{2i+1}-1}{F_{2i}F_{2i-1}} = \binom{F_{2i}F_{2i+1}}{F_{2i}F_{2i-1}-1}$$

Fibonacci dans le triangle ?

$$\forall i \in \mathbb{N},\ F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

φ avec $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{cases}$

Un Théorème en or

Si X et Y sont des entiers positifs vérifiant cette équation:

$$X^2 - 5Y^2 = -4$$

Alors : $\dfrac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{2n+1}$

Par exemple :

$4^2 - 5 \times 2^2 = -4$ *et* $\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2} = \varphi^3$

1

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

université PARIS-SACLAY

Le plan arithmétique de Pascal

1								1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435							
-7	1							1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716								
21	-6	1						1	-6	21	-56	126	-252	462									
-35	15	-5	1					1	-5	15	-35	70	-126										
35	-20	10	-4	1				1	-4	10	-20	35											
-21	15	-10	6	-3	1			1	-3	6	-10												
7	-6	5	-4	3	-2	1		1	-2	3													
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1														
								1															
								1	1														
								1	2	1													
								1	3	3	1												
								1	4	6	4	1											
								1	5	10	10	5	1										
								1	6	15	20	15	6	1									
								1	7	21	35	35	21	7	1								
								1	8	28	56	70	56	28	8	1							
								1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
								1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
								1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
								1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
								1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
								1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
								1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

k

n

Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{3}{2} = 3$$