Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Les doublons dans le triangle de Pascal

Année 2024-2025

Mathis Crevet, Isaac Da Costa Teixeira, Yannick Touré

Établissement(s) : Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Saclay
Chercheur·Chercheuse(s) : Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

## 1. Introduction

### 1.1. Présentation du problème

En France, on donne le nom de Triangle de Pascal à la figure suivante (étant connue en Chine depuis le début de notre ère), où chaque nombre est la somme de deux de ses voisins : son voisin du dessus, et le voisin à gauche du voisin de dessus.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 + | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

*Construction du nombre* 10 *dans le Triangle de Pascal*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

*Tous les voisins de* $\binom{5}{2}$

Il arrive que deux voisins aient la même valeur, et c'est là tout l'enjeu du problème, déterminer quand exactement cela se produit.

### 1.2. Résultats

Il y a 4 configurations possibles pour des cases adjacentes. En effet, 2 voisins peuvent être alignés :

— horizontalement
— verticalement
— diagonalement vers le haut
— diagonalement vers le bas

Nous avons traité le problème au cas par cas pour arriver à une solution.

Dans le cas de deux voisins horizontaux, il arrive une ligne sur deux que ces derniers aient la même valeur. L'égalité est observée exactement sur les deux voisins du milieu.

Pour les voisins verticaux, l'égalité n'est observée qu'au niveau de la colonne des 1 à gauche du triangle. Étant donné qu'on effectue la somme de deux cases pour en obtenir une troisième, il faut nécessairement qu'un des deux membres de la somme soit nul pour conserver le même résultat, et c'est exactement ce qui se passe ici, on s'imagine une colonne invisible de zéros en dehors du triangle, et le calcul effectué devient $1+0=1$.

C'est d'ailleurs exactement le même raisonnement pour les voisins alignés diagonalement vers le bas. Ceux-ci ne sont égaux uniquement sur "l'hypoténuse" du triangle. Une fois de plus, on imagine une ligne de zéros invisibles présente à l'extérieur du triangle.

Pour le dernier cas, celui des voisins sur la diagonale ascendante, il existe une formule permettant, à partir de deux voisins égaux, de trouver les deux voisins les plus proches. Le ratio de la distance séparant deux couples de voisins successifs étant constant. et égal à la puissance 4 nu nombre d'or.

## 2. Explication détaillé des différentes configurations

Dans le triangle de Pascal, chaque nombre représente le nombre de façons de choisir des éléments d'un ensemble.

Par exemple, le nombre en position $(n,k)$ correspond au nombre de façons de choisir $k$ éléments parmi $n$, ce qui est appelé un *coefficient binomial*, noté $\binom{n}{k}$ (et lu « $k$ parmi $n$ »).

Il existe une formule pour calculer manuellement un coefficient binomial.

**Théorème 1.** *Soient $k,n\in\mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $k\leqslant n$. Alors,*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Cette formule nous a été très utile pour justifier rigoureusement nos résultats précédents.

*Remarque.* Le principe derrière la construction du triangle est une conséquence de la formule précédente

*Proposition* (Relation de Pascal). *Soient $k,n\in\mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $0<k<n$. Alors,*

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

### 2.1. Analyse des éléments sur une même ligne

Commençons par identifier les conditions sous lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même ligne sont égaux. Pour cela, examinons l'égalité $\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}$ pour tout entier $k,n\in\mathbb{N}$ vérifiant $n>0$.

Soient $k,n\in\mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n>0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\\
&\iff \frac{1}{k!\,(n-k)!}=\frac{1}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\\
&\iff \frac{1}{k!\,(n-k-1)!}\cdot\frac{1}{n-k}=\frac{1}{k!\,(n-k-1)!}\cdot\frac{1}{k+1}\\
&\iff \frac{1}{n-k}=\frac{1}{k+1}\\
&\iff n-k=k+1\\
&\iff n=2k+1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Il en résulte donc que $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ lorsque $n:=2k+1$.

*Remarque.* D'après l'égalité 1, $n$ est un entier impair. En ré-arrangeant l'égalité $n = 2k+1$, nous obtenons : $k = \frac{n-1}{2}$ (ou encore que $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Cela met en évidence que pour tout $n$ impair, le triangle de Pascal admet deux voisins égaux sur la même ligne si $k$ est situé au milieu de la ligne.

### 2.2. Analyse des éléments dans une même colonne

Identifions ensuite les conditions qui rendent deux coefficients binomiaux adjacents situés dans une même colonne égaux. Pour cela, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tous les entiers $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > 0$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\
&\iff \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{n-k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&\iff \frac{n}{n-k} = 1 \\
&\iff n = n-k \\
&\iff k = 0
\end{aligned}$$

Or, par définition, $\binom{n}{0} = 1$ : il en résulte donc que la première colonne du triangle, étant toujours composé de 1, est la seule manière d'avoir deux voisins égaux dans la même colonne.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $k = 0$.

### 2.3. Analyse des éléments sur une diagonale descendante

Déterminons les conditions dans lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même diagonale descendante sont égaux. Pour ce faire, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entiers $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k-1)!} \\
&\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
&\iff \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
&\iff \frac{n}{k} = 1 \\
&\iff n = k
\end{aligned}$$

Or, par définition, $\binom{n}{n} = 1$ : il en résulte donc que les seuls voisins sur une même diagonale descendante se situe sur « l'hypoténuse » du triangle, étant toujours composé de 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $n, k \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 < n = k$.

### 2.4. Analyse des éléments sur une diagonale ascendante

Pour ce dernier cas, nous ne trouvions pas directement de réponse concluante, nous avons donc commencé par écrire un programme informatique pour trouver quelques couples égaux, car cette configuration est extrêmement rare. Le principe du programme est très simple, il calcule chaque coefficient binomial et le compare au voisin en bas à gauche. Nous obtenons donc une liste des positions des premiers voisins égaux.

En voyant cette suite de nombres, notre premier réflexe a été de vérifier s'il n'y avait pas un facteur commun entre ceux-ci et effectivement, le ratio de deux lignes ou deux colonnes successives semble converger vers une certaine valeur, (environ 6.85). Par pure coïncidence, nous avons déterminé que cette valeur correspondait au nombre d'or (phi) à la puissance 4. À ce moment-là, ce n'était alors qu'une vague intuition.

Ensuite, nous avons procédé comme les autres cas en partant de l'équation avec les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$$

En développant puis en simplifiant, nous obtenons cette équation :

$$k^2 - 3kn - k + n + n^2 = 0$$

dont on exprime la racine :

$$k = \frac{3n + 1 - \sqrt{5n^2 + 2n + 1}}{2}$$

Comme nous travaillons sur des entiers, il existe une condition sur le terme sous la racine qui doit être un carré parfait.

$$5n^2 + 2n + 1 = Y^2$$

Nous nous rapportons donc à une équation diophantienne à deux inconnues entières et en effectuant un changement de variable, nous obtenons finalement une équation dite de Pell-Fermat :

$$X^2 - 5Y^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X + Y\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{X - Y\sqrt{5}}{2}\right) = -4$$

Avec $X = 5n + 1$ (on rappelle que n correspond au numéro d'une ligne du triangle) Il suffit alors de trouver tous les couples d'entiers positifs solutions de cette équation.

**Lemme 1.** *Les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ sont solution de l'équation $(\frac{a+b\sqrt{5}}{2})(\frac{a-b\sqrt{5}}{2}) = \pm 1$ si et seulement si il existe un entier n tel que $\frac{a+b\sqrt{5}}{2} = \varphi^n$. Avec $\varphi$ le nombre d'or*

**Corollaire 1.** *Avec ce lemme, ainsi que le fait que $X \equiv 1[5]$, on peut considérer le couple (X,Y) $\in \mathbb{N}^{*2}$ solution de l'équation $X^2 - 5Y^2 = -4$ alors :*

$$\frac{X+Y\sqrt{5}}{2}=\varphi^{4m+1} \qquad et \qquad \frac{X-Y\sqrt{5}}{2}=\bar{\varphi}^{4m+1}.m\in\mathbb{N}$$

(X,Y) étant solution, nous avons donc, en sommant les 2 expressions, nous obtenons une expression pour X, et donc aussi de n, en fonction de puissances de $\varphi$ et $\bar{\varphi}$ :

$$\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}=X$$

(Rappel que $X=5n+1$)

$$\Leftrightarrow 5n+1=\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1}{5}(\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}-1), m\in\mathbb{N}^*.$$

*Remarque.* pour ce problème, nous avons $m\in\mathbb{N}^*$ car pour m = 0, nous trouvons n = 0, nous serions donc en train d'étudier

$$\binom{-1}{k}=\binom{0}{k-1}, k\in\mathbb{N}$$

Ce qui n'est pas défini $\forall k\in\mathbb{N}$... pour l'instant.

Nous pouvons aussi soustraire les 2 expressions, qui nous donnent $Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{4m+1}-\bar{\varphi}^{4m+1})$. En sachant que $k=\frac{3n+1-Y}{2}$ en remplacent l'expression de Y, ainsi que développer grâce à des propriétés de $\varphi$ et $\bar{\varphi}$. Nous finissons par trouver :

$$k=\frac{1}{5}(\varphi^{4m-1}+\bar{\varphi}^{4m-1}+1), m\in\mathbb{N}^*$$

### 2.4.1 Lien avec la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (notée $F_n$), est la suite définie par récurrence d'ordre 2, telle que

$$\begin{cases} F_0=0 \\ F_1=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}.$$

Cette dernière possède une expression sous forme explicite $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^n-\bar{\varphi}^n)$$

Avec cette définition, nous pouvons encore une fois utiliser les propriétés algébriques de $\varphi$ et $\bar{\varphi}$. pour obtenir

$$\Leftrightarrow \boxed{n=F_{2m}F_{2m+1}}, m\in\mathbb{N}^*.$$

et

$$\Leftrightarrow \boxed{k=F_{2m}F_{2m-1}}, m\in\mathbb{N}^*.$$

## 2.5. Conclusion sur les entiers

**Nous pouvons donc affirmer que les seuls voisins diagonaux montants du triangle de Pascal sont dans une ligne correspondant au produit de n'importe quel terme pair (non nul) de la suite de Fibonacci avec le terme suivant, et en colonne le produit de ce même terme pair mais avec le terme précédent.** Dans le cadre de notre problème, on peut donc écrire :

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{N}^*, \binom{F_{2m}F_{2m+1}-1}{F_{2m}F_{2m-1}}=\binom{F_{2m}F_{2m+1}}{F_{2m}F_{2m-1}-1}}$$

# 3. Le cas des réels

## 3.1. Introduction

Après avoir résolu notre problème sur les entiers naturel on se demande naturellement comment généraliser ce résultat aux entiers négatifs.
C'est ce que l'on va entreprendre ici.
On énoncera quelques résultats importants sur les réels mais on s'attardera de manière prononcée sur les entiers étant donné qu'on peut se les représenter dans un plan.

## 3.2. Préliminaires

Il est bon de rappeler certaines propriétés que nous utiliserons par la suite pour les démonstrations.

### 3.2.1 Fonction gamma

-On définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$$

On utilisera cette fonction comme généralisation de la factorielle aux réels non négatif et non nuls grâce à une propriété classique de cette intégrale. En effet en intégrant par partie :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad \text{(1)}$$

On pourra en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

- On peut de plus prolonger la fonction gamma à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.Malheureusement, on ne peut pas prolonger Gamma à $\mathbb{Z}^-$ car on rencontre des pôles.

Le prolongement s'effectue en utilisant la propriété $_{(1)}$ :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

En itérant cette propriété on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i})\Gamma(x+n+1) \qquad \text{(2)}$$

On peut donc s'assurer de l'existence d'un $n_0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \exists n \geq n_0, \quad x+n+1 > 0$$

Par conséquent on peut prolonger la fonction Gamma, cette fonction sera alors toujours définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ mais pas jusqu'à $\mathbb{Z}^-$, car ce prolongement admet une forme indéterminée sur les entiers négatifs, y compris en 0.

On peut étudier le comportement de la fonction lorsque l'on approche d'un entier négatif.
D'après le prolongement :

$$\lim_{x \to -n} \Gamma(x) = \lim_{x \to -n} (\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i})\Gamma(x+n+1) = \pm\infty$$

Dû à la divergence du terme en $n$ du produit.

### 3.2.2 Prolongement du coefficient binômial.

On notera à partir de maintenant que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

On considère en effet la fonction $\Gamma(x+1)$ comme un prolongement aux réels de $x!$.

### 3.2.3 Rappel sur les factorielles

Il est bon de rappeler quelques propriétés que nous utiliserons.

$$(i) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

$$(ii) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n!} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Notre objectif sera à partir de maintenant de construire pour tout couple $(\alpha, \beta)$ et notamment lorsque ceux-ci sont des entiers négatifs, un coefficient binômial $\binom{\alpha}{\beta}$

## 3.3. Construction d'un coefficient binomial pour chaque $\alpha$ et $\beta$

On propose les 3 points suivants :

— $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha \geq 0, \beta < 0) \vee (\beta > \alpha \geq 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 0$

— $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha \leq 0, \beta \geq 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\beta}\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$ Première identité

— $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha < 0, \beta < 0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ Seconde identité

En outre pour chacun des points ci-dessus on ramène notre coefficient binômial d'entiers à un coefficient binômial déjà présent dans le triangle de Pascal.

### 3.3.1 Premier point

On se donne deux entiers quelconques $\alpha$ et $\beta$ avec pour conditions que $\alpha$ soit positif et que $\beta$ soit strictement négatif.

Ainsi le coefficient binômial $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$ converge vers 0, en effet seul $\Gamma(\beta+1)$ n'est pas défini par l'intégrale et diverge donc.

De plus dans le cas où cette fois-ci c'est la condition $\beta > \alpha \geq 0$ qui s'applique à nos deux entiers alors c'est au tour de $\Gamma(\beta-\alpha+1)$ de diverger.

### 3.3.2 Première identité

On se donne deux entiers $\alpha$ et $\beta$ avec pour conditions que $\alpha$ soit strictement négatif et que $\beta$ soit strictement positif.
De cette manière ce sera $\Gamma(\alpha+1)$ au numérateur et $\Gamma(\alpha-\beta+1)$ au dénominateur n'étant pas défini par l'intégrale. On instaure alors $d\alpha$ un réel voué à tendre vers 0 de tel sorte que $\alpha + d\alpha$ est un réel non entier.

On considère alors le coefficient $\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}$ dont on prolongera $\Gamma(\alpha+d\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha+d\alpha-\beta+1)$ nous donnant l'égalité :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\prod_{i=0}^{-\alpha-1} \frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\Gamma(d\alpha+1)(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-1} \alpha+d\alpha-\beta+1+k)\frac{1}{\Gamma(d\alpha+1)}$$

On peut alors sortir les derniers termes de chaque produits nous donnant la quantité $\frac{d\alpha}{d\alpha} = 1$. On peut alors faire tendre $d\alpha$ vers 0 sans création d'une indéterminé. Tous les termes restant dans le produits sont donc négatifs mais sont également des entiers naturel en valeur absolue, on fera donc apparaître des factorielles et donc un coefficient binômial déjà présent dans le triangle de pascal. Précisément :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+1+i})(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-2}\alpha-\beta+1+k) = (-1)^{\beta}\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$$

De plus si $\beta$ est nul alors $\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\beta-\alpha-1}{0}$ et si alpha est nul alors $\binom{0}{\beta} = 1$ si $\beta$ l'est aussi et 0 sinon (Par divergence de $\Gamma(-\beta+1)$). Ceci est également le cas pour $\binom{\beta-1}{\beta}$ qui vaut 0 là aussi par divergence de $\Gamma(\beta-1-\beta+1)$ lorsque $\beta$ est non nul.

De manière générale en prenant $\alpha$ et $\beta$ des réels non nuls non entiers satisfaisant les mêmes conditions et en écrivant le rapport $\frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\sin(\pi(\alpha-\beta))}{\sin(\pi\alpha)}$ par la formule des compléments. On peut de plus retrouver le résultat sur les entiers en réintroduisant $d\alpha$ et en utilisant les formules d'additions.

### 3.3.3 Seconde identité

Soit $\alpha$ et $\beta$ des entiers strictement négatifs avec pour conditions $\alpha$ et $\beta$ des entiers négatifs.
On introduit cette fois-ci $d\beta$ en plus de $d\alpha$. Si on choisit de plus de que $\alpha \geq \beta$ alors on doit prolonger uniquement $\Gamma(\alpha+d\alpha+1)$ et $\Gamma(\beta+d\beta+1)$ de tel sorte que (après sorti du dernier terme des produits) :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \frac{\Gamma(d\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+d\alpha-d\beta+1)\Gamma(d\beta+1)}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\cdot(\prod_{i=0}^{-\beta-2}\beta+d\beta+1+i)$$

On va donc faire tendre successivement $d\alpha$ puis $d\beta$ ou vice versa pour obtenir que :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot(-1)^{-\alpha-\beta}\cdot\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

Maintenant que le lien entre $\binom{\alpha}{\beta}$ et $\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ est établi on peut de nouveau faire appel, dans le cadre générale où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels satisfaisant les mêmes conditions qu'en 3.0, à la formule des compléments.

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

On peut dès lors retrouver la formule ci-dessus sans la conditions $\alpha \geq \beta$

Malheureusement, la quantité $\frac{d\beta}{d\alpha}$ freine notre avancée. Pour régler ce problème on doit généraliser une propriété de symétrie du triangle de Pascal.
En effet quel que soit des réels non entier il suffit d'écrire sous forme de fonction $\Gamma$ les coefficients $\binom{\alpha}{\beta}$ et $\binom{\alpha}{\alpha-\beta}$ pour s'apercevoir d'une égalité.

Ainsi, sous nos conditions $\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \binom{\alpha+d\alpha}{\alpha-\beta+d\alpha-d\beta}$ Si on ajoute de plus la condition que $\alpha \geq \beta$ alors on peut appliquer le deuxième point pour s'apercevoir que, après avoir fait tendre $d\alpha$ et $d\beta$ vers 0 :

$$\binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{\alpha-\beta} = (-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

Dont la dernière égalité vient de nouveau de cette propriété de symétrie.

Dans le cas où nous n'avons pas $\alpha \geq \beta$ alors $\binom{-\alpha-1}{-\beta-1} = 0$, la limite $\frac{d\beta}{d\alpha}$ devant être borné, on choisira donc $\binom{\alpha}{\beta} = 0$

## 3.4. Symétrie généralisée

Nous venons de voir la première symétrie celle qui transforme le coefficient $\binom{\alpha}{\beta}$ en le couple $\binom{\alpha}{\alpha-\beta}$ dont le cas d'égalité nous donne $\beta = \alpha - \beta$ soit $\alpha = 2\beta$.

Les deux derniers points que l'on a exposé mettent en valeur d'autres symétries.

### 3.4.1 Symétrie de la première identité

On remarque que la transformation qui associe le coefficient $\binom{\alpha}{\beta}$ en le coefficient$\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$ est une symétrie d'ordre deux, il suffit d'appliquer deux fois cette transformation pour retomber sur l'identité. Le cas d'identité de celle-ci nous donne que $\alpha = \beta/2 \ -1/2$
En réalité cette symétrie est alterné avec une antisymétrie. En effet, la première identité indique qu'il y a égalité au signe prêt de $(-1)^{\beta}$, la symétrie est donc une antisymétrie lorsque $\beta$ est impair. Cette symétrie ne fonctionne cependant que sous les conditions d'application de la première identité.

### 3.4.2 Symétrie de la seconde identité

On remarque que la transformation qui associe le coefficient $\binom{\alpha}{\beta}$ au couple $\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ est une symétrie d'ordre 2, il suffit d'appliquer 2 fois cette transformation pour retomber sur l'identité ($\binom{\alpha}{\beta} \to \binom{-\beta-1}{-\alpha-1} \to \binom{\alpha}{\beta}$) Le cas d'identité de celle-ci nous donne que $\alpha = -\beta \ -1$.
De la même façon que précédemment, cette symétrie est une antisymétrie si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont de parité différente. Cette symétrie n'est fonctionnelle qu'aux cas d'applications de la seconde identité

Finalement, si on se place dans un plan, les droites formées par les symétries : $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $y = 2x$ et $y = -x - 1$
Sont concourantes au point $(-1/3, -2/3)$ s'associe dans notre plan au coefficient binomial $\binom{-2/3}{-1/3} \approx 1.4609984$, ce qui est très proche du minimum atteint de la fonction Gamma (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui est atteint en 1.4616321.

## 3.5. Formule de Pascal

On peut s'apercevoir que la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ reste presque toujours vrais sur les entiers relatifs. Prenons $\alpha$ et $\beta$ de tels entier, alors :

$$\binom{\alpha-1}{\beta-1}+\binom{\alpha-1}{\beta} = \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\alpha\beta\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{(\alpha-\beta)\alpha\Gamma(\alpha)}{\alpha\Gamma(\beta+1)(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \binom{\alpha}{\beta}$$

On doit donc prendre $\alpha \neq \beta$ et tout deux différents de 0.
Cependant, on peut remarquer que grâce à tous nos coefficients binomiaux nulles (dû à la seconde identité et au premier point) la formule devient fausse uniquement au cas limite en $\binom{0}{0}$ i.e. quand le coefficient n'est plus nul et donc lorsque $\alpha = \beta = 0$. En résumé la formule est fausse uniquement pour $\binom{-1}{-1} + \binom{-1}{0} \neq \binom{0}{0}$.

## 3.6. Voisin et anti-voisin

On va maintenant conclure notre problème initial. Pour chaque coefficient binômial de notre triangle généralisé on s'est ramené au cas du triangle classique de Pascal, on pourra donc réutilisé nos formules déjà prouvé plus tôt dans la partie des entiers. On montrera des inégalités au signes près dû au facteur $(-1)^x$ apparaissant dans nos identités. On dira donc que deux voisins sont des anti-voisins égaux lorsque ceux-ci sont égaux en valeur absolue mais différents sinon. Lorsque deux voisins sont égaux se seront des voisins égaux. Pour l'identification entre ces deux voisins, il suffira de comparer les deux signes $(-1)^x$ donnés par la symétrie.

### 3.6.1 Suite de Fibonacci aux entiers

On définit une extension de la suite de Fibonacci classique aux entiers relatifs de la même façon que sur les entiers naturel.
On aura par exemple $F_{-1} + F_0 = F_1$ ou bien $F_{-2} + F_{-1} = F_0$.
On peut démontrer par récurrence double que pour un entier naturel $n$, $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$

### 3.6.2 Formules généralisées

On rappelle que :

— Voisins verticaux : $k = 0$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (1)

— Voisins horizontaux : $n = 2k + 1$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ (2)

— Voisin en diagonal descendante : $n = k$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ (3)

— Voisin en diagonal montante : $n = F_{2m}F_{2m+1}$ et $k = F_{2m}F_{2m-1}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et pour le cas $\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$ (4)

Pour chacun des cas non triviaux (où les coefficients ne sont pas nuls) on utilisera respectivement la première ou la seconde identité, cela nous ramenant au cas du triangle de Pascal.

— Sous les conditions de la première identité ($\alpha \leq 0, \beta \geq 0$) :

Voisins verticaux si et seulement si $\beta = 0$ par (1), ce sont des voisins égaux
Voisins horizontaux si et seulement si $\alpha = -1$ par (3), ce sont des anti-voisins égaux
voisins dans la diagonal descendante si et seulement si$\alpha = -\beta - 2$ par (2), ce sont des anti-voisins égaux
Dans le cas de la diagonal montante, il n'existe pas de solutions, on résonne par équivalence après application de la propriété de symétrie nous sur l'égalité $\binom{\beta-\alpha-2}{\beta} = \binom{\beta-\alpha}{\beta+1}$ nous donnant le une équation de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = (-\alpha - 2)(3\alpha + 2)$. ainsi les seules valeurs entières de $\alpha$, sont $-1$ et $-2$ qui ne donne suite que pour $-2$ avec pour seul $\beta$ valable 0, L'égalité est vérifié uniquement pour $\binom{0}{0} = \binom{-1}{0}$, ce sont des anti-voisins égaux

— Sous les conditions de la seconde identité $\alpha \leq -1, \beta \leq -1$ :

Voisins verticaux si et seulement si $\beta = 2\alpha + 2$ par (2), ce sont des anti-voisins égaux
Voisins horizontaux si et seulement si $\alpha = -1$ par (1), ce sont des anti-voisins égaux
voisins dans la diagonal descendante si et seulement si $\alpha = \beta - 1$ par (2), ce sont des voisins égaux
Voisins dans la diagonal montante si et seulement si $\beta = F_{-2m}F_{-2m-1} - 2$ et $\alpha = F_{-2m}F_{-2m+1} - 2$, par (4), ce sont des voisins égaux

En sommes pour chacun des coefficients binomiaux à critères entiers, on saura dire si celui-ci est égal ou opposé à l'un de ses voisins.

# 4. Conclusion

# A. Annexe

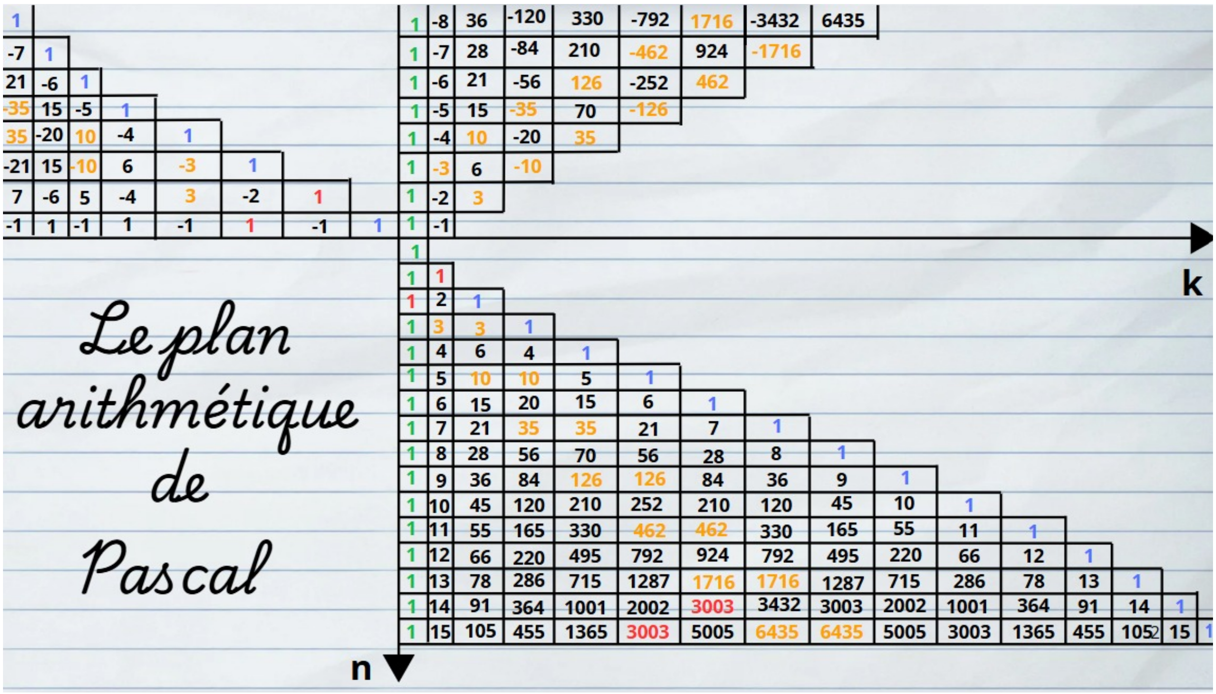


FIGURE 1 – Plan généralisé ou arithmétique de Pascal (Attention, le point (0,0) est le premier 1 de l'axe des n en dessous de l'axe des k et tous les coefficients nuls sont représentés par des espaces vides)