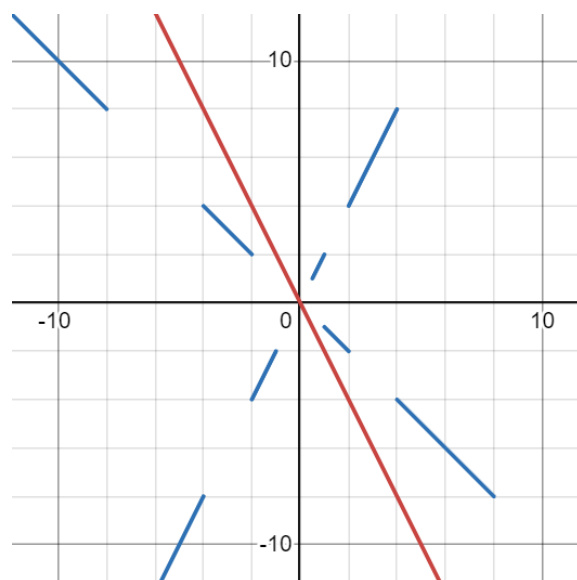


# Désitération

Nour Berakdar, Victorin Brunel, et Jian Dai

Novembre 2023 - Septembre 2024



## Introduction

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ f = g$ ?

**Définition 0.1.** Dans la suite du document, nous dirons que  $f : D \rightarrow A$  est une *racine carrée fonctionnelle* de  $g : D \rightarrow B$  si

$$f \circ f = g$$

Autrement dit, si  $\forall x \in D, f(f(x)) = g(x)$ .

Nous allons alors nous poser plusieurs questions :

- Y a-t-il une condition nécessaire et suffisante à l'existence de solutions ?
- Existe-t-il des fonctions  $g$  qui n'admettent aucune racine carrée fonctionnelle ?
- Les racines carrées fonctionnelles d'une fonction sont-elles uniques ?
- Peut-on construire des solutions  $f$  continues ?

Dans ce qui suit, nous essayerons de donner des réponses à ces questions.

## 1 Généralités

Considérons pour le moment le cas des fonctions  $g : E \rightarrow E$  de racine carrée fonctionnelle  $f : E \rightarrow E$ .

**Propriété 1.1.** Comme  $f \circ f = g$ , on a l'inclusion suivante :  $f(E) \subset E$ .

**Proposition 1.1.**  $g$  est injective si et seulement si  $f$  est injective.

*Démonstration.* Raisonnons par double implication :

- Premier sens de l'équivalence :  
Supposons que  $g$  est injective. Soient  $x, y \in E$  tels que  $f(x) = f(y)$ . Alors  $f(f(x)) = f(f(y))$ . Comme on sait que  $f \circ f = g$  est injective, on a  $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y) \implies x = y$ . On a donc bien prouvé que  $f(x) = f(y) \implies x = y$ , autrement dit,  $f$  est injective.
- Deuxième sens de l'équivalence :  
Supposons que  $f$  est injective. Alors  $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$ . Ainsi  $\forall x, y \in E, g(x) = g(y) \implies f(f(x)) = f(f(y)) \implies f(x) = f(y) \implies x = y$  donc  $g$  est injective.

□

**Proposition 1.2.**  $g$  est surjective si et seulement si  $f$  est surjective.

*Démonstration.* Raisonnons par double implication :

- Premier sens de l'équivalence :  
Supposons que  $g$  est surjective. Soit  $y \in E$ . Comme  $g(x)$  est surjective, on sait qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f \circ f(x) = y$ . On pose  $X = f(x) \in f(E)$ . On a donc :  $\forall y \in E, \exists X = f(x) \in f(E) \subset E, f(X) = y$ .  $f$  est donc surjective.
- Deuxième sens de l'équivalence :  
Supposons que  $f$  est surjective. On a donc que  $f(E) = E \implies g(E) = f(f(E)) = f(E) = E$ .  $g$  est donc surjective.

□

**Proposition 1.3.**  $g$  est bijective si et seulement si  $f$  est bijective.

*Démonstration.* Si  $f$  est bijective, autrement dit  $f$  est à la fois injective et surjective, d'après les propositions 1.1 et 1.2,  $g$  est donc injective et surjective, par conséquent bijective. De même, la réciproque est vraie pour les mêmes raisons.  $\square$

**Proposition 1.4.** Si  $g$  est bijective et  $f$  vérifie  $f \circ f = g$ , alors  $f^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $g$  est bijective de bijection réciproque  $g^{-1}$  et que  $f$  vérifie  $f \circ f = g$ . Alors par la proposition 1.3,  $f$  est bijective de bijection réciproque que l'on note  $f^{-1}$ . On a alors les deux relations suivantes :

$$f \circ f^{-1} = id$$

$$f^{-1} \circ f = id$$

Les implications suivantes sont ainsi vérifiées :

$$\begin{aligned} f \circ f = g &\implies f \circ f \circ f^{-1} = g \circ f^{-1} \\ &\implies f = g \circ f^{-1} \\ &\implies f \circ f^{-1} = g \circ f^{-1} \circ f^{-1} \\ &\implies id = g \circ f^{-1} \circ f^{-1} \\ &\implies g^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi  $g^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1}$ .  $\square$

**Proposition 1.5.** Tout point fixe de  $f$  est point fixe de  $g$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in E$  tel que  $f(x) = x$ , alors  $g(x) = f \circ f(x) = f(x) = x$ .  $\square$

**Proposition 1.6.**  $f \circ g = g \circ f$

*Démonstration.* Comme  $g = f \circ f$ , on a par associativité de la composition :  $f \circ g = f \circ (f \circ f) = f \circ f \circ f = (f \circ f) \circ f = g \circ f$ .  $\square$

Considérons maintenant que  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Cela nous permettra de traiter par la suite des cas de continuité et de fonctions croissantes.

**Proposition 1.7.** Si  $f$  est monotone, alors  $g$  est croissante.

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est monotone. On a alors deux cas possibles :

- **$f$  croissante.** Autrement dit,  $\forall x, y \in E, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \implies f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$ .  
Donc  $f \circ f = g$  est croissante.
- **$f$  décroissante.** Autrement dit,  $\forall x, y \in E, x \leq y \implies f(x) \geq f(y) \implies f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$ .  
Donc  $f \circ f = g$  est croissante.

Dans tous les cas,  $f \circ f = g$  est croissante.  $\square$

**Proposition 1.8.** Si  $\forall x \in E, f(x) > x$ , alors  $g(x) > f(x)$ . Et inversement, si  $\forall x \in E, f(x) < x$ , alors  $g(x) < f(x)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\forall x \in E, f(x) > x$ . En particulier,  $f(x) \in E$  donc  $f(f(x)) > f(x)$ . On a donc bien :  $g(x) > f(x)$ . La deuxième partie de la proposition est obtenue de la même manière.  $\square$

**Proposition 1.9.** Si  $g$  est discontinue, alors  $f$  est nécessairement discontinue.

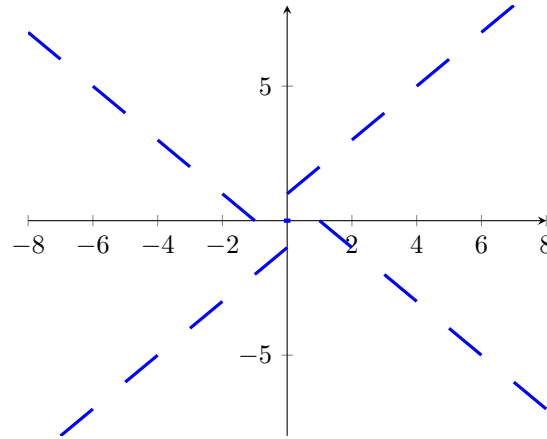
*Démonstration.* Si  $f$  est continue, alors  $f \circ f = g$  est également continue. Par contraposition, si  $f \circ f = g$  est discontinue, alors  $f$  est discontinue.  $\square$

**Proposition 1.10.** Si  $E$  est un intervalle, et si  $g$  est strictement décroissante alors  $f$  est discontinue.

*Démonstration.* Supposons que  $g$  soit strictement décroissante. Ainsi  $g$  est injective et par la proposition 1.1,  $f$  est également injective.

Supposons par l'absurde que  $f$  soit continue. Alors comme  $f$  est injective et continue, elle est strictement monotone. Or d'après la proposition 1.7, si  $f$  est monotone, alors  $g$  est croissante. Ceci est une contradiction car  $g$  est strictement décroissante. Ainsi  $f$  ne peut donc pas être continue.  $\square$

**Remarque 1.1.** Cela n'empêche pas une fonction strictement décroissante d'avoir une racine carrée fonctionnelle. Par exemple,  $g(x) = -x$  admet une racine dont le graphe est le suivant :



**Proposition 1.11.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

alors  $f$  est discontinue.

*Démonstration.* Supposons que  $g$  vérifie les conditions de la proposition et supposons par l'absurde que  $f$  est continue. Comme  $g$  est continue, par le *théorème des valeurs intermédiaires*,  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  donc  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . De plus,  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n)| = +\infty$ , car autrement, la suite  $(f(x_n))$  admettrait une sous suite bornée et donc  $(g(x_n)) = (f(f(x_n)))$  également. Enfin,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, f(x_n) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, f(x_n) < 0$$

car autrement :

$$\forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, f(x_n) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, f(x_n) \leq 0$$

et d'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, on aurait  $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(y_n) = 0$  ce qui contredit le fait que  $f(f(x)) \rightarrow \infty$ . Ainsi  $f$  admet des limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Ces limites sont forcément  $\pm\infty$ . On procède alors par disjonction de cas :

- si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

dans tous les cas on obtient une contradiction,  $f$  est donc discontinue.  $\square$

## 2 Fonction $g$ bijective

### 2.1 Existence d'une solution $f$ quelconque

Dans cette partie, nous étudions les fonctions  $g$  bijectives d'un ensemble  $E$  dans lui-même.

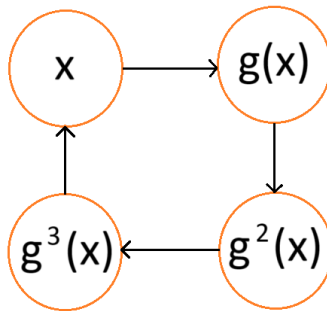
**Définition 2.1.** Soit  $g : E \rightarrow E$  une fonction bijective. On appelle *orbite* de  $x \in E$  l'ensemble défini par :

$$O(x) := \{y \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{Z}, y = g^n(x)\}$$

**Définition 2.2.** On dira d'une orbite  $O(x)$  avec  $x \in E$  qu'elle est un *cycle* si :

$$\exists i \in \mathbb{Z}^*, g^i(x) = x$$

On appellera longueur du cycle  $L := \min(i)$  avec  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $g^i(x) = x$ . On a toujours  $g^L(x) = x$ , et pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $g^N(x) = x \implies L \leq N$ . On peut représenter un cycle par un graphe. En voici un exemple pour un cycle de longueur 4 :



**Remarque 2.1.** Soit  $O(x_0)$  un cycle de longueur  $L$ . Alors pour tout  $x \in O(x_0)$ ,  $g^L(x) = x$ .

*Démonstration.* Comme  $x \in O(x_0)$ ,  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = g^i(x_0)$ . Alors :

$$g^L(x) = g^L(g^i(x_0)) = g^i(g^L(x_0)) = g^i(x_0) = x$$

Nous avons donc  $O(x) = O(x_0)$ .  $\square$

**Remarque 2.2.** Soit  $x$  un élément d'un cycle de longueur  $L$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $g^i(x) = x$ ,  $i$  est divisible par  $L$ .

*Démonstration.* Soit  $i \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $g^i(x) = x$ . Par division euclidienne de  $i$  par  $L$ , on obtient  $q$  et  $r$  uniques dans  $\mathbb{N}$  tels que  $i = qL + r$  et  $0 \leq r < L$ . Supposons alors par l'absurde que  $i$  n'est pas divisible par  $L$ , autrement dit  $r \neq 0$ . Alors,

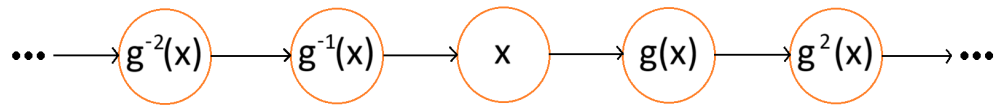
$$x = g^i(x) = g^{qL+r}(x) = (g^{qL} \circ g^r)(x) = g^r(x)$$

On a alors  $g^r(x) = x$  avec  $0 < r < L$  ce qui contredit la définition de  $L$ .  $\square$

**Définition 2.3.** On dira d'une orbite  $O(x)$  avec  $x \in E$  qu'elle est une *chaîne* si ce n'est pas un cycle :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, g^i(x) = x \implies i = 0$$

On peut représenter une chaîne par le graphe suivant :



**Lemme 2.1.** Une racine carrée fonctionnelle  $f$  d'une fonction  $g$  doit envoyer tout élément d'une chaîne de  $g$  vers une autre chaîne de  $g$  distincte.

*Démonstration.* Soit  $x_0$  un élément d'une chaîne de  $g$ .

Montrons tout d'abord que  $f(x_0)$  appartient à une chaîne de  $g$  en supposant par l'absurde qu'il appartient à un cycle de longueur  $L$ . Ainsi  $g^L(f(x_0)) = f(x_0)$ . On a alors :

$$g(x_0) = f(f(x_0)) = f(g^L(f(x_0))) = f^{2+2L}(x_0) = f^{2(L+1)}(x_0) = g^{L+1}(x_0)$$

Cela est absurde, car comme  $g$  est bijective,  $g^{L+1}(x_0) = g(x_0) \implies g^L(x_0) = x_0 \implies L = 0$  par définition d'une chaîne. Mais cela contredit la définition d'un cycle.

Montrons maintenant que  $f(x_0)$  ne peut pas appartenir à  $O(x_0)$  en supposant le contraire par l'absurde. Il existe donc  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $f(x) = g^i(x)$  On a alors :

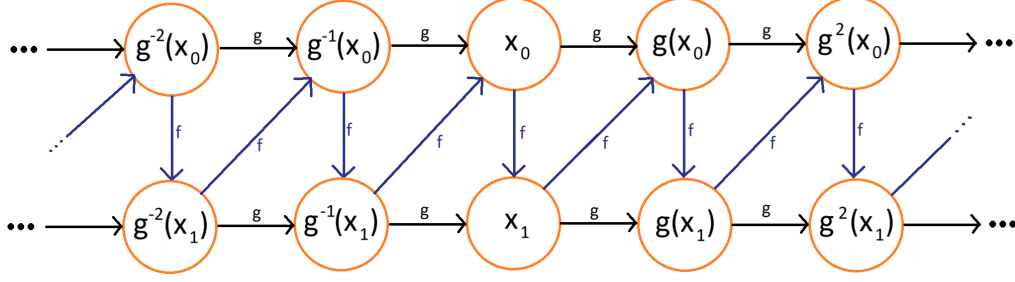
$$g(x) = f(f(x)) = f(g^i(x)) = g^i(f(x)) = g^{2i}(x) \implies g^{2i-1}(x) = x$$

ce qui est impossible car  $\forall i \in \mathbb{Z}, 2i - 1 \neq 0$  ce qui contredit la définition d'une chaîne. Ainsi  $f(x_0)$  appartient à une chaîne de  $g$  distincte de  $O(x_0)$ .  $\square$

**Remarque 2.3.** Il se trouve qu'une chaîne peut toujours renvoyer sur une autre chaîne. Par exemple, avec  $x_0 \neq x_1 \in E$ ,  $O(x_0)$  et  $O(x_1)$  deux chaînes distinctes, il suffit de poser pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

- $f(g^n(x_0)) = g^n(x_1)$
- $f(g^n(x_1)) = g^{n+1}(x_0)$

On peut vérifier que cette fonction est bien définie et vérifie  $f(f(x)) = g(x) \forall x \in O(x_0)$  et  $\forall x \in O(x_1)$ .



**Corollaire 2.0.1.** Une racine carrée fonctionnelle  $f$  d'une fonction  $g$  doit envoyer tout élément d'un cycle de  $g$  vers un cycle de  $g$ .

*Démonstration.* Si  $f$  envoie un élément  $x_0$  d'un cycle sur un élément  $x_1$  d'une chaîne de  $g$ , alors  $f(x_1) = g(x_0)$  appartient à un cycle, ce qui contredit le lemme précédent.  $\square$

**Proposition 2.1.** Soient  $f$  une racine carrée fonctionnelle de  $g$ , et  $x_0 \in E$  appartenant à un cycle de longueur  $N$ . Alors

- Si  $N$  est pair,  $f(x_0)$  appartient à un cycle distinct de même longueur.
- Si  $N$  est impair, il existe une fonction  $f : O(x_0) \rightarrow O(x_0)$  vérifiant  $f(f(x)) = g(x)$  pour tout  $x \in O(x_0)$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $f(x_0)$  appartient à un cycle de longueur  $N$ . On sait que  $f(x_0)$  appartient à un cycle par le corollaire 2.0.1. Soit  $L$  la longueur de ce cycle. D'après les conditions de la proposition on a :

$$g^N(f(x_0)) = f(g^N(x_0)) = f(x_0) \implies L \leq N$$

Or  $\forall L \in \mathbb{Z}_+$  tel que  $g^L(f(x_0)) = f(x_0)$  :

$$f(g^L(x_0)) = g^L(f(x_0)) = f(x_0) \implies g^L(x_0) = x_0 \implies N \leq L$$

On a alors  $L = N$  et  $f(x_0)$  appartient donc à un cycle de longueur  $N$ .

Procédons alors par disjonction de cas sur la parité de  $N$  :

- Si  $N = 2n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors supposons par l'absurde que l'on ait  $f(x_0) \in O(x_0)$ . Autrement dit,  $\exists i \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x_0) = g^i(x_0)$ . On a donc :

$$g(x_0) = f(f(x_0)) = f(g^i(x_0)) = g^i(f(x_0)) = g^{2i}(x_0) \implies g^{2i-1}(x_0) = x_0$$

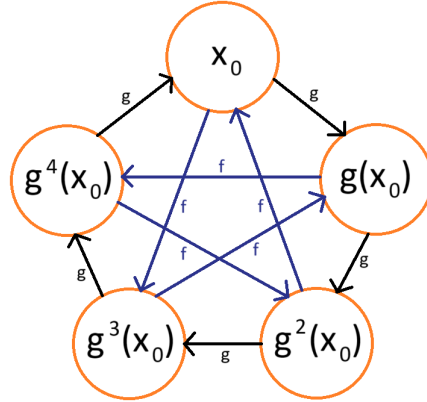
Par la remarque 2.2,  $2n$  divise  $2i - 1$  ce qui est absurde car  $2n$  est pair et  $2i - 1$  est impair. Ainsi  $f(x_0)$  ne peut qu'appartenir à un cycle distinct de longueur  $N$ .

- Si  $N = 2n + 1$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in O(x_0)$ , la fonction  $f(x) = g^{n+1}(x)$  convient. En effet,

$$f(f(x)) = g^{2n+2}(x) = g(g^{2n+1}(x)) = g(x)$$

car  $g^{2n+1}(x) = x$  par la remarque 2.1.

Par exemple, pour un cycle de longueur 5, cela donne :



□

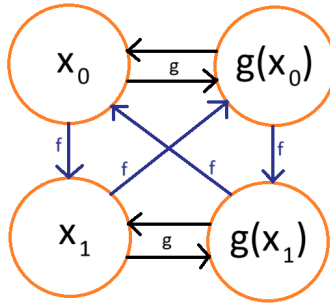
**Proposition 2.2.** Soit  $x_0$  un élément d'un cycle de longueur paire  $2N$ . Alors  $f$  peut effectivement envoyer  $O(x_0)$  sur un autre cycle de longueur  $2N$ .

*Démonstration.* Pour tous  $x_0, x_1 \in E$ , avec  $O(x_0)$  et  $O(x_1)$  deux cycles distincts de longueur  $2N$ , il suffit de poser pour tout  $n$  :

- $f(g^n(x_0)) = g^n(x_1)$
- $f(g^n(x_1)) = g^{n+1}(x_0)$

On peut vérifier que cette fonction est bien définie et  $f(f(x)) = g(x)$ .

Par exemple, pour des cycles de longueur 2, cela donne :



□

**Théorème 2.1.** Une fonction  $g$  bijective d'un ensemble dans lui même admet une racine carrée fonctionnelle si et seulement si :

1.  $g$  admet un nombre pair ou infini de chaînes.
2. Pour chaque nombre pair,  $g$  admet un nombre pair ou infini de cycles de cette longueur.

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence directe de la remarque 2.3, et des propositions 2.1 et 2.2.

Note : Nous avons utilisé l'axiome du choix pour associer les orbites.

□

**Remarque 2.4.** Il existe donc des fonctions  $g$  qui n'admettent pas de racines carrées fonctionnelles. Par exemple la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$g(x) = -x^3$$

n'admet pas de racine carrée fonctionnelle. En effet, les solutions de  $g(g(x)) = x$  sont  $0, -1$  et  $1$ .  $g(0) = 0$  donc  $0$  est un cycle de longueur 1.  $g$  admet alors un unique cycle de longueur 2 :  $\{-1, 1\}$ .

## 2.2 Existence d'une fonction $f$ continue

**Théorème 2.2.** Soit  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction bijective. Alors :

1. Si  $g$  est discontinue, alors il n'existe pas de solutions  $f$  continues.
2. Sinon :
  - (a) Si  $g$  est strictement décroissante, alors il n'existe pas de solutions  $f$  continues.
  - (b) Sinon : il existe une infinité de solutions  $f$  continues.

*Démonstration.* Les parties 1. et 2.a de ce théorème sont une conséquence directe des propositions 1.9 et 1.10. Il reste alors à prouver la partie 2.b.

Supposons que  $g$  est continue et strictement croissante.

Considérons la partition  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R} \setminus \{x, g(x) = x\}$  par des intervalles ouverts uniquement. Alors pour tout intervalle  $I$  de cette partition,  $\forall x \in I, g(x) < x$  ou  $\forall x \in I, g(x) > x$ . En effet, supposons par l'absurde que  $\exists x_0 \in I, g(x_0) < x_0$  et  $\exists x_1 \in I, g(x_1) > x_1$ . Alors considérons la fonction  $\tilde{g}(x) = g(x) - x$ .  $\tilde{g}$  est continue, et  $\tilde{g}(x_0) < 0$  et  $\tilde{g}(x_1) > 0$ . Or d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists y \in I, \tilde{g}(y) = 0$ , ce qui veut dire que  $g(y) - y = 0$ , et que  $y$  est un point fixe de  $g$ . C'est une contradiction, donc  $\forall x \in I, g(x) < x$  ou  $\forall x \in I, g(x) > x$ .

Nous allons maintenant construire une solution  $f$  continue à l'équation  $f \circ f = g$ .

Fixons tout d'abord  $f(x) = x$  pour tout  $x$  tel que  $g(x) = x$ .

Ensuite, pour chaque intervalle  $I$  :

- Si  $\forall x \in I, g(x) > x$ .  
On choisit un point  $y_0 \in I$ , et on fixe  $y_1 \in ]y_0, g(y_0)[$ . On a bien  $y_1 \in I$  car comme  $g$  est strictement croissante et  $y_0 < \sup(I)$ ,  $g(y_0) < g(\sup(I)) = \sup(I)$ . Soit  $\tilde{f}(x) : [y_0, y_1[ \rightarrow [y_1, g(y_0)[$  une fonction continue strictement croissante arbitraire vérifiant  $\tilde{f}(y_0) = y_1, \lim_{x \rightarrow y_1} \tilde{f}(x) = g(y_0)$ .

Considérons maintenant la partition de  $I$  par les intervalles :

$$\begin{cases} J_{2j} = [g^j(y_0), g^j(y_1)[, & j \in \mathbb{Z} \\ J_{2j+1} = [g^j(y_1), g^{j+1}(y_0)[, & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En effet, ces intervalles sont disjoints et consécutifs, et comme  $\forall x \in I, g(x) > x$ ,  $(g^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante et majorée par  $\sup(I)$ . De plus la limite de cette suite est forcément un point fixe de  $g$ , donc la seule limite possible est  $\sup(I)$ . Le même raisonnement est valable pour  $\inf(I)$ , donc l'union de des intervalles  $J$  vaut bien  $I$ .

On définit pour tout  $x \in I$

$$f(x) = \begin{cases} g^j(\tilde{f}(g^{-j}(x))) & \text{si } \exists j \in \mathbb{Z}, x \in J_{2j} \\ g^{j+1}(\tilde{f}^{-1}(g^{-j}(x))) & \text{si } \exists j \in \mathbb{Z}, x \in J_{2j+1} \end{cases}$$

Par construction de  $J_k$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , on a :  $\forall x \in J_{2j}, g^{-j}(x) \in \text{dom}(\tilde{f})$ , et  $\forall x \in J_{2j+1}, g^{-j}(x) \in \text{dom}(\tilde{f}^{-1})$ . Ainsi  $f$  est bien définie.

De plus, comme les  $J_k$  partitionnent  $I$ ,  $\forall x \in I$ , on peut déterminer  $k$  tel que  $x \in J_k$ . Ainsi :  
Si  $k = 2j$  pour un certain  $j$ , alors

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(g^j(\tilde{f}(g^{-j}(x)))) \\ &= g^{j+1}(\tilde{f}^{-1}(g^{-j}(g^j(\tilde{f}(g^{-j}(x)))))) \\ &= g^{j+1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(g^{-j}(x)))) \\ &= g^{j+1}(g^{-j}(x)) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Si  $k = 2j + 1$  pour un certain  $j$ , alors

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(g^{j+1}(\tilde{f}^{-1}(g^{-j}(x)))) \\ &= g^{j+1}(\tilde{f}(g^{-j-1}(g^{j+1}(\tilde{f}^{-1}(g^{-j}(x)))))) \\ &= g^{j+1}(\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(g^{-j}(x)))) \\ &= g^{j+1}(g^{-j}(x)) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  vérifie bien l'équation fonctionnelle. Maintenant, montrons qu'elle est continue. Sur les intervalles  $J_k$ ,  $f$  est une composition de fonctions continues, c'est donc bien une fonction continue.

- Sur les extrémités  $g^j(y_0)$ , la limite à gauche vaut :

$$\lim_{x \rightarrow g^j(y_0)} g^{(j-1)+1}(\tilde{f}^{-1}(g^{-(j-1)}(x)))$$

On a supposé que  $\lim_{x \rightarrow y_1} \tilde{f}(x) = g(y_0)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow g(y_0)} \tilde{f}^{-1}(x) = y_1$

Soit  $y = g^{-(j-1)}(x)$ , la limite devient donc :

$$\lim_{y \rightarrow g(y_0)} g^{(j-1)+1}(\tilde{f}^{-1}(y)) = g^j(\lim_{y \rightarrow g(y_0)} \tilde{f}^{-1}(y)) = g^j(y_1)$$

Comme  $f(g^j(y_0)) = g^j(y_1)$ , par continuité de  $f$  sur les intervalles  $I$ , on a bien  $\lim_{x \rightarrow g(y_0)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow g(y_0)^+} f(x) = g(y_1)$ .

- Sur les extrémités  $g^j(y_1)$ , la limite à droite vaut :

$$\lim_{x \rightarrow g^j(y_1)} g^j(\tilde{f}(g^{-j}(x)))$$

Soit  $y = g^{-j}(x)$ , par continuité de  $g$ , la limite devient :

$$\lim_{y \rightarrow y_1} g^j(\tilde{f}(y)) = g^j(\lim_{y \rightarrow y_1} \tilde{f}(y)) = g^{j+1}(y_0)$$

- Si  $\forall x \in I, g(x) < x$ .

Montrons que l'on peut se ramener au cas précédent : Considérons la fonction  $g_{inv} = g^{-1}(x)$ . Cette fonction vérifie  $\forall x \in I, g_{inv}(x) > x$ , et il existe donc  $f_{inv}$  continue vérifiant  $\forall x \in I, f_{inv}(f_{inv}(x)) = g_{inv}(x)$ , alors  $f_{inv}^{-1}$  vérifie l'équation fonctionnelle d'après la proposition 1.4.

Il nous reste alors à prouver que  $f$  est continue aux points fixes de  $f$  (et donc de  $g$ ). Comme  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq f(x) \leq g(x)$  ou  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x) \leq x$ , si  $x_0$  est un point fixe de  $f$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} x$$

Soit

$$x_0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq x_0$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ .

Nous avons donc montré que  $f$  est continue aux points fixes de  $f$ , et sur les intervalles  $I$ . Or comme  $(\bigcup_{I \in \mathcal{P}} I) \cup \{x, g(x) = x\} = \mathbb{R}$ , la solution  $f$  construite à partir de la fonction  $\tilde{f}$  est bien continue, et vérifie l'équation  $f(f(x)) = g(x)$ . Comme nous avons choisi  $\tilde{f}$  comme une fonction strictement croissante arbitraire, il est clair qu'il existe une infinité de solutions  $f$ .  $\square$



FIGURE 1 – Racine carrée fonctionnelle (en bleu) de la fonction cube (en rouge), construite à partir d'une fonction  $\tilde{f}$  linéaire.

## Conclusion

Nous avons mené ici une première analyse du sujet. Dans la partie 1, nous avons traité le cas général où  $g$  n'est pas forcément une fonction bijective. Nous avons énoncé plusieurs propriétés qu'une solution  $f$  doit posséder en supposant qu'elle existe. Nous avons fini par donner dans les propositions 1.9, 1.10, et 1.11 des conditions nécessaires mais non suffisantes sur  $g$  pour l'existence d'une solution  $f$  continue.

Ensuite, dans le cas où  $g$  est une fonction bijective, nous avons donné un critère nécessaire et suffisant pour l'existence d'une solution  $f$ , et un second critère lui aussi nécessaire et suffisant pour que la solution  $f$  soit continue.

Nous souhaitons enfin remercier Pierre Pansu et Aurélien Perdriaud pour leur aide et leurs conseils dans le cadre de l'atelier MATH.en.Jeans. Si vous souhaitez nous contacter pour nous poser des questions, voici notre adresse mail : [frondf.egalg@gmail.com](mailto:frondf.egalg@gmail.com)