Doublons dans le triangle de Pascal

Maths En Jeans

Mathis CREVET, Yannick TOURÉ, Isaac DA COSTA TEIXEIRA, Clément DEHESDIN

Table des matières

1 Présentation du problème

En France, on donne le nom de Triangle de Pascal à la figure suivante (étant connue en Chine depuis le début de notre ère), où chaque nombre est la somme de deux de ses voisins : son voisin du dessus, et le voisin à gauche du voisin de dessus.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4 +	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Construction du nombre 10 *dans le Triangle de Pascal*

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Tous les voisins de $\binom{5}{2}$

Il arrive que deux voisins aient la même valeur (on voit une solution sur la figure). Quand exactement cela se produit ?

Dans le triangle de Pascal, chaque nombre représente le nombre de façons de choisir des éléments d'un ensemble.

Par exemple, le nombre en position (n, k) correspond au nombre de façons de choisir k éléments parmi n, ce qui est appelé un *coefficient binomial*, noté $\binom{n}{k}$ (et lu « k parmi n »).

Si nous remplaçons désormais les nombres présents dans le triangle de Pascal par des coefficients binomiaux, il en résulte :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}+$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Comme précisé précédemment, chaque nombre est la somme des deux nombres qui le surmontent. Mathématiquement, on applique la formule énoncée dans le théorème 2.2 (aussi désignée sous le nom de *formule de Pascal*).

2 Quelques propriétés utiles

Pour aborder ce problème de manière rigoureuse, nous ferons appel à certains théorèmes que nous considérerons comme admis.

Théorème 2.1. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $k \leqslant n$. Alors,*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Théorème 2.2 (Formule de Pascal)**.** *Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $0 < k < n$. Alors,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Proposition 2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Alors,*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Théorème 2.3. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $0 < k \leqslant n$. Alors,*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Proposition 2.2. *La somme (resp. différence) de deux nombres de même parité donne une somme (resp. différence) paire.*

Proposition 2.3. *Le carré d'un nombre impair (resp. pair) est impair (resp. pair).*

3 Résolution mathématiques du problème

L'objectif de cette étude est d'explorer les conditions dans lesquelles deux éléments voisins du triangle de Pascal sont identiques.

Pour ce faire, nous allons examiner quatre cas distincts, à savoir :

$$\begin{matrix} \binom{n-1}{k-1} & \binom{n-1}{k} & \binom{n-1}{k+1} \\ \binom{n}{k-1} & \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k-1} & \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{matrix}$$

- Les cas où les éléments sont sur une même ligne, i.e. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$;
- Ceux où ils se trouvent dans une même colonne, i.e. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$;
- Les cas où ils sont alignés sur une même diagonale descendante, i.e. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$;
- Et enfin, ceux qui se situent sur une même diagonale ascendante, i.e. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1}$.

3.1 Analyse des éléments sur une même ligne

Commençons par identifier les conditions sous lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même ligne sont égaux. Pour cela, examinons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ pour tout entiers $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > 0$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &\iff \frac{1}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &\iff \frac{1}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{1}{n-k} = \frac{1}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &\iff \frac{1}{n-k} = \frac{1}{k+1} \\ &\iff n-k = k+1 \\ &\iff n = 2k+1 \qquad (1) \end{aligned}$$

Il en résulte donc que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ lorsque $n := 2k+1$.

Remarque 3.1. *D'après l'égalité 1, n est un entier impair. En ré-arrangeant l'égalité $n = 2k+1$, nous obtenons : $k = \frac{n-1}{2}$ (ou encore que $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Cela* *met en évidence que pour tout n impair, le triangle de Pascal admet deux voisins égaux sur la même ligne si k est situé au milieu de la ligne.*

3.2 Analyse des éléments dans une même colonne

Identifions ensuite les conditions qui rendent deux coefficients binomiaux adjacents situés dans une même colonne égaux. Pour cela, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tous les entiers $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > 0$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ deux entiers vérifiant $n > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\
&\iff \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{n-k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&\iff \frac{n}{n-k} = 1 \\
&\iff n = n-k \\
&\iff k = 0
\end{aligned}$$

Or, par la proposition 2.1, $\binom{n}{0} = 1$: il en résulte donc que la première colonne du triangle, étant toujours composé de 1, est la seule manière d'avoir deux voisins égaux dans la même colonne.

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $k = 0$.

3.3 Analyse des éléments sur une diagonale descendante

Déterminons les conditions dans lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même diagonale descendante sont égaux. Pour ce faire, analysons l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entiers $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} &\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k-1)!} \\
&\iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
&\iff \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
&\iff \frac{n}{k} = 1 \\
&\iff n = k
\end{aligned}$$

Or, par la proposition 2.1, $\binom{n}{n} = 1$: il en résulte donc que les seuls voisins sur une même diagonale descendante se situe sur « l'hypoténuse » du triangle, étant toujours composé de 1.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Mathématiquement, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ pour tout entier $n, k \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 < n = k$.

4 Analyse des éléments sur une diagonale ascendante

4.1 Développement et simplification des coefficients binomiaux

4.1.1 Simplification des factorielles

Commençons par identifier les conditions sous lesquelles deux coefficients binomiaux adjacents situés sur une même diagonale ascendante sont égaux. Pour cela, examinons l'égalité $\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq k + 1 \geq 2$. Partant de

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k},$$

en utilisant les formules des coefficients binomiaux on obtient

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

On arrange l'équation pour obtenir

$$\frac{n!}{(n-1)!(n-k+1)!} = \frac{(k-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

En simplifiant

$$\frac{n}{(n-k+1)!} = \frac{1}{k(n-k-1)!},$$

ou encore :

$$nk = \frac{(n-k+1)!}{(n-k-1)!}.$$

on simplifie les factorielles pour obtenir

$$nk = (n-k)(n-k+1).$$

Enfin, en développant,

$$k^2 - 3kn - k + n + n^2 = 0.$$

4.1.2 Mise sous forme polynomiale de degré 2

Cette équation peut être réécrite comme un polynôme du second degré en k

$$k^2 - 3k(n-1) + n^2 + n,$$

dont les solutions s'expriment ainsi :

$$k = \frac{3n+1+\sqrt{\Delta}}{2} \tag{2}$$

ou

$$k = \frac{3n+1-\sqrt{\Delta}}{2}, \tag{3}$$

avec $\forall k \geq 1 \in \mathbb{N}$,

$$\Delta = 5n^2 + 2n + 1.$$

4.1.3 Vérification de la validité des solutions

Cependant, on a imposé précédemment des conditions sur n, il faut vérifier que les deux versions de n produisent des coefficients valables. On doit donc vérifier que n est supérieur ou égal à $k+1$.

Calculons donc $k+1-n$ et observons son signe,

$$\begin{aligned} k+1-n &= \frac{3n+1+\sqrt{\Delta}}{2} + 1 - n \\ &= \frac{3n+1+\sqrt{\Delta}+2-2n}{2} \\ &= \frac{n+3+\sqrt{\Delta}}{2} \end{aligned}$$

Ce terme est clairement positif (car n l'est), donc $k+1-n$ est positif, et $k+1$ est supérieur à n, ce qui pose problème, on exclut donc les racines de (1) de la forme (2).

Vérifions maintenant (3), il faut encore que n soit supérieur à $k+1$, vérifions donc à nouveau le signe de $k+1-n$,

$$\begin{aligned} k+1-n &= \frac{3n+1-\sqrt{\Delta}}{2}+1-n \\ &= \frac{3n+1-\sqrt{\Delta}+2-2n}{2} \\ &= \frac{n+3-\sqrt{\Delta}}{2} \end{aligned}$$

Le signe de cette expression dépend uniquement du signe du numérateur, on résout donc :

$$n+3 \leq \sqrt{5n^2+2n+1}$$

Comme $n > 0$, on élève au carré l'expression

$$n^2+6n+9 \leq 5n^2+2n+1.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} 4n^2-4n-8 &\geq 0 \\ n^2-n-2 &\geq 0 \\ (n-2)(n+1) &> 0. \end{aligned}$$

On dresse un rapide tableau de signe :

n	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$n+1$		$-$	0		$+$		
$n-2$			$-$		0	$+$	
$(n+1)(n-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On voit que l'expression $(n-2)(n+1)$ est positive pour tout n supérieur ou égal à 2, ce qui correspond parfaitement à notre restriction initiale sur 2, on conservera donc la forme (3) de Δ pour finalement obtenir

$$k = \frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}. \tag{4}$$

On cherche donc tout les points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées entières vérifiant cette équation.

4.1.4 Étude des solutions en fonction de la parité de n

Dans l'équation (4), k et n désignent des entiers, il faut donc que le numérateur de la fraction soit un entier pair et donc que l'expression sous la racine soit un carré parfait.

Rendons nous compte que peu importe la parité de n, si $5n^2+2n+1$ est un carré parfait, alors le numérateur est un entier pair. En effet, il y a deux cas :
Si n est pair, alors $5n^2+2n+1$ est impair, et donc sa racine l'est également. Or $3n+1$ est aussi impair, leur différence sera donc un nombre pair. De la même manière, **si n est impair,** alors $5n^2+2n+1$ est pair, et donc sa racine l'est également. Or $3n+1$ est aussi pair, leur différence sera donc un nombre pair.

4.2 Résolution de l'équation en k et n

4.2.1 Transformation du polynôme

On recherche donc les valeurs entières de n pour lesquelles $5n^2+2n+1$ est un carré parfait, on pose donc :

$$5n^2+2n+1=\alpha^2,$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}$

Modifions légèrement cette expression pour la simplifier

$$25n^2+10n+5=5\alpha^2$$

$$(5n+1)^2+4=5\alpha^2$$

On pose $X=5n+1$ pour obtenir

$$X^2-5\alpha^2=-4. \tag{5}$$

C'est une équation de Pell-Fermat que l'on peut réécrire, à l'aide d'identités remarquables

$$(X+\alpha\sqrt{5})(X-\alpha\sqrt{5})=-4$$

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin du lemme suivant.

> Les couples $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ sont solution de l'équation $(\frac{a+b\sqrt{5}}{2})(\frac{a-b\sqrt{5}}{2})=\pm1$ si et seulement si il existe un entier n tel que $\frac{a+b\sqrt{5}}{2}=\varphi^n$ et $\frac{a-b\sqrt{5}}{2}=\bar{\varphi}^n$. Avec ϕ le nombre d'or

4.2.2 Démonstration du Lemme

L'objectif de cette démonstration est de montrer que $\frac{a+b\sqrt{5}}{2}$ que l'on notera A par la suite est une puissance entière du nombre d'or. En effet si A vérifie cette condition, alors automatiquement, son "conjugué" est également une puissance entière du "conjugué" du nombre d'or.

L'idée ici est de partir d'une solution de l'équation (5), et de montrer qu'elle ne peut être qu'une puissance entière du nombre d'or. Pour ce faire, on part d'un A quelconque que l'on divise à plusieurs reprises par le nombre d'or. Et si A était une puissance de ϕ au départ, alors on retombera nécessairement sur 1.

Commençons par observer ce qu'il se passe lorsqu'on divise A par φ.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on part de l'équation :

$$(\frac{a+b\sqrt{5}}{2})(\frac{a-b\sqrt{5}}{2}) = \pm 1 \tag{6}$$

obtenue à partir de (5).

On remarque déjà que si $a = 0$, l'équation n'admet pas de couples de solutions dans $\mathbb{N}$. Donc $a \neq 0$. De plus si $b = 0$, on obtient $a = 2$ et donc que $\frac{a+b\sqrt{5}}{2} = 1$ qui correspond bien à $\varphi^0 = 1$. Par la suite, on prendra donc a et b différents de 0.

On note

$$A = \frac{a+b\sqrt{5}}{2}, \quad B = \frac{a-b\sqrt{5}}{2}. \tag{7}$$

En divisant par φ (ce qui revient à multiplier par $\frac{1}{\varphi}$) et en notant le résultat A', on obtient :

$$A' = \frac{a+b\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a+b\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

En multipliant par la quantité conjuguée

$$A' = \frac{a+b\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(a+b\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{1-5}$$

$$= \frac{(a-5b)+(b-a)\sqrt{5}}{-4}$$
$$= \frac{(5b-a)+(a-b)\sqrt{5}}{4}$$
$$A' = \frac{\frac{5b-a}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, en divisant A par φ, on obtient

$$A' = \frac{a' + b'\sqrt{5}}{2},$$

avec

$$a' = \frac{5b-a}{2} \quad \text{et} \quad b' = \frac{a-b}{2}. \tag{8}$$

Vérifions que le couple (a', b') est toujours solution de l'équation (6)

$$a'^2 - 5b'^2 = (\frac{5b-a}{2})^2 - 5(\frac{a-b}{2})^2$$
$$= \frac{25b^2 - 10ab + a^2 - 5a^2 + 10ab - 5b^2}{4}$$
$$= \frac{-4a^2 + 20b^2}{4} = -(a^2 - 5b^2) = \pm 4$$

d'après (6).

Ainsi, en divisant A par φ, on trouve un nombre A' qui est de la même forme que A mais et dont le couple (a', b') associé est toujours solution de (6).

Pour poursuivre, lorsque l'on divise $\frac{a+b\sqrt{5}}{2}$ par φ, on obtient un nombre de la même forme. Montrons que ce nombre est strictement inférieur au nombre de départ. On rappelle que

$$a' = \frac{5b-a}{2} \qquad \textit{et} \qquad b' = \frac{a-b}{2}. \tag{9}$$

Montrons d'abord que $b' \geq 0$:

Supposons par l'absurde que $b' < 0$, cela implique que

$$\frac{a-b}{2} < 0$$
$$\Leftrightarrow a - b < 0$$

$$\Leftrightarrow a < b$$
$$\Leftrightarrow a^2 < b^2$$
car a et b sont des entiers positifs,
$$\Leftrightarrow 5a^2 < 5b^2$$
$$\Leftrightarrow 5^a2 - 5b^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 5b^2 < -4a^2 < -4,$$
car $a > 0$. Ceci est absurde en raison de (6). Donc $b' \geq 0$.

Montrons ensuite que $a' \geq 0$. Supposons à nouveau par l'absurde que $a' < 0$, cela implique que
$$\Leftrightarrow \frac{5b-a}{2} < 0$$
$$\Leftrightarrow 5b - a < 0$$
$$\Leftrightarrow 5b < a$$
$$\Leftrightarrow 25b^2 < a^2$$
car a et b sont des entiers positifs,
$$\Leftrightarrow a^2 - 5b^2 > 20b^2 > 1$$
car $b > 0$. Ceci est absurde en raison de (6). Donc $a' \geq 0$.

Montrons finalement que $b' < b$ Supposons que $b' \geq b$, on a donc
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \geq b$$
$$\Leftrightarrow a - b \geq 2b$$
$$\Leftrightarrow a \geq 3b$$
$$\Leftrightarrow a^2 \geq 9b^2$$
car a et b sont des entiers positifs,
$$\Leftrightarrow a^2 - 5b^2 \geq 4b^2$$
$$\Leftrightarrow \pm 4 \geq 4b^2$$
Ce qui est possible uniquement si $b = 1$. Donc pour $b > 1$, $b' < b$.

Donc à chaque division de A par φ, on passe d'un couple solution (a, b) à un autre couple solution (a', b') positif. On vient de démontrer que $b' < b$ pour $b > 1$. Ce qui signifie qu'au bout d'un certain nombre d'opérations, on arrivera forcément à $b = 1$. Or, les seuls couples $(a, 1)$ solutions de (6) sont $(1, 1)$ et $(3, 1)$.
$$\frac{1 + 1\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad et \qquad \frac{3 + 1\sqrt{5}}{2} = \varphi^2$$
Qui correspondent tous les deux à des puissances de φ. CQFD

4.3 Résolution de l'équation

On peut écrire, pour tout entier m,

$$\varphi^{2m} \cdot \bar{\varphi}^{2m} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^{2m+1} \cdot \bar{\varphi}^{2m+1} = -1.$$

Ce sont seulement les puissances impaires de ϕ qui donnent le produit -1. On peut donc préciser le lemme précédent : si un couple d'entiers (X, Y) vérifie l'équation (5), alors il existe m tel que :

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{2m+1} \quad \text{et} \quad \frac{X - Y\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi}^{2m+1}.$$

Par exemple, $4^2 - 5 \times 2^2 = -4$ et $\frac{4+2\sqrt{5}}{2} = \varphi^3$.

Ainsi, en remarquant que :

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} + \frac{X - Y\sqrt{5}}{2} = X$$

on peut obtenir tout les X (et donc les Y) vérifiant notre équation

$$X_i = \varphi^{2i+1} + \bar{\varphi}^{2i+1}$$

avec i un entier.

Cependant, il est important de se souvenir du changement de variables que l'on avait effectué pour revenir à à la donnée n correspondant au numéro de ligne dans le triangle, $X = 5n + 1$ et donc $n = \frac{X-1}{5}$. Or, n doit être un nombre entier pour correspondre à une ligne du triangle, on en déduit que X doit respecter la condition suivante :

$$X \equiv 1\ [5].$$

Une rapide observation montre que seules certaines puissances impaires de φ remplissent cette condition, plus précisément, il s'agit des puissances impaires des impaires.

4.4 Propriétés de φ et de$\bar{\varphi}$

Avant de continuer, rappellons que φ et $\bar{\varphi}$ sont les solutions du polynôme $X^2 - X - 1 = 0$ et possèdent donc les propriétés suivantes qui nous seront utiles plus tard :

Propriété 4.1. $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\bar{\varphi}^2 = \bar{\varphi} + 1$

Propriété 4.2. $\varphi + \bar{\varphi} = 1$

Propriété 4.3. $\varphi^2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ *et* $\bar{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

Propriété 4.4. $\bar{\varphi} = -\varphi^{-1}$

4.5 Retour à la démonstration

Nous avons donc démontré que pour $X, Y \in \mathbb{N}$,

$$X^2 - 5Y^2 = -4 \Leftrightarrow \frac{X+Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{2m+1}, m \in \mathbb{N}.$$

On remarque que le plus petit couple solution de notre équation (1,1) forme une puissance impaire de φ. Pour maintenir des valeurs solutions de notre équation, nous devons multiplier systématiquement par φ^2, et donc maintenir le caractère impair de la puissance de φ. Nous devons aussi souligner que $X = 5n + 1$, et que plus particulièrement $X \equiv 1[5]$.

Montrons, par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que l'assertion

$$P_m : \text{"}\ \frac{X+Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{4m+1} \Rightarrow X \equiv 1\ [5]\ \text{" est vraie.}$$

Initialisation : $m = 0$.

$$\frac{X+Y\sqrt{5}}{2} = \varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Par identification : $X \equiv 1$ [5], Initialisation réussie.

Hérédité :

Supposons donné un entier m vérifiant P_m. Autrement dit, le couple d'entiers (X, Y) tel que

$$\frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \varphi^{4m+1}$$

satisfait $X \equiv 1$ [5]. Montrons que P_{m+1} est vraie aussi. Soit (X', Y') le couple d'entiers tel que

$$\frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \varphi^{4m+5}.$$

Alors

$$\frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \varphi^{4m+1}\varphi^4$$

(Prop 4.1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \varphi^{4m+1}(\varphi+1)^2$$

(Prop 4.3)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(X+Y\sqrt{5})(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X' + Y'\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(\frac{(7X+15Y)}{2} + \frac{(7Y+3X)}{2}\sqrt{5}).$$

Par identification,

$$X' = \frac{1}{2}(7X + 15Y)$$

$$\Leftrightarrow 2X' = 7X + 15Y.$$

Passage en congruences modulo 5 : comme $15Y \equiv 0$ [5] et par hypothése de récurrence, $X \equiv 1$ [5], $2X' \equiv 7$ [5],

$$\Leftrightarrow 2X' \equiv 2 \ [5]$$

Donc

$$2(X' - 1) = 5k, k \in \mathbb{N}$$

Or PGCD(2, 5) = 1, donc d'après le théorème de Gauss,

$$X' - 1 = 5k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow X' \equiv 1 \ [5].$$

P_{m+1} est donc vraie

Conclusion :

P_m est donc vraie au rang initial 0 et héréditaire donc $\forall m \in \mathbb{N}$, P_m est vraie.

Maintenant, démontrons que :

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{4m-1} \implies X \equiv 4 \neq 1 \ [5].$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2}(X + Y\sqrt{5}) = \varphi^{4m-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{5}) = \varphi^{4m+1}\varphi^{-2}$$

(Prop 4.3 et 4.4)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(X' + Y'\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$$

(Avec $X' \equiv 1$ [5])

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X + Y\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(\frac{3X' - 10Y'}{2} + \frac{3Y - X}{2}\sqrt{5})$$

Par identification,

$$X = \frac{3X' - 10Y'}{2} \Leftrightarrow 2X = 3X' - 10Y'$$

$$2X \equiv 3[5] \Leftrightarrow 2X \equiv -2\ [5] \Leftrightarrow 2(X+1) \equiv 0\ [5].$$

Or $PGCD(2,5) = 1$, donc $X + 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow X \equiv -1\ [5]$.
Or,

$$-1 \equiv 4[5]$$

Donc,

$$X \equiv 4[5].$$

Or, cette proposition étant vraie pour tout m $\in \mathbb{N}$, ainsi va de sa contraposée, qui est justement la réciproque de la proposition démontrée par récurrence ci-dessus.

Donc, pour conclure ,
$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall (X,Y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $X^2 - 5Y^2 = -4$,

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{4m+1} \Leftrightarrow X \equiv 1\ [5].$$

Ayant démontré cela, un corollaire utile est que $\frac{X - Y\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi}^{4m+1}$.
En effet,

$$\frac{X + Y\sqrt{5}}{2} = \varphi^{4m+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{X + Y\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi^{4m+1}}$$

(Prop 4.4)

$$\Leftrightarrow \frac{2(X - Y\sqrt{5})}{-4} = -\bar{\varphi}^{4m+1}$$

(multiplication par le conjugué $\frac{X - Y\sqrt{5}}{X - Y\sqrt{5}}$ ainsi que $X^2 - 5Y^2 = -4$)

$$\Leftrightarrow \frac{X - Y\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi}^{4m+1}.\text{CQFD}$$

Ainsi, nous pouvons, en sommant les 2 expressions, obtenir :

$$\varphi^{4m+1} + \bar{\varphi}^{4m+1} = X$$

(Rappel que $X = 5n + 1$)

$$\Leftrightarrow 5n+1=\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1}{5}(\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}-1), m\in\mathbb{N}^*.$$

Remarque . Si $m=0$ alors $n=0$, nous serions donc en train d'étudier

$$\binom{-1}{k}=\binom{0}{k-1}, k\in\mathbb{N}$$

Ce qui n'est pas défini $\forall k\in\mathbb{N}$... pour l'instant.

Ceci était pour la valeur de n, attardons nous sur la valeur de k.
Nous avons pu déterminer la valeur de X, trouvons donc la valeur de Y.

En soustrayant $\bar{\varphi}^{4m+1}$ de φ^{4m+1}, nous obtenons :

$$Y\sqrt{5}=\varphi^{4m+1}-\bar{\varphi}^{4m+1}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{4m+1}-\bar{\varphi}^{4m+1}).$$

Et ainsi, nous pouvons exprimer k en fonction de notre paramètre m $\in\mathbb{N}^*$,

$$k=\frac{1}{2}(3n+1-Y)$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}(3(\frac{1}{5}(\varphi^{4m+1}+\bar{\varphi}^{4m+1}-1)+1-\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{4m+1}-\bar{\varphi}^{4m+1}))$$

(Prop 4.3 et 4.4)

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}(\bar{\varphi}^{4m+1}(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}))+(\varphi^{4m+1}\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}))+1)$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}(\varphi^{4m-1}+\bar{\varphi}^{4m-1}+1).$$

Nous avons donc trouvé une expression de n et de k, cependant ces dernières, recèlent un dernier secret, qui se révèle en modifiant le membre de droite.

4.6 Lien avec la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (notée F_n), est la suite définie par récurrence d'ordre 2, telle que

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}.$$

Cette dernière possède une expression sous forme explicite $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \tfrac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)$$

En comparant à l'expression de n en fonction d'un entier naturel non nul m quelconque, trouvée ci-dessus, on trouve que

$$n = \tfrac{1}{5}(\varphi^{4m+1} + \bar{\varphi}^{4m+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{5}(\varphi^{2m}\bar{\varphi}^{2m+1} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m+1} - \varphi - \bar{\varphi})$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{5}(\varphi^{2m+1}\varphi^{2m} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m+1} - (\varphi\bar{\varphi})^{2m}\varphi - (\varphi\bar{\varphi})^{2m}\bar{\varphi})$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{5}(\varphi^{2m+1}\varphi^{2m} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m+1} - \varphi^{2m+1}\bar{\varphi}^{2m} - \varphi^{2m}\bar{\varphi}^{2m+1})$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{5}((\varphi^{2m} - \bar{\varphi}^{2m})(\varphi^{2m+1} - \bar{\varphi}^{2m+1}))$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{5}}{5}((\varphi^{2m} - \bar{\varphi}^{2m})\frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^{2m+1} - \bar{\varphi}^{2m+1}))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n = F_{2m}F_{2m+1}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

Il en va de même pour k !

$$k = \frac{1}{5}(\varphi^{4m-1} + \bar{\varphi}^{4m-1} + 1)$$

(Prop 4.2 et 4.4)

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{5}(\varphi^{2m}\bar{\varphi}^{2m-1} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m-1} - \varphi^{-1} - \bar{\varphi}^{-1})$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{5}(\varphi^{2m-1}\varphi^{2m} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m-1} - (\varphi\bar{\varphi})^{2m}\varphi^{-1} - (\varphi\bar{\varphi})^{2m}\bar{\varphi}^{-1})$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{5}(\varphi^{2m-1}\varphi^{2m} + \bar{\varphi}^{2m}\bar{\varphi}^{2m-1} - \varphi^{2m-1}\bar{\varphi}^{2m} - \varphi^{2m}\bar{\varphi}^{2m-1})$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{5}((\varphi^{2m} - \bar{\varphi}^{2m})(\varphi^{2m-1} - \bar{\varphi}^{2m-1}))$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{5}}{5}((\varphi^{2m} - \bar{\varphi}^{2m})\frac{\sqrt{5}}{5}(\varphi^{2m-1} - \bar{\varphi}^{2m-1}))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = F_{2m}F_{2m-1}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

4.7 Conclusion

Nous pouvons donc affirmer que les seuls voisins diagonaux montants du triangle de Pascal sont dans une ligne correspondant au produit de n'importe quel terme pair (non nul) de la suite de Fibonacci avec le terme suivant, et en colonne le produit de ce même terme pair mais avec le terme précédent. En d'autres mots,

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \tbinom{F_{2m}F_{2m+1}-1}{F_{2m}F_{2m-1}} = \tbinom{F_{2m}F_{2m+1}}{F_{2m}F_{2m-1}-1}}$$

Voici quelques exemples.

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$$

$$\binom{F_2F_3 - 1}{F_2F_1} = \binom{F_2F_3}{F_2F_1 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \binom{1}{1} = \binom{2}{0} = 1$$

ainsi que :

$$\binom{F_4F_5-1}{F_4F_3} = \binom{F_4F_5}{F_4F_3-1}$$
$$\Leftrightarrow \binom{14}{6} = \binom{15}{5} = 3003$$

Enfin, il est intéressant de noter que les solutions sont en nombre infini et s'espacent d'environ φ^4 car les deux suites $(n_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(k_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont dites $O(\varphi^{4m})$ et donc finissent par avoir une croissance très similaire. Cette dernière étant exponentielle, les valeurs de n et k deviennent vite faramineuses, pourtant pour des valeurs de m juste plus grandes que 2 !

5 Deuxième partie, extension aux nombres réels

Après avoir trouvé les voisins dans le triangle de Pascal, on cherche à généraliser ce résultat.
Pour obtenir une telle réponse au problème notre but premier est de généraliser le triangle de pascal sur l'ensemble du plan réel. De ce fait, on ne travaillera plus avec k et n des entiers naturels mais bien α et β des réels et précisément des entiers relatifs.
On souhaite évidemment que si α et β sont des entiers naturels, $\binom{n}{k} = \binom{\alpha}{\beta}$.

On s'intéressera de manière prononcée aux α et β entiers relatifs.

On se place alors dans le plan $\mathbb{R}^2$ qu'on divisera par la suite en 4 parties délimitées par les axes.
On appellera plan de Pascal généralisé la fonction qui au vecteur de coordonnées entières $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ associe le coefficient binomial $\binom{\alpha}{\beta}$.

Il s'avérera commode de remarquer des similitudes avec le triangle original de Pascal permettant ainsi de réutiliser les formules trouvées sur les entiers.

6 Préliminaires

Il est bon de rappeler certaines propriétés que nous utiliserons par la suite pour la démonstration.

6.1 Fonction gamma

- On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$$

On utilisera cette fonction comme généralisation de la factorielle aux réels non négatif et non nuls grâce à une propriété classique de cette intégrale. En effet en intégrant par parties,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad (1)$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

- On peut de plus étendre la fonction Gamma à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$, mais pas au-delà. En effet on trouve des pôles de la fonction Gamma sur $\mathbb{Z}^-$.

Le prolongement s'effectue en utilisant la propriété $_{(1)}$:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

En itérant cette propriété, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i})\Gamma(x+n+1). \qquad (2)$$

On peut donc s'assurer de l'existence d'un n_0 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \exists n \geq n_0, \quad x+n+1 > 0.$$

Par conséquent on peut prolonger la fonction Gamma, cette fonction sera alors toujours définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ En effet, ce prolongement admet une forme indéterminée sur les entiers négatifs, y compris en 0.

On peut étudier le comportement de la fonction lorsqu'on approche d'un entier négatif.
D'après le prolongement,

$$\lim_{x\to -n} \Gamma(x) = \lim_{x\to -n} (\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i})\Gamma(x+n+1) = \pm\infty$$

en raison de la divergence du terme en n du produit.

Plus précisément, on peut faire la distinction des cas où n est pair et n est impair.
En effet comme $\forall i \in [\![0;n]\!], \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, x < -n, \ \frac{1}{x+i} < 0$ de façon à :

$$\Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{-x-i})(-1)^{n+1}\Gamma(x+n+1) = \pm\infty$$

Si n est pair,

$$\lim_{x\to -n^+} \Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{-x-i})\Gamma(1) \lim_{x\to -n^+} \frac{-1}{n-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -n^-}\Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{-x-i})\Gamma(1)\lim_{x\to -n^-}\frac{-1}{n-x} = -\infty$$

Si n est impair,

$$\lim_{x\to -n^+}\Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{-x-i})\Gamma(1)\lim_{x\to -n^+}\frac{1}{n-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -n^-}\Gamma(x) = (\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{-x-i})\Gamma(1)\lim_{x\to -n^-}\frac{1}{n-x} = +\infty$$

6.2 Prolongement du coefficient binômial

On définit

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

On considère en effet la fonction $\Gamma(x+1)$ comme un prolongement aux réels de $x!$.

6.3 Rappel sur les factorielles

Il est bon de rappeler quelques propriétés que nous utiliserons.

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

7 Création des axes

On entame dès à présent la construction du triangle généralisé, c'est-à-dire, des coefficients binomiaux aux valeurs entières négatives.
On commence par définir les coefficients binomiaux le long des axes.

Lorsque $\alpha = 0$ et β n'est pas un entier négatif,

$$\binom{0}{\beta} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta+1)}.$$

Si β est un entier relatif différent de 1 alors soit $\beta+1$ soit $-\beta+1$ est un pôle de Gamma ! Par conséquent, on pose $\binom{0}{\beta}=0$ car Gamma diverge en ses pôles.

Si $\beta=0$, $\binom{0}{0}=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}=1$.

Cet axe correspond à une colonne du triangle généralisé. Sur cet axe, le coefficient binomial vaut 1 en 0 et 0 sinon.

Lorsque $\beta=0$ et α n'est pas un entier négatif,

$$\binom{\alpha}{0}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)\Gamma(\alpha+1)}=1.$$

Par conséquent, on pose $\binom{\alpha}{0}=1$ aussi lorsque α est un entier négatif.

Cet axe correspond à une ligne du triangle généralisé. Sur cet axe, le coefficient binomial vaut 1.

Pour chaque partie du plan, on pourra alors se concentrer uniquement sur leur intérieur sans se soucier des cas limites le long des axes. Nous pourrons alors ainsi prendre, par exemple, les cas où $\alpha<0$ et $\Gamma(\alpha+1)$ n'est jamais définie par l'intégrale, on se doit alors de la prolonger.

8 Construction du reste du triangle

8.1 Partie Positive

On entend par partie positive les cas où à la fois α et β sont positifs. Étant donné que le cas où $\alpha\geq\beta$ revient simplement à construire le triangle de Pascal, on se concentrera uniquement sur le cas où $\alpha<\beta$.

Dans ce cas, on remarque que le facteur $\Gamma(\alpha-\beta+1)$ n'est jamais défini par l'intégrale ($\alpha-\beta+1\leq 0$). On tombe sur un pôle de Gamma ! De ce fait, on pose

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \binom{\alpha}{\beta}:=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\lim_{\alpha-\beta+1\to -n}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}=0.}$$

On peut alors reformuler ce choix : dans le plan généralisé de Pascal, tout ce qui se trouve strictement à droite du triangle de Pascal classique vaut 0.

Ce résultat est dans une certaine mesure intuitif. En effet, lorsque l'on construit le triangle de Pascal. i.e. en utilisant la formule $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$, pour obtenir la diagonale des 1 à partir du premier 1 initial en $(0, 0)$, on se doit d'avoir un 0 à droite de celui-ci ! Mais pour avoir le 1 juste en dessous il faut un autre 0 à droite ! On construit alors de proche en proche cette partie du triangle, et on trouve 0 partout.

Nous reparlerons plus tard de la formule de Pascal et nous verrons que celle-ci n'est pas si générale que ça.

8.2 Partie β négative

L'argumentaire pour la partie strictement à gauche du triangle de Pascal (où seul β est à valeur négative) est similaire à la partie précédente.

On se place dans le cadre où β est un entier relatif strictement plus petit que 1. $\Gamma(\beta+1)$ n'est alors jamais défini par l'intégrale. Quant à eux, $\Gamma(\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha - \beta + 1)$ seront toujours définis, par hypothèse. Alors on pose

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \lim_{\beta+1 \to -n} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} = 0.}$$

On peut alors reformuler ce choix : dans le plan de Pascal généralisé, tout ce qui se trouve à gauche du triangle de Pascal classique vaut 0.

De manière analogue, on peut également dire que pour former la colonne des 1 dans le triangle de Pascal, on se doit de trouver un 0 à gauche du 1 originel. Pour obtenir le 1 encore en dessous il faut un autre 0 en dessous de ce 0, pour obtenir cette autre 0 il faut alors un 0 à gauche de celui-ci ! On reconstruit alors de proche en proche la partie gauche du triangle, où tout vaut 0.

8.3 1^{re} identité triangulaire

On appellera identité triangulaire les identités permettant la construction des coefficients dans le plan de Pascal généralisé à l'aide d'équivalent ou de limite. Plus précisément, on partira du cas plus générale des réels pour approcher celui des entiers.

8.3.1 Méthode par prolongement

On se place cette fois-ci dans le cadre où seul α est un entier strictement négatif alors que β est un entier strictement positif (partie en haut à droite des axes).

Dans cette disposition on remarquera que l'on aura toujours $\alpha-\beta+1<1$, venant du fait que $\alpha<1$ et $-\beta<-1$.
Ni $\Gamma(\alpha+1)$ ni $\Gamma(\alpha-\beta+1)$ ne seront définies par l'intégrale.
Les choses se compliquent, on a à la fois un prolongement à faire en haut et en bas de l'expression du coefficient binomial, cela entraîne forcément une forme indéterminée !

On introduit alors $d\alpha$ un réel voué à être infiniment petit tel que, avec α un entier strictement plus petit que 0, $\alpha+d\alpha$ est un réel. On peut alors écrire que :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+d\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+d\alpha-\beta+1)}$$

Qui en utilisant le prolongement de Gamma aux entiers naturels $-\alpha-1$ et $\beta-\alpha-1$ le coefficient devient :

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\prod_{i=0}^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\Gamma(d\alpha+1)(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-1}\alpha+d\alpha-\beta+1+k)\frac{1}{\Gamma(d\alpha+1)}$$

En remarquant que quelque soit $i\in[\![0;-\alpha-2]\!]$, $\quad\alpha+d\alpha+1+i<0$ et que quelque soit$k\in[\![0;\beta-\alpha-2]\!]$, $\quad\alpha+d\alpha-\beta+1+k<0$, en sortant les derniers termes des produits :

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\frac{d\alpha}{d\alpha}(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\Gamma(d\alpha+1)(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-2}\alpha+d\alpha-\beta+1+k)\frac{1}{\Gamma(d\alpha+1)}$$

On peut alors dès maintenant faire tendre $d\alpha$ vers 0 sans risque d'obtenir une forme indéterminée.

$$\lim_{d\alpha\to 0}\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+1+i})(\prod_{k=0}^{\beta-\alpha-2}\alpha-\beta+1+k)$$

Puis on effectue le changement d'indice $j=-(\alpha+1+i)$ et $l=-(\alpha-\beta+1+k)$ on se retrouve avec :

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(-1)^{-\alpha-1}(-1)^{\beta-\alpha-1}\prod_{j=1}^{-\alpha-1}\frac{1}{j}\prod_{l=1}^{\beta-\alpha-1}l$$

En utilisant la propriété des factorielles rappelée dans les préliminaires :

$$\lim_{d\alpha\to 0}\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}=\frac{(-1)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\frac{(\beta-\alpha-1)!}{(-\alpha-1)!}$$

On reconnaît alors un coefficient binômial et on trouve la 1^{re} identité :

$$\boxed{\lim_{d\alpha\to 0}\binom{\alpha+d\alpha}{\beta}=(-1)^{\beta}\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}}$$

On posera alors dès à présent dans le plan généralisé et dès que l'on se retrouve dans le cas où seul α est un entier négatif que :

$$\binom{\alpha}{\beta}=(-1)^{\beta}\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$$

On a maintenant complété les 3/4 du triangle.

8.3.2 1^{re} identité complémentaire

On remarque alors un lien entre deux coefficients binomiaux($\binom{\alpha}{\beta}$ et $\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$).

Dès lors, on peut caractériser la partie du triangle où α est non pas un entier négatif mais bien un réel négatif.
Pour ce cas plus général on utilisera la formule des compléments qui s'énonce comme suit :

$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

Soit α un réel négatif non entier et β un réel positif quelconque lesquels ne sont pas entiers, étudions le quotient :

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha)}$$

En prenant $z=-\alpha$ puis $z=\beta-\alpha$ dans la formule des compléments, on se retrouve avec :

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+1)=-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Ainsi que :

$$\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)=-\frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-\beta))}$$

En sommes on se retrouve avec la 1ère identité qui complète un plan entier du triangle (quand α est l'unique négatif) :

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\sin(\pi(\alpha-\beta))}{\sin(\pi\alpha)}\binom{\beta-\alpha-1}{\beta}}$$

On peut de plus retrouver le résultat de la méthode par prolongement en réintroduisant $d\alpha$.

Soit α un entier strictement négatif et β un entier strictement positif et $d\alpha$ un réel de sorte que $\alpha + d\alpha$ soit un réel négatif non entier.
De cette façon on peut appliquer l'identité complémentaire à ces deux réels :

$$\binom{\alpha + d\alpha}{\beta} = \frac{\sin(\pi(\alpha + d\alpha - \beta))}{\sin(\pi(\alpha + d\alpha))}\binom{\beta - \alpha - 1 - d\alpha}{\beta}$$

D'après les formules d'additions du sinus :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha + d\alpha - \beta))}{\sin(\pi(\alpha + d\alpha))} = \frac{\sin(\pi(\alpha - \beta))\cos(\pi d\alpha) + \cos(\pi(\alpha - \beta))\sin(\pi d\alpha)}{\sin(\pi\alpha)\cos(\pi d\alpha) + \sin(\pi d\alpha)\cos(\pi\alpha)}$$

Comme α et $\alpha - \beta$ sont des entiers :

$$= \frac{\cos(\pi(\alpha - \beta))}{\cos(\pi\alpha)} = \frac{(-1)^{\alpha - \beta}}{(-1)^{\alpha}} = (-1)^{\beta}$$

On retrouve alors que :

$$\binom{\alpha + d\alpha}{\beta} = (-1)^{\beta}\binom{\beta - \alpha - d\alpha - 1}{\beta}$$

Et lorsque $d\alpha \longrightarrow 0$:

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{\beta}\binom{\beta - \alpha - 1}{\beta}}$$

8.4 2^{me} identité triangulaire

8.4.1 Méthode par prolongement

On va définir le coefficient binômial lorsque α et β sont des entiers négatifs.
On se place de plus dans le cadre où $\Gamma(\alpha - \beta + 1)$ est définie par l'intégrale.
i.e. $\alpha - \beta + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta - 1$
En outre α et β sont des entiers strictement négatifs et α est moins négatif que β.

On introduit alors $d\alpha$ et $d\beta$ des réels infiniment petits tels que $\alpha + d\alpha$ et $\beta + d\beta$ ne soient pas des entiers strictement négatifs. On peut alors écrire que :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+d\alpha+1)}{\Gamma(\beta+d\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+d\alpha-d\beta+1)}$$

Il est clair que $\alpha+d\alpha+1$ et $\beta+d\beta+1$ sont des réels négatifs.
On utilise alors $_{(2)}$ et on choisit délibérément comme entier n respectivement $-\alpha \in \mathbb{N}$ et $-\beta \in \mathbb{N}$.

i.e. $\Gamma(\alpha+d\alpha+1) = (\prod_{i=1}^{-\alpha-1} \frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\Gamma(d\alpha+1)$
$\Gamma(\beta+d\beta+1) = (\prod_{i=1}^{-\beta-1} \frac{1}{\beta+d\beta+1+i})\Gamma(d\beta+1)$

En somme :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+d\alpha-d\beta+1)}\cdot(\prod_{i=0}^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\cdot(\prod_{i=0}^{-\beta-1}\beta+d\beta+1+i)\cdot\frac{\Gamma(d\alpha+1)}{\Gamma(d\beta+1)}$$

En conséquence :

$$\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta} = \frac{\Gamma(d\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+d\alpha-d\beta+1)\Gamma(d\beta+1)}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+d\alpha+1+i})\cdot(\prod_{i=0}^{-\beta-2}\beta+d\beta+1+i)$$

Il n'y a maintenant plus de formes indéterminées dans les produits lorsque $d\alpha$ et $d\beta$ tendent vers 0. En outre :

$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{\alpha+1+i})\cdot(\prod_{i=0}^{-\beta-2}\beta+1+i)$$

On remarque que $\forall i \in [0,-\alpha-2], \quad \alpha+1 \leq \alpha+1+i \leq -1$

Aussi $\forall i \in [0,-\beta-2], \quad \beta+1 \leq \beta+1+i \leq -1$
Donc :

$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{(-1)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot(\prod_{i=0}^{-\alpha-2}\frac{1}{-\alpha-1-i})\cdot(\prod_{i=0}^{-\beta-2}-\beta-1-i)$$

On effectue alors le changement d'indice $l=-\alpha-1-i$ et $k=-\beta-1-i$.

On obtient alors :

$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{(-1)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot(\prod_{l=1}^{-\alpha-1}\frac{1}{l})\cdot(\prod_{k=1}^{-\beta-1}k)$$

$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{(-1)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \cdot \frac{(-\beta-1)!}{(-\alpha-1)!}$$
$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{(-1)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\alpha)}$$

Ce qui nous donne la seconde identité :

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot (-1)^{-\alpha-\beta} \cdot \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}}$$

8.4.2 2^{me} identité complémentaire

On utilisera de nouveau la formule des compléments :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

On peut alors utiliser cette expression dans le même contexte que précédemment. i.e. $0 > \alpha > \beta - 1$ mais cette fois ci ni α ni β ne sont des entiers négatifs. On peut aussi l'appliquer au cas plus général $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, permettant de remplir une partie entière du plan !

On remarque que le quotient :

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}}{\frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta)}$$

En prenant $z = -\alpha \notin \mathbb{Z}$ dans la formule des compléments, on s'aperçoit que :

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha) = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

De cette manière on trouve que :

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)}$$

En définitive on trouve une formule similaire mais plus générale que l'identité précédente, les deux rassemblées permettent la formation d'une bonne partie du triangle.

Voici la seconde identité complémentaire :

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}}$$

Cette identité est bien plus puissante que la précédente. En effet, nous pouvons en introduisant $\alpha + d\alpha$ et $\beta + d\beta$ retrouver la première identité. De plus, la formule des compléments s'applique à un domaine bien plus large.

En définitive : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{-}\backslash\{0\}, \forall d\alpha, d\beta \in \mathbb{R}, \alpha + d\alpha, \beta + d\beta \notin \mathbb{Z}$

$$\binom{\alpha + d\alpha}{\beta + d\beta} = \frac{\sin(\pi\beta + \pi d\beta)}{\sin(\pi\alpha + \pi d\alpha)}\binom{-\beta - d\beta - 1}{-\alpha - d\alpha - 1}$$

En utilisant les formules d'additions :

$$\frac{\sin(\pi\beta)\cos(\pi d\beta) + \sin(\pi d\beta)\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)\cos(\pi d\alpha) + \sin(\pi d\alpha)\cos(\pi\alpha)}\binom{-\beta - d\beta - 1}{-\alpha - d\alpha - 1} = \frac{\sin(\pi d\beta)\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi d\alpha)\cos(\pi\alpha)}\binom{-\beta - d\beta - 1}{-\alpha - d\alpha - 1}$$

Car $\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi\beta) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ Comme le second coefficient binômial est toujours défini par l'intégrale pour des petits $d\alpha$ et $d\beta$, sa limite quand ces deux quantités tendent vers 0 est le réel $\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$.

De cette manière, le quotient de $\binom{\alpha+d\alpha}{\beta+d\beta}$ et $\frac{\sin(\pi d\beta)\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi d\alpha)\cos(\pi\alpha)}$ converge vers une constante réelle.

Ainsi :

$$\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha, d\beta \longrightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(\pi d\beta)\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi d\alpha)\cos(\pi\alpha)}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1} \underset{d\alpha, d\beta \longrightarrow 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}(-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

Car $\sin(a) \underset{a \longrightarrow 0}{\sim} a$ et $\cos(a) \underset{a \longrightarrow 0}{\sim} 1$

En somme, quelque soit α et β des entiers négatifs on pourra construire leur coefficient binômial en utilisant le cas où α et β sont des entiers positifs et donc en utilisant le triangle original, celui de Pascal.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, 0 < \alpha, 0 < \beta$

$$\boxed{\binom{\alpha}{\beta} \underset{d\alpha, d\beta \longrightarrow 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot (-1)^{\alpha-\beta} \cdot \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}}$$

La présence d'un équivalent freine un peu notre progression et nous empêche de complètement finaliser la construction de notre triangle.

si alpha est plus négatif que beta, on choisit par convention la valeur 0, tout en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit que d'une limite restreinte (dalpha/dbeta doit rester borné)
En effet, le binôme $\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ est alors renvoyé vers partie à droite du triangle de Pascal où tout le monde vaut 0.
Cette convention permet la satisfaction de l'identité triangulaire et complémentaire.

Pour le cas où β est plus négatif que α, on doit d'abords se ramener à des propriétés essentielles à la construction du triangle de Pascal.

8.5 Rôle de la propriété de symétrie

Dans le triangle de Pascal, une propriété bien connue est la propriété de symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

On peut alors vérifier que cette transformation est toujours valide dans les réels !

Soit σ_0 la transformation qui à $\binom{\alpha}{\beta}$ renvoie $\binom{\alpha}{\alpha-\beta}$. Si on applique deux fois cette transformation on retombe sur l'identité, on a donc bien une symétrie à condition que l'égalité soit vérifiée.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$$

Par définition

$$\binom{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha-(\alpha-\beta)+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \binom{\alpha}{\beta}$$

En définitive, on retrouve bien la symétrie originale.

On peut alors l'appliquer à notre seconde identité triangulaire ! $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_-^*, \quad \beta < \alpha$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\alpha-\beta} \underset{d\alpha, d\beta \to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot (-1)^{-\alpha-\beta} \cdot \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

Mais si $\beta < \alpha$ alors $\alpha - \beta > 0$.
Dans ce cas, toutes les conditions sont réunies pour appliquer la première

identité !

$$\binom{\alpha}{\alpha-\beta} = (-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{\alpha-\beta}$$

En remarquant que $\binom{-\beta-1}{\alpha-\beta} = \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$ en utilisant les formules explicites on se retrouve avec :

$$(-1)^{\alpha-\beta}\binom{-\beta-1}{\alpha-\beta} \underset{d\alpha,d\beta\to 0}{\sim} \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot(-1)^{-\alpha-\beta}\cdot\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

si β est plus négatif que α, on choisit par convention une limite directionnelle ($\frac{d\alpha}{d\beta}$ tend vers 1). La fonction ainsi prolongée satisfait les identités triangulaires et la symétrie σ_0.

A partir de maintenant et pour finaliser la construction complète de notre triangle. Lorsque β est plus négatif que α on dit que :

$$\binom{\alpha}{\beta} = (-1)^{-\alpha-\beta}\cdot\binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

9 Symétries généralisées

On remarque un ensemble de symétries tout à fait surprenantes dans le triangle de Pascal.
En plus de la symétrie classique, la première identité met en lumière une antisymétrie alternée lorsque $\beta \geq 0$.
Soit σ_1 la transformation qui envoie (α, β) vers$(\beta-\alpha-1, \beta)$ pour β positif et α un relatifs quelconque.

Si on effectue $\sigma_1 \circ \sigma_1$ on retombe sur $\binom{\alpha}{\beta}$, l'égalité étant déjà vérifiée on a bien une symétrie.
Elle est alternée avec une antisymétrie par le terme en $(-1)^{\beta}$ qui fait l'alternance de signe pour les β pair et impair.
En outre, dans le plan généralisé, lorsque $\beta \geq 0$ et que l'on se situe au dessus de l'axe de symétrie formé par σ_1 alors les valeurs de la 0-ième colonne associée à $\beta = 0$ sont positives et donc de même signe que les termes de cette même colonne lorsque l'on se situe en dessous de l'axe de symétrie de σ_0 (symétrie).
Pour les valeurs de la première colonne ($\beta = 1$), si on se situe au dessus de l'axe de symétrie alors toute les valeurs de la colonne seront négatives tandis que celles en dessous de l'axe seront positives (antisymétrie).
Lorsque $\beta = 0$ les valeurs sur l'axe des ordonnées est 1, on peut donc bel et bien étendre cette symétrie jusqu'à 0 !

On peut de plus trouver l'équation de droite qui régit cette symétrie. C'est le cas d'égalité de la transformation σ_1. i.e.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - \alpha - 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Qui est valable uniquement pour $2\alpha = \beta - 1$.
On assume que l'axe des y est représenté par α et l'axe des x par β.
σ_1 est donc la symétrie affine d'équation de droite $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

On peut faire la même chose pour la symétrie de σ_0.
Le cas d'égalité étant vérifié pour $\beta = \alpha - \beta$ on trouve que σ_0 est la symétrie affine d'équation de droite $y = 2x$.

La deuxième identité triangulaire met en lumière une troisième symétrie. Soit σ_2, la transformation qui envoie (α, β) vers $(-\beta - 1, -\alpha - 1)$.
Si on effectue $\sigma_2 \circ \sigma_2$, on retombe bel et bien sur l'identité.
Cette symétrie est également une antisymétrie alternée cette fois-ci régit par le terme en $(-1)^{\alpha-\beta}$ de la deuxième identité triangulaire. Le cas d'égalité est représenté par :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta - 1 \\ -\alpha - 1 \end{pmatrix}$$

nous donne que σ_2 est la symétrie d'équation de droite $y = -x - 1$.

On peut s'apercevoir qu'il n'existe qu'un nombre limité de symétrie dans le triangle. Précisément, si l'on compose plusieurs symétrie entre elles alors cela créer d'autres symétries !

Ces trois axes de symétrie se rencontrent en un point de concours que l'on notera $\gamma_0 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.
On notera également γ le coefficient binômial associé à γ_0.
γ est alors une constante :

$$\boxed{\gamma = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)\Gamma(2/3)} \approx 1.4609984}$$

Ceci est très proche du minimum de la fonction Γ (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui est atteint pour la valeur 1.4616321

10 Voisin et anti-voisin

L'objectif de cette partie est de trouver à l'instar du cas que l'on a étudié plus tôt des entiers naturels toutes les valeurs de α et de β qui admettent un voisin. On reprend la même définition de voisin que l'on avait prise auparavant, on définit cependant un anti-voisin qui est un voisin de signe opposé à notre nombre choisi. On a vu qu'avec les antisymétries des signes - apparaissent de façon ordonnées.

10.1 Suite de Fibonacci généralisée

Pour rappel on avait pour résultat sur les entiers que :

— Voisins verticaux : $k = 0$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

— Voisins horizontaux : $n = 2k + 1$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$

— Voisin en diagonal descendante : $n = k$ pour $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

— Voisin en diagonal montante : $n = F_{2m}F_{2m+1}$ et $k = F_{2m}F_{2m-1}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et pour le cas $\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$

La suite de Fibonacci intervenant dans les résultats et sachant le fait que nous travaillons sur tous les entiers, il est bon de généraliser la suite de Fibonacci pour les entiers négatifs. On la définit comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1}$$

Qui vient tout simplement de la définition classique de Fibonacci.
On peut alors calculer quelques premiers termes de cette suite.

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, \quad F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1, \quad F_{-3} = 2, \quad F_{-4} = -3$$

On s'aperçoit que ceci correspond à la suite de Fibonacci mais alternée ! On pose alors quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, $H(n) : F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$.

Cette expression est symétrique pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, il suffit alors de montrer cette formule par récurrence sur $\mathbb{N}$.

<u>Initialisation :</u> $F_{-0} = -F_0 = 0$ et $F_{-1} = F_1 = 1$ $H(0)$ et $H(-1)$ sont vraies.

<u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $H(n)$ et $H(n-1)$ sont vraies.

On dispose alors des deux égalités :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n, \qquad F_{-n+1} = (-1)^n F_{n-1}$$

Par différence :

$$F_{-n+1} - F_{-n} = (-1)^n(F_{n-1} + F_n) \leftrightarrow (-1)^{n+2}F_{n+1} = F_{-n-1}$$

On retrouve $H(n+1)$.
En sommes, $H(0)$ et $H(-1)$ sont vraies, H est héréditaire. Par principe de récurrence double :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$$

10.2 Cas où α est l'unique négatif

On retourne dès à présent à notre plan généralisé de Pascal. On va maintenant chercher les voisins égaux dans celui-ci dans le cas où $\alpha \leq 0$ et $\beta \geq 0$. On ne se souciera pas des cas triviaux où tous les coefficients binômiaux sont nuls.

— Voisins verticaux : Ce cas est le seul où les voisins ne seront pas des anti-voisins puisque les deux coefficients binômiaux se situent sur la même colonne.
  On résonne de la même façon par équivalence :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+1}{\beta}$$

  Par propriété de symétrie :

$$\binom{\beta-\alpha-1}{\beta} = \binom{\beta-\alpha-2}{\beta}$$

  On retombe alors sur le cas précédent des entiers (voisins verticaux) ! On en retire la condition nécessaire et suffisante (rappelée en 6.1) :

$$\beta = 0$$

  Car les deux sont de signes opposés.

— Voisins horizontaux : Les voisins trouvés seront des anti-voisins et dans ce cas ci, $\beta \geq 0$.
  Par équivalence :

$$\binom{\alpha}{\beta+1} = \binom{\alpha}{\beta}$$

Par propriété de symétrie :

$$\binom{\beta-\alpha}{\beta+1} = \binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$$

On retombe sur le cas de la diagonal descendante pour les entiers !
Ainsi :

$$\beta = \beta - \alpha - 1$$

On trouve alors que :

$$\alpha = -1$$

— Diagonal descendante et dans ce cas ci, $\beta \geq 0$:

$$\binom{\alpha+1}{\beta+1} = \binom{\alpha}{\beta}$$

Par propriété de symétrie :

$$\binom{\beta-\alpha-1}{\beta+1} = \binom{\beta-\alpha-1}{\beta}$$

On retombe sur le cas des voisins horizontaux !
On en déduit directement que :

$$\beta - \alpha - 1 = 2\beta + 1 \Longleftrightarrow \alpha = -\beta - 2$$

— Diagonal montante et dans ce cas ci,$\beta \geq 0$:

$$\binom{\alpha+1}{\beta} = \binom{\alpha}{\beta+1}$$

Par symétrie :

$$\binom{\beta-\alpha-2}{\beta} = \binom{\beta-\alpha}{\beta+1}$$

On a pas de formule de référence pour ce cas, par équivalence :

$$\frac{(\beta-\alpha-2)!}{\beta!(-\alpha-2)!} = \frac{(\beta-\alpha)!}{(\beta+1)!(-\alpha-1)!} \longleftrightarrow (\beta+1)(-\alpha-1) = (\beta-\alpha)(\beta-\alpha-1)$$

En développant :

$$\beta(-\alpha-1) - (\alpha+1) = \beta^2 + \beta(-\alpha-1) - \alpha\beta + \alpha(\alpha+1)$$

Cela revient à résoudre une équation quadratique en fonction de β.

$$\beta^2 - \alpha\beta + (\alpha+1)^2 = 0$$

Dont le delta est :

$$\Delta = (-\alpha - 2)(3\alpha + 2)$$

Δ est donc un polynôme de degré 2 dépendant de α.
Ses deux racines sont donc -2 et $\frac{-2}{3}$. Δ est alors positif pour $\alpha \in [-2, -\frac{2}{3}]$ le seul α entier est donc $\alpha = -2$.
Ainsi, $\Delta = 0$ et $\beta = -1$, ce qui est impossible.

Il n'y a aucune solution pour la diagonal montante.

10.3 Cas où α et β sont tous deux négatifs non nuls

La distinction entre anti-voisins et voisins ne sera ici pas instantané car le signe dépend ici de $(-1)^{\alpha-\beta}$ et pourra donc varier.

On aura ici que $\alpha \leq -1$ et $\beta \leq -1$

- Voisins verticaux :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+1}{\beta}$$

Par propriété de symétrie :

$$\binom{-\beta-1}{-\alpha-1} = \binom{-\beta-1}{-\alpha-2}$$

On retombe sur le cas des voisins horizontaux des entiers ! On en déduit directement que :

$$-\beta - 1 = 2(-\alpha - 2) + 1 \longleftrightarrow \beta = 2\alpha + 2$$

Dans ce cas, les signes des deux voisins est donnés par $(-1)^{\alpha-\beta} = (-1)^{\beta}$ et par $(-1)^{\alpha-\beta+1} = (-1)^{\beta+1}$. Les deux signes sont opposés, ce sont donc des anti-voisins.

- Voisins horizontaux : Dans ce cas ci, $\beta \geq 0$.

$$\binom{\alpha}{\beta-1} = \binom{\alpha}{\beta}$$

Par propriété de symétrie :

$$\binom{-\beta}{-\alpha-1} = \binom{-\beta-1}{-\alpha-1}$$

On retrouve le cas des voisins horizontaux des entiers !
On en déduit directement que :

$$\alpha = -1$$

Dans ce cas, les signes des deux voisins est donnés par $(-1)^{\alpha-\beta+1} = (-1)^{\beta}$ et par $(-1)^{\alpha-\beta} = (-1)^{\beta+1}$. Les deux signes sont opposés, ce sont donc des anti-voisins.

— Diagonal descendante :

$$\binom{\alpha}{\beta-1} = \binom{\alpha+1}{\beta}$$

Par propriété de symétrie :

$$\binom{-\beta}{-\alpha-1} = \binom{-\beta-1}{-\alpha-2}$$

On retrouve le cas de la diagonal descendante pour les entiers, en en conclut que :

$$-\beta-1 = -\alpha-2 \longleftrightarrow \alpha = \beta-1$$

Dans ce cas, les signes des deux voisins est donnés par $(-1)^{\alpha-\beta+1} = 1$ et par $(-1)^{\alpha-\beta+1} = 1$. Les deux signes sont les mêmes, ce sont donc des voisins.

— Diagonal montante et dans ce cas ci,$\beta \leq -2$ et $\alpha \leq -2$:

$$\binom{\alpha+1}{\beta} = \binom{\alpha}{\beta+1}$$

Par symétrie :

$$\binom{-\beta-1}{-\alpha-2} = \binom{-\beta-2}{-\alpha-1}$$

On retrouve le cas des diagonales montantes pour les entiers, on en déduit alors que :

$$-\beta-2 = F_{2m}F_{2m+1}, \qquad -\alpha-2 = F_{2m}F_{2m-1}$$

En résumé on obtient alors une formule similaire aux entiers naturels mais en utilisant Fibonacci généralisé.

$$\boxed{\beta = F_{-2m}F_{-2m-1} - 2} \qquad \boxed{\alpha = F_{-2m}F_{-2m+1} - 2}$$

Ce qui est précisément notre formule sur les entiers mais en inversant ligne et colonne.
Le signe du terme de gauche est donné par $(-1)^{\alpha-\beta+1}$ et par $(-1)^{\alpha-\beta-1}$. Ce sont donc des voisins classiques, comme pour le cas des entiers.

11 Conclusion sur les réels

En sommes, on a construit le plan généralisé de Pascal et on a découvert des similitudes de ce plan avec le triangle original. Cela nous a amené à découper le plan en 3 grandes parties reliées les unes aux autres pas de nombreuses symétries.
Ces symétries nous on permis alors de caractériser tous les voisins égaux en valeur absolue en réutilisant les formules trouvées pour le cas des entiers.
On a donc généralisé notre triangle puis généralisé nos formules. Le lecteur

pourra trouver en Annexe une partie du plan généralisé qui montre à quoi doit ressembler ce nouveau triangle.

A Annexe

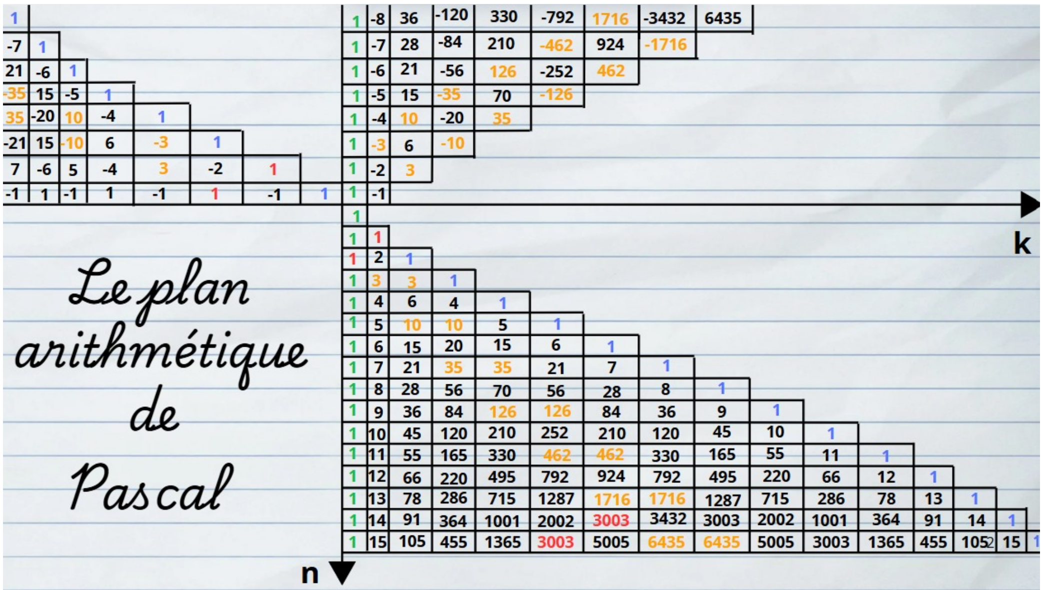

FIGURE 1 – Plan généralisé ou arithmétique de Pascal (Attention, le point (0,0) est le premier 1 de l'axe des n en dessous de l'axe des k et tous les coefficients nuls sont représentés par des espaces vides)