La vasque olympique

Le pavage de la sphère

Li You, Deniz

Université Paris-Saclay

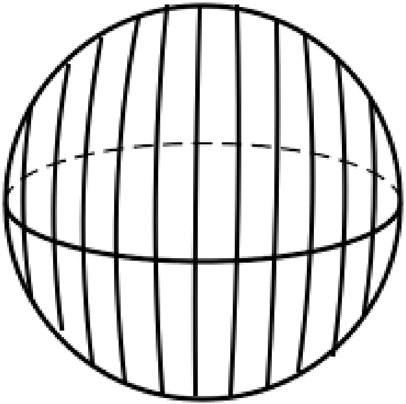
28 mars 2025

La vasque olympique

- Sphère de diamètre 22 m
- Moitié supérieure garnie d'une résille de corde
- Tout point de l'hémisphère est située à au plus 10 cm d'un bout de corde
- Quelle est la longueur de corde nécessaire pour réaliser la résille ?
- Peut-on faire mieux ?

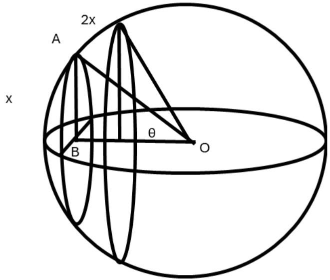
La résille originelle

La résille originelle



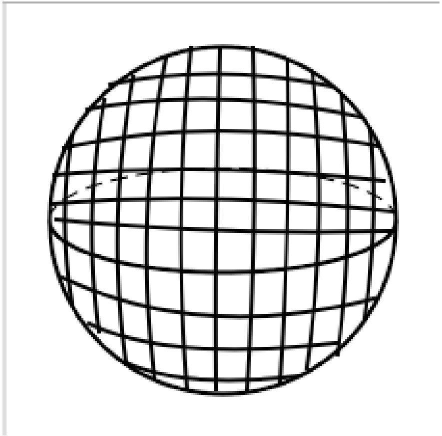
Tranches verticales

Les tranches



$$L = \sum_{k=1}^{n} l_k = 2\sum_{k=1}^{n} \pi R \sin((2k-1)\frac{x}{R}), n \in \mathbb{N}^* \approx 6911,04 \ m$$

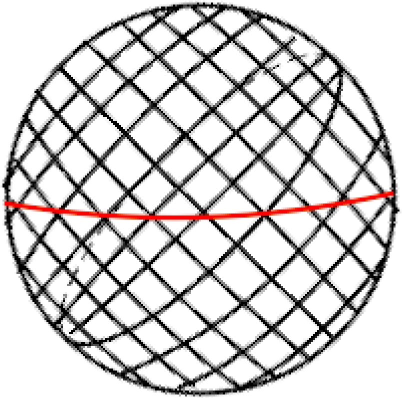
La résille originelle



Tranches horizontales

$$L \approx 2 \times 6911,04 \;\; \approx 13\ 2822,07\ m$$

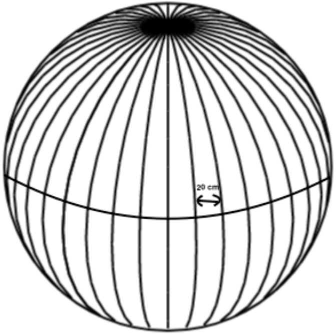
La résille originelle



On tourne la sphère de 45 degrès et on coupe la résille en 2 pour en garder la partie supérieure, on ajoute éventuellement un bout de corde sur l'équateur.

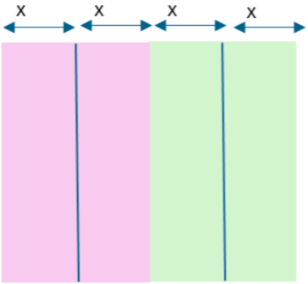
$$L = 6911,04 + 22\pi \approx 6980,15 \ m$$

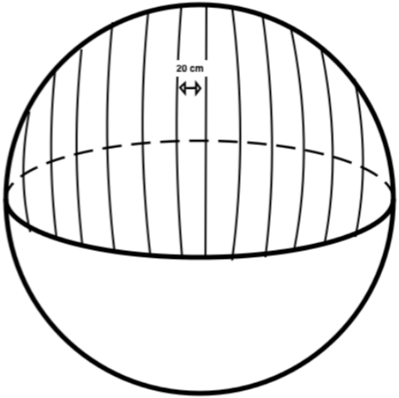
Les méridiens



$$L \approx 5460,09\ m$$

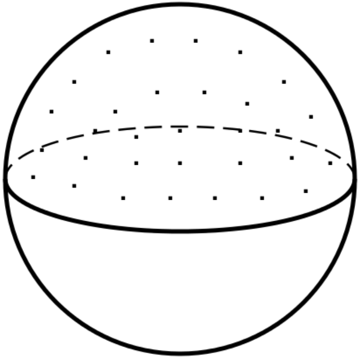
Les tranches verticales





$$L \approx 3524,63\ m$$

Les points

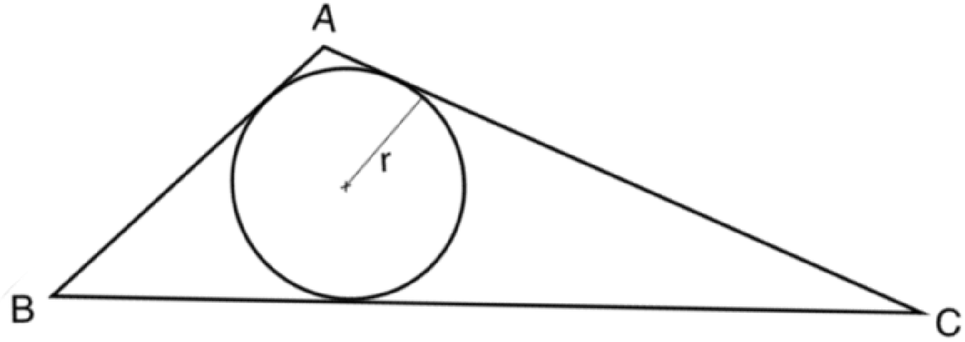


L arbitrairement petit !

Nouvelle formulation du problème

On suppose maintenant que les cordes divisent la demi-sphère en triangles ayant un cercle inscrit de rayon au plus 10 cm.

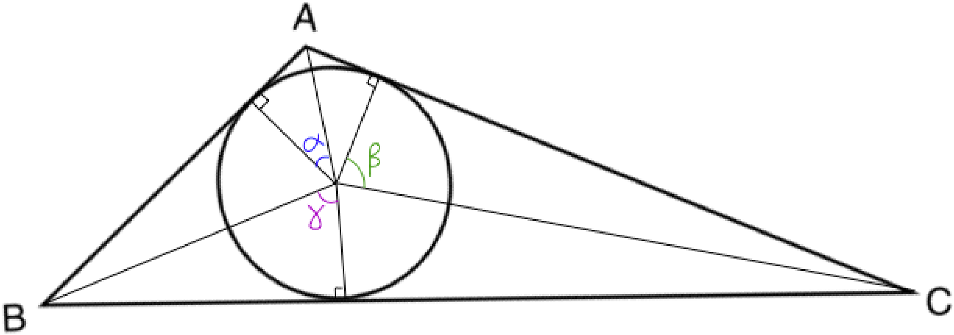
Question auxiliaire : Quel triangle, de rayon inscrit donné, a un périmètre minimum ?



Minimiser le périmètre

On se place dans le plan euclidien. Avec les formules de trigonométrie, on peut exprimer le périmètre et de l'aire du triangle en fonction du rayon du cercle inscrit :

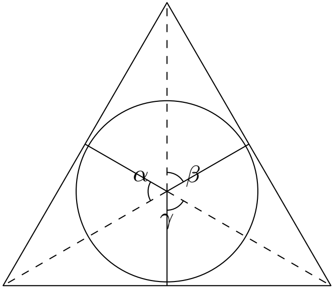
$$P_{\triangle} = 2r(\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma))$$
$$A_{\triangle} = r^2(\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma))$$



Minimiser le périmètre

On veut minimiser $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma)$ sachant que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

$$\tan(x-a)+\tan(x+a) = \frac{tan(x) + tan(a)}{1 - tan(x)tan(a)} + \frac{tan(x) - tan(a)}{1 + tan(x)tan(a)} = 2tan(x)(\frac{1 + 2tan^2(a)}{1 - tan^2(a)tan^2(x)}) \geq 2\tan(x)$$



$\longrightarrow$ il s'agit du triangle équilatéral !

Minimiser le périmètre

Théorème

Parmi tous les triangles euclidiens dont le rayon du cercle inscrit est donné, c'est le triangle équilatéral qui a un périmètre minimum.

Minimiser le périmètre en fonction de l'aire

On a :

$$P_\triangle = 2r(\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma))$$
$$A_\triangle = r^2(\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma))$$

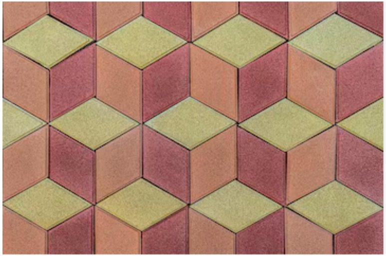
On obtient :

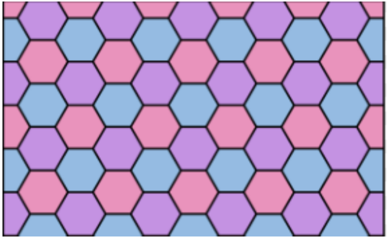
$$\frac{A_\triangle}{P_\triangle} = \frac{1}{2}r$$

$\longrightarrow$ cette relation est vraie pour tout triangle et pour tout polygone circonscrit à un cercle de rayon r

Généralisation à d'autres polygones circonscrits à un cercle de rayon r

$$\frac{A}{P} = \frac{1}{2} r$$





Sur le plan euclidien

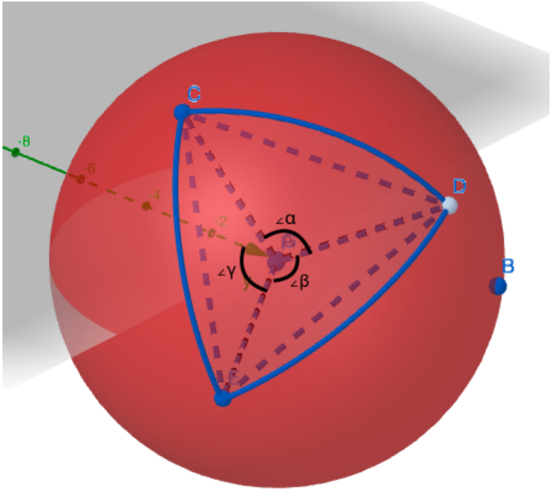
Sur une surface entièrement pavée de triangles ayant un cercle inscrit de rayon au plus r :

$$\frac{P_{total}}{2} > \frac{A_{total}}{r}$$

Si l'aire de la région plane est égale à celle de la région pavée sur la demi-sphère, soit : $\mathrm{A}_{total} = 2\pi\mathrm{R}^2 \approx 759,88\ m^2$, on obtient

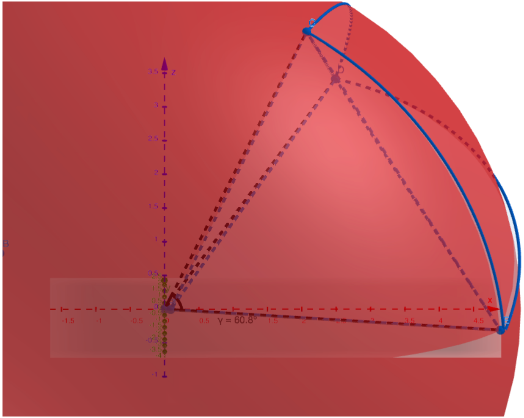
$$L_{corde} > \frac{A_{total}}{r} + 22\pi \approx 6980,61\ m$$

Sur la sphère



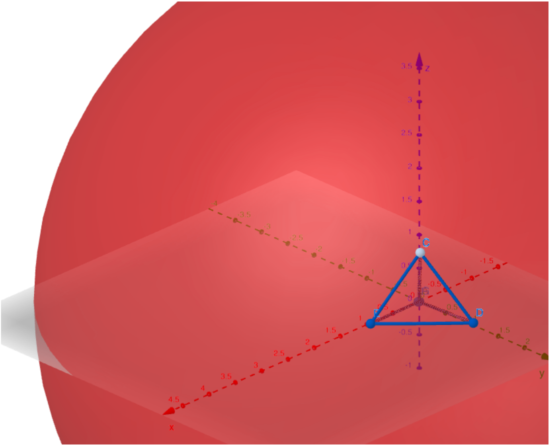
Un triangle sphérique

Sur la sphère



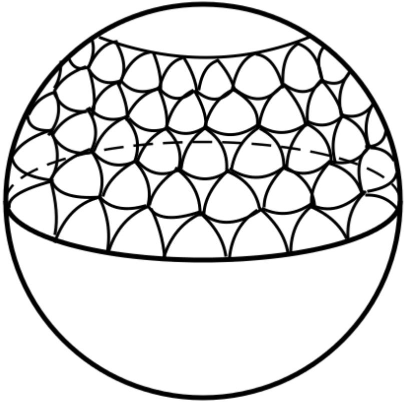
⟶ *les longueurs des arcs sont mesurées par les angles au centre de la sphre*

Sur la sphère



$\longrightarrow$ *localement presque plat*

Sur la sphère



Un exemple de pavage

Sur la sphère

En s'appuyant sur des simulations numériques, on conjecture :

$$\frac{2A}{r} > P$$

$\longrightarrow$ *inégalité au sens inverse de ce dont on aurait besoin pour la minoration cherchée*
$\longrightarrow$ *localement presque plat*
$\longrightarrow$ *hypothèse : triangles pas trop grands pour avoir l'inégalité inverse*