厦门大学《离散数学》期末试题

考试日期：2013.1　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、命题逻辑(5 + 5 + 5 = 15 分)：某电路中有一个灯泡和三个开关 A, B, C。已知在且仅在下述四种情况下灯亮：

① C 的扳键向上，A, B 的扳键向下。　② A 的扳键向上，B, C 的扳键向下。

③ B, C 的扳键向上，A 的扳键向下。　④ A, B 的扳键向上，C 的扳键向下。

设 F 表示灯亮，p, q, r 分别表示开关 A，B，C 的扳板向上。

(1) 求 F 的主合取范式。

(2) 将 F 化成等值的且仅含 $\{\neg, \vee\}$ 中的联结词的公式。

(3) 将 F 化成等值的且仅含 $\{\neg, \rightarrow\}$ 中的联结词的公式。

二、一阶逻辑(12 分)：证明下述推理正确：有些病人相信所有的医生。但是病人都不相信骗子。所以，医生都不是骗子。

三、二元关系(10 分)：设 $<A, R_1>$ 和 $<B, R_2>$ 是两个偏序集，定义 $A\times B$ 上的关系 R_3 如下：对于 $a_1, a_2 \in A$ 和 $b_1, b_2 \in B$ 有 $<<a_1, b_1>, <a_2, b_2>> \in R_3 \Leftrightarrow <a_1, a_2> \in R_1 \wedge <b_1, b_2> \in R_2$。证明 R_3 是 $A\times B$ 上的偏序关系。

四、陪集(8 分)：设 G 是群，$H \le G$，$a \in G$。集合 $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ 称为子群 H 在 G 中的一个右陪集，证明：

(1) $\forall a \in G$，$Ha \ne \varnothing$。

(2) $\forall a, b \in G$，$Ha = Hb \Leftrightarrow a \in Hb$。

五、置换群（15 分）：在 5 阶对称群 S_5 中设

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix},$$

（1）求解群方程 $\sigma x=\tau$ 和 $y\sigma=\tau$；

（2）求 $|\sigma|$ 和 $|\tau|$。

六、格（12 分）：设 $<L,\wedge,\vee,',0,1>$ 为布尔代数，$a,b\in L$，证明

(1) 若 $a\vee b=0$，则 $a=b=0$；

(2) 若 $a\wedge b=1$，则 $a=b=1$；

(3) $a\preceq b\Leftrightarrow b'\preceq a'$。

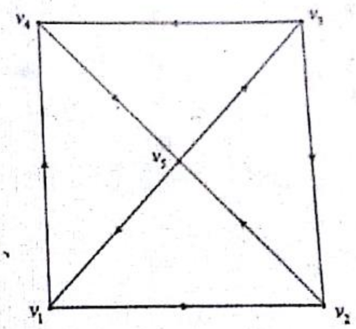
七、图的矩阵表示（2 + 4 + 4 + 2 = 12 分）：

(1) 给出右图所示有向图 D 的邻接矩阵 $A(D)$。

(2) D 中长为 4 的通路有多少条？其中有几条为回路？

(3) 求 D 的可达矩阵 P。

(4) 由 D 的可达矩阵判定 D 的连通性（即判断 D 是否是弱连通的、单向连通的、强连通的）。



八、树（6 分）：设 T 是一棵非平凡的树，其最大度 $\Delta(T)\geq 1$。证明 T 中至少有 $\Delta(T)$ 片树叶。

九、平面图（10 分）：设 G 为面数 $r<12$ 的连通的简单平面图，G 中每个顶点的度数至少为 3。证明 G 中存在次度小于等于 4 的面。