2021-2022 学年第1学期 现代控制理论 第2次作业

版本	**1.0**
专业	2019级自动化
班级	19自动化
学号	20190503310036
姓名	刘艺

评分	90
教师签名	李创

2021.11.22

题目1

已知系统的状态空间描述为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1. 计算该状态空间模型的传递函数。
2. 将系统的输出矩阵修改为 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，再次计算状态空间模型的传递函数。

求解

W(s)，小写s.

1. 由于D=0，传函为$W(S) = C(sI-A)^{-1}B$

   先计算$(sI-A)^{-1}$

   $(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$

   会用Latex语法写公式. 很好！

   式中$adj(sI-A)$表示$(sI-A)$的伴随矩阵，$det(sI-A)$表示矩阵A的特征多项式

   于是

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+3 & s+3 & -1 \\ 0 & s^2+3s & -s \\ 0 & 0 & s^2+s \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+3s}$$

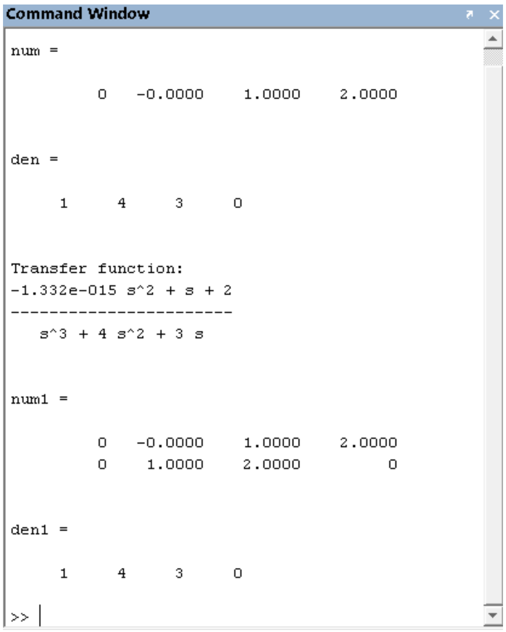
   则传函$W(S) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+4s+3 & s+3 & -1 \\ 0 & s^2+3s & -s \\ 0 & 0 & s^2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+3s} = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}$

2. 同理， $W(S) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+4s+3 & s+3 & -1 \\ 0 & s^2+3s & -s \\ 0 & 0 & s^2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+3s} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 \\ s^2+2s \end{bmatrix}}{s^3+4s^2+3s}$

MATLAB验证

```
A=[0 1 0;0 -1 -1;0 0 -3];
B=[0 ;1 ;1];
C=[1 0 0];
C1=[1 0 0;0 1 0];
D=0;
D1=[0 ;0];
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
G=tf(num,den)
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C1,D1)
```

用MATLAB验证,很好!



```
Command Window

num =

         0   -0.0000    1.0000    2.0000


den =

     1     4     3     0


Transfer function:
-1.332e-015 s^2 + s + 2
-----------------------
   s^3 + 4 s^2 + 3 s


num1 =

         0   -0.0000    1.0000    2.0000
         0    1.0000    2.0000         0


den1 =

     1     4     3     0

>>
```

题目2

> 计算下列系统矩阵的矩阵指数函数。
>
> **1.** $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}$
>
> **2.** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 4 & 4 & 5\end{bmatrix}$
>
> **3.** $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

是否此处为笔误?

求解

我有些不太满意你对本题的、计算时候掌握程度<

$$\frac{-2}{s-2}+\frac{3}{s-3}$$

$$-2e^{2t}+3e^{3t}$$

1.

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1}=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s-5\end{bmatrix}^{-1}=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{s-2}-\frac{2}{s-3} & \frac{-1}{s-2}+\frac{1}{s-3}\\ \frac{6}{s-2}-\frac{6}{s-3} & \frac{\frac{8}{5}}{s-2}-\frac{\frac{3}{5}}{s-3}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3e^{2t}-2e^{3t} & -e^{2t}+e^{3t}\\ 6e^{2t}-6e^{3t} & \frac{8}{5}e^{2t}-\frac{3}{5}e^{3t}\end{bmatrix}$$

×

2.

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} s-1 & -2 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ -4 & -4 & s-5 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\frac{\begin{bmatrix} s^2-5s+4 & 2s-14 & -2-s \\ -s+1 & s^2-6s+9 & -s+2 \\ -4+4s & 4s+4 & s^2-s+2 \end{bmatrix}}{s^3-6s^2+15s-10}
\end{aligned}
$$

缺过程

$$
=\begin{bmatrix}
e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{15}}{5}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & -2e^{t}+2e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{2\sqrt{15}}{15}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{7\sqrt{15}}{30}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}e^{t} \\
-\frac{2\sqrt{15}}{15}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & \frac{2}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{15}}{5}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & -\frac{1}{6}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{15}}{10}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{1}{6}e^{t} \\
\frac{8\sqrt{15}}{15}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & \frac{4}{3}e^{t}-\frac{4}{3}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{4\sqrt{15}}{5}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) & \frac{2}{3}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{2\sqrt{15}}{5}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{1}{3}e^{t}
\end{bmatrix}
$$

3.

$$
e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} s-4 & -1 & 2 \\ -1 & s & -2 \\ -1 & 1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}
$$

缺过程

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1}\frac{\begin{bmatrix} s^2-3s+2 & s-1 & 2-2s \\ s-1 & s^2-7s+14 & 2s-10 \\ s-1 & 5-s & s^2-4s-1 \end{bmatrix}}{s^3-7s^2+15s-9} \\
&= \begin{bmatrix} (1+t)e^{3t} & te^{3t} & -2te^{3t} \\ te^{3t} & 2e^{t}+(t-1)e^{3t} & -2e^{t}+2(-t+1)e^{3t} \\ te^{3t} & e^{t}+(t-1)e^{3t} & -e^{t}+(-2t+2)e^{3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

MATLAB验证

```
A1=[0 1;-6 5];
syms s
I1=eye(2);
C1=s*I1-A1;
E1=ilaplace(inv(C1))

A2=[1 2 -1;-1 0 -1;4 4 5];
I2=eye(3);
C2=s*I2-A2;
E2=ilaplace(inv(C2))

A3=[4 1 -2;1 0 2;1 -1 3];
I3=eye(3);
C3=s*I3-A3;
```

syms t
expm(A1*t) 即可

```
E3=ilaplace(inv(C3))
```

Command Window

```
E1 =

[     -2*exp(3*t)+3*exp(2*t),   2*exp(5/2*t)*sinh(1/2*t)]
[ -12*exp(5/2*t)*sinh(1/2*t),     -2*exp(2*t)+3*exp(3*t)]



E2 =

[                   exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)-1/5*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t),      -2*exp(t)+2*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)-2/15*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t),  1/2*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)-7/30*15^(1/2)*
[                                              -2/15*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t),   1/3*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)-1/5*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t)+2/3*exp(t), -1/6*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)-1/10*15^(1/2)*
[                                               8/15*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t),   4/3*exp(t)-4/3*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)+4/5*15^(1/2)*exp(5/2*t)*sin(1/2*15^(1/2)*t),   2/3*exp(5/2*t)*cos(1/2*15^(1/2)*t)+2/5*15^(1/2)*



E3 =

[             (t+1)*exp(3*t),                 t*exp(3*t),               -2*t*exp(3*t)]
[                 t*exp(3*t),   2*exp(t)+(-1+t)*exp(3*t), -2*exp(t)+2*(1-t)*exp(3*t)]
[                 t*exp(3*t),     exp(t)+(-1+t)*exp(3*t),   -exp(t)+(2-2*t)*exp(3*t)]
```