

# 基于简单砂土弹塑性模型的组构变化影响分析

Yannis F. Dafalias, M.ASCE\*, Majid T. Manzari, A.M.ASCE†

**摘要:** 首先在三轴应力空间中给出了一个简单应力比控制、考虑了临界状态的砂土弹塑性模型, 之后将其扩展到了三维空间中。该模型建立在笔者之前工作的基础上, 虽然它在想法上很简单, 但是引入了三个新的方面。第一, 加入了一个组构 - 剪胀相关量, 它在三轴空间中是一个标量, 在三维空间中是张量, 这有助于剪胀过程中加载增量反向的后续响应变形的宏观建模, 以及于不排水情况下对砂土后续表现的实际模拟。第二, 塑性应变率方向在三维空间中对改性洛德角的依赖性, 这是在非轴向条件下进行实际应力 - 应变模拟所必需的特征。第三, 建立了简单三轴和三维空间公式之间非常系统化的联系, 以便在后续的实现中正确使用前者的模型参数。通过与各种压力和密度范围内的数据进行比较, 表明了模型的模拟能力。

**DOI:** 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:6(622)

**关键字:** 本构关系; 组构; 塑性; 砂土; 模型

## 简介

利用简单的结构和公式描述复杂的现象是砂土本构模型的特征, 必须适当平衡才能在实践中发挥作用。笔者相信不必牺牲力学的精确性就可以做到这点, 而最简单的方法就是从简单的角度首先提出模型的核心架构。其他为了泛化和实现的更加复杂的内部技巧可以交给后续的部分或者其他工作。这就是这里遵循的思路, 给出了一个简单应力比控制砂土本构模型, 或者准确地说, 通过逻辑串联了一些简单步骤, 以此构建而成的模型。展示的内容在笔者 (Manzari 和 Dafalias 1997) 之前的工作上建立并进行了一些拓展来分析加载过程中组构变化的影响。

模型的一个基本简化假设是只有有应力比 (有效) 改变才能引起砂土颗粒的相对滑动和滚动, 即宏观上的塑性剪应变和体变。假设在应力比不变的情况下增加应力只会产生弹性应变, 只要砂土颗粒不发生破碎。在常应力比的情况下显著改变压力而孔隙比变化很小证明了这个假设成立, 只要砂土样不是非常松散。常应力比下增加应力产生的塑性应

变可以通过引入一个额外的塑性加载机制来考虑, 比如一个盖形的加载面 (Wang 等人 1990), 这里不考虑这种情况。

在完整的三轴应力 - 应变增量关系的基本表示之后, 通过所谓的相变线的斜率, 也称为剪胀应力比  $\Psi$  (Been 和 Jefferies 1985), 该模型与临界状态土力学原理完全兼容。例如, 在临界状态时, 有  $\Psi = 0$ , 此时剪胀应力比和临界状态破坏应力比相同 (Manzari 和 Dafalias 1997; Li 等人 1999; Li 和 Dafalias 2000)。此外, 致密样本的软化现象用坍塌的峰值应力比边界表面公式进行了模拟 (Manzari 和 Dafalias, 1997; Li 和 Dafalias, 2000), 参考了 Wood 等人提出的峰值应力比随  $\Psi$  变化的观点。边界面特征使得模型能够模拟反向和循环荷载。

目前的工作为上述增加了三个创新点。第一, 发现尽管使用了边界面公式, 当有效应力很小时, 反向加载模拟不是非常精确。这可以归因于模型没有考虑在塑性变形的剪胀阶段在微观研究中发现的剧烈的组构变化, 而这个变化对反向荷载的响应具有显著的影响。后者被认为是在不排水循环荷载下

\*加利福尼亚大学戴维斯分校土木与环境工程系, 地址戴维斯, 邮编 CA 95616; 雅典国家技术大学应用数学与物理科学学院力学系, 地址希腊雅典。

†乔治华盛顿大学土木与环境工程系, 地址华盛顿, 邮编 DC 20052, 电子邮箱: mmanzari@gwu.edu。

Note. 副编辑: A. Rajah Anandarajah. 讨论开放至 2004 年 11 月 1 日。必须为个别的论文提交单独讨论。若要将截止日期后延一月, 必须向 ASCE 总编辑提交书面申请文件。本文手稿于 2002 年 10 月 14 日提交审查, 于 2003 年 4 月 9 日通过。该论文刊于 *Journal of Engineering Mechanics*, 第 130 期, No.6, 2004 年 6 月 1 日。ASCE, ISSN 0733-9399/2004/6-622-63 4/\$18.00.

成功模拟有效应力降低和模量降低的关键。因此，剪胀的表示取决于组构 - 剪胀张量，其演变模型宏观地描述了组构变化及其对剪胀的影响等现象。这一重要的准则首先在三轴空间中被阐述，之后推广到了三维空间中。第二个创新点是发现了在三维空间中塑性偏应变率方向（即塑性电位）对改性洛德角的依赖性。这个特征在 Manzari 和 Dafalias 之前的工作（1997）中有所缺乏，但对于在径向单调载荷下正确模拟偏应力塑性应变非常重要（它对三轴压缩/伸展没有影响）。第三个创新点对于实践较为重要，它考虑了三轴和三维中相应参数之间的关系，因此就简单三轴公式进行参数校准后可以导出三维空间中的正确形式。

本文最后使用同一组模型常数模拟压力和密度水平截然不同的三轴试验。组构 - 剪胀张量的重要性通过反向和循环加载中有无该量的模拟结果来说明，并且表明它的存在对于与实验数据的良好吻合是必要的。

## 三轴应力空间中的公式

### 基本公式

用有效主应力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$  和相应的主应变  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3$  可以定义偏应力  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ；球应力  $p = (1/3)(\sigma_1 + 2\sigma_3)$ ，偏应变  $\epsilon_q = (2/3)(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ ，体应变  $\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$ 。此外，引入应力比  $\eta = q/p$ 。

通过上标  $e$  和  $p$  来表示弹性和塑性应变，应力-应变增量关系可以表述为

$$d\epsilon_q^e = \frac{dq}{3G}; \quad d\epsilon_v^e = \frac{dp}{K} \quad (1)$$

$$d\epsilon_q^p = \frac{d\eta}{H}; \quad d\epsilon_v^p = d \left| d\epsilon_q^p \right| \quad (2)$$

其中  $G$  和  $K$  为弹性剪切和体变模量； $H$  为塑性硬化模型，它和应力比增量  $d\eta$  相关； $d$  为剪胀系数，不要和式 (2)<sub>1</sub> 中的微分符号  $d$  搞混，它反映了塑性变形受应力比控制的特征（在简介中提到）。通过指定  $G, K, H$  和  $d$ ，式 (1) 和 2 完整地描述了三轴空间。

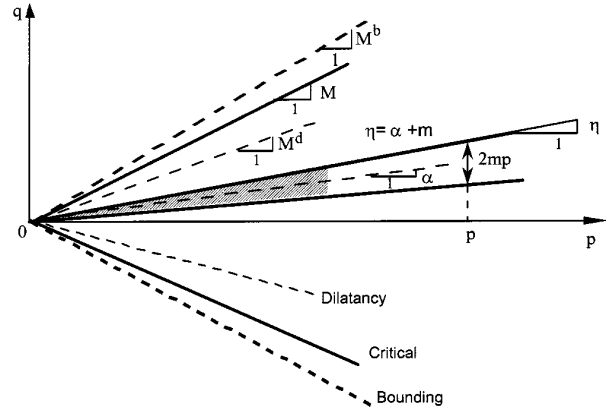


Figure 1:  $q, p$  空间中的屈服线、临界状态线、剪胀线、边界线

### 弹性模数

$G$  和  $K$  是  $p$  和当前孔隙比  $e$  的函数，Richart 等人（1970）和 Dafalias（2000）分别给出了公式

$$G = G_0 p_{at} \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \left( \frac{p}{p_{at}} \right)^{(1/2)}; \quad K = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} G \quad (3)$$

其中  $G_0$  为常数， $\nu$  为泊松比， $p_{at}$  为大气压（便于归一化而用）。式 (3) 定义了一个低弹性响应。

### 屈服面

由式 (2) 可得， $d\eta \neq 0$  时会产生塑性偏应变，可以通过应力比来定义塑性面

$$f = |\eta - \alpha| - m = 0 \quad (4)$$

式 (4) 表示了  $p-q$  空间中一块楔形区域，如 Figure 1 中的阴影部分，其等分线的斜率为  $\alpha$ ，楔形区域上下纵坐标之差为  $2mp$ 。式中的  $\alpha$  和  $m$  是描述应力比的量。对于在楔形区域内的  $\eta$  值， $d\eta \neq 0$  只产生弹性变形。当  $\eta$  满足式 (4) 且  $d\eta$  指向楔形区域外，例如  $d\eta \geq 0$  且处于上沿或者  $d\eta \leq 0$  且处于下沿，塑性变形才会根据式 (2) 产生。此时，楔形区域的方向  $\alpha$  会旋转，且其大小  $m$  也可能随之变化，以此让新的  $\eta$  满足方程  $f = 0$ ，这就是所谓的动态和各向同性硬化， $\alpha$  就是塑性力学术语中对应的背应力比。

### 塑性模数

在三轴排水压缩试验中， $\eta$  增加，但是存在一个峰值或者说边界应力比  $M^b$ ，如 Figure 1 中的

虚线，接下来需要通过它区分材料的状态。边界面塑性准则的简单实现（Dafalias 和 Popov 1975; Dafalias 1986）指出，式 (2) 硬化模量  $H$  取决于应力比空间中的“距离”  $b = M^b - \eta$ 。最简单的线性依赖可以表示为如下形式

$$H = h(M^b - \eta) \quad (5)$$

其中，状态参数  $h$  为正。式 (5) 中， $\eta$  为当前的应力比， $M^b$  为边界或者边界面上的点，这里边界面为  $q, p$  空间中的  $M^b$  线。如果  $m$  固定，那么式 (4) 可以得到  $df = d\eta - d\alpha = 0$ ，因此由式 (2)<sub>1</sub> 和式 (5) 可得  $d\alpha = Hd\epsilon_q^p = h(M^b - \eta)d\epsilon_q^p$ 。

根据式 (5)，最简单的做法是假设  $h$  是一个定值。但是  $h$  会随着  $e, p$  变化，并且  $\eta$  增加了式 (5) 处理非线性响应和反向加载的效率。因此， $h$  可以用下式表示

$$h = \frac{b_0}{|\eta - \eta_{in}|}; \quad b_0 = G_0 h_0 (1 - c_h e) \left(\frac{p}{p_{at}}\right)^{-1/2} \quad (6)$$

其中参数  $h_0$  和  $c_h$  为标量。 $\eta_{in}$  是一个加载过程中的  $\eta$  的起始值，由此得到  $h$ ，因此式 (5) 中的  $H$  在起始处是无限大的，根据经验，这有助于模拟更加精确。起始点可以是任意的应力比状态。根据 Dafalias (1986) 的研究， $\eta_{in}$  在荷载反响点需要进行更新。 $b_0$  和  $e$  就  $c_h$  的线性关系是 Li 和 Dafalias (2000) 所建议的。 $h$ （以及  $H$  对  $p^{-1/2}$  的依赖和式 (3) 中弹性模量对  $p^{1/2}$  的依赖是一致的，因为有效弹性模量在  $p, q$  空间中为  $pH$  [式 (2) 中  $d\eta = (1/p)(dq - \eta dp)$ ]

## 剪胀

Rowe 剪胀理论 (Rowe 1962) 的本质是  $d$  与当前的应力比与剪胀应力比  $M^d$  之差成比例，是  $M^d$  是状态变量的一般函数，在 Figure 1 中用细虚线表示。这条线也被称作相变线 (Ishihara 等人 1975)。由此，可得公式

$$d = A_d(M^d - \eta) \quad (7)$$

其中， $A_d$  是状态的函数。注意式 (5) 和式 (7) 的相似性。当  $\eta > M^d$ 、 $\eta < M^d$  或  $\eta = M^d$  时，有剪缩 ( $d \leq 0$ )、剪胀 ( $d \geq 0$ ) 和零体变率 ( $d = 0$ ) 三种响应状态。

## 荷载反向

如果荷载反向发生在  $\eta = \alpha + m$  处，式 (4) 决定了在  $\eta = \alpha - m$  且  $d\eta \leq 0$  处理非线性响应和反向加载的效率。因此， $h$  可以用下式表示会按照式 (2) 产生塑性变形。问题是如何改动荷载反向中的关键公式式 (5) 和式 (7)，使它们不仅仅只能描述单调增加的情况。对于式 (5) 而言，答案是直接的，遵循边界表面可塑性的标准方法即可。可以定义一个相应的边界或者峰值应力比  $M^b$ ，和压缩时的  $M^b$  不必相同，用  $b = M^b + \eta$  来代替  $b = M^b - \eta$ 。此时  $M^b$  恒为正， $\eta$  有正有负，因此有  $+\eta$  和  $-\eta$  的差异。这样，就可以通过  $M^b - \eta$  来计算压缩时  $\eta$  和  $M^b$  的距离， $M^b + \eta$  来计算拉伸时的距离。同时， $\eta_{in}$  更新为反向点  $\eta$  的值。因此，当  $d\eta > 0$  时，有  $H = h(M^b - \eta)$ ，反向加载  $d\eta < 0$  时改变为  $H = h(M^b + \eta)$ 。

类似地， $M^d$  在反向加载时式 (7) 变为  $d = A_d(M^d + \eta)$ 。反向荷载的剪胀性问题对于被不排水循环试验响应是非常重要的，Dafalias 和 Manzari (1997) 以一种简单的方式解决了它，其中压缩和拉伸时用了不同的  $M^b$  和  $M^d$  值，记作  $M_c^b$ 、 $M_e^b$  和  $M_c^d$ 、 $M_e^d$ 。简单起见，本文中只使用  $M^b$  和  $M^d$ 。

## 加入临界状态行为

土的临界状态 (Schofield 和 Wroth 1968; Wood 1990) 满足  $q = q_c, p = p_c$  且临界孔隙比  $e = e_c$ ，它同时满足  $e - p$  空间中的临界状态线 (CSL) 方程  $e_c = \hat{e}_c(p_c)$  以及临界状态应力比关系  $q_c/p_c = M$ ，如 Figure 1 中的实直线，土在剪切状态下连续变形而体积没有变化。 $M$  与摩擦角有关， $e_c, p_c$  的关系与土壤、围压范围均相关。最常用的是  $e_c, \ln p_c$  之间的线性关系，但 Li 和 Wang (1998) 最新的研究发现表明

$$e_c = e_0 - \lambda_c (p_c / p_{at})^\xi \quad (8)$$

能够适用于更大范围的  $p_c$ ，其中  $e_0$  是  $p_c = 0$  时的孔隙比， $\lambda_c$  和  $\xi$  是常数。Li 和 Wang (1998) 展示了式 (8) 与 Verdugo 和 Ishihara (1996) 的 Toyoura 砂数据的完美契合，其中  $e_0 = 0.934, \lambda_c = 0.019, \xi = 0.7$ 。

一旦采用了最合适的  $e_c, p_c$  关系形式，就可以简单地通过比较  $e$  与  $p_c = p$  时的  $e_c$  或  $p$  与

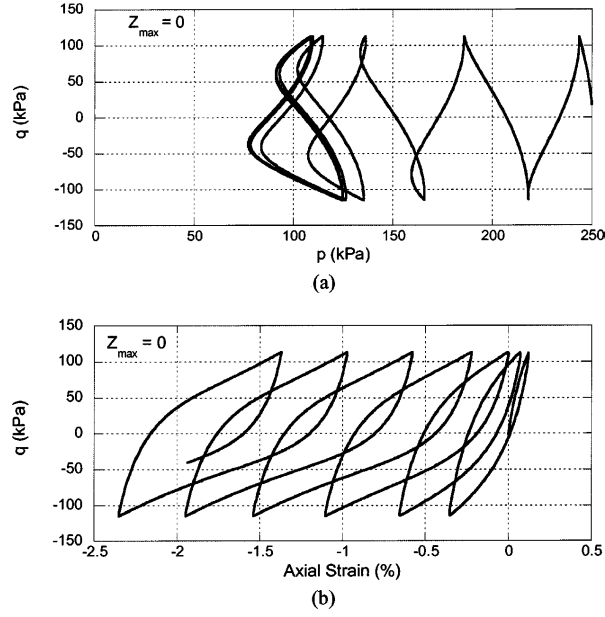


Figure 2: 无结构-剪胀张量效应的典型循环不排水响应图示

$e_c = e$  时的  $p_c$  来度量材料状态  $e, p$  与临界状态的距离。这可以通过多种不同方式完成。最常见的是引入差值,  $\Psi = e - e_c$ , 被 Been 和 Jefferies 称为状态参数 (1985)。另一种方法是使用指数, 诸如 Ishihara 等人 (1975) 的状态指数  $I_s = (e_0 - e)/(e_0 - e_c)$ , 或像 Wang 等人 (2002) 的压力指数  $I_p = p/p_c$ , 甚至提出其他方法, 如  $e/e_c, p/p_c$  等。给出  $e, p$  关系, 所有这些方法都是相互关联的。例如, 在式 (8) 的基础上, 很容易得到  $I_p^s = I_s^{-1} = 1 + [\Psi/(e_0 - e)]$  (Wang 等人 2000)。重要的是当  $\Psi = 0$  或  $I_p = I_s = 1$  时, 则  $p = p_c$  且  $e = e_c$ , 即  $p, e$  组合处于临界状态。在本文中, 将用状态参数  $\Psi$  度量距离临界状态条件的距离。

到目前为止发展起来的本构关系可以解释在排水和不排水条件下正向和反向荷载中的许多重要的土壤响应特征, 但它们有两个严重的缺点。首先, 它们不符合上述临界状态响应要求, 实际上它们预测了物理上不可能发生的无限体积变化。这可以从式 (2) 结合式 (5) 中的  $H$  和 (7) 中的  $d$  很容易地看出。在排水三轴加载中, 当  $\eta$  接近  $M^b$ , 由式 (5) 可得  $H \rightarrow 0$ 。一方面, 由式 (2)<sub>1</sub> 可得  $d\eta \rightarrow 0$  和  $d\varepsilon_q^p \rightarrow \infty$ , 作为临界状态响应可以接受, 但是另一方面, 由式 (2)<sub>2</sub> 得到的  $d\varepsilon_v^p \rightarrow \pm\infty$  (式 (7) 中的  $d$  正负取决于  $M^d \gtrless M^b \approx \eta$ , 松砂或密砂)。第二个缺点是上述关系不能模拟密砂在排水加载中的软化响应, 因为式 (5) 中的塑性模量  $H$  总是保持正值。因为  $\eta$  不能超过  $M^b$ , 当  $\eta \rightarrow M^b$  时,  $d\varepsilon_q^p$  和  $d\varepsilon_v^p$

趋近无限 (在不排水加载软化中仍然可以, 因为  $\eta$  的增加可以使  $q$  和  $p$  减小)。

很明显, 上述缺点的原因是假设  $M^b$  和  $M^d$  在加载过程中保持固定。因此, 补救措施非常简单。回顾之前临界状态应力比  $M$  的定义, 必须考虑  $M^b$  和  $M^d$  随材料状态进行适当变化, 比如, 当  $e = e_c$  和  $p = p_c$  时, 有  $M^b = M^d = M$ 。此外, 对于密度大于临界的状态, 即对于给定的  $p$ ,  $\Psi = e - e_c < 0$ , 必须具有  $M^d < M < M^b$ , 其中比临界更松的状态则顺序反向。沿着这条路线, Wood 等人 (1994) 提出使用  $M^b = M - k^b \Psi$ , Manzari 和 Dafalias (1997) 提出使用  $M^d = M + k^d \Psi$ , 其中  $k^b$  和  $k^d$  为材料常数。这些线性  $\Psi$  关系以简单有效的方式满足前述要求。当然, 对  $\Psi$  的线性依赖, 甚至使用  $\Psi$  而不是  $I_p$  或  $I_s$ , 并不是包括临界状态软化响应的唯一方法。Wang 等人 (2002) 使用  $I_p$  代替  $\Psi$ , 而 Li 和 Dafalias (2000) 使用  $\Psi$  的指数而不是线性变化

$$M^b = M \exp(-n^b \Psi) \quad (9)$$

$$M^d = M \exp(n^d \Psi) \quad (10)$$

其中材料参数  $n^b$  和  $n^d$  为正。明显地, 对于  $\Psi < 0$ , 有  $M^d < M < M^b$ , 相对地, 对于  $\Psi > 0$  则相反, 且当  $\Psi = 0$  时有  $M^b = M^d = M$ 。式 (9) 和 (10) 相对于线性变化具有  $\Psi$  适用范围更广的优点, 在之后会用到。式 (9) 和 (10) 中  $M$  的值在三轴压缩和挤长中是不同的。

因此, 通过式 (9) 和 (10) 引入非常简单的修改,

先前的本构关系结构现在与临界状态土力学要求完全兼容，此外可以模拟密砂的软化。在 Figure 1 中，观察到，当  $\Psi \rightarrow 0$  时，代表  $M^b$  和  $M^d$  的线与  $M$  线会聚，就像一对剪刀或两条“摆动”线在  $\eta = M$  处交叉。注意，硬化，软化和失效响应分别对应于  $H > 0$ ， $H < 0$  和  $H = 0$ ，具体取决于  $M^b - h$ ，式 (5) 的正负号。软化响应情况，即  $\eta > M^b$ ，现在因  $M^b$  随  $\Psi$  变化而可能发生，表明了修正边界面准则的建立。也就是说，当达到峰值应力比值时，当前应力比  $\eta$  可以穿过图像上的应力比  $M^b$ ，并且当后者收缩时，可以在边界表面“外部”移动，产生负  $M^b - \eta$ 。然而，这并没有改变模型的基本功能，其中  $\eta$  从上方收敛到  $M^b$ ，即  $\Psi \rightarrow 0$  时，后者达到残余应力比临界值  $M$ 。式 (9) 和 (10) 的最重要结果之一是本构模型适用于同一组材料常数情况下的所有压力和密度，与砂土本构模型中在密度相差很大时经常发生的情况（例如，必须使用不同的材料常数）相反。

## 组构变化对剪胀的影响

前面讨论的反向加载方面使得该模型能够模拟循环三轴加载时砂土的响应，其实际上是一系列的反向加载。Figure 2 (a 和 b) 展示了使用 Table 1 的模型常数在  $q = \pm 114.2 \text{ kPa}$  范围内的不排水循环载荷的模拟（无  $z_{\max}$  和  $c_z$ ，其将在下文详述）。虽然 Figure 2 (a 和 b) 中所示的循环应变累积和孔隙水压力累积结果看起来很好，但是在 Figure 2 (a) 中可以观察到不排水应力路径环的早期稳定存在问题。然而，对于砂土而言，持续的循环不排水荷载通常导致非常低的有效压力  $p$ ，通常接近零，这最终是造成灾难性事件的主要原因，例如地质结构中的液化和永久性大位移。此外， $p$  的减小直接影响材料的弹性和塑性刚度，导致增量剪切模量的显著降低以及相应的严重后果，例如模量降低和滞后阻尼。所有这些属性对于分析地震引起的地质结构荷载非常重要，并且在实践中通常采用可靠的经验关系来解决这些问题。然而，使用完整本构模型背后的原理，是通过本构模型模拟此类事件时的表现，将所有可靠的经验知识从直接使用转到间接使用（Papadimitriou 等人 2001）。沿着这个思路，现有的本构模型必须进行适当修改，以便在循环加载下得到期望中的、在 Figure 2 (a 和 b) 中未观察到的， $p$  和剪切模量的降低。

在 Figure 2 (a) 所示的模拟中真正缺少的，

Table 1: 模型常数

常数	符号	值
弹性模量	$G_0$	125
	$\mu$	0.05
临界状态	$M$	1.25
	$c$	0.712
	$\lambda_c$	0.019
	$e_0$	0.934
	$\xi$	0.7
屈服面	$m$	0.01
塑性模量	$h_0$	7.05
	$c_h$	0.968
	$n^b$	1.1
剪胀系数	$A_0$	0.704
	$n^d$	3.5
组构-剪胀张量	$z_{\max}$	4
	$c_z$	600

是在剪胀趋势响应之后，已经上升的孔隙水压力继续增加和相应的应力增量反转引起的  $p$  减少（即， $d\eta$  的反转，而不是  $\eta$  的反转）。实际上，这意味着在 Figure 2 (a) 的压缩或挤长时，在大于  $M^d$  的  $\eta$  处的应力增量反转时，不排水应力路径应该比现在更靠近  $p = 0$ ，形成众所周知的“蝴蝶”型  $p, q$  轨迹。通过研究不排水应力路径的微分方程  $dp = -d|d\eta/H|K$ ，且设置  $d\epsilon_v = d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p = 0$  并结合式 (1)<sub>2</sub> 和 (2)<sub>2</sub>，是理解期望得到这种结果的关键。给定  $K$  和  $H$  时，卸载时  $p$  减少得更多意味着  $d$  的增加。这不能随意进行，因为较大的  $d$  可能在早期对不排水的应力路径周期产生不利影响。实际上，有理由认为，只有在应力增量反转之前发生了剪胀的塑性体应变的前提下再进行这种  $d$  变化，在宏观上才是有益的。

最后一点很关键，并且通过微机械研究得到了证实。许多研究人员观察到，如 Nemat-Nasser (1980) 和 Nemat-Nasser 与 Tobita (1982)，证实了在变形膨胀阶段单调剪切时砂粒发生了组构的急剧变化。前向剪切的上述朝向分布的这种显著变化极大地增强了剪切方向反向时的收缩趋势，因为在向前剪切中偏向于膨胀的颗粒接触面朝向现在变得偏向于反向剪切时的收缩。这种情况一直持续到反向剪切开始时的膨胀，反过来产生相同的组构变化效果，只是方向相反，依此类推。就好像组构在每个循环中以相反的方向产生，消失和再生，使得每

个循环的剪胀阶段在  $d\eta$  发生反转时，增强了相同循环中的后续剪缩阶段，最终产生净收缩效应。

先前关于  $d$  变化的宏观观察以及前述微机械观察可以导出以下命题。引入所谓的组构剪胀内部变量  $z$ ，根据其得到

$$dz = -c_z \langle -d\epsilon_v^p \rangle (sz_{\max} + z) \quad (11)$$

且式 (7) 中剪胀系数  $d$  的参数  $A_d$  如下可得

$$A_d = A_0(1 + \langle sz \rangle) \quad (12)$$

其中 MacCauley 括号  $\langle \rangle$  表示当  $x > 0$  时， $\langle x \rangle = x$ ，当  $x \leq 0$  时  $x = 0$ ；当  $\eta = \alpha \pm m$  时， $s = \pm 1$ 。式 (11) 和 (12) 引入了两个新的模型参数， $z_{\max}$  表示  $z$  可以达到的最大值， $c_z$  控制式 (11) 中  $z$  变化的步长。 $A_0$  在  $z$  的存在下实质上代替了  $A_d$ ，在最简单的情况下是常数，但是在后者发生非常大的变化时，它也可能依赖于  $p$ 。

为了解  $z$  通过  $A_d$  对  $d$  产生影响的简单机制，假设从  $\eta = 0$  向  $\eta > 0$  加载，初始值为  $z = 0$ 。式 (12) 使得  $A_d = A_0$ ，且只要  $d\epsilon_v^p > 0$ （收缩），式 (11) 就会保持无效， $dz = 0$ ，因为根据  $\langle \rangle$  的定义，有  $\langle -d\epsilon_v^p \rangle = 0$ 。当  $\eta$  超过  $M^d$  时，式 (7) 和 (22) 可得  $d\epsilon_v^p < 0$ ，并且式 (11) 有效，可得

$dz = -c_z d\epsilon_v^p (z_{\max} + z)$ ，即产生负  $z$ 。然而， $z$  不能超过  $z_{\max}$ ，因为当  $z_{\max} + z = 0$  时， $dz = 0$ 。只要  $\eta = \alpha + m$ ，就有式 (12) 中的  $A_d = A_0$ ，因为式 (11) 中的  $z$  为负值，有  $\langle sz \rangle = \langle +z \rangle = 0$ 。现在到了关键点。在加载增量反向时，即

$\eta = \alpha - m, d\eta < 0, s = -1$ ，有  $\langle sz \rangle = \langle -z \rangle = |z|$ ，由式 (12) 得到  $A_d = A_0(1 + |z|)$ ，即， $A_d$  增加了。之后，由式 (7) 可得  $d = A_0(1 + |z|)(M^d + \eta)$  也变大了（回想一下在负载反向中解释的式 (7) 中从  $M^d - \eta$  到  $M^d + \eta$  的变化）。 $d$  增加将在荷载反向时减小更大的  $p$  减少带来的影响。 $z$  将保持其负值，因为反向时  $d\epsilon_v^p > 0$  并且式 (11) 再次无用，使得  $dz = 0$  直到在三轴挤长中开始膨体积增大，即  $d\epsilon_v^p < 0$ ，因为

$M^d + \eta < 0$ 。然后式 (11) 再次生效，其中由  $\eta = \alpha - m$  可得  $-z_{\max}$ ，得  $dz > 0$ ，这最终抵消了先前产生的负  $z$  并且在三轴挤长中的膨胀期间建立了正  $z$ 。在新的反向过程中，该过程一直被重复。因此，在充分膨胀之后的每个应力比增量反向中，根据式 (12)，由于组构 - 剪胀变量  $z$  在与  $d\eta$  加载相反的方向上的连续变化，消亡和再变化， $A_d$  随之从  $A_0$  增加到更大的值  $A_0(1 + |z|)$ ，然后减少回到

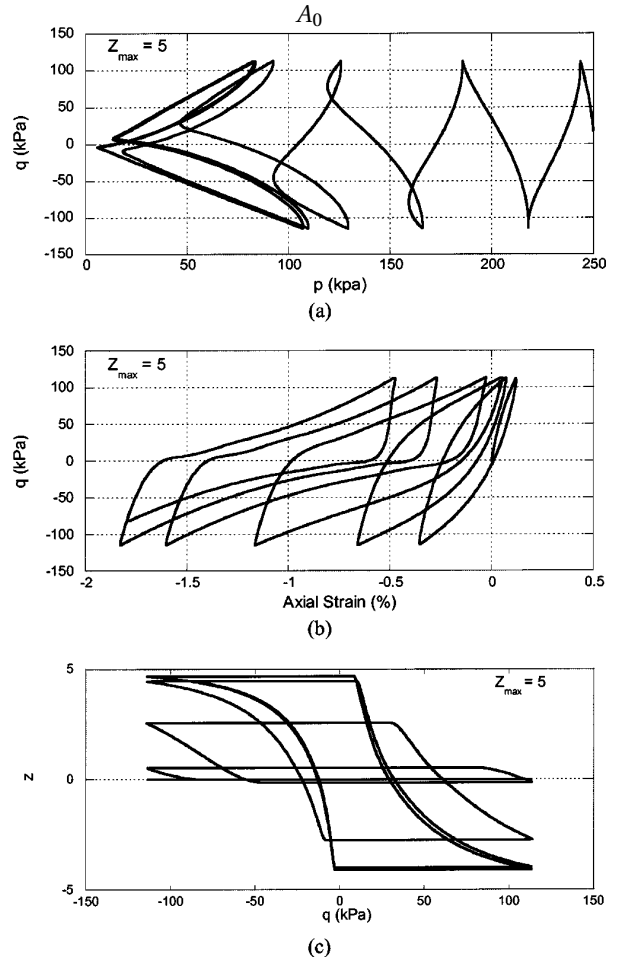


Figure 3: 循环不排水响应与组构 - 剪胀量  $z$ ，以及后者的变化和消亡

并再次增加。 $z$  的这种演变及其对  $d$  的影响模拟了上述微机械定义的组构量演变和对剪胀的影响 (Nemat-Nasser 和 Tobita 1982)。重要的是要强调  $z$  的演变仅在  $d\epsilon_v^p < 0$  时发生，即在剪胀的膨胀阶段期间发生。这使得在收缩阶段  $A_d$  的值完全保持不变，从而有助于在  $z$  变化之前的数据中得到所需的  $A_0$  值。

$c_z$  和  $z_{\max}$  是使用试错法得到的经验参数。虽然实现了一组基本的简单增量关系，但它很简单。Figure 3 (a-c) 说明了对于 Table 1 中相同模型常数，结合了式 (11) 和 (12) 以及  $c_z = 600$  和  $z_{\max} = 5$ （而不是 Table 1 中的 4）后， $z$  对 Figure 2 (a 和 b) 所示响应的的影响。在最后的加载循环期间有效应力  $p$  显著减小， $z$  由于较早的塑性膨胀，不排水  $q, p$  路径的蝶形状和应力 - 应变环的扁平化而变得活跃。Figure 3 (c) 展示了根据式 (11)， $z$  的发展和消亡的顺序，这是 Figure 3 (a 和 b) 中所示响应的关键。

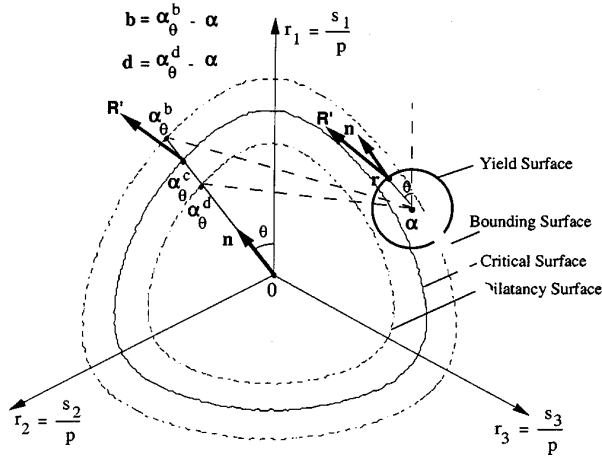


Figure 4: 应力比  $\pi$  平面上的屈服, 临界, 剪胀和边界表面的示意图

## 三维空间中的实现

在没有组构-剪胀变量  $z$  的情况下, Manzari 和 Dafalias (1997) 将模型推广到三维应力空间, 具体内容见论文中。在这种推广中, 屈服面和其塑性偏应变率方向的法线与第三应力不变量无关, 这可能会不利于在非单轴条件下的实际应力-应变模拟。在下文中, 仅对塑性偏应变率方向引入这种依赖性。而砂的屈服面很小, 使得即使引入了第三应力不变量依赖性, 所产生的形状变化在模拟中基本没有影响。此外, 提出了组构-剪胀变量  $z$  到相应张量的推广。

$d\epsilon_v^e$  的弹性关系与式 (1)<sub>2</sub> 中的弹性关系相同, 但式 (1)<sub>1</sub> 需要用  $d\mathbf{e}^e = d\mathbf{s}/2G$  替代,  $\mathbf{e}^e$  和  $\mathbf{s}$  分别是偏弹应变和偏应力张量。式 (4) 的推广乘以  $p$  可得

$$f = [(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha})]^{1/2} - \sqrt{2/3}pm = 0 \quad (13)$$

有偏背应力比张量的三维空间推广  $\boldsymbol{\alpha}$ , 冒号表示张量乘积的迹, 即  $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{ab}) = a_{ij}b_{ji}$ 。引入偏应力比张量  $\mathbf{r} = \mathbf{s}/p$  以用于  $\eta = q/p$  的推广。式 (13) 在几何上描述了“锥形”, 作为三轴空间中“楔形”的推广。应力比  $\mathbf{r}$  在  $\pi$  平面上的锥形轨迹是圆形的偏屈服面, 如 Figure 4 所示, 中心为  $\boldsymbol{\alpha}$  和半径为  $\sqrt{2/3}m$ 。

类似地, Figure 1 中三轴公式的边界  $M^b$ , 剪胀  $M^d$  和临界  $M$  应力比可以推广到应力比  $\pi$  平面中的三个相应的边界, 剪胀和临界表面, 如下。观察到由于  $M^b$ ,  $M^d$  和  $M$  与三轴空间中的应力比  $\eta$  相关, 因此可以定义相应的量  $\alpha^b = M^b - m$ ,

$\alpha^d = M^d - m$ , 和  $\alpha^c = M - m$ , 它们与背应力比  $\alpha$  相关联, 因为由式 (4) 有  $\alpha = \eta - m$ 。注意, 对于  $a = b, d$  或  $c$  ( $M^a = M$ ), 对于所有三种情况, 有  $M^a - \eta = \alpha^a - \alpha$ , 即,  $M^a$  和  $\eta$  之间的距离可以等效为度量  $\alpha^a$  和  $\alpha$  之间的距离。换句话说, 可以引入对应于应力比  $M^a$  的边界, 剪胀和临界背应力比  $\alpha^a$ , 并使用  $\alpha$  而不是  $\eta$  来度量距离。推广到边界, 剪胀和临界表面的三维泛化概念, 如 Figure 4 所示, 这些面与式 (13) 的背应力比张量  $\boldsymbol{\alpha}$  相关, 而不是应力比张量  $\mathbf{r} = \mathbf{s}/p$ 。用背应力比而不是应力比的原因是其在硬化的表达中更加简单。关于式 (5), (6), (7), (9) 和 (10) 中和  $\eta$  相关的  $M^b$ ,  $M^d$  和  $M$  均用相应与  $\alpha$  相关的  $\alpha^b$ ,  $\alpha^d$  和  $\alpha^c$  代替, 而运算均不变。

由式 (13) 可得  $\mathbf{r}$  在屈服面的梯度为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} - \frac{1}{3}(\mathbf{n} : \mathbf{r})\mathbf{I}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{2/3}m} \quad (14)$$

如 Figure 4 所示,  $\mathbf{n}$  满足关系  $\text{tr} \mathbf{n} = 0$  和  $\text{tr} \mathbf{n}^2 = \mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$ , 且与  $f = 0$  垂直。基于后者的关系, 定义有效洛德角  $\theta$

$$\cos 3\theta = \sqrt{6} \text{tr} \mathbf{n}^3 \quad (15)$$

当荷载从三轴压缩变为挤长时,  $\theta$  从 0 变化到  $\pi/3$ 。 $\theta$  在图 4 中表示为由平行于  $r_1 = s_1/p$  轴的线与屈服面的半径  $\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}$  形成的角度。

然后, 根据类似的关系, 用  $\theta$  分别在三轴压缩  $Q_c$  和挤长  $Q_e$  值之间插入给定  $\theta$  对应的  $Q$  值 (用  $Q_\theta$  表示)

$$Q_{\theta} = g(\theta, c)Q_c; g(\theta, c) = \frac{2c}{(1+c) - (1-c)\cos 3\theta}; c = \frac{Q_e}{Q_c} \quad (16)$$

对于  $\theta = 0$  和  $\pi/3$ , 根据式 (16)<sub>2</sub> 分别有  $g = 1$  和  $c$ 。通过选择  $Q$  为  $M^b$ ,  $M^d$  和  $M$ , 或等效地,  $\alpha^b$ ,  $\alpha^d$  和  $\alpha^c$ , 可以得到 Figure 4 中展示的结果, 其中所有三个面 (边界, 剪胀和临界) 依赖于  $\theta$  根据式 (16), 为了简单起见取  $c$  值相同 (因此, 它们彼此相似)。

如果现在从原点绘制一条平行于  $\mathbf{n}$  (或  $\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}$ ) 的直线, 则该线将在图像背应力比张量  $\alpha_\theta^b$ ,  $\alpha_\theta^d$  和  $\alpha_\theta^c$  处与三个表面相交, 如 Figure 4 所示, 定义为

$$\alpha_\theta^a = \sqrt{2/3}\alpha_\theta^a \mathbf{n}; \alpha_\theta^a = g(\theta, c)M \exp(\mp n^a \Psi) - m \quad (17)$$

Table 2: 三轴与对应三维本构方程及其所需模型常数

三轴方程	三维方程	常数
临界状态线 —	$e_c = e_0 - \lambda_c(p_c/p_{at})^\xi$	$e_0, \lambda_c, \xi$
弹性偏应变增量 $d\epsilon_q^e = dq/3G$ —	$d\mathbf{e}^e = d\mathbf{s}/2G$ $G = G_0 p_{at}[(2.97 - e)^2/(1 + e)](p/p_{at})^{1/2}$	— $G_0$
弹性体应变增量 —	$d\epsilon_v^e = dp/K$ $K = 2(1 + \nu)G/3(1 - 2\nu)$	$\nu$
屈服面 $f =  \eta - \alpha  - m = 0$	$f = [(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha})]^{1/2} - \sqrt{2/3}pm = 0$	$m$
塑性偏应变增量 $d\epsilon_q^p = d\eta/H$ $H = h(M^b - \eta)$ $M^b = M \exp(-n^b\Psi)$ $h = b_0/ \eta - \eta_{in} $ —	$d\mathbf{e}^p = \langle L \rangle \mathbf{R}'$ $K_p = (2/3)ph(\boldsymbol{\alpha}_\theta^b - \boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\alpha}_\theta^b = \sqrt{2/3}[g(\theta, c)M \exp(-n^b\Psi) - m]\mathbf{n}$ $h = b_0/(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_{in}) : \mathbf{n}$ $b_0 = G_0 h_0(1 - c_h e)(p/p_{at})^{-1/2}$	$M, c, n^b$ $h_0, c_h$
塑性体应变增量 $d\epsilon_v^p = d d\epsilon_q^p $ $d = A_d(M^d - \eta)$ $M^d = M \exp(n^d\Psi)$ $A_d = A_0(1 + \langle sz \rangle)$	$d\epsilon_v^p = \langle L \rangle D$ $D = A_d(\boldsymbol{\alpha}_\theta^d - \boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\alpha}_\theta^d = \sqrt{2/3}[g(\theta, c)M \exp(n^d\Psi) - m]\mathbf{n}$ $A_d = A_0(1 + \langle \mathbf{z} : \mathbf{n} \rangle)$	$n^d$ $A_0$
组构-剪胀张量更新 $dz = -c_z \langle -d\epsilon_v^p \rangle (sz_{\max} + z)$	$d\mathbf{z} = -c_z \langle d\epsilon_v^p \rangle (z_{\max}\mathbf{n} + \mathbf{z})$	$c_z, z_{\max}$
背应力比张量更新 $d\alpha = d\eta$	$d\boldsymbol{\alpha} = \langle K \rangle (2/3)h(\boldsymbol{\alpha}_\theta^b - \boldsymbol{\alpha})$	

其中  $a = b, c$  或  $d$ 。± 取决于  $a = b$  或  $d$ ，且  $n^c = 0$ 。系数  $\sqrt{2/3}$  使得上述关系能够满足三轴条件下的  $\alpha_\theta^a$  (Manzari 和 Dafalias 1997)。由此得出，根据式 (17)<sub>2</sub>，通过前述标量值  $\alpha_\theta^a$  ( $a = b$  或  $d$ )，可以用  $\theta$  和  $\Psi$  来推广式 (9) 和 (10)。

新的塑性应变张量增量表达式如下

$$d\epsilon^p = \langle L \rangle \mathbf{R} \quad (18)$$

其中  $L$  稍后将定义的荷载系数（或塑性因子）， $\mathbf{R}$  为  $d\epsilon^p$  的方向。一般来说， $\mathbf{R} \neq \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ，即假定非关联性可塑性。

$\mathbf{R}$  的大小将根据标量值  $D$  来确定，对应三轴中的  $d$  剪胀部分。 $R$  的偏差部分  $R'$  为沿 Figure 4 中点  $\boldsymbol{\alpha}_\theta^c$  处临界面的法线，以便考虑  $\theta$  效应。 $\mathbf{R}'$  也在屈服面上的  $\mathbf{r}$  处转动。由于一般情况下  $\mathbf{R}' \neq \mathbf{n}$ ，偏非关联性适用。需要一些复杂的代数运算（特别是对于  $\partial \theta / \partial \sigma_{ij}$  的计算）以及使用式 (15) 和 (16) 来得到结果，

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \frac{1}{3}D\mathbf{I} = B\mathbf{n} - C(\mathbf{n}^2 - \frac{1}{3}\mathbf{I}) + \frac{1}{3}D\mathbf{I} \quad (19a)$$

$$B = 1 + \frac{3}{2} \frac{1-c}{c} g \cos 3\theta; C = 3\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-c}{c} g \quad (19b)$$

对于  $c = 1$ ， $C = 0$  和  $B = 1$ ，检索 Manzari 和 Dafalias (1997) 命题，其中  $\mathbf{R}' = \mathbf{n}$  对于非轴向加载是不现实的。塑性体积增量为  $\text{tr}(d\epsilon^p) = \langle L \rangle \text{tr} \mathbf{R} = \langle L \rangle D$ ，因为  $\text{tr} \mathbf{n} = 0$ ， $\text{tr} \mathbf{n}^2 = 1$ ， $\text{tr} \mathbf{I} = 3$ 。值得注意的是，如果式 (13) 中的  $m$  取决于  $\theta$ ，由式 (16) 中的  $Q_\theta$ ，那么  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  将由式 (19a) 给出，其中  $\mathbf{n} : \mathbf{r}$  代替  $D$ ，而不是式 (14)。在这种情况下， $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  和  $\mathbf{R}$  都将具有相同的偏差部分（偏应常态规则适用），其由式 (19a) 右侧的前两个项组成。

现在可以直接计算根据应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}$  和塑性模量  $K_p$  定义的荷载系数  $L$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{K_p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{K_p} p \mathbf{n} : d\mathbf{r} = \frac{1}{K_p} [\mathbf{n} : d\mathbf{s} - \mathbf{n} : \mathbf{r} dp] \\ &= \frac{2G\mathbf{n} : d\mathbf{e} - \mathbf{n} : \mathbf{r} d\epsilon_v}{K_p + 2G(B - C \text{tr} \mathbf{n}^3) - KD\mathbf{n} : \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (20)$$

考虑之前式 (13) 所述的弹性关系和可加性，即  $d\mathbf{e} = d\mathbf{e}^e + d\mathbf{e}^p$ ， $d\epsilon_v^p + d\epsilon_v^e$ ，可得应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}$  表达



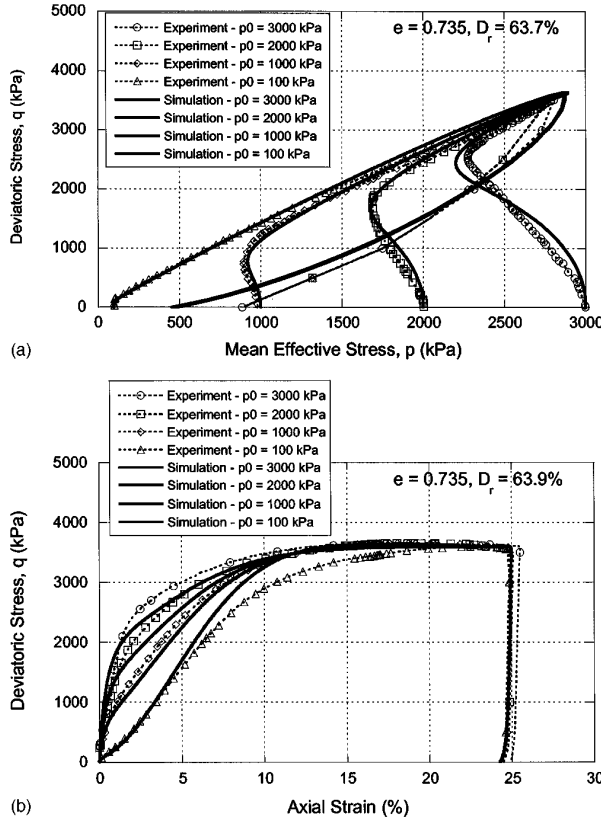


Figure 5: Toyoura 砂不排水压缩试验的模拟与实验对比 (Verdugo 和 Ishihara 1996);  $(e)_{in} = 0.735$

式为

$$d\sigma = 2Gde + Kd\epsilon_v I - \langle L \rangle \{ 2G[Bn - C(n^2 - \frac{1}{3}I)] + KDI \} \quad (21)$$

其中  $L$  由式 (20) 得到。由于  $L$  以  $d\epsilon$  和  $d\epsilon_v$  表示式 (21) 可以容易地得到  $d\sigma = E^ep : d\epsilon$ , 其中  $E^ep$  是四阶弹塑性切线刚度张量。为了模型的完整性, 需要指定  $Kp$  和  $D$ 。两者分别对应式 (5) 和 (7) 三轴空间中的量  $H$  和  $d$ 。

$Kp$  与模型的硬化有关。简单起见, 假设  $dm = 0$ , 并回顾 Figure 4 和式 (17) 中的  $\alpha_\theta^b$  的定义, 可以根据边界假定得到

$$d\alpha = \langle L \rangle (2/3) h (\alpha_\theta^b - \alpha) \quad (22)$$

其中  $h$  为硬化系数,  $\alpha_\theta^b - \alpha$  为边界与当前的背应力比张量之间的距离。添加因子  $2/3$  是为了三轴和三维公式的塑性模量常数保持一致, 如附录中所示。

由  $df = 0$ , 式 (13)、(14) 和 (22), 以及定义

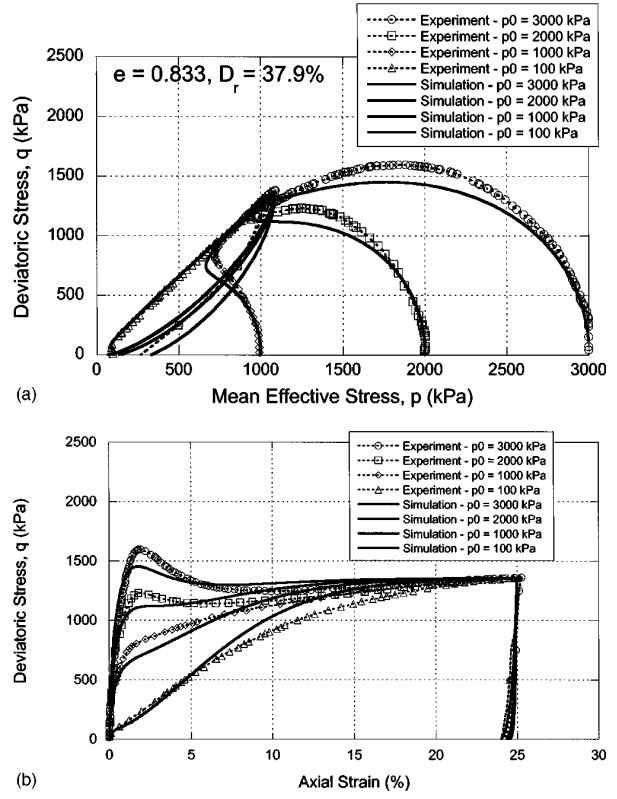


Figure 6: Toyoura 砂不排水压缩试验的模拟与实验对比 (Verdugo 和 Ishihara 1996);  $(e)_{in} = 0.833$

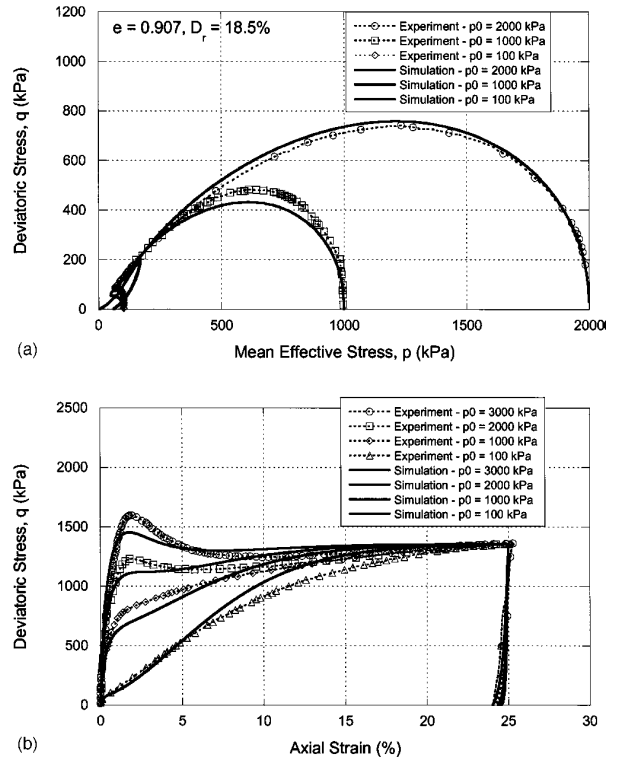


Figure 7: Toyoura 砂不排水压缩试验的模拟与实验对比 (Verdugo 和 Ishihara 1996);  $(e)_{in} = 0.907$

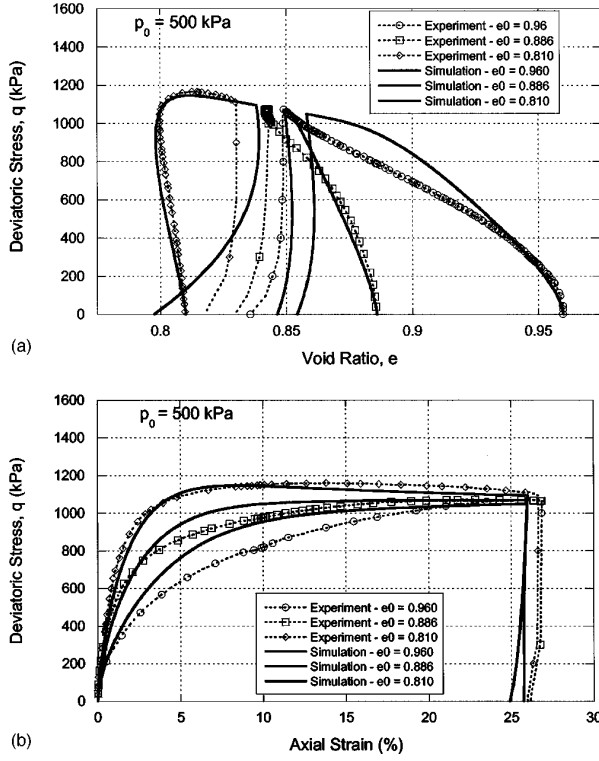


Figure 8: Toyoura 砂排水压缩试验的模拟与实验对比 (Verdugo 和 Ishihara 1996);  $(\sigma'_3)_{in} = 500\text{kPa}$

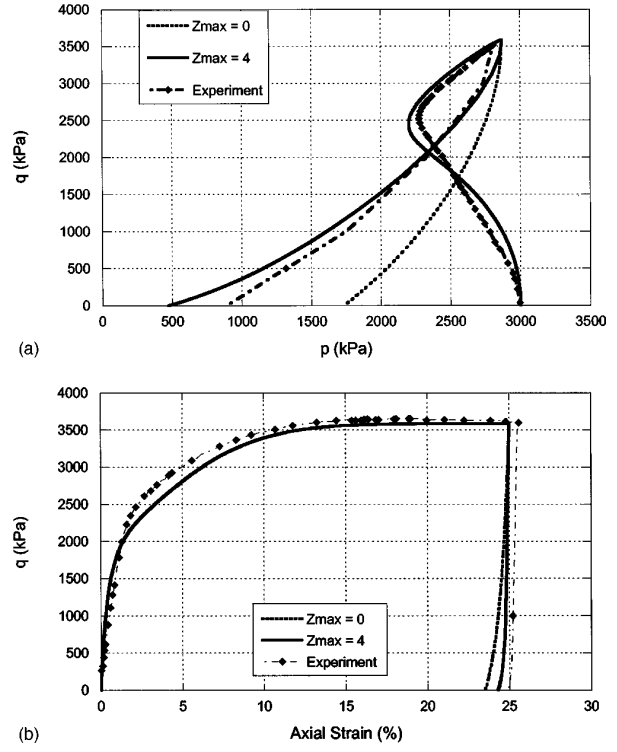


Figure 11: 加载-卸载模拟与数据的比较, 有 ( $z_{max} = 4$ ) 和无 ( $z_{max} = 0$ ) 组构-剪胀张量的影响

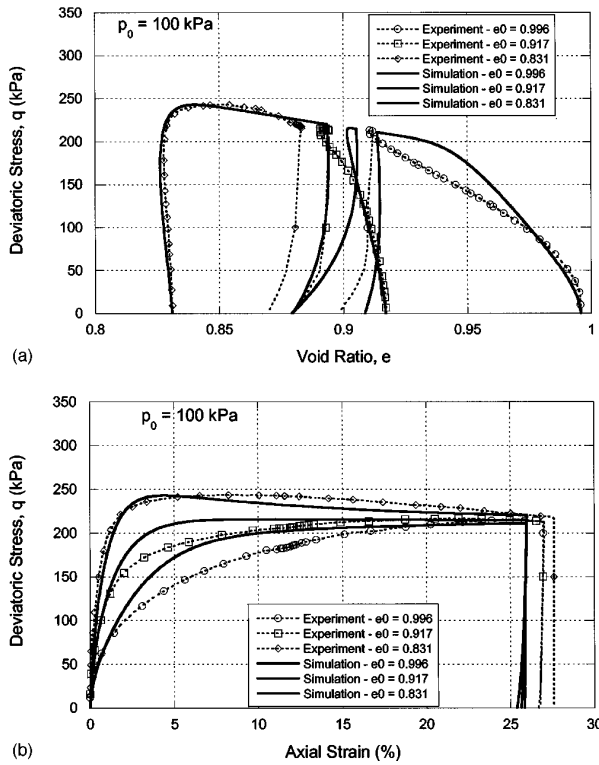


Figure 9: Toyoura 砂排水压缩试验的模拟与实验对比 (Verdugo 和 Ishihara 1996);  $(\sigma'_3)_{in} = 100\text{kPa}$

$L = (1/K_p)(\partial f / \partial \sigma)$ , 可得

$$K_p = (2/3)p h (\alpha_\theta^b - \alpha) : \mathbf{n} = (2/3)p h \mathbf{b} : \mathbf{n} \quad (23)$$

其中  $\mathbf{b} = \alpha_\theta^b - \alpha$ , 如 Figure 4 所示。根据  $\alpha$  相对于  $\mathbf{n}$  和  $\alpha_\theta^b$  的位置以及  $\mathbf{b} : \mathbf{n}$  符号 ( $\alpha$  甚至可以移动到  $\alpha_\theta^b$  所在的边界面之外) 来看,  $K_p$  可以是正, 负或零, 三轴空间中  $H$  的符号类似。因此, 如附录中所示,  $K_p = (2/3)pH$  和  $\alpha^b = M^b - m$ , 式 (23) 显然是基于  $\alpha^b - \alpha = M^b - (m + \alpha) = M^b - \eta$  的式 (5) 的三维推广。以下定义是式 (6) 的推广,

$$h = \frac{b_0}{(\alpha - \alpha_{in}) : \mathbf{n}} \quad (24)$$

其中  $b_0$  和式 (6)<sub>2</sub> 中相同。在式 (24) 的分母中具有  $\mathbf{n}$  的乘积迹代表了式 (6)<sub>1</sub> 中  $\eta - \eta_{in}$  的绝对值。 $\alpha_{in}$  是开始新加载过程时  $\alpha$  的初始值, 并且按照 Dafalias (1986) 描述的规则, 当式 (24) 的分母变为负值时进行更新。表达式  $(\alpha - \alpha_{in}) : \mathbf{n}$  与 Dafalias (1986) 的  $(\delta_{in} - \delta) : \mathbf{n}$  略有不同, 其中  $\delta$  为共轭应力点之间的距离。

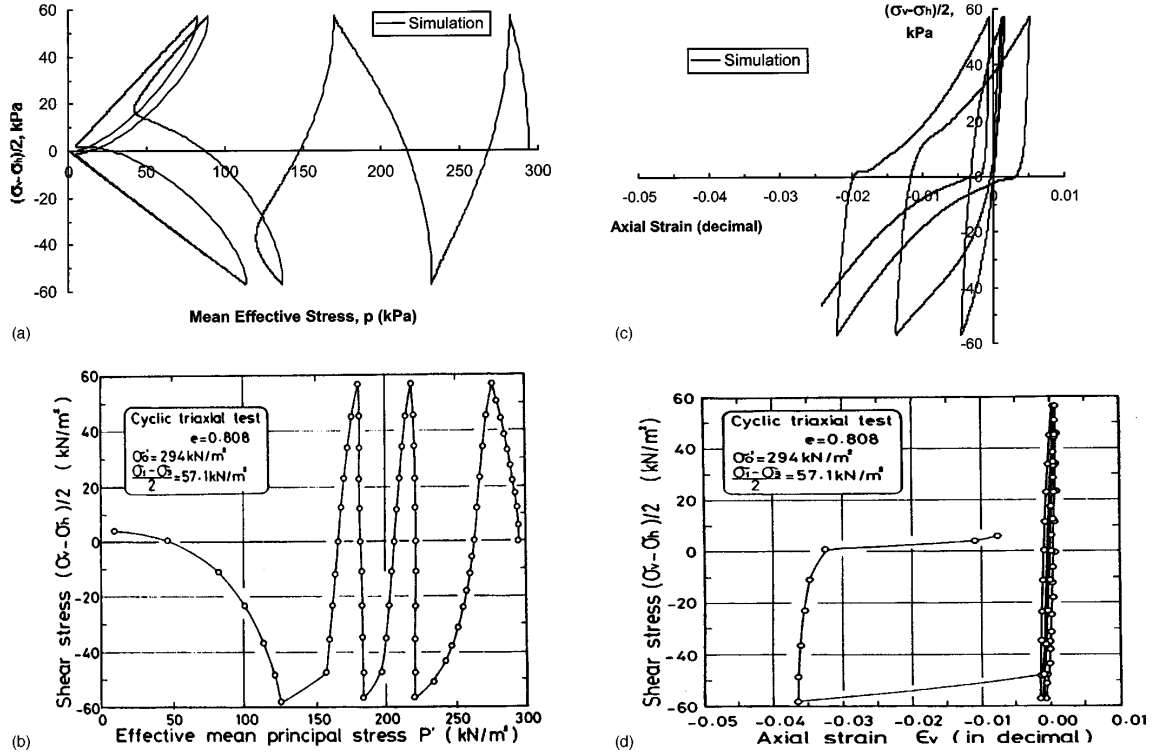


Figure 10: 模型模拟（上）与实验数据（下）(Ishihara 等人 1975)

沿着类似的路线，式 (7) 可以推广为

$$D = A_d(\alpha_\theta^d - \alpha) : \mathbf{n} = A_d \mathbf{d} : \mathbf{n} \quad (25)$$

给出  $\alpha^d = M^d - m$ ，因此，三轴空间中的  $M^d - \eta = \alpha^d - \alpha$ 。 $\mathbf{d} = \alpha_\theta^d - \alpha$ ， $\alpha_\theta^d$  定义见 Figure 4 和式 (17)。根据式 (17)，当  $\Psi = 0$  时，有  $M^b = M^d = M$ ，并且边界和剪胀面与临界面重叠。在附录中还讲到，基于式 (2)<sub>2</sub> 中  $\mathbf{d}$  和式 (25) 中  $D$  的定义，必有  $D = (2/3)^{1/2} \mathbf{d}$ ，在三轴条件下时，其满足式 (25)。因此，在式 (7) 和 (25) 中可以使用相同的参数  $A_d$ 。

现在必须对组构-剪胀变量  $z$  和相应的公式（式 (11) 和 (12)）进行推广。引入了组构-剪胀张量  $\mathbf{z}$ ，而不是标量值  $z$ ，其变化按式 (11) 推广为

$$d\mathbf{z} = -c_z \langle -d\epsilon_v^p \rangle (z_{\max} \mathbf{n} + \mathbf{z}) \quad (26)$$

同时式 (25) 中的参数  $A_d$  为

$$A_d = A_0(1 + \langle \mathbf{z} : \mathbf{n} \rangle) \quad (27)$$

式 (12) 的直接推广。 $\mathbf{z} : \mathbf{n}$  的符号代替了式 (11) 和 (12) 中  $s$  的  $\pm 1$ 。 $\mathbf{z}$  的复合术语组构-剪胀张量旨在将这一概念与称为组构张量的其他概念区分开来，它们与微观力学研究中的颗粒的几何排列及其接触

点有关。张量  $\mathbf{z}$  为宏观模型提供了与剪胀相关的方向性，在数值实现中易于校准和处理。这个概念需要通过实验进一步证实，但目前它似乎能够非常有效地处理塑性剪胀阶段之后反向加载下的响应。在 Papadimitriou 等人 (2001) 的工作中，通过简单地引入一个影响塑性模量  $K_p$  的标量，而不是  $D$  (Papadimitriou 等人 (2001) 给出的  $K_p$  和  $D$  与三轴条件有关)，也提供了解决复杂循环响应的方法。然而， $\mathbf{z}$  的张量特征由实验研究和显微观察给出，其指出了组构效应对一般加载条件下剪胀方向的依赖性。例如，加载方向  $\mathbf{n}$  可能与已经发生的  $\mathbf{z}$  不同轴，在这种情况下，不同轴的程度可以由式 (27) 中的  $\mathbf{z} : \mathbf{n}$  来表示，如果  $\mathbf{z}$  不是一个张量，就不可能表示。

## 模型参数及模拟

### 模型参数及表格

Table 1 显示了模型常数，根据其功能分为几类。Table 2 解决了两个问题。所有基本三轴和三维本构方程分别在第一列和第二列中列出，彼此直接对应，而两者共有的表达式仅列在第二列之下。制表遵循模型发展的逻辑，并作为模型结构

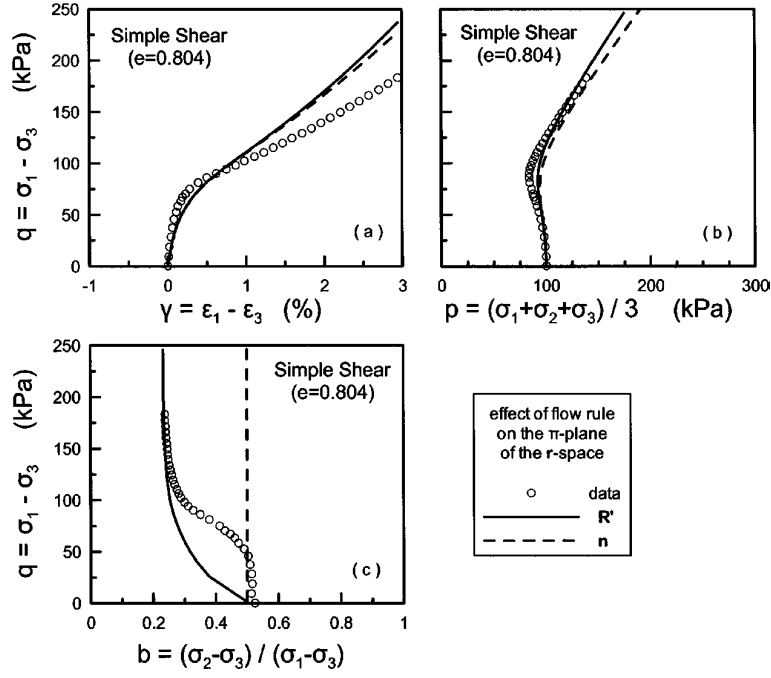


Figure 12: 使用式(14) 的  $n$  和式(19) 的  $R'$  用于偏塑性塑性应变增量方向来模拟简单剪切的数据

的摘要。此外，模型常量列在第三列中。这些常数与使用它们的本构方程一起列出。在 Table 1 中，弹性常数与式 (3) 有关。临界状态常数与 CSL 的式 (8) 有关， $M$  与摩擦角有关。所有这些常数都可以很容易地从数据中确定。状态参数  $n^b$  和  $n^d$  与式 (9) 和 (10) 有关，它们遵循  $n^b = \ln(M/M^b)/\Psi^b$  和  $n^d = \ln(M^d/M)/\Psi^d$  (Li 和 Dafalias 2000)，其中  $\Psi^b$  和  $M^b$  是排水三轴峰值应力比状态下的  $\Psi$  和  $\eta$  的值， $\Psi^d$  和  $M^d$  是从数据测量的相变状态值。不同的数据可能得到不同的  $n^b$  和  $n^d$  值，但它们的平均值非常稳定。对于屈服面，式 (4) 或 (13)，只需要  $m$ 。 $m$  是  $M/100$  的量级，而在 Papadimitriou 等人 (2001) 的工作中， $m$  与具有闭合磁滞回线的小循环应力幅度阈值有关。式 (6) 中的硬化常数  $h_0$  和  $c_h$  可以通过试错找到。剪胀性  $A_0$  (或者如果  $z=0$  则为  $A_d$ ) 遵循与  $h_0$  相同的试错估计。最后，组构剪胀常数  $z_{\max}$  和  $c_z$  需要加载 - 卸载反向加载或循环数据的三角误差拟合，优选不排水，其中  $\eta$  必须超过过程中的  $M^d$ ，以便  $z$ ，式 (11)(或三维空间中的式 (26))，被激活。

## 模拟

Verdugo 和 Ishihara (1996) 的三轴数据，无论是排水还是不排水，都非常适合检查本构模型的模拟能力 (Li 等人 1999; Li 和 Dafalias 2000;

Wang 等人 2002)。Table 1 中所示的常数用于获得 Figure 5-9 所示模拟。模拟中难点之一是所考虑的围压  $p$  的巨大差异，其范围为 100 至 3,000kPa，相对密度为 18.5 至 63.7% (空隙率  $e$  为 0.907 至 0.735)。数据和模拟解决了不排水和排水三轴加载条件，和相同材料的响应从高膨胀到高收缩变化，取决于密度和围压的组合，反映在状态参数  $\Psi$  的值中，并且对于关键方程，式 (9) 和 (10)，这个值意味着什么。当密度非常高时，Figure 5 (a 和 b) 或非常低，Figure 7 (a 和 b)， $p$  的初始值从 100 到大于 2,000kPa 的变化通常不足以改变前者的剪胀性的基本方面，与后者的剪缩性。但是对于中间密度值，Figure 6 (a 和 b)，可以清楚地观察到收缩响应以及对于较高  $p$  值的软化，并且相应地对于较小的  $p$  值没有软化的膨胀响应。在 Figure 8 和 Figure 9 中的排水加载中可以看到类似的趋势。提醒读者，所有这些显著不同的响应是用同一种参数模拟的。

在所有情况下，对于每个示例图，还以适当的方式针对不排水和排水情况模拟了卸载过程。对于上述示例的卸载部分，实际上是由于动态硬化导致的反向加载，以及 Figure 10 中所示的循环试验模拟，使用了 Table 1 中的常数  $z_{\max} = 4$  和  $c_z = 600$ 。通过比较当有  $z$  时的卸载 ( $q$  减小) 不排水应力路径与在没有 Figure 11 中所示的  $z$  的影响的情况下得到的卸载路径，可以理解组构 - 剪胀张量  $z$  在反

向增量加载中的重要作用。如 Figure 10 所示，循环加载的模拟不如本文的其他模拟，包括应力反向。一种可能的解释是，20 年前的循环加载数据与现在的单调加载数据使用了不同的制备方法、仪器等。作者无法找到该砂当前的循环三轴数据。

最后，本文提出的三维公式是在模拟 Figure 12 所示的简单剪切数据时实现的。重要的是式 (19) 中的塑性偏应变增量方向  $R'$ ，相比于式 (14) 的  $\mathbf{n}$ ，对主应力比  $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$  的预测更有益 (Manzari 和 Dafalias 1997)。

## 结语

结果表明，可以对砂土临界状态兼容简单边界面塑性模型进行简单修改，以便考虑材料响应的一个重要方面，即反向加载和循环加载期间组构变化的影响。如果要在反向加载中对砂土响应进行真实的描述，那么在剪胀阶段中宏观变化的组构 - 剪胀张量被证明是必不可少的。

剪胀和峰值应力比对状态参数的依赖性统一了各种密度和围压下的砂与同一组模型常数的本构描述。值得一提的是，模型的这些特征具有通用价值，因为它们可以与其他本构模型结合使用。例如，在适合于不排水循环加载的建模方法中 (Elgamal 等人, 1998)，可以容易地结合相变 (剪胀应力比) 对状态参数  $\Psi$  的依赖性，以便具有临界状态响应兼容性。不同密度和围压下本构描述的统一以及循环加载模拟能力也表征了 Pestana 和 Whittle (1999) 的边界面模型，他们的公式和现在的模型较为不同，被广泛用于粘土的剪切和土的静水荷载。在目前的工作中，对于砂土来说，模拟排水和不排水荷载条件时的密度和压力变化范围相较于其他来说要广泛和彻底得多。还应注意，由于其通用价值，这里展示的足够 - 剪胀张量效应的概念可以结合到前述两个本构模型中。

## 致谢

感谢国家自然科学基金会，Clifford Astill 博士指导、批准号为 CMS-9800330 和 CMS-9802287 项目的支持。一作同时感谢了由 Richard Fragazsy 博士指导、批准号 CMS-0201231 的 NSF 计划支持。X. S. Li 博士向作者提供了 Toyoura 砂的实验数据的数字化数据。A. Papadimitriou 博士提供了

Figure 12 的计算和绘图。

## 附录

三轴空间中  $d\epsilon_1^p = (2/3)(d\epsilon_1^p - d\epsilon_3^p) = d\epsilon_q^p$ 。引入式 (17) 和 (19)，三轴空间中  $\theta = 0$  或  $\pi/3$ ，有  $R'_1 = n_1 = \pm(2/3)^{1/2}$  以及  $R'_2 = R'_3 = n_2 = n_3 = \mp(1/\sqrt{6})$ 。

式 (18)，式 (19a) 和上述关系  $d\epsilon_1^p = d\epsilon_q^p$  使得  $d\epsilon_1^p = \langle L \rangle R'_1 = \pm \langle L \rangle (2/3)^{1/2} = d\epsilon_q^p$  以及  $\text{tr}(d\epsilon^p) = \langle L \rangle \text{tr} \mathbf{R} = \langle L \rangle D = d\epsilon_v^p$ 。因此，带入式 (2)<sub>2</sub> 有  $d\epsilon_v^p = \langle L \rangle D = d \left| d\epsilon_q^p \right| = \langle L \rangle (2/3)^{1/2} d$ ，因此，必有

$$D = (2/3)^{1/2} d \quad (28)$$

现在参考三轴情况下的式 (25)，并观察到有  $\alpha_\theta^a = (2/3)^{1/2} \alpha_\theta^a \mathbf{n}$ ， $\alpha = (2/3)^{1/2} \alpha \mathbf{n}$  和  $\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$ ，

$$D = A_d (2/3)^{1/2} (\alpha_\theta^d - \alpha) = (2/3)^{1/2} A (M^d - \eta) = (2/3)^{1/2} d \quad (29)$$

如上。因此，式 (25) 中的  $A_d$  和式 (7) 中的  $A_d$  是一致的。

为了找到  $H$  和  $K_p$  在三维空间中的关系，考虑式 (18) - (20)，特别是三轴空间中， $\mathbf{R}'$  和  $\mathbf{n}$  的先前值，还有  $s_1 = (2/3)q$ ， $s_2 = s_3 = -(1/3)q$ ，因此  $r_1 = (2/3)\eta$ ， $r_2 = r_3 = -(1/3)\eta$ 。如此，可得  $N = \mathbf{n} : \mathbf{r} = n_1 r_1 + 2n_2 r_2$  和  $\mathbf{n} : d\mathbf{s} = n_1 ds_1 + 2n_2 ds_2$ 。代入式 (24) 可得  $L (dq - \eta dp = pd\eta)$ 。最终可得  $d\epsilon_1^p = (1/K_p)(\mathbf{n} : d\mathbf{s} - N dp) R'_1 = (1/K_p)(2/3)pd\eta = d\eta/H$ ，使

$$K_p = (2/3)pH \quad (30)$$

另一方面，式 (23) 和 (24)，在三轴空间条件并引入  $\mathbf{b}, \alpha_\theta^b, \alpha$  (它们都根据  $\mathbf{n}$  定义)，加上式 (5) 和 (6)，可得  $K_p = (2/3)pb_0b/|\eta_{in} - \eta| = (2/3)pH$ ，正如式 (30) 所给。因此式 (22) 和式 (23) 中的因子 (2/3) 保证了三轴空间和三维空间的公式中  $b_0$ ， $h_0$  和  $c_h$  的一致。

## References

- [1] Been, K., and Jefferies, M. G. (1985). "A state parameter for sands." *Geotechnique*, 35(2), 99112

- 
- [2] Dafalias, Y. F. (1986). "Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity." *J. Eng. Mech.*, 112(9), 966987.
  - [3] Dafalias, Y. F., and Popov, E. P. (1975). "A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings." *Acta Mech.*, 21, 173192.
  - [4] Elgamal, A.-W., Parra, E., Yang, Z., Dobry, R., and Zeghal, M. (1998). "Liquefaction constitutive model." *Proc., Int. Workshop on the Physics and Mechanics of Soil Liquefaction*, P. Lade, ed., Balkema, Rotterdam, The Netherlands.
  - [5] Ishihara, K., Tatsuoka, F., and Yasuda, S. (1975). "Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses." *Soils Found.*, 15(1), 2944.
  - [6] Li, X. S., and Dafalias, Y. F. (2000). "Dilatancy for cohesionless soils." *Geotechnique*, 50(4), 449460.
  - [7] Li, X. S., and Wang, Y. (1998). "Linear representation of steady-state line for sand." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 124(12), 12151217.
  - [8] Li, X. S., Dafalias, Y. F., and Wang, Z. L. (1999). "State-dependent dilatancy in critical-state constitutive modeling of sand." *Can. Geotech. J.*, 36, 599611.
  - [9] Manzari, M. T., and Dafalias, Y. F. (1997). "A two-surface critical plasticity model for sand." *Geotechnique*, 47(2), 255272.
  - [10] Nemat-Nasser, S. (1980). "On behavior of granular material in simple shear." *Soils Found.*, 20(3), 5973.
  - [11] Nemat-Nasser, S., and Tobita, Y. (1982). "Influence of fabric on liquefaction and densification potential of cohesionless sand." *Mech. Mater.*, 1, 4362.
  - [12] Papadimitriou, A. G., Bouckovalas, G. D., and Dafalias, Y. F. (2001). "Plasticity model for sand under small and large cyclic strains." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 127(11), 973983.
  - [13] Pestana, J. M., and Whittle, A. J. (1999). "Formulation of a unified constitutive model for clays and sands." *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.*, 23(12), 12151243.
  - [14] Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., and Woods, R. D. (1970). "Vibration of soils and foundations." *International series in theoretical and applied mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
  - [15] Rowe, P. W. (1962). "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact." *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 269, 500527.
  - [16] Schofield, A. N., and Wroth, C. P. (1968). *Critical state soil mechanics*, McGrawHill, New York.
  - [17] Verdugo, R., and Ishihara, K. (1996). "The steady state of sandy soils." *Soils Found.*, 36(2), 8192.
  - [18] Wang, Z. L., Dafalias, Y. F., and Shen, C. K. (1990). "Bounding surface hypoplasticity model for sand." *J. Eng. Mech.*, 116(5), 9831001.
  - [19] Wang, Z. L., Dafalias, Y. F., Li, X. S., and Makedisi, F. I. (2002). "State pressure index for modeling sand behavior." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 128(6), S11S19.
  - [20] Wood, D. M. (1990). *Soil behavior and critical state soil mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
  - [21] Wood, D. M., Belkheir, K., and Liu, D. F. (1994). "Strain softening and state parameter for sand modeling." *Geotechnique*, 44(2), 335339.
-