计算理论作业 2

颜俊梁 MF21330103

2022 年 5 月 29 日

题目 3.1. 证明括号引理: 对于任何 $M \in \Lambda$, 在 M 中出现的左括号的个数等于在 M 中出现的右括号的个数.

解答. 对 M 的结构归纳.

1. $M \equiv x$ $(x \in \nabla)$: M 没有左右括号, 引理成立.
2. $M \equiv (\lambda x. N)$ $(x \in \nabla, N \in \Lambda)$: 有归纳假设 N 中的左右括号数量相同. M 又引入了一对新的左右括号, 故 M 中的左右括号数量仍然相同.
3. $M \equiv (N_1 N_2)$ $(N_1, N_2 \in \Lambda)$: 有归纳假设 N_1, N_2 中的左右括号数量相同. M 又引入了一对新的左右括号, 故 M 中的左右括号数量仍然相同.

证毕.

题目 3.2. 试求 $SSSS$ 的 β-nf.

解答. 标准组合子 $S = \lambda xyz.\, xz(yz)$.

$$
\begin{aligned}
& SSSS \\
\rightarrow_\beta\ & (\lambda xyz.\, xz(yz))SSS \\
\rightarrow_\beta\ & SS(SS) \\
=\ & (\lambda xyz.\, xz(yz))S(SS) \\
\rightarrow_\beta\ & \lambda z.\, Sz(SSz) \\
=\ & \lambda z.\, (\lambda xyz.\, xz(yz))z(SSz) \\
\rightarrow_\beta\ & \lambda z.\, \lambda l.\, zl(SSzl) \\
=\ & \lambda z.\, \lambda l.\, zl((\lambda xyz.\, xz(yz))Szl) \\
\rightarrow_\beta\ & \lambda z.\, \lambda l.\, zl(Sl(zl)) \\
=\ & \lambda z.\, \lambda l.\, zl((\lambda xyz.\, xz(yz))l(zl)) \\
\rightarrow_\beta\ & \lambda z.\, \lambda l.\, zl(\lambda k.\, lk(zlk))
\end{aligned}
$$

题目 3.3. 证明: $(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)$ 没有 β-nf.

解答. 令 $W = (\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)$.

$$
\begin{aligned}
W =\ & (\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx) \\
\rightarrow_\beta\ & (\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx) \\
=\ & W(\lambda x.\, xxx) \\
\rightarrow_\beta\ & W(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx) \\
\rightarrow_\beta\ & W(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx) \\
\rightarrow_\beta\ & \ldots
\end{aligned}
$$

在每步规约时, 有且仅有一个 $\beta-$redex ($W = (\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)$), 对它进行规约后产生了一个无穷规约链, 因此 $(\lambda x.\, xxx)(\lambda x.\, xxx)$ 没有 β-nf.

题目 3.4. 设 $F \in \Lambda$ 呈形 $\lambda x.\, M$, 证明:

1. $\lambda z.\, Fz =_\beta F$;
2. $\lambda z.\, yz \neq_\beta y$.

解答.

1. $\lambda z.\, Fz = \lambda z.\, (\lambda x.\, M)z \to_\beta \lambda z.\, M[x := z] =_\alpha \lambda x.\, M \equiv F$, 因此 $\lambda z.\, Fz =_\beta F$.

2. 若 $y \equiv v$ $(v \in \nabla)$, 即 y 是一个变量, 此时 $\lambda z.\, yz$ 是一个 β-nf, 显然 $\lambda z.\, yz \neq_\beta y$.

题目 3.5. 证明二元不动点定理: 对于任何 $F, G \in \Lambda$, 存在 $X, Y \in \Lambda$, 满足

$$FXY = X \tag{1}$$

$$GXY = Y \tag{2}$$

解答. 消元法, 对于 (2) 式 $GXY = Y$, 有 $Y = \Theta(GX)$. 将其带入 (1) 式, 有 $FX(\Theta(GX)) = X$. 对左边进行 λ 抽象, $(\lambda z.Fz(\Theta(Gz)))X = X$. 所以有解

$$\begin{aligned} X =& \Theta(\lambda z.Fz(\Theta(Gz))) \\ Y =& \Theta(G(\Theta(\lambda z.Fz(\Theta(Gz))))) \end{aligned}$$

题目 3.6. 证明: 对任何 $M, N \in \Lambda^\circ$, 方程 $xN = Mx$ 对于 x 有解.

解答. 令 $x = \lambda z.\, T$ $(z \notin \mathrm{FV}(T))$, 于是 $xN \to_\beta T$, 现在解方程 $T = M(\lambda z.\, T)$. 对右边进行 λ 抽象 $T = (\lambda y.\, M(\lambda z.\, y))T$, 因此 $T = \Theta(\lambda y.\, M(\lambda z.\, y))$, 所以 $x = \lambda z.\, \Theta(\lambda y.\, M(\lambda z.\, y))$.

题目 3.7. 证明: 对于任意 $P, Q \in \Lambda$, 若 $P \twoheadrightarrow_\beta Q$, 则存在 $n \geq 0$ 以及 $P_0, \ldots, P_n \in \Lambda$, 满足

1. $P \equiv P_0$
2. $Q \equiv P_n$
3. 对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \rightarrow_\beta P_{i+1}$.

解答. 根据定义, $\twoheadrightarrow_\beta$ 是 $\rightarrow_\beta$ 的自反传递闭包, 即

$$\twoheadrightarrow_\beta = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\rightarrow_\beta)^i$$

因为 $P \twoheadrightarrow_\beta Q$, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $P(\rightarrow_\beta)^n Q$, 也就是存在这样的序列 $p \equiv P_0 \rightarrow_\beta P_1 \rightarrow_\beta \ldots \rightarrow_\beta P_n \equiv Q$, 满足 $P \equiv P_0$, $Q \equiv P_n$, 对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \rightarrow_\beta P_{i+1}$.

题目 3.8. 证明: 对于任意 $P, Q \in \Lambda$, 若 $P \twoheadrightarrow_\beta Q$, 则 $\lambda z. P \twoheadrightarrow_\beta \lambda z. Q$.

解答. 根据题目 3.9, 存在归约序列 $P \equiv P_0 \rightarrow_\beta P_1 \rightarrow_\beta \ldots \rightarrow_\beta P_n \equiv Q$. 于是 $\lambda z. P \rightarrow_\beta \lambda z. P_0 \rightarrow_\beta \lambda z. P_1 \rightarrow_\beta \ldots \rightarrow_\beta \lambda z. P_n \equiv \lambda z. Q$, 因此 $\lambda z. P \twoheadrightarrow_\beta \lambda z. Q$.

题目 3.9. 证明: 对于任意 $P, Q \in \Lambda$, 若 $P =_\beta Q$, 则存在 $n \geq 0$ 以及 $P_0, \ldots, P_n \in \Lambda$, 满足

1. $P \equiv P_0$
2. $Q \equiv P_n$
3. 对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \rightarrow_\beta P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \rightarrow_\beta P_i$.

解答. 根据定义知道 $=_\beta$ 为 $\to_\beta$ 的自反传递对称闭包, 于是

$$=_\beta \quad = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\to_\beta \cup \leftarrow_\beta)^i$$

因为 $P =_\beta Q$, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$, $P(\to_\beta \cup \leftarrow_\beta)^n Q$. 因此存在序列 $P_0, \ldots, P_n \in \Lambda$, 使得 $P \equiv P_0$, $Q \equiv P_n$, 且对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \to_\beta P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \to_\beta P_i$.

题目 3.10. 证明: 对于任何 $M, N \in \Lambda$,

$$M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda\beta \vdash M = N$$

解答. 首先证明 "$\Rightarrow$". 证明, 若 $M =_\beta N$, 那么 $\lambda\beta \vdash M = N$.

先证明一个引理, 若 $M \to_\beta N$, 那么 $\lambda\beta \vdash M = N$.

对 $\to_\beta$ 的结构作归纳.

1. $(M, N) \in \beta$, 那么由 $\lambda\beta$ 形式系统的 β 公理, 可知 $\lambda\beta \vdash M = N$.
2. (M, N) 呈形 (MP, MQ), 根据结构归纳假设若 $P \to_\beta Q$, 那么 $\lambda\beta \vdash P = Q$, 因为 μ 公理, $\lambda\beta \vdash MP = MQ$.
3. (M, N) 呈形 (PM, QM), 根据结构归纳假设若 $P \to_\beta Q$, 那么 $\lambda\beta \vdash P = Q$, 因为 υ 公理, $\lambda\beta \vdash PM = QM$.
4. (M, N) 呈形 $(\lambda z.\, P, \lambda z.\, Q)$, 根据结构归纳假设若 $P \to_\beta Q$, 那么 $\lambda\beta \vdash P = Q$, 因为 ξ 公理, $\lambda\beta \vdash \lambda z.\, P = \lambda z.\, Q$.

在证明, 若 $M \leftarrow_\beta N$, 那么 $\lambda\beta \vdash M = N$. 此时 $N \to_\beta M$, 所以 $\lambda\beta \vdash N = M$, 根据 σ 公理, $\lambda\beta \vdash M = N$.

根据题目 3.9, 存在序列 $P_0, \ldots, P_n \in \Lambda$, 使得 $M \equiv P_0$, $N \equiv P_n$, 且对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \to_\beta P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \to_\beta P_i$. 所以 $\lambda\beta \vdash P_0 = P_1, \ldots, \lambda\beta \vdash P_{n-1} = P_n$. 连续使用公理 τ, 可知 $\lambda\beta \vdash P_0 = P_n$, 因此 $\lambda\beta \vdash M = N$.

然后证明 “$\Leftarrow$”. 证明, 若 $\lambda\beta \vdash M = N$, 那么 $M =_\beta N$.

对 $\lambda\beta \vdash M = N$ 的证明作结构归纳.

1. $M = N$ 为公理 ρ 或 β 得到, 易见 $M =_\beta N$.
2. $M = N$ 由公理 σ 得到, 此时我们有 $N = M$, 由归纳假设 $M =_\beta N$.
3. $M = N$ 由公理 τ 得到, 此时我们有 $M = N, N = L$, 有归纳假设 $M =_\beta N, N =_\beta L$, 所以 $M =_\beta L$.
4. $M = N$ 由公理 μ 或公理 υ 得到, 根据 $=_\beta$ 的合拍性易知成立.
5. $M = N$ 由公理 ξ 得到, 根据题目 3.8 证明的结论易知成立.

因此 $M =_\beta N$.

综上所述, $M =_\beta N \Leftrightarrow \lambda\beta \vdash M = N$.

题目 3.11. 证明: 对于任何 $M, N \in \Lambda$,

$$M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow \lambda\beta\eta \vdash M = N$$

解答. 首先证明 “$\Rightarrow$”. 证明, 若 $M =_{\beta\eta} N$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.

先证明一个引理, 若 $M \to_{\beta\eta} N$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.

对 $\to_{\beta\eta}$ 的结构作归纳.

1. $(M, N) \in \beta$, 那么由 $\lambda\beta\eta$ 形式系统的 β 公理, 可知 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.
2. $(M, N) \in \eta$, 那么由 $\lambda\beta\eta$ 形式系统的 η 公理, 可知 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.
3. (M, N) 呈形 (MP, MQ), 根据结构归纳假设若 $P \to_{\beta\eta} Q$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash P = Q$, 因为 μ 公理, $\lambda\beta\eta \vdash MP = MQ$.

4. (M, N) 呈形 (PM, QM), 根据结构归纳假设若 $P \to_{\beta\eta} Q$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash P = Q$, 因为 υ 公理, $\lambda\beta\eta \vdash PM = QM$.

5. (M, N) 呈形 $(\lambda z. P, \lambda z. Q)$, 根据结构归纳假设若 $P \to_{\beta\eta} Q$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash P = Q$, 因为 ξ 公理, $\lambda\beta\eta \vdash \lambda z. P = \lambda z. Q$.

在证明, 若 $M \leftarrow_\beta N$, 那么 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$. 此时 $N \to_{\beta\eta} M$, 所以 $\lambda\beta\eta \vdash N = M$, 根据 σ 公理, $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.

根据题目 3.9, 存在序列 $P_0, \dots, P_n \in \Lambda$, 使得 $M \equiv P_0$, $N \equiv P_n$, 且对于任何 $0 \leq i < n$, $P_i \to_{\beta\eta} P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \to_{\beta\eta} P_i$. 所以 $\lambda\beta\eta \vdash P_0 = P_1, \dots, \lambda\beta\eta \vdash P_{n-1} = P_n$. 连续使用公理 τ, 可知 $\lambda\beta\eta \vdash P_0 = P_n$, 因此 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$.

然后证明 “$\Leftarrow$”. 证明, 若 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$, 那么 $M =_{\beta\eta} N$.

对 $\lambda\beta\eta \vdash M = N$ 的证明作结构归纳.

1. $M = N$ 为公理 ρ, β 或 η 得到, 易见 $M =_{\beta\eta} N$.

2. $M = N$ 由公理 σ 得到, 此时我们有 $N = M$, 由归纳假设 $M =_{\beta\eta} N$.

3. $M = N$ 由公理 τ 得到, 此时我们有 $M = N, N = L$, 有归纳假设 $M =_{\beta\eta} N, N =_{\beta\eta} L$, 所以 $M =_{\beta\eta} L$.

4. $M = N$ 由公理 μ 或公理 υ 得到, 根据 $=_{\beta\eta}$ 的合拍性易知成立.

5. $M = N$ 由公理 ξ 得到, 根据题目 3.8 证明的结论易知成立.

因此 $M =_{\beta\eta} N$.

综上所述, $M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow \lambda\beta\eta \vdash M = N$.

题目 3.12. 证明: 对于任何 $M, N \in \Lambda$, 若 $M =_\beta N$, 则存在 T 使 $M \twoheadrightarrow_\beta T$ 且 $N \twoheadrightarrow_\beta T$. 这就是 $=_\beta$ 的 CR 性质.

解答. 设 $M =_\beta N$, 根据题目 3.9 可知, 存在序列 $P_0, \ldots, P_n \in \Lambda$, 使得 $P \equiv P_0$, $Q \equiv P_n$, 且对于任何 $0 \le i < n$, $P_i \to_\beta P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \to_\beta P_i$.

下面对 i 作归纳证明, 存在 $T_i \in \Lambda$ 使得 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_i$ 且 $P_i \twoheadrightarrow_\beta T_i$.

奠基: 当 $i = 0$ 时, 取 T_0 为 M 即可.

归纳假设: 当 $i = k$ $(k < n)$ 时, 存在 $T_k \in \Lambda$ 使得 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_k$ 且 $P_k \twoheadrightarrow_\beta T_k$.

归纳步骤: 当 $i = k + 1$ 时, 由归纳假设知 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_k$ 且 $P_k \twoheadrightarrow_\beta T_k$.

情况 1: $P_k \to_\beta P_{k+1}$, 从而有 CR 性质, 存在 T_{k+1} 满足 $T_k \twoheadrightarrow_\beta T_{k+1}$ 且 $P_{k+1} \twoheadrightarrow_\beta T_{k+1}$. 因为 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_k$, 所以 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_{k+1}$, 从而命题成立.

情况 2: $P_{k+1} \to_\beta P_k$, 于是 $P_{k+1} \twoheadrightarrow_\beta T_k$, 又 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_k$, 所以存在 $T_{k+1} \equiv T_k$, 命题成立.

综上, 存在 T_n 使得 $P_0 \twoheadrightarrow_\beta T_n$ 且 $P_n \twoheadrightarrow_\beta T_n$, 取 $T \equiv T_n$ 有 $M \twoheadrightarrow_\beta T$ 且 $N \twoheadrightarrow_\beta T$.

题目 3.13. 证明: 若在形式系统 $\lambda\beta$ 中加入下述公理:

$$(A) \quad \lambda xy.\, x = \lambda xy.\, y$$

则对于任何 $M, N \in \Lambda$, $\lambda\beta + (A) \vdash M = N$.

解答. 根据公理 A, $\lambda xy.\, x = \lambda xy.\, y$, 对于任意 $M, N \in \Lambda$, 使用两次 υ 公理有 $(\lambda xy.\, x)MN = (\lambda xy.\, y)MN$.

对于左边, 使用两次 β 公理 $(\lambda xy.\, x)MN = M$. 对于右边, $(\lambda xy.\, y)MN = N$. 然后使用公理 τ, 有 $M = N$.

因此对于任何 $M, N \in \Lambda$, $\lambda\beta + (A) \vdash M = N$.

题目 3.14. 证明: 设 R 是 Λ 上的一个二元关系, $M \in NF_R$, 则

1. 不存在 $N \in \Lambda$ 使得 $M \to_R N$;

2. $M \twoheadrightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N$.

解答.

1. 根据定义, 对于 $M \in NF_R$, M 中不包含 R-redex 形式的子项, 因此不存在 $N \in \Lambda$ 使得 $M \to_R N$.

2. 假设 $M \not\equiv N$, 根据题目 3.9 知存在序列 $P_0, \dots, P_n \in \Lambda$, 使得 $P \equiv P_0$, $Q \equiv P_n$, 且对于任何 $0 \le i < n$, $P_i \to_R P_{i+1}$ 或 $P_{i+1} \to_R P_i$. 因为 $M \not\equiv N$, 所以序列长度至少为 1, 即存在 $M \to_R N$ 或者 $N \to_R M$, 与本题第一问命题矛盾.

   综上 $M \twoheadrightarrow_R N \Rightarrow M \equiv N$.

题目 3.15. 若 $M \rhd_{\text{mcd}} M'$ 且 $N \rhd_{\text{mcd}} N'$, 则 $MN \rhd_{\text{mcd}} M'N'$.

解答. $M \rhd_{\text{mcd}} M'$ 表明存在序列 $M_0, M_1, \dots, M_n$ 将 M 归约到 M'. $N \rhd_{\text{mcd}} N'$ 同样存在这样的归约序列 $N_0, N_1, \dots, N_n$. 将两个序列合并可以得到 $M_0N_0, M_1N_0, \dots, M_nN_0, M_nN_1, \dots, M_nN_n$ 是从 MN 到 $M'N'$ 的 minimal complete development, 即 $MN \rhd_{\text{mcd}} M'N'$.

题目 3.16. 试找出 $A \in \Lambda^\circ$ 使 A $\lambda-$ 定义函数 $f(x, y) = x + y$.

解答. $A \equiv \lambda xyfz.\, xf(yfz)$, 于是

$$\begin{aligned}
A\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner &\equiv (\lambda xyfz.\, xf(yfz))\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner \\
&=_\beta \lambda fz.\ulcorner n \urcorner f(\ulcorner m \urcorner fz) \\
&=_\beta \lambda fz.\, f^n(f^m z) \\
&= \lambda fz.\, f^{n+m} z \\
&= \ulcorner n + m \urcorner
\end{aligned}$$

所以 A $\lambda-$ 定义函数 $f(x,y)=x+y$.

题目 3.17. 试找出 $A\in\Lambda^\circ$ 使 A $\lambda-$ 定义函数 $f(x)=3x$.

解答. $A\equiv\lambda xfz.\,xf(xf(xfz))$, 于是

$$\begin{aligned}
A\ulcorner n\urcorner &\equiv (\lambda xfz.\,xf(xf(xfz)))\ulcorner n\urcorner\\
&=_\beta \lambda fz.\ulcorner n\urcorner f(\ulcorner n\urcorner f(\ulcorner n\urcorner fz))\\
&=_\beta \lambda fz.\,f^n(\ulcorner n\urcorner f(\ulcorner n\urcorner fz))\\
&=_\beta \lambda fz.\,f^n(f^n(\ulcorner n\urcorner fz))\\
&=_\beta \lambda fz.\,f^n(f^n(f^n z))\\
&= \lambda fz.\,(f^{3n}z)\\
&= \ulcorner 3n\urcorner
\end{aligned}$$

所以 A $\lambda-$ 定义函数 $f(x)=3x$.

题目 3.18. 令 $D\equiv\lambda xyz.\,z(Ky)x$, 证明: 对于任意的 $X,Y\in\Lambda$,

$$\begin{aligned}
DXY\ulcorner 0\urcorner &= X\\
DXY\ulcorner n+1\urcorner &= Y
\end{aligned}$$

这里 $K\equiv\lambda xy.\,x$, $\ulcorner n\urcorner\equiv\lambda fx.\,f^nx$.

解答.

第一, $DXY\ulcorner 0\urcorner\equiv(\lambda xyz.\,z(Ky)x)XY\ulcorner 0\urcorner\twoheadrightarrow_\beta\ulcorner 0\urcorner(KY)X=(\lambda fx.\,x)(KY)X\twoheadrightarrow_\beta X$.

第二, $DXY\ulcorner n+1\urcorner\equiv(\lambda xyz.\,z(Ky)x)XY\ulcorner n+1\urcorner\twoheadrightarrow_\beta\ulcorner n+1\urcorner(KY)X=(\lambda fx.\,f^{n+1}x)(KY)X\twoheadrightarrow_\beta((KY)^{n+1}X)=((\lambda y.\,Y)^{n+1}X)\twoheadrightarrow_\beta Y$.

题目 3.19. 设 $\mathrm{Exp} \equiv \lambda xy.\, yx$, 证明: 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Exp}\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner =_\beta \ulcorner n^m \urcorner$$

(Exp 由 Rosser 教授作出)

解答. 对 m 进行数学归纳.

奠基: 当 $m = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}\ulcorner n \urcorner \ulcorner 1 \urcorner &= (\lambda xy.\, yx)\ulcorner n \urcorner (\lambda fx.\, fx) \\
&= (\lambda fx.\, fx)\ulcorner n \urcorner \\
&= \lambda x.\, \lambda fz.\, f^n zx \\
&= \lambda xz.\, x^n z \\
&\equiv \ulcorner n^1 \urcorner
\end{aligned}$$

成立。

归纳假设: 当 $m = k$ 时, $\mathrm{Exp}\ulcorner n \urcorner \ulcorner k \urcorner =_\beta \ulcorner n^k \urcorner$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}\ulcorner n \urcorner \ulcorner k \urcorner &= (\lambda xy.\, yx)\ulcorner n \urcorner (\lambda fx.\, f^k x) \\
&= (\lambda fx.\, f^k x)\ulcorner n \urcorner \\
&= \lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)^k x
\end{aligned}$$

因此 $\lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)^k x = \ulcorner n^k \urcorner$.

归纳步骤: 对于 $m = k+1$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Exp}\ulcorner n\urcorner\ulcorner k+1\urcorner &= (\lambda xy.\, yx)\ulcorner n\urcorner(\lambda fx.\, f^{k+1}x)\\
&= (\lambda fx.\, f^{k+1}x)\ulcorner n\urcorner\\
&= \lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)^{k+1}x\\
&= \lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)((\lambda fz.\, f^n z)^k x)\\
&= \lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)(\lambda y.\, ((\lambda fz.\, f^n z)^k y))x\\
&= \lambda x.\, (\lambda fz.\, f^n z)(\ulcorner n^k\urcorner x) && \text{(By I.H.)}\\
&= \lambda xz.\, (\lambda y.\, x^{n^k}y)^n z\\
&= \lambda xz.\, (\lambda y.\, x^{n^k}y)(\ldots((\lambda y.\, x^{n^k}y)z))\\
&\equiv \lambda xz.\, x^{n^{k+1}}z\\
&\equiv \ulcorner n^{k+1}\urcorner
\end{aligned}
$$

综上, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Exp}\ulcorner n\urcorner\ulcorner m\urcorner =_\beta \ulcorner n^m\urcorner$.

题目 3.20. 构造 $F \in \Lambda^\circ$ 使得对于任何 $n \in \mathbb{N}$,

$$F\ulcorner n\urcorner =_\beta \ulcorner 2^n\urcorner$$

解答. 使用题目 3.18 中的 D 和题目 3.19 中的 Exp, 有 $F \equiv \lambda x.\, D\ulcorner 1\urcorner(\mathrm{Exp}\ulcorner 2\urcorner x)x$.

题目 3.21. 设 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f = \mathrm{Itw}[g]$, 即

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0\\
f(n+1) &= g(f(n))
\end{aligned}
$$

且 $G \in \Lambda^\circ$ λ-定义函数 g. 试求 $F \in \Lambda^\circ$ 使得 F λ-定义函数 f.

解答. 构造方程

$$
\begin{aligned}
F\ulcorner n\urcorner &= D\ulcorner 0\urcorner\,(G(F(\mathrm{pred}\ulcorner n\urcorner)))\ulcorner n\urcorner\\
F\ulcorner n\urcorner &= (\lambda n.\, D\ulcorner 0\urcorner\,(G(F(\mathrm{pred}\, n)))n)\ulcorner n\urcorner\\
F\ulcorner n\urcorner &= (\lambda f n.\, D\ulcorner 0\urcorner\,(G(f(\mathrm{pred}\, n)))n)F\ulcorner n\urcorner
\end{aligned}
$$

因此, $F \equiv \Theta(\lambda f n.\, D\ulcorner 0\urcorner\,(G(f(\mathrm{pred}\, n)))n)$ λ-定义了函数 f.

题目 3.22. 存在一般递归函数 $\mathrm{var}, \mathrm{app}, \mathrm{abs}, \mathrm{num} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

1. $\forall n \in \mathbb{N}.\, \mathrm{var}(n) = \sharp(v^{(n)})$;
2. $\forall M, N \in \Lambda.\, \mathrm{app}(\sharp M, \sharp N) = \sharp(MN)$;
3. $\forall x \in \nabla, M \in \Lambda.\, \mathrm{abs}(\sharp x, \sharp M) = \sharp(\lambda x.\, M)$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}.\, \mathrm{num}(n) = \sharp\ulcorner n\urcorner$.

解答. 我们取 $[x, y] = 2^x \cdot 3^y$, $\Pi_1 = \mathrm{ep}_0$, $\Pi_2 = \mathrm{ep}_1$, 从而 $[\cdot,\cdot], \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{EF}$.

1. $\sharp(v^{(n)}) = [0, n] \in \mathcal{EF}$, 所以取 $\mathrm{var}(n) = [0, n] \in \mathcal{EF}$.
2. 取 $\mathrm{app}(m, n) = [1, [m, n]] \in \mathcal{EF}$.
3. 取 $\mathrm{abs}(n, m) = [2, [n, m]] \in \mathcal{EF}$.
4. 对于 $\sharp\ulcorner n+1\urcorner$ 有

$$
\begin{aligned}
\sharp\ulcorner n+1\urcorner &= \sharp(\lambda f x.\, f^{n+1}x)\\
&= [2, [\sharp f, \sharp\lambda x.\, f^{n+1}x]]\\
&= [2, [\sharp f, [2, [\sharp x, \sharp f^{n+1}x]]]]\\
&= [2, [\sharp f, [2, [\sharp x, [1, [\sharp f, \sharp f^{n}x]]]]]]
\end{aligned}
$$

对于 $\sharp\ulcorner n\urcorner = [2,[\sharp f,[2,[\sharp x,\sharp f^n x]]]]$, 因此 $\sharp f^n x = (\Pi_2\circ\Pi_2\circ\Pi_2\circ\Pi_2)(\sharp\ulcorner n\urcorner)$. 因此, $\sharp\ulcorner n+1\urcorner = [2,[\sharp f,[2,[\sharp x,[1,[\sharp f,\Pi_2^4(\sharp\ulcorner n\urcorner)]]]]]]$.

令 $h(z) = [2,[\sharp f,[2,[\sharp x,[1,[\sharp f,\Pi_2^4(z)]]]]]]$, 取 $x\equiv \upsilon^{(0)}$, $f\equiv \upsilon^{(1)}$ 时, $h\in\mathcal{EF}$. 于是

$$\begin{cases}\mathrm{num}(0) & = \sharp\ulcorner 0\urcorner\\ \mathrm{num}(n+1) & = h(\mathrm{num}(n))\end{cases}$$

因此, $\mathrm{num}\in\mathcal{PRF}$ 且 $\forall n\in\mathbb{N}.\,\mathrm{num}(n)=\sharp\ulcorner n\urcorner$.

题目 3.23. 设 $f(n)$ 为题目 1.16 中定义的函数, 试构造 $F\in\Lambda^\circ$ 使 $F\ulcorner n\urcorner = \ulcorner f(n)\urcorner$, 对于 $n\in\mathbb{N}^+$ 成立.

解答. 我们取 $[x,y]=2^x\cdot 3^y$, $\Pi_1=\mathrm{ep}_0$, $\Pi_2=\mathrm{ep}_1$, 从而 $[\cdot,\cdot],\Pi_1,\Pi_2\in\mathcal{EF}$. 取 $\omega_n\equiv\lambda x.\,x\ldots x$ (其中共有 n 个 x 且 $n\geq 1, x\equiv\upsilon^{(0)}$).

1. $f(n)=\sharp\omega_n$ ($n\geq 1$, 补充定义 $f(0)=0$), 首先证明 $f\in\mathcal{PRF}$. 对于 $f(n+1)$:

$$\begin{aligned} f(n+1)=\sharp\omega_n &= [2,[\sharp\upsilon^{(0)},\sharp\upsilon^{(0)}\ldots\upsilon^{(0)}]] && (\text{共 } n+1 \text{ 个}\upsilon^{(0)})\\ &= [2,[1,[1,\sharp\upsilon^{(0)}\ldots\upsilon^{(0)}]]] && (\text{共 } n \text{ 个}\upsilon^{(0)})\end{aligned}$$

又因为 $\sharp\upsilon^{(0)}=\Pi_2^2(f(n))$ (共 n 个 $\upsilon^{(0)}$). 所以 $f\in\mathcal{PRF}$.

2. 因为 $f\in\mathcal{PRF}$, 所以有 $F\in\Lambda^\circ$ 使得 $F\ulcorner n\urcorner=\ulcorner\omega_n\urcorner$. 根据定理 3.41 , 有 $E(F\ulcorner n\urcorner)=E\ulcorner\omega_n\urcorner=\omega_n$, E 为枚举子.

取 $M\equiv\lambda z.\,(E(Fz))z$, 因此 $M\ulcorner n\urcorner=(E(F\ulcorner n\urcorner))\ulcorner n\urcorner=\omega_n\ulcorner n\urcorner=\ulcorner n\urcorner\ldots\ulcorner n\urcorner=\ulcorner\underbrace{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}_{n\text{ 个 }n}\urcorner$ ($n\geq 1$).

3. 最后使用题目 3.18 中的 D, 令 $L\equiv\lambda z.\,D\ulcorner 0\urcorner(Mz)z$, L λ-定义函数 $f(n)=\underbrace{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}_{n\text{ 个 }n}$.

题目 3.24. 构造 $H \in \Lambda^\circ$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda$, 有

$$H \ulcorner n \urcorner x_1 \ldots x_n =_\beta \lambda z.\, z x_1 \ldots x_n$$

解答. 1. 令 $L_n \equiv [x_1, \ldots, x_n] \equiv \lambda z.\, z x_1 \ldots x_n$ $(n \geq 1)$, 这里 x_i 为 $v^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$, z 为 $v^{(0)}$.

设 $l(n) = \sharp L_n$, 约定 $l(0) = 0$, 下面证明 $l \in \mathcal{PRF}$.

$$\begin{aligned} l(n) &= [2, [\sharp z, \sharp z x_1 \ldots x_n]] \\ &= [2, [1, h(n)]] \end{aligned}$$

这里 $h(n) = \sharp z x_1 \ldots x_n$.

$$\begin{aligned} h(1) &= \sharp z x_1 = [1, [1, \sharp x_1]] = [1, [1, [0, 1]]] \\ h(n+1) &= \sharp z x_1 \ldots x_n x_{n+1} \\ &= [2, [h(n), \sharp x_{n+1}]] \\ &= [2, [h(n), [0, n+1]]] \end{aligned}$$

补充定义 $h(0) = 0$, 因此 $h \in \mathcal{PRF}$. 从而 $l(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ [2, [1, h(n)]] & \text{否则} \end{cases} \in \mathcal{PRF}$.

2. 令 $M_n \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, [x_1, \ldots, x_n]$, $g(n) = \sharp M_n$, $l(n) = \sharp [x_1, \ldots, x_n]$.

令 $f(i, y) = [2, [[0, i], y]] \in \mathcal{PRF}$, 所以 $g(n) = f(1, f(2, \ldots, f(n-1, f(n, l(n)))))$. 同习题 1.17 可以证明 $g \in \mathcal{PRF}$.

3. 存在 $G \in \Lambda^\circ$, G λ-定义 g, 从而 $G \ulcorner n \urcorner =_\beta \ulcorner M_n \urcorner$, 因此 $E(G \ulcorner n \urcorner) = M_n$.

令 $H \equiv \lambda z.\, E(Gz)$, 从而 $H \ulcorner n \urcorner x_1 \ldots x_n = (\lambda z.\, E(Gz)) \ulcorner n \urcorner x_1 \ldots x_n = M_n x_1 \ldots x_n = [x_1, \ldots, x_n] = \lambda z.\, z x_1 \ldots x_n$.

题目 3.25. 证明: 存在 $\Theta_2 \in \Lambda^\circ$, 使得对于任意 $F \in \Lambda^\circ$, 有

$$\Theta_2 \ulcorner F \urcorner =_\beta F \ulcorner \Theta_2 \ulcorner F \urcorner \urcorner$$

解答. 令 $W \equiv \lambda xy.\, Ey(\mathrm{App}(\mathrm{App}\, x(\mathrm{Num}\, x))(\mathrm{Num}\, y))$, $\Theta_2 \equiv W \ulcorner W \urcorner$, 这里 E 为枚举子, 从而对于 $F \in \Lambda^\circ, E \ulcorner F \urcorner = F$.

$$\begin{aligned}
\Theta_2 \ulcorner F \urcorner &= W \ulcorner W \urcorner \ulcorner F \urcorner \\
&= E \ulcorner F \urcorner (\mathrm{App}(\mathrm{App} \ulcorner W \urcorner (\mathrm{Num} \ulcorner W \urcorner))(\mathrm{Num} \ulcorner F \urcorner)) \\
&= F(\mathrm{App}(\mathrm{App} \ulcorner W \urcorner \ulcorner \ulcorner W \urcorner \urcorner) \ulcorner \ulcorner F \urcorner \urcorner) \\
&= F\, \mathrm{App} \ulcorner W \ulcorner W \urcorner \urcorner \ulcorner \ulcorner F \urcorner \urcorner \\
&= F \ulcorner \Theta_2 \ulcorner F \urcorner \urcorner
\end{aligned}$$