

# Laboratorio de control

## Diseño de controladores PI y PID por asignación de polos para el módulo de presión.

Yorguin Mantilla, Santiago Carmona, Mauricio Duque

Departamento de Ingeniería Electrónica  
Universidad de Antioquia  
Medellín, Colombia

yorguinj.mantilla@udea.edu.co, santiago.carmonab@udea.edu.co, mauricio.duqueq@udea.edu.co

**Resumen** – Se recopilan los resultados obtenidos durante el proceso de diseño de un controlador PI y otro PID para un sistema neumático usando el método de asignación de polos partiendo desde modelos de primer y segundo orden de la planta a controlar, ambos controladores se diseñaron buscando cumplir con ciertos requerimientos dados de tiempo de estabilización, sobrenivel porcentual, además de un cierto valor de tolerancia para error en estado estable ante una manera deseada ante una excitación escalón.

**Palabras clave** – modelo, orden, control, dinámico, error, polos, tiempo muerto, estabilidad, PI, PID

### I. INTRODUCCIÓN

El fin con el cual se diseña un controlador para una planta es el de llevar la respuesta de esta a un estado estable deseado en el menor tiempo posible, esto tomando en cuenta que dadas las condiciones físicas del sistema que se desea controlar las respuestas no pueden ser instantáneas, se debe ser realista y tomar en cuenta que cada planta tiene características propias, además se deben tener en cuenta las perturbaciones en el sistema.

El método de asignación de polos para el controlador PI consiste en encontrar los parámetros  $k_c$  (ganancia proporcional) y  $t_i$  (constante de tiempo integrativo) y para el controlador PID se debe encontrar los mismos parámetros con la única diferencia de que se halla adicionalmente el  $t_d$  (tiempo derivativo) con el objetivo de cumplir con cierto tiempo de estabilización  $T_{ss}$  y cierto sobrenivel porcentual  $SP$  ante una excitación escalón.

### II. PROCEDIMIENTO MATEMÁTICO

A. *Controlador PI:* En este controlador se emplean dos parámetros, uno proporcional y otro integrativo, el primero realiza una corrección instantánea del error y la integrativa lo realiza más lentamente llevando a cero teóricamente el error en estado estable.

La Función de transferencia del bloque de control PI responde a la ecuación:

$$G_c(s) = k_c \frac{t_i s + 1}{t_i s} \quad (1)$$

Donde  $k_c$  y  $t_i$  son parámetros que se pueden modificar según las necesidades del sistema. Si  $t_i$  es grande la pendiente de la rampa, correspondiente al efecto integral será pequeña y, su efecto será atenuado, y viceversa.

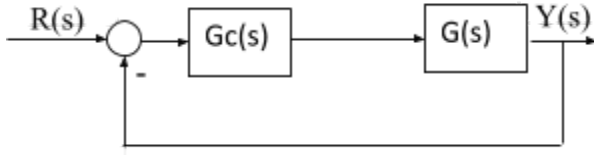
El método primer orden seleccionado es  $\frac{1}{s+1}$  de alfaro cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1.34 e^{-8.4s}}{78.2s+1} \quad (2)$$

Para el diseño del controlador PI es posible despreciar el tiempo muerto que en este caso es de 8.4s, ya que es menos del 20% de la constante de tiempo del modelo que en este caso es de 78.2s, se procede al diseño partiendo de la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1.34}{78.2s+1} \quad (3)$$

Al plantear un sistema de control con realimentación unitaria de la siguiente manera:



**Fig 1.** SC con realimentación unitaria

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (3) la función de transferencia del sistema de la fig 1 viene dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Gc(s)G(s)}{1+Gc(s)G(s)} \quad (4)$$

$$T(s) = \frac{k_c(t_i s + 1) * 1.34}{t_i s^2 * (78.2 s + 1) + k_c(t_i s + 1) * 1.34} \quad (5)$$

al convertir mónica la ecuación (5), se tiene que:

$$T(s) = \frac{\frac{1.34 k_c}{78.2 t_i} (t_i s + 1)}{s^2 + \frac{1}{78.2} (1 + 1.34 k_c) s + \frac{1.34 k_c}{78.2 t_i}} \quad (6)$$

Partiendo de la función de transferencia general de un sistema de segundo orden, la cual será la función de transferencia deseada:

$$Gd(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

Se tienen como incógnitas los valores  $\zeta$  y  $\omega_n$  los cuales definen el tiempo de estabilización y sobrenivel porcentual para este tipo de sistemas. Inicialmente se plantearon dichos valores a partir de las relaciones características de la respuesta transitoria de un sistema de segundo orden; sin embargo no se logró hallar ninguna combinación que cumpliera con las condiciones pedidas (que serán mencionadas más adelante). Luego de probar varios métodos se encontró un diseño suficiente a partir del método de expansión binomial de una función de transferencia óptima. Así, de entrada se supone una relación de amortiguamiento  $\zeta = 1$ , siendo este un sistema críticamente amortiguado que desde la teoría presenta un mínimo de sobrenivel porcentual.

$$F(s) = \frac{\omega_0^n}{(s + \omega_0)^n} \quad (8)$$

La ecuación (8) plantea una función de transferencia óptima de segundo orden, al realizar una expansión binomial se obtiene el siguiente polinomio característico:

$$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (9)$$

Ahora es posible hacer  $\omega_n = \omega_0$  dado que se está trabajando con un polinomio de segundo orden, por lo tanto se igualan el denominador de la ecuación (6) con (9) para despejar los valores de ganancia proporcional y tiempo integrativo del controlador PI.

$$s^2 + \frac{(1+1.34k_c)}{78.2} s + \frac{1.34 k_c}{78.2 t_i} = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 \quad (10)$$

Partiendo de (10) se igualan los coeficientes correspondientes entre sí llegando a:

$$\frac{(1+1.34k_c)}{78.2} = 2\omega_n \quad (11)$$

$$\frac{1.34 k_c}{78.2 t_i} = \omega_n^2 \quad (12)$$

Despejando de (10) y (11) las constantes  $k_c$  y  $t_i$ , siendo estos los parámetros de interés del controlador PI, se encuentra:

$$k_c = \frac{(2\omega_n)(78.2) - 1}{1.34} \quad (13)$$

$$t_i = \frac{1.34 k_c}{78.2 \omega_n^2} \quad (14)$$

Ahora, en el diseño por expansión binomial el parámetro  $\omega_0$  es de libre elección, dado que en este caso se hizo  $\omega_n = \omega_0$  basta con asignar un valor cualquiera a  $\omega_n$  en las ecuaciones (13) y (14) para finalmente hallar los valores que definen el controlador PI, el valor de  $\omega_n$  se elige teniendo en cuenta que el diseño del controlador, debe cumplir con ciertos parámetros que se tienen establecidos los cuales son:

$$Bp = \frac{100}{k_c} > 30 \quad (15)$$

$$t_i > 60 s \quad (16)$$

Además se deben cumplir las condiciones pedidas que son tener un sobrenivel porcentual  $Sp < 10 \%$ , un tiempo de estabilización  $T_{ss} < 120s$  y la banda de tolerancia de error en estado estable que se eligió de 2%, así luego de tener todo esto presente.

Por último, al realizar una búsqueda iterativa de un valor de  $\omega_n$  que permitiera cumplir con todas las condiciones antes mencionadas, ya que todas van ligadas y dependen de su valor, por tanto con un  $\omega_n = 0.0235$  se llega a:

$$k_c = 1.997$$

$$Bp = 50.08 \%$$

$$t_i = 61.9 s$$

Con estos valores el controlador diseñado queda de la forma:

$$Gc(s) = 1.997 * \frac{61.9s+1}{61.9s} \quad (17)$$

Y la función de transferencia del sistema de control realimentado es:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.03421s + 0.0005523}{s^2 + 0.047s + 0.0005523} \quad (18)$$

B. *Controlador PID:* para realizar este controlador se requieren tres parámetros, uno proporcional (K), uno integrativo (I) y uno derivativo (D). El proporcional actúa con el error presente, el integrativo con el error pasado y el derivativo predice el error futuro.

Al utilizar una configuración paralela del controlador PID, la función de transferencia viene dada por:

$$Gc(s) = \frac{k_c t_d s^2 + k_c s + \frac{k_c}{t_i}}{s} = \frac{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{s} \quad (19)$$

Para el diseño de un controlador con las componentes proporcional, integrativa y derivativa se requiere que la respuesta tenga un buen desempeño ante una entrada escalón unitario con un sobrenivel porcentual y tiempo de estabilización requeridos, se usa el modelo matemático de segundo orden que modela el sistema neumático que se obtuvo con ayuda del método de Stark, cuya función de transferencia se representa a continuación:

$$G(s) = \frac{1.34}{1582.38 s^2 + 93.15 s + 1} \quad (20)$$

al convertir mónica la ecuación (20), se tiene que:

$$G(s) = \frac{8.468 \cdot 10^{-4}}{s^2 + 0.0588s + 6.319 \cdot 10^{-4}} = \frac{k}{s^2 + as + b} \quad (21)$$

Partiendo del SC con realimentación unitaria mostrado en la figura 1 se tiene la función de transferencia:

$$T(s) = \frac{Gc(s)G(s)}{1 + Gc(s)G(s)} \quad (22)$$

Reemplazando las ecuaciones (19) y (21) en (22) se llega a :

$$T = \frac{k(d_2 s^2 + d_1 s + d_0)}{s^3 + (a + kd_2)s^2 + (b + kd_1)s + kd_0} \quad (23)$$

Se probaron diferentes métodos como el de agregar un polo lejano al sistema de segundo orden; sin embargo tampoco se obtuvieron diseños satisfactorios, situación similar a lo que sucedió en el diseño del controlador PI. Finalmente se llegó a un diseño mediante la expansión binomial estandarizada como se mencionó en la ecuación (8). Por tanto el polinomio característico que se obtiene es de orden 3 y este se igual al denominador de (23):

$$s^3 + 3\omega_0^2 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 = s^3 + (a + kd_2)s^2 + (b + kd_1)s + kd_0 \quad (24)$$

Igualando término a término en (24) y reemplazando desde (19) se obtienen las siguientes relaciones al despejar las variables de interés (kc,ti,td):

$$k_c = \frac{3\omega_0^2 - b}{k} \quad (25)$$

$$t_d = \frac{3\omega_0 - a}{kk_c} \quad (26)$$

$$t_i = \frac{kk_c}{\omega_0^3} \quad (27)$$

Como se observa cada uno de los parámetros depende del valor de  $\omega_0$ , además una correcta elección de dicho valor permitirá cumplir con las condiciones antes mencionadas. Para un valor de  $\omega_0 = 0.027$ , se obtiene que:

$$k_c = 1.836$$

$$Bp = 54.45 \%$$

$$t_i = 79.01 \text{ s}$$

$$t_d = 14.28 \text{ s}$$

Con estos valores el controlador PID diseñado queda de la forma:

$$Gc(s) = \frac{26.22 s^2 + 1.836 s + 0.0232}{s} \quad (28)$$

Y la función de transferencia del sistema de control realimentado es:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8.468 \cdot 10^{-4} (22.6 s^2 + 1.836 s + 0.0232)}{s^3 + 0.081 s^2 + 2.19 e^{-3} s + 1.96 e^{-5}} \quad (29)$$

### III. RESULTADOS

#### 1. SIMULACIÓN

Por medio de la plataforma simulink se implementa el SC de la Fig.1, para cada uno de los controladores, PI y PID, teniendo en cuenta sus funciones de transferencias de control y proceso que se hallaron para cada uno de ellos. Además se restringió la salida del controlador de simulink entre 0 y 16 para adecuarlo más a los límites reales. Fue necesario a su vez hacer una equivalencia entre los parámetros hallados y los del controlador PI/PID de simulink ya que las fórmulas utilizadas no son las mismas.

##### 1.1 CONTROLADOR PI:

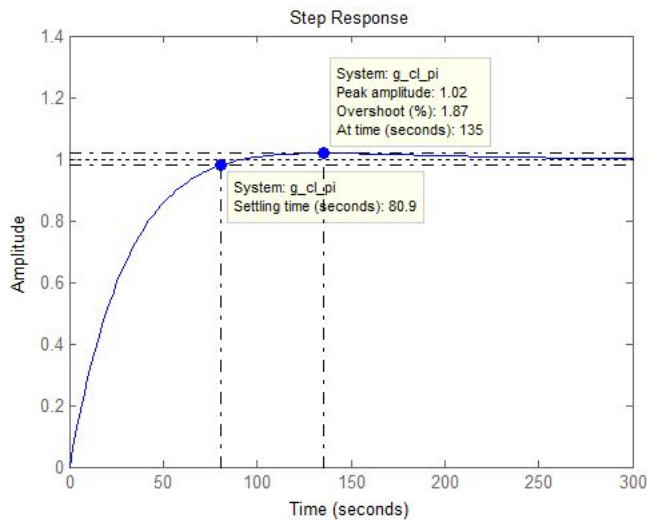


Fig 2. Respuesta al escalón para controlador PI con cálculos realizados en matlab

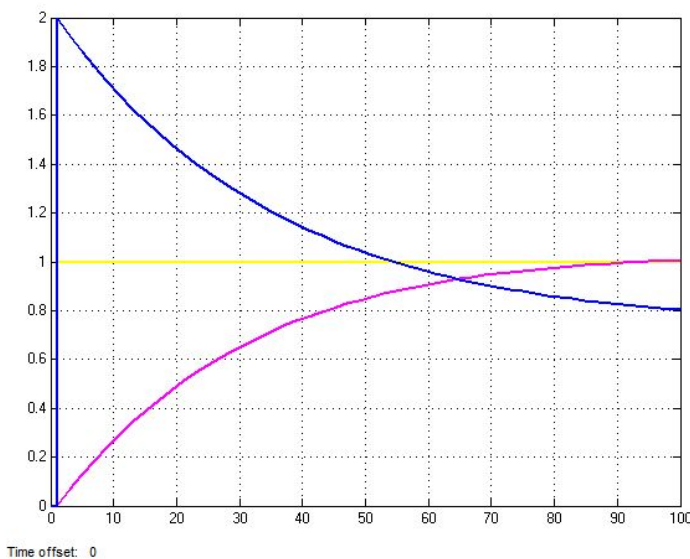


Fig 3. Respuesta al escalón y acción de control para controlador PI en simulink

##### 1.2 CONTROLADOR PID:

Para hacer que el controlador sea realizable es necesario añadir la acción de un polo, que ocasiona un retardo de tiempo “parásito”  $(\alpha t_d s + 1)$ , donde se seleccionó un valor de  $\alpha = 0.1$  ya que este es el valor que se encuentra presente en el laboratorio.

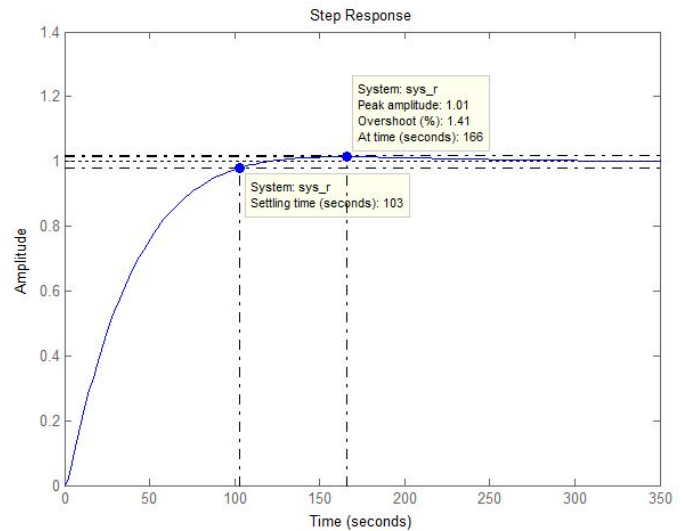


Fig 4. Respuesta al escalón para controlador PID, con cálculos realizados en matlab

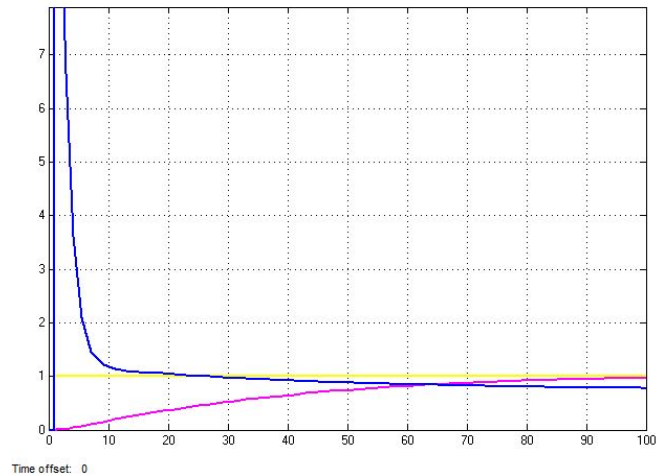


Fig 5. Respuesta al escalón y acción de control para controlador PID en simulink

### IV. ANÁLISIS

En esta práctica se planteó el diseño de los controladores mediante el método de asignación de polos y en particular se hizo uso del ajuste del denominador la función de transferencia a un polinomio binomial estandarizado. Esta metodología se escogió luego de plantear sin éxito el diseño por otros métodos. Para el PI se intentó usar las relaciones correspondientes a la

respuesta transitoria característica de un sistema de segundo orden que permiten asociar el sobrenivel y el tiempo de estabilización de forma analítica con los parametros del controlador. Sin embargo no se halló una combinación de parámetros que cumpliera con las restricciones pedidas. Lo anterior puede atribuirse a la naturaleza de la planta a controlar y del modelo que se tiene de ella. Este mismo método se probó para el diseño PID al agregar un polo lejano con el fin de igualar el orden de los polinomios característicos sin tener resultados satisfactorios. Así mismo se probó mediante los coeficientes optimizados del índice de error ITAE e igualmente no se consiguieron buenos resultados.

En las figuras 2 y 3 se observa la respuesta del sistema al aplicar la acción del controlador PI propuesto. En particular, en la figura 2 se puede comprobar que al excitar el sistema ante un escalón unitario el controlador cumple con las restricciones establecidas para tiempo de estabilización ( $81s < 120s$ ) y sobrenivel porcentual ( $1.86\% < 10\%$ ). Vale recordar que el controlador PI se había diseñado con un  $\zeta = 1$  que corresponde un sistema críticamente amortiguado con sobrenivel porcentual nulo; sin embargo en la gráfica se puede ver que sí existe un ligero sobrenivel que se estabiliza lentamente pero al ser tan pequeño la salida del sistema entra en el rango de estabilización del 2% de forma “rápida”. Lo anterior es consistente con la frecuencia lenta de  $\omega_0 = 0.027$  elegida durante la etapa de diseño del controlador. Por otra parte en la figura 3 (proveniente de simulink) se puede observar tanto la acción de control (en azul) como la respuesta al escalón (en rosado) y la excitación (en amarillo). El tiempo de estabilización de esta figura 3 coincide con el determinado mediante la función *step()* de la figura 2. Además se observar un leve sobrenivel. Estos dos hechos anteriores son consistentes con lo esperado del diseño.

Las figuras 4 y 5 están referidas a la respuesta del sistema ante un escalón unitario y bajo la acción de control del PID escogido. En particular, en la figura 4 se puede comprobar que se cumple con las restricciones establecidas para tiempo de estabilización ( $103s < 120s$ ) y sobrenivel porcentual ( $1.41\% < 10\%$ ). Se puede apreciar en la figura 5, correspondiente al controlador PID, que hay una acción de control prominente en comparación con la acción del controlador PI de la figura 3. Más aún, a pesar de que no se ve en la gráfica, dicha acción de control en realidad llega al nivel de saturación de 16 ligado al límite impuesto; siendo este nivel mucho más alto que el del controlador PI de amplitud máxima de 2. El hecho anterior se puede asociar a una mayor rapidez de la acción de control generada por la componente derivativa.

## V. CONCLUSIONES

1. Al comparar la respuesta transitoria diseñada con los resultados de las simulaciones se observan inconsistencias, como por ejemplo el sobrenivel porcentual. Se pueden esperar pues más inconsistencias cuando se pase a las condiciones reales. En ese sentido lo diseñado es solo una aproximación y se deben tener en cuenta la inconsistencia entre el diseño y la respuesta real. En condiciones reales se tiene un sistema con elementos no lineales que no son representados con una función de transferencia como la escogida. Sin embargo, las pruebas hechas en Matlab son útiles y permiten hacerse una idea del comportamiento ante pequeños cambios de la entrada del sistema en un punto de operación establecido. Por tanto este diseño es una sola aproximación o idea que se pueda tener al momento de realizar la implementación en el laboratorio, en el cual se deberán realizar ajustes dependiendo del comportamiento del sistema.
2. El controlador PID genera una respuesta rápida y con error casi nulo ante cambios tipo escalón en un sistema de control realimentado. En comparación con el controlador PI, el PID es más rápido y genera una respuesta con mayor estabilidad. La respuesta puede verse afectada por los ceros que tiene el controlador, por lo cual, valores obtenidos con denominadores recomendados, no siempre generan la respuesta deseada del sistema. En nuestro caso el controlador PI dió una respuesta más rápida que el PID, lo cual se puede explicar debido a que ambos diseños partieron de modelos distintos de una misma planta.
3. Se observó que los procedimientos de cálculo recomendados (relaciones de respuesta transitoria característica, ITAE, etc) para el diseño de controladores por medio de la metodología de asignación de polos no cumplieron exactamente con la respuesta deseada. En cambio el procedimiento de la expansión del polinomio estandarizado dió buenos resultados. Así, como regla general es importante probar varios métodos para hallar el que mejor se acerque a lo requerido. Las no linealidades de los sistemas son las que imponen las condiciones para sintonizar los controladores con alguno de los métodos; el hecho de que uno de estos sirva para el diseño basado en una planta en particular no implica necesariamente que funcione de manera apropiada para otra.

## REFERENCIAS

- I. Tavera, A; Análisis del error y Diseño óptimo. Curso de Control Semestre 0219, Universidad de Antioquia.
- II. Marín, L., Alfaro V, "Sintonización de controladores por ubicación de polos y ceros", IEEE CONESCAPAN XXVI, 12-14 septiembre, 2007, San José, Costa Rica.
- III. Dorf, R. (2005). Sistemas de control moderno. Texas, EEUU: PEARSON.
- IV. Castaño S. Control PI por asignación de polos. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=9egNQxn7tLQ>