투빅스 18기 정규세션 3주차

Neural Network Basic Assignment

이름: 오유진

1. Sigmoid Function을 z에 대해 미분하세요.

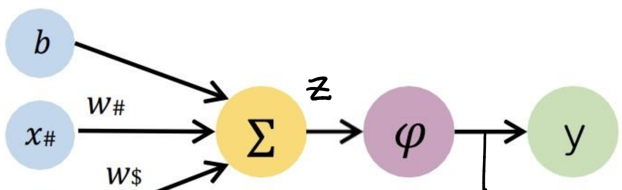
$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} = (1+e^{-z})^{-1}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{-e^{-z}}{-(1+e^{-z})^2} = \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2}$$

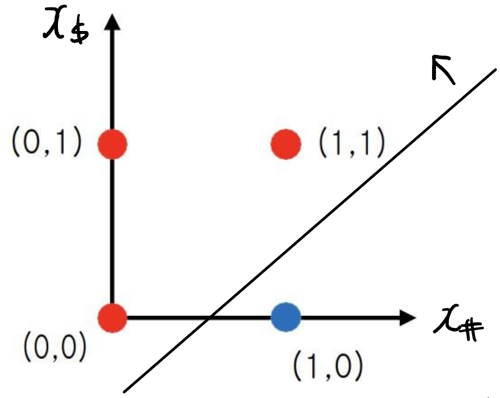
$$= \frac{1+e^{-z}-1}{(1+e^{-z})^2} = \frac{1}{1+e^{-z}} - \frac{1}{(1+e^{-z})^2}$$

$$= \sigma(z) - \sigma(z)^2 = \sigma(z)(1-\sigma(z))$$

2. 다음과 같은 구조의 Perceptron과 ●(=1), ●(=0)을 평면좌표상에 나타낸 그림이 있습니다.



$$y = \varphi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases}$$



2-1. ●, ●을 분류하는 임의의 b, w를 선정하고 분류해보세요.

$z = w_\# \cdot x_\# + w_\$ \cdot x_\$ + b$ 인 때

임의의 $b = -0.65$

$w_\$ = 0.5$

$w_\# = 0.5$ 라고 하면, 입력값에 따른 함수값과 실제값은

	$x_\#$	$x_\$$	y (실제값)	$\hat{y}$ (함수값)
①	0	0	1	0
②	0	1	1	0
③	1	0	0	0
④	1	1	1	1

이다.

2-2. Perceptron 학습 규칙에 따라 임의의 학습률을 정하고 b, w를 1회 업데이트 해주세요.

input let $\eta = 0.1$

실제값과 함수값이 다른 ①, ②데이터를 이용하여 학습해보자.

① : $b = b + 0.1(1 - 0) \times 1$ ← b의 입력값은 1

$= -0.65 + 0.1 = -0.55$

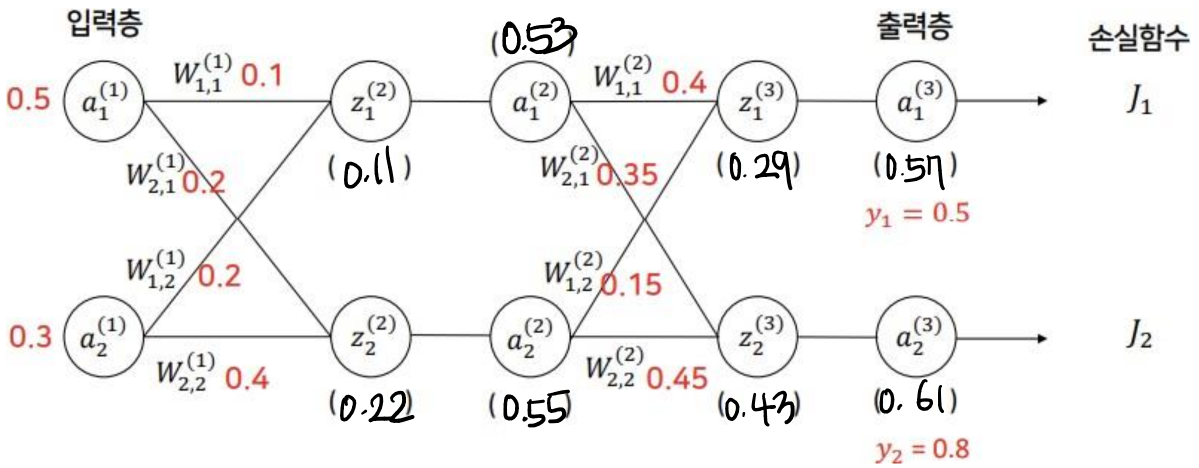
② : $w_\# = w_\# + 0.1(1-0) \times 0$ ← ②식에서 $x_\# = 0$

$= 0.5 + 0 = 0.5$

② : $w_\$ = w_\$ + 0.1(1-0) \times 1$ ← ②식에서 $x_\$ = 1$

$= 0.5 + 0.1 = 0.6$

3. 다음과 같이 입력과 가중치가 주어진 퍼셉트론이 있을 때, 아래의 물음에 답해주세요. 모든 문제는 풀이과정을 자세하게 적어주세요! (3-3까지 있습니다.)



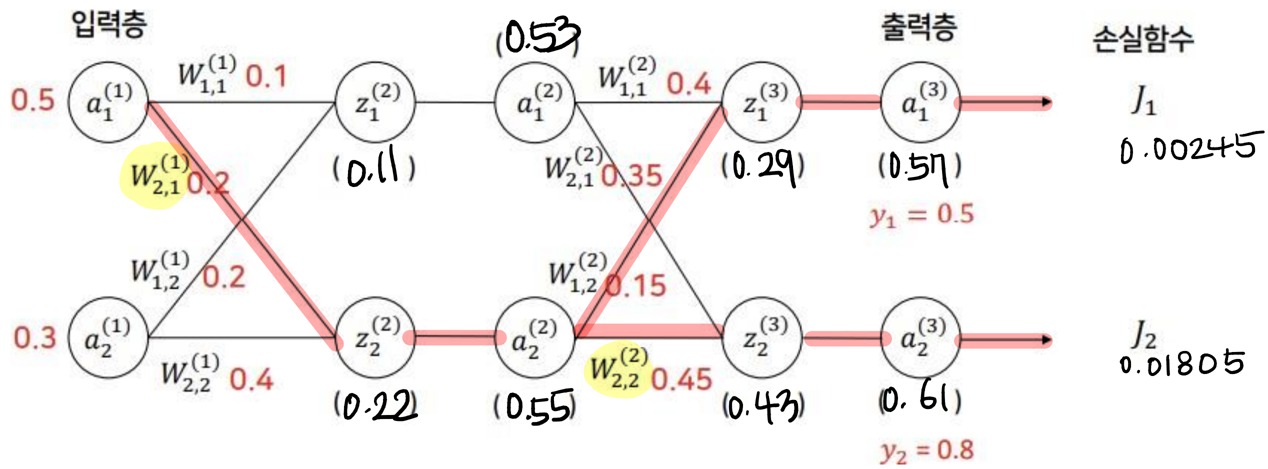
3-1. FeedForward가 일어날 때, 각 노드가 갖는 값을 빈칸에 써주세요. 단, 활성화함수는 sigmoid 함수입니다. (모든 계산의 결과는 소수점 셋째자리에서 반올림하여 둘째자리까지만 써주세요.)

$$z_1^2 = W_{11}^1 a_1^1 + W_{12}^1 a_2^1$$
$$= 0.1\times0.5 + 0.2\times0.3 = 0.05 + 0.06 = 0.11$$
$$z_2^2 = 0.2\times0.5 + 0.4\times0.3 = 0.1 + 0.12 = 0.22$$
$$a_1^2 = \frac{1}{1+e^{-0.11}} = 0.53$$
$$a_2^2 = \frac{1}{1+e^{-0.22}} = 0.55$$
$$z_1^3 = 0.4\times0.53 + 0.15\times0.55 = 0.29 \qquad a_1^3 = \frac{1}{1+e^{-0.29}} = 0.57$$
$$z_2^3 = 0.35\times0.53 + 0.45\times0.55 = 0.43 \qquad a_2^3 = \frac{1}{1+e^{-0.43}} = 0.61$$

3-2. 3-1에서 구한 값을 이용하여 손실함수 J_1과 J_2의 값을 구해주세요. (J_1과 J_2는 반올림하지 말고 써주세요.)

$$J_1 = \frac{1}{2}(a_1^3 - y_1)^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.57 - 0.5)^2 = 0.00245$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(a_2^3 - y_2)^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.61 - 0.8)^2 = 0.01805$$



3-3. 위에서 구한 값을 토대로, BackPropagation이 일어날 때 $W_{2,2}^{(2)}$과 $W_{2,1}^{(1)}$의 조정된 값을 구해주세요. 단, learning rate는 0.1입니다. (계산 과정에서 소수점 넷째자리에서 반올림하여 셋째자리까지만 써주시고, 마지막 결과인 $W_{2,1}^{(1)}$과 $W_{2,2}^{(2)}$의 값만 반올림하지 말고 써주세요.)

$$W_{2,2}^{(2)} = W_{2,2}^{(2)} - 0.1\left[\frac{\partial J_{total}}{\partial W_{2,2}^{(2)}}\right]^{*} = 0.45 - 0.1(-0.02486055) = 0.452$$

* $a_2^{(3)}$의 J total은 J_2이므로

$$\frac{\partial J_2}{\partial W_{2,2}^{(2)}} = \underset{①}{\frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(3)}}} \times \underset{②}{\frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial z_2^{(3)}}} \times \underset{③}{\frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial W_{2,2}^{(2)}}}$$

① $\frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(3)}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_2^{(3)}}(a_2^{(3)} - y_2)^2 = (a_2^{(3)} - y_2)$

② $\frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial z_2^{(3)}} = a_2^{(3)}(1 - a_2^{(3)})$ … 변문제 참고

③ $\frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial W_{2,2}^{(2)}} = a_2^{(2)}$

$$\delta_2^{(3)} = \frac{\partial J_2}{\partial z_2^{(3)}} = 0.452486055$$

$$\therefore \frac{\partial J_2}{\partial W_{2,2}^{(2)}} = (a_2^{(3)} - y_2)a_2^{(3)}(1 - a_2^{(3)})a_2^{(2)}$$

$$= (0.61 - 0.8)0.61(1 - 0.61)0.55 = -0.02486055$$

같은 방식으로 $\delta_1^{(3)} = \frac{\partial J_1}{\partial z_1^{(3)}} = (a_1^{(3)} - y_1)a_1^{(3)}(1 - a_1^{(3)}) = 0.01995$

$W_{1,1}^{(2)} = W_{1,1}^{(2)} - \delta_1^{(3)} a_1^{(2)}$

$W_{2,1}^{(2)} = W_{2,1}^{(2)} - \delta_2^{(3)} a_1^{(2)}$

$W_{2,2}^{(2)} = W_{2,2}^{(2)} - \delta_2^{(3)} a_2^{(2)}$

$$W_{2,1}^{(1)} = W_{2,1}^{(1)} - 0.1\frac{\partial J_{total}}{\partial W_{2,1}^{(1)}}^{*1.} = 0.2 - 0.1(-0.0021468) = 0.200$$

$$*1.\ \frac{\partial J_{total}}{\partial W_{2,1}^{(1)}} = \boxed{\frac{\partial J_{total}}{\partial a_2^{(2)}}}^{*2.} \times \frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \times \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial W_{2,1}^{(1)}} = (\delta_1^{(3)} W_{1,2}^{(2)} + \delta_2^{(3)} W_{2,2}^{(2)})\, a_2^{(2)}(1 - a_2^{(2)})\, a_1^{(1)} = -0.0021468$$

$$= (0.01995 \cdot 0.15 + 0.452486 \cdot 0.45)(0.55)(1 - 0.55)0.5$$

*2. $a_2^{(2)}$의 J total은 $J_1 + J_2$이므로,

$$\boxed{\frac{\partial J_{total}}{\partial a_2^{(2)}}} = \frac{\partial J_1}{\partial a_2^{(2)}} + \frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(2)}} = \frac{\partial J_1}{\partial z_1^{(3)}}\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}} + \frac{\partial J_2}{\partial z_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}}$$

$$= \delta_1^{(3)} \cdot W_{1,2}^{(2)} + \delta_2^{(3)} \cdot W_{2,2}^{(2)}$$