# Bewegungen im Raum

- Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \tag{1}$$

  Mit Weg $s$, Zeit $t$, Anfangsposition $s_0$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0$
  Bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung gilt: Beschleunigung $a = \text{const}$
  Geschwindigkeit: $s'(t) = at + v_0 = v(t)$
  Beschleunigung: $v'(t) = a$

  - Bsp. 1: Freier Fall
    Bewegung unter ausschließlichem Einfluss der Schwerkraft mit Fallbeschleunigung $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 \tag{2}$$

  - Bsp. 2: Schräger Wurf
    Kombination aus gleichförmiger Bewegung (d.h. $a = 0$) in Abwurfrichtung und freiem Fall

- Kurven in Vektordarstellung

  - Bsp. 1: Gerade (für Parameter $t \in \mathbb{R}$)

$$\vec{s}(t) = \vec{p} + t\vec{q} \tag{3}$$

  - Bsp. 2: Kreis (für $t \in [0, 2\pi]$)

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

  - Seien $\phi(t) \wedge \psi(t)$ differenzierbar für $a \leq t \leq b$ und $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ Kurve mit $a \leq t \leq b$. Dann ist

$$\vec{s'}(t) = \begin{pmatrix} \phi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

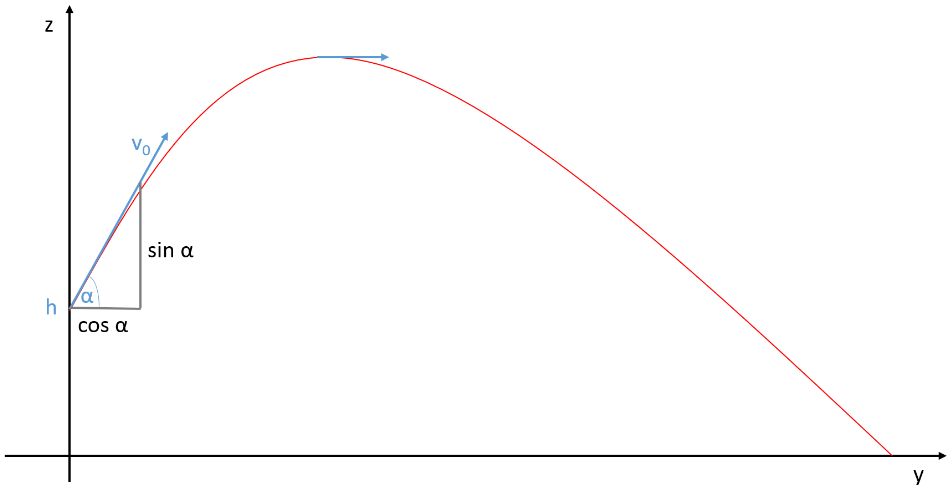
    Tangentenvektor (der Vektor $\vec{s'}(t)$ zeigt also in Tangentenrichtung).
    Analog für 3D

  - Sei $t$ Zeit und $\vec{s}(t)$ zeige auf Punkt in $\mathbb{R}^3$, der zur Zeit $t$ durchlaufen wird. Dann heißt $\vec{s}(t)$ Bahnkurve.

– Vektorielle Darstellung der Weg-Zeit-Fkt. $\vec{s}(t)$ im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{s}(t) = \vec{s_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a_0} \cdot t^2 = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} t^2 \tag{6}$$

- Übungsaufgabe (Wurfparabel)
  Ein Geschoss werde von einer Plattform in der Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$ über dem Boden mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ von $50\,\mathrm{m/s}$ in eine Richtung abgeschossen, die einen Winkel $\alpha$ von $40°$ mit der Bodenfläche bildet. (Sie dürfen dabei annehmen, dass die Flugbahn in der $yz$-Ebene liegt und die $z$-Achse nach oben zeigt.)
  *(i)* Wie hoch fliegt es maximal?
  *(ii)* Wie weit fliegt es?




– Lösungsansatz für *(i)*:
Mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{s_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \vec{v_0} = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wobei $\vec{v_0}$ direkt aus den trigonometrischen Beziehungen (Steigung) folgt, ergibt sich damit folgende Bahnkurve:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10\,\mathrm{m} \end{pmatrix} + 50\,\mathrm{m/s} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 40° \\ \sin 40° \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81\,\mathrm{m/s^2} \end{pmatrix} t^2 \tag{8}$$

Die maximale Höhe $h_{max}$ (Extremum) ist genau dann erreicht, wenn die Ableitung der Funktion $z(t)$, welche die Höhe bestimmt, Null wird; wenn also gilt: $z'(t) = 0$

$$z(t) = 10\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 40^\circ \cdot t - \frac{9.81\,\mathrm{m/s}^2}{2}\cdot t^2 \tag{9}$$

$$z'(t) = 50\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 40^\circ - 9.81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot t \stackrel{!}{=} 0 \tag{10}$$

Auflösen von Gleichung 10 nach $t$ ergibt für den allgemeinen Fall $t = \frac{v_0 \cdot sin\alpha}{g}$. Eingesetzt in $z(t)$ ergibt sich in unserem Bsp. für $h_{max}$ ungefähr 62.6 m.

Rechnet man alternativ mit $\alpha = 70^\circ$ erhält man eine Maximalhöhe von etwa 122.5 m.

- Lösungsansatz für *(ii)*:
  Die maximale Wurfweite ist erreicht, wenn das Geschoss wieder am Boden ist, es also gilt: $z(t) = 0$.
  Da $z(t)$ eine quadratische Gleichung der Form $t^2 + pt + q = 0$ ist, kann der Parameter $t$ über die *p-q-Formel* bestimmt werden (mit $t = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^4}{4} - q}$).
  Dabei muss gelten: $t \geq 0$.
  Hat man auf diese Weise die Zeit $t$ bestimmt, für die $h = 0\,\mathrm{m}$ ist, so muss man selbige in $y(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$ einsetzen, um die Gesamtflugweite zu bestimmen. In unserem Bsp. ist diese ungefähr 262.4 m in $y$-Richtung.

  Modifiziert man Aufgabenteil *(ii)* so, dass nur gefragt wird, wie weit das Objekt fliegt, bis es wieder die Ausgangshöhe von 10 m erreicht hat, dann vereinfacht sich die Rechnung dergestalt, dass man für $t$ die doppelte Zeit bis zum Erreichen der Maximalhöhe erhält, d.h. $t = \frac{2v_0 \cdot sin\alpha}{g}$.
  Eingesetzt in $y(t)$ ergibt sich für die Flugweite nun ca. 251 m.

  Tipp: Nicht den Einheiten-Check vergessen! Stimmen schon die berechneten Einheiten nicht, dann kann das Endergebnis nicht richtig sein.

- Grundgleichung der Mechanik (2. Newton'sches Axiom)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{11}$$

  mit $m = \text{const}$ und $[F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$
  Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte, z.B. Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ etc., dann gilt: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(t) = m \cdot \vec{a}(t)$.

- Differentialgleichungen
  Eine Gleichung der Form $f(t, s, s', s'', ..., s^{(n)}) = 0$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) $n$-ter Ordnung (engl.: ODE). Jede Fkt. $s(t)$, die die DGL löst, heißt Lsg. der DGL.

  - Anfangswertproblem (AWP)
    Geg. durch Anfangsbedingungen $s^{(k)}(a) = \alpha_k$ für $k \in \{0, 1, ..., n\}$

– Euler'sches Polygonzugverfahren
Einfachste numerische Lösungsmethode eines AWP durch Approximation mit Tangente (s. Gl. 14).

Achtung: Euler-Integration wird schnell *instabil*, wenn Schrittweite zu groß, da sich Verfahren aus Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung (lineare Näherung) ableitet; Verbesserungen möglich z.B. durch Runge-Kutta-Verfahren oder sog. Verlet-Integration.

*(i)* Geg.: DGL $s' = f(t,s)$ mit Anfangsbed. $s(t_0) = s_0$ und Schrittweite $h$ mit $h = t_{n+1} - t_n$

$$\begin{aligned} s' &= \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \approx \frac{s(t+h) - s(t)}{h} && (12) \\ \Rightarrow s'_n &= \frac{s_{n+1} - s_n}{h} \stackrel{!}{=} f(t_n, s_n) && (13) \\ \Rightarrow s_{n+1} &= s_n + h \cdot f(t_n, s_n) && (14) \\ s_0 &= s(t_0) && (15) \end{aligned}$$

*(ii)* Geg.: DGL $s'' = f(t,s,s')$ mit Anfangsbed. $s(t_0) = s_0$, $s'(t_0) = v_0$ und Schrittweite $\Delta t$ mit $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.
Setze $v(t) = s'(t) \Rightarrow v'(t) = f(t,s,v) \stackrel{!}{=} a(t)$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \Delta t \cdot f(t_n, s_n, v_n) && (16) \\ s_{n+1} &= s_n + \Delta t \cdot v_n && (17) \end{aligned}$$

mit $s_0 = s(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ und $a_n = f(t_n, s_n, v_n)$.

– Bsp. Partikelsystem
Hält Zustandsvariablen $s$ und $v$ für aktuellen Zeitschritt.

Auf Massepartikel $p$ wirken verschiedene Kräfte $\vec{F_i}$, woraus wegen Gl. 11 $\forall p$ für die aktuelle Beschleunigung $a_n$ folgt: $\vec{a_p}(t) = \vec{s_p''}(t) = \frac{\sum \vec{F_i}}{m_p}$

In der Zeitschritt-Schleife werden je die neue Position $s_{n+1}$ und die neue Geschwindigkeit $v_{n+1}$ mit Hilfe der Gleichungen 17 und 16 berechnet, wobei die zuvor über die einwirkenden Kräfte bestimmte Beschleunigung $a_n$ in Gl. 16 eingesetzt wird.

# Literatur

[Len12] Lengyel, Eric: *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics (Third Edition).* Cengage Learning, Boston, MA, USA, 2012.