# 복소해석학 연습문제 풀이
## A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진,허재성 譯

Update on January 9, 2023

# 연습문제 풀이

## 머리말 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

0에서 $f'$의 미분이 존재하고 그 값이 $L$이라고 가정하자. $\epsilon := 1 > 0$으로 잡으면, $0 < |x - 0| < \delta$이면

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다. 특히 $x := \delta/2$로 잡으면 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| = \left|\frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L\right| = |2 - L| < \epsilon. \tag{0.1}$$

한편 $x := -\delta/2$로 잡아도 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| = \left|\frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L\right| = |2 + L| < \epsilon. \tag{0.2}$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서 $f'$은 0에서 미분이 불가능하다.

## 1장 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$이므로, $x, y$ 중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서 $x^2 + y^2 \neq 0$이고,

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$
\begin{aligned}
(x,y)\cdot&\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\\
&=\left(x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-y\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),x\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\
&=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right)=(1,0).
\end{aligned}
$$

따라서 $(x,y)\neq(0,0)$에 대하여 $(x,y)^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$이다.

## 연습문제 ??

$\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로, $\tan\theta\in\mathbb{R}$이고,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-i\tan\theta}&=\frac{1}{1^2+(\tan\theta)^2}+i\left(\frac{\tan\theta}{1^2+(\tan\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}+i\left(\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{1}+i\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{1}=(\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta).
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}&=(1+i\tan\theta)((\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta))\\
&=(\cos\theta)^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta)(\cos\theta)\\
&\qquad+\left((\sin\theta)(\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2\right)\\
&=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+i2(\sin\theta)(\cos\theta)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta).
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

$P\subset\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면, $i\neq 0$이므로 조건 (P3)에 의해 $i\in P$이거나 ($i\neq P$이고 $-i\in P$)이다. 조건 (P2)에서

$$
-1=i\cdot i=(-i)\cdot(-i)\in P \tag{0.3}
$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \tag{0.4}$$

가 된다. 그런데 $1 \neq 0$이고 $x = 1$이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

## 연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

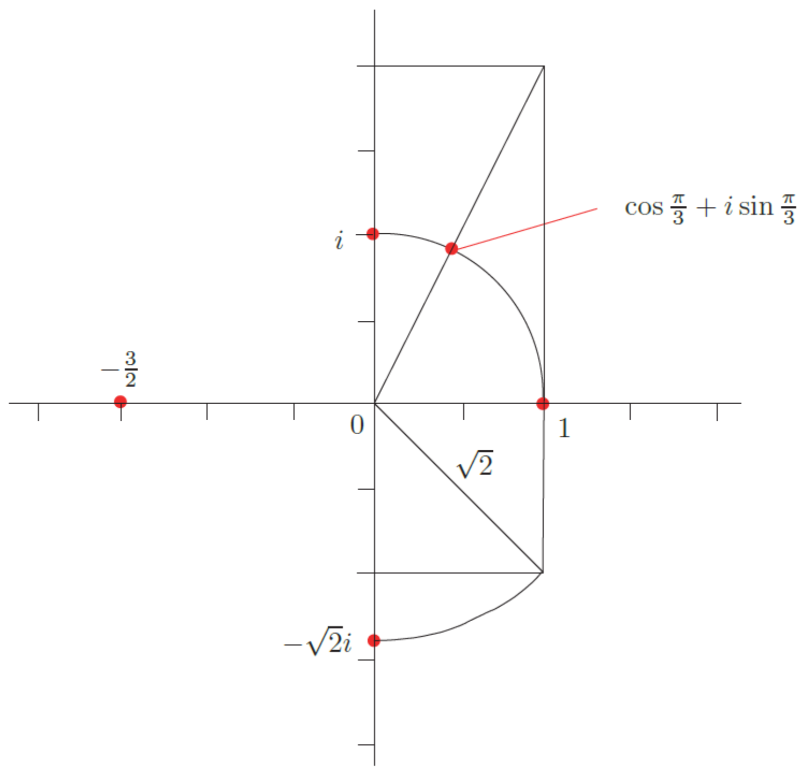



Fig. 5.2 Location of the complex numbers 0, 1, $-3/2$, $i$, $-\sqrt{2}i$, $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

그림 0.1: 복소수 0, 1, $-3/2$, $i$, $-\sqrt{2}i$, $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$의 위치

## 연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$에 대하여 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$이다.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + i2(\cos\theta)(\sin\theta)\right)\\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - (\sin\theta)2(\cos\theta)(\sin\theta)\end{aligned}$$

$$+ i(\,\cdots).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta))\\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(\sin\theta)^2\\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - 1 + (\cos\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(1-\cos\theta)^2\\ &= (\cos\theta)^3 - \cos\theta + (\cos\theta)^3 - 2\cos\theta + 2(\cos\theta)^3\\ &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$이 복소수 $a, b \in \mathbb{C}$와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta))\\ &= \mathrm{Re}((\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3)\\ &= (\cos\theta)^3 - 3(\cos\theta)(\sin\theta)^2\\ &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 32\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32(0 + i\cdot 1) = 32i.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$2+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2)$이고 $3+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/3)$이다. 따라서, $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$이다. 한편,

$$(2+i)(3+i) = 6 - 1 + i(2+3) = 5 + 5i$$

이므로 $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1}1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로, $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$이다.

## 연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점 $A$, $B$, $C$의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수 $z_A$, $z_B$, $z_C$에 있다고 하자. $\ell(AC) = \ell(AB)$이고 $\angle CAB = \pi/3$이므로,

$$z_C - z_A = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_B - z_A). \tag{0.5}$$

귀류법을 쓰기위해 $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서 $p + iq = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(m + in)$을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \tag{0.6}$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \tag{0.7}$$

식 (0.6)에 $-n$을 곱하고, 식 (0.7)에 $m$을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데 $m^2 + n^2 \neq 0$이므로 ($z_B \neq z_A$이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.

## 연습문제 ??

$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$로 쓸 수 있다. $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$가

$$w^4 = \rho^4(\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

를 만족해야 하므로, $\rho^4 = 1$에서 $\rho = 1$이다. 또한, $4\alpha \in \{\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \ldots\}$에서

$$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \pm \pi, \ldots\right\}.$$

따라서 $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot ((\cos\alpha + i\sin\alpha)$는 다음 집합에 속한다.

$$\left\{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right\}$$
$$= \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

네 개의 해를 복소평면에 그려보면 그림 0.2와 같다.

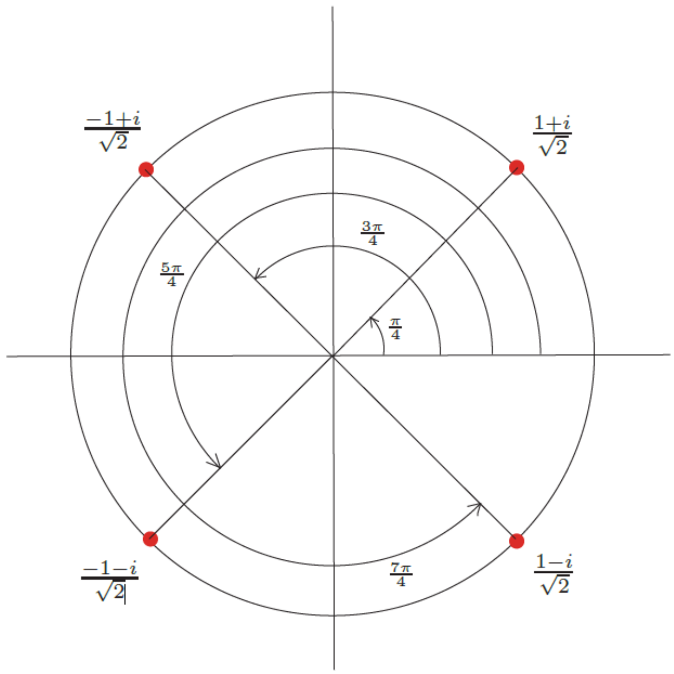



Fig. 5.3 Location of the complex numbers $w$ that satisfy $w^4 = -1$.

그림 0.2: $w^4 = -1$을 만족하는 복소수 $w$의 위치

## 연습문제 ??

방정식으로부터

$$0 = z^6 - z^3 - 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + z^3 - 2 = (z^3 - 2)(z^3 + 1)$$

이므로 $z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1$이다. $z^3 = 2$를 만족하는 해를 구하면

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

이다. 한편, $z^3 = -1$의 해는

$$z \in \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\pi + i\sin\pi, \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

이다. 결론적으로 $z^6 - z^3 - 2 = 0$일 필요충분조건은 $[z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1]$이다. 즉,

$$
\begin{aligned}
z \in & \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\} \\
& \bigcup \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 해는

$$
z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.
$$

## 연습문제 ??

$\omega^3 = 1$을 만족하는 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$을 생각하자. 그러면, $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 따라서,

$$
\begin{aligned}
&((b-a)\omega + (b-c))((b-a)\omega^2 + b - c) \\
&\qquad = (b-a)^2\omega^3 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\
&\qquad = (b-a)^2 \cdot 1 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\
&\qquad = (b-a)(b-a-b+c) + (b-c)^2 \\
&\qquad = (bc - ca - ab + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\
&\qquad = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.
\end{aligned}
$$

따라서 $(b-a)\omega = c - b$이거나 $(b-a)\omega^2 = c - a$이다. 두번째 식은 $(b-a)\omega^3 = (c-a)\omega$와 동치이므로 $(c-b)\omega = b - a$이다. 이로부터 $|b-a| = |c-b|$를 얻고 $a$와 $b$, $a$와 $c$를 잇는 두 선분의 사잇각은 $\pi/3$이다. 그림 0.3을 참고하라.

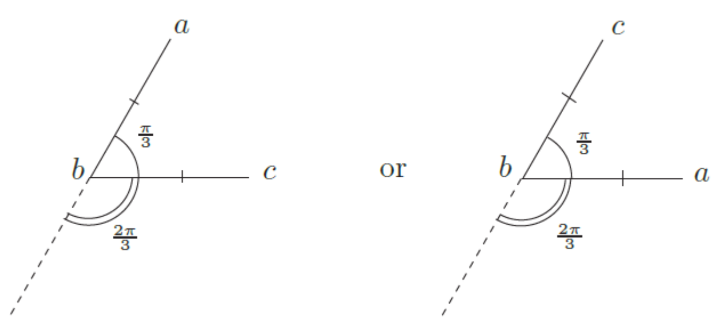



Fig. 5.4 $a, b, c$ form an equilateral triangle.

그림 0.3: 정삼각형을 이루는 세 점 $a$, $b$, $c$

두 가지 그림 모두 세 점 $a$, $b$, $c$는 정삼각형을 이룬다. $a$, $b$, $c$가 실수인 경우는 한점 $r \in \mathbb{R}$로 모이게 되어 $a = b = c = (= r)$이 되어 실수의 경우도 원하는 결과를 얻는다.

## 연습문제 ??

$\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$이 $\omega^3 = 1$을 만족한다고 하자. $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 또한, $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$이므로,

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \omega^k + \omega^{2k}).$$

그런데,

$$\begin{aligned}
(1 + \omega^k + \omega^{2k}) &= \begin{cases} 1+1+1, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 1 + \omega + \omega^2, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 1 + \omega^2 + \omega^4, & k \equiv 2 \mod 3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 3, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 2 \mod 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

에서

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = 3 \cdot \left( \binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} \right).$$

다른 방법으로 보면,

$$\begin{aligned}
(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} &= 2^{3n} + (-\omega^2)^{3n} + (-\omega)^{3n} \\
&= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n \\
&= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

## 연습문제 ??

그림 0.4와 같이 평면위의 네 점 $A, B, C, D$를 복소수 $a, b, c, d$에 각각 대응시키자. $AB'$은 $A$를 중심으로 하여 $AB$를 반시계방향으로 $90°$회전한 것이므로 $B'$은 복소수 $a - i(b - a)$에 대응된다. $P$는 $BB'$의 중점이므로 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{a + b - i(b - a)}{2}.$$

같은 방법으로 $Q$, $R$, $S$는 각각 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{b + c - i(c - b)}{2}, \quad \frac{c + d - i(d - c)}{2}, \quad \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

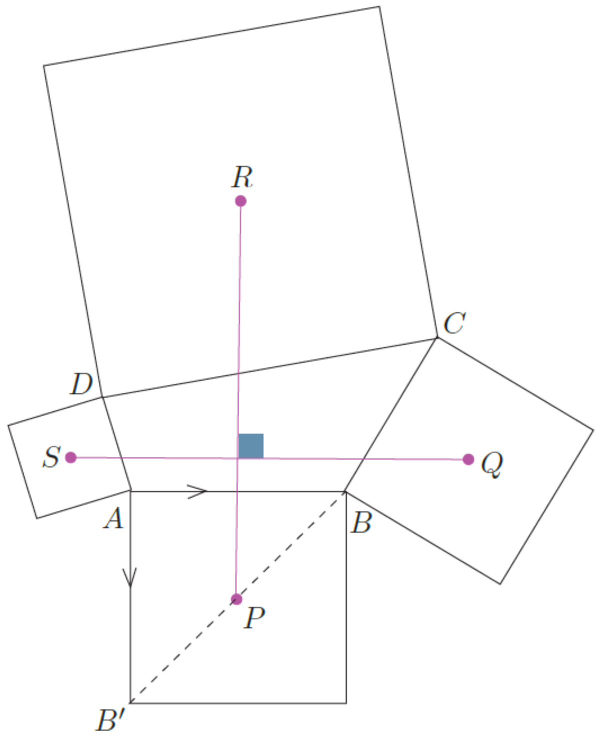



Fig. 5.5 $RP$ and $SQ$ have equal lengths and meet at right angles.

그림 0.4: $RP$와 $SQ$는 길이가 같고 수직으로 만난다

점 $P, Q, R, S$에 대응되는 복소수를 각각 $p, q, r, s$라 하면,

$$\begin{aligned} i(q-s) &= i\left(\frac{b+c-i(c-b)}{2} - \frac{d+a-i(a-d)}{2}\right) \\ &= \frac{-b+c-a+d+i(b+c-d-a)}{2} \\ &= \frac{-a-b+i(b-a)}{2} + \frac{c+d-i(d-c)}{2} = -p+r \end{aligned}$$

이므로, $|q-s| = |p-r|$이 되어 $\ell(QS) = \ell(PR)$이다. 또한, $i$를 곱하는 것은 원점을 중심으로 $90°$ 회전을 의미하기 때문에 $PR \perp QS$이다.

## 연습문제 ??

실수 $x_1, x_2, y_1, y_2$에 대하여 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$라 하자. 그러면 $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 = i(x_1y_2 + y_1x_2)$이고,

$$\begin{aligned} |z_1z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + y_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(y_2^2+x_2^2) = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\\&= |z_1|^2|z_2|^2.\end{aligned}$$

$|z_1|, |z_2|, |z_1z_2|$는 모두 음이 아닌 실수 이므로 $|z_1||z_2| = |z_1||z_2|$가 성립한다.

## 연습문제 ??

$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하자. 그러면,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x-iy} = x - i(-y) = x+iy = z.$$

또한,

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2+i(-xy+xy) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

끝으로,

$$\begin{aligned}\frac{z+\bar{z}}{2} &= \frac{x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}}{2} = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z),\\ \frac{z-\bar{z}}{2i} &= \frac{\cancel{x}+iy-\cancel{x}+iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \mathrm{Im}(z).\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면,

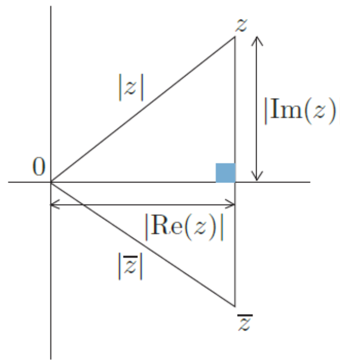
$$\begin{aligned}|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{x^2+(-y)^2} = |x-iy| = |\bar{z}|,\\ |\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|,\\ |\mathrm{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|.\end{aligned}$$

$\bar{z}$는 $z$를 실수축에 대칭시켜 얻어지며, $0 \in \mathbb{R}$이므로 원점과 $z$와의 거리는 $\bar{z}$와의 거리와 같다. 즉, $|z| = |\bar{z}|$. 부등식 $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$와 $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$는 아래 그림에서 직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 길다는 것을 의미한다.

## 연습문제 ??

우선 $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| = |a||z| < 1\cdot 1 = 1$이므로, $\bar{a}z \ne 1$이고,

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)} &= \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} = \frac{z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}}\\ &= \frac{|z|^2-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2|z|^2}\end{aligned}$$




$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 + |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.
\end{aligned}
$$

따라서 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \underbrace{\dfrac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}}_{\geq 0\ (|z|<1, |a|<1 \text{ 이므로})} \leq 1 - 0 = 1.$

## 연습문제 ??

$w \in \mathbb{C}$가 $p(w) = 0$, 즉, $c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d = 0$을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \bar{0} = 0$$

이고, 모든 $c_k$ $(0 \leq k \leq d)$가 실수이므로

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \overline{c_0} + \overline{c_1 w} + \cdots + \overline{c_d w^d} \\
&= \overline{c_0} + \overline{c_1}\,\overline{w} + \cdots + \overline{c_d}\,\overline{w^d} = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d.
\end{aligned}
$$

마지막 등식에서

$$\overline{w^k} = \underbrace{\overline{w \cdots w}}_{k\text{번}} = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = (\bar{w})^k, \quad 1 \leq k \leq d$$

를 사용하였다. 따라서, $0 = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d = p(\bar{w})$.

## 연습문제 ??

$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$라고 하자. 단, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. 그러면,

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|b|(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &= |a||b|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) \end{aligned}$$

이고 $\operatorname{Im}(a\bar{b}) = |a||b|(-(\cos\alpha)(\sin\beta) + (\sin\alpha)(\cos\beta)) = |a||b|\sin(\alpha-\beta)$. 0, $a$, $b$를 꼭지점으로 하는 $\Delta OAB$의 면적은 ($O \equiv 0$, $A \equiv a$, $B \equiv b$)

$$\frac{1}{2}\ell(OA)\ell(OB)\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}|a|\cdot|b|\cdot|\sin(\alpha-\beta)| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(a\bar{b})| = \left|\frac{\operatorname{Im}(a\bar{b})}{2}\right|.$$

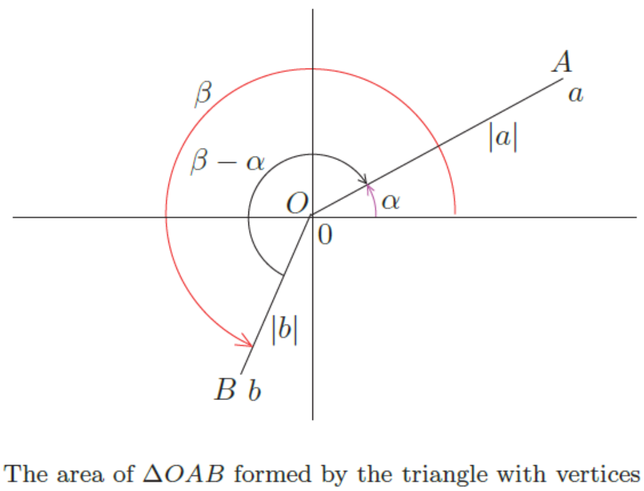



그림 0.5: 0, $a$, $b$를 꼭지점으로 하는 $\Delta OAB$의 면적

## 연습문제 ??

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$w := i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix}1 & z_1 & \overline{z_1}\\ 1 & z_2 & \overline{z_2}\\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}} = -i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix}1 & z_1 & \overline{z_1}\\ 1 & z_2 & \overline{z_2}\\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}}.$$

한편, 정사각행렬 $M = [m_{ij}]$에 대하여,

$$\det M = \sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot m_{i\sigma(i)},$$

여기서, $S_n$은 $\{1,\ldots,n\}$에 대한 모든 치환(permutation)의 집합이다.

$$\overline{\det M} = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot \overline{m_{i\sigma(i)}} = \det \overline{M},$$

여기서, $\overline{M}$은 $M$의 모든 원소에 대하여 켤레복소수를 취한 것이다. 따라서,

$$\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \\ 1 & \overline{z_3} & z_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix},$$

마지막 등식은 두번째 열과 세번째 열을 바꾼 것이다. 종합하면,

$$\begin{aligned} \overline{i\cdot\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = -i\cdot\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} &= -i\cdot\left(-\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}\right) \\ &= i\cdot\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

따라서, $w$는 켤레복소수와 동일하므로 실수이다.

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 + &|z_1-z_2|^2 \\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} \\ &\qquad + z_1\overline{z_1} + z_1\cdot(-\overline{z_2}) + (-z_2)\cdot\overline{z_1} + (-z_2)(-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \cancel{z_1\cdot\overline{z_2}} + \cancel{z_2\cdot\overline{z_1}} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - \cancel{z_1\cdot\overline{z_2}} - \cancel{z_2\cdot\overline{z_1}} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2+|z_2|^2). \end{aligned}$$

복소평면에서 $0, z_1, z_2, z_1+z_2$를 꼭지점으로 하는 평행사변형 $P$를 생각하자. 그러면, $|z_1+z_2|$는 $P$의 한쪽 대각선의 길이가 되고, $|z_1-z_2|$는 다른쪽 대각선의 길이가 된다. 또한, $|z_1|, |z_2|$는 $P$의 두변의 길이이다. 따라서 위의 식이 의미하는 것은 "평행사변형에서 대각선 길이의 제곱의 합은 변의 길이의 제곱의 합의 두배와 같다" 이다.

## 연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, $|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2|$이므로

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1-z_2|. \tag{0.8}$$

모든 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, 식 (0.8)에서 $z_1$과 $z_2$의 역할을 바꾸어도 성립하므로

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \tag{0.9}$$

식 0.8과 0.9로부터 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$이다.

## 연습문제 ??

(1),(2),(3):

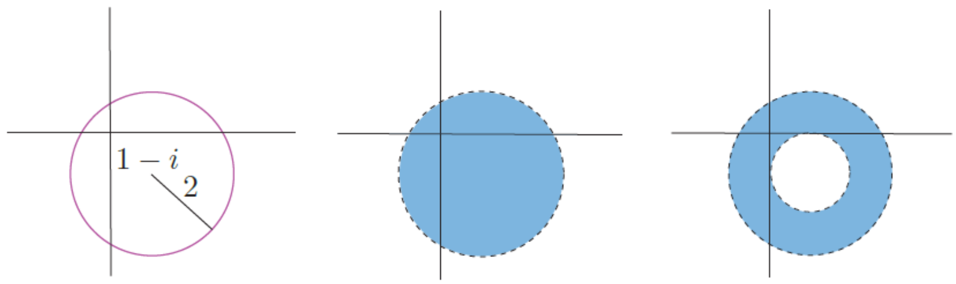
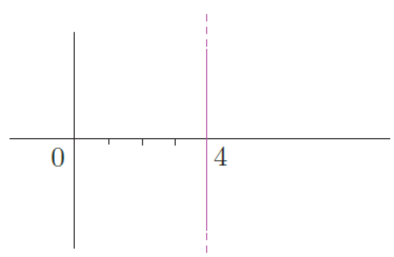



Fig. 5.7 Left to right: The set of points described by $|z-(1-i)|=2$, $|z-(1-i)|<2$ and $1<|z-(1-i)|<2$, respectively.

그림 0.6: 왼쪽부터 $|z-(1-i)|=2$, $|z-(1-i)|<2$, $1<|z-(1-i)|<2$

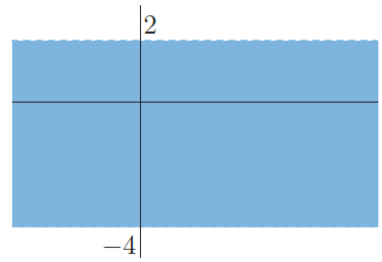
(4): $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $\mathrm{Re}(z-(1-i)) = 3$은 $x - 1 = 3$과 동치이므로, $x = 4$이다.




(5): $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $|\mathrm{Im}(z-(1-i))| < 3$은 $|y+1| < 3$, 즉, $-4 < y < 2$와 같다.

(6): $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1-i)| = |z-(1+i)|\}$는 $1-i$와 $1+i$에서 같은 거리에 있는 복소수 $z$의 집합이다. 따라서, $1-i$와 $1+i$을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다. 즉, 실수축이다.

(7): 방정식 $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$는 $z$에서 $1+i$까지의 거리와 $1-i$까지의 거리의 합이 2가 됨을 의미한다. 그런데 $1-i$와 $1+i$의 거리가 2이므로 $z$는 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분에 있다.



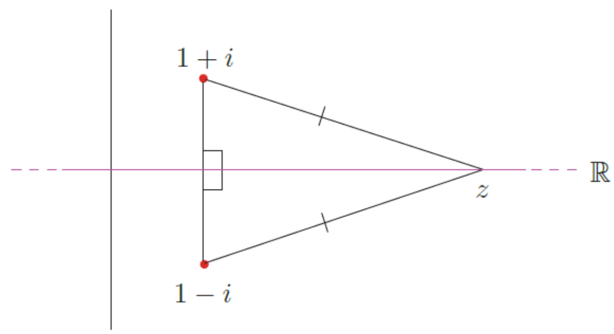




Fig. 5.8  The set of points $z$ satisfying $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$ is $\mathbb{R}$.

그림 0.7: $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$를 만족하는 집합은 $\mathbb{R}$

직접 계산하는 방식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다. $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ &\geq |y+1| + |y-1| \geq 1+\cancel{y}+1-\cancel{y} = 2 \end{aligned}$$

이므로 $|y+1|+|y-1| = 2$이고, $x = 1$이다.

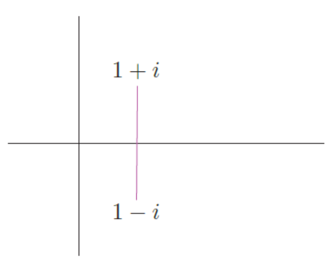



Fig. 5.9  The set of points $z$ satisfying $|z-(1-i)|+|z-(1+i)| = 2$ is the line segment joining $1-i$ to $1+i$.

그림 0.8: $|z-(1-i)|+|z-(1+i)| = 2$를 만족하는 집합은 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분이다.

(8): 방정식 $|z-(1-i)|+|z-(1+i)| = 3$을 만족하는 집합은 초점이 $1+i$와 $1-i$인 타원 $E$이 된다. 따라서, $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1-i)|+|z-(1+i)| < 3\}$은 타원 $E$의 내부가 된다.

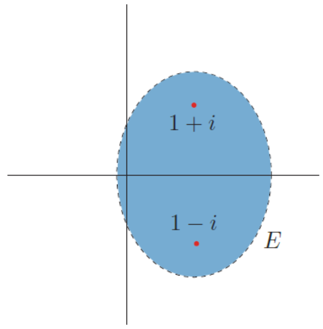



Fig. 5.10 The set of points $z$ satisfying $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$ is the interior of the ellipse $E$.

그림 0.9: $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$을 만족하는 집합은 타원 $E$의 내부이다.

## 연습문제 ??

$z \neq 0$에 대하여 $p(z) = z^d\left(c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|c_{d-1}|}{n} + \cdots + \frac{|c_1|}{n^{d-1}} + \frac{|c_0|}{n^d}\right) = 0$$

이므로, 다음을 만족하도록 충분히 큰 $N$을 잡을 수 있다.

$$\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} < \frac{|c_d|}{2}.$$

그러면 $|z| > N =: R$에 대하여

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |z^d|\left|c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right| \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left|\frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right|\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_1|}{|z|^{d-1}} + \frac{|c_0|}{|z|^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \frac{|c_d|}{2}\right) = \underbrace{\frac{|c_d|}{2}}_{=:M}|z|^d.
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$(\Leftarrow)$ :

실수열 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$가 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다고 하자. 그러면, 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여, 충분히 큰 $N$이 존재하여 $n > N$이면

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

을 만족하게 할 수 있고,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= \sqrt{(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L))^2 + (\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 $L$로 수렴한다.

$(\Rightarrow)$ :

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $L$로 수렴한다고 가정하자. $n > N$이면 $|z - L| < \epsilon$이 되도록 하는 $N$을 잡을 수 있다. 그러면 모든 $n > N$에 대하여,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| &= |\mathrm{Re}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon, \\ |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| &= |\mathrm{Im}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

이 되어 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다.

## 연습문제 ??

$(\Rightarrow)$ :

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $L$로 수렴한다고 가정하자. 그러면 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다. 따라서 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(-\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$은 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $-\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다. 즉, $(\mathrm{Re}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(\overline{L})$과 $\mathrm{Im}(\overline{L})$로 수렴한다. 결론적으로 $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다.

$(\Leftarrow)$ :

$(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다고 하자. 앞의 증명에서 $(\overline{(\overline{z_n})})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{(\overline{L})}$로 수렴한다. 다시 쓰면, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $L$로 수렴한다.

## 연습문제 ??

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{C}$의 코시수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| &= |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m|, \\ |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(z_m)| &= |\mathrm{Im}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m| \end{aligned}$$

이므로 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$도 코시수열이다. $\mathbb{R}$의 완비성으로부터 두 수열은 수렴한다. 각각 $a, b \in \mathbb{R}$로 수렴한다고 하자. 그러면 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 $\mathbb{C}$에서 $a + ib$로 수렴한다. 따라서 $\mathbb{C}$는 완비공간이다.

## 연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$와 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. $\delta = \epsilon > 0$으로 잡으면, $|z - z_0| < \delta$일 때,

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \le |z - z_0| < \delta = \epsilon$$

을 만족한다. 따라서 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$는 $z_0$에서 연속이고, $z_0 \in \mathbb{C}$는 임의로 선택할 수 있으므로 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$는 $\mathbb{C}$에서 연속이다.

## 연습문제 ??

$U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$이라 하자. $U$의 여집합을 $F := U^C$로 쓰자. $F$에 정의된 수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{C}$에서 $L$로 수렴한다면,

$$\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n) \le 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{0.10}$$

이고 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다. 따라서, $(\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$도 수렴하며 극한은 $\operatorname{Re}(L) \cdot \operatorname{Im}(L)$이 된다. 식 (0.10)으로부터 $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) \le 1$이므로 $L \in F$이다. 결론적으로 $F$는 닫힌집합이고, 그 여집합인 $U$는 열린집합이 된다.

이제 $U$가 영역이 아님을 보이자. 우선 영역이라고 가정하자. 그러면 $\gamma(a) = 2 + 2i \in U$와 $\gamma(b) = -2 - 2i \in U$을 잇는 (계단형) 경로 $\gamma : [a, b] \to U$가 존재한다. 함수 $z \mapsto \operatorname{Re}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$가 연속이므로, $t \overset{\varphi}{\mapsto} \operatorname{Re}(\gamma(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}$도 연속이다.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \operatorname{Re}(\gamma(a)) = \operatorname{Re}(2 + 2i) = 2, \\ \varphi(b) &= \operatorname{Re}(\gamma(b)) = \operatorname{Re}(-2 - 2i) = -2. \end{aligned}$$

그런데, $\varphi(a) = 2 > 0 > -2 = \varphi(b)$이므로, 중간값정리에 의해 $0 = \varphi(t_*) = \operatorname{Re}(\gamma(t_*))$를 만족하는 $t_* \in [a, b]$가 존재한다. 한편, $\operatorname{Re}(\gamma(t_*)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \not> 1$ 이므로 $\gamma(t_*) \notin U$이다. 이는 $U$가 경로연결된 집합이라는 가정에 모순이 되어, $U$는 영역이 될 수 없다.

## 연습문제 ??

$D$가 열린집합이므로 이를 실수축에 대칭시킨 $D^*$도 열린집합이다. $w_1, w_2 \in D^*$라 하면, $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in D$이다. $D$가 영역이므로 $\gamma(a) = \overline{w_1}$, $\gamma(b) = \overline{w_2}$이고 모든 $t \in [a, b]$에 대하여 $\gamma(t) \in D$인 계단형 경로 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$가 존재한다. 이제 $\gamma^* : [a, b] \to \mathbb{C}$를 $\gamma^*(t) = \overline{\gamma(t)}$로 정의하자. 그러면 $\gamma^*(a) = \overline{\overline{w_1}} = w_1$, $\gamma^*(b) = \overline{\overline{w_2}} = w_2$이고, 모든 $t \in [a, b]$에 대하여 $\gamma^*(t) \in D^*$이다. $\gamma^*$는 연속함수 $\gamma$와 $z \mapsto \bar{z}$의 합성함수이므로 연속이다. $\gamma$가 계단형 경로이므로, $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $\gamma\big|_{[t_k, t_{k+1}]}$는 실수부 또는 허수부가 상수인

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$$

가 존재한다. 마찬가지로 $\gamma^*\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$도 실수부 또는 허수부가 상수이다. (실수부는 $\gamma\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$의 실수부와 같고 허수부는 $\gamma\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$의 허수부에 마이너스 부호를 붙인 것과 같다.) 따라서, $\gamma^*$도 계단형 경로이고, $D^*$는 경로연결된 집합이다.

$D^*$는 열린집합이고 경로연결된 집합이므로 영역이 된다.

## 연습문제 ??

$$\exp\left(i\frac{9\pi}{2}\right) = \exp\left(i\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1(0 + i\cdot 1) = i,$$
$$\exp(3 + \pi i) = e^3(\cos\pi + i\sin\pi) = e^3(-1 + i\cdot 0) = -e^3.$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $e^x(\cos y + i\sin y) = \pi i$를 만족해야 한다. 양변의 절대값을 취하면 $e^x = \pi$이므로 $x = \log\pi$이다. 따라서 $\cos y + i\sin y = i$가 되어 $\sin y = 1$, $\cos y = 0$을 만족한다. 따라서 $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$이다. 그림 0.10을 참고하라.

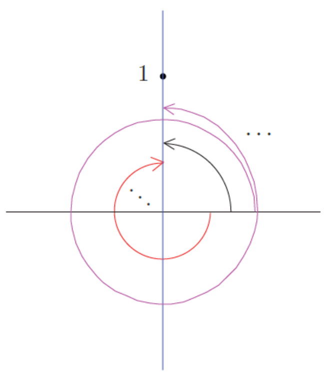



Fig. 5.11 Possible values of $y$ when $\cos y + i\sin y = i$ are given by $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

그림 0.10: $\cos y + i\sin y = i$를 만족하는 $y$는 $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$로 주어진다.

$\exp z = \pi i$라면,
$$z \in \left\{\log\pi + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
역으로 어떤 $k \in \mathbb{Z}$에 대하여 $z \in \log\pi + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$라면,
$$\exp z = e^{\log\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \pi(0 + i\cdot 1) = \pi i.$$
결론적으로 $\exp z = \pi i$일 필요충분조건은 $z \in \left\{\log\pi + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$이다.

## 연습문제 ??

$\gamma(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$라고 하자. 그러면,

$$\gamma(t) = \exp(it) = e^0 (\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t.$$

점 $(\cos t, \sin t)$는 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 $1$인 원 위에 있고 $t$가 증가함에 따라 반시계방향으로 움직인다. 따라서 곡선 $t \mapsto \gamma(t)$는 반시계방향으로 도는 원이 된다. 그림 0.11을 참고하라.

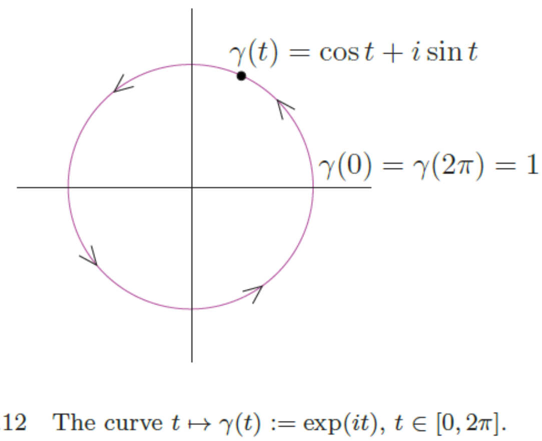



그림 0.11: 곡선 $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$

## 연습문제 ??

$\exp(t + it) = e^t(\cos t + i \sin t)$이므로 곡선은 $t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$로 주어진다. 대강의 그림을 그려보면 0.12와 같다. 나선형 곡선이 되며, $t \searrow -\infty$일 때 $(e^t \cos t, e^t \sin t)$는 $0$으로 수렴하고, $t \nearrow +\infty$일 때 나선형의 바깥으로 발산한다.

## 연습문제 ??

$$\exp(z^2) = \exp\left((x + iy)^2\right) = \exp\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i \sin(2xy))$$

이므로 $|\exp(z^2)| = e^{x^2-y^2}$, $\mathrm{Re}(\exp(z^2)) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$, $\mathrm{Im}(\exp(z^2)) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$이다.

$z \neq 0$에 대하여

$$\begin{aligned}\exp \frac{1}{z} = \exp\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \exp\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) \\ = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left(\cos\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) + i \sin\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right)\end{aligned}$$

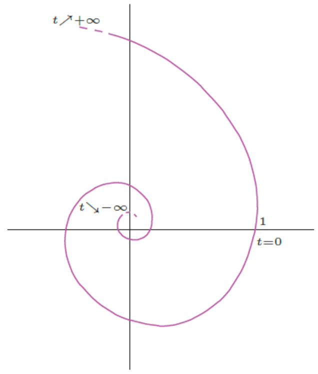



Fig. 5.13 The image of the line $y = x$ under the map $z = x + iy \mapsto \exp z$.

그림 0.12: 함수 $z = x + iy \mapsto \exp z$에 의한 직선 $y = x$의 상

이므로

$$\begin{aligned}
\left|\exp \frac{1}{z}\right| &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, \\
\mathrm{Re}\left(\exp \frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), \\
\mathrm{Im}\left(\exp \frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$\begin{aligned}
&(\sin z_1)(\cos z_2) + (\cos z_1)(\sin z_2) \\
&\qquad = \left(\frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i}\right)\left(\frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2}\right) \\
&\qquad\quad + \left(\frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2}\right)\left(\frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i}\right) \\
&\qquad = \frac{2\exp(i(z_1+z_2)) - 2\exp(-i(z_1+z_2))}{4i} = \sin(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면,

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x+iy) = (\cos x)(\cos(iy)) - (\sin x)(\sin(iy)) \\
&= (\cos x)\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos x)(\cosh y) - (\sin x)\left(-\frac{\sinh y}{i}\right) \\
&= (\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y).
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= (\cos x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2(\sinh y)^2 \\
&= (1-(\sin x)^2)(\cosh y)^2 + (\sin x)^2\left(\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}\right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2\left(\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4} - 1\right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2((\cosh y)^2 - 1) \\
&= (\cosh y)^2 - \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} + \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} - (\sin x)^2 \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $\cos z = 3$은 다음과 동치이다.

$$(\cos x)(\cosh y) = 3, \tag{0.11}$$
$$(\sin x)(\sinh y) = 0. \tag{0.12}$$

여기서 $\sinh y = 0$는 $y = 0$와 동치이다. 그런데 $y = 0$는 불가능하다. 왜냐하면, $z = x + iy = x$가 실수가 되는데 $\cos x = 3$을 만족하는 실수 $x$는 없기 때문이다. 그러므로 식 (0.12)에서 $\sin x = 0$이다. 따라서 $x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. 한편, $\cos x = \pm 1$이고, 모든 $y \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$$

이므로 식 (0.11)에서 $\cos x$는 $-1$이 될 수 없다. 결론적으로 $x \in \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$이고 $\cos x = 1$이다. 이제 $\cosh y = 3$에서

$$\frac{e^y + y^{-y}}{2} = 3.$$

즉, $(e^y)^2 - 6e^y + 1 = 0$.

$$e^y = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

에서 $y = \log\bigl(3 + 2\sqrt{2}\bigr)$ 또는

$$y = \log\Bigl(3 - 2\sqrt{2}\Bigr) = \log\frac{9-8}{3+2\sqrt{2}} = \log\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = -\log\Bigl(3+2\sqrt{2}\Bigr)$$

이므로 $z \in \{2\pi n \pm i\log\bigl(3+2\sqrt{2}\bigr), n \in \mathbb{Z}\}$.

역으로, 어떤 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $z = 2\pi n \pm i \log\bigl(3 + 2\sqrt{2}\bigr)$라면,

$$\begin{aligned}
\cos z &= \underbrace{(\cos(2\pi n))}_{=1}(\cosh(\pm(3 \pm 2sqrt2))) - i\,\underbrace{(\sin(2\pi n))}_{=0}(\sinh\cdots))\\
&= \cosh\Bigl(\pm(3 \pm 2\sqrt{2})\Bigr) = \frac{e^{\log\left(3+2\sqrt{2}\right)} + e^{-\log\left(3+2\sqrt{2}\right)}}{2}\\
&= \frac{3+2\sqrt{2}+(3+2\sqrt{2})^{-1}}{2}\frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{2} = 3.
\end{aligned}$$

종합하면, $\cos z = 3$일 필요충분조건은 $z \in \{2\pi n \pm i \log\bigl(3 + 2\sqrt{2}\bigr), n \in \mathbb{Z}\}$이다.

## 연습문제 ??

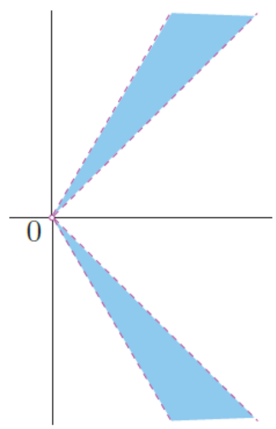



Fig. 5.14 The set $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ \frac{\pi}{4} < |\mathrm{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\right\}$.

그림 0.13: $\left\{z \in \mathbb{C}\ :\ z \neq 0, \dfrac{\pi}{4} < |\,\mathrm{Arg}(z)| < \dfrac{\pi}{3}\right\}$

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(1+i) &= \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(1 \cdot \exp(i\pi)) = \log 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi,$$

$$\mathrm{Log}(1) = \mathrm{Log}(1 \cdot \exp(i0) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

$z = -1$이면, $\mathrm{Log}(z^2) = \mathrm{Log}((-1)^2) = \mathrm{Log}(1) = 0$인 반면, $2 \cdot \mathrm{Log}(z) = 2 \cdot \mathrm{Log}(-1) = 2 \cdot i\pi$. 따라서 $z = -1$일 때,

$$\mathrm{Log}(z^2) = 0 \neq 2 \cdot i\pi = 2 \cdot \mathrm{Log}(z).$$

## 연습문제 ??

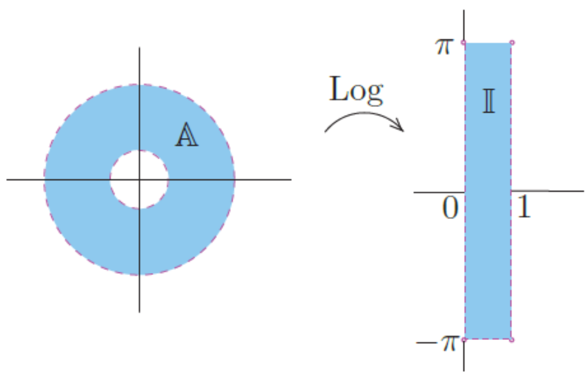
$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < z < e\}$라 하면, $z \in \mathbb{A}$일 필요충분조건은 $z = r\exp(i\,\mathrm{Arg}(z))$이고 $1 < r < e$, $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$이다. 이런 $z$에 대하여

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(r\exp(i\,\mathrm{Arg}(z))) = \log r + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

이고 $0 = \log 1 < \log r < \log e = 1$이다. 따라서 상은 직사각형

$$\mathbb{I} := \{x + iy \,:\, 0 < x < 1, -\pi < y < \pi\}$$

가 된다.




역으로, $x + iy \in \mathbb{I}$이면, $z := \exp(x+iy) = e^x\exp(iy) \in \mathbb{A}$이다. 왜냐하면, $|z| = e^x \in (1, e)$이고 $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(e^x\exp(iy)) = \log e^x + iy = x + iy$이기 때문이다. 따라서 $\mathbb{A}$의 Log함수에 대한 상은 정확히 $\mathbb{I}$와 일치한다.

## 연습문제 ??

$(1+i)^{1-i}$의 주치는 $\exp((1-i)\,\mathrm{Log}(1+i))$이다.

$$\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

따라서 $(1+i)^{1-i}$의 주치를 계산하면,

$$\begin{aligned}
\exp((1-i)\operatorname{Log}(1+i)) &= \exp\left((1-i)\left(\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= e^{\log\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\log\sqrt{2}\right) \\
&= e^{\frac{\pi}{4}}(1+i)\left(\cos\left(\log\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\log\sqrt{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

# 2장 - 연습문제 풀이

## 연습문제 ??

$z \neq 0$에 대하여

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0=\frac{|z|^2-0}{z-0}=\frac{|z|^2}{z}.$$

주어진 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \epsilon$으로 잡으면, $0 < |z-0| = |z| < \delta$일 때,

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0\right| = \left|\frac{|z|^2}{z}\right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta = \epsilon.$$

따라서 $f$는 $0$에서 복소미분가능하고 $f'(0) = 0$이다.

## 연습문제 ??

$w_0 \in \mathbb{D}^*$라 하자. 그러면 $\overline{w_0} \in D$이다. $f$가 $D$에서 복소해석함수이므로, 주어진 $\epsilon > 0$에 대응하는 $\delta > 0$가 존재하여, $0 < |z-\overline{w_0}| < \delta$이면 $z \in D$와

$$\left|\frac{f(z)-f(\overline{w_0})}{z-\overline{w_0}}-f'(\overline{w_0})\right| < \epsilon \tag{0.13}$$

를 만족한다. 이제 $w$를 $0 < |w-w_0| < \delta$로 잡으면

$$0 < |w-w_0| = |\overline{w-w_0}| = |\overline{w}-\overline{w_0}| < \delta$$

이 되어 $w \in D^*$이다. 또한,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^*(w)-f^*(w_0)}{w-w_0}-\overline{f'(\overline{w_0})}\right| &= \left|\frac{\overline{f(\overline{w})}-\overline{f(\overline{w_0})}}{w-w_0}-\overline{f'(\overline{w_0})}\right| \\
&= \left|\overline{\frac{f(\overline{w})-f(\overline{w_0})}{w-w_0}-f'(\overline{w_0})}\right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{f(\overline{w}) - f(\overline{w_0})}{w - w_0} - f'(\overline{w_0}) \right| < \epsilon \ \text{(식 (0.13)을 이용하여)}$$

이 되므로, $f^*$는 $w_0$에서 복소미분가능하며 $(f^*)'(w_0) = \overline{f'(\overline{w_0})}$이다. $w_0 \in D^*$를 임의로 선택할 수 있으므로 $f^*$는 $D^*$에서 복소미분가능함수이다.

## 연습문제 ??

$f$가 $z_0$에서 복소미분가능하므로, 상수 $r > 0$과 함수 $h : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$가 존재하여 $|z - z_0| < r$에 대하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

로 쓸 수 있고

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$$

이다. 여기서, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$이다.

$D(z_0, r') := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r'\} \subset D(z_0, r) \subset D$과 $|h(z)| < 1$이 되도록 $r' < r$을 잡자. 이제 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여

$$\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1}, r' \right\}$$

로 선택하면, $0 < |z - z_0| < \delta$일 때, $z \in D(z_0, r')$이고,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0) + h(z)||z - z_0| &\leq (|f'(z_0)| + |h(z)|) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} \\ &< (|f'(z_0)| + 1) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 $f$는 $z_0$에서 연속이다.

## 연습문제 ??

$f, g : U \to \mathbb{C}$가 $z_0 \in U$에서 복소미분가능함을 이용하면, 보조정리 **??**로부터 $r > 0$과 $h_f, h_g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$가 존재하여 (단, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$)

$|z - z_0| < r$이면,

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h_f(z))(z - z_0), \tag{0.14}$$
$$g(z) = g(z_0) + (g'(z_0) + h_g(z))(z - z_0), \tag{0.15}$$

와 $\lim_{z \to z_0} h_f(z) = 0 = \lim_{z \to z_0} h_g(z)$를 만족한다.

(1) 식 (0.14)와 (0.15)를 더하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(f+g)(z)=(f+g)(z_0)+\left(f'(z_0)+g'(z_0)+h_{f+g}(z)\right)(z-z_0)$$

를 만족한다. 단, $D(z_0,r)$에서 $h_{f+g}(z):=h_f(z)+h_g(z)$로 정의한다. 또한,

$$\lim_{z\to z_0}h_{f+g}(z)=\lim_{z\to z_0}(h_f(z)+h_g(z))=\lim_{z\to z_0}h_f(z)+\lim_{z\to z_0}h_g(z)=0+0=0.$$

보조정리 **??**에 의하여 $f+g$는 복소미분가능하며 $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$이다.

(2) 식 (0.14)에 $\alpha$를 곱하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(\alpha\cdot f)(z)=(\alpha\cdot f)(z_0)+\left(\alpha\cdot f'(z_0)+h_{\alpha\cdot f}(z)\right)(z-z_0),$$

단, $D(z_0,r)$에서 $h_{\alpha\cdot f}(z):=\alpha\cdot f(z)$이다. 또한,

$$\lim_{z\to z_0}h_{\alpha\cdot f}(z)=\lim_{z\to z_0}(\alpha\cdot h_f(z))=\alpha\cdot\lim_{z\to z_0}h_f(z)=\alpha\cdot 0=0.$$

보조정리 **??**에 의하여 $\alpha\cdot f$는 복소미분가능하며 $(\alpha\cdot f)'(z_0)=\alpha\cdot f'(z_0)$이다.

(3) 식 (0.14)와 (0.15)를 곱하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(fg)(z)=(fg)(z_0)+\left(f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)+h_{fg}(z)\right)(z-z_0),$$

단, $D(z_0,r)$에서

$$h_{fg}(z):=f(z_0)h_g(z)+g(z_0)h_f(z)+(z-z_0)(f'(z_0)+h_f(z))(g'(z_0)+h_g(z))$$

또한,

$$\lim_{z\to z_0}h_{fg}(z)=f(z_0)\cdot 0+g(z_0)\cdot 0+0\cdot(f'(z_0)+0)\cdot(g'(z_0)+0)=0$$

이므로 $fg$는 $z_0$에서 복소미분가능하며

$$(fg)'(z)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

## 연습문제 ??

$\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$가 $d$차의 유한차원이라고 하자. 그러면 $d+1$개의 벡터 $1,z,z^2,\ldots,z^d\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$는 일차종속이다. 따라서 모두 0은 아닌 $\alpha_0,\ldots,\alpha_d$가 존재하여

$$\alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot z+\cdots+\alpha_d\cdot z^d=0\quad(z\in\mathbb{D})$$

을 만족한다. $k\in\{0,1,\ldots,d\}$를 $\alpha_k\neq 0$인 가장 작은 값이라 하자. 그러면, $k$번 미분한 값을 $0\in\mathbb{D}$에서 계산하면

$$0+\alpha_k\cdot k!+0=0$$

이므로 $\alpha_k=0$이 되어 모순이다.

## 연습문제 ??

$z_0 \in U$라 하자. $f$는 $z_0$에서 복소미분가능하므로 $r > 0$과 $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$에 정의된 복소함수 $h$가 존재하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0), \quad z \in D(z_0, r)$$

과

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = 0 \tag{0.16}$$

을 만족한다. $g := 1/f$라 하면,

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

이므로 $g(z_0) = g(z) + (f'(z_0) + h(z))g(z_0)g(z) \cdot (z - z_0)$. 정리하면

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + (-f'(z_0)g(z_0)g(z) - h(z)g(z_0)g(z))) \cdot (z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left( -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)} \right)(z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left( -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \varphi(z) \right) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

$z \in D(z_0, r)$에서

$$\varphi(z) := \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)}.$$

$z_0$에서 $f$의 연속성과 식 (0.16)으로부터

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \cancel{\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}} - \cancel{\frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z_0)}} - \frac{0}{f(z_0)f(z_0)} = 0.$$

따라서 $g$가 $z_0$에서 복소미분가능하며

$$g'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

## 연습문제 ??

$m \geq 0$인 경우는 이미 증명했으므로, $m = -n$ ($n \in \mathbb{N}$)인 경우를 생각하자. $f(z) := z^n$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)에 대하여 함수

$$z \mapsto z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{f(z)}$$

는 복소해석함수이고 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 함수값이 0은 아니므로 $1/f$도 복소해석함수이고, 미분은

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} = -\frac{nz^{n-1}}{(z^n)^2} = -n\frac{1}{z^{n+1}} = m \cdot \frac{1}{z^{-m+1}} = mz^{m-1}$$

이 되어 증명이 끝난다.

## 연습문제 ??

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$를

$$f(z) = -\frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

로 정의하고, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$를 $g(z) = \exp z$로 정의하자. 그러면, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} = D_g$. 따라서 $g \circ f$는 $\mathbb{D}$에서 복소해석함수이고,

$$\begin{aligned}
(g \circ g)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) &= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \frac{d}{dz}\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-(1+z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\frac{d}{dz}(1+z)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-\frac{1+z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\right) \\
&= -\frac{2}{(1-z)^2} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right).
\end{aligned}$$

따라서, $z \in \mathbb{D}$에 대하여, $\dfrac{d}{dz}\left(\exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)\right) = -\dfrac{2}{(1-z)^2} \exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면, $|z|^2 = x^2 + y^2$. 따라서, $u, v$를 각각 $|z|^2$의 실수부와 허수부라 하면, $u = x^2 + y^2$, $v = 0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

$z \neq 0$이므로, $x$ 또는 $y$중 하나는 0이 아니다. 즉, 코시-리만 방정식 중 적어도 하나는 만족되지 않는다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x} =\right) 2x \neq 0 \left(= \frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{ 또는} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial y} =\right) 2y \neq 0 \left(= -\frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

결론적으로 $|z|^2$은 0이 아닌 점에서 미분이 불가능하다.

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면,

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

$u, v$를 각각 $z^3$의 실수부와 허수부라 하면,

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2,$$
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

$u, v$는 연속미분가능하고 (즉, $u, v \in C^1$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 이고,}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

즉, $\mathbb{R}^2$의 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하므로, $z \mapsto z^3$은 전해석함수이다.

## 연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) = x$. 따라서, $u, v$를 각각 $\mathrm{Re}(z)$의 실수부와 허수부라 하면,

$$u = x,$$
$$v = 0.$$

따라서, 모든 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

즉, 코시-리만 방정식은 $\mathbb{R}^2$의 어떤 점에서도 만족되지 않는다. 결론적으로 $\mathbb{C}$의 모든 점에서 $\mathrm{Re}(z)$는 복소미분가능하지 않다.

## 연습문제 ??

$u, v$를 각각 $f$의 실수부와 허수부라 하자. 그러면, $v = 0$이고,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

따라서 $(x_0, y_0) \in D$과 $(x, y_0) \in D$를 잇는 직선이 $D$ 내부에 있을 때, 이 직선을 따라 적분하면

$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_0)\,d\xi = 0.$$

같은 방법으로 $(x_0, y_0) \in D$과 $(x_0, y) \in D$를 잇는 직선이 $D$ 내부에 있을 때,

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta) d\eta = 0.$$

즉, $D$의 내부에서 수평선 또는 수직선을 따라 움직이는 동안 $u$의 값은 변하지 않는다. 그런데 $D$가 경로연결 집합이므로 $u$는 $D$에서 상수이다. (왜냐하면, $D$에 속하는 임의의 두점은 계단형 경로로 연결할 수 있기 때문이다.) 따라서 $f = u + i0 = u$는 $D$에서 상수이다.

## 연습문제 ??

$u, v$가 각각 $f$의 실수부와 허수부라고 하자. $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$이면 $D$에서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

이고 코시-리만 방정식을 이용하면

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(= -\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \frac{\partial v}{\partial y}\left(= \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

따라서 $(x_0, y_0) \in D$과 $(x, y_0) \in D$를 잇는 직선이 $D$ 내부에 있을 때, 이 직선을 따라 적분하면

$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_0) d\xi = 0.$$

같은 방법으로 $(x_0, y_0) \in D$과 $(x_0, y) \in D$를 잇는 직선이 $D$ 내부에 있을 때,

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta) d\eta = 0.$$

연습문제 **??**에서와 같이 $D$의 내부에서 수평선 또는 수직선을 따라 움직이는 동안 $u$의 값은 변하지 않는다. 그런데 $D$가 경로연결 집합이므로 $u$는 $D$에서 상수이다. (왜냐하면, $D$에 속하는 임의의 두점은 계단형 경로로 연결할 수 있기 때문이다.) 따라서 $f = u + iv$는 $D$에서 상수이다.

## 연습문제 ??

연쇄법칙으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = h'(v(x, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y))\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

코시-리만 방정식을 적용하면

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y))\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

$$= h'(v(x,y)) \cdot \left( h'(v(x,y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \right) = (h'(v(x,y))^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$= -(h'(v(x,y))^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

이므로 $(1 + (h'(v(x,y)))^2) \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$. $(1 + (h'(v(x,y)))^2) \geq 0 > 1$로부터

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

코시-리만 방정식을 다시 적용하면

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

도 얻으며, 이로부터

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = h'(v(x,y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = h'(v(x,y)) \cdot 0 = 0$$

이고 코시-리만 방정식을 한번 더 적용하면,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0.$$

이제 모든 편도함수가 0이 되므로, $u$는 수평, 수직방향을 따라 상수이다. $D$가 영역이므로, 경로연결 집합이고, 임의의 두 점이 계단형 경로로 연결가능하다. 따라서 $u$는 $D$에서 상수함수이다. 같은 방법이로, $v$도 $D$에서 상수함수이며, $f = u + iv$도 상수함수가 된다.

## 연습문제 ??

($\Leftarrow$)

$k = 2$라고 하면,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + (iy)^2 + 2x(iy) = (x + iy)^2 = z^2.$$

예제 **??**에 의하여 $f$는 전해석함수이다.

($\Rightarrow$)

이제 $f$가 전해석함수라고 가정하자. 그러면 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족해야 하므로, 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = kx = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

특히 $x = 1$로 잡으면, $k = 2$을 얻는다.

## 연습문제 ??

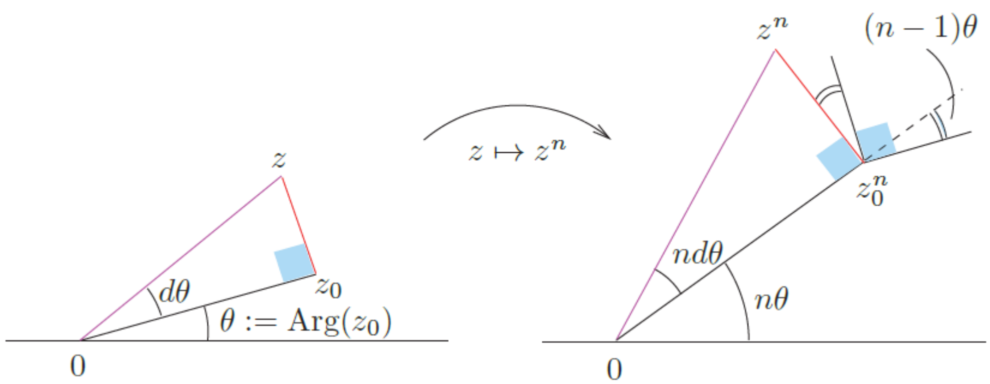
$z - z_0$의 길이가 $|z_0|\tan(d\theta) \approx |z_0|d\theta$이므로 $z^n - z_0^n$의 길이는 $|z_0|^n\tan(nd\theta) \approx |z_0|^n nd\theta$이다. 따라서 국소적으로 $z \mapsto z^n$에 의한 확대비율은

$$\frac{|z^n - z_0^n|}{|z - z_0|} \approx \frac{|z_0|^n nd\theta}{|z_0|d\theta} = n|z_0|^{n-1}$$

이고, 그림에 따르면 반시계방향으로 $(n-1)\theta$만큼 회전한 변환이다.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= n|z_0|^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta)) \\ &= n(|z_0|(\cos\theta + i\sin\theta))^{n-1} = nz_0^{n-1}. \end{aligned}$$

결론적으로, 모든 $\mathbb{C}$에 대하여 $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$.




## 연습문제 ??

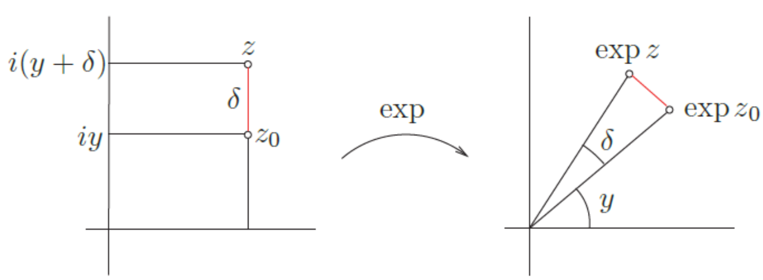


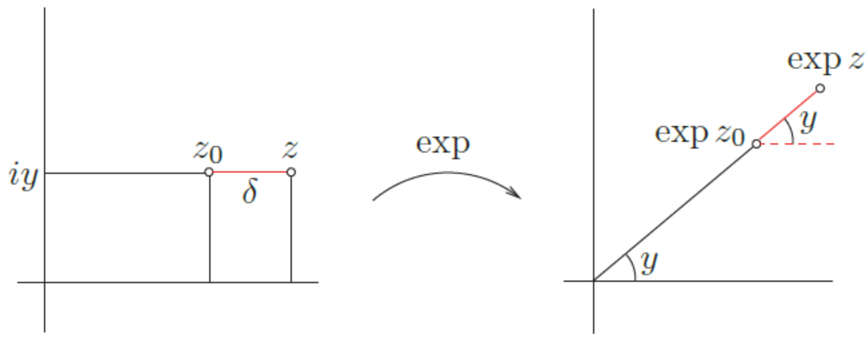

Fig. 5.15 Calculation of the amount of local magnification produced by exp.

그림 0.14: exp 함수에 의한 국소적인 확대비율

그림 0.14에서 확대비율은

$$\frac{e^x \cdot \delta}{\delta} = e^x$$

이다. 아래 그림과 같이 반시계방향으로 $y$만큼 회전하는 변환이므로 $z_0$에서 복소미분은 $e^x(\cos y + i\sin y) = \exp(x+iy)$, 즉, $\exp' z = \exp z$이다.




## 연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$에 대하여, $z_0$를 기울기 1인 직선을 따라 $\delta$만큼 움직인 점을 $z$라고 하자. 유사한 방법으로 $z_0$를 수평선을 따라 왼쪽으로 $\delta$만큼 이동한 점을 $\tilde{z}$라고 하자. 실수부를 취하는 함수 $\mathrm{Re}(\cdot)$가 $z_0$에서 미분가능하다고 가정하자. 그림 0.15에서 $z$ 와 $\tilde{z}$를 $\mathrm{Re}(\cdot)$로 보낸 점을 보면 국소적으로 각각 45°와 0° 회전한 것으로 다른 회전량을 갖는다. 이는 일어날 수 없는 경우로 복소미분가능하다는 가정에 모순이다. $z_0 \in \mathbb{C}$의 선택을 임의로 할 수 있으므로 이 함수는 모든 점에서 복소미분불가능하다.

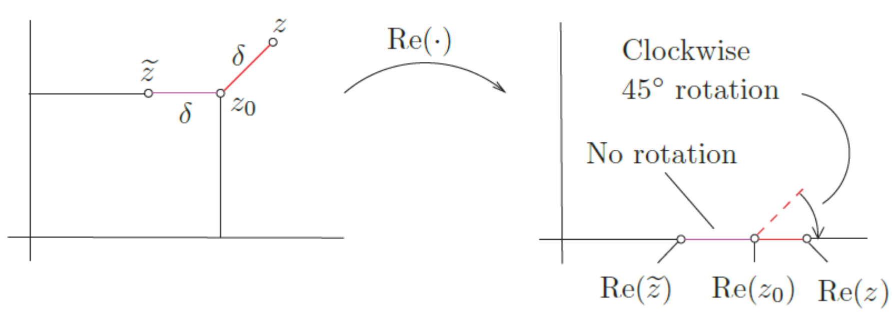



Fig. 5.16 Non complex differentiability of $\mathrm{Re}(\cdot)$.

그림 0.15: 함수 $\mathrm{Re}(\cdot)$의 복소미분 불가능성

### 연습문제 ??

$u, v \in C^2$인 $f = u + iv$는 두번 연속미분가능하므로

$$\begin{aligned}
4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f &= \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

그런데 $u, v \in C^2$이므로 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$이고,

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u + iv) = \Delta f.$$

## 3장 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

$\gamma_1 = \cos t + i\sin t$, $\gamma_2 = \cos(2t) + i\sin(2t)$, $\gamma_3 = \cos t - i\sin t$이므로 $k = 1, 2, 3$ 각각의 경우 모두 $(\mathrm{Re}(\gamma_k(t)))^2 + (\mathrm{Im}(\gamma_k(t)))^2 = 1$이다. $\gamma_k$의 상은 중심이 0이고 반지름이 1인 원 $\mathbb{T}$에 있다. $\theta \in [0, 2\pi)$에 대하여 $z = \exp(i\theta)$이면, $z = \gamma_1(\theta) = \gamma_2(\theta/2) = \gamma_3(2\pi - \theta)$이다. 따라서 $\mathbb{T}$위의 모든 점은 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 각각에 의한 상에 속한다.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\exp(it)}\cdot i\exp(it)dt = 2\pi i, \\
\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\exp(2it)}\cdot 2i\exp(2it)dt = 4\pi i, \\
\int_{\gamma_3}\frac{1}{z}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\exp(-it)}\cdot(-i)\exp(-it)dt = -2\pi i.
\end{aligned}$$

### 연습문제 ??

실함수 $x, y$에 대하여 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0, 1]$라 하자. 또한, $u, v$를 각각 함수 $f$의 실수부와 허수부라 하면,

$$f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t))\right)(x'(t) + iy'(t))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - \frac{\partial v}{\partial x} y'(t) \\
&\quad + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial v}{\partial x} x'(t)\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) \\
&\quad + i\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial v}{\partial x} x'(t)\right) \\
&\qquad \text{(코시-리만 방정식을 적용함)} \\
&= \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) + i \frac{d}{dt} v(x(t), y(t)) \quad \text{(연쇄법칙을 적용함)} \\
&= \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)).
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

원형경로 $\gamma$를 $\gamma(t) = 2\exp(it), t \in [0, 2\pi]$라 하자.

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (z + \bar{z}) dz &= \int_0^{2\pi} (2\exp(it) + 2\exp(-it)) \cdot 2i \cdot \exp(it) dt \\
&= 4i \int_0^{2\pi} (\exp(2it) + 1) dt - 4i \cdot 0 + 4i \cdot 2\pi = 8\pi i.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (z^2 - 2z + 3) dz &= \int_0^{2\pi} (4\exp(2it) - 4\exp(it) + 3) \cdot 2i \cdot \exp(it) dt \\
&= \int_0^{2\pi} i(8\exp(3it) - 8\exp(2it) + 6\exp(it)) dt = 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma xy dz &= \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot 2i \cdot (\cos t + i \sin t) dt \\
&= 4i \int_0^{2\pi} (\sin(2t))(\cos t + i \sin t) dt \\
&= 4i \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\sin(2t)) \cos t}_{\text{기함수}} dt - 2\int_0^{2\pi} (\cos t - \cos(3t)) dt \\
&= 0 - 2(0 - 0) = 0.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

(1) $\gamma(t) = (1+i)t, t \in [0,1]$이므로, $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}.$

(2) $\gamma(t) = 1 + \exp(it), t \in [-\pi/2, 0]$이므로,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz &= \int_{-\pi/2}^0 (\cos t)i\exp(it)dt = \int_{-\pi/2}^0 i(\cos t)^2 - (\cos t)(\sin t)dt \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \left(i\frac{\cos(2t)+1}{2} - \frac{\sin(2t)}{2}\right)dt \\ &= 0 + i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) $\gamma(t) = t + it^2, t \in [0,1]$이므로,

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz = \int_0^1 t\cdot(1+2it)dt = \frac{1}{2} + 2i\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i.$$

## 연습문제 ??

이항정리에 의하여

$$(1+z)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^\ell 1^{n-\ell} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^\ell.$$

$0 \le k \le n$에 대하여,

$$\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell-k-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell-k-1}dz \\ &\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{\ell-k-1}dz = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

(1) $U_f, V_f, U_g, V_g : [a,b] \to \mathbb{R}$에 대하여 $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U_f(t) + iV_f(t)$, $g(\gamma(t))\gamma'(t) = U_g(t) + iV_g(t)$, $t \in [a,b]$라고 하자.

$$\int_\gamma (f+g)(z)dz = \int_a^b (f+g)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b (U_f(t) + U_g(t))dt + i \int_a^b (V_f(t) + V_g(t))dt \\
&= \int_a^b U_f(t)dt + \int_a^b V_f(t)dt + i \int_a^b V_f(t)dt + i \int_a^b V_g(t)dt \\
&= \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz.
\end{aligned}
$$

(2) $\alpha = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$)이고 $U, V : [a, b] \to \mathbb{R}$에 대하여 $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U(t) + iV(t), t \in [a, b]$라 하자. 그러면,

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (\alpha \cdot f)(z)dz &= \int_a^b (p + iq)(U(t) + iV(t))dt \\
&= \int_a^b (pU(t) - qV(t))dt + i \int_a^b (pV(t) + qU(t))dt \\
&= p \left( \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) + iq \left( \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) \\
&= (p + iq) \left( \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) = \alpha \cdot \int_\gamma f(z)dz.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

$-(-\gamma) : [a, b] \to \mathbb{C}$는 다음 식으로 주어진다.

$$(-(-\gamma))(t) = (-\gamma)(a + b - t) = \gamma(a + b - (a + b - t)) = \gamma(t), \quad t \in [a, b].$$

따라서 $-(-\gamma) = \gamma$이며, 그림으로 보면 직관적으로 명백하다.

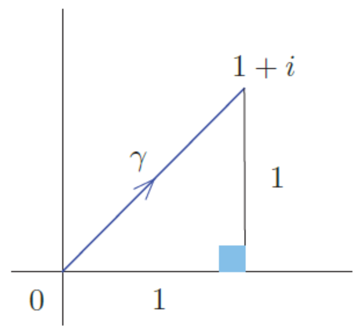
## 연습문제 ??

$\gamma(b) = (-\gamma)(a)$이므로 $\gamma$와 $-\gamma$는 결합가능한 경로이다.

$$\int_{\gamma+(-\gamma)} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

## 연습문제 ??

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$를 $\gamma(t) = (1 + i)t$, $t \in [0, 1]$이라 하자. 피타고라스 정리를 쓰면, $\gamma$의 길이는 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.




또한 $|(\gamma(t))^2| = |t+it|^2 = 2t^2$이고, $\max_{t\in[0,1]} |(\gamma(t))^2| = 2\cdot 1^2 = 2$. 따라서

$$\left|\int_\gamma z^2 dz\right| \le \left(\max_{t\in[0,1]} |(\gamma(t))^2|\right)\cdot(\gamma\text{의 길이}) = 2\sqrt{2}.$$

직접 계산하면,

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (t+it)^2\cdot(1+i)dt = \int_0^1 (1+i)^3 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}$$

이므로 $\left|\int_\gamma z^2 dz\right| = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \left|\binom{2n}{n}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\right|\right)\cdot 2\pi\cdot 1 = \max_{|z|=1}\frac{|1+z|^{2n}}{1} \\ &\le (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$F = U+iV$를 $\bar{z}\in\mathbb{C}$의 부정적분이라고 하자. 그러면,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} = F' = \bar{z} = x - iy.$$

$x_0\in\mathbb{R}$을 고정하자. 그러면 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$에 대하여

$$V(x,y) - V(x_0,y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial V}{\partial x}(\xi,y)d\xi = \int_{x_0}^x -yd\xi = -xy + x_0 y.$$

따라서 $V(x,y) = -xy + \varphi(y), \varphi(y) : +V(x_0,y_0) + x_0y$이면,

$$x = \frac{\partial V}{\partial y} = -x + \varphi'(y).$$

즉, 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\varphi'(y) = 2x$인데 이는 분명 모순이다. 특히, $2 \cdot 1 = 2 = \varphi'(y) = 2 \cdot 0 = 0$.

## 연습문제 ??

$(fg)' = fg' + f'g$이므로 함수 $\zeta \mapsto f(\zeta)g'(\zeta) + f'(\zeta)g(\zeta)$는 부정적분을 갖는다. 따라서 경로적분의 기본정리에 의하여

$$\int_\gamma (f(\zeta)g'(\zeta) + f'(\zeta)g(\zeta))\, d\zeta = f(z)g(z) - f(w)g(w)$$

이고 이를 정리하면 원하는 결과를 얻는다.

## 연습문제 ??

$\mathbb{C}$에서 $\sin' z = \cos z$이므로 $\cos z$는 부정적분을 갖는다. 따라서 경로적분의 기본정리에 의하여

$$\begin{aligned}\int_\gamma \cos z\, dz = \sin i - \sin(-i) = 2\sin i = 2\frac{\exp(i \cdot i) - \exp(-i \cdot i)}{2i} &= \frac{e^{-1} - e^1}{i} \\ = \left(e - \frac{1}{e}\right) i.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$\mathbb{C}$에서 $\exp' z = \exp z$이므로 $0$과 $a + ib$를 잇는 경로 $\gamma$를 따라 적분하면

$$\int_\gamma \exp z\, dz = \exp(a+ib) - \exp 0 = e^a(\cos b + i \sin b) - 1 = e^a \cos b - 1 + ie^a \sin b.$$

경로를 $\gamma(x) = (a+ib)x, x \in [0,1]$로 잡으면,

$$\int_\gamma \exp z\, dz = \int_0^1 \exp(a+ib) \cdot (a+ib)dx = \int_0^1 e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))(a+ib)dx.$$

따라서, $(a-ib)\displaystyle\int_\gamma \exp z\, dz = \int_0^1 e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))(a^2+b^2)dx$이고,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)\int_0^1 e^{ax}\cos(bx)dx &= \mathrm{Re}\left((a-ib)\int_\gamma \exp z\, dz\right) \\ &= \mathrm{Re}((a-ib)(e^a \cos b - 1 + ie^a \sin b)) \\ &= a(e^a \cos b - 1) + be^a \sin b.\end{aligned}$$

즉, $\displaystyle\int_0^1 e^{ax}\cos(bx)\, dx = \frac{a(e^a \cos b - 1) + be^a \sin b}{a^2+b^2}$.

## 연습문제 ??

중심이 0이고 반지름 $r > 0$인 원을 반시계방향으로 도는 닫힌경로 $C$를 생각하자. $C(\theta) = r\exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. 경로적분의 기본정레에 의해

$$\begin{aligned} 0 = \int_C \exp z\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta + ir\sin\theta} \cdot ri\exp(i\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cdot r \cdot i\exp(i(r\sin\theta + \theta)) d\theta. \end{aligned}$$

위 식에서 실수부만 취하면

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta + \theta) d\theta = 0.$$

## 연습문제 ??

$\mathbb{C}\setminus\{0\}$에서 복소미분가능한 $F$가 $F' = 1/z$를 만족한다고 하자. 중심이 0이고 반시계방향으로 도는 원형경로 $C$를 생각하자. $C$가 닫힌경로 이므로, 경로적분의 기본정리에 의해

$$\int_C F'(z) dz = 0.$$

한편, 이미 알고있는 계산 결과에 따르면,

$$\int_C F'(z) dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

이므로 모순이다.

## 연습문제 ??

(ER1) $\gamma : [0, 1] \to D$가 닫힌경로라고 하자. $H : [0, 1] \times [0, 1] \to D$를 $H(t, s) = \gamma(t)$, $t, s \in [0, 1]$로 정의하면, $H$는 연속이고,

$$\begin{aligned} &H(t, 0) = \gamma(t), \quad t \in [0, 1], \\ &H(t, 1) = \gamma(t), \quad t \in [0, 1], \\ &H(0, s) = \gamma(0) = \gamma(1) = H(1, s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

따라서 $\gamma$는 자기자신과 $D$-호모토픽하다. 즉, 관계는 반사적(reflexive)이다. (ER2) $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to D$가 닫힌경로이고 $\gamma_0$가 $\gamma_1$과 $D$-호모토픽하다고 하자. 그러면, 다음을 만족하는 연속함수 $H : [0, 1] \times [0, 1] \to D$가 존재한다.

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$H(t,1) = \gamma_1(t), \quad t \in [0,1],$$
$$H(0,s) = H(1,s), \quad s \in [0,1].$$

$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to D$를 $\tilde{H}(t,s) = H(t,-s)$, $t,s \in [0,1]$로 정의하자. 그러면, $\tilde{H}$는 연속이고 다음을 만족한다.

$$\tilde{H}(t,0) = H(t,1) = \gamma_1(t), \quad t \in [0,1],$$
$$\tilde{H}(t,1) = H(t,0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0,1],$$
$$\tilde{H}(0,s) = H(0,1-s) = H(1,1-s) = \tilde{H}(1,s), \quad s \in [0,1].$$

따라서 $\gamma_1$은 $\gamma_0$와 $D$-호모토픽하다. 즉, 관계는 대칭적(symmetric)이다.

(ER3) $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$가 닫힌경로이고 $\gamma_0$가 $\gamma_1$과 $D$-호모토픽하고, $\gamma_1$이 $\gamma_2$와 $D$-호모토픽하다고 하자. 그러면, 다음을 만족하는 연속함수 $H, K : [0,1] \times [0,1] \to D$가 존재한다.

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_0(t),\ t \in [0,1], & K(t,0) &= \gamma_1(t),\ t \in [0,1], \\ H(t,1) &= \gamma_1(t),\ t \in [0,1], & K(t,1) &= \gamma_2(t),\ t \in [0,1], \\ H(0,s) &= H(1,s),\ s \in [0,1], & K(0,s) &= K(1,s),\ s \in [0,1]. \end{aligned}$$

$L : [0,1] \times [0,1] \to D$를

$$L(t,s) = \begin{cases} H(t,2s), & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ K\left(t, 2(s - \frac{1}{2})\right), & s \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

로 정의하면,

$$L(t,0) = H(t,0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0,1],$$
$$L(t,1) = K(t,1) = \gamma_2(t), \quad t \in [0,1].$$

또한, $0 \le s \le \frac{1}{2}$에 대하여 $L(0,s) = H(0,2s) = H(1,2s) = L(1,s)$, $\frac{1}{2} < s \le 1$에 대하여

$$L(0,s) = K\left(0, 2(s - \frac{1}{2})\right) = K\left(1, 2(s - \frac{1}{2})\right) = L(1,s).$$

이다.

$[0,1] \times (\frac{1}{2}, 1]$에서 정의된 수열 $((t_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$이 $(t_0, \frac{1}{2})$에 수렴한다면,

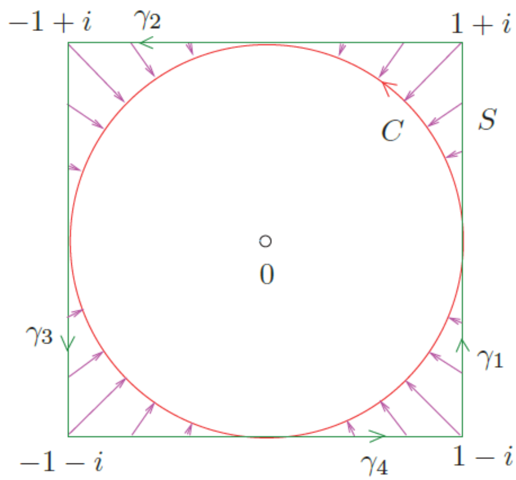
$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} L(t_n, s_n) &= \lim_{n \to \infty} K\left(t_n, 2(s_n - \frac{1}{2})\right) = K(t_0, 0) = \gamma_1(t_0) \\ &= H(t_0, 1) = L\left(t_0, \frac{1}{2}\right) = L\left(\lim_{n \to \infty} (t_n, s_n)\right). \end{aligned}$$

따라서 $L$은 연속함수이다. 결론적으로, $\gamma_0$는 $\gamma_2$와 $D$-호모토픽하다. 즉, 관계는 추이적(transitive)이다.

이상에서 $D$-호모토피 관계는 반사적, 대칭적, 추이적인 성질을 만족하므로 동치(equivalence) 관계이다.

## 연습문제 ??

그림에서 경로 $C$는 경로 $S$와 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$-호모토픽함을 알 수 있다.




직접 계산을 위해 $t\in[0,1]$에 대하여 경로를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &:= (1-t)(1-i)+t(1+i) = 1+i(2t-1),\\ \gamma_2(t) &:= (1-t)(1+i)+t(-1+i) = (1-2t)+i,\\ \gamma_3(t) &:= (1-t)(-1+i)+t(-1-i) = -1+i(1-2t),\\ \gamma_4(t) &:= (1-t)(-1-i)+t(1-i) = 2t-1-i.\end{aligned}$$

그러면,

$$\int_S \frac{1}{z}dz = \int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz + \int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz + \int_{\gamma_3}\frac{1}{z}dz + \int_{\gamma_4}\frac{1}{z}dz$$

이므로,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz &= \int_0^1 \frac{2i}{1+i(2t-1)}dt = \int_0^1 \frac{2i(1-i(2t-1))}{1+(2t-1)^2}dt\\ &= 2i\int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)^2}dt + 2\int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2}dt\\ &\overset{(u=2t-1)}{=} i\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du + \int_{-1}^1 \frac{u}{1+u^2}du\\ &= i(\tan^{-1}1-\tan^{-1}(-1)) + 0 = i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = i\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

같은 방법으로,

$$\int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2}dt = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2}dt = 0,$$

을 이용하면,

$$\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz = \int_0^1 \frac{-2}{1-2t+i}dt = \int_0^1 \frac{-2\cdot(-(2t-1)-i)}{1+(2t-1)^2}dt$$

$$= 0 + (-1)(-i)\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2},$$
$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{-2i}{-1+i(1-2t)} dt = \int_0^1 \frac{-2i \cdot (-1+i(2t-1))}{1+(2t-1)^2} dt$$
$$= -i \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = i\frac{\pi}{2},$$
$$\int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{2}{2t-1-i} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot ((2t-1)+i)}{1+(2t-1)^2} dt$$
$$= 0 + i\frac{\pi}{2} + 0 = i\frac{\pi}{2}.$$

따라서 예상대로 $\int_S \frac{1}{z} dz = 4 \cdot \left(i\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i$가 된다.

## 연습문제 ??

중심이 0이고 반시계방향으로 도는 원형경로 $C$에 대하여

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

한편 그림 0.16과 같이 타원형 경로 $E$는 $C$와 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-호모토픽하다.

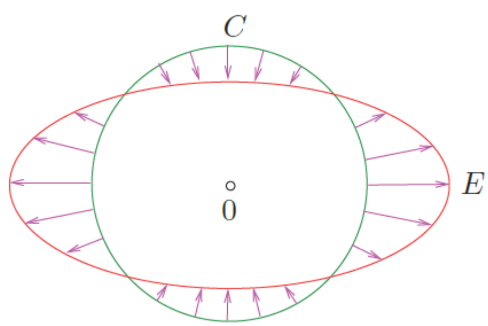



Fig. 5.17 $E, C$ are $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-homotopic.

그림 0.16: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-호모토픽한 경로 $E$와 $C$

따라서 코시 적분정리에 의해 $\int_E \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$이고,

$$2\pi i = \int_E \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos\theta + ib\sin\theta} \cdot (-a\sin\theta + ib\cos\theta) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin\theta + ib\cos\theta)(a\cos\theta - ib\sin\theta)}{a^2(\cos\theta)^2 + b^2(\sin\theta)^2} d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)(\cos\theta)(\sin\theta) + iab((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)}{a^2(\cos\theta)^2 + b^2(\sin\theta)^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)(\cos\theta)(\sin\theta) + iab \cdot 1}{a^2(\cos\theta)^2 + b^2(\sin\theta)^2} d\theta.
\end{aligned}
$$

허수부를 비교하면, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(\cos\theta)^2 + b^2(\sin\theta)^2} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$.

## 연습문제 ??

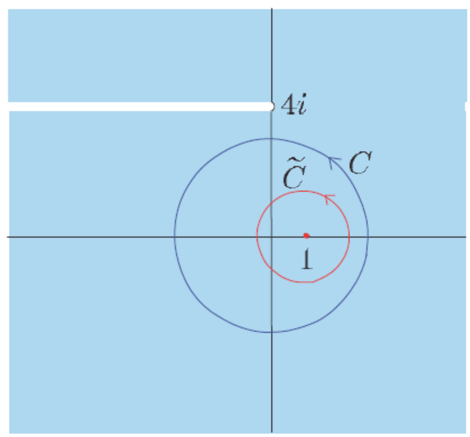



Fig. 5.18

그림 0.17: 적분경로 $C, \tilde{C}$

그림 0.17을 참고하라.

(1) $z \mapsto \mathrm{Log}(z-4i)$는 $\mathbb{C} \setminus \{r + 4i \ : \ r \leq 0\}$에서 복소해석함수이다. 따라서 코시 적분정리를 쓰면,

$$\int_C \mathrm{Log}(z-4i) dz = 0.$$

(2) $\tilde{C}$가 중심이 1이고 반지름 $r > 0$인 원이라 하면,

$$\int_{\tilde{C}} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i$$

임을 알고 있다. $1/(\cdot - 1)$이 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$에서 복소해석함수이고 원형경로 $C$와 $\tilde{C}$는 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$-호모토픽이므로, 코시 적분정리에 의해,

$$\int_C \frac{1}{z-1} dz = \int_{\tilde{C}} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i.$$

(3)

$$\begin{aligned} i^{z-3} &= \exp((z-3)\operatorname{Log} i) = \exp\left((z-3)\left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left((z-3)\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\cdot(z-3)\right). \end{aligned}$$

따라서 $z \mapsto i^{z-3}$은 전해석함수이다. 코시 적분정리에 의해

$$\int_C i^{z-3} dz = 0.$$

## 연습문제 ??

(1)

$$\varphi'(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) = \varphi(t)\cdot\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$$

에서 $\varphi'\gamma - \varphi\gamma' = 0$이고,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) = \frac{\varphi'\gamma - \varphi\gamma'}{\gamma^2} = \frac{0}{\gamma^2} = 0.$$

따라서 $\dfrac{\varphi(0)}{\gamma(0)} = \dfrac{\varphi(1)}{\gamma(1)}$. 그런데, $\gamma$가 닫힌경로이므로 $\gamma(0) = \gamma(1)$이므로,

$$\varphi(1) = \varphi(0) = \exp\left(\int_0^0 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) = \exp(0) = 1.$$

결론적으로, $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

(2) $\Gamma_1(t) = \exp(2\pi i t)$ ($t \in [0,1]$)의 회전수는

$$\begin{aligned} w(\Gamma_1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\Gamma_1'(t)}{\Gamma_1(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2\pi i \exp(2\pi i t)}{\exp(2\pi i t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i = 1. \end{aligned}$$

(3) $(\gamma_1\cdot\gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)$, $t \in [0,1]$이므로,

$$\begin{aligned} w(\gamma_1\cdot\gamma_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(\gamma_1\cdot\gamma_2)'(t)}{(\gamma_1\cdot\gamma_2)(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)}{(\gamma_1\cdot\gamma_2)(t)} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\cancel{\gamma_2(t)}}{\gamma_1(t)\cancel{\gamma_2(t)}}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\cancel{\gamma_1(t)}\gamma_2'(t)}{\cancel{\gamma_1(t)}\gamma_2(t)}dt \\
&= w(\gamma_1) + w(\gamma_2).
\end{aligned}
$$

(4) $\Gamma_m = \Gamma_1 \cdot \cdots \cdot \Gamma_1$ ($m$번 곱)이므로

$$
\begin{aligned}
w(\Gamma_m) &= w(\Gamma_1) + \cdots + w(\Gamma_1) \ \ (m\text{번}) \\
&= m \cdot w(\Gamma_1) = m \cdot 1 = m.
\end{aligned}
$$

(5) 함수 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$를 원점에서 $\gamma_0(t)$까지의 거리 $\varphi(t) = |\gamma_0(t)|, t \in [0,1]$로 정의하자. $\gamma_0$가 0을 지나지 않고, $\varphi$는 연속함수이기 때문에 최솟값 $d_0$ ($d_0 > 0$)를 갖는다. $\delta = d_0/2 > 0$로 택하자. $\gamma$가

$$
\|\gamma - \gamma_0\| := \max_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \gamma_0(t)| < \delta
$$

를 만족하는 매끄러운 닫힌경로라고 하자. 그러면 $\gamma$가 $\gamma_0$와 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$-호모토픽함을 증명하고자 한다. $H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$를 $H(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t), t, s \in [0,1]$로 정의하면 $H$는 연속함수이고,

$$
\begin{aligned}
H(t,0) &= \gamma_0(t), \quad t \in [0,1], \\
H(t,1) &= \gamma(t), \quad t \in [0,1], \\
H(0,s) &= (1-s)\gamma_0(0) + s\gamma(0) \\
&= (1-s)\gamma_0(1) + s\gamma(1) = H(1,s), \quad s \in [0,1].
\end{aligned}
$$

또한, $H(t,s)$는 0이 될 수 없다. 왜냐하면, $\gamma_0(t)$와 $\gamma(t)$의 볼록결합이기 때문이다. 어떤 $t, s$에 대하여 $(1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t) = 0$라면 모순에 도달하게 된다. 그림 0.18을 참고하라.

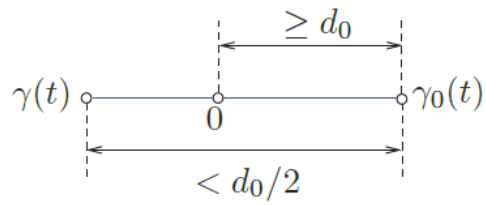



Fig. 5.19 That $H(t,s)$ is never 0.

그림 0.18: $H(t,s)$는 0이 될 수 없다.

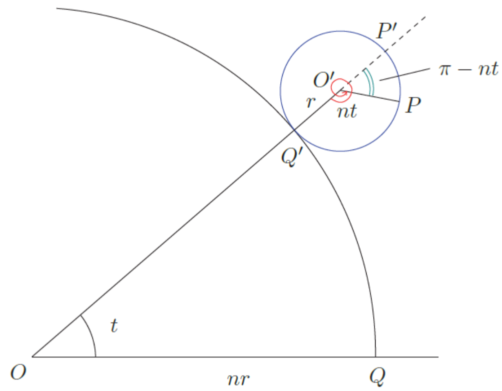
직접 계산해보면,

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \frac{d_0}{2} &> s|\gamma_0(t) - \gamma(t)| = |\gamma_0(t) - \underbrace{((1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t))}_{=0\text{인 } t,s\text{를 선택할 수 있다면}}| = |\gamma_0(t) - 0| \\
&= |\gamma_0(t)| \geq d_0.
\end{aligned}
$$

그러면, 코시 적분정리에 의해

$$w(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_{\gamma_0}\frac{1}{z}dz = w(\gamma_0).$$

## 연습문제 ??




(1) 큰 원의 각 $\angle Q'OQ$에 대응하는 호의 길이는 $t \cdot nr$이다. 작은 동전이 미끄러지지 않고 돌아갈 때, $O'P$와 $OO'$이 이루는 각은 $(t \cdot nr)/r = n \cdot t$이다. 그림에서 $O' \equiv (nr + r)\exp(it)$이고

$$\begin{aligned} P &\equiv (nr+r)\exp(it) + \underbrace{\exp(-i(\pi - nt))}_{\text{시계방향으로 회전}} \cdot \underbrace{r\exp(it)}_{O'P'} \\ &= (n+1)r\exp(it) + (-1)\cdot r \cdot \exp((n+1)it). \end{aligned}$$

(2) 에피사이클로이드 곡선 $\gamma$로 둘러싸인 영역의 면적은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}dz &= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{r\left((n+1)\exp(it) - \exp((n+1)it)\right)} \cdot \\ &\qquad r\left((n+1)i\exp(it) - (n+1)i\exp((n+1)it)\right)dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} r^2\left((n+1)\exp(-it) - \exp(-(n+1)it)\right) \cdot \\ &\qquad (n+1)i\left(\exp(it) - \exp((n+1)it)\right)dt \\ &= \frac{(n+1)r^2}{2}\int_0^{2\pi}((n+1) - (n+1)\exp(int) - \exp(-int) + 1)dt \\ &= \frac{(n+1)r^2}{2}((n+1)\cdot 2\pi + 0 + 0 + 2\pi) \\ &= (n+1)r^2\pi(n+2) = \pi r^2(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z \in D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$에 대하여 $f(z) = 1/z$로 정의하자. 그러면, $f$는 $D$에서 부정적분(원시함수)을 가질 수 없다. (예제 **??**와 연습문제 **??**를 참고하라.)

## 연습문제 ??

$\gamma(t) = \exp(it), t \in [0, 1]$이라 하면,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{i}{(z-a)(az-1)} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{(\exp(it)-a)(a\exp(it)-1)} i\exp(it) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-\exp(it)}{(\exp(it)-a)(a-\exp(-it))\exp(it)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\exp(it)-a)(\exp(-it)-a)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\exp(it)-a|^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{((\cos t)-a)^2 + (\sin t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2} dt.
\end{aligned}$$

$0 < a < 1$일 때, 함수 $z \mapsto i/(ax-1)$이 단위원 $\gamma$를 포함하는 원판에서 복소해석함수이므로, 코시 적분공식에 의해

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{i}{az-1}}{z-a} dz = \frac{i}{az-1}\Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1}.$$

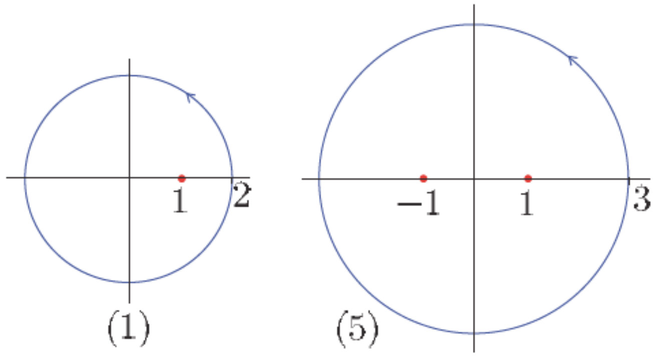
따라서, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2} dt = \int_\gamma \frac{\frac{i}{az-1}}{z-a} dz = 2\pi i \cdot \frac{i}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$

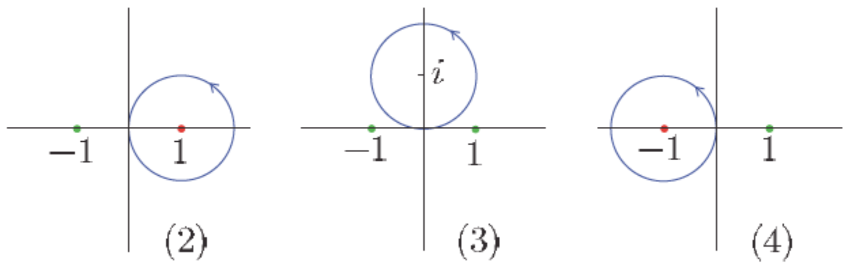
## 연습문제 ??

(1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp z}{z-1} dz = 2\pi i \exp z\Big|_{z=1} = 2\pi i \exp 1 = 2\pi i e.$

(2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{z^2+1}{z+1}\Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi i.$

(3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = 0.$




(4) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z-(-1)}dz = 2\pi i\frac{z^2+1}{z-1}\Big|_{z=-1} = 2\pi i\frac{(-1)^2+1}{-1-1} = -2\pi i.$

(5) $$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \int_\gamma \frac{z^2+1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz$$
$$= \int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{2}}{z-1}dz - \int_\gamma \frac{\frac{z^2+1}{2}}{z-(-1)}dz = 2\pi i\frac{z^2+1}{2}\Big|_{z=1} - 2\pi i\frac{z^2+1}{2}\Big|_{z=-1}$$
$$= 2\pi i(1) - 2\pi i(1) = 0.$$

## 연습문제 ??

$F$가 부정적분이라고 하자. 원 $|z-0| = \frac{1}{2}$을 반시계방향으로 도는 닫힌경로 $\gamma$를 생각하자. 경로적분의 기본정리에 의해,

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z^2-1)}dz = \int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

한편, 코시 적분공식을 쓰면,

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z^2-1)}dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z-0}dz = 2\pi i\frac{1}{z^2-1}\Big|_{z=0} = 2\pi i\frac{1}{0^2-1} = -2\pi i.$$

따라서 모순에 도달하게 되어

$$\frac{1}{z(z^2-1)}$$

은 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$에서 부정적분을 가질 수 없다.

## 연습문제 ??

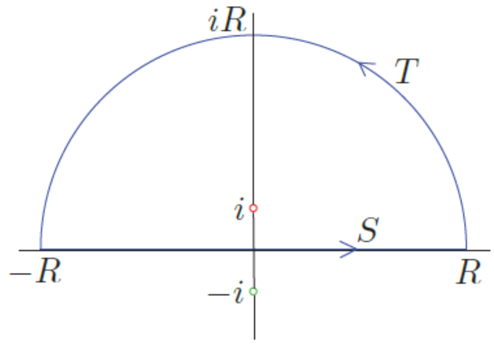



Fig. 5.20 The path $\sigma = S + T$.

그림 0.19: 경로 $\sigma = S + T$

(1) 코시 적분공식에 의해

$$\int_\sigma F(z)dz = \int_\sigma \frac{\exp(iz)}{z^2+1}dz = \int_\sigma \frac{\frac{\exp(iz)}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \frac{\exp(iz)}{z+1}\Big|_{z=i}$$
$$= 2\pi i \frac{\exp(i \cdot i)}{i+i} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

(2) $z = x + iy$, $x, y$는 실수이고, $y \geq 0$라 하자. 그러면,

$$|\exp(iz)| = |\exp(i(x+iy))| = |\exp(-y+ix)| = e^{-y} \leq 1.$$

따라서,

$$|F(z)| = \frac{|\exp(iz)|}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z^2+1|}.$$

한편, $|z^2| - |-1| \leq |z^2 - (-1)| = |z^2+1|$이므로, $|z| \geq \sqrt{2}$이면,

$$|F(z)| \leq \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} \leq \frac{2}{|z|^2}.$$

부등식을 만들 때 $|z^2| \geq 2$이면, $|z|^2 \leq 2|z|^2 - 2$임을 이용하였다. ($|z| \geq \sqrt{2}$이면 이 조건이 만족된다)

(3)

$$\left|\int_T F(z)dz\right| \leq 2\pi R \cdot \max_{z\in T}|F(z)| \leq 2\pi R \cdot \frac{2}{R^2} \quad (R \geq \sqrt{2}\text{일 때})$$
$$= \frac{4\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

따라서 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_T F(z)dz = 0.$

$$\int_S F(z)dz = \int_\sigma F(z)dz - \int_T F(z)dz = \frac{\pi}{2} - \int_T F(z)dz$$

이므로, $\lim\limits_{R\to\infty}\int_S F(z)dz = \dfrac{\pi}{e} - \lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_T F(z)dz = \dfrac{\pi}{e} - 0 = \dfrac{\pi}{e}.$

(4) $S(x) = x, x \in [-R, R]$이라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\int_S F(z)dz &= \int_{-R}^{R} \frac{\exp(ix)}{x^2+1}\cdot 1dx = \int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x^2+1}dx\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2+1}dx + 0\end{aligned}$$

마지막 등식은 $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$이 기함수라는 성질을 이용하였다. 결론적으로,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_S F(z)dz = \frac{\pi}{e}.$$

## 연습문제 ??

전해석함수 $\exp z$와 중심이 0이고 빈지름 1인 원형경로 $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$가 $C(\theta) = \exp(i\theta), \theta \in [0, 2\pi]$로 주어졌다고 하자. 코시 적분공식에 의하여,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\exp z}{z-0}dz = \exp z\Big|_{z=0} = \exp 0 = 1.$$

한편,

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\exp z}{z-0}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{\exp(\exp(i\theta))}{\exp(i\theta)}\cdot i\exp(i\theta)d\theta = i\int_0^{2\pi}\exp(\exp(i\theta))d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi}\exp(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta))d\theta\\ &= -i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta.\end{aligned}$$

따라서, $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = 2\pi.$

## 연습문제 ??

$f$가 복소해석함수이면, $f^{(n)}$도 복소해석함수이다. 따라서 복소미분 $f^{(n+1)}$이 존재한다. 또한, $f^{(n+1)}$이 복소미분가능하므로, 연속함수도 된다. 즉, $f^{(n)}$이 연속적으로 복소미분가능하다.

## 연습문제 ??

모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \geq \delta > 0$이라고 하자. 특히, 모든 $z \in \mathbb{C}$에서 $f(z) \neq 0$이므로 $1/f$는 전해석함수가 된다. 그런데 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{\delta}$$

이므로 리우비유 정리에 의해 $1/f$는 상수함수가 되어, $f$도 상수함수가 된다.

## 연습문제 ??

$z \in \mathbb{C}$에 대하여 $g(z) := f(z) - w_0$로 정의하자. 그러면, $g$는 전해석함수이고, 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|g(z)| \geq r$이다. 따라서 $g$는 원점에서 일정한 거리만큼 떨어져 있다. 연습문제 **??**에 의하여 $g$는 상수함수가 되므로, $f = g + w_0$도 상수함수이다.

## 연습문제 ??

콤팩트 집합 $K := \{(x, y) : 0 \leq x \leq T_1, 0 \leq y \leq T_2\}$를 생각하자. 그러면 연속함수 $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$는 $K$에서 최댓값을 갖는다. 최댓값을 $M$이라 하자. 실수의 집합을 구간으로 나누면

$$x, y \in \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT_1, (n+1)T_1) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [mT_1, (m+1)T_1)$$

$x + iy = x_0 + nT_1 + i(y_0 + mT_2)$을 만족하는 정수 $m, n$과 실수 $x_0 \in [0, T_1), y_0 \in [0, T_2)$가 존재한다. 함수 $f$의 주기성으로부터 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여

$$f(x + iy) = f(x_0 + nT_1 + i(y + 0 + mT_2)) = f(x_0 + iy_0) \in f(K)$$

이고, $|f(x_0 + iy_0)| \leq M$이다. 따라서 $f$는 $\mathbb{C}$ 전체에서 유계이고 리우비유 정리에 의해 상수함수가 된다.

## 연습문제 ??

(1) $z \in \mathbb{C}$에서 $g(z) = \exp(z) \cdot f(z)$라고 정의하면 $g$는 전해석함수이다. $|f(z)| \leq |\exp z|$이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여

$$|g(z)| = |\exp(-z) \cdot f(z)| \leq 1.$$

리우비유 정리에 의해 $g$는 상수함수가 되고, 상수를 $c$라 하면, $|g(z)| \leq 1$로부터 $|c| \leq 1$이고,

$$g(z) = \exp(-z) \cdot f(z) = c$$

이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $f(z) = c \cdot \exp z$이다 ($|c| \leq 1$).

(2) $p$가 차수 $d \geq 1$의 다항식이면, $|z| > R$에 대하여

$$|p(z)| \geq M|z|^d$$

를 만족하는 $M, R > 0$이 존재한다. $z = x < -R < 0$로 선택하면, $|z| > R$이고, $M|x|^d \leq |p(z)| \leq |e^x| = e^x \leq 1$이다 ($x < 0$이므로). 따라서 모든 $x < -R$에 대하여 $|x|^d \leq 1/M$이 되어 모순이다. 이제 $p$가 상수함수가 되므로 상수를 $c_0$라 하자. 다시 $|p(z)| \leq |\exp z|$로부터 $z = x < 0$로 두면 임의의 $x < 0$에 대하여 $|c_0| \leq |e^x| = e^x$가 되어 $|c_0| = 0$이다. 결론적으로 $p = c_0 = 0$을 얻는다.

## 연습문제 ??

(1) $z \in C$에 대하여

$$\begin{aligned} |z - a_1| &\geq |z| - |a_1| = R - |a_1|, \\ |z - a_2| &\geq |z| - |a_2| = R - |a_2| \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} dz \right| &\leq \max_{z \in \mathbb{C}} \frac{|}{f(z)|} |z - a_1||z - a_2| \cdot (C\text{의 길이}) \\ &\leq \frac{M}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)} \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

단, $M := \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.

(2) $a_1 \neq a_2$이므로

$$\frac{1}{z - a_1} - \frac{1}{z - a_2} = \frac{z - a_2 - (z - a_1)}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{a_1 - a_2}{(z - a_1)(z - a_2)}$$

이고

$$\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left( \frac{1}{z - a_1} - \frac{1}{z - a_2} \right)$$

이다. 따라서 $\alpha := -\beta := \dfrac{1}{a_1 - a_2}$이다.

(3)

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} dz &= \int_C \frac{1}{a_1 - a_2} \left( \frac{1}{f(z)} z - a_1 - \frac{f(z)}{z - a_2} \right) dz \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2} \left( \int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz - \int_C \frac{f(z)}{z - a_2} dz \right). \end{aligned}$$

중심이 $a_1$이고 반지름 $r_1 > 0$인 원 $C_1$을 둘레로 하는 작은 원판 $\Delta_1$을 생각하자. 그러면 $C$와 $C_1$은 $\mathbb{C} \setminus \{a_1\}$-호모토픽하고

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - a_1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1\}$$

는 복소해석함수이다. 코시 적분정리에 의해

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - a_1} dz.$$

한편, 코시 적분공식을 쓰면, $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - a_1} dz = f(a_1)$이므로

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz = 2\pi i f(a_1).$$

같은 방법으로

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_2} dz = 2\pi i f(a_2).$$

종합하면, $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz = \frac{2\pi i (f(a_1) - f(a_2))}{a_1 - a_2}.$

(4) $f$가 유계인 전해석함수이고 $|f|$는 상계 $M$을 갖는다고 가정하자. 즉, 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \le M$이다. $a_1, a_2$가 $\mathbb{C}$의 서로 다른 두 점이라고 하자. 중심이 $0$이고 반지름 $R > 0$인 원을 반시계방향으로 도는 경로 $C$가 $a_1, a_2$를 내부에 포함하도록 잡을 수 있다. 앞의 (1), (3)의 결과를 이용하면,

$$\begin{aligned} |f(a_1) - f(a_2)| &= \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \left| \frac{2\pi i (f(a_1) - f(a_2))}{a_1 - a_2} \right| \\ &= \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz \right| \\ &\le \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R M}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)}. \end{aligned}$$

$R$은 원하는 만큼 크게 잡을 수 있으므로, $R \to \infty$에 따라

$$\frac{2\pi R M}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)} \to 0$$

이므로 $|f(a_1) - f(a_2)| = 0$이다. 따라서 $f(a_1) = f(a_2)$로부터 $f$는 상수함수이다.

# 4장 - 연습문제 풀이

## 연습문제 ??

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$도 각각 수렴한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = 0$이고, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = 0$이다. 이로부터 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

## 연습문제 ??

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$이 수렴한다고 하자. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\mathrm{Re}(a_n) \le |a_n|, \mathrm{Im}(a_n) \le |a_n|$이므로 비교판정법에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$$

이 수렴한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

## 연습문제 ??

$s_n := 1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n$이라 하면, $zs_n = z + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1}$이므로 $(1-z)s_n = 1 - z^{n+1}$이다. $|z| < 1$에서 $z \neq 1$이므로

$$s_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{0.17}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - 0}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$이 수렴하고 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}$이다. (이 증명을 위해 $|z| < 1$에서

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$$

을 이용하였다. 이 결과는 $r := |z| < 1$이므로, $|z^{n+1} - 0| = |z|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$로부터 얻어진다.)

## 연습문제 ??

자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $s_n := 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n-1)z^{n-2} + nz^{n-1}$이라 하자. 그러면 $zs_n = z + 2z^2 + \cdots + (n-1)z^{n-1} + nz^n$이다. 따라서

$$(1-z)s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = \frac{1 - z^n}{1 - z} - nz^n.$$

따라서

$$s_n = \frac{1 - z^n}{(1 - z^2} - \frac{nz^n}{1 - z}.$$

(이 결과는 식 (0.17)의 양변을 $z$에 대하여 미분해서 얻을 수도 있다.)

$r := |z|$ $(0 \le r < 1)$이라 하면,

$$r = \frac{1}{1 + h}$$

여기서 $h := \frac{1}{r} - 1 > 0$이다.

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} h^n \ge \binom{n}{2} h^2 = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot h^2$$

에서

$$0 \le nr^n \frac{n}{(1 + h)^n} \le n \cdot \frac{2}{n \cdot (n - 1) \cdot h^2} = \frac{2}{(n - 1) \cdot h^2}$$

이므로 조임정리(Sandwitch theorem)에 의하여 $\lim_{n \to \infty} nr^n = 0$이다. 결론적으로,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1 - z^n}{(1 - z)^2} - \frac{nz^n}{1 - z} \right) = \frac{1 - 0}{(1 - z)^2} - \frac{0}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z)^2}.$$

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \frac{1}{\exp(s \cdot \mathrm{Log}(n))} \right| = \left| \frac{1}{\exp(s \cdot \log n)} \right| \\ &= \frac{1}{e^{\mathrm{Re}(s \cdot \log n)}} = \frac{1}{e^{(\log n) \cdot (\mathrm{Re}(s))}} = \frac{1}{\left(e^{\log n}\right)^{\mathrm{Re}(s)}} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}. \end{aligned}$$

$p > 1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$이 수렴함을 이용하면, $\mathrm{Re}(s) > 1$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

가 수렴한다. 따라서 $\mathrm{Re}(s) > 1$인 영역에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

은 절대수렴하므로, 당연히 수렴한다.

## 연습문제 ??

$L \neq 0$이라고 하자. $|z| < 1/L$인 모든 $z$에 대하여, $N$이 충분히 클 때 $n > N$이면 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| \leq q < 1$를 만족하는 $q < 1$가 존재한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L|z| < 1$로부터 얻어진다. (예를 들어 $q = (L|z| + 1)/2 < 1$로 잡으면 된다.)

$L = 0$이면, 임의의(고정된) $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $n > N$이면 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| \leq q < 1$을 항상 만족하는 $q < 1$가 존재한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0|z| = 0 < 1$로부터 얻어진다. (예를 들어 $q = 1/2 < 1$로 잡으면 된다.) 근판정법을 쓰면 제곱급수가 수렴함을 알 수 있다.

한편, $L \neq 0$이고 $|z| > 1/L$인 경우를 생각하면 $N$이 충분히 클 때 모든 $n > N$에 대하여 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| > 1$가 성립한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L|z| > 1$로부터 얻어진다. 다시 근판정법을 쓰면 이 경우 제곱급수가 발산함을 알 수 있다.

## 연습문제 ??

$z = 0$일 때 급수가 0으로 수렴함은 자명하다. $z \neq 0$라고 가정하자. 그러면, $N > 1/|z|$인 $N \in \mathbb{N}$를 선택할 수 있다. $n > N$에 대하여 $|nz| > N|z| > 1$이고 $|n^n z^n - 0| = |nz|^n > 1^n = 1$이므로

$$\neg \left( \lim_{n\to\infty} n^n z^n = 0 \right).$$

따라서 $z \neq 0$이면, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$은 발산한다.

## 연습문제 ??

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이므로

$$\sum_{n\to\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

의 수렴반경은 무한대이고 이 제곱급수는 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 수렴한다.

## 연습문제 ??

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$의 수렴반경은 1이다.

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{2012}}{n^{2012}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2012} = 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2012} z^n$의 수렴반경은 1이다.

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$의 수렴반경은 무한대이다.

## 연습문제 ??

$|z| < 1$에 대하여

$$f(z) := 1 + 2z + 3z^3 + 4z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}$$

이므로

$$zf(z) = g(z) := z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots = \frac{z}{(1-z)^2}$$

임을 알고 있다. 따라서 $g(z) := z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots$이 $|z| < 1$에서 수렴하므로 $g$는 원판 $|z| < 1$에서 복소해석함수이고 $g'(z) = 1 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \cdots$이다. 한편,

$$g(z) = zf(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

이므로

$$g'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{(1-z)^2} + z \cdot \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

이 원하는 결과이다.

## 연습문제 ??

(1) 거짓. 예를 들면, $\left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{수렴한다} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \}$은 "닫힌"영역이다.

(2) 참.

(3) 거짓. 예를 들면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$은 $z = 1$에서 수렴하지만 $z = -1$에서는 발산한다.

(4) 거짓. (3)의 예를 참고하라.

(5) 참. (3)의 예를 참고하라.

(6) 참. 예를 들면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(7) 참. 수렴반경은 1보다 작거나 같고, $|1+i| = \sqrt{2} > 1$이다.

## 연습문제 ??

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$이고,

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \sin z = (-1)^n \sin z, \qquad \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} \sin z = (-1)^n \cos z$$

이므로

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dz^n} \sin z \right) \Big|_{z=0} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

같은 방법으로 $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$. 다른 방법으로 구해보면,

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n i^n z^n \right)$$

이므로, $i^{2n} = (-1)^n$을 이용하면,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} \Big( 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\ &\qquad + 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \cdots . \end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$p(z) = z^6 - z^4 + z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C}$라 하면,

$$\begin{aligned} p'(z) &= 6z^5 - 4z^3 + 2z, \\ p''(z) &= 30z^4 - 12z^2 + 2, \\ p'''(z) &= 120z^3 - 24z, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p^{(4)}(z) &= 360z^2 - 24,\\
p^{(5)}(z) &= 720z,\\
p^{(6)}(z) &= 720,\\
p^{(7)}(z) &= p^{(8)} = \cdots = 0
\end{aligned}
$$

이므로,

$$
\begin{aligned}
&p(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,\\
&\frac{p'(1)}{1!} = 6 - 4 + 2 = 4,\\
&\frac{p''(1)}{2!} = \frac{30 - 12 + 2}{2} = 10,\\
&\frac{p'''(1)}{3!} = \frac{120 - 24}{6} = 16,\\
&\frac{p^{(4)}(1)}{4!} = \frac{360 - 24}{24} = 14,\\
&\frac{p^{(5)}(1)}{5!} = \frac{720}{120} = 6,\\
&\frac{p^{(6)}(1)}{6!} = \frac{720}{720} = 1.
\end{aligned}
$$

따라서 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$
\begin{aligned}
&z^6 - z^4 + z^2 - 1\\
&\quad = p(1) + \frac{p'(1)}{1!}(z-1) + \cdots + \frac{p^{(6)}(1)}{6!}(z-1)^6 + 0\\
&\quad = 4(z-1) + 10(z-1)^2 + 16(z-1)^3 + 14(z-1)^4 + 6(z-1)^5 + (z-1)^6.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

(1) 단순연결영역 $\mathbb{C}$에서 $z \mapsto \exp(z^2)$은 부정적분을 가지며, 이를 $g$라 하면

$$
f(z) = \int_{\gamma_{0z}} \exp\bigl(\zeta^2\bigr) d\zeta = \int_{\gamma_{0z}} g'(\zeta) d\zeta = g(z) - g(0).
$$

따라서 $f'(z) = g'(z) = \exp(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}$.

$$
\frac{1}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} f'(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{n!}, \qquad \frac{1}{(2n+1)!}\frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} f'(z)\Big|_{z=0} = 0
$$

이므로 $f^{(2n+1)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$, $f^{(2n+2)}(0) = 0$이고, $f(0) = 0$이다. 따라서,

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n!)} z^{2n+1}.
$$

(2) $|z| < 1$에 대하여,

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^4 + z^4 - \cdots$$

이고 제곱급수는 수렴하는 영역에서 복소해석함수이고 항별미분이 가능하기 때문에 $|z| < 1$에서

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{z+1} = -1 + 2z - 3z^2 + 4z^3 - \cdots$$

양변에 $-z^2$을 곱하면, $|z| < 1$에서

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - \cdots = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot (n-1) \cdot z^n$$

이므로 $c_0 = c_1 = 0$이고, $c_n = (-1)^n \cdot (n-1)$ $(n \geq 2)$이다.

## 연습문제 ??

$z \in \mathbb{C}$에 대하여 $R > |z|$을 잡으면,

$$\begin{aligned}|f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot \max_{|z|\leq R}|f(z)| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot \max_{|z|\leq R} M \cdot |z|^n = \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot M \cdot R^n = \frac{(n+1)!M}{R}.\end{aligned}$$

$R > |z|$의 선택을 임의로 크게 할 수 있기 때문에 $f^{(n+1)}(z) = 0$이다. 어떤 $z \in \mathbb{C}$을 선택해도 같은 결과를 얻기 때문에 $\mathbb{C}$ 전체에서 $f^{(n+1)} \equiv 0$이다. 테일러 정리에 의해, 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

$f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = f^{(n+3)}(0) = \cdots 0$이므로 $f$는 기껏해야 $n$차 다항식이다.

조건에서 $n = 0$이면, $f$는 유계인 전해석함수이며 위의 결론에서 $f$는 상수함수이다 (0차 다항식). 따라서 특별히 $n = 0$인 경우는 리우비유 정리와 일치한다.

## 연습문제 ??

코시 적분공식에 의해

$$\begin{aligned}\frac{2013!}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z^{2013}} dz &= \frac{d^{2012}}{dz^{2012}} \sin z\Big|_{z=0} \\ &= (-1)^{2012/2} \sin z\Big|_{z=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{2013!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^{2013}} dz = 0.$

## 연습문제 ??

$z_0$에서 $g$의 연속성에 의해 $|z-z_0|<\delta$에서 $g(z)\neq 0$가 되도록 $R>0$보다 작은 $\delta>0$를 잡을 수 있다. $f(z_0)=0$이고 $f(z)=(z-z_0)g(z)$ ($|z-z_0|<R$)이므로 $0<|z-z_0|<\delta$에서 $f(z)\neq 0$이다. 근의 분류 정리에 의하여 $f$는 $z_0$에서 $\tilde{m}\in\mathbb{N}$ 중근을 갖고 $\tilde{g}(z_0)\neq 0$인 복소해석함수 $\tilde{g}$가 존재한다. 이제 $|z-z_0|<R$에서 $(z-z_0)^{\tilde{m}}\tilde{g}(z)=(z-z_0)^m g(z)$가 성립한다. $\tilde{m}=m$임을 증명해보자. $\tilde{m}>m$이라면,

$$0\neq g(z_0)=\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\tilde{m}-m}\tilde{g}(z_0)=0\cdot\tilde{g}(z_0)=0$$

가 되어 모순에 도달한다. 반대로 $m>\tilde{m}$이면,

$$0\neq \tilde{g}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\tilde{g}(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-\tilde{m}}g(z_0)=0\cdot g(z_0)=0$$

로 모순이다. 따라서, $m=\tilde{m}$이 되고, $z_0$는 $m$ 중근이다.

## 연습문제 ??

(1)

$$f(z)=(1+z^2)^4=((z-i)(z+i))^4=(z-i)^4(z+i)^4$$

이므로 $g(z):=(z+i)^4$이라 하면 $g$는 전해석함수이고 $g(i)=(2i)^4=16\neq 0$이고 $f(z)=(z-i)^4 g(z)$이다. 따라서 $i$는 $f$의 4 중근이다.

(2)

$$\begin{aligned} f(2n\pi i)&=1-1=0,\\ f'(2n\pi i)&=\exp z\Big|_{z=2n\pi i}=1\neq 0\end{aligned}$$

이므로 $f$의 근 $2n\pi i$의 차수는 1이다.

(3) $f(0)=1-1+\dfrac{1}{2}(0)^2=0$이고

$$\begin{aligned} f(z)&=\cos z-1+\frac{1}{2}(\sin z)^2=\cos z-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\cos(2z))}{2}\\ &=\cos z-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cos(2z)\\ &=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)-\frac{3}{4}\\ &\quad-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4z^2}{2!}+\frac{16z^4}{4!}-\frac{2^6z^6}{6!}+\cdots\right)\\ &=\underbrace{\left(1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}_{0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2!}\right)}_{0}z^2+\underbrace{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{4!}\right)}_{\neq 0}z^4+\cdots\end{aligned}$$

이므로 근 $z_0$의 차수는 4이다.

## 연습문제 ??

원판에서 $z_0$와 다른 점 $z$를 잡으면 $f(z) \neq 0$이다. 근의 분류 정리에서 $f(z) = (z - z_0)g(z)$로 쓸 수 있다. 여기서 $g$는 복소해석함수이고 $g(z_0) \neq 0$이다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z(1\cdot g(z) + (z - z_0)\cdot g'(z))}{(z - z_0)g(z)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{z(g(z) + (z - z_0)\cdot g'(z))}{g(z)}}{(z - z_0)}dz \\
&= \frac{z(g(z) + (z - z_0)\cdot g'(z_0)}{g(z)}\bigg|_{z=z_0} \qquad \text{(코시 적분공식에 의해)} \\
&= \frac{z_0(g(z_0) + 0\cdot g'(z_0))}{g(z_0)} \\
&= z_0.
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

근의 분류 정리에 의해 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$로 쓸 수 있고 $g$는 $D$에서 복소해석함수이고 $g(z_0) \neq 0$이다.

$$(f(z))^2 = (z - z_0)^{2m}\underbrace{(g(z))^2}_{=:G(z)}.$$

$(f(z_0))^2 = 0$임은 분명하고 $G$는 $D$에서 복소해석함수로 $G(z_0) = (g(z_0))^2 \neq 0$이다. 따라서 $z \mapsto (f(z))^2$은 $z_0$에서 $2m$ 중근을 갖는다. 또한,

$$\begin{aligned}
f'(z) &= m(z - z_0)^{m-1}g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \\
&= (z - z_0)^{m-1}\underbrace{(mg(z) + (z - z_0)g'(z))}_{=:g_1(z)}
\end{aligned}$$

이므로 $f'(z_0) = (z_0 - z_0)^{m-1}g_1(z_0) \overset{(m\geq 1)}{=} 0\cdot g_1(z_0) = 0$. $g_1$은 복소해석함수이고

$$g(z_0) = mg(z_0) + 0\cdot g'(z_0) = mg(z_0) + 0 = mg(z_0) \neq 0$$

이므로 $z_0$는 $f'$의 $m - 1$ 중근이다.

## 연습문제 ??

함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$를

$$f(x, y) = x\sin\frac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$$

$f(0,*) = 0$으로 정의하자. 그러면 $f$는 $x_0 \neq 0$인 $(x_0, y_0)$에서 연속임은 자명하고, 모든 $x \neq 0$에 대하여

$$|f(x, y_0) - f(0, y_0)| = \left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \cdot 1 = |x - 0|$$

이므로 $f$는 $(0,*)$에서 연속임이 분명하다. 따라서 $f$는 $\mathbb{C}$의 모든 점에서 연속이다. 정의에서 0은 $f$의 근이지만

$$f\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

이므로 고립 근은 아니다. 또한, $f$는 0을 중심으로 하는 어떤 원판의 내부에서 항등적으로 0이 될 수 없다. 왜냐하면, $n \in \mathbb{N}$에 대하여,

$$f\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, 0\right) = \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{(2n+1)\pi}(-1)^n \neq 0$$

이기 때문이다.

## 연습문제 ??

실수 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\cos(x_1 + x_2) = (\cos x_1)(\cos x_2) - (\sin x_1)(\sin x_2) \tag{0.18}$$

가 성립함을 알고 있다. $x \in \mathbb{R}$을 고정하고 전해석함수 $f$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(z) := \cos(z + x) - ((\cos z)(\cos x) - (\sin z)(\sin x)), z \in \mathbb{C}.$$

그러면 $y \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(y) = 0$이다. 식 (0.18)과 항등정리로부터 모든 $z \in \mathbb{C}$에서 $f(z) = 0$이다. 즉,

$$\cos(z + x) = (\cos z)(\cos x) - (\sin z)(\sin x), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{0.19}$$

$x \in \mathbb{R}$의 선택을 임의로 할 수 있기 때문에 식 (0.19)는 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 성립니다. 다음 단계로, $z \in \mathbb{C}$를 고정하여 전해석함수 $g$를 만들자.

$$g(w) := \cos(z + w) - ((\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w)), \quad w \in \mathbb{C}.$$

그러면 식 (0.19)에 의하여 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $g(x) = 0$이다. 항등정리를 다시 적용하면 모든 $w \in \mathbb{C}$에서 $g(w) = 0$을 얻는다. 따라서

$$\cos(z + w) = (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w), \quad w \in \mathbb{C}. \tag{0.20}$$

이 식에서 $z \in \mathbb{C}$의 선택을 임의로 할 수 있기 때문에, 결론적으로 식 (0.20)은 모든 $z \in \mathbb{C}$(와 모든 $w \in \mathbb{C}$)에 대하여 성립한다.

## 연습문제 ??

$f, g \in \mathrm{Hol}(D)$가

$$(f \cdot g) = f(z) \cdot g(z) = 0, \quad z \in D \tag{0.21}$$

를 만족한다고 가정하자. $z_0 \in D$에서 $f(z_0) \neq 0$라고 가정하자. 그러면 $f$가 연속함수이므로, $|z - z_0| < \delta$이면 $f(z) \neq 0$가 되는 $\delta > 0$가 존재한다. 식 (0.21)로부터 $|z - z_0| < \delta$에서 $g(z) = 0$이고, 항등정리에 의해 $D$에서 $g \equiv 0$이다. 따라서 $\mathrm{Hol}(D)$는 영인자(zero divisor)를 갖지 않는다.

한편, $C(D)$는 정역(integral domain)이 아닌데 이를 다음과 같이 보일 수 있다. $z_0 \in D$에 대하여

$$\Delta := \{z \in D : |z - z_0| < \delta\} \subset D$$

인 $\delta > 0$를 생각하자. 연속함수 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t, & t > 0 \end{cases}$$

이라 정의하고, $z \in D$에 대하여

$$f(z) := \varphi(\mathrm{Re}(z - z_0)),$$
$$g(z) := \varphi(-\mathrm{Re}(z - z_0))$$

라 하면, 연속함수의 합성이므로 $f, g \in C(D)$이다. 또한, $\Delta$의 오른쪽 반원에 속하는 모든 $z$에 대하여 $f(z) > 0$이므로 연속함수로서 $f \neq 0$이다. 같은 방법으로 $\Delta$의 왼쪽 반원에 속하는 모든 $z$에 대하여 $g(z) > 0$이므로 $g \neq 0$이다. 그럼에도 불구하고 $f \cdot g = 0$이다.

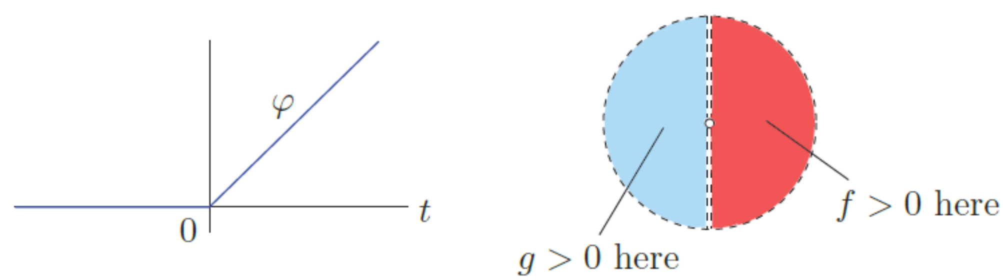



그림 0.20: $\varphi$를 이용한 연속함수 $f, g \in C(D)$ 설정

## 연습문제 ??

(1) 거짓. $D = \mathbb{C}$, $f = \exp$, $g = 1$이라 하자. 그러면, 모든 $n\mathbb{N}$에 대하여 $f(2\pi i n) = \exp(2\pi i n) = 1 = g(2\pi i n)$이고, $f \neq g$이다 (예를 들면, $f(i\pi) = -1 \neq 1 = g(i\pi)$).

(2) 참.

(3) 참. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$라 하자. $x'(t_0)$ 또는 $y'(t_0)$가 0이 아닌 점 $t_0$를 생각하자. (이런 점이 없다면 두 값이 항상 0이므로 $a = b$가 되어 모순이다.) $x'(t_0) > 0$이라 가정하자 (다른 경우도 유사하게 다룰 수 있다). 그러면, $t_0$의 근방에서 $x'(t) > 0$이고 $x$가 증가한다. $t_0 + \dfrac{1}{N} \in [a, b]$가 되도록 충분히 큰 $N$을 잡고 $t_n = t_0 + \dfrac{1}{n}$, $n \geq N$라 하면, $z_n(t_n)$으로 정의된 수열 $(z_n)_{n \geq N}$은 $\gamma(t_0)$로 수렴하는 서로 다른 점들로 구성된 수열이다 (적어도 실수부가 서로 다른 값을 갖는다). 따라서 항등정리에 의하여 $D$에서 $f = g$이다.

(4) 참. 테일러 정리를 적용하면 $w$를 중심으로 하는 원판에서 $f = g$임을 알 수 있고, 여기에 항등정리를 쓰면, $D$에서 $f = g$를 얻는다.

## 연습문제 ??

$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$이라 하자. $z \in K$에 대하여, $z$ 근방의 $w$에 대하여

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)(w - z)^n$$

로 나타낼 때, $c_{n(z)} = 0$인 가장 작은 $n(z) \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$이 존재한다. 따라서 $(f^{(n(z))}(z))/((n(z))!) = 0$이므로 $f^{(n(z))}(0) = 0$이다. $\varphi : K \to \mathbb{N} \cup \{0\}$를 $\varphi(z) = n(z)$로 정의하자. $K$가 비가산(uncountable) 집합이고, $\mathbb{N} \cup \{0\}$은 가산(countable) 집합이므로, $\varphi^{-1}(N)$이 무한이 되는 $N$이 존재한다. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$을 $\varphi^{-1}(N)$의 서로 다른 점으로 만든 수열이라 하자. $K$가 콤팩트이므로, $K$의 한점 $z_* \in K$로 수렴하는 부분수열 $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$을 택할 수 있다. 모든 $k$에서 $f^{(N)}(z_{n_k}) = 0$이므로 함수 $f^{(N)}$에 대하여 항등정리를 적용하면 $K$에서 $f^{(N)} = 0$이다. 따라서 $\mathbb{C}$에서도 항등적으로 0이다. 테일러 정리에 의해, 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

이므로 $f$는 다항식이다.

## 연습문제 ??

모든 $z \in D$에 대하여 $|f(z_0)| \geq |f(z)|$를 만족하는 점을 $z_0 \in D$라 하자. 최대절대값정리에 의하여 $f$는 $D$에서 상수함수가 되어 모순이다.

## 연습문제 ??

$f(z_0) \neq 0$라고 하자. 그러면 $|f(z_0)| > 0$이고, 모든 $z \in D$에 대하여 $|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0$이므로 모든 $z \in D$에 대하여 $f(z) \neq 0$이다. 이제 $D$에 정의된 복소해석함수 $g := 1/f$를 생각하면,

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0)|} \geq \frac{1}{f(z)|} = |g(z)|, \quad z \in D$$

이고 최대절대값정리를 쓰면 $g$는 상수함수이다. 따라서 $f$도 상수함수이다.

## 연습문제 ??

$z \mapsto |f(z)|$가 연속함수이고, $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$가 콤팩트 집합이므로 최대가 되는 점 $z_0$가 존재한다. 그런데 $z_0$는 $K$의 내점(interior point)될 수는 없다. 실제로 $|z_0| < 1$이라면, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$에 정의된 $f$에 최대절대값정리를 적용하여 $f$는 $\mathbb{D}$에서 상수함수가 된다. 물론 이는 모순이고 $z_0 \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$이 되어야 한다. 따라서,

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{t \in [0,2\pi)} |\exp(2it) - 2| = |-1-2| = 3.$$

같은 방법으로, 최소가 되는 점 $z_1$도 $K$의 내점이 될 수 없다. $z_1^2 - 2 \neq 0$이므로 최소절대값정리를 쓰면 $f$는 상수함수가 되어 모순이다. 따라서 $z_1 \in \mathbb{T}$도 성립한다.

$$\min_{z \in K} |f(z)| = \min_{|z|=1} |f(z)| = \min_{t \in [0,2\pi)} |\exp(2it) - 2| = |1-2| = 1.$$

그림 0.21을 참고하라.

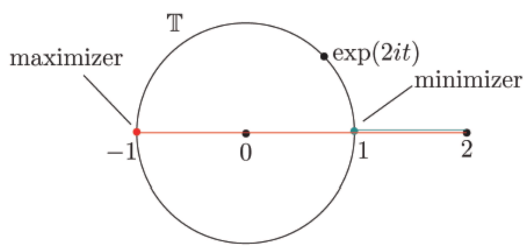



Fig. 5.22 Maximizer and minimizer for $|z^2 - 2|$ in the unit disc.

그림 0.21: 단위원에서 $|z^2 - 2|$를 최대로 하는 점과 최소로 하는 점

## 연습문제 ??

$z \in \mathbb{A}_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$에 대하여

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1+1)(z-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-1}(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots) \\
&= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \cdots .
\end{aligned}
$$

한편 $z \in \tilde{\mathbb{A}}_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1|\}$에 대하여

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1+1)(z-1)} &= \frac{1}{(z-1)^2\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \frac{1}{(z-1)^5} + \cdots .
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

근의 분류 정리로부터 $z \in D$에서 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$이고 $g$는 복소해석함수로 $g(z_0) \neq 0$이다. $D$에서 $z_0$는 $f$의 유일한 근이므로, $D$에서 $g(z) \neq 0$이다. 따라서 $1/g$가 복소해석함수이고 $z_0$를 중심으로 하는 원판에서 테일러 급수 전개가 가능하다. 즉, 상수 $R > 0$이 존재하여

$$
\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R
$$

이고 $c_0 \neq 0$이다 ($g(z_0) \neq 0$이므로). $0 < |z-z_0| < R$에 대하여,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m g(z)} &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\
&= \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-z_0)^n.
\end{aligned}
$$

따라서 $1/f$는 $z_0$에서 $m$ 중극을 갖는다.

## 연습문제 ??

$z \mapsto (z-z_0)^m f(z)$는 $D$에서 복소해석함수 $h$로 확장될 수 있다. 또한,

$$
\neg\left(\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = 0\right)
$$

이므로 $h(z_0) \neq 0$이다. $z \in D$에서 $f(z) \neq 0$이므로, 모든 $z \in D$에 대하여 $h(z) \neq 0$이다. 따라서

$$
\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{h(z)}, \quad z \in D \setminus \{z_0\}
$$

이고

$$g(z) := \frac{(z-z_0)^m}{h(z)}, \quad z \in D$$

로 정의하면 $g$는 $D$에서 복소해석함수이다. $\frac{1}{h(z_0)} \neq 0$이므로 $z_0$는 $g$의 $m$중극이다.

## 연습문제 ??

모든 $n < -m$에 대하여 $c_n = 0$이므로

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

따라서 $(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \cdots$는

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$$

에서 복소해석함수 $g$로 확장가능하다. $|z-z_0| < R$에서 $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \cdots$의 테일러 정리를 적용하면,

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}g}{dz^{m-1}}(z_0).$$

한편, $g^{(m-1)}$은 $\Delta$에서 복소해석함수이며, 특히, $z_0$에서 연속이므로

$$g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z).$$

또한, $0 < |z-z_0| < R$에서 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$이고 $\Delta$의 점 $z \neq z_0$에서

$$g^{(m-1)}(z) = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z)).$$

따라서

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z)). \end{aligned}$$

## 연습문제 ??

(1) 참. $c_{-1} = 1 \neq 0$이고 $c_{-2} = c_{-3} = \cdots = 0$.

(2) 참.

(3) 참.

(4) 참.

(5) 참.

## 연습문제 ??

(1) $\sin z$는 0을 특이점으로 갖지 않는다. $z \in \mathbb{C}$에 대하여

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots .$$

(2) $\sin \frac{1}{z}$는 0을 본질적 특이점으로 갖는다. $z \neq 0$에 대하여

$$\sin \frac{1}{z} = \cdots + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{z}.$$

(3) $\frac{\sin z}{z}$는 0에서 제거가능한 특이점을 갖는다.

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \sin z = 0.$$

따라서 $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + \cdots \; (z \neq 0)$.

(4) $\frac{\sin z}{z^2}$은 0에서 1차의 극을 갖는다. $z \neq 0$에 대하여

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \cdots .$$

(5) $1/(\sin(1/z))$는 0에서 고립 특이점을 갖지 않는다. 왜냐하면, $z_n = 1/(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$에서

$$\sin \frac{1}{z_n} = \sin(n\pi) = 0$$

이고 $z_n = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 이기 때문이다. (이러한 현상은 예제 **??**에서와 같다.)

(6) $z \sin \frac{1}{z}$는 0을 본질적 특이점으로 갖는다. $z \neq 0$에 대하여

$$z \sin \frac{1}{z} = \cdots + \frac{1}{5!z^4} - \frac{1}{3!z^2} + 1.$$

## 연습문제 ??

(1) 거짓. $\lim\limits_{z \nearrow 0} |e^{\frac{1}{x}}| = \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ 이므로 $\neg \left( \lim_{z\to 0} \left| \exp \frac{1}{z} \right| = +\infty \right)$.

(2) 참. $0 < |z - z_0| < R$에 대하여

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

을 만족하는 $R > 0$이 존재하므로

$$p := c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

이라 하면, $0 < |z - z_0| < R$에서

$$f(z) - \frac{p(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

(3) 참. 0이 $f$의 $m$중근이라고 하자 ($f(0) \neq 0$인 경우 $m = 0$이라 하자). 그러면 $f(z) = z^m g(z)$이고 $g(0) \neq 0$인 복소해석함수 $g$가 존재한다. $n > m$에 대하여, $z \neq 0$이면

$$\frac{f(z)}{z^n} = \frac{z^m g(z)}{z^n} = \frac{g(z)}{z^{n-m}}.$$

따라서, $g(0) \neq 0$이고 $n > m$이므로

$$\lim_{z\to 0} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{|g(z)|}{|z|^{n-m}} = |g(0)| \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{|z|^{n-m}} = +\infty$$

(4) 참. 뚫린원판 $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < R\}$에서 $f, g$가 0이 아니고 $h_f(z_0) \neq 0, h_g(z_0) \neq 0$인 복소해석함수 $h_f, h_g$가 존재하여 모든 $z \in D$에 대하여

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^{m_f} h_f(z), \qquad \frac{1}{g(z)} = (z-z_0)^{m_g} h_g(z).$$

따라서 $h_f(z_0)h_g(z_0) \neq 0$이고 모든 $z \in D$에 대하여

$$\frac{1}{f(z)g(z)} = (z-z_0)^{m_f+m_g} h_f(z) h_g(z).$$

결론적으로, $fg$는 $z_0$에서 $m_f + m_g$차 극을 갖는다.

## 연습문제 ??

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) + \exp\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

은 $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$에서 복소해석함수이다. 함수 $\exp(1/(1-z))$는 $z = 0$ 근방에서 복소해석함수이고 $\exp(1/z)$는 0을 본질적 특이점으로 갖는다. 따라서 그 합 $f$는 0을 본질적 특이점으로 갖는다. (왜?) 한편, 1 근방에서 $\exp(1/z)$는 복소해석함수이고 $\exp(1/(1-z))$는 본질적 특이점을 갖는다. 따라서 $f$도 $z = 1$을 본질적 특이점으로 갖는다.

## 연습문제 ??

$z_0$가 $g$의 고립 특이점이면 $0 < |z - z_0| < R$에서 로랑급수 전개

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$$

를 주는 적당한 $R > 0$이 존재한다. $c_n \neq 0$인 $n < 0$이 무한이 많으면 $z_0$는 $g$의 본질적 특이점이다.

그런데 주어진 $f$는 $|z| > 1$로 주어진 뚫린원판에서 로랑급수 전개

$$z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

를 갖는다. 특이점 0의 특성을 규정하려면 적당한 $R > 0$에 대하여 $0 < |z| < R$에서 함수를 살펴봐야 한다. $|z| < 1$에서

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)$$

이므로 $|z| < 1$에서 $f$는 복소해석함수이고 $z = 0$에서 특이점을 갖지 않는다.

## 연습문제 ??

$z_0$가 $fg$의 고립 특이점임은 분명하다. $f$와 $g$가 $z_0$에서 고립 특이점을 갖기 때문에 뚫린원판 $0 < |z - z_0| < R_f$에서 $f$가 복소해석함수인 $R_f > 0$가 존재하고 뚫린원판 $0 < |z - z_0| < R_g$에서 $g$가 복소해석함수인 $R_g > 0$가 존재한다. 따라서 뚫린원판 $0 < |z - z_0| < \min\{R_f, R_g\}$에서 $fg$는 복소해석함수이다.

$z_0$가 $fg$의 제거가능한 특이점이거나 극이라고 가정하자. 그러면, 적당한 $m > 1$이 존재하여

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)g(z) = 0$$

을 만족한다. $f$가 $z_0$에서 극을 가지므로, $m_f$중극을 갖는다고 하면, $f$는 $z_0$ 근방에서 0이 아니며, $0 < |z - z_0| < R$에서

$$f(z) = \frac{c_{-m_f}}{(z-z_0)^{m_f}} + \frac{c_{-m_f+1}}{(z-z_0)^{m_f-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

을 만족하는 $R >$이 존재한다. 여기서 $c_{m_f} \neq 0$이다. 따라서 $z \neq z_0$인 $z_0$ 근방에서

$$\begin{aligned}(z-z_0)^m g(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^{m_f} f(z)} \cdot \underbrace{(z-z_0)^{m_f}}_{\to 0} \underbrace{(z-z_0)^m f(z) g(z)}_{\to 0} \\ &\xrightarrow{z\to z_0} \frac{1}{c_{-m_f}} \cdot 0 \cdot 0 - 0.\end{aligned}$$

그렇다면 $g$는 $z_0$에서 극을 갖거나 제거가능한 특이점을 갖게 되고 가정에 모순이 되므로 $fg$는 $z_0$에서 본질적 특이점을 갖는다.

## 연습문제 ??

$\epsilon := 1/n =: \delta(> 0)$으로 설정하자. 카소라티-바이어스트라스 정리에 의해 $z_0$를 중심으로 반지름 $\delta$인 뚫린원판에 점 $z_n$이 존재하여 $|f(z_n) - w| < \epsilon$을 만족한다. 즉, $|z_n - z_0| < 1/n$이고 $|f(z_n) - w| < 1/n$. 따라서 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 $z_0$로 수렴하고 $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$은 $w$로 수렴한다.

## 연습문제 ??

$1 + \exp z = 0$일 필요충분조건은 $z \in \{\pi i + 2\pi ni \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$이다. 따라서

$$f(z) := \frac{Log(z)}{1 + \exp z}$$

는 $(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \setminus \{\pi i + 2\pi ni \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$에서 복소해석함수이다. $f$는 $\{\pi i + 2\pi ni \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$에 속하는 점에서 1차의 극을 가진다. 경로 $\gamma$의 내부에는 $-\pi i$와 $3\pi i$가 속한다. 그림 0.22를 참고하라.

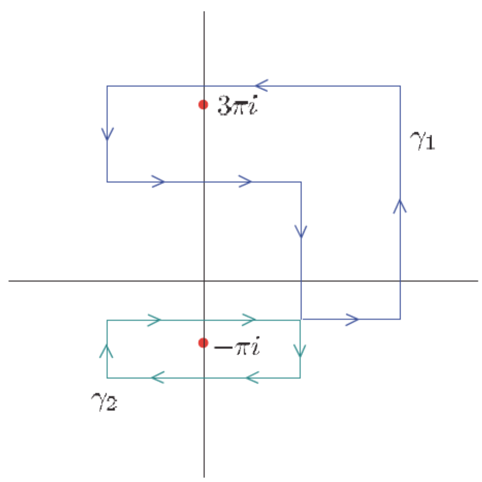



Fig. 5.23 The curves $\gamma_1$ and $\gamma_2$.

그림 0.22: 경로 $\gamma_1$과 $\gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{res}(f, 3\pi i) - \mathrm{res}(f, -\pi i))$$

이므로 $\mathrm{res}(f, 3\pi i)$와 $\mathrm{res}(f, \pi i)$를 계산해야 한다.

$$\frac{\mathrm{Log}(z)}{1 + \exp z} = \frac{c_{-1,3\pi i}}{z - 3\pi i} + h_{3\pi i}$$

로 쓸 수 있다. 여기서, $h_{3\pi i}$는 $3\pi i$ 근방에서 복소해석함수이다. 따라서

$$c_{-1,3\pi i} = \lim_{z\to 3\pi i} \frac{(z - 3\pi i)\,\mathrm{Log}(z)}{1 + \exp z} = \lim_{z\to 3\pi i} \frac{z - 3\pi i}{\exp z - \exp(3\pi i)} \cdot \mathrm{Log}(z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\exp z|_{z=3\pi i}} \cdot \mathrm{Log}(3\pi i) = -1\left(\log|3\pi i| + i\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\log 3 - \log \pi - i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

한편,

$$\frac{\mathrm{Log}(z)}{1+\exp z} = \frac{c_{-1,-\pi i}}{z-(-\pi i)} + h_{-\pi i}$$

로 쓸 수 있다. 여기서, $h_{-\pi i}$는 $-\pi i$ 근방에서 복소해석함수이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
c_{-1,-\pi i} &= \lim_{z\to-\pi i} \frac{(z-(-\pi i))\,\mathrm{Log}(z)}{1+\exp z} = \lim_{z\to-\pi i} \frac{z-(-\pi i)}{\exp z - \exp(-\pi i)} \cdot \mathrm{Log}(z)\\
&= \frac{1}{\exp z|_{z=-\pi i}} \cdot \mathrm{Log}(-\pi i) = -1\left(\log|-\pi i| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= -\log \pi + i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

종합하면,

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}(z)}{1+\exp z}dz = 2\pi i\left(-\log 3 - \log \pi - i\frac{\pi}{2} + \log \pi - i\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 - (2\pi\log 3)i.$$

## 연습문제 ??

$\gamma(\theta) = \exp(i\theta), \theta \in [0, 2\pi)$의 원형경로로 적분경로 $\gamma$를 정의하자. 그러면,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta &= \int_\gamma \frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}{5+4\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{1}{iz}dz = \int_\gamma \frac{z^2+1}{2iz(2z^2+5z+1)}dz\\
&= \int_\gamma \frac{z^2+1}{2iz(2z+1)(z+3)}dz.
\end{aligned}
$$

$$f(z) := \frac{z^2+1}{2iz(2z+1)(z+3)}$$

라 정의하면, $f$는 $0$, $-1/2$, $-2$에서 1차의 극을 갖는다. 경로 $\gamma$의 내부에는 $0$과 $-1/2$이 있으므로 유수정리를 쓰면,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta\\
&= 2\pi i\left(\mathrm{res}(f,0) + \mathrm{res}(f,-1/2)\right)\\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to0} \frac{z\cdot(z^2+1)}{2iz(2z+1)(z+3)} + \lim_{z\to1/2} \frac{(z+1/2)\cdot(z^2+1)}{2iz(2z+1)(z+3)}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{2i\cdot1\cdot2} + \frac{1\cdot\frac{5}{4}}{2i\cdot(-\frac{1}{2})\cdot2\cdot\frac{3}{2}}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4i} - \frac{4}{12i}\right)\\
&= -\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

(1) $f_1$을 다음과 같이 정의하자.

$$f_1(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

그러면 $f_1$은 $i$와 $-i$에서 1차 극을 갖는다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{res}(f_1,i) = \pi i\cdot \lim_{z\to i}\frac{z-i}{1+z^2}\\ &= \pi i\cdot \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \pi i\cdot\frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) $f_2$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_2(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}.$$

그러면 $f_2$는 $ai, -ai, bi, -bi$에서 1차 극을 갖는다. $f_2$가 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\mathrm{res}(f_2,ai)+\mathrm{res}(f_2,bi)\right)\\ &= \pi i\left(\frac{1}{(b^2-a^2)2ai}+\frac{1}{(a^2-b^2)2bi}\right)\\ &= \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2ab(a+b)}.\end{aligned}$$

(3) $f_3$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_3(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

그러면 $f_3$는 $i, -i$에서 2차 극을 갖는다.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{res}(f_3,i)\\ &= \frac{\pi}{1!}\cdot\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\cdot\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)\\ &= \pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \pi i\cdot\frac{-2}{-8i} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(4) $f_4$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_4(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}.$$

그러면 $f_4$는 다음 점들에서 1차 극을 갖는다.

$$p_1 = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right),\quad p_2 = \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right),\quad p_3 = \exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right),\quad p_4 = \exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1=x^4}dx &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,(\mathrm{res}(f_4,p_1)+\mathrm{res}(f_4,p_2)) = \pi i\left(\frac{1+p_1^2}{4p_1^3}+\frac{1+p_2^2}{4p_2^3}\right)\\
&= \pi i\left(\frac{p_1}{4p_1^4}+\frac{1}{4p_1}+\frac{p_2}{4p_2^4}+\frac{1}{4p_2}\right) = \pi i\left(-\frac{p_1+p_2}{4}+\frac{1}{4p_1}+\frac{1}{4p_2}\right)\\
&= \pi i\left(-\frac{\exp(i\pi/4)-\exp(-\pi i/4)}{4}+\frac{\exp(-i\pi/4)-\exp(i\pi/4)}{4}\right)\\
&= \pi i\left(-\frac{i\sin(\pi/4)}{2}+\frac{-i\sin(\pi/4)}{2}\right) = \pi i\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

## 연습문제 ??

유수정리를 이용하면,

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{\exp z}{z^{n+1}}dz &= 2\pi i\cdot\mathrm{res}\left(\frac{\exp z}{z^{n+1}},0\right) = \frac{2\pi i}{n!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{n+1}\cdot\frac{\exp z}{z^{n+1}}\right)\\
&= \frac{2\pi i}{n!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\exp z = \frac{2\pi i}{n!}\cdot\lim_{z\to 0}\exp z = \frac{2\pi i}{n!}\cdot\exp 0\\
&= \frac{2\pi i}{n!}\cdot 1 = \frac{2\pi i}{n!}.
\end{aligned}
$$

따라서,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi i}{n!} &= \int_0^{2\pi}\frac{\exp(\cos\theta+i\sin\theta)}{cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)}\cdot i(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta\\
&= i\int_0^{2\pi}\exp(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot(\cos(n\theta)-i\sin(n\theta))\,d\theta\\
&= i\int_0^{2\pi}\exp(\cos\theta)\,(\cos(n\theta-\sin\theta)-i\sin(n\theta-\sin\theta))\,d\theta.
\end{aligned}
$$

양변의 허수부를 비교하여

$$\int_0^{2\pi}\exp(\cos\theta)\cdot\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

## 연습문제 ??

중심이 $z_0$인 작은 뚫린원판 $D$에서 $f(z)\neq 0$이고

$$f(z) = (z-z_0)h(z) \tag{0.22}$$

를 만족하는 $h(z_0)\neq 0$인 복소해석함수 $h$가 존재한다. 식 (0.22)에 의해 $f'(z)=h(z)+(z-z_0)h'(z)$로 쓸 수 있다. 특히, $f'(z_0)=h(z_0)$이다. $z\in D\setminus\{z_0\}$에 대하여

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)h(z)}$$

이고 $\dfrac{1}{h}$이 $D$에서 복소해석함수이므로

$$\frac{1}{h(z)} = d_0 + d_1(z - z_0) + \cdots$$

이고 $d_0 = \dfrac{1}{h(z_0)} = \dfrac{1}{f'(z_0)}$이다. 따라서 $z \in D \setminus \{z_0\}$에 대하여

$$\frac{1}{f(z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot (d_0 + d_1(z - z_0) + \cdots) = \frac{d_0}{z - z_0} + d_1 + d_2(z - z_0) + \cdots$$

이고 $\operatorname{res}\left(\dfrac{1}{f}, z_0\right) = d_0 = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

## 연습문제 ??

$f(z) = \sin z$라고 하자. $f$는 $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$에서 1차의 근을 갖는다. 앞의 연습문제에 의하여

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sin z}, k\pi\right) = \frac{1}{\sin' z|_{z=k\pi}} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

## 연습문제 ??

(1) $f_0 = 1 \leq 2^0 = 1$, $f_1 = 1 \leq 2^1 = 2$이고, 어떤 $n \geq 1$이 존재하여 모든 $m \leq n$에 대하여 $f_m \leq 2^m$이 성립한다고 가정하면,

$$f_{m+1} = f_m + f_{m-1} \leq 2^m + 2^{m-1} = 2^{m-1} \cdot 3 < 2^{m-1} \cdot 4 = 2^{m+1}.$$

(2) $|z| < 1/2$이면, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| \leq \sqrt[n]{2^n} \cdot |z| = 2|z| < 1$. 근판정법에 의해

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$$

은 $|z| < 1/2$일 때 수렴한다. 따라서 $F$의 수렴반경은 1/2보다 크거나 같다.

(3) $|z| < 1/2$에 대하여

$$\begin{aligned} zF(z) &= f_0 z + f_1 z^2 + f_2 z^3 + \cdots, \\ z^2 F(z) &= \phantom{f_0 z + {}} f_0 z^2 + f_1 z^3 + \cdots. \end{aligned}$$

두 식을 더하면,

$$\begin{aligned} zF(z) + z^2 F(z) &= 1 \cdot z + (f_1 + z_0) z^2 + (f_2 + f_1) z^3 + \cdots \\ &= f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \cdots) - f_0 \\ &= F(z) = 1.\end{aligned}$$

따라서

$$1 = F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = (1 - z - z^2)F(z)$$

이고 $|z| < \dfrac{1}{2}$에서 $F(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$.

(4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^{n+1}(1 - z - z^2)} &= \frac{F(z)}{z^{n+1}} \\ &= \frac{f_0 + \cdots + f_{n-1}z^{n-1} + f_n z^n + f_{n+1}z^{n+1} + \cdots}{z^{n+1}} \\ &= \frac{f_0}{z^{n+1}} + \frac{f_1}{z^n} + \cdots + \frac{f_n}{z} + f_{n+1} + f_{n+2}z + \cdots \qquad (0.23)\end{aligned}$$

이므로 유수를 계산하면

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^{n+1}(1 - z - z^2)}, 0\right) = f_n. \text{ (식 (0.23)의 } \frac{1}{z}\text{의 계수)}$$

(5) $|z| = R > 2$에 대하여

$$\begin{aligned}|1 - z - z^2| &\geq |z^2 + z| - 1 = |z| \cdot |z + 1| - 1 = R \cdot |z + 1| - 1 \\ &\geq R \cdot (|z| - 1) - 1 = R \cdot (R - 1) - 1 = R^2 - R - 1 \\ &> 0 \text{ } (R > 2\text{이므로}).\end{aligned}$$

$C_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$가 다음과 같은 원형경로이면,

$$C_R(t) = R\exp(it), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} \frac{1}{z^{n+1}(1 - z - z^2)} dz\right| &\leq \frac{1}{R^{n+1}} \cdot \frac{1}{R^2 - R - 1} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{R^2 - R - 1} \xrightarrow{R \to \infty} 0.\end{aligned}$$

$G(z) := \dfrac{1}{z^{n+1}(1 - z - z^2)}$라 정의하면, $G$는

(a) 0에서 $n + 1$차 극을 갖는다.

(b) $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$에서 1차 극을 갖는다.

(c) $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$에서 1차 극을 갖는다.

따라서 $R > 2$에 대하여,

$$\operatorname{res}(G,0) + \operatorname{res}\left(G, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + \operatorname{res}\left(G, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} G(z)dz.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(G,0) + \operatorname{res}\left(G, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + \operatorname{res}\left(G, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\\ = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} G(z)dz = 0\end{aligned}$$

이므로,

$$f_n = -\operatorname{res}\left(G, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - \operatorname{res}\left(G, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(G, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\left(z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\cdot(-\sqrt{5})}\\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

$$\operatorname{res}\left(G, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\cdot(-\sqrt{5})} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

이를 종합하면,

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

# 5장 - 연습문제 풀이

## 연습문제 ??

(1) $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\cdot(2x) = \frac{2y^2+2x^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$x, y$에 대한 대칭식임을 이용하면

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

따라서,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$에서 $u \in C^2$이고 $\Delta u = 0$이므로, $u$는 조화함수이다.

(2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \sin y, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^x \cos y, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x(-\sin y). \end{aligned}$$

따라서, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y + e^x(-\sin y) = 0$. $\mathbb{R}^2$에서 $u \in C^2$이고 $\Delta u = 0$이므로, $u$는 조화함수이다.

## 연습문제 ??

$U$에 정의된 실변수 함수의 점별 연산에 대한 공간 $V$를 생각하자. $V$는 벡터공간이 됨을 알고 있다. $\mathrm{Har}(U)$가 점별 연산에 대하여 $V$의 부분공간을 이룬다는 것을 증명하자.

(S1) $U$의 모든 점에서 $0$을 대응시키는 상수함수 $\mathbf{0}$가 $\mathrm{Har}(U)$에 속한다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{0}}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

(S2) $u, v \in \mathrm{Har}(U)$라고 하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(S3) $\alpha \in \mathbb{R}$이고, $u \in \mathrm{Har}(U)$이면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\alpha \cdot u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\alpha \cdot u)}{\partial y^2} &= \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \alpha \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

이상에서 $\mathrm{Har}(U)$는 점별 연산에 대하여 실 벡터공간이 된다.

## 연습문제 ??

$u := x = \mathrm{Re}(z)$, $\tilde{u} := x + y = \mathrm{Re}(z - iz)$는 모두 $\mathbb{R}^2$의 조화함수이다. 두 함수의 점별 곱은 $u \cdot \tilde{u} = x \cdot (x + y) = x^2 + xy$이다.

$$\frac{\partial^2 (u \cdot \tilde{u})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u \cdot \tilde{u})}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 2 + 0 = 2 \neq 0.$$

따라서 두 조화함수의 점별 곱이 반드시 조화함수가 되는 것은 아니다.

## 연습문제 ??

(1) $u = e^x \sin y$라고 하자. $u + iv$가 복소해석함수인 $v$를 찾으면 된다. 코시-리만 방정식을 만족해야 하므로

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y.$$

$y$를 고정하고 $x$로 적분하면 $v = -e^x \cos y + C(y)$를 얻는다. 여기서 $C(y)$는 $y$에만 의존하는 적분상수이다.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y + C'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$$

이므로 $C'(y) = 0$에서 $C(y) = K$이다. $v := -e^x \cos y$로 두자. 그러면

$$\begin{aligned} u + iv &= e^x \sin y + i(-e^x \cos y) = e^x(\sin y - i \cos y) \\ &= -ie^x(\cos y + i \sin y) = -i \exp(x + iy) = -i \exp(z), \end{aligned}$$

여기서 $z = x + iy$이고 $u + iv = -i \exp z$는 실제로 복소해석함수이다. 따라서 $v := -e^x \cos y$는 $u := e^x \sin y$의 조화결레함수이다.

(2) $u = x_2^3 xy^2 - 2y$라고 하자. $u + iv$가 복소해석함수인 $v$를 찾으면 된다. 코시-리만 방정식을 만족해야 하므로

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + 2.$$

$y$를 고정하고 $x$로 적분하면

$$v = 6\frac{x^2}{2}y + 2x + C(y) = 3x^2 y + 2x + C(y).$$

여기서 $C(y)$는 $y$에만 의존하는 적분상수이다.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + C'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

이므로 $C'(y) = -3y^2$에서

$$C(y) = -3\frac{y^3}{3} + C = -y^3 + C.$$

$v := 3x^2y + 2x - y^3$으로 두자. 그러면

$$\begin{aligned} u + iv &= x^3 - 3xy^2 - 2y + i(3x^2y + 2x - y^3) \\ &= x^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2(iy) + (iy)^3 - 2y + i2x \\ &= (x+iy)^3 + 2i(x+iy) = z^3 + 2iz. \end{aligned}$$

여기서 $z = x + iy$이고 $u + iv = z^3 + 2iz$는 실제로 복소해석함수이다. 따라서 $v := 3x^2y + 2x - y^3$는 $u := x^3_2xy^2 - 2y$의 조화결레함수이다.

(3) $u = x(1 + 2y)$라고 하자. $u + iv$가 복소해석함수인 $v$를 찾으면 된다. 코시-리만 방정식을 만족해야 하므로

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x.$$

$y$를 고정하고 $x$로 적분하면

$$v = 2\frac{x^2}{2} + C(y) = -x^2 + C(y).$$

여기서 $C(y)$는 $y$에만 의존하는 적분상수이다.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2y$$

이므로

$$C(y) = y + 2 \cdot \frac{y^2}{2} + C = y + y^2 + C.$$

$v := -x^2 + y + y^2$으로 두자. 그러면

$$\begin{aligned} u + iv &= x(1+2y) + i(-x^2 + y + y^2) = x + iy + 2xy + i(y^2 - x^2) \\ &= x + iy - i((x^2 - y^2) + i2xy) = x + iy - i(x+iy)^2 \\ &= z - iz^2. \end{aligned}$$

여기서 $z = x+iy$이고 $u+iv = z-iz^2$는 실제로 복소해석함수이다. 따라서 $v := -x^2+y+y^2$는 $u := x(1+2y)$의 조화결레함수이다.

## 연습문제 ??

$v$를 $u$의 조화켤레함수라고 하자. 그러면 $f := u + iv$는 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 복소해석함수이다. 따라서 $h := z^2 \exp(-f(z))$가 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 복소해석함수이다.

$$\begin{aligned} |h| &= |z|^2 |\exp(-f(z))| = |z|^2 e^{-\operatorname{Re}(f(z))} = |z|^2 e^{-u} = |z|^2 e^{-\log|z|^2} \\ &= |z|^2 \cdot \frac{1}{|z|^2} = 1. \end{aligned}$$

이로부터 $h$가 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에 포함된 모든 원판에서 상수함수가 되어야 한다. 따라서 $h' = 0$이다. 한편,

$$h' = 2z \exp(-f(z)) + z^2 \exp(-f(z)) \cdot (-f'(z))$$

에서

$$f'(z) = \frac{2}{z}$$

이고 $1/z$가 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 부정적분을 갖게 된다. 이제 경로 $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$를 따라 적분하면,

$$2 \cdot 2\pi i = \int_\gamma \frac{2}{z} dz = \int_\gamma f'(z) dz = 0$$

가 되어 모순이 생긴다.

따라서 $u$는 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 조화켤레함수를 가질 수 없다.

## 연습문제 ??

$u := x^3 + y^3$이라 하자. $f$가 복소해석함수라면, $u$는 조화함수이다. 그런데, $x \neq y$에 대하여

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 6x + y6 = 6(x+y) \neq 0.$$

따라서 $f = u + iv$가 복소해석함수가 되는 $v$를 찾을 수 없다.

## 연습문제 ??

$u$가 조화함수일 때, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$도 조화함수가 됨을 보이면 충분하다. $u$가 무한번 미분가능함을 알고 있으므로,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} u\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0.
\end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0.
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

(1) $b(x) = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_d x^d$이라 하면,

$$p(z) := p(x+iy) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$$

은 전해석함수이다. 따라서 $h := \mathrm{Re}(p(x+iy))$는 조화함수이다. 또한, 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$h(x,0) = \mathrm{Re}(p(x+i0)) = \mathrm{Re}(p(x)) = \mathrm{Re}(b(x)) = b(x)$$

를 만족한다.

(2) $b(z) := b(x+iy) = \dfrac{1}{1+z^2}$은 $z = i$에서 정의되지 않는다. 하지만,

$$\frac{i}{z+i}$$

는 상반평면에서 복소해석함수이고, 따라서 실수부가 조화함수이다. 또한, 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$h(x,0) = \frac{0+1}{x^2 + (0+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} = b(x)$$

를 만족한다.

## 연습문제 ??

$f$가 전해석함수이고 실수부가 $u$라고 하자. ($\mathbb{C}$는 단순연결영역임을 상기하자.) 그러면, $\exp(-f)$도 전해석함수이다. 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여 $u(x,y) > 0$이므로,

$$|\exp(-f)| = e^{-\mathrm{Re}(f)} = e^{-u} \leq 1.$$

리우비유 정이에 의해, $\exp(-f)$는 상수함수이다. 따라서 $|\exp(-f)|$도 상수이고, $e^{-u}$도 상수함수이다. 결론적으로, 실수 로그값 $\log(e^{-u}) = -u$도 상수이므로 $u$는 상수함수가 된다.

## 연습문제 ??

(1) $z = r\exp(i\theta)$에 대하여

$$\exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) = \exp\left(-\frac{1}{r^4}\exp(-i4\theta)\right)$$

이므로, $r = 1/n$, $4\theta = -\pi$로 택하면, 즉,

$$z_n := \frac{1}{n}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) =: x_n + iy_n.$$

$u(x_n, y_n) = \exp(-n^4\exp(i\pi)) = \exp(-n^4(-1)) = e^{n^4}$이다. 그러면, $(x_n, y_n) \to (0,0)$이지만, $u(x_n, y_n) \to 0$은 아니므로, $u$는 $(0,0)$에서 연속이 아니다.

(2)

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{(x+0i)^4}\right) = e^{-1/x^4},$$
$$u(0,y) = \exp\left(-\frac{1}{(0+yi)^4}\right) = \exp\left(-\frac{1}{i^4y^4}\right) = \exp\left(-\frac{1}{1\cdot y^4}\right) = e^{-1/y^4}.$$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^4}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^4}}{x} = 0.$$

여기서 마지막 등식은 다음과 사실로부터 얻는다.

$$e^{1/x^4} = 1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x^4}\right)^2 + \cdots > \frac{1}{x^4}$$

이므로 $0 \le \left|\dfrac{e^{-1/x^4}}{x}\right| \le |x|^3$.

유사한 방법으로 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$을 보일 수 있다. 따라서,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}e^{-1/x^4} - 0}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^4}\cdot\frac{-4}{x^5}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4e^{-1/x^4}}{x^6} = 0.$$

이를 위해, 부등식 $e^{1/x^4} = 1 + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^2 + \cdots > \dfrac{1}{2x^8}$로부터 $0 \le \left|\dfrac{e^{-1/x^4}}{x^6}\right| \le 2|x|^2$이 성립함을 이용하였다.

유사한 방법으로,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

을 보일 수 있고, 결론적으로 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = 0 + 0 = 0$.

## 연습문제 ??

(1) $z_0 \in D_1$이라 하자. 그러면, $\varphi(z_0) \in D_2$이다. 중심을 $\varphi(z_0)$로 하고 충분히 작은 반지름 $\epsilon > 0$을 갖는 원판 $\Delta$가 $\Delta \subset D_2$와 $\varphi^{-1}(\Delta) \subset D_1$를 만족하도록 잡을 수 있다. $\Delta$가 단순연결영역이므로, $\Delta$에서 $g = \mathrm{Re}(G)$를 만족하는 복소해석함수 $G$가 존재한다. 복소해석함수 $\varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta)}$ :

$\varphi^{-1}(\Delta) \to \Delta$와 $G : \Delta \to \mathbb{C}$의 합성함수는 복소해석함수이고, $\mathrm{Re}(G \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta)})$는 $\varphi^{-1}(\Delta)$에서 조화함수이다. 한편, $z \in \varphi^{-1}(\Delta)$에 대하여, $\varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta)}(z) = \varphi(z) \in \Delta$이고

$$(G \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta)})(z) = G(\varphi(z)) = g(\varphi(z)) = (g \circ \varphi)(z).$$

따라서, $(g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta)}$은 $\varphi^{-1}(\Delta)$에서 조화함수이다. 특히, $z_0 \in \varphi^{-1}(\Delta)$에서 $\Delta(g \circ \varphi)(z_0) = 0$이다. $z_0 \in D_1$의 선택을 임의로 할 수 있으므로, $g \circ \varphi$는 $D_1$에서 조화함수이다.

(2) $h : D_2 \to \mathbb{R}$이 조화함수이면, 앞의 증명에서 $h \circ \varphi : D_1 \to \mathbb{R}$도 조화함수이다.

이제 $h \circ \varphi : D_1 \to \mathbb{R}$가 조화함수라고 가정하자. 그러면, 앞의 증명에서 $(h \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} : D_2 \to \mathbb{R}$도 조화함수이다. 항등함수 $z \mapsto z (z \in D_2)$를 $\mathrm{id}_{D_2} : D_2 \to D_2$로 쓰면, $(h \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = h \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = h \circ (\mathrm{id}_{D_2}) = h$이므로, $h : D_2 \to \mathbb{R}$도 조화함수이다.

(3)

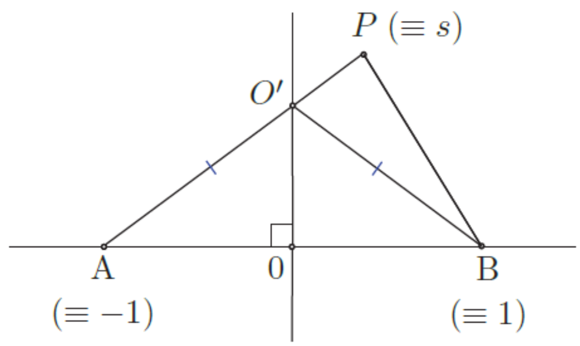



Fig. 5.24 Triangle inequality in $\Delta PO'B$

그림 0.23: $\Delta PO'B$에 대한 삼각부등식

그림 0.23의 $\Delta PO'B$에서 삼각부등식을 쓰면, $\mathbb{H}$의 점 $s(\equiv P)$에 대하여

$$\begin{aligned}|s+1| = \ell(PA) = \ell(PO') + \ell(O'A) &= \ell(PO') + \ell(O'B) \\ &> \ell(PB) = |s-1|.\end{aligned}$$

여기서, $O'$이 선분 $AB$의 수직이등분선임을 이용하여 세번째 등식을 얻었다. 따라서 모든 $s \in \mathbb{H}$에 대하여 $\varphi(s) \in \mathbb{D}$를 얻는다. 함수 $\varphi$가 복소해석함수임은 분명하므로, $s \in \mathbb{H}$에 대하여

$$\varphi'(s) = 1 \cdot \frac{1}{s+1} + (s-1) \cdot \left(-\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{s+1-s+1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^2}.$$

이제 함수 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$를

$$\psi(s) = \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

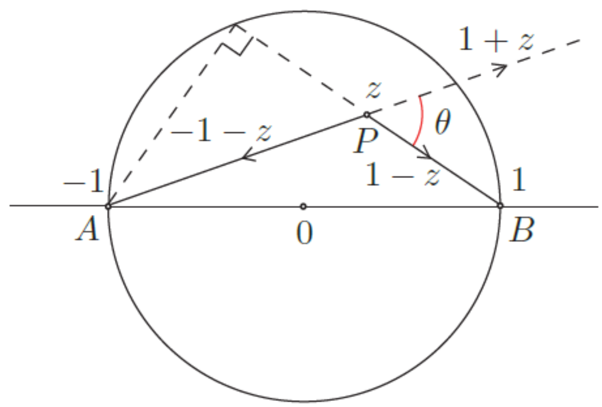



Fig. 5.25 Triangle inequality in $\Delta PO'B$

그림 0.24: 원주각을 이용한 $\angle APB$

로 정의하자. ($\psi$는 방정식 $z = \varphi(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$을 $s$에 대하여 푸는 방법으로 $\varphi^{-1}$를 구한 것이다.) 그림 0.24에서 원 위의 임의의 점에 대하여 지름 $AB$에 대한 원주각이 $90°$이므로, $\mathbb{D}$의 점 $P(\equiv z)$에 대하여 $\angle APB > 90°$이다. 따라서,

$$\mathrm{Re}(\psi(z)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = |\psi(z)|\cos\theta = |\psi(z)|\cos(\pi - \angle APB) > 0.$$

따라서 모든 $z \in \mathbb{D}$에 대하여 $\psi(z) \in \mathbb{H}$이다. 함수 $\psi$는 $\mathbb{D}$에서 복소해석함수이고, $z \in \mathbb{D}$에 대하여

$$\psi'(z) = 1 \cdot \frac{1}{1-z} + (1+z) \cdot \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}.$$

끝으로, 모든 $s \in \mathbb{H}$에 대하여

$$(\psi \circ \varphi)(s) = \frac{1 + \dfrac{s-1}{s+1}}{1 - \dfrac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1+s-1}{s+1-s+1} = \frac{2s}{2} = s$$

이고, 모든 $z \in \mathbb{D}$에 대하여

$$(\varphi \circ \psi)(z) = \frac{\dfrac{1+z}{1-z} - 1}{\dfrac{1+z}{1-z} + 1} = \frac{1+z-1+z}{1+z+1-z} = \frac{2z}{2} = z.$$

따라서 $\varphi$는 전단사함수이고 $\varphi^{-1} = \psi$이다.