복소해석학 연습문제 풀이
A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진,허재성 譯

Update on January 3, 2023

연습문제 풀이

머리말 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

0에서 f'의 미분이 존재하고 그 값이 L이라고 가정하자. $\epsilon := 1 > 0$으로 잡으면, $0 < |x - 0| < \delta$ 이면

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다. 특히 $x := \delta/2$로 잡으면 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| = \left|\frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L\right| = |2 - L| < \epsilon. \tag{0.1}$$

한편 $x := -\delta/2$로 잡아도 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L\right| = \left|\frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L\right| = |2 + L| < \epsilon. \tag{0.2}$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서 f'은 0에서 미분이 불가능하다.

1장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$이므로, x, y 중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서 $x^2 + y^2 \neq 0$이고,

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$\begin{aligned}
&(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\\
&\quad=\left(x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-y\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),x\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\
&\quad=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right)=(1,0).
\end{aligned}$$

따라서 $(x,y)\neq(0,0)$에 대하여 $(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$이다.

연습문제 ??

$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$이므로, $\tan\theta\in\mathbb{R}$이고,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-i\tan\theta}&=\frac{1}{1^2+(\tan\theta)^2}+i\left(\frac{\tan\theta}{1^2+(\tan\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}+i\left(\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{1}+i\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{1}=(\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta).
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}&=(1+i\tan\theta)((\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta))\\
&=(\cos\theta)^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta)(\cos\theta)\\
&\qquad+\left((\sin\theta)(\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2\right)\\
&=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+i2(\sin\theta)(\cos\theta)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$P\subset\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면, $i\neq0$이므로 조건 (P3)에 의해 $i\in P$이거나 ($i\neq P$이고 $-i\in P$)이다. 조건 (P2)에서

$$-1=i\cdot i=(-i)\cdot(-i)\in P \tag{0.3}$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \tag{0.4}$$

가 된다. 그런데 $1 \neq 0$이고 $x = 1$이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

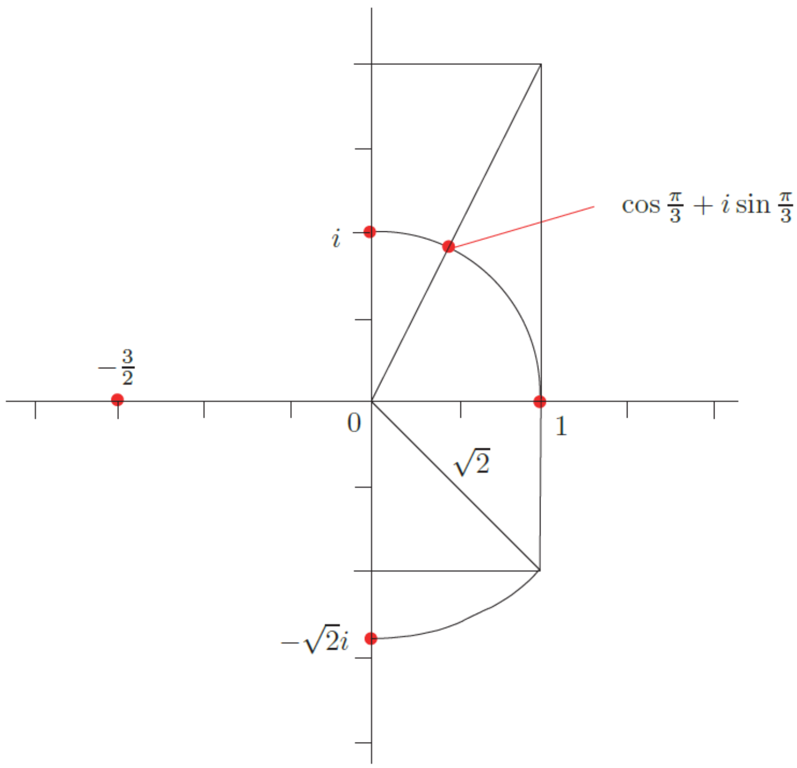


Fig. 5.2 Location of the complex numbers 0, 1, $-3/2$, i, $-\sqrt{2}i$, $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Figure 0.1: 복소수 $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$의 위치

연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$에 대하여 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$이다.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + i2(\cos\theta)(\sin\theta)\right)\\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - (\sin\theta)2(\cos\theta)(\sin\theta)\end{aligned}$$

$$+ i(\,\cdots\,).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\
&= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\
&= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - 1 + (\cos\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(1-\cos\theta)^2 \\
&= (\cos\theta)^3 - \cos\theta + (\cos\theta)^3 - 2\cos\theta + 2(\cos\theta)^3 \\
&= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$이 복소수 $a, b \in \mathbb{C}$와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\
&= \mathrm{Re}((\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3) \\
&= (\cos\theta)^3 - 3(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\
&= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32(0 + i\cdot 1) = 32i.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$2+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2)$이고 $3+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/3)$이다. 따라서, $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$이다. 한편,

$$(2+i)(3+i) = 6 - 1 + i(2+3) = 5 + 5i$$

이므로 $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1}1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로, $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$이다.

연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점 A, B, C의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수 z_A, z_B, z_C에 있다고 하자. $\ell(AC) = \ell(AB)$이고 $\angle CAB = \pi/3$이므로,

$$z_C - z_A = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_B - z_A). \tag{0.5}$$

귀류법을 쓰기위해 $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서 $p + iq = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(m + in)$을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \tag{0.6}$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \tag{0.7}$$

식 (0.6)에 $-n$을 곱하고, 식 (0.7)에 m을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데 $m^2 + n^2 \neq 0$이므로 ($z_B \neq z_A$이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.

연습문제 ??

$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$로 쓸 수 있다. $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$가

$$w^4 = \rho^4(\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

를 만족해야 하므로, $\rho^4 = 1$에서 $\rho = 1$이다. 또한, $4\alpha \in \{\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \ldots\}$에서

$$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \pm \pi, \ldots\right\}.$$

따라서 $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot ((\cos\alpha + i\sin\alpha)$는 다음 집합에 속한다.

$$\begin{aligned}&\left\{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right\}\\ &= \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}.\end{aligned}$$

네 개의 해를 복소평면에 그려보면 그림 0.2와 같다.

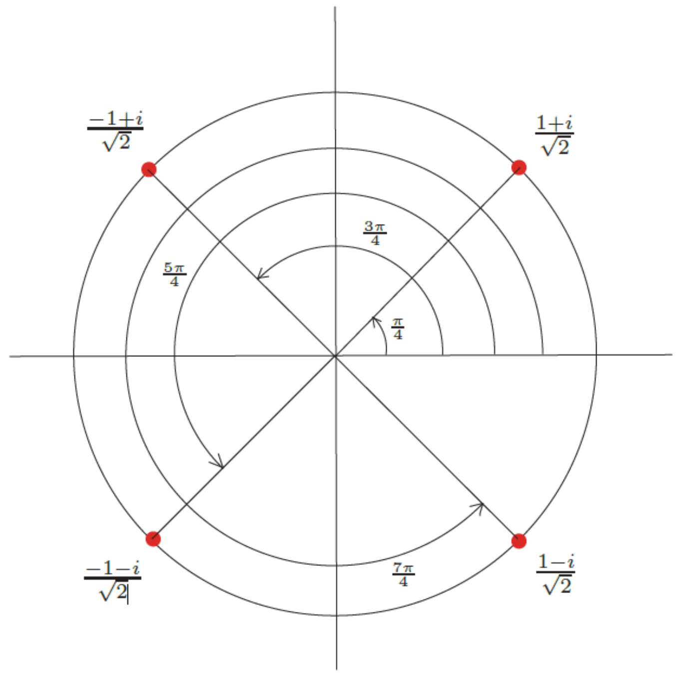


Fig. 5.3 Location of the complex numbers w that satisfy $w^4 = -1$.

Figure 0.2: $w^4 = -1$을 만족하는 복소수 w의 위치

연습문제 ??

방정식으로부터

$$0 = z^6 - z^3 - 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + z^3 - 2 = (z^3 - 2)(z^3 + 1)$$

이므로 $z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1$이다. $z^3 = 2$를 만족하는 해를 구하면

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

이다. 한편, $z^3 = -1$의 해는

$$z \in \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\pi + i\sin\pi, \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

이다. 결론적으로 $z^6 - z^3 - 2 = 0$일 필요충분조건은 $[z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1]$이다. 즉,

$$\begin{aligned} z \in &\left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\} \\ &\bigcup \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

따라서 구하는 해는

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

연습문제 ??

$\omega^3 = 1$을 만족하는 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$을 생각하자. 그러면, $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} &((b-a)\omega + (b-c))((b-a)\omega^2 + b - c) \\ &\qquad = (b-a)^2\omega^3 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (b-a)^2 \cdot 1 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (b-a)(b-a-b+c) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (bc - ca - ab + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\ &\qquad = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0. \end{aligned}$$

따라서 $(b-a)\omega = c - b$이거나 $(b-a)\omega^2 = c - a$이다. 두번째 식은 $(b-a)\omega^3 = (c-a)\omega$와 동치이므로 $(c-b)\omega = b - a$이다. 이로부터 $|b-a| = |c-b|$를 얻고 a와 b, a와 c를 잇는 두 선분의 사잇각은 $\pi/3$이다. 그림 0.3을 참고하라.

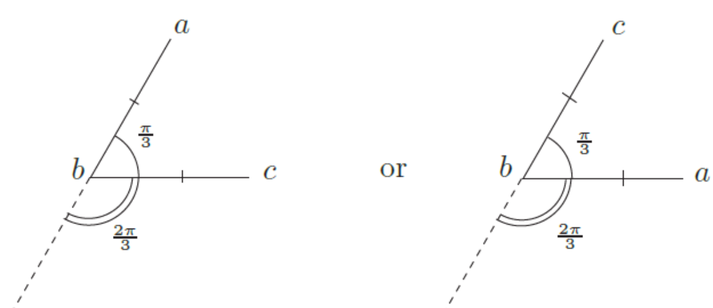


Fig. 5.4 a, b, c form an equilateral triangle.

Figure 0.3: 정삼각형을 이루는 세 점 a, b, c

두 가지 그림 모두 세 점 a, b, c는 정삼각형을 이룬다. a, b, c가 실수인 경우는 한점 $r \in \mathbb{R}$로 모이게 되어 $a = b = c = (= r)$이 되어 실수의 경우도 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

$\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$이 $\omega^3 = 1$을 만족한다고 하자. $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 또한, $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$이므로,

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \omega^k + \omega^{2k}).$$

그런데,

$$\begin{aligned}(1 + \omega^k + \omega^{2k}) &= \begin{cases} 1+1+1, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 1+\omega+\omega^2, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 1+\omega^2+\omega^4, & k \equiv 2 \mod 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 2 \mod 3. \end{cases}\end{aligned}$$

에서

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = 3 \cdot \left(\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} \right).$$

다른 방법으로 보면,

$$\begin{aligned}(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} &= 2^{3n} + (-\omega^2)^{3n} + (-\omega)^{3n} \\ &= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n \\ &= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

그림 0.4와 같이 평면위의 네 점 A, B, C, D를 복소수 a, b, c, d에 각각 대응시키자. AB'은 A를 중심으로 하여 AB를 반시계방향으로 $90°$회전한 것이므로 B'은 복소수 $a - i(b - a)$에 대응된다. P는 BB'의 중점이므로 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{a + b - i(b - a)}{2}.$$

같은 방법으로 Q, R, S는 각각 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{b + c - i(c - b)}{2}, \quad \frac{c + d - i(d - c)}{2}, \quad \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

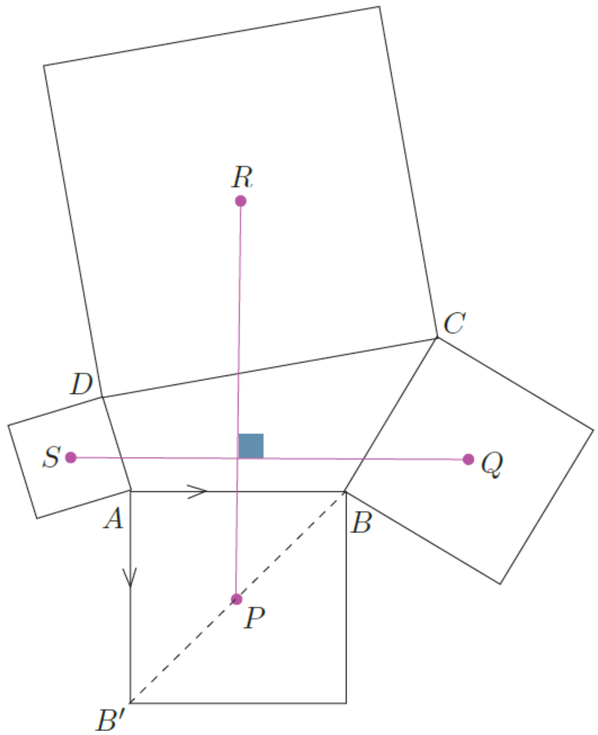


Fig. 5.5 RP and SQ have equal lengths and meet at right angles.

Figure 0.4: RP와 SQ는 길이가 같고 수직으로 만난다

점 P, Q, R, S에 대응되는 복소수를 각각 p, q, r, s라 하면,

$$\begin{aligned} i(q-s) &= i\left(\frac{b+c-i(c-b)}{2} - \frac{d+a-i(a-d)}{2}\right) \\ &= \frac{-b+c-a+d+i(b+c-d-a)}{2} \\ &= \frac{-a-b+i(b-a)}{2} + \frac{c+d-i(d-c)}{2} = -p+r \end{aligned}$$

이므로, $|q-s| = |p-r|$이 되어 $\ell(QS) = \ell(PR)$이다. 또한, i를 곱하는 것은 원점을 중심으로 90° 회전을 의미하기 때문에 $PR \perp QS$이다.

연습문제 ??

실수 x_1, x_2, y_1, y_2에 대하여 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$라 하자. 그러면 $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 = i(x_1y_2 + y_1x_2)$이고,

$$\begin{aligned} |z_1z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + y_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(y_2^2+x_2^2) = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \\
&= |z_1|^2|z_2|^2.
\end{aligned}
$$

$|z_1|, |z_2|, |z_1z_2|$는 모두 음이 아닌 실수 이므로 $|z_1||z_2| = |z_1||z_2|$가 성립한다.

연습문제 ??

$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하자. 그러면,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x-iy} = x - i(-y) = x+iy = z.$$

또한,

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2+i(-xy+xy) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

끝으로,

$$
\begin{aligned}
\frac{z+\bar{z}}{2} &= \frac{x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z), \\
\frac{z-\bar{z}}{2i} &= \frac{\cancel{x}+iy-\cancel{x}+iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).
\end{aligned}
$$

연습문제 ??

$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면,

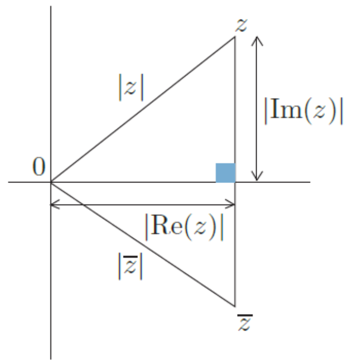
$$
\begin{aligned}
|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{x^2+(-y)^2} = |x-iy| = |\bar{z}|, \\
|\operatorname{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|, \\
|\operatorname{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|.
\end{aligned}
$$

$\bar{z}$는 z를 실수축에 대칭시켜 얻어지며, $0 \in \mathbb{R}$이므로 원점과 z와의 거리는 $\bar{z}$와의 거리와 같다. 즉, $|z| = |\bar{z}|$. 부등식 $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$와 $|\operatorname{Im}(z)| \le |z|$는 아래 그림에서 직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 길다는 것을 의미한다.

연습문제 ??

우선 $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| = |a||z| < 1\cdot 1 = 1$이므로, $\bar{a}z \ne 1$이고,

$$
\begin{aligned}
\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)} &= \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} = \frac{z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}} \\
&= \frac{|z|^2-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2|z|^2}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 + |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.
\end{aligned}
$$

따라서 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \underbrace{\dfrac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}}_{\geq 0\ (|z|<1, |a|<1\text{ 이므로})} \leq 1 - 0 = 1.$

연습문제 ??

$w \in \mathbb{C}$가 $p(w) = 0$, 즉, $c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d = 0$을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \bar{0} = 0$$

이고, 모든 c_k $(0 \leq k \leq d)$가 실수이므로

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \overline{c_0} + \overline{c_1 w} + \cdots + \overline{c_d w^d} \\
&= \overline{c_0} + \overline{c_1}\,\overline{w} + \cdots + \overline{c_d}\,\overline{w^d} = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d.
\end{aligned}
$$

마지막 등식에서

$$\overline{w^k} = \underbrace{\overline{w \cdots w}}_{k\text{번}} = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = (\bar{w})^k, \quad 1 \leq k \leq d$$

를 사용하였다. 따라서, $0 = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d = p(\bar{w})$.

연습문제 ??

$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$라고 하자. 단, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. 그러면,

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|b|(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &= |a||b|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) \end{aligned}$$

이고 $\operatorname{Im}(a\bar{b}) = |a||b|(-(\cos\alpha)(\sin\beta) + (\sin\alpha)(\cos\beta)) = |a||b|\sin(\alpha-\beta)$. 0, a, b를 꼭지점으로 하는 ΔOAB의 면적은 ($O \equiv 0$, $A \equiv a$, $B \equiv b$)

$$\frac{1}{2}\ell(OA)\ell(OB)\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}|a|\cdot|b|\cdot|\sin(\alpha-\beta)| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(a\bar{b})| = \left|\frac{\operatorname{Im}(a\bar{b})}{2}\right|.$$

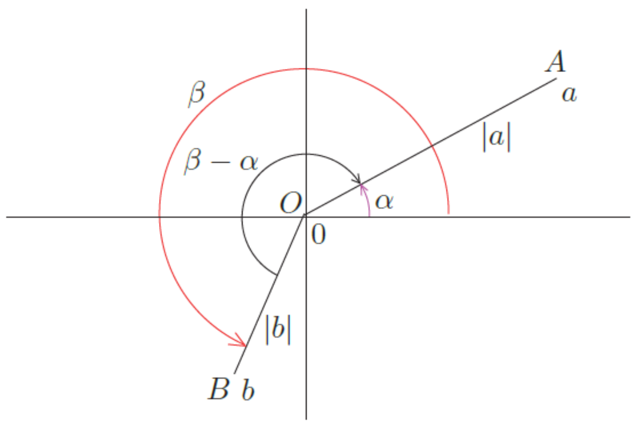


Figure 0.5: 0, a, b를 꼭지점으로 하는 ΔOAB의 면적

연습문제 ??

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$w := i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}} = -i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}}.$$

한편, 정사각행렬 $M = [m_{ij}]$에 대하여,

$$\det M = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot m_{i\sigma(i)},$$

여기서, S_n은 $\{1, \ldots, n\}$에 대한 모든 치환(permutation)의 집합이다.

$$\overline{\det M} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \overline{m_{i\sigma(i)}} = \det \overline{M},$$

여기서, $\overline{M}$은 M의 모든 원소에 대하여 켤레복소수를 취한 것이다. 따라서,

$$\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \\ 1 & \overline{z_3} & z_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix},$$

마지막 등식은 두번째 열과 세번째 열을 바꾼 것이다. 종합하면,

$$\begin{aligned} \overline{i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = -i \cdot \overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} &= -i \cdot \left(-\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix} \right) \\ &= i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

따라서, w는 켤레복소수와 동일하므로 실수이다.

연습문제 ??

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + &|z_1 - z_2|^2 \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &\quad + z_1\overline{z_1} + z_1 \cdot (-\overline{z_2}) + (-z_2) \cdot \overline{z_1} + (-z_2)(-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} + \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} - \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

복소평면에서 $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$를 꼭지점으로 하는 평행사변형 P를 생각하자. 그러면, $|z_1 + z_2|$는 P의 한쪽 대각선의 길이가 되고, $|z_1 - z_2|$는 다른쪽 대각선의 길이가 된다. 또한, $|z_1|, |z_2|$는 P의 두변의 길이다. 따라서 위의 식이 의미하는 것은 "평행사변형에서 대각선 길이의 제곱의 합은 변의 길이의 제곱의 합의 두배와 같다" 이다.

연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$이므로

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \tag{0.8}$$

모든 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, 식 (0.8)에서 z_1과 z_2의 역할을 바꾸어도 성립하므로

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \tag{0.9}$$

식 0.8과 0.9로부터 $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$이다.

연습문제 ??

(1),(2),(3):

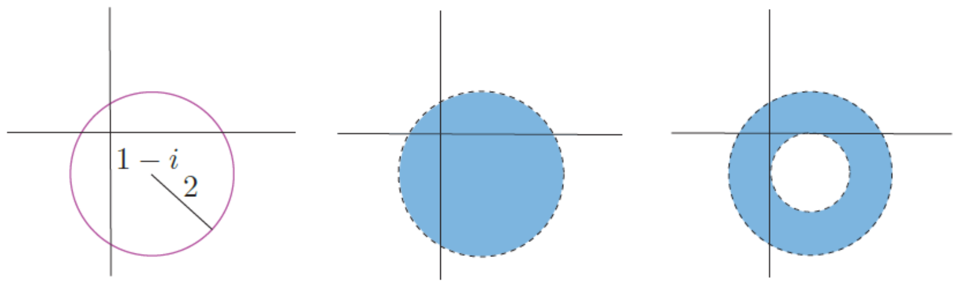
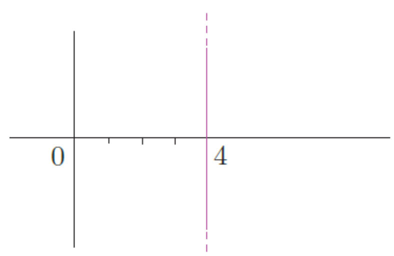


Fig. 5.7 Left to right: The set of points described by $|z-(1-i)|=2$, $|z-(1-i)|<2$ and $1<|z-(1-i)|<2$, respectively.

Figure 0.6: 왼쪽부터 $|z-(1-i)|=2$, $|z-(1-i)|<2$, $1<|z-(1-i)|<2$

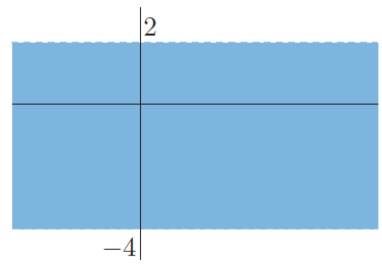
(4): $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $\mathrm{Re}(z-(1-i)) = 3$은 $x - 1 = 3$과 동치이므로, $x = 4$이다.



(5): $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $|\,\mathrm{Im}(z-(1-i))| < 3$은 $|y+1| < 3$, 즉, $-4 < y < 2$와 같다.

(6): $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-(1-i)| = |z-(1+i)|\}$는 $1-i$와 $1+i$에서 같은 거리에 있는 복소수 z의 집합이다. 따라서, $1-i$와 $1+i$을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다. 즉, 실수축이다.

(7): 방정식 $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$는 z에서 $1+i$까지의 거리와 $1-i$까지의 거리의 합이 2가 됨을 의미한다. 그런데 $1-i$와 $1+i$의 거리가 2이므로 z는 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분에 있다.



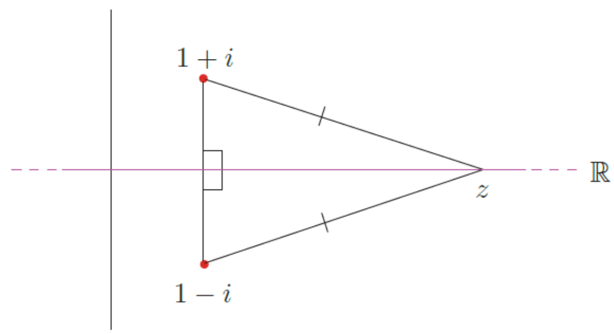


Fig. 5.8 The set of points z satisfying $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$ is $\mathbb{R}$.

Figure 0.7: $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$를 만족하는 집합은 $\mathbb{R}$

직접 계산하는 방식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다. $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ &\geq |y+1| + |y-1| \geq 1 + \cancel{y} + 1 - \cancel{y} = 2 \end{aligned}$$

이므로 $|y+1| + |y-1| = 2$이고, $x = 1$이다.

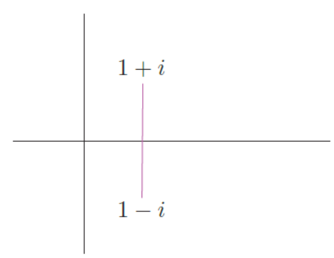


Fig. 5.9 The set of points z satisfying $|z-(1-i)|+|z-(1+i)| = 2$ is the line segment joining $1-i$ to $1+i$.

Figure 0.8: $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$를 만족하는 집합은 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분이다.

(8): 방정식 $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 3$을 만족하는 집합은 초점이 $1+i$와 $1-i$인 타원 E이 된다. 따라서, $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-(1-i)| + |z-(1+i)| < 3\}$은 타원 E의 내부가 된다.

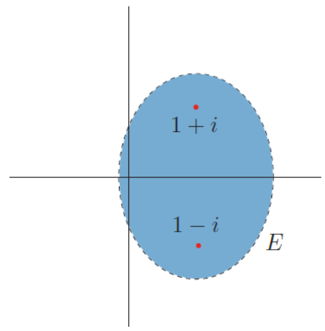


Fig. 5.10 The set of points z satisfying $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$ is the interior of the ellipse E.

Figure 0.9: $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$을 만족하는 집합은 타원 E의 내부이다.

연습문제 ??

$z \neq 0$에 대하여 $p(z) = z^d\left(c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|c_{d-1}|}{n} + \cdots + \frac{|c_1|}{n^{d-1}} + \frac{|c_0|}{n^d}\right) = 0$$

이므로, 다음을 만족하도록 충분히 큰 N을 잡을 수 있다.

$$\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} < \frac{|c_d|}{2}.$$

그러면 $|z| > N =: R$에 대하여

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |z^d|\left|c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right| \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left|\frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right|\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_1|}{|z|^{d-1}} + \frac{|c_0|}{|z|^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d\left(|c_d| - \frac{|c_d|}{2}\right) = \underbrace{\frac{|c_d|}{2}}_{=:M}|z|^d.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$(\Leftarrow)$:

실수열 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$가 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다고 하자. 그러면, 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여, 충분히 큰 N이 존재하여 $n > N$이면

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

을 만족하게 할 수 있고,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= \sqrt{(\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L))^2 + (\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 L로 수렴한다.

$(\Rightarrow)$:

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다고 가정하자. $n > N$이면 $|z - L| < \epsilon$이 되도록 하는 N을 잡을 수 있다. 그러면 모든 $n > N$에 대하여,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| &= |\mathrm{Re}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon, \\ |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| &= |\mathrm{Im}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

이 되어 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다.

연습문제 ??

$(\Rightarrow)$:

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다고 가정하자. 그러면 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다. 따라서 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(-\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$은 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $-\mathrm{Im}(L)$로 수렴한다. 즉, $(\mathrm{Re}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(\overline{L})$과 $\mathrm{Im}(\overline{L})$로 수렴한다. 결론적으로 $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다.

$(\Leftarrow)$:

$(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다고 하자. 앞의 증명에서 $(\overline{(\overline{z_n})})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{(\overline{L})}$로 수렴한다. 다시 쓰면, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다.

연습문제 ??

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{C}$의 코시수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| &= |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m|, \\ |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(z_m)| &= |\mathrm{Im}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m| \end{aligned}$$

이므로 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$도 코시수열이다. $\mathbb{R}$의 완비성으로부터 두 수열은 수렴한다. 각각 $a, b \in \mathbb{R}$로 수렴한다고 하자. 그러면 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 $\mathbb{C}$에서 $a + ib$로 수렴한다. 따라서 $\mathbb{C}$는 완비공간이다.

연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$와 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. $\delta = \epsilon > 0$으로 잡으면, $|z - z_0| < \delta$일 때,

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon$$

을 만족한다. 따라서 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$는 z_0에서 연속이고, $z_0 \in \mathbb{C}$는 임의로 선택할 수 있으므로 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$는 $\mathbb{C}$에서 연속이다.

연습문제 ??

$U := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$이라 하자. U의 여집합을 $F := U^C$로 쓰자. F에 정의된 수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{C}$에서 L로 수렴한다면,

$$\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n) \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{0.10}$$

이고 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다. 따라서, $(\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$도 수렴하며 극한은 $\operatorname{Re}(L) \cdot \operatorname{Im}(L)$이 된다. 식 (0.10)으로부터 $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1$이므로 $L \in F$이다. 결론적으로 F는 닫힌집합이고, 그 여집합인 U는 열린집합이 된다.

이제 U가 영역이 아님을 보이자. 우선 영역이라고 가정하자. 그러면 $\gamma(a) = 2 + 2i \in U$와 $\gamma(b) = -2 - 2i \in U$을 잇는 (계단형) 경로 $\gamma : [a, b] \to U$가 존재한다. 함수 $z \mapsto \operatorname{Re}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$가 연속이므로, $t \overset{\varphi}{\mapsto} \operatorname{Re}(\gamma(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}$도 연속이다.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \operatorname{Re}(\gamma(a)) = \operatorname{Re}(2 + 2i) = 2, \\ \varphi(b) &= \operatorname{Re}(\gamma(b)) = \operatorname{Re}(-2 - 2i) = -2. \end{aligned}$$

그런데, $\varphi(a) = 2 > 0 > -2 = \varphi(b)$이므로, 중간값정리에 의해 $0 = \varphi(t_*) = \operatorname{Re}(\gamma(t_*))$를 만족하는 $t_* \in [a, b]$가 존재한다. 한편, $\operatorname{Re}(\gamma(t_*)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \not> 1$ 이므로 $\gamma(t_*) \notin U$이다. 이는 U가 경로연결된 집합이라는 가정에 모순이 되어, U는 영역이 될 수 없다.

연습문제 ??

D가 열린집합이므로 이를 실수축에 대칭시킨 D^*도 열린집합이다. $w_1, w_2 \in D^*$라 하면, $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in D$이다. D가 영역이므로 $\gamma(a) = \overline{w_1}$, $\gamma(b) = \overline{w_2}$이고 모든 $t \in [a, b]$에 대하여 $\gamma(t) \in D$인 계단형 경로 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$가 존재한다. 이제 $\gamma^* : [a, b] \to \mathbb{C}$를 $\gamma^*(t) = \overline{\gamma(t)}$로 정의하자. 그러면 $\gamma^*(a) = \overline{\overline{w_1}} = w_1$, $\gamma^*(b) = \overline{\overline{w_2}} = w_2$이고, 모든 $t \in [a, b]$에 대하여 $\gamma^*(t) \in D^*$이다. γ^*는 연속함수 γ와 $z \mapsto \bar{z}$의 합성함수이므로 연속이다. γ가 계단형 경로이므로, $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $\gamma\big|_{[t_k, t_{k+1}]}$는 실수부 또는 허수부가 상수인

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$$

가 존재한다. 마찬가지로 $\gamma^*\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$도 실수부 또는 허수부가 상수이다. (실수부는 $\gamma\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$의 실수부와 같고 허수부는 $\gamma\big|_{[t_k,t_{k+1}]}$의 허수부에 마이너스 부호를 붙인 것과 같다.) 따라서, γ^*도 계단형 경로이고, D^*는 경로연결된 집합이다.

D^*는 열린집합이고 경로연결된 집합이므로 영역이 된다.

연습문제 ??

$$\begin{aligned}
&\exp\left(i\frac{9\pi}{2}\right) = \exp\left(i\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1(0 + i\cdot 1) = i,\\
&\exp(3+\pi i) = e^3(\cos\pi + i\sin\pi) = e^3(-1 + i\cdot 0) = -e^3.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $e^x(\cos y + i\sin y) = \pi i$를 만족해야 한다. 양변의 절대값을 취하면 $e^x = \pi$이므로 $x = \log\pi$이다. 따라서 $\cos y + i\sin y = i$가 되어 $\sin y = 1$, $\cos y = 0$을 만족한다. 따라서 $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$이다. 그림 0.10을 참고하라.

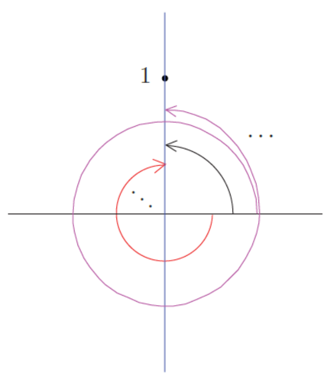


Fig. 5.11 Possible values of y when $\cos y + i\sin y = i$ are given by $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Figure 0.10: $\cos y + i\sin y = i$를 만족하는 y는 $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$로 주어진다.

$\exp z = \pi i$라면,

$$z \in \left\{\log\pi + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

역으로 어떤 $k \in \mathbb{Z}$에 대하여 $z \in \log\pi + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$라면,

$$\exp z = e^{\log\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \pi(0 + i\cdot 1) = \pi i.$$

결론적으로 $\exp z = \pi i$일 필요충분조건은 $z \in \left\{\log\pi + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$이다.

연습문제 ??

$\gamma(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$라고 하자. 그러면,

$$\gamma(t) = \exp(it) = e^0 (\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t.$$

점 $(\cos t, \sin t)$는 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 1인 원 위에 있고 t가 증가함에 따라 반시계방향으로 움직인다. 따라서 곡선 $t \mapsto \gamma(t)$는 반시계방향으로 도는 원이 된다. 그림 0.11을 참고하라.

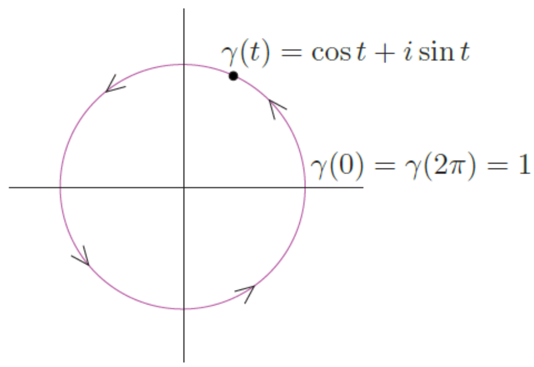


Fig. 5.12 The curve $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Figure 0.11: 곡선 $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$

연습문제 ??

$\exp(t + it) = e^t(\cos t + i \sin t)$이므로 곡선은 $t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$로 주어진다. 대강의 그림을 그려보면 0.12와 같다. 나선형 곡선이 되며, $t \searrow -\infty$일 때 $(e^t \cos t, e^t \sin t)$는 0으로 수렴하고, $t \nearrow +\infty$일 때 나선형의 바깥으로 발산한다.

연습문제 ??

$$\exp(z^2) = \exp\left((x + iy)^2\right) = \exp\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i \sin(2xy))$$

이므로 $|\exp(z^2)| = e^{x^2-y^2}$, $\mathrm{Re}(\exp(z^2)) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$, $\mathrm{Im}(\exp(z^2)) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$이다.

$z \neq 0$에 대하여

$$\begin{aligned}\exp \frac{1}{z} &= \exp\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \exp\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) \\ &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left(\cos\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) + i \sin\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right)\end{aligned}$$

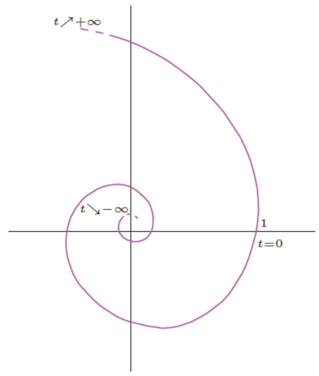


Fig. 5.13 The image of the line $y = x$ under the map $z = x + iy \mapsto \exp z$.

Figure 0.12: 함수 $z = x + iy \mapsto \exp z$에 의한 직선 $y = x$의 상

이므로

$$\begin{aligned}
\left|\exp \frac{1}{z}\right| &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, \\
\mathrm{Re}\left(\exp \frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right), \\
\mathrm{Im}\left(\exp \frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$\begin{aligned}
&(\sin z_1)(\cos z_2) + (\cos z_1)(\sin z_2) \\
&\qquad = \left(\frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i}\right)\left(\frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2}\right)\left(\frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i}\right) \\
&\qquad = \frac{2\exp(i(z_1+z_2)) - 2\exp(-i(z_1+z_2))}{4i} = \sin(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면,

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x+iy) = (\cos x)(\cos(iy)) - (\sin x)(\sin(iy)) \\
&= (\cos x)\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos x)(\cosh y) - (\sin x)\left(-\frac{\sinh y}{i}\right) \\
&= (\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y).
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= (\cos x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2(\sinh y)^2 \\
&= (1-(\sin x)^2)(\cosh y)^2 + (\sin x)^2\left(\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}\right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2\left(\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4} - 1\right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2((\cosh y)^2 - 1) \\
&= (\cosh y)^2 - \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} + \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} - (\sin x)^2 \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2.
\end{aligned}
$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $\cos z = 3$은 다음과 동치이다.

$$(\cos x)(\cosh y) = 3, \tag{0.11}$$
$$(\sin x)(\sinh y) = 0. \tag{0.12}$$

여기서 $\sinh y = 0$는 $y = 0$와 동치이다. 그런데 $y = 0$는 불가능하다. 왜냐하면, $z = x + iy = x$가 실수가 되는데 $\cos x = 3$을 만족하는 실수 x는 없기 때문이다. 그러므로 식 (0.12)에서 $\sin x = 0$이다. 따라서 $x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. 한편, $\cos x = \pm 1$이고, 모든 $y \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$$

이므로 식 (0.11)에서 $\cos x$는 -1이 될 수 없다. 결론적으로 $x \in \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$이고 $\cos x = 1$이다. 이제 $\cosh y = 3$에서

$$\frac{e^y + y^{-y}}{2} = 3.$$

즉, $(e^y)^2 - 6e^y + 1 = 0$.

$$e^y = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

에서 $y = \log(3 + 2\sqrt{2})$ 또는

$$y = \log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \log\frac{9-8}{3+2\sqrt{2}} = \log\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = -\log\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

이므로 $z \in \{2\pi n \pm i\log(3+2\sqrt{2}), n \in \mathbb{Z}\}$.

역으로, 어떤 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $z = 2\pi n \pm i \log\big(3+2\sqrt{2}\big)$라면,

$$\begin{aligned}\cos z &= \underbrace{(\cos(2\pi n))}_{=1}(\cosh(\pm(3 \pm 2sqrt2))) - i\,\underbrace{(\sin(2\pi n))}_{=0}(\sinh\cdots))\\ &= \cosh\Big(\pm(3\pm 2\sqrt{2})\Big) = \frac{e^{\log\left(3+2\sqrt{2}\right)} + e^{-\log\left(3+2\sqrt{2}\right)}}{2}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}+(3+2\sqrt{2})^{-1}}{2}\frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{2} = 3.\end{aligned}$$

종합하면, $\cos z = 3$일 필요충분조건은 $z \in \{2\pi n \pm i\log\big(3+2\sqrt{2}\big), n \in \mathbb{Z}\}$이다.

연습문제 ??

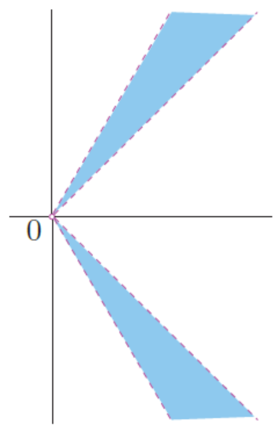


Fig. 5.14 The set $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ \frac{\pi}{4} < |\mathrm{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\right\}$.

Figure 0.13: $\left\{z \in \mathbb{C}\ :\ z \neq 0, \dfrac{\pi}{4} < |\,\mathrm{Arg}(z)| < \dfrac{\pi}{3}\right\}$

연습문제 ??

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(1+i) &= \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(1\cdot\exp(i\pi)) = \log 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi,$$

$$\operatorname{Log}(1) = \operatorname{Log}(1 \cdot \exp(i0) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

$z = -1$이면, $\operatorname{Log}(z^2) = \operatorname{Log}((-1)^2) = \operatorname{Log}(1) = 0$인 반면, $2 \cdot \operatorname{Log}(z) = 2 \cdot \operatorname{Log}(-1) = 2 \cdot i\pi$. 따라서 $z = -1$일 때,

$$\operatorname{Log}(z^2) = 0 \neq 2 \cdot i\pi = 2 \cdot \operatorname{Log}(z).$$

연습문제 ??

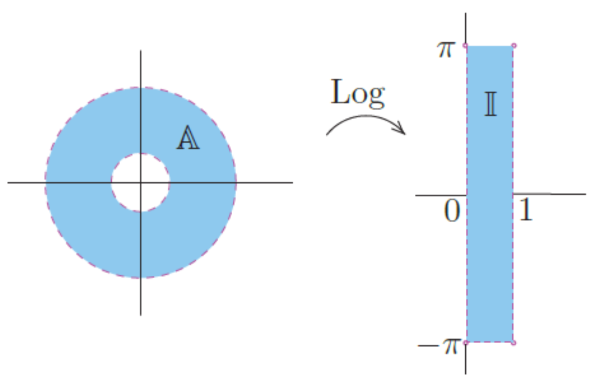
$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < z < e\}$라 하면, $z \in \mathbb{A}$일 필요충분조건은 $z = r\exp(i\operatorname{Arg}(z))$이고 $1 < r < e$, $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$이다. 이런 z에 대하여

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(r\exp(i\operatorname{Arg}(z))) = \log r + i\operatorname{Arg}(z)$$

이고 $0 = \log 1 < \log r < \log e = 1$이다. 따라서 상은 직사각형

$$\mathbb{I} := \{x + iy \,:\, 0 < x < 1, -\pi < y < \pi\}$$

가 된다.



역으로, $x + iy \in \mathbb{I}$이면, $z := \exp(x + iy) = e^x\exp(iy) \in \mathbb{A}$이다. 왜냐하면, $|z| = e^x \in (1, e)$이고 $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(e^x\exp(iy)) = \log e^x + iy = x + iy$이기 때문이다. 따라서 $\mathbb{A}$의 Log함수에 대한 상은 정확히 $\mathbb{I}$와 일치한다.

연습문제 ??

$(1+i)^{1-i}$의 주치는 $\exp((1-i)\operatorname{Log}(1+i))$이다.

$$\operatorname{Log}(1+i) = \operatorname{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

따라서 $(1+i)^{1-i}$의 주치를 계산하면,

$$\begin{aligned}\exp((1-i)\operatorname{Log}(1+i)) &= \exp\left((1-i)\left(\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= e^{\log\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\log\sqrt{2}\right)\\ &= e^{\frac{\pi}{4}}(1+i)\left(\cos\left(\log\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\log\sqrt{2}\right)\right).\end{aligned}$$

2장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$z \neq 0$에 대하여

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0=\frac{|z|^2-0}{z-0}=\frac{|z|^2}{z}.$$

주어진 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \epsilon$으로 잡으면, $0 < |z-0| = |z| < \delta$일 때,

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0\right| = \left|\frac{|z|^2}{z}\right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta = \epsilon.$$

따라서 f는 0에서 복소미분가능하고 $f'(0)=0$이다.

연습문제 ??

$w_0 \in \mathbb{D}^*$라 하자. 그러면 $\overline{w_0} \in D$이다. f가 D에서 복소해석함수이므로, 주어진 $\epsilon > 0$에 대응하는 $\delta > 0$가 존재하여, $0 < |z-\overline{w_0}| < \delta$이면 $z \in D$와

$$\left|\frac{f(z)-f(\overline{w_0})}{z-\overline{w_0}}-f'(\overline{w_0})\right| < \epsilon \tag{0.13}$$

를 만족한다. 이제 w를 $0 < |w-w_0| < \delta$로 잡으면

$$0 < |w-w_0| = |\overline{w-w_0}| = |\overline{w}-\overline{w_0}| < \delta$$

이 되어 $w \in D^*$이다. 또한,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^*(w)-f^*(w_0)}{w-w_0}-\overline{f'(\overline{w_0})}\right| &= \left|\frac{\overline{f(\overline{w})}-\overline{f(\overline{w_0})}}{w-w_0}-\overline{f'(\overline{w_0})}\right|\\ &= \left|\overline{\frac{f(\overline{w})-f(\overline{w_0})}{w-w_0}-f'(\overline{w_0})}\right|\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{f(\overline{w}) - f(\overline{w_0})}{w - w_0} - f'(\overline{w_0}) \right| < \epsilon \;\; (\text{식 } (0.13)\text{을 이용하여})$$

이 되므로, f^*는 w_0에서 복소미분가능하며 $(f^*)'(w_0) = \overline{f'(\overline{w_0})}$이다. $w_0 \in D^*$를 임의로 선택할 수 있으므로 f^*는 D^*에서 복소미분가능함수이다.

연습문제 ??

f가 z_0에서 복소미분가능하므로, 상수 $r > 0$과 함수 $h : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$가 존재하여 $|z - z_0| < r$에 대하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

로 쓸 수 있고

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$$

이다. 여기서, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$이다.

$D(z_0, r') := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r'\} \subset D(z_0, r) \subset D$과 $|h(z)| < 1$이 되도록 $r' < r$을 잡자. 이제 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여

$$\delta = \min\left\{ \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1}, r' \right\}$$

로 선택하면, $0 < |z - z_0| < \delta$일 때, $z \in D(z_0, r')$이고,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0) + h(z)||z - z_0| &\le (|f'(z_0)| + |h(z)|) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} \\ &< (|f'(z_0)| + 1) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 f는 z_0에서 연속이다.

연습문제 ??

$f, g : U \to \mathbb{C}$가 $z_0 \in U$에서 복소미분가능함을 이용하면, 보조정리 **??**로부터 $r > 0$과 $h_f, h_g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$가 존재하여 (단, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$)

$|z - z_0| < r$이면,

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h_f(z))(z - z_0), \tag{0.14}$$
$$g(z) = g(z_0) + (g'(z_0) + h_g(z))(z - z_0), \tag{0.15}$$

와 $\lim_{z \to z_0} h_f(z) = 0 = \lim_{z \to z_0} h_g(z)$를 만족한다.

(1) 식 (0.14)와 (0.15)를 더하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(f+g)(z) = (f+g)(z_0) + (f'(z_0)+g'(z_0)+h_{f+g}(z))(z-z_0)$$

를 만족한다. 단, $D(z_0,r)$에서 $h_{f+g}(z) := h_f(z)+h_g(z)$로 정의한다. 또한,

$$\lim_{z\to z_0} h_{f+g}(z) = \lim_{z\to z_0}(h_f(z)+h_g(z)) = \lim_{z\to z_0} h_f(z) + \lim_{z\to z_0} h_g(z) = 0+0=0.$$

보조정리 **??**에 의하여 $f+g$는 복소미분가능하며 $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$이다.

(2) 식 (0.14)에 α를 곱하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(\alpha\cdot f)(z) = (\alpha\cdot f)(z_0) + (\alpha\cdot f'(z_0)+h_{\alpha\cdot f}(z))(z-z_0),$$

단, $D(z_0,r)$에서 $h_{\alpha\cdot f}(z) := \alpha\cdot f(z)$이다. 또한,

$$\lim_{z\to z_0} h_{\alpha\cdot f}(z) = \lim_{z\to z_0}(\alpha\cdot h_f(z)) = \alpha\cdot\lim_{z\to z_0} h_f(z) = \alpha\cdot 0 = 0.$$

보조정리 **??**에 의하여 $\alpha\cdot f$는 복소미분가능하며 $(\alpha\cdot f)'(z_0) = \alpha\cdot f'(z_0)$이다.

(3) 식 (0.14)와 (0.15)를 곱하면, $|z-z_0|<r$에 대하여

$$(fg)(z) = (fg)(z_0) + (f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)+h_{fg}(z))(z-z_0),$$

단, $D(z_0,r)$에서

$$h_{fg}(z) := f(z_0)h_g(z)+g(z_0)h_f(z)+(z-z_0)(f'(z_0)+h_f(z))(g'(z_0)+h_g(z))$$

또한,

$$\lim_{z\to z_0} h_{fg}(z) = f(z_0)\cdot 0 + g(z_0)\cdot 0 + 0\cdot(f'(z_0)+0)\cdot(g'(z_0)+0) = 0$$

이므로 fg는 z_0에서 복소미분가능하며

$$(fg)'(z) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

연습문제 ??

$\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$가 d차의 유한차원이라고 하자. 그러면 $d+1$개의 벡터 $1, z, z^2, \ldots, z^d \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$는 일차종속이다. 따라서 모두 0은 아닌 $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$가 존재하여

$$\alpha_0\cdot 1 + \alpha_1\cdot z + \cdots + \alpha_d\cdot z^d = 0 \quad (z\in\mathbb{D})$$

을 만족한다. $k\in\{0,1,\ldots,d\}$를 $\alpha_k\neq 0$인 가장 작은 값이라 하자. 그러면, k번 미분한 값을 $0\in\mathbb{D}$에서 계산하면

$$0+\alpha_k\cdot k!+0=0$$

이므로 $\alpha_k=0$이 되어 모순이다.

연습문제 ??

$z_0 \in U$라 하자. f는 z_0에서 복소미분가능하므로 $r > 0$과 $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$에 정의된 복소함수 h가 존재하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0), \quad z \in D(z_0, r)$$

과

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = 0 \tag{0.16}$$

을 만족한다. $g := 1/f$라 하면,

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

이므로 $g(z_0) = g(z) + (f'(z_0) + h(z))g(z_0)g(z) \cdot (z - z_0)$. 정리하면

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + (-f'(z_0)g(z_0)g(z) - h(z)g(z_0)g(z))) \cdot (z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left(-\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)} \right)(z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left(-\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \varphi(z) \right) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

$z \in D(z_0, r)$에서

$$\varphi(z) := \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)}.$$

z_0에서 f의 연속성과 식 (0.16)으로부터

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \cancel{\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}} - \cancel{\frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z_0)}} - \frac{0}{f(z_0)f(z_0)} = 0.$$

따라서 g가 z_0에서 복소미분가능하며

$$g'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

연습문제 ??

$m \geq 0$인 경우는 이미 증명했으므로, $m = -n$ ($n \in \mathbb{N}$)인 경우를 생각하자. $f(z) := z^n$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)에 대하여 함수

$$z \mapsto z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{f(z)}$$

는 복소해석함수이고 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 함수값이 0은 아니므로 $1/f$도 복소해석함수이고, 미분은

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} = -\frac{nz^{n-1}}{(z^n)^2} = -n\frac{1}{z^{n+1}} = m \cdot \frac{1}{z^{-m+1}} = mz^{m-1}$$

이 되어 증명이 끝난다.

연습문제 ??

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$를

$$f(z) = -\frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

로 정의하고, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$를 $g(z) = \exp z$로 정의하자. 그러면, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} = D_g$. 따라서 $g \circ f$는 $\mathbb{D}$에서 복소해석함수이고,

$$\begin{aligned}
(g \circ g)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) &= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \frac{d}{dz}\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-(1+z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\frac{d}{dz}(1+z)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-\frac{1+z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\right) \\
&= -\frac{2}{(1-z)^2}\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right).
\end{aligned}$$

따라서, $z \in \mathbb{D}$에 대하여, $\dfrac{d}{dz}\left(\exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)\right) = -\dfrac{2}{(1-z)^2}\exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면, $|z|^2 = x^2 + y^2$. 따라서, u, v를 각각 $|z|^2$의 실수부와 허수부라 하면, $u = x^2 + y^2$, $v = 0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

$z \neq 0$이므로, x 또는 y중 하나는 0이 아니다. 즉, 코시-리만 방정식 중 적어도 하나는 만족되지 않는다.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x} =\right) 2x \neq 0 \left(= \frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{ 또는} \\
&\left(\frac{\partial u}{\partial y} =\right) 2y \neq 0 \left(= -\frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

결론적으로 $|z|^2$은 0이 아닌 점에서 미분이 불가능하다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면,

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

u, v를 각각 z^3의 실수부와 허수부라 하면,

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2,$$
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

u, v는 연속미분가능하고 (즉, $u, v \in C^1$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 이고},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

즉, $\mathbb{R}^2$의 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하므로, $z \mapsto z^3$은 전해석함수이다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$라 하면, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy) = x$. 따라서, u, v를 각각 $\mathrm{Re}(z)$의 실수부와 허수부라 하면,

$$u = x,$$
$$v = 0.$$

따라서, 모든 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

즉, 코시-리만 방정식은 $\mathbb{R}^2$의 어떤 점에서도 만족되지 않는다. 결론적으로 $\mathbb{C}$의 모든 점에서 $\mathrm{Re}(z)$는 복소미분가능하지 않다.

연습문제 ??

u, v를 각각 f의 실수부와 허수부라 하자. 그러면, $v = 0$이고,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

따라서

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{z} \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y_0) d\xi = 0$$