

복소해석학 연습문제 풀이

A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진, 허재성 譯

Update on January 7, 2023

연습문제 풀이

머리말 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

0에서 f' 의 미분이 존재하고 그 값이 L 이라고 가정하자. $\epsilon := 1 > 0$ 으로 잡으면, $0 < |x - 0| < \delta$ 이면

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\delta > 0$ 가 존재한다. 특히 $x := \delta/2$ 로 잡으면 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$ 이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L \right| = |2 - L| < \epsilon. \quad (0.1)$$

한편 $x := -\delta/2$ 로 잡아도 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$ 이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L \right| = |2 + L| < \epsilon. \quad (0.2)$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서 f' 은 0에서 미분이 불가능하다.

1장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$ 이므로, x, y 중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이고,

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - y \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right), x \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + y \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).
 \end{aligned}$$

따라서 $(x, y) \neq (0, 0)$ 에 대하여 $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \circ$ 이다.

연습문제 ??

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \circ$ 이므로, $\tan \theta \in \mathbb{R} \circ$ 이고,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - i \tan \theta} &= \frac{1}{1^2 + (\tan \theta)^2} + i \left(\frac{\tan \theta}{1^2 + (\tan \theta)^2} \right) \\
 &= \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} + i \left(\frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \right) \\
 &= \frac{(\cos \theta)^2}{1} + i \frac{(\sin \theta)(\cos \theta)}{1} = (\cos \theta)^2 + i(\sin \theta)(\cos \theta).
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} &= (1 + i \tan \theta)((\cos \theta)^2 + i(\sin \theta)(\cos \theta)) \\
 &= (\cos \theta)^2 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\sin \theta)(\cos \theta) \\
 &\quad + \left((\sin \theta)(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\cos \theta)^2 \right) \\
 &= (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + i2(\sin \theta)(\cos \theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).
 \end{aligned}$$

연습문제 ??

$P \subset \mathbb{C}$ 가 \mathbb{C} 의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면, $i \neq 0$ 이므로 조건 (P3)에 의해 $i \in P$ 이거나 ($i \notin P$ 이고 $-i \in P$)이다. 조건 (P2)에서

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \in P \tag{0.3}$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \quad (0.4)$$

가 된다. 그런데 $1 \neq 0$ 이고 $x = 1$ 이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

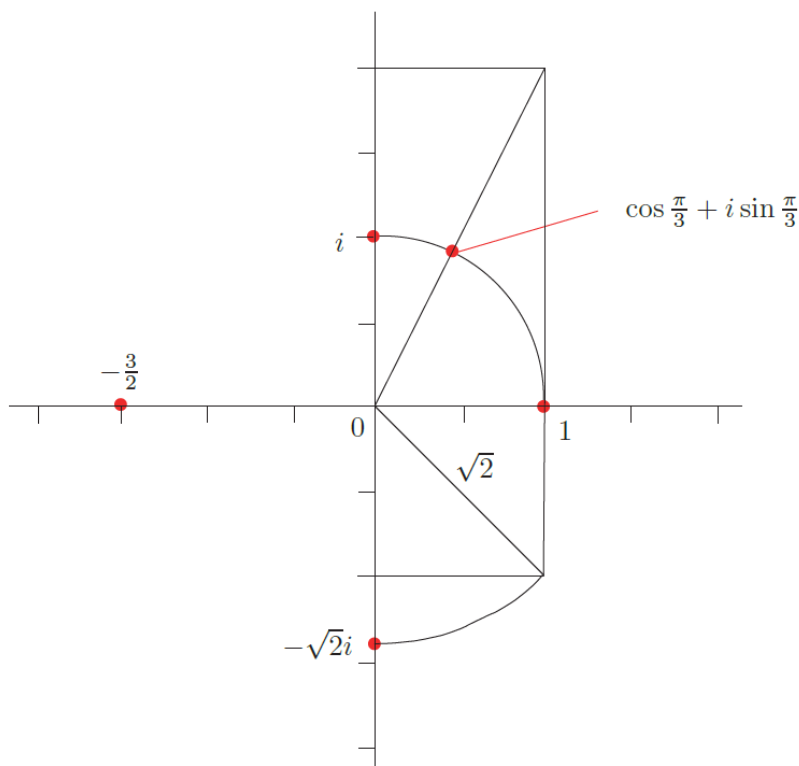


Fig. 5.2 Location of the complex numbers $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

그림 0.1: 복소수 $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ 의 위치

연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$ 이다.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= (\cos \theta + i \sin \theta) ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + i2(\cos \theta)(\sin \theta)) \\ &= (\cos \theta) ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2) - (\sin \theta)2(\cos \theta)(\sin \theta) \end{aligned}$$

$$+ i(\cdots).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) \\ &= (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta + 3 \cos \theta - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식 $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ 이 복소수 $a, b \in \mathbb{C}$ 와 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) \\ &= \operatorname{Re}((\cos \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2(i \sin \theta) + 3(\cos \theta)(i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3) \\ &= (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ 로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}(1 + i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10} = 2^5 \left(\cos \left(10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 32 \left(\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 32 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 32(0 + i \cdot 1) = 32i.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$2 + i$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2)$ 이고 $3 + i$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/3)$ 이다. 따라서, $(2 + i)(3 + i)$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$ 이다. 한편,

$$(2 + i)(3 + i) = 6 - 1 + i(2 + 3) = 5 + 5i$$

이므로 $(2 + i)(3 + i)$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로, $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 이다.

연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점 A, B, C 의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수 z_A, z_B, z_C 에 있다고 하자. $\ell(AC) = \ell(AB)$ 이고 $\angle CAB = \pi/3$ 이므로,

$$z_C - z_A = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (z_B - z_A). \quad (0.5)$$

귀류법을 쓰기위해 $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ 가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서 $p + iq = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (m + in)$ 을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \quad (0.6)$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \quad (0.7)$$

식 (0.6)에 $-n$ 을 곱하고, 식 (0.7)에 m 을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데 $m^2 + n^2 \neq 0$ 이므로 ($z_B \neq z_A$ 이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.

연습문제 ??

$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ 로 쓸 수 있다. $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 가

$$w^4 = \rho^4(\cos(4\alpha) + i \sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

를 만족해야 하므로, $\rho^4 = 1$ 에서 $\rho = 1$ 이다. 또한, $4\alpha \in \{\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \dots\}$ 에서

$$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \pm \pi, \dots \right\}.$$

따라서 $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 1 \cdot ((\cos \alpha + i \sin \alpha))$ 는 다음 집합에 속한다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}, \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}, \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned}$$

네 개의 해를 복소평면에 그려보면 그림 0.2와 같다.

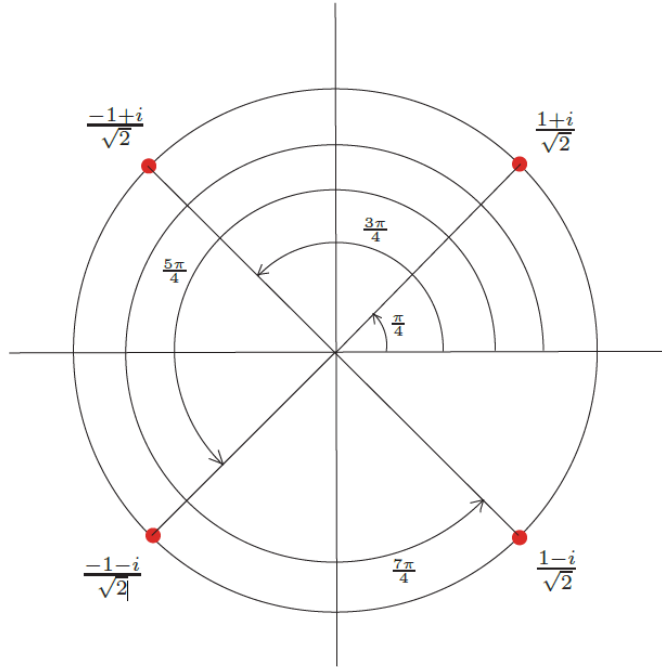


Fig. 5.3 Location of the complex numbers w that satisfy $w^4 = -1$.

그림 0.2: $w^4 = -1$ 을 만족하는 복소수 w 의 위치

연습문제 ??

방정식으로부터

$$0 = z^6 - z^3 - 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + z^3 - 2 = (z^3 - 2)(z^3 + 1)$$

이므로 $z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1$ 이다. $z^3 = 2$ 를 만족하는 해를 구하면

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

이다. 한편, $z^3 = -1$ 의 해는

$$z \in \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \pi + i \sin \pi, \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

이다. 결론적으로 $z^6 - z^3 - 2 = 0$ 일 필요충분조건은 $[z^3 = 2 \text{ 또는 } z^3 = -1]$ 이다. 즉,

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \right\} \\ \cup \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

따라서 구하는 해는

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

연습문제 ??

$\omega^3 = 1$ 을 만족하는 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 을 생각하자. 그러면, $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ 이고, $\omega \neq 1$ 이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} & ((b-a)\omega + (b-c))((b-a)\omega^2 + b-c) \\ &= (b-a)^2\omega^3 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &= (b-a)^2 \cdot 1 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &= (b-a)(b-a-b+c) + (b-c)^2 \\ &= (bc-ca-ab+a^2+b^2-2bc+c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0. \end{aligned}$$

따라서 $(b-a)\omega = c-b$ 이거나 $(b-a)\omega^2 = c-a$ 이다. 두번째 식은 $(b-a)\omega^3 = (c-a)\omega$ 와 동치이므로 $(c-b)\omega = b-a$ 이다. 이로부터 $|b-a| = |c-b|$ 를 얻고 a 와 b , a 와 c 를 잇는 두 선분의 사잇각은 $\pi/3$ 이다. 그림 0.3을 참고하라.

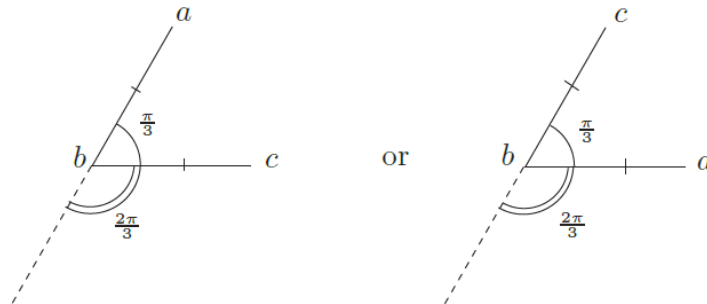


Fig. 5.4 a, b, c form an equilateral triangle.

그림 0.3: 정삼각형을 이루는 세 점 a, b, c

두 가지 그림 모두 세 점 a, b, c 는 정삼각형을 이룬다. a, b, c 가 실수인 경우는 한 점 $r \in \mathbb{R}$ 로 모이게 되어 $a = b = c (= r)$ 이 되어 실수의 경우도 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

$\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 이 $\omega^3 = 1$ 을 만족한다고 하자. $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ 이고, $\omega \neq 1$ 이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이다. 또한, $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ 이므로,

$$(1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \omega^k + \omega^{2k}).$$

그런데,

$$\begin{aligned} (1 + \omega^k + \omega^{2k}) &= \begin{cases} 1 + 1 + 1, & k \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 + \omega + \omega^2, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 + \omega^2 + \omega^4, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3, & k \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0, & k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

에서

$$(1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} = 3 \cdot \left(\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} \right).$$

다른 방법으로 보면,

$$\begin{aligned} (1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} &= 2^{3n} + (-\omega^2)^{3n} + (-\omega)^{3n} \\ &= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n \\ &= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

그림 0.4와 같이 평면위의 네 점 A, B, C, D 를 복소수 a, b, c, d 에 각각 대응시키자. AB' 은 A 를 중심으로 하여 AB 를 반시계방향으로 90° 회전한 것이므로 B' 은 복소수 $a - i(b - a)$ 에 대응된다. P 는 BB' 의 중점이므로 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{a + b - i(b - a)}{2}.$$

같은 방법으로 Q, R, S 는 각각 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{b + c - i(c - b)}{2}, \quad \frac{c + d - i(d - c)}{2}, \quad \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

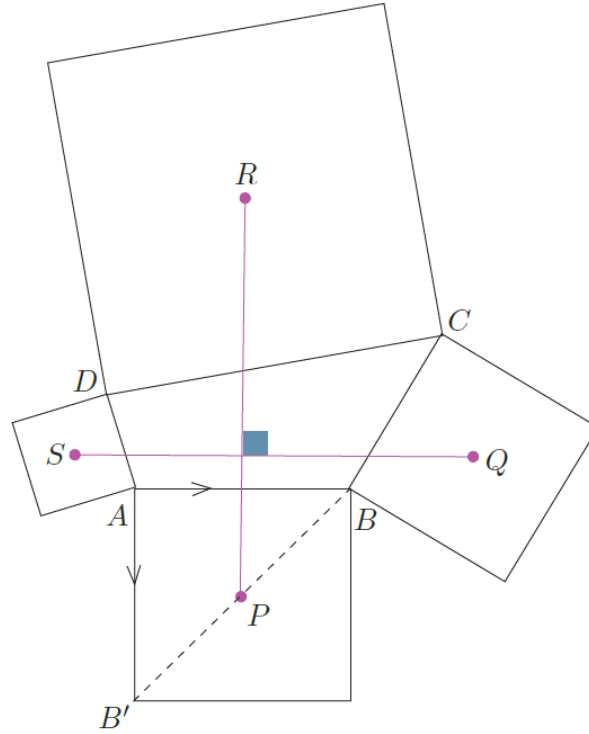


Fig. 5.5 RP and SQ have equal lengths and meet at right angles.

그림 0.4: RP 와 SQ 는 길이가 같고 수직으로 만난다

점 P, Q, R, S 에 대응되는 복소수를 각각 p, q, r, s 라 하면,

$$\begin{aligned}
 i(q - s) &= i \left(\frac{b + c - i(c - b)}{2} - \frac{d + a - i(a - d)}{2} \right) \\
 &= \frac{-b + c - a + d + i(b + c - d - a)}{2} \\
 &= \frac{-a - b + i(b - a)}{2} + \frac{c + d - i(d - c)}{2} = -p + r
 \end{aligned}$$

이므로, $|q - s| = |p - r|$ 이 되어 $\ell(QS) = \ell(PR)$ 이다. 또한, i 를 곱하는 것은 원점을 중심으로 90° 회전을 의미하기 때문에 $PR \perp QS$ 이다.

연습문제 ??

실수 x_1, x_2, y_1, y_2 에 대하여 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 라 하자. 그러면 $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 = i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ 이고,

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2|^2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2 \\
 &= x_1^2 x_2^2 - \cancel{2x_1 x_2 y_1 y_2} + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + \cancel{2x_1 y_2 y_1 x_2} + y_1^2 x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(y_2^2 + x_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2.
\end{aligned}$$

$|z_1|, |z_2|, |z_1 z_2|$ 는 모두 음이 아닌 실수 이므로 $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$ 가 성립한다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하자. 그러면,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x - iy} = x - i(-y) = x + iy = z.$$

또한,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(-xy + xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

끝으로,

$$\begin{aligned}
\frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z), \\
\frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{\cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면,

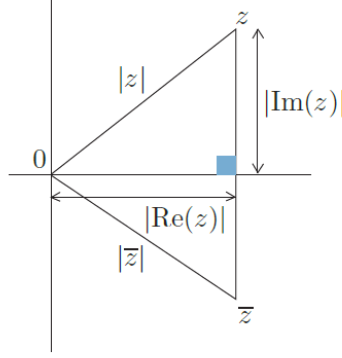
$$\begin{aligned}
|z| &= |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |x - iy| = |\bar{z}|, \\
|\operatorname{Re}(z)| &= |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|, \\
|\operatorname{Im}(z)| &= |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|.
\end{aligned}$$

\bar{z} 는 z 를 실수축에 대칭시켜 얻어지며, $0 \in \mathbb{R}$ 이므로 원점과 z 와의 거리는 \bar{z} 와의 거리와 같다. 즉, $|z| = |\bar{z}|$. 부등식 $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ 와 $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ 는 아래 그림에서 직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 길다는 것을 의미한다.

연습문제 ??

우선 $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| = |a||z| < 1 \cdot 1 = 1$ 이므로, $\bar{a}z \neq 1$ 이고,

$$\begin{aligned}
\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \cdot \overline{\left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)} &= \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{1 - a\bar{z}} = \frac{z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z}} \\
&= \frac{|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 + |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.
\end{aligned}$$

따라서 $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = 1 - \underbrace{\frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}}_{\geq 0 \text{ } (|z| < 1, |a| < 1 \text{ 이므로})} \leq 1 - 0 = 1.$

연습문제 ??

$w \in \mathbb{C}$ 가 $p(w) = 0$, 즉, $c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d = 0$ 을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\overline{c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d} = \bar{0} = 0$$

이고, 모든 c_k ($0 \leq k \leq d$)가 실수이므로

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{w} + \cdots + \bar{c}_d\bar{w}^d \\
&= \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{w} + \cdots + \bar{c}_d\overline{w^d} = c_0 + c_1\bar{w} + \cdots + c_d(\bar{w})^d.
\end{aligned}$$

마지막 등식에서

$$\bar{w}^k = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = (\bar{w})^k, \quad 1 \leq k \leq d$$

를 사용하였다. 따라서, $0 = c_0 + c_1\bar{w} + \cdots + c_d(\bar{w})^d = p(\bar{w})$.

연습문제 ??

$a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ 라고 하자. 단, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. 그러면,

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot |b|(\cos \beta - i \sin \beta) \\ &= |a||b|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta) \end{aligned}$$

이고 $\text{Im}(a\bar{b}) = |a||b|(-(\cos \alpha)(\sin \beta) + (\sin \alpha)(\cos \beta)) = |a||b| \sin(\alpha - \beta)$. 0, a , b 를 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 면적은 ($O \equiv 0$, $A \equiv a$, $B \equiv b$)

$$\frac{1}{2}\ell(OA)\ell(OB) \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| \cdot |\sin(\alpha - \beta)| = \frac{1}{2}|\text{Im}(a\bar{b})| = \left| \frac{\text{Im}(a\bar{b})}{2} \right|.$$

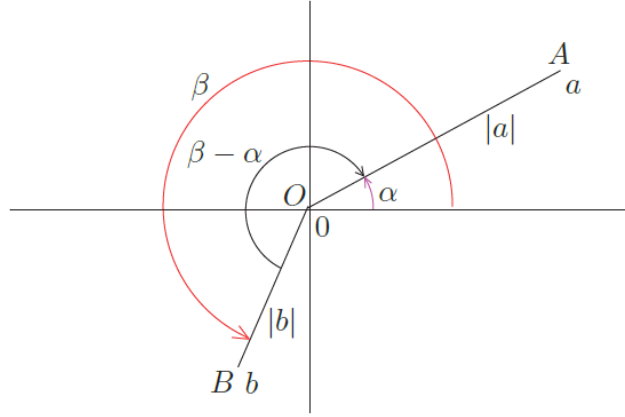


Fig. 5.6 The area of $\triangle OAB$ formed by the triangle with vertices at 0, a , b .

그림 0.5: 0, a , b 를 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 면적

연습문제 ??

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\overline{i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{bmatrix}} = -i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{bmatrix}.$$

한편, 정사각행렬 $M = [m_{ij}]$ 에 대하여,

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \cdot m_{i\sigma(i)},$$

여기서, S_n 은 $\{1, \dots, n\}$ 에 대한 모든 치환(permutation)의 집합이다.

$$\overline{\det M} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \overline{m_{i\sigma(i)}} = \det \overline{M},$$

여기서, \overline{M} 은 M 의 모든 원소에 대하여 켤레복소수를 취한 것이다. 따라서,

$$\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \\ 1 & \overline{z_3} & z_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix},$$

마지막 등식은 두번째 열과 세번째 열을 바꾼 것이다. 종합하면,

$$\begin{aligned} \overline{i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} &= -i \cdot \overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = -i \cdot \left(-\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix} \right) \\ &= i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

따라서, w 는 켤레복소수와 동일하므로 실수이다.

연습문제 ??

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &\quad + z_1 \overline{z_1} + z_1 \cdot (-\overline{z_2}) + (-z_2) \cdot \overline{z_1} + (-z_2)(-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} + \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} - \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

복소평면에서 $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$ 를 꼭지점으로 하는 평행사변형 P 를 생각하자. 그러면, $|z_1 + z_2|$ 는 P 의 한쪽 대각선의 길이가 되고, $|z_1 - z_2|$ 는 다른쪽 대각선의 길이가 된다. 또한, $|z_1|, |z_2|$ 는 P 의 두변의 길이이다. 따라서 위의 식이 의미하는 것은 “평행사변형에서 대각선 길이의 제곱의 합은 변의 길이의 제곱의 합의 두배와 같다”이다.

연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여, $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ 이므로

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \quad (0.8)$$

모든 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여, 식 (0.8)에서 z_1 과 z_2 의 역할을 바꾸어도 성립하므로

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \quad (0.9)$$

식 0.8과 0.9로부터 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ 이다.

연습문제 ??

(1),(2),(3):

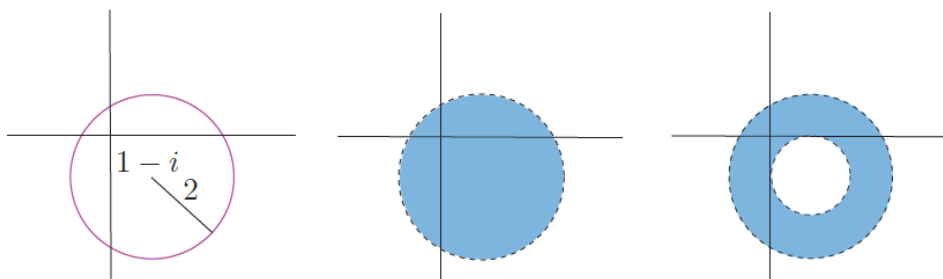
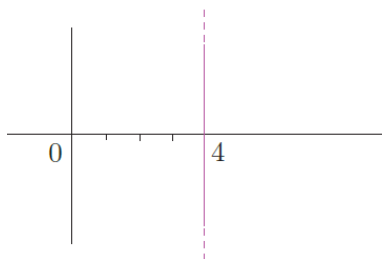


Fig. 5.7 Left to right: The set of points described by $|z - (1 - i)| = 2$, $|z - (1 - i)| < 2$ and $1 < |z - (1 - i)| < 2$, respectively.

그림 0.6: 왼쪽부터 $|z - (1 - i)| = 2$, $|z - (1 - i)| < 2$, $1 < |z - (1 - i)| < 2$

(4): $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $\operatorname{Re}(z - (1 - i)) = 3$ 은 $x - 1 = 3$ 과 동치이므로, $x = 4$ 이다.



(5): $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $|\operatorname{Im}(z - (1 - i))| < 3$ 은 $|y + 1| < 3$, 즉, $-4 < y < 2$ 와 같다.

(6): $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|\}$ 는 $1 - i$ 와 $1 + i$ 에서 같은 거리에 있는 복소수 z 의 집합이다. 따라서, $1 - i$ 와 $1 + i$ 을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다. 즉, 실수축이다.

(7): 방정식 $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$ 는 z 에서 $1 + i$ 까지의 거리와 $1 - i$ 까지의 거리의 합이 2가 됨을 의미한다. 그런데 $1 - i$ 와 $1 + i$ 의 거리가 2이므로 z 는 $1 - i$ 와 $1 + i$ 를 잇는 선분에 있다.

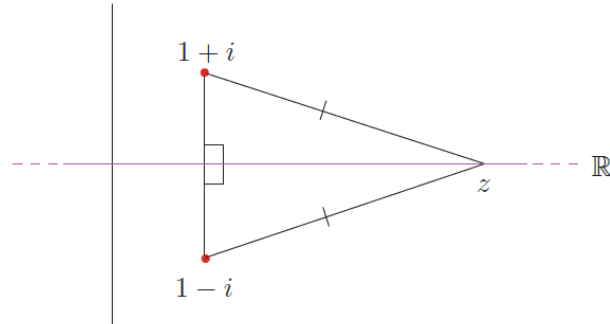
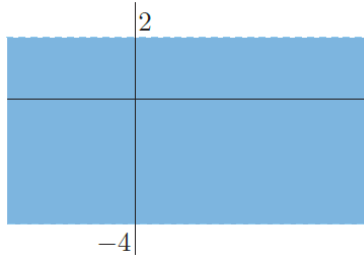


Fig. 5.8 The set of points z satisfying $|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$ is \mathbb{R} .

그림 0.7: $|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$ 를 만족하는 집합은 \mathbb{R}

직접 계산하는 방식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &\geq |y+1| + |y-1| \geq 1 + y + 1 - y = 2 \end{aligned}$$

이므로 $|y+1| + |y-1| = 2$ 이고, $x = 1$ 이다.

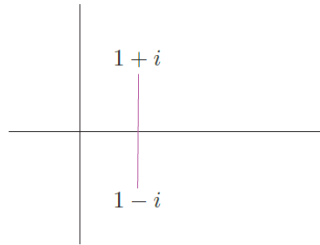


Fig. 5.9 The set of points z satisfying $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$ is the line segment joining $1 - i$ to $1 + i$.

그림 0.8: $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$ 를 만족하는 집합은 $1 - i$ 와 $1 + i$ 를 잇는 선분이다.

(8): 방정식 $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 3$ 을 만족하는 집합은 초점이 $1 + i$ 와 $1 - i$ 인 타원 E 이 된다. 따라서, $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3\}$ 은 타원 E 의 내부가 된다.

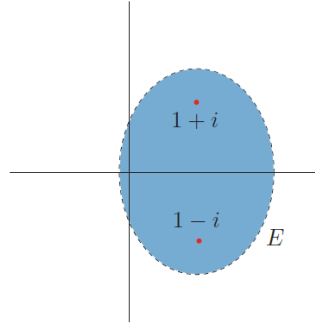


Fig. 5.10 The set of points z satisfying $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3$ is the interior of the ellipse E .

그림 0.9: $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3$ 을 만족하는 집합은 타원 E 의 내부이다.

연습문제 ??

$z \neq 0$ 에 대하여 $p(z) = z^d \left(c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|c_{d-1}|}{n} + \cdots + \frac{|c_1|}{n^{d-1}} + \frac{|c_0|}{n^d} \right) = 0$$

이므로, 다음을 만족하도록 충분히 큰 N 을 잡을 수 있다.

$$\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} < \frac{|c_d|}{2}.$$

그러면 $|z| > N =: R$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z|^d \left| c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right| \\ &\geq |z|^d \left(|c_d| - \left| \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right| \right) \\ &\geq |z|^d \left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_1|}{|z|^{d-1}} + \frac{|c_0|}{|z|^d} \right) \right) \\ &\geq |z|^d \left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} \right) \right) \\ &\geq |z|^d \left(|c_d| - \frac{|c_d|}{2} \right) = \underbrace{\frac{|c_d|}{2}}_{=: M} |z|^d. \end{aligned}$$

연습문제 ??

(\Leftarrow) :

실수열 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 가 각각 $\operatorname{Re}(L)$ 과 $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다고 하자. 그러면, 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대하여, 충분히 큰 N 이 존재하여 $n > N$ 이면

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

을 만족하게 할 수 있고,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L))^2 + (\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 은 L 로 수렴한다.

(\Rightarrow) :

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 L 로 수렴한다고 가정하자. $n > N$ 이면 $|z_n - L| < \epsilon$ 이 되도록 하는 N 을 잡을 수 있다. 그러면 모든 $n > N$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| &= |\operatorname{Re}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon, \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| &= |\operatorname{Im}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

이 되어 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각 $\operatorname{Re}(L)$ 과 $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다.

연습문제 ??

(\Rightarrow) :

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 L 로 수렴한다고 가정하자. 그러면 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각 $\operatorname{Re}(L)$ 과 $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 따라서 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(-\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 은 각각 $\operatorname{Re}(L)$ 과 $-\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 즉, $(\operatorname{Re}(\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각 $\operatorname{Re}(\bar{L})$ 과 $\operatorname{Im}(\bar{L})$ 로 수렴한다. 결론적으로 $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 \bar{L} 로 수렴한다.

(\Leftarrow) :

$(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 \bar{L} 로 수렴한다고 하자. 앞의 증명에서 $((\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 (\bar{L}) 로 수렴한다. 다시 쓰면, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 L 로 수렴한다.

연습문제 ??

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 \mathbb{C} 의 코시수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| &= |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m|, \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z_m)| &= |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| \end{aligned}$$

이므로 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 도 코시수열이다. \mathbb{R} 의 완비성으로부터 두 수열은 수렴한다. 각각 $a, b \in \mathbb{R}$ 로 수렴한다고 하자. 그러면 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 은 \mathbb{C} 에서 $a + ib$ 로 수렴한다. 따라서 \mathbb{C} 는 완비공간이다.

연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$ 와 $\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자. $\delta = \epsilon > 0$ 으로 잡으면, $|z - z_0| < \delta$ 일 때,

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon$$

을 만족한다. 따라서 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 는 z_0 에서 연속이고, $z_0 \in \mathbb{C}$ 는 임의로 선택할 수 있으므로 $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 는 \mathbb{C} 에서 연속이다.

연습문제 ??

$U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$ 이라 하자. U 의 여집합을 $F := U^C$ 로 쓰자. F 에 정의된 수열 $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 \mathbb{C} 에서 L 로 수렴한다면,

$$\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n) \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (0.10)$$

이고 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각 $\operatorname{Re}(L)$ 과 $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 따라서, $(\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 도 수렴하며 극한은 $\operatorname{Re}(L) \cdot \operatorname{Im}(L)$ 이 된다. 식 (0.10)으로부터 $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1$ 이므로 $L \in F$ 이다. 결론적으로 F 는 닫힌집합이고, 그 여집합인 U 는 열린집합이 된다.

이제 U 가 영역이 아님을 보이자. 우선 영역이라고 가정하자. 그러면 $\gamma(a) = 2 + 2i \in U$ 와 $\gamma(b) = -2 - 2i \in U$ 를 잇는 (계단형) 경로 $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ 가 존재한다. 함수 $z \mapsto \operatorname{Re}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 연속이므로, $t \mapsto \operatorname{Re}(\gamma(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 도 연속이다.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \operatorname{Re}(\gamma(a)) = \operatorname{Re}(2 + 2i) = 2, \\ \varphi(b) &= \operatorname{Re}(\gamma(b)) = \operatorname{Re}(-2 - 2i) = -2. \end{aligned}$$

그런데, $\varphi(a) = 2 > 0 > -2 = \varphi(b)$ 이므로, 중간값정리에 의해 $0 = \varphi(t_*) = \operatorname{Re}(\gamma(t_*))$ 를 만족하는 $t_* \in [a, b]$ 가 존재한다. 한편, $\operatorname{Re}(\gamma(t_*)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \not> 1$ 이므로 $\gamma(t_*) \notin U$ 이다. 이는 U 가 경로연결된 집합이라는 가정에 모순이 되어, U 는 영역이 될 수 없다.

연습문제 ??

D 가 열린집합이므로 이를 실수축에 대칭시킨 D^* 도 열린집합이다. $w_1, w_2 \in D^*$ 라 하면, $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in D$ 이다. D 가 영역이므로 $\gamma(a) = \overline{w_1}$, $\gamma(b) = \overline{w_2}$ 이고 모든 $t \in [a, b]$ 에 대하여 $\gamma(t) \in D$ 인 계단형 경로 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재한다. 이제 $\gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 를 $\gamma^*(t) = \overline{\gamma(t)}$ 로 정의하자. 그러면 $\gamma^*(a) = \overline{\overline{w_1}} = w_1$, $\gamma^*(b) = \overline{\overline{w_2}} = w_2$ 이고, 모든 $t \in [a, b]$ 에 대하여 $\gamma^*(t) \in D^*$ 이다. γ^* 는 연속함수 γ 와 $z \mapsto \bar{z}$ 의 합성함수이므로 연속이다. γ 가 계단형 경로이므로, $k = 0, 1, \dots, n$ 에 대하여 $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 는 실수부 또는 허수부가 상수인

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$$

가 존재한다. 마찬가지로 $\gamma^*|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 도 실수부 또는 허수부가 상수이다. (실수부는 $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 의 실수부와 같고 허수부는 $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 의 허수부에 마이너스 부호를 붙인 것과 같다.) 따라서, γ^* 도 계단형 경로이고, D^* 는 경로연결된 집합이다.

D^* 는 열린집합이고 경로연결된 집합이므로 영역이 된다.

연습문제 ??

$$\begin{aligned}\exp\left(i\frac{9\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1(0 + i \cdot 1) = i, \\ \exp(3 + \pi i) &= e^3(\cos\pi + i\sin\pi) = e^3(-1 + i \cdot 0) = -e^3.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $e^x(\cos y + i\sin y) = \pi i$ 를 만족해야 한다. 양변의 절대값을 취하면 $e^x = \pi$ 이므로 $x = \log \pi$ 이다. 따라서 $\cos y + i\sin y = i$ 가 되어 $\sin y = 1$, $\cos y = 0$ 을 만족한다. 따라서 $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)이다. 그림 0.10을 참고하라.

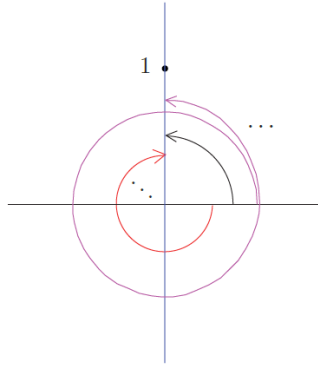


Fig. 5.11 Possible values of y when $\cos y + i\sin y = i$ are given by $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

그림 0.10: $\cos y + i\sin y = i$ 를 만족하는 y 는 $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)로 주어진다.

$\exp z = \pi i$ 라면,

$$z \in \left\{ \log \pi + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

역으로 어떤 $k \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $z \in \log \pi + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$ 라면,

$$\exp z = e^{\log \pi} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right) = \pi(0 + i \cdot 1) = \pi i.$$

결론적으로 $\exp z = \pi i$ 일 필요충분조건은 $z \in \left\{ \log \pi + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$ 이다.

연습문제 ??

$\gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ 라고 하자. 그러면,

$$\gamma(t) = \exp(it) = e^0 (\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t.$$

점 $(\cos t, \sin t)$ 는 중심이 $(0, 0)$ 이고 반지름이 1인 원 위에 있고 t 가 증가함에 따라 반시계방향으로 움직인다. 따라서 곡선 $t \mapsto \gamma(t)$ 는 반시계방향으로 도는 원이 된다. 그림 0.11을 참고하라.

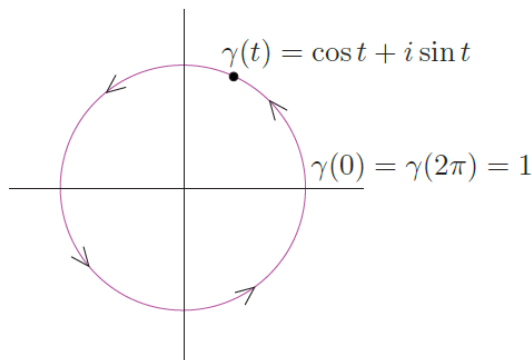


Fig. 5.12 The curve $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

그림 0.11: 곡선 $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$

연습문제 ??

$\exp(t + it) = e^t(\cos t + i \sin t)$ 이므로 곡선은 $t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$ 로 주어진다. 대강의 그림을 그려 보면 0.12와 같다. 나선형 곡선이 되며, $t \searrow -\infty$ 일 때 $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ 는 0으로 수렴하고, $t \nearrow +\infty$ 일 때 나선형의 바깥으로 발산한다.

연습문제 ??

$$\exp(z^2) = \exp((x + iy)^2) = \exp(x^2 - y^2 + 2xyi) = e^{x^2 - y^2}(\cos(2xy) + i \sin(2xy))$$

이므로 $|\exp(z^2)| = e^{x^2 - y^2}$, $\operatorname{Re}(\exp(z^2)) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$, $\operatorname{Im}(\exp(z^2)) = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$ 이다.

$z \neq 0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \exp \frac{1}{z} &= \exp \left(\frac{1}{x + iy} \right) = \exp \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} \left(\cos \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + i \sin \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) \end{aligned}$$

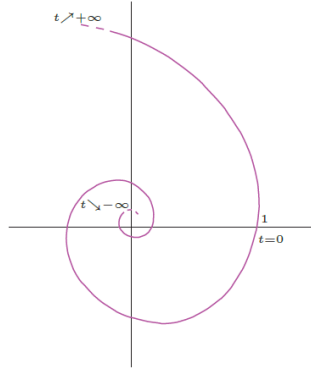


Fig. 5.13 The image of the line $y = x$ under the map $z = x + iy \mapsto \exp z$.

그림 0.12: 함수 $z = x + iy \mapsto \exp z$ 에 의한 직선 $y = x$ 의 상

이므로

$$\begin{aligned} \left| \exp \frac{1}{z} \right| &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, \\ \operatorname{Re} \left(\exp \frac{1}{z} \right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right), \\ \operatorname{Im} \left(\exp \frac{1}{z} \right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} &(\sin z_1)(\cos z_2) + (\cos z_1)(\sin z_2) \\ &= \left(\frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i} \right) \left(\frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2} \right) \left(\frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i} \right) \\ &= \frac{2 \exp(i(z_1 + z_2)) - 2 \exp(-i(z_1 + z_2))}{4i} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면,

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = (\cos x)(\cos(iy)) - (\sin x)(\sin(iy)) \\ &= (\cos x) \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2} \right) - (\sin x) \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos x)(\cosh y) - (\sin x) \left(-\frac{\sinh y}{i} \right) \\
&= (\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y).
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= (\cos x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2(\sinh y)^2 \\
&= (1 - (\sin x)^2)(\cosh y)^2 + (\sin x)^2 \left(\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} \right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2 \left(\frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} - 1 \right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2((\cosh y)^2 - 1) \\
&= (\cosh y)^2 - \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} + \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} - (\sin x)^2 \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)이라 하면, $\cos z = 3$ 은 다음과 동치이다.

$$(\cos x)(\cosh y) = 3, \quad (0.11)$$

$$(\sin x)(\sinh y) = 0. \quad (0.12)$$

여기서 $\sinh y = 0$ 는 $y = 0$ 와 동치이다. 그런데 $y = 0$ 는 불가능하다. 왜냐하면, $z = x + iy = x$ 가 실수가 되는데 $\cos x = 3$ 을 만족하는 실수 x 는 없기 때문이다. 그러므로 식 (0.12)에서 $\sin x = 0$ 이다. 따라서 $x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. 한편, $\cos x = \pm 1$ 이고, 모든 $y \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$$

이므로 식 (0.11)에서 $\cos x$ 는 -1 이 될 수 없다. 결론적으로 $x \in \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ 이고 $\cos x = 1$ 이다.

이제 $\cosh y = 3$ 에서

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 3.$$

$$\text{즉, } (e^y)^2 - 6e^y + 1 = 0.$$

$$e^y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

에서 $y = \log(3 + 2\sqrt{2})$ 또는

$$y = \log(3 - 2\sqrt{2}) = \log \frac{9 - 8}{3 + 2\sqrt{2}} = \log \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = -\log(3 + 2\sqrt{2})$$

이므로 $z \in \{2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2}), n \in \mathbb{Z}\}$.

역으로, 어떤 $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $z = 2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2})$ 라면,

$$\begin{aligned}\cos z &= \underbrace{(\cos(2\pi n))}_{=1} (\cosh(\pm(3 \pm 2\sqrt{2}))) - i \underbrace{(\sin(2\pi n))}_{=0} (\sinh \cdots) \\ &= \cosh(\pm(3 \pm 2\sqrt{2})) = \frac{e^{\log(3+2\sqrt{2})} + e^{-\log(3+2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2} + (3 + 2\sqrt{2})^{-1}}{2} \frac{3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}}{2} = 3.\end{aligned}$$

종합하면, $\cos z = 3$ 일 필요충분조건은 $z \in \{2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2}), n \in \mathbb{Z}\}$ 이다.

연습문제 ??

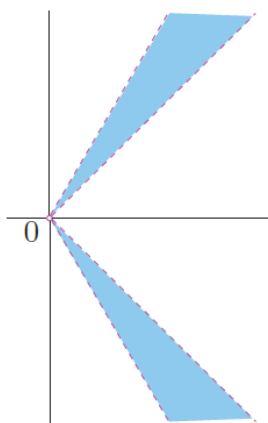


Fig. 5.14 The set $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \frac{\pi}{4} < |\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\}$.

그림 0.13: $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \frac{\pi}{4} < |\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\right\}$

연습문제 ??

$$\begin{aligned}\text{Log}(1 + i) &= \text{Log}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \text{Log}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \text{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$$\text{Log}(-1) = \text{Log}(1 \cdot \exp(i\pi)) = \log 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi,$$

$$\operatorname{Log}(1) = \operatorname{Log}(1 \cdot \exp(i0)) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

$z = -1$ 이면, $\operatorname{Log}(z^2) = \operatorname{Log}((-1)^2) = \operatorname{Log}(1) = 0$ 인 반면, $2 \cdot \operatorname{Log}(z) = 2 \cdot \operatorname{Log}(-1) = 2 \cdot i\pi$. 따라서 $z = -1$ 일 때,

$$\operatorname{Log}(z^2) = 0 \neq 2 \cdot i\pi = 2 \cdot \operatorname{Log}(z).$$

연습문제 ??

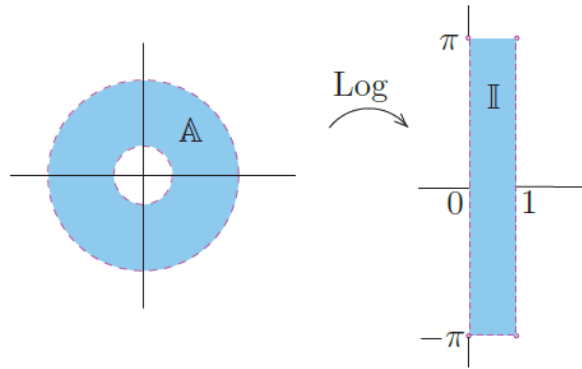
$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < z < e\}$ 라 하면, $z \in \mathbb{A}$ 일 필요충분조건은 $z = r \exp(i \operatorname{Arg}(z))$ 이고 $1 < r < e$, $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ 이다. 이런 z 에 대하여

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(r \exp(i \operatorname{Arg}(z))) = \log r + i \operatorname{Arg}(z)$$

이고 $0 = \log 1 < \log r < \log e = 1$ 이다. 따라서 상은 직사각형

$$\mathbb{I} := \{x + iy : 0 < x < 1, -\pi < y < \pi\}$$

가 된다.



역으로, $x + iy \in \mathbb{I}$ 이면, $z := \exp(x + iy) = e^x \exp(iy) \in \mathbb{A}$ 이다. 왜냐하면, $|z| = e^x \in (1, e)$ 이고 $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(e^x \exp(iy)) = \log e^x + iy = x + iy$ 이기 때문이다. 따라서 \mathbb{A} 의 Log 함수에 대한 상은 정확히 \mathbb{I} 와 일치한다.

연습문제 ??

$(1 + i)^{1-i}$ 의 주치는 $\exp((1 - i) \operatorname{Log}(1 + i))$ 이다.

$$\operatorname{Log}(1 + i) = \operatorname{Log}\left(\sqrt{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

따라서 $(1+i)^{1-i}$ 의 주치를 계산하면,

$$\begin{aligned}
 \exp((1-i)\operatorname{Log}(1+i)) &= \exp\left((1-i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
 &= e^{\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right) \\
 &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\log\sqrt{2}\right) \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}}(1+i)\left(\cos\left(\log\sqrt{2}\right) - i\sin\left(\log\sqrt{2}\right)\right).
 \end{aligned}$$

2장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$z \neq 0$ 에 대하여

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} - 0 = \frac{|z|^2 - 0}{z - 0} = \frac{|z|^2}{z}.$$

주어진 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $\delta = \epsilon$ 으로 잡으면, $0 < |z - 0| = |z| < \delta$ 일 때,

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} - 0 \right| = \left| \frac{|z|^2}{z} \right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta = \epsilon.$$

따라서 f 는 0에서 복소미분가능하고 $f'(0) = 0$ 이다.

연습문제 ??

$w_0 \in \mathbb{D}^*$ 라 하자. 그러면 $\overline{w_0} \in D$ 이다. f 가 D 에서 복소해석함수이므로, 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대응하는 $\delta > 0$ 가 존재하여, $0 < |z - \overline{w_0}| < \delta$ 이면 $z \in D$ 와

$$\left| \frac{f(z) - f(\overline{w_0})}{z - \overline{w_0}} - f'(\overline{w_0}) \right| < \epsilon \quad (0.13)$$

를 만족한다. 이제 w 를 $0 < |w - w_0| < \delta$ 로 잡으면

$$0 < |w - w_0| = |\overline{w} - \overline{w_0}| = |\overline{w} - \overline{w_0}| < \delta$$

이 되어 $w \in D^*$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f^*(w) - f^*(w_0)}{w - w_0} - \overline{f'(\overline{w_0})} \right| &= \left| \frac{\overline{f(\overline{w})} - \overline{f(\overline{w_0})}}{w - w_0} - \overline{f'(\overline{w_0})} \right| \\
 &= \left| \frac{\overline{f(\overline{w}) - f(\overline{w_0})}}{w - w_0} - \overline{f'(\overline{w_0})} \right|
 \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{f(\overline{w}) - f(\overline{w_0})}{w - w_0} - f'(\overline{w_0}) \right| < \epsilon \quad (\text{식 (0.13)을 이용하여})$$

이 되므로, f^* 는 w_0 에서 복소미분가능하며 $(f^*)'(w_0) = \overline{f'(\overline{w_0})}$ 이다. $w_0 \in D^*$ 를 임의로 선택할 수 있으므로 f^* 는 D^* 에서 복소미분가능함수이다.

연습문제 ??

f 가 z_0 에서 복소미분가능하므로, 상수 $r > 0$ 과 함수 $h : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재하여 $|z - z_0| < r$ 에 대하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

로 쓸 수 있고

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$$

이다. 여기서, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ 이다.

$D(z_0, r') := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r'\} \subset D(z_0, r) \subset D$ 과 $|h(z)| < 1$ 이 되도록 $r' < r$ 을 잡자. 이제 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대하여

$$\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1}, r' \right\}$$

로 선택하면, $0 < |z - z_0| < \delta$ 일 때, $z \in D(z_0, r')$ 이고,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f'(z_0) + h(z)||z - z_0| \leq (|f'(z_0)| + |h(z)|) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} \\ &< (|f'(z_0)| + 1) \frac{\epsilon}{|f'(z_0)| + 1} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 f 는 z_0 에서 연속이다.

연습문제 ??

$f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가 $z_0 \in U$ 에서 복소미분가능함을 이용하면, 보조정리 ??로부터 $r > 0$ 과 $h_f, h_g : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재하여 (단, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$)

$|z - z_0| < r$ 이면,

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h_f(z))(z - z_0), \quad (0.14)$$

$$g(z) = g(z_0) + (g'(z_0) + h_g(z))(z - z_0), \quad (0.15)$$

와 $\lim_{z \rightarrow z_0} h_f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} h_g(z)$ 를 만족한다.

(1) 식 (0.14)와 (0.15)를 더하면, $|z - z_0| < r$ 에 대하여

$$(f + g)(z) = (f + g)(z_0) + (f'(z_0) + g'(z_0) + h_{f+g}(z))(z - z_0)$$

를 만족한다. 단, $D(z_0, r)$ 에서 $h_{f+g}(z) := h_f(z) + h_g(z)$ 로 정의한다. 또한,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h_{f+g}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (h_f(z) + h_g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} h_f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} h_g(z) = 0 + 0 = 0.$$

보조정리 ??에 의하여 $f + g$ 는 복소미분가능하며 $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ 이다.

(2) 식 (0.14)에 α 를 곱하면, $|z - z_0| < r$ 에 대하여

$$(\alpha \cdot f)(z) = (\alpha \cdot f)(z_0) + (\alpha \cdot f'(z_0) + h_{\alpha \cdot f}(z))(z - z_0),$$

단, $D(z_0, r)$ 에서 $h_{\alpha \cdot f}(z) := \alpha \cdot h_f(z)$ 이다. 또한,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h_{\alpha \cdot f}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha \cdot h_f(z)) = \alpha \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} h_f(z) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

보조정리 ??에 의하여 $\alpha \cdot f$ 는 복소미분가능하며 $(\alpha \cdot f)'(z_0) = \alpha \cdot f'(z_0)$ 이다.

(3) 식 (0.14)와 (0.15)를 곱하면, $|z - z_0| < r$ 에 대하여

$$(fg)(z) = (fg)(z_0) + (f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) + h_{fg}(z))(z - z_0),$$

단, $D(z_0, r)$ 에서

$$h_{fg}(z) := f(z_0)h_g(z) + g(z_0)h_f(z) + (z - z_0)(f'(z_0) + h_f(z))(g'(z_0) + h_g(z))$$

또한,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h_{fg}(z) = f(z_0) \cdot 0 + g(z_0) \cdot 0 + 0 \cdot (f'(z_0) + 0) \cdot (g'(z_0) + 0) = 0$$

이므로 fg 는 z_0 에서 복소미분가능하며

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

연습문제 ??

$\text{Hol}(\mathbb{D})$ 가 d 차의 유한차원이라고 하자. 그러면 $d + 1$ 개의 벡터 $1, z, z^2, \dots, z^d \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ 는 일차종속이다. 따라서 모두 0은 아닌 $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ 가 존재하여

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot z + \dots + \alpha_d \cdot z^d = 0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

을 만족한다. $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ 를 $\alpha_k \neq 0$ 인 가장 작은 값이라 하자. 그러면, k 번 미분한 값을 $0 \in \mathbb{D}$ 에서 계산하면

$$0 + \alpha_k \cdot k! + 0 = 0$$

이므로 $\alpha_k = 0$ 이 되어 모순이다.

연습문제 ??

$z_0 \in U$ 라 하자. f 는 z_0 에서 복소미분가능하므로 $r > 0$ 과 $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$ 에 정의된 복소함수 h 가 존재하여

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0), \quad z \in D(z_0, r)$$

과

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0 \quad (0.16)$$

을 만족한다. $g := 1/f$ 라 하면,

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$$

이므로 $g(z_0) = g(z) + (f'(z_0) + h(z))g(z_0)g(z) \cdot (z - z_0)$. 정리하면

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + (-f'(z_0)g(z_0)g(z) - h(z)g(z_0)g(z)) \cdot (z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left(-\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)} \right) (z - z_0) \\ &= g(z_0) + \left(-\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} + \varphi(z) \right) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

$z \in D(z_0, r)$ 에서

$$\varphi(z) := \frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2} - \frac{f'(z_0)}{f(z_0)f(z)} - \frac{h(z)}{f(z_0)f(z)}.$$

z_0 에서 f 의 연속성과 식 (0.16)으로부터

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \frac{\cancel{f'(z_0)}}{\cancel{(f(z_0))^2}} - \frac{\cancel{f'(z_0)}}{\cancel{f(z_0)f(z_0)}} - \frac{0}{f(z_0)f(z_0)} = 0.$$

따라서 g 가 z_0 에서 복소미분가능하며

$$g'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}.$$

연습문제 ??

$m \geq 0$ 인 경우는 이미 증명했으므로, $m = -n$ ($n \in \mathbb{N}$)인 경우를 생각하자. $f(z) := z^n$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)에 대하여 함수

$$z \mapsto z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{f(z)}$$

는 복소해석함수이고 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 함수값이 0은 아니므로 $1/f$ 도 복소해석함수이고, 미분은

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} = -\frac{nz^{n-1}}{(z^n)^2} = -n \frac{1}{z^{n+1}} = m \cdot \frac{1}{z^{-m+1}} = mz^{m-1}$$

이 되어 증명이 끝난다.

연습문제 ??

$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 를

$$f(z) = -\frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

로 정의하고, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를 $g(z) = \exp z$ 로 정의하자. 그러면, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} = D_g$. 따라서 $g \circ f$ 는 \mathbb{D} 에서 복소해석함수이고,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z) &= g'(f(z)) \cdot f'(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \frac{d}{dz}\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-(1+z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{1-z}\frac{d}{dz}(1+z)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \left(-\frac{1+z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\right) \\ &= -\frac{2}{(1-z)^2} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right). \end{aligned}$$

따라서, $z \in \mathbb{D}$ 에 대하여, $\frac{d}{dz}\left(\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)\right) = -\frac{2}{(1-z)^2} \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$.

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)라 하면, $|z|^2 = x^2 + y^2$. 따라서, u, v 를 각각 $|z|^2$ 의 실수부와 허수부라 하면, $u = x^2 + y^2, v = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

$z \neq 0$ 이므로, x 또는 y 중 하나는 0이 아니다. 즉, 코시-리만 방정식 중 적어도 하나는 만족되지 않는다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} =\right) 2x \neq 0 \left(= \frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{ 또는} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} =\right) 2y \neq 0 \left(= -\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

결론적으로 $|z|^2$ 은 0이 아닌 점에서 미분이 불가능하다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)라 하면,

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

u, v 를 각각 z^3 의 실수부와 허수부라 하면,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^3 - 3xy^2, \\ v(x, y) &= 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

u, v 는 연속미분가능하고 (즉, $u, v \in C^1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 2y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 이고,} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

즉, \mathbb{R}^2 의 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하므로, $z \mapsto z^3$ 은 전해석함수이다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)라 하면, $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) = x$. 따라서, u, v 를 각각 $\operatorname{Re}(z)$ 의 실수부와 허수부라 하면,

$$\begin{aligned} u &= x, \\ v &= 0. \end{aligned}$$

따라서, 모든 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

즉, 코시-리만 방정식은 \mathbb{R}^2 의 어떤 점에서도 만족되지 않는다. 결론적으로 \mathbb{C} 의 모든 점에서 $\operatorname{Re}(z)$ 는 복소미분가능하지 않다.

연습문제 ??

u, v 를 각각 f 의 실수부와 허수부라 하자. 그러면, $v = 0$ 이고,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

따라서 $(x_0, y_0) \in D$ 과 $(x, y_0) \in D$ 를 잇는 직선이 D 내부에 있을 때, 이 직선을 따라 적분하면

$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_0) d\xi = 0.$$

같은 방법으로 $(x_0, y_0) \in D$ 과 $(x, y) \in D$ 를 잇는 직선이 D 내부에 있을 때,

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta) d\eta = 0.$$

즉, D 의 내부에서 수평선 또는 수직선을 따라 움직이는 동안 u 의 값은 변하지 않는다. 그런데 D 가 경로연결 집합이므로 u 는 D 에서 상수이다. (왜냐하면, D 에 속하는 임의의 두점은 계단형 경로로 연결할 수 있기 때문이다.) 따라서 $f = u + i0 = u$ 는 D 에서 상수이다.

연습문제 ??

u, v 가 각각 f 의 실수부와 허수부라고 하자. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ 이면 D 에서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

이고 코시-리만 방정식을 이용하면

$$\frac{\partial u}{\partial y} \left(= -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \frac{\partial v}{\partial y} \left(= \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

따라서 $(x_0, y_0) \in D$ 과 $(x, y_0) \in D$ 를 잇는 직선이 D 내부에 있을 때, 이 직선을 따라 적분하면

$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_0) d\xi = 0.$$

같은 방법으로 $(x_0, y_0) \in D$ 과 $(x_0, y) \in D$ 를 잇는 직선이 D 내부에 있을 때,

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta) d\eta = 0.$$

연습문제 ??에서와 같이 D 의 내부에서 수평선 또는 수직선을 따라 움직이는 동안 u 의 값은 변하지 않는다. 그런데 D 가 경로연결 집합이므로 u 는 D 에서 상수이다. (왜냐하면, D 에 속하는 임의의 두점은 계단형 경로로 연결할 수 있기 때문이다.) 따라서 $f = u + iv$ 는 D 에서 상수이다.

연습문제 ??

연쇄법칙으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = h'(v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

코시-리만 방정식을 적용하면

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = h'(v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= h'(v(x, y)) \cdot \left(h'(v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right) = (h'(v(x, y)))^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\
&= -(h'(v(x, y)))^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)
\end{aligned}$$

이므로 $(1 + (h'(v(x, y)))^2) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$. $(1 + (h'(v(x, y)))^2) \geq 0 > 1$ 로부터

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

코시-리만 방정식을 다시 적용하면

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

도 얻으며, 이로부터

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = h'(v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = h'(v(x, y)) \cdot 0 = 0$$

이고 코시-리만 방정식을 한번 더 적용하면,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0.$$

이제 모든 편도함수가 0이 되므로, u 는 수평, 수직방향을 따라 상수이다. D 가 영역이므로, 경로연결 집합이고, 임의의 두 점이 계단형 경로로 연결가능하다. 따라서 u 는 D 에서 상수함수이다. 같은 방법으로, v 도 D 에서 상수함수이며, $f = u + iv$ 도 상수함수가 된다.

연습문제 ??

(\Leftarrow)

$k = 2$ 라고 하면,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + (iy)^2 + 2x(iy) = (x + iy)^2 = z^2.$$

예제 ??에 의하여 f 는 전해석함수이다.

(\Rightarrow)

이제 f 가 전해석함수라고 가정하자. 그러면 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족해야 하므로, 모든 $x, y \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = kx = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

특히 $x = 1$ 로 잡으면, $k = 2$ 을 얻는다.

연습문제 ??

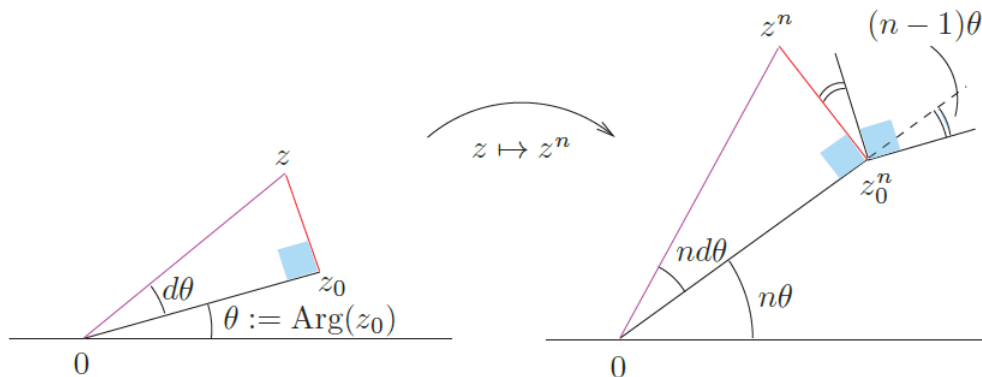
$z - z_0$ 의 길이가 $|z_0| \tan(d\theta) \approx |z_0| d\theta$ 이므로 $z^n - z_0^n$ 의 길이는 $|z_0|^n \tan(nd\theta) \approx |z_0|^n nd\theta$ 이다.
따라서 국소적으로 $z \mapsto z^n$ 에 의한 확대비율은

$$\frac{|z^n - z_0^n|}{|z - z_0|} \approx \frac{|z_0|^n nd\theta}{|z_0| d\theta} = n|z_0|^{n-1}$$

이고, 그림에 따르면 반시계방향으로 $(n-1)\theta$ 만큼 회전한 변환이다.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= n|z_0|^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta)) \\ &= n(|z_0|(\cos \theta + i \sin \theta))^{n-1} = nz_0^{n-1}. \end{aligned}$$

결론적으로, 모든 \mathbb{C} 에 대하여 $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$.



연습문제 ??

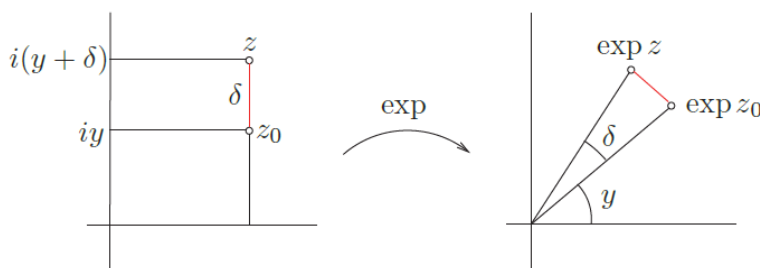


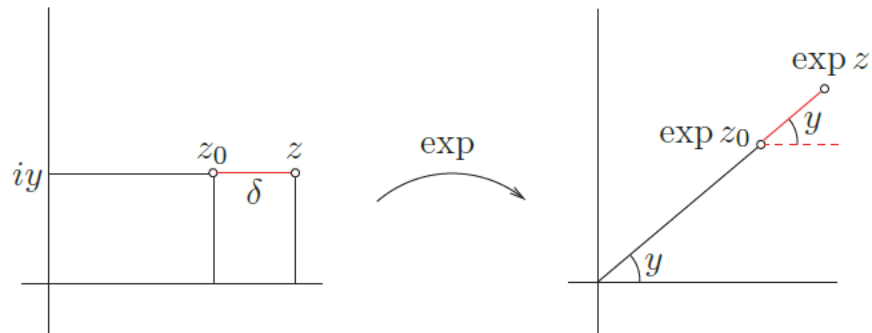
Fig. 5.15 Calculation of the amount of local magnification produced by exp.

그림 0.14: exp 함수에 의한 국소적인 확대비율

그림 0.14에서 확대비율은

$$\frac{e^x \cdot \delta}{\delta} = e^x$$

이다. 아래 그림과 같이 반시계방향으로 y 만큼 회전하는 변환이므로 z_0 에서 복소미분은 $e^x(\cos y + i \sin y) = \exp(x + iy)$, 즉, $\exp' z = \exp z$ 이다.



연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$ 에 대하여, z_0 를 기울기 1인 직선을 따라 δ 만큼 움직인 점을 z 라고 하자. 유사한 방법으로 z_0 를 수평선을 따라 왼쪽으로 δ 만큼 이동한 점을 \tilde{z} 라고 하자. 실수부를 취하는 함수 $\text{Re}(\cdot)$ 가 z_0 에서 미분가능하다고 가정하자. 그림 0.15에서 z 와 \tilde{z} 를 $\text{Re}(\cdot)$ 로 보낸 점을 보면 국소적으로 각각 45° 와 0° 회전한 것으로 다른 회전량을 갖는다. 이는 일어날 수 없는 경우로 복소미분가능하다는 가정에 모순이다. $z_0 \in \mathbb{C}$ 의 선택을 임의로 할 수 있으므로 이 함수는 모든 점에서 복소미분불가능하다.

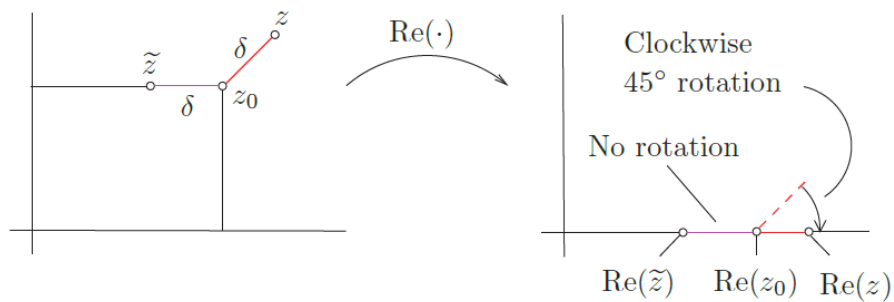


Fig. 5.16 Non complex differentiability of $\text{Re}(\cdot)$.

그림 0.15: 함수 $\text{Re}(\cdot)$ 의 복소미분 불가능성

연습문제 ??

$u, v \in C^2$ 인 $f = u + iv$ 는 두번 연속미분가능하므로

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f &= 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

그런데 $u, v \in C^2$ 이므로 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ 이고,

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (u + iv) = \Delta f.$$

3장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$\gamma_1 = \cos t + i \sin t$, $\gamma_2 = \cos(2t) + i \sin(2t)$, $\gamma_3 = \cos t - i \sin t$ 이므로 $k = 1, 2, 3$ 각각의 경우 모두 $(\operatorname{Re}(\gamma_k(t)))^2 + (\operatorname{Im}(\gamma_k(t)))^2 = 1$ 이다. γ_k 의 상은 중심이 0이고 반지름이 1인 원 \mathbb{T} 에 있다. $\theta \in [0, 2\pi)$ 에 대하여 $z = \exp(i\theta)$ 이면, $z = \gamma_1(\theta) = \gamma_2(\theta/2) = \gamma_3(2\pi - \theta)$ 이다. 따라서 \mathbb{T} 위의 모든 점은 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 각각에 의한 상에 속한다.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\exp(it)} \cdot i \exp(it) dt = 2\pi i, \\ \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\exp(2it)} \cdot 2i \exp(2it) dt = 4\pi i, \\ \int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\exp(-it)} \cdot (-i) \exp(-it) dt = -2\pi i. \end{aligned}$$

연습문제 ??

실함수 x, y 에 대하여 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0, 1]$ 라 하자. 또한, u, v 를 각각 함수 f 의 실수부와 허수부라 하면,

$$f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t)) \right) (x'(t) + iy'(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - \frac{\partial v}{\partial x}y'(t) \\
&\quad + i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial v}{\partial x}x'(t) \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}y'(t) \\
&\quad + i \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial v}{\partial x}x'(t) \right) \\
&\quad \text{(코시-리만 방정식을 적용함)} \\
&= \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) + i \frac{d}{dt}v(x(t), y(t)) \quad \text{(연쇄법칙을 적용함)} \\
&= \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

원형경로 γ 를 $\gamma(t) = 2 \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$ 라 하자.

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz &= \int_0^{2\pi} (2 \exp(it) + 2 \exp(-it)) \cdot 2i \cdot \exp(it) dt \\
&= 4i \int_0^{2\pi} (\exp(2it) + 1) dt - 4i \cdot 0 + 4i \cdot 2\pi = 8\pi i.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (z^2 - 2z + 3) dz &= \int_0^{2\pi} (4 \exp(2it) - 4 \exp(it) + 3) \cdot 2i \cdot \exp(it) dt \\
&= \int_0^{2\pi} i(8 \exp(3it) - 8 \exp(2it) + 6 \exp(it)) dt = 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} xy dz &= \int_0^{2\pi} 2 \cos t \cdot 2 \sin t \cdot 2i \cdot (\cos t + i \sin t) dt \\
&= 4i \int_0^{2\pi} (\sin(2t))(\cos t + i \sin t) dt \\
&= 4i \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\sin(2t)) \cos t}_{\text{기함수}} dt - 2 \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos(3t)) dt \\
&= 0 - 2(0 - 0) = 0.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

(1) $\gamma(t) = (1+i)t, t \in [0, 1]$ 이므로, $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z)dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}.$

(2) $\gamma(t) = 1 + \exp(it), t \in [-\pi/2, 0]$ 이므로,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{Re}(z)dz &= \int_{-\pi/2}^0 (\cos t)i \exp(it)dt = \int_{-\pi/2}^0 i(\cos t)^2 - (\cos t)(\sin t)dt \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \left(i \frac{\cos(2t) + 1}{2} - \frac{\sin(2t)}{2} \right) dt \\ &= 0 + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(3) $\gamma(t) = t + it^2, t \in [0, 1]$ 이므로,

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z)dz = \int_0^1 t \cdot (1 + 2it)dt = \frac{1}{2} + 2i \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i.$$

연습문제 ??

이항정리에 의하여

$$(1+z)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell} 1^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell}.$$

$0 \leq k \leq n$ 에 대하여,

$$\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell-k-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^{\ell-k-1} dz \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{\ell-k-1} dz = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

연습문제 ??

(1) $U_f, V_f, U_g, V_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U_f(t) + iV_f(t), g(\gamma(t))\gamma'(t) = U_g(t) + iV_g(t), t \in [a, b]$ 라고 하자.

$$\int_{\gamma} (f+g)(z)dz = \int_a^b (f+g)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b (f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt \\
&= \int_a^b (U_f(t) + U_g(t))dt + i \int_a^b (V_f(t) + V_g(t))dt \\
&= \int_a^b U_f(t)dt + \int_a^b V_f(t)dt + i \int_a^b V_f(t)dt + i \int_a^b V_g(t)dt \\
&= \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz.
\end{aligned}$$

(2) $\alpha = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$)이고 $U, V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U(t) + iV(t)$, $t \in [a, b]$ 라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} (\alpha \cdot f)(z)dz &= \int_a^b (p + iq)(U(t) + iV(t))dt \\
&= \int_a^b (pU(t) - qV(t))dt + i \int_a^b (pV(t) + qU(t))dt \\
&= p \left(\int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) + iq \left(\int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) \\
&= (p + iq) \left(\int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right) = \alpha \cdot \int_{\gamma} f(z)dz.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$-(-\gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$(-(-\gamma))(t) = (-\gamma)(a + b - t) = \gamma(a + b - (a + b - t)) = \gamma(t), \quad t \in [a, b].$$

따라서 $-(-\gamma) = \gamma$ 이며, 그림으로 보면 직관적으로 명백하다.

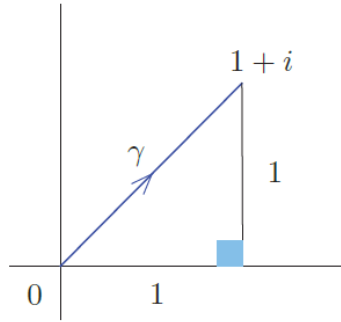
연습문제 ??

$\gamma(b) = (-\gamma)(a)$ 이므로 γ 와 $-\gamma$ 는 결합가능한 경로이다.

$$\int_{\gamma+(-\gamma)} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

연습문제 ??

$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 를 $\gamma(t) = (1 + i)t$, $t \in [0, 1]$ 이라 하자. 피타고라스 정리를 쓰면, γ 의 길이는 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



또한 $|(\gamma(t))^2| = |t + it|^2 = 2t^2$ 이고, $\max_{t \in [0,1]} |(\gamma(t))^2| = 2 \cdot 1^2 = 2$. 따라서

$$\left| \int_{\gamma} z^2 dz \right| \leq \left(\max_{t \in [0,1]} |(\gamma(t))^2| \right) \cdot (\gamma \text{의 길이}) = 2\sqrt{2}.$$

직접 계산하면,

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (t + it)^2 \cdot (1 + i) dt = \int_0^1 (1 + i)^3 t^2 dt = \frac{(1 + i)^3}{3}$$

이므로 $\left| \int_{\gamma} z^2 dz \right| = \frac{(\sqrt{3})^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

연습문제 ??

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \left| \binom{2n}{n} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z|=1} \left| \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} \right| \right) \cdot 2\pi \cdot 1 = \max_{|z|=1} \frac{|1+z|^{2n}}{1} \\ &\leq (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n. \end{aligned}$$

연습문제 ??

$F = U + iV$ 를 $\bar{z} \in \mathbb{C}$ 의 부정적분이라고 하자. 그러면,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} = F' = \bar{z} = x - iy.$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ 을 고정하자. 그러면 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여

$$V(x, y) - V(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial V}{\partial x}(\xi, y) d\xi = \int_{x_0}^x -y d\xi = -xy + x_0 y.$$

따라서 $V(x, y) = -xy + \varphi(y)$, $\varphi(y) : +V(x_0, y_0) + x_0 y$ 이면,

$$x = \frac{\partial V}{\partial y} = -x + \varphi'(y).$$

즉, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\varphi'(y) = 2x$ 인데 이는 분명 모순이다. 특히, $2 \cdot 1 = 2 = \varphi'(y) = 2 \cdot 0 = 0$.

연습문제 ??

$(fg)' = fg' + f'g$ 이므로 함수 $\zeta \mapsto f(\zeta)g'(\zeta) + f'(\zeta)g(\zeta)$ 는 부정적분을 갖는다. 따라서 경로적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{\gamma} (f(\zeta)g'(\zeta) + f'(\zeta)g(\zeta)) d\zeta = f(z)g(z) - f(w)g(w)$$

이고 이를 정리하면 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

\mathbb{C} 에서 $\sin' z = \cos z$ 이므로 $\cos z$ 는 부정적분을 갖는다. 따라서 경로적분의 기본정리에 의하여

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \cos z dz &= \sin i - \sin(-i) = 2 \sin i = 2 \frac{\exp(i \cdot i) - \exp(-i \cdot i)}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{i} \\ &= \left(e - \frac{1}{e}\right) i. \end{aligned}$$

연습문제 ??

\mathbb{C} 에서 $\exp' z = \exp z$ 이므로 0과 $a + ib$ 를 잇는 경로 γ 를 따라 적분하면

$$\int_{\gamma} \exp z dz = \exp(a + ib) - \exp 0 = e^a(\cos b + i \sin b) - 1 = e^a \cos b - 1 + ie^a \sin b.$$

경로를 $\gamma(x) = (a + ib)x$, $x \in [0, 1]$ 로 잡으면,

$$\int_{\gamma} \exp z dz = \int_0^1 \exp(a + ib) \cdot (a + ib) dx = \int_0^1 e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) (a + ib) dx.$$

따라서, $(a - ib) \int_{\gamma} \exp z dz = \int_0^1 e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) (a^2 + b^2) dx$ 이고,

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \int_0^1 e^{ax} \cos(bx) dx &= \operatorname{Re} \left((a - ib) \int_{\gamma} \exp z dz \right) \\ &= \operatorname{Re}((a - ib)(e^a \cos b - 1 + ie^a \sin b)) \\ &= a(e^a \cos b - 1) + be^a \sin b. \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \int_0^1 e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{a(e^a \cos b - 1) + be^a \sin b}{a^2 + b^2}.$$

연습문제 ??

중심이 0이고 반지름 $r > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 닫힌경로 C 를 생각하자. $C(\theta) = r \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. 경로적분의 기본정리에 의해

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \exp z \, dz = \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta + ir \sin \theta} \cdot ri \exp(i\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cdot r \cdot i \exp(i(r \sin \theta + \theta)) d\theta. \end{aligned}$$

위 식에서 실수부만 취하면

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta + \theta) d\theta = 0.$$

연습문제 ??

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 복소미분가능한 F 가 $F' = 1/z$ 를 만족한다고 하자. 중심이 0이고 반시계방향으로 도는 원형경로 C 를 생각하자. C 가 닫힌경로 이므로, 경로적분의 기본정리에 의해

$$\int_C F'(z) dz = 0.$$

한편, 이미 알고있는 계산 결과에 따르면,

$$\int_C F'(z) dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

이므로 모순이다.

연습문제 ??

(ER1) $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ 가 닫힌경로라고 하자. $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 를 $H(t, s) = \gamma(t)$, $t, s \in [0, 1]$ 로 정의하면, H 는 연속이고,

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma(t), \quad t \in [0, 1], \\ H(t, 1) &= \gamma(t), \quad t \in [0, 1], \\ H(0, s) &= \gamma(0) = \gamma(1) = H(1, s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

따라서 γ 는 자기자신과 D -호모토픽하다. 즉, 관계는 반사적(reflexive)이다. (ER2) $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ 가 닫힌경로이고 γ_0 가 γ_1 과 D -호모토픽하다고 하자. 그러면, 다음을 만족하는 연속함수 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 가 존재한다.

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} H(t, 1) &= \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1], \\ H(0, s) &= H(1, s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 를 $\tilde{H}(t, s) = H(t, -s)$, $t, s \in [0, 1]$ 로 정의하자. 그러면, \tilde{H} 는 연속이고 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, 0) &= H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1], \\ \tilde{H}(t, 1) &= H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1], \\ \tilde{H}(0, s) &= H(0, 1-s) = H(1, 1-s) = \tilde{H}(1, s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

따라서 γ_1 은 γ_0 와 D -호모토픽하다. 즉, 관계는 대칭적(symmetric)이다.

(ER3) $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ 가 닫힌경로이고 γ_0 가 γ_1 과 D -호모토픽하고, γ_1 이 γ_2 와 D -호모토픽하다고 하자. 그러면, 다음을 만족하는 연속함수 $H, K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1], & K(t, 0) &= \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t), \quad t \in [0, 1], & K(t, 1) &= \gamma_2(t), \quad t \in [0, 1], \\ H(0, s) &= H(1, s), \quad s \in [0, 1], & K(0, s) &= K(1, s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$L : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 를

$$L(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s), & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(t, 2(s - \frac{1}{2})), & s \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

로 정의하면,

$$\begin{aligned} L(t, 0) &= H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1], \\ L(t, 1) &= K(t, 1) = \gamma_2(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

또한, $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ 에 대하여 $L(0, s) = H(0, 2s) = H(1, 2s) = L(1, s)$, $\frac{1}{2} < s \leq 1$ 에 대하여

$$L(0, s) = K\left(0, 2(s - \frac{1}{2})\right) = K\left(1, 2(s - \frac{1}{2})\right) = L(1, s).$$

이다.

$[0, 1] \times (\frac{1}{2}, 1]$ 에서 정의된 수열 $((t_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 $(t_0, \frac{1}{2})$ 에 수렴한다면,

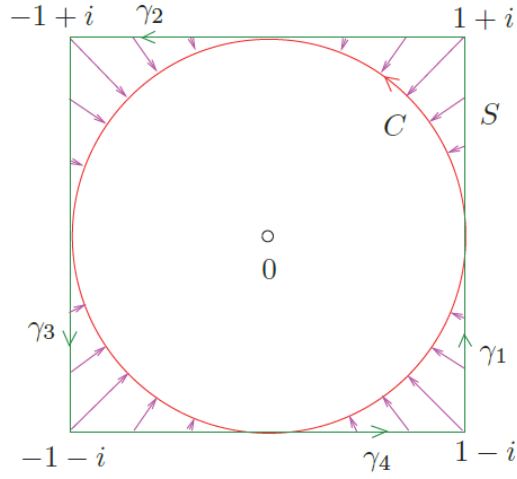
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L(t_n, s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} K\left(t_n, 2(s_n - \frac{1}{2})\right) = K(t_0, 0) = \gamma_1(t_0) \\ &= H(t_0, 1) = L\left(t_0, \frac{1}{2}\right) = L\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, s_n)\right). \end{aligned}$$

따라서 L 은 연속함수이다. 결론적으로, γ_0 는 γ_2 와 D -호모토픽하다. 즉, 관계는 추이적(transitive)이다.

이상에서 D -호모토피 관계는 반사적, 대칭적, 추이적인 성질을 만족하므로 동치(equivalence) 관계이다.

연습문제 ??

그림에서 경로 C 는 경로 S 와 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토픽함을 알 수 있다.



직접 계산을 위해 $t \in [0, 1]$ 에 대하여 경로를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &:= (1-t)(1-i) + t(1+i) = 1 + i(2t-1), \\ \gamma_2(t) &:= (1-t)(1+i) + t(-1+i) = (1-2t) + i, \\ \gamma_3(t) &:= (1-t)(-1+i) + t(-1-i) = -1 + i(1-2t), \\ \gamma_4(t) &:= (1-t)(-1-i) + t(1-i) = 2t-1-i.\end{aligned}$$

그러면,

$$\int_S \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz$$

이므로,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{2i}{1+i(2t-1)} dt = \int_0^1 \frac{2i(1-i(2t-1))}{1+(2t-1)^2} dt \\ &= 2i \int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)^2} dt + 2 \int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2} dt \\ &\stackrel{(u=2t-1)}{=} i \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du + \int_{-1}^1 \frac{u}{1+u^2} du \\ &= i(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)) + 0 = i\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = i\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

같은 방법으로,

$$\int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{2t-1}{1+(2t-1)^2} dt = 0,$$

을 이용하면,

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{-2}{1-2t+i} dt = \int_0^1 \frac{-2 \cdot (-(2t-1)-i)}{1+(2t-1)^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + (-1)(-i)\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}, \\
\int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{-2i}{-1 + i(1-2t)} dt = \int_0^1 \frac{-2i \cdot (-1 + i(2t-1))}{1 + (2t-1)^2} dt \\
&= -i \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = i\frac{\pi}{2}, \\
\int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{2}{2t-1-i} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot ((2t-1) + i)}{1 + (2t-1)^2} dt \\
&= 0 + i\frac{\pi}{2} + 0 = i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

따라서 예상대로 $\int_S \frac{1}{z} dz = 4 \cdot \left(i\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i$ 가 된다.

연습문제 ??

중심이 0이고 반시계방향으로 도는 원형경로 C 에 대하여

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

한편 그림 0.20과 같이 타원형 경로 E 는 C 와 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토픽하다.

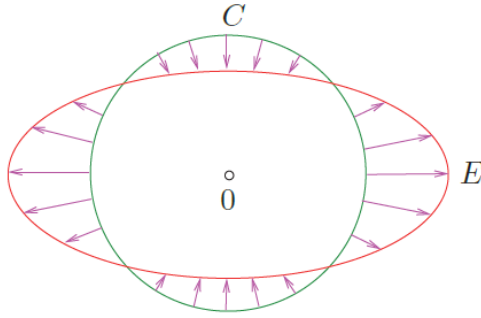


Fig. 5.17 E, C are $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotopic.

그림 0.16: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토픽한 경로 E 와 C

따라서 코시 적분정리에 의해 $\int_E \frac{1}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ 이고,

$$\begin{aligned}
2\pi i &= \int_E \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos \theta + ib \sin \theta} \cdot (-a \sin \theta + ib \cos \theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin \theta + ib \cos \theta)(a \cos \theta - ib \sin \theta)}{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)(\cos \theta)(\sin \theta) + iab((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)}{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)(\cos \theta)(\sin \theta) + iab \cdot 1}{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta.
\end{aligned}$$

허수부를 비교하면, $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$.

연습문제 ??

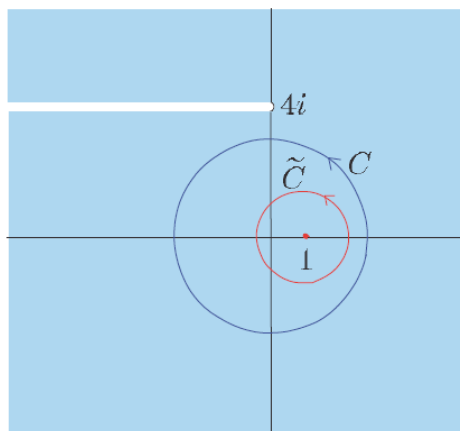


Fig. 5.18

그림 0.17: 적분경로 C, \tilde{C}

그림 0.17을 참고하라.

- (1) $z \mapsto \text{Log}(z - 4i)$ 는 $\mathbb{C} \setminus \{r + 4i : r \leq 0\}$ 에서 복소해석함수이다. 따라서 코시 적분정리를 쓰면,

$$\int_C \text{Log}(z - 4i) dz = 0.$$

- (2) \tilde{C} 가 중심이 1이고 반지름 $r > 0$ 인 원이라 하면,

$$\int_{\tilde{C}} \frac{1}{z - 1} dz = 2\pi i$$

임을 알고 있다. $1/(\cdot - 1)$ 이 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 에서 복소해석함수이고 원형경로 C 와 \tilde{C} 는 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ -호모토픽이므로, 코시 적분정리에 의해,

$$\int_C \frac{1}{z - 1} dz = \int_{\tilde{C}} \frac{1}{z - 1} dz = 2\pi i.$$

(3)

$$\begin{aligned} i^{z-3} &= \exp((z-3) \operatorname{Log} i) = \exp\left((z-3) \left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left((z-3) \left(0 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(i\frac{\pi}{2} \cdot (z-3)\right). \end{aligned}$$

따라서 $z \mapsto i^{z-3}$ 은 전해석함수이다. 코시 적분정리에 의해

$$\int_C i^{z-3} dz = 0.$$

연습문제 ??

(1)

$$\varphi'(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) = \varphi(t) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$$

에서 $\varphi' \gamma - \varphi \gamma' = 0$ 이고,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) = \frac{\varphi' \gamma - \varphi \gamma'}{\gamma^2} = \frac{0}{\gamma^2} = 0.$$

따라서 $\frac{\varphi(0)}{\gamma(0)} = \frac{\varphi(1)}{\gamma(1)}$. 그런데, γ 가 닫힌경로이므로 $\gamma(0) = \gamma(1)$ 이므로,

$$\varphi(1) = \varphi(0) = \exp\left(\int_0^0 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) = \exp(0) = 1.$$

결론적으로, $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

(2) $\Gamma_1(t) = \exp(2\pi it)$ ($t \in [0, 1]$)의 회전수는

$$\begin{aligned} w(\Gamma_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\Gamma_1'(t)}{\Gamma_1(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i \exp(2\pi it)}{\exp(2\pi it)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1. \end{aligned}$$

(3) $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)$, $t \in [0, 1]$ 이므로,

$$\begin{aligned} w(\gamma_1 \cdot \gamma_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t)}{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)}{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\cancel{\gamma_1'(t)}\gamma_2'(t)}{\gamma_1(t)\cancel{\gamma_2(t)}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\cancel{\gamma_1(t)}\gamma_2'(t)}{\gamma_1(t)\cancel{\gamma_2(t)}} dt \\
&= w(\gamma_1) + w(\gamma_2).
\end{aligned}$$

(4) $\Gamma_m = \Gamma_1 \cdots \Gamma_1$ (m 번 곱)이므로

$$\begin{aligned}
w(\Gamma_m) &= w(\Gamma_1) + \cdots + w(\Gamma_1) \quad (m\text{번}) \\
&= m \cdot w(\Gamma_1) = m \cdot 1 = m.
\end{aligned}$$

(5) 함수 $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 를 원점에서 $\gamma_0(t)$ 까지의 거리 $\varphi(t) = |\gamma_0(t)|$, $t \in [0, 1]$ 로 정의하자. γ_0 가 0을 지나지 않고, φ 는 연속함수이기 때문에 최솟값 d_0 ($d_0 > 0$)를 갖는다. $\delta = d_0/2 > 0$ 로 택하자. γ 가

$$\|\gamma - \gamma_0\| := \max_{t \in [0, 1]} |\gamma(t) - \gamma_0(t)| < \delta$$

를 만족하는 매끄러운 닫힌경로라고 하자. 그러면 γ 가 γ_0 와 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토픽함을 증명하고자 한다. $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 를 $H(t, s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t)$, $t, s \in [0, 1]$ 로 정의하면 H 는 연속함수이고,

$$\begin{aligned}
H(t, 0) &= \gamma_0(t), \quad t \in [0, 1], \\
H(t, 1) &= \gamma(t), \quad t \in [0, 1], \\
H(0, s) &= (1-s)\gamma_0(0) + s\gamma(0) \\
&= (1-s)\gamma_0(1) + s\gamma(1) = H(1, s), \quad s \in [0, 1].
\end{aligned}$$

또한, $H(t, s)$ 는 0이 될 수 없다. 왜냐하면, $\gamma_0(t)$ 와 $\gamma(t)$ 의 볼록결합이기 때문이다. 어떤 t, s 에 대하여 $(1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t) = 0$ 라면 모순에 도달하게 된다. 그림 0.18을 참고하라.

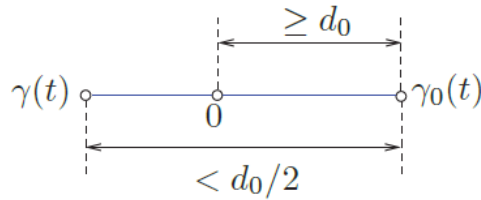


Fig. 5.19 That $H(t, s)$ is never 0.

그림 0.18: $H(t, s)$ 는 0이 될 수 없다.

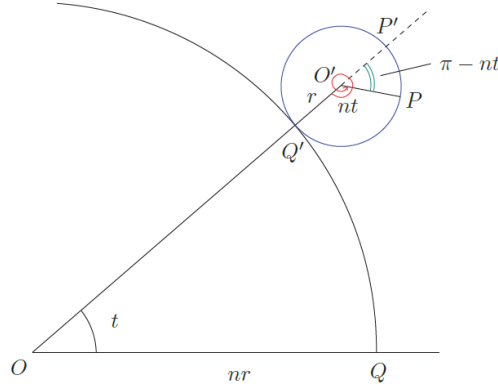
직접 계산해보면,

$$\begin{aligned}
1 \cdot \frac{d_0}{2} &> s|\gamma_0(t) - \gamma(t)| = |\gamma_0(t) - \underbrace{((1-s)\gamma_0(t) + s\gamma(t))}_{=0\text{인 } t, s \text{를 선택할 수 있다면}}| = |\gamma_0(t) - 0| \\
&= |\gamma_0(t)| \geq d_0.
\end{aligned}$$

그러면, 코시 적분정리에 의해

$$w(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = w(\gamma_0).$$

연습문제 ??



- (1) 큰 원의 각 $\angle Q'OQ$ 에 대응하는 호의 길이는 $t \cdot nr$ 이다. 작은 동전이 미끄러지지 않고 돌아갈 때, $O'P$ 와 OO' 이 이루는 작은 $(t \cdot nr)/r = n \cdot t$ 이다. 그림에서 $O' \equiv (nr + r) \exp(it)$ 이고

$$\begin{aligned} P &\equiv (nr + r) \exp(it) + \underbrace{\exp(-i(\pi - nt))}_{\text{시계방향으로 회전}} \cdot \underbrace{r \exp(it)}_{O'P'} \\ &= (n + 1)r \exp(it) + (-1) \cdot r \cdot \exp((n + 1)it). \end{aligned}$$

- (2) 에피사이클로이드 곡선 γ 로 둘러싸인 영역의 면적은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{r((n + 1) \exp(it) - \exp((n + 1)it))} \cdot \\ &\quad r((n + 1)i \exp(it) - (n + 1)i \exp((n + 1)it)) dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} r^2 ((n + 1) \exp(-it) - \exp(-(n + 1)it)) \cdot \\ &\quad (n + 1)i (\exp(it) - \exp((n + 1)it)) dt \\ &= \frac{(n + 1)r^2}{2} \int_0^{2\pi} ((n + 1) - (n + 1) \exp(int) - \exp(-int) + 1) dt \\ &= \frac{(n + 1)r^2}{2} ((n + 1) \cdot 2\pi + 0 + 0 + 2\pi) \\ &= (n + 1)r^2\pi(n + 2) = \pi r^2(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

연습문제 ??

$z \in D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 대하여 $f(z) = 1/z$ 로 정의하자. 그러면, f 는 D 에서 부정적분(원시함수)을 가질 수 없다. (예제 ??와 연습문제 ??를 참고하라.)

연습문제 ??

$\gamma(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 1]$ 이라 하면,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{i}{(z-a)(az-1)} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{(\exp(it)-a)(a\exp(it)-1)} i \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\exp(it)}{(\exp(it)-a)(a-\exp(-it)) \exp(it)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\exp(it)-a)(\exp(-it)-a)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\exp(it)-a|^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{((\cos t)-a)^2 + (\sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos t + a^2} dt. \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ 일 때, 함수 $z \mapsto i/(az-1)$ 이 단위원 γ 를 포함하는 원판에서 복소해석함수이므로, 코시 적분공식에 의해

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{i}{az-1} dz = \frac{i}{az-1} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1}.$$

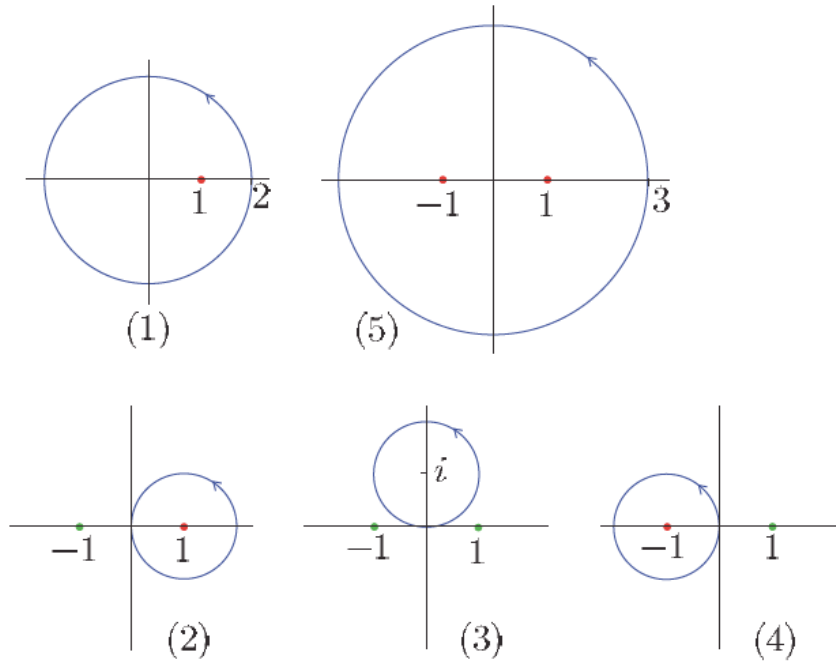
따라서, $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos t + a^2} dt = \int_{\gamma} \frac{i}{az-1} dz = 2\pi i \cdot \frac{i}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$

연습문제 ??

$$(1) \int_{\gamma} \frac{\exp z}{z-1} dz = 2\pi i \exp z \Big|_{z=1} = 2\pi i \exp 1 = 2\pi i e.$$

$$(2) \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{z^2+1}{z+1} \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{1^2+1}{1+1} = 2\pi i.$$

$$(3) \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = 0.$$



$$(4) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{z^2 + 1}{z - 1}}{z - (-1)} dz = 2\pi i \frac{z^2 + 1}{z - 1} \Big|_{z=-1} = 2\pi i \frac{(-1)^2 + 1}{-1 - 1} = -2\pi i.$$

$$\begin{aligned} (5) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz &= \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{\frac{z^2 + 1}{2}}{z - 1} dz - \int_{\gamma} \frac{\frac{z^2 + 1}{2}}{z - (-1)} dz = 2\pi i \frac{z^2 + 1}{2} \Big|_{z=1} - 2\pi i \frac{z^2 + 1}{2} \Big|_{z=-1} \\ &= 2\pi i(1) - 2\pi i(1) = 0. \end{aligned}$$

연습문제 ??

F 가 부정적분이라고 하자. 원 $|z - 0| = \frac{1}{2}$ 을 반시계방향으로 도는 닫힌경로 γ 를 생각하자. 경로적분의 기본정리에 의해,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

한편, 코시 적분공식을 쓰면,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{z^2 - 1}}{z - 0} dz = 2\pi i \frac{1}{z^2 - 1} \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{1}{0^2 - 1} = -2\pi i.$$

따라서 모순에 도달하게 되어

$$\frac{1}{z(z^2 - 1)}$$

은 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ 에서 부정적분을 가질 수 없다.

연습문제 ??

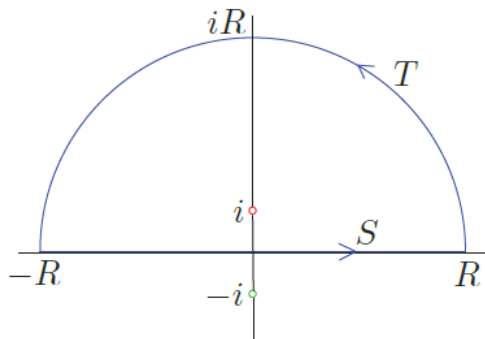


Fig. 5.20 The path $\sigma = S + T$.

그림 0.19: 경로 $\sigma = S + T$

(1) 코시 적분공식에 의해

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} F(z) dz &= \int_{\sigma} \frac{\exp(iz)}{z^2 + 1} dz = \int_{\sigma} \frac{\frac{\exp(iz)}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\exp(iz)}{z+1} \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \frac{\exp(i \cdot i)}{i+i} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

(2) $z = x + iy$, x, y 는 실수이고, $y \geq 0$ 라 하자. 그러면,

$$|\exp(iz)| = |\exp(i(x + iy))| = |\exp(-y + ix)| = e^{-y} \leq 1.$$

따라서,

$$|F(z)| = \frac{|\exp(iz)|}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z^2 + 1|}.$$

한편, $|z^2| - |-1| \leq |z^2 - (-1)| = |z^2 + 1|$ 이므로, $|z| \geq \sqrt{2}$ 이면,

$$|F(z)| \leq \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} \leq \frac{2}{|z|^2}.$$

부등식을 만들 때 $|z^2| \geq 2$ 이면, $|z|^2 \leq 2|z|^2 - 2$ 임을 이용하였다. ($|z| \geq \sqrt{2}$ 이면 이 조건이 만족된다)

(3)

$$\begin{aligned} \left| \int_T F(z) dz \right| &\leq 2\pi R \cdot \max_{z \in T} |F(z)| \leq 2\pi R \cdot \frac{2}{R^2} \quad (R \geq \sqrt{2} \text{일 때}) \\ &= \frac{4\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_T F(z) dz = 0$.

$$\int_S F(z) dz = \int_\sigma F(z) dz - \int_T F(z) dz = \frac{\pi}{2} - \int_T F(z) dz$$

$$\text{이므로, } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_S F(z) dz = \frac{\pi}{e} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_T F(z) dz = \frac{\pi}{e} - 0 = \frac{\pi}{e}.$$

(4) $S(x) = x, x \in [-R, R]$ 이라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \int_S F(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{\exp(ix)}{x^2 + 1} \cdot 1 dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + 0 \end{aligned}$$

마지막 등식은 $\frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 이 기함수라는 성질을 이용하였다. 결론적으로,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_S F(z) dz = \frac{\pi}{e}.$$

연습문제 ??

전해석함수 $\exp z$ 와 중심이 0이고 반지름 1인 원형경로 $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 $C(\theta) = \exp(i\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ 로 주어졌다고 하자. 코시 적분공식에 의하여,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp z}{z - 0} dz = \exp z \Big|_{z=0} = \exp 0 = 1.$$

한편,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\exp z}{z - 0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\exp(i\theta))}{\exp(i\theta)} \cdot i \exp(i\theta) d\theta = i \int_0^{2\pi} \exp(\exp(i\theta)) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \exp(\cos \theta + i \sin \theta) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} (\cos(\sin \theta) + i \sin(\sin \theta)) d\theta \\ &= -i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi.$$

연습문제 ??

f 가 복소해석함수이면, $f^{(n)}$ 도 복소해석함수이다. 따라서 복소미분 $f^{(n+1)}$ 이 존재한다. 또한, $f^{(n+1)}$ 이 복소미분가능하므로, 연속함수도 된다. 즉, $f^{(n)}$ 이 연속적으로 복소미분가능하다.

연습문제 ??

모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $|f(z)| \geq \delta > 0$ 이라고 하자. 특히, 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에서 $f(z) \neq 0$ 이므로 $1/f$ 는 전해석함수가 된다. 그런데 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{\delta}$$

이므로 리우비유 정리에 의해 $1/f$ 는 상수함수가 되어, f 도 상수함수가 된다.

연습문제 ??

$z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $g(z) := f(z) - w_0$ 로 정의하자. 그러면, g 는 전해석함수이고, 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $|g(z)| \geq r$ 이다. 따라서 g 는 원점에서 일정한 거리만큼 떨어져 있다. 연습문제 ??에 의하여 g 는 상수함수가 되므로, $f = g + w_0$ 도 상수함수이다.

연습문제 ??

콤팩트 집합 $K := \{(x, y) : 0 \leq x \leq T_1, 0 \leq y \leq T_2\}$ 를 생각하자. 그러면 연속함수 $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$ 는 K 에서 최댓값을 갖는다. 최댓값을 M 이라 하자. 실수의 집합을 구간으로 나누면

$$x, y \in \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT_1, (n+1)T_1) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [mT_1, (m+1)T_1)$$

$x + iy = x_0 + nT_1 + i(y_0 + mT_2)$ 을 만족하는 정수 m, n 과 실수 $x_0 \in [0, T_1), y_0 \in [0, T_2)$ 가 존재한다. 함수 f 의 주기성으로부터 모든 $x, y \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$f(x + iy) = f(x_0 + nT_1 + i(y_0 + mT_2)) = f(x_0 + iy_0) \in f(K)$$

이고, $|f(x_0 + iy_0)| \leq M$ 이다. 따라서 f 는 \mathbb{C} 전체에서 유계이고 리우비유 정리에 의해 상수함수가 된다.

연습문제 ??

- (1) $z \in \mathbb{C}$ 에서 $g(z) = \exp(z) \cdot f(z)$ 라고 정의하면 g 는 전해석함수이다. $|f(z)| \leq |\exp z|$ 이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$|g(z)| = |\exp(-z) \cdot f(z)| \leq 1.$$

리우비유 정리에 의해 g 는 상수함수가 되고, 상수를 c 라 하면, $|g(z)| \leq 1$ 로부터 $|c| \leq 1$ 이고,

$$g(z) = \exp(-z) \cdot f(z) = c$$

이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $f(z) = c \cdot \exp z$ 이다 ($|c| \leq 1$).

(2) p 가 차수 $d \geq 1$ 의 다항식이면, $|z| > R$ 에 대하여

$$|p(z)| \geq M|z|^d$$

를 만족하는 $M, R > 0$ 이 존재한다. $z = x < -R < 0$ 로 선택하면, $|z| > R$ 이고, $M|x|^d \leq |p(z)| \leq |e^x| = e^x \leq 1$ 이다 ($x < 0$ 이므로). 따라서 모든 $x < -R$ 에 대하여 $|x|^d \leq 1/M$ 이 되어 모순이다. 이제 p 가 상수함수가 되므로 상수를 c_0 라 하자. 다시 $|p(z)| \leq |\exp z|$ 로부터 $z = x < 0$ 로 두면 임의의 $x < 0$ 에 대하여 $|c_0| \leq |e^x| = e^x$ 가 되어 $|c_0| = 0$ 이다. 결론적으로 $p = c_0 = 0$ 을 얻는다.

연습문제 ??

(1) $z \in C$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |z - a_1| &\geq |z| - |a_1| = R - |a_1|, \\ |z - a_2| &\geq |z| - |a_2| = R - |a_2| \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz \right| &\leq \max_{z \in C} \frac{|f(z)|}{|f(z)|} |z - a_1| |z - a_2| \cdot (C \text{의 길이}) \\ &\leq \frac{M}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)} \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

단, $M := \max_{z \in C} |f(z)|$.

(2) $a_1 \neq a_2$ 이므로

$$\frac{1}{z - a_1} - \frac{1}{z - a_2} = \frac{z - a_2 - (z - a_1)}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{a_1 - a_2}{(z - a_1)(z - a_2)}$$

이고

$$\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left(\frac{1}{z - a_1} - \frac{1}{z - a_2} \right)$$

이다. 따라서 $\alpha := -\beta := \frac{1}{a_1 - a_2}$ 이다.

(3)

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz &= \int_C \frac{1}{a_1 - a_2} \left(\frac{1}{f(z)} z - a_1 - \frac{f(z)}{z - a_2} \right) dz \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2} \left(\int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz - \int_C \frac{f(z)}{z - a_2} dz \right). \end{aligned}$$

중심이 a_1 이고 반지름 $r_1 > 0$ 인 원 C_1 을 둘레로 하는 작은 원판 Δ_1 을 생각하자. 그러면 C 와 C_1 은 $\mathbb{C} \setminus \{a_1\}$ -호모토픽하고

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - a_1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1\}$$

는 복소해석함수이다. 코시 적분정리에 의해

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - a_1} dz.$$

한편, 코시 적분공식을 쓰면, $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - a_1} dz = f(a_1)$ 이므로

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz = 2\pi i f(a_1).$$

같은 방법으로

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a_2} dz = 2\pi i f(a_2).$$

$$\text{종합하면, } \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz = \frac{2\pi i(f(a_1) - f(a_2))}{a_1 - a_2}.$$

- (4) f 가 유계인 전해석함수이고 $|f|$ 는 상계 M 을 갖는다고 가정하자. 즉, 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $|f(z)| \leq M$ 이다. a_1, a_2 가 \mathbb{C} 의 서로 다른 두 점이라고 하자. 중심이 0이고 반지름 $R > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로 C 가 a_1, a_2 를 내부에 포함하도록 잡을 수 있다. 앞의 (1), (3)의 결과를 이용하면,

$$\begin{aligned} |f(a_1) - f(a_2)| &= \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \left| \frac{2\pi i(f(a_1) - f(a_2))}{a_1 - a_2} \right| \\ &= \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \left| \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a_2|}{2\pi} \cdot \frac{2\pi RM}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)}. \end{aligned}$$

R 은 원하는 만큼 크게 잡을 수 있으므로, $R \rightarrow \infty$ 에 따라

$$\frac{2\pi RM}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)} \rightarrow 0$$

이므로 $|f(a_1) - f(a_2)| = 0$ 이다. 따라서 $f(a_1) = f(a_2)$ 로부터 f 는 상수함수이다.

4장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n)$ 도 각각 수렴한다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = 0$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) = 0$ 이다. 이로부터 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

연습문제 ??

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴한다고 하자. 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\operatorname{Re}(a_n) \leq |a_n|$, $\operatorname{Im}(a_n) \leq |a_n|$ 이므로 비교판정법에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n)$$

이 수렴한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

연습문제 ??

$s_n := 1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n$ 이라 하면, $zs_n = z + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1}$ 이므로 $(1 - z)s_n = 1 - z^{n+1}$ 이다. $|z| < 1$ 에서 $z \neq 1$ 이므로

$$s_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad (0.17)$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - 0}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 이 수렴하고 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z}$ 이다. (이 증명을 위해 $|z| < 1$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$$

을 이용하였다. 이 결과는 $r := |z| < 1$ 이므로, $|z|^{n+1} - 0 = |z|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 로부터 얻어진다.)

연습문제 ??

자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $s_n := 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n - 1)z^{n-2} + nz^{n-1}$ 이라 하자. 그러면 $zs_n = z + 2z^2 + \cdots + (n - 1)z^{n-1} + nz^n$ 이다. 따라서

$$(1 - z)s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = \frac{1 - z^n}{1 - z} - nz^n.$$

따라서

$$s_n = \frac{1 - z^n}{(1 - z^2)} - \frac{nz^n}{1 - z}.$$

(이 결과는 식 (0.17)의 양변을 z 에 대하여 미분해서 얻을 수도 있다.)

$r := |z|$ ($0 \leq r < 1$)이라 하면,

$$r = \frac{1}{1 + h}$$

여기서 $h := \frac{1}{r} - 1 > 0$ 이다.

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n \geq \binom{n}{2}h^2 = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot h^2$$

에서

$$0 \leq nr^n \frac{n}{(1 + h)^n} \leq n \cdot \frac{2}{n \cdot (n - 1) \cdot h^2} = \frac{2}{(n - 1) \cdot h^2}$$

이므로 조임정리(Sandwich theorem)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ 이다. 결론적으로,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^n}{(1 - z)^2} - \frac{nz^n}{1 - z} \right) = \frac{1 - 0}{(1 - z)^2} - \frac{0}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z)^2}.$$

연습문제 ??

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \frac{1}{\exp(s \cdot \text{Log}(n))} \right| = \left| \frac{1}{\exp(s \cdot \log n)} \right| \\ &= \frac{1}{e^{\text{Re}(s \cdot \log n)}} = \frac{1}{e^{(\log n) \cdot (\text{Re}(s))}} = \frac{1}{(e^{\log n})^{\text{Re}(s)}} = \frac{1}{n^{\text{Re}(s)}}. \end{aligned}$$

$p > 1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 이 수렴함을 이용하면, $\text{Re}(s) > 1$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\text{Re}(s)}}$$

가 수렴한다. 따라서 $\text{Re}(s) > 1$ 인 영역에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

은 절대수렴하므로, 당연히 수렴한다.

연습문제 ??

$L \neq 0$ 이라고 하자. $|z| < 1/L$ 인 모든 z 에 대하여, N 이 충분히 클 때 $n > N$ 이면 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| \leq q < 1$ 를 만족하는 $q < 1$ 가 존재한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|z| < 1$ 로부터 얻어진다. (예를 들어 $q = (L|z| + 1)/2 < 1$ 로 잡으면 된다.)

$L = 0$ 이면, 임의의(고정된) $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $n > N$ 이면 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| \leq q < 1$ 을 항상 만족하는 $q < 1$ 가 존재한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0|z| = 0 < 1$ 로부터 얻어진다. (예를 들어 $q = 1/2 < 1$ 로 잡으면 된다.) 근판정법을 쓰면 제곱급수가 수렴함을 알 수 있다.

한편, $L \neq 0$ 이고 $|z| > 1/L$ 인 경우를 생각하면 N 이 충분히 클 때 모든 $n > N$ 에 대하여 $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z| > 1$ 가 성립한다. 이는 $\sqrt[n]{|c_n|}|z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|z| > 1$ 로부터 얻어진다. 다시 근판정법을 쓰면 이 경우 제곱급수가 발산함을 알 수 있다.

연습문제 ??

$z = 0$ 일 때 급수가 0으로 수렴함은 자명하다. $z \neq 0$ 라고 가정하자. 그러면, $N > 1/|z|$ 인 $N \in \mathbb{N}$ 를 선택할 수 있다. $n > N$ 에 대하여 $|nz| > N|z| > 1$ 이고 $|n^n z^n - 0| = |nz|^n > 1^n = 1$ 이므로

$$\neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^n z^n = 0 \right).$$

따라서 $z \neq 0$ 이면, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ 은 발산한다.

연습문제 ??

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{이므로}$$

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n^n}$$

의 수렴반경은 무한대이고 이 제곱급수는 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 수렴한다.

연습문제 ??

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ 의 수렴반경은 1이다.

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{2012}}{n^{2012}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2012} = 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2012} z^n$ 의 수렴반경은 1이다.

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ 의 수렴반경은 무한대이다.

연습문제 ??

$|z| < 1$ 에 대하여

$$f(z) := 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}$$

이므로

$$zf(z) = g(z) := z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots = \frac{z}{(1-z)^2}$$

임을 알고 있다. 따라서 $g(z) := z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots$ 이 $|z| < 1$ 에서 수렴하므로 g 는 원판 $|z| < 1$ 에서 복소해석함수이고 $g'(z) = 1 + 2^2z + 3^2z^2 + 4^2z^3 + \cdots$ 이다. 한편,

$$g(z) = zf(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

이므로

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right) = 1 \cdot \frac{1}{(1-z)^2} + z \cdot \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

이 원하는 결과이다.

연습문제 ??

(1) 거짓. 예를 들면, $\left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ 수렴한다} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$ 은 “닫힌”영역이다.

(2) 참.

(3) 거짓. 예를 들면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ 은 $z = 1$ 에서 수렴하지만 $z = -1$ 에서는 발산한다.

(4) 거짓. (3)의 예를 참고하라.

(5) 참. (3)의 예를 참고하라.

(6) 참. 예를 들면, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(7) 참. 수렴반경은 1보다 작거나 같고, $|1 + i| = \sqrt{2} > 1$ 이다.

연습문제 ??

$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ 이고,

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \sin z = (-1)^n \sin z, \quad \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} \sin z = (-1)^n \cos z$$

이므로

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} \sin z \right) \Big|_{z=0} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

같은 방법으로 $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$. 다른 방법으로 구해보면,

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n i^n z^n \right)$$

이므로, $i^{2n} = (-1)^n$ 을 이용하면,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} \left(1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \cdots \end{aligned}$$

연습문제 ??

$p(z) = z^6 - z^4 + z^2 - 1, z \in \mathbb{C}$ 라 하면,

$$p'(z) = 6z^5 - 4z^3 + 2z,$$

$$p''(z) = 30z^4 - 12z^2 + 2,$$

$$p'''(z) = 120z^3 - 24z,$$

$$\begin{aligned}
p^{(4)}(z) &= 360z^2 - 24, \\
p^{(5)}(z) &= 720z, \\
p^{(6)}(z) &= 720, \\
p^{(7)}(z) &= p^{(8)} = \cdots = 0
\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\
\frac{p'(1)}{1!} &= 6 - 4 + 2 = 4, \\
\frac{p''(1)}{2!} &= \frac{30 - 12 + 2}{2} = 10, \\
\frac{p'''(1)}{3!} &= \frac{120 - 24}{6} = 16, \\
\frac{p^{(4)}(1)}{4!} &= \frac{360 - 24}{24} = 14, \\
\frac{p^{(5)}(1)}{5!} &= \frac{720}{120} = 6, \\
\frac{p^{(6)}(1)}{6!} &= \frac{720}{720} = 1.
\end{aligned}$$

따라서 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\begin{aligned}
& z^6 - z^4 + z^2 - 1 \\
&= p(1) + \frac{p'(1)}{1!}(z-1) + \cdots + \frac{p^{(6)}(1)}{6!}(z-1)^6 + 0 \\
&= 4(z-1) + 10(z-1)^2 + 16(z-1)^3 + 14(z-1)^4 + 6(z-1)^5 + (z-1)^6.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

(1) 단순연결영역 \mathbb{C} 에서 $z \mapsto \exp(z^2)$ 은 부정적분을 가지며, 이를 g 라 하면

$$f(z) = \int_{\gamma_{0z}} \exp(\zeta^2) d\zeta = \int_{\gamma_{0z}} g'(\zeta) d\zeta = g(z) - g(0).$$

$$\text{따라서 } f'(z) = g'(z) = \exp(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}.$$

$$\frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} f'(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{n!}, \quad \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} f'(z) \Big|_{z=0} = 0$$

이므로 $f^{(2n+1)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$, $f^{(2n+2)}(0) = 0$ 이고, $f(0) = 0$ 이다. 따라서,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n!)} z^{2n+1}.$$

(2) $|z| < 1$ 에 대하여,

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

이고 제곱급수는 수렴하는 영역에서 복소해석함수이고 항별미분이 가능하기 때문에 $|z| < 1$ 에서

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{z+1} = -1 + 2z - 3z^2 + 4z^3 - \dots$$

양변에 $-z^2$ 을 곱하면, $|z| < 1$ 에서

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot (n-1) \cdot z^n$$

이므로 $c_0 = c_1 = 0$ 이고, $c_n = (-1)^n \cdot (n-1)$ ($n \geq 2$)이다.

연습문제 ??

$z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $R > |z|$ 을 잡으면,

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot \max_{|z| \leq R} |f(z)| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot \max_{|z| \leq R} M \cdot |z|^n = \frac{(n+1)!}{R^{n+1}} \cdot M \cdot R^n = \frac{(n+1)!M}{R}. \end{aligned}$$

$R > |z|$ 의 선택을 임의로 크게 할 수 있기 때문에 $f^{(n+1)}(z) = 0$ 이다. 어떤 $z \in \mathbb{C}$ 을 선택해도 같은 결과를 얻기 때문에 \mathbb{C} 전체에서 $f^{(n+1)} \equiv 0$ 이다. 테일러 정리에 의해, 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

$f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = f^{(n+3)}(0) = \dots = 0$ 이므로 f 는 기껏해야 n 차 다항식이다.

조건에서 $n = 0$ 이면, f 는 유계인 전해석함수이며 위의 결론에서 f 는 상수함수이다 (0차 다항식). 따라서 특별히 $n = 0$ 인 경우는 리우비유 정리와 일치한다.

연습문제 ??

코시 적분공식에 의해

$$\begin{aligned} \frac{2013!}{2\pi i} \int_C \frac{\sin z}{z^{2013}} dz &= \frac{d^{2012}}{dz^{2012}} \sin z \Big|_{z=0} \\ &= (-1)^{2012/2} \sin z \Big|_{z=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $\frac{2013!}{2\pi i} \int_C \frac{\sin z}{z^{2013}} dz = 0$.

연습문제 ??

z_0 에서 g 의 연속성에 의해 $|z - z_0| < \delta$ 에서 $g(z) \neq 0$ 가 되도록 $R > 0$ 보다 작은 $\delta > 0$ 를 잡을 수 있다. $f(z_0) = 0$ 이고 $f(z) = (z - z_0)g(z)$ ($|z - z_0| < R$)이므로 $0 < |z - z_0| < \delta$ 에서 $f(z) \neq 0$ 이다. 근의 분류 정리에 의하여 f 는 z_0 에서 $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ 중근을 갖고 $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ 인 복소해석함수 \tilde{g} 가 존재한다. 이제 $|z - z_0| < R$ 에서 $(z - z_0)^{\tilde{m}}\tilde{g}(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 가 성립한다. $\tilde{m} = m$ 임을 증명해보자. $\tilde{m} > m$ 이라면,

$$0 \neq g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\tilde{m}-m} \tilde{g}(z_0) = 0 \cdot \tilde{g}(z_0) = 0$$

가 되어 모순에 도달한다. 반대로 $m > \tilde{m}$ 이면,

$$0 \neq \tilde{g}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{g}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-\tilde{m}} g(z_0) = 0 \cdot g(z_0) = 0$$

로 모순이다. 따라서, $m = \tilde{m}$ 이 되고, z_0 는 m 중근이다.

연습문제 ??

(1)

$$f(z) = (1 + z^2)^4 = ((z - i)(z + i))^4 = (z - i)^4(z + i)^4$$

이므로 $g(z) := (z + i)^4$ 이라 하면 g 는 전해석함수이고 $g(i) = (2i)^4 = 16 \neq 0$ 이고 $f(z) = (z - i)^4 g(z)$ 이다. 따라서 i 는 f 의 4 중근이다.

(2)

$$f(2n\pi i) = 1 - 1 = 0,$$

$$f'(2n\pi i) = \exp z \Big|_{z=2n\pi i} = 1 \neq 0$$

이므로 f 의 근 $2n\pi i$ 의 차수는 1이다.

(3) $f(0) = 1 - 1 + \frac{1}{2}(0)^2 = 0$ 이고

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos z - 1 + \frac{1}{2}(\sin z)^2 = \cos z - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \cos(2z))}{2} \\ &= \cos z - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos(2z) \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) - \frac{3}{4} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{2!} + \frac{16z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots\right) \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}_0 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2!}\right)}_0 z^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{4!}\right)}_{\neq 0} z^4 + \cdots \end{aligned}$$

이므로 근 z_0 의 차수는 4이다.

연습문제 ??

원판에서 z_0 와 다른 점 z 를 잡으면 $f(z) \neq 0$ 이다. 근의 분류 정리에서 $f(z) = (z - z_0)g(z)$ 로 쓸 수 있다. 여기서 g 는 복소해석함수이고 $g(z_0) \neq 0$ 이다.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z(1 \cdot g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z))}{(z - z_0)g(z)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z(g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z))}{g(z)} dz \\
 &= \frac{z(g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z))}{g(z)} \Big|_{z=z_0} \quad (\text{코시 적분공식에 의해}) \\
 &= \frac{z_0(g(z_0) + 0 \cdot g'(z_0))}{g(z_0)} \\
 &= z_0.
 \end{aligned}$$

연습문제 ??

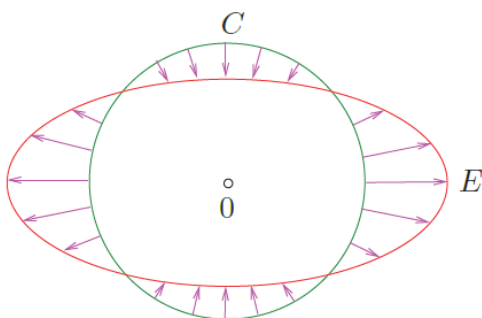


Fig. 5.17 E, C are $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotopic.

그림 0.20: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토픽한 경로 E 와 C