

# **복소해석학 연습문제 풀이**

## **A Friendly Approach to Complex Analysis**

염용진, 허재성 譯

Update on January 2, 2023



# 연습문제 풀이

## 머리말 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

0에서  $f'$ 의 미분이 존재하고 그 값이  $L$ 이라고 가정하자.  $\epsilon := 1 > 0$ 으로 잡으면,  $0 < |x - 0| < \delta$ 이면

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| < \epsilon$$

을 만족하는  $\delta > 0$ 가 존재한다. 특히  $x := \delta/2$ 로 잡으면  $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$ 이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L \right| = |2 - L| < \epsilon. \quad (0.1)$$

한편  $x := -\delta/2$ 로 잡아도  $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$ 이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L \right| = |2 + L| < \epsilon. \quad (0.2)$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서  $f'$ 은 0에서 미분이 불가능하다.

## 1장 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$ 이므로,  $x, y$  중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서  $x^2 + y^2 \neq 0$ 이고,

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$\begin{aligned}
 (x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left( x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - y \cdot \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), x \cdot \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + y \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).
 \end{aligned}$$

따라서  $(x, y) \neq (0, 0)$ 에 대하여  $(x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \circledast$ 이다.

## 연습문제 ??

$\theta \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \circledast$ 이므로,  $\tan \theta \in \mathbb{R} \circledast$ 이고,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - i \tan \theta} &= \frac{1}{1^2 + (\tan \theta)^2} + i \left( \frac{\tan \theta}{1^2 + (\tan \theta)^2} \right) \\
 &= \frac{(\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} + i \left( \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\cos \theta)^2}{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \right) \\
 &= \frac{(\cos \theta)^2}{1} + i \frac{(\sin \theta)(\cos \theta)}{1} = (\cos \theta)^2 + i(\sin \theta)(\cos \theta).
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} &= (1 + i \tan \theta)((\cos \theta)^2 + i(\sin \theta)(\cos \theta)) \\
 &= (\cos \theta)^2 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\sin \theta)(\cos \theta) \\
 &\quad + \left( (\sin \theta)(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (\cos \theta)^2 \right) \\
 &= (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + i2(\sin \theta)(\cos \theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).
 \end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$P \subset \mathbb{C}$ 가  $\mathbb{C}$ 의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면,  $i \neq 0$ 이므로 조건 (P3)에 의해  $i \in P$ 이거나 ( $i \notin P$ 이고  $-i \in P$ )이다. 조건 (P2)에서

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \in P \tag{0.3}$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \quad (0.4)$$

가 된다. 그런데  $1 \neq 0$ 이고  $x = 1$ 이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

## 연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

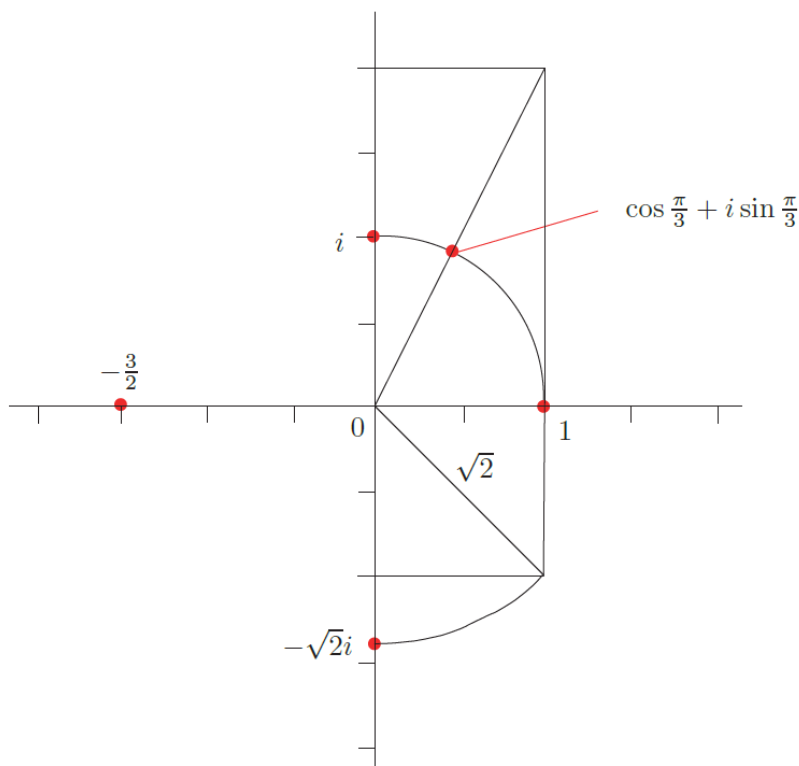


Fig. 5.2 Location of the complex numbers  $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ .

Figure 0.1: 복소수  $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ 의 위치

## 연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$ 이다.

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= (\cos \theta + i \sin \theta) ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 + i2(\cos \theta)(\sin \theta)) \\ &= (\cos \theta) ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2) - (\sin \theta)2(\cos \theta)(\sin \theta) \end{aligned}$$

$$+ i(\cdots).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) \\ &= (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta + 3 \cos \theta - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ 이 복소수  $a, b \in \mathbb{C}$ 와 자연수  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3) \\ &= \operatorname{Re}((\cos \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2(i \sin \theta) + 3(\cos \theta)(i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3) \\ &= (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 \\ &= 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ 로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}(1 + i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10} = 2^5 \left( \cos \left( 10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 32 \left( \cos \left( 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 32 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) = 32(0 + i \cdot 1) = 32i.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$2 + i$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는  $\tan^{-1}(1/2)$ 이고  $3 + i$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는  $\tan^{-1}(1/3)$ 이다. 따라서,  $(2 + i)(3 + i)$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는  $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$ 이다. 한편,

$$(2 + i)(3 + i) = 6 - 1 + i(2 + 3) = 5 + 5i$$

이므로  $(2 + i)(3 + i)$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로,  $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 이다.

## 연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점  $A, B, C$ 의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수  $z_A, z_B, z_C$ 에 있다고 하자.  $\ell(AC) = \ell(AB)$ 이고  $\angle CAB = \pi/3$ 이므로,

$$z_C - z_A = \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (z_B - z_A). \quad (0.5)$$

귀류법을 쓰기위해  $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ 가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서  $p + iq = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (m + in)$ 을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \quad (0.6)$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \quad (0.7)$$

식 (0.6)에  $-n$ 을 곱하고, 식 (0.7)에  $m$ 을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데  $m^2 + n^2 \neq 0$ 이므로 ( $z_B \neq z_A$ 이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.

## 연습문제 ??

$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ 로 쓸 수 있다.  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 가

$$w^4 = \rho^4(\cos(4\alpha) + i \sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

를 만족해야 하므로,  $\rho^4 = 1$ 에서  $\rho = 1$ 이다. 또한,  $4\alpha \in \{\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \dots\}$ 에서

$$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \pm \pi, \dots \right\}.$$

따라서  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 1 \cdot ((\cos \alpha + i \sin \alpha))$ 는 다음 집합에 속한다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}, \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}, \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned}$$

네 개의 해를 복소평면에 그려보면 그림 0.2와 같다.

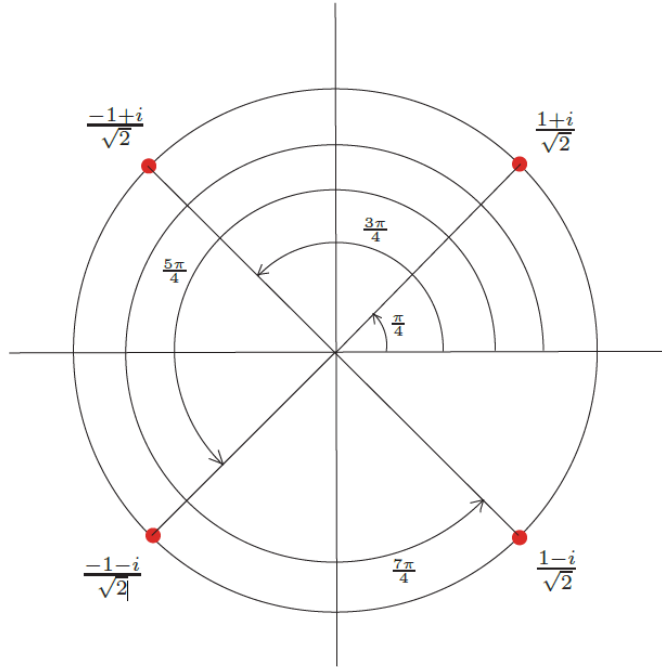


Fig. 5.3 Location of the complex numbers  $w$  that satisfy  $w^4 = -1$ .

Figure 0.2:  $w^4 = -1$ 을 만족하는 복소수  $w$ 의 위치

## 연습문제 ??

방정식으로부터

$$0 = z^6 - z^3 - 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + z^3 - 2 = (z^3 - 2)(z^3 + 1)$$

이므로  $z^3 = 2$  또는  $z^3 = -1$ 이다.  $z^3 = 2$ 를 만족하는 해를 구하면

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

이다. 한편,  $z^3 = -1$ 의 해는

$$z \in \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \pi + i \sin \pi, \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$



이다. 결론적으로  $z^6 - z^3 - 2 = 0$ 일 필요충분조건은  $[z^3 = 2 \text{ 또는 } z^3 = -1]$ 이다. 즉,

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \right\} \\ \cup \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

따라서 구하는 해는

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

## 연습문제 ??

$\omega^3 = 1$ 을 만족하는  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 을 생각하자. 그러면,  $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ 이고,  $\omega \neq 1$ 이므로  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} & ((b-a)\omega + (b-c))((b-a)\omega^2 + b-c) \\ &= (b-a)^2\omega^3 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &= (b-a)^2 \cdot 1 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &= (b-a)(b-a-b+c) + (b-c)^2 \\ &= (bc-ca-ab+a^2+b^2-2bc+c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0. \end{aligned}$$

따라서  $(b-a)\omega = c-b$ 이거나  $(b-a)\omega^2 = c-a$ 이다. 두번째 식은  $(b-a)\omega^3 = (c-a)\omega$ 와 동치이므로  $(c-b)\omega = b-a$ 이다. 이로부터  $|b-a| = |c-b|$ 를 얻고  $a$ 와  $b$ ,  $a$ 와  $c$ 를 잇는 두 선분의 사잇각은  $\pi/3$ 이다. 그림 0.3을 참고하라.

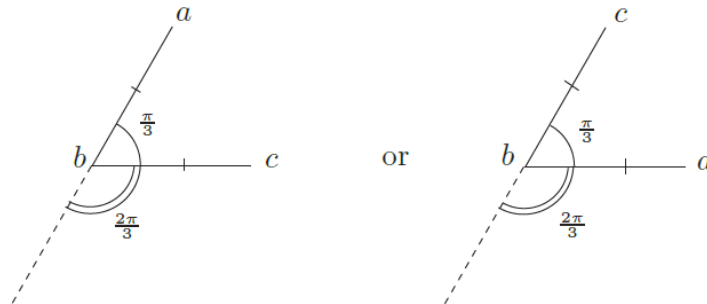


Fig. 5.4  $a, b, c$  form an equilateral triangle.

Figure 0.3: 정삼각형을 이루는 세 점  $a, b, c$

두 가지 그림 모두 세 점  $a, b, c$ 는 정삼각형을 이룬다.  $a, b, c$ 가 실수인 경우는 한 점  $r \in \mathbb{R}$ 로 모이게 되어  $a = b = c (= r)$ 이 되어 실수의 경우도 원하는 결과를 얻는다.

## 연습문제 ??

$\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 이  $\omega^3 = 1$ 을 만족한다고 하자.  $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ 이고,  $\omega \neq 1$ 이므로  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이다. 또한,  $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ 이므로,

$$(1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \omega^k + \omega^{2k}).$$

그런데,

$$\begin{aligned} (1 + \omega^k + \omega^{2k}) &= \begin{cases} 1 + 1 + 1, & k \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 + \omega + \omega^2, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 + \omega^2 + \omega^4, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3, & k \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0, & k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

에서

$$(1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} = 3 \cdot \left( \binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} \right).$$

다른 방법으로 보면,

$$\begin{aligned} (1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n} &= 2^{3n} + (-\omega^2)^{3n} + (-\omega)^{3n} \\ &= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n \\ &= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

## 연습문제 ??

그림 0.4와 같이 평면위의 네 점  $A, B, C, D$ 를 복소수  $a, b, c, d$ 에 각각 대응시키자.  $AB'$ 은  $A$ 를 중심으로 하여  $AB$ 를 반시계방향으로  $90^\circ$ 회전한 것이므로  $B'$ 은 복소수  $a - i(b - a)$ 에 대응된다.  $P$ 는  $BB'$ 의 중점이므로 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{a + b - i(b - a)}{2}.$$

같은 방법으로  $Q, R, S$ 는 각각 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{b + c - i(c - b)}{2}, \quad \frac{c + d - i(d - c)}{2}, \quad \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

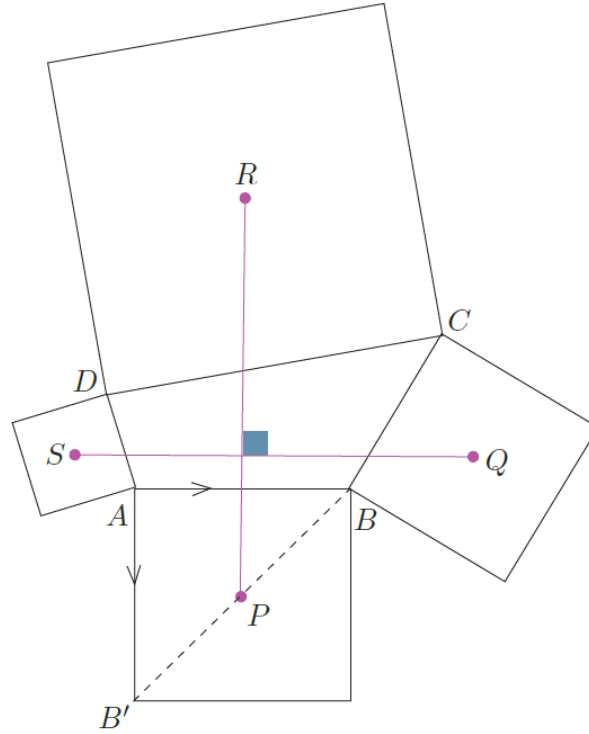


Fig. 5.5  $RP$  and  $SQ$  have equal lengths and meet at right angles.

Figure 0.4:  $RP$ 와  $SQ$ 는 길이가 같고 수직으로 만난다

점  $P, Q, R, S$ 에 대응되는 복소수를 각각  $p, q, r, s$ 라 하면,

$$\begin{aligned}
 i(q - s) &= i \left( \frac{b + c - i(c - b)}{2} - \frac{d + a - i(a - d)}{2} \right) \\
 &= \frac{-b + c - a + d + i(b + c - d - a)}{2} \\
 &= \frac{-a - b + i(b - a)}{2} + \frac{c + d - i(d - c)}{2} = -p + r
 \end{aligned}$$

이므로,  $|q - s| = |p - r|$ 이 되어  $\ell(QS) = \ell(PR)$ 이다. 또한,  $i$ 를 곱하는 것은 원점을 중심으로  $90^\circ$  회전을 의미하기 때문에  $PR \perp QS$ 이다.

## 연습문제 ??

실수  $x_1, x_2, y_1, y_2$ 에 대하여  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 라 하자. 그러면  $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 = i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ 이고,

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2|^2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2 \\
 &= x_1^2 x_2^2 - \underbrace{2x_1 x_2 y_1 y_2} + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + \underbrace{2x_1 y_2 y_1 x_2} + y_1^2 x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(y_2^2 + x_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2.
\end{aligned}$$

$|z_1|, |z_2|, |z_1 z_2|$ 는 모두 음이 아닌 실수 이므로  $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$ 가 성립한다.

## 연습문제 ??

$z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하자. 그러면,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x - iy} = x - i(-y) = x + iy = z.$$

또한,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(-xy + xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

끝으로,

$$\begin{aligned}
\frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z), \\
\frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{\cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,

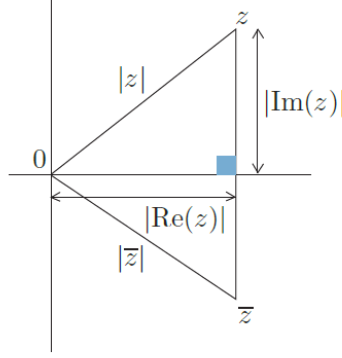
$$\begin{aligned}
|z| &= |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |x - iy| = |\bar{z}|, \\
|\operatorname{Re}(z)| &= |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|, \\
|\operatorname{Im}(z)| &= |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|.
\end{aligned}$$

$\bar{z}$ 는  $z$ 를 실수축에 대칭시켜 얻어지며,  $0 \in \mathbb{R}$ 이므로 원점과  $z$ 와의 거리는  $\bar{z}$ 와의 거리와 같다. 즉,  $|z| = |\bar{z}|$ . 부등식  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ 와  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ 는 아래 그림에서 직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 길다는 것을 의미한다.

## 연습문제 ??

우선  $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| = |a||z| < 1 \cdot 1 = 1$ 이므로,  $\bar{a}z \neq 1$ 이고,

$$\begin{aligned}
\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \cdot \overline{\left( \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)} &= \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{1 - a\bar{z}} = \frac{z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z}} \\
&= \frac{|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 + |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.
\end{aligned}$$

따라서  $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = 1 - \underbrace{\frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}}_{\geq 0 \text{ } (|z| < 1, |a| < 1 \text{ 이므로})} \leq 1 - 0 = 1.$

## 연습문제 ??

$w \in \mathbb{C}$ 가  $p(w) = 0$ , 즉,  $c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d = 0$ 을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\overline{c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d} = \bar{0} = 0$$

이고, 모든  $c_k$  ( $0 \leq k \leq d$ )가 실수이므로

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{c_0 + c_1w + \cdots + c_dw^d} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{w} + \cdots + \bar{c}_d\bar{w}^d \\
&= \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{w} + \cdots + \bar{c}_d\overline{w^d} = c_0 + c_1\bar{w} + \cdots + c_d(\bar{w})^d.
\end{aligned}$$

마지막 등식에서

$$\bar{w}^k = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = (\bar{w})^k, \quad 1 \leq k \leq d$$

를 사용하였다. 따라서,  $0 = c_0 + c_1\bar{w} + \cdots + c_d(\bar{w})^d = p(\bar{w})$ .

## 연습문제 ??

$a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$ 라고 하자. 단,  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ . 그러면,

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot |b|(\cos \beta - i \sin \beta) \\ &= |a||b|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta) \end{aligned}$$

이고  $\text{Im}(a\bar{b}) = |a||b|(-(\cos \alpha)(\sin \beta) + (\sin \alpha)(\cos \beta)) = |a||b| \sin(\alpha - \beta)$ . 0,  $a$ ,  $b$ 를 꼭지점으로 하는  $\triangle OAB$ 의 면적은 ( $O \equiv 0$ ,  $A \equiv a$ ,  $B \equiv b$ )

$$\frac{1}{2}\ell(OA)\ell(OB) \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| \cdot |\sin(\alpha - \beta)| = \frac{1}{2}|\text{Im}(a\bar{b})| = \left| \frac{\text{Im}(a\bar{b})}{2} \right|.$$

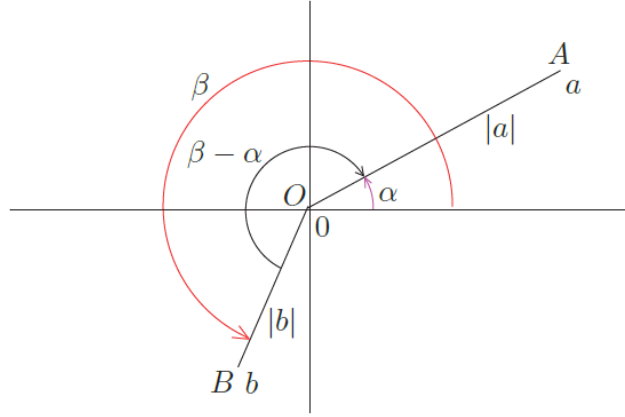


Fig. 5.6 The area of  $\triangle OAB$  formed by the triangle with vertices at 0,  $a$ ,  $b$ .

Figure 0.5: 0,  $a$ ,  $b$ 를 꼭지점으로 하는  $\triangle OAB$ 의 면적

## 연습문제 ??

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\overline{i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{bmatrix}} = -i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{bmatrix}.$$

한편, 정사각행렬  $M = [m_{ij}]$ 에 대하여,

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \cdot m_{i\sigma(i)},$$

여기서,  $S_n$ 은  $\{1, \dots, n\}$ 에 대한 모든 치환(permutation)의 집합이다.

$$\overline{\det M} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \overline{m_{i\sigma(i)}} = \det \overline{M},$$

여기서,  $\overline{M}$ 은  $M$ 의 모든 원소에 대하여 켤레복소수를 취한 것이다. 따라서,

$$\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \\ 1 & \overline{z_3} & z_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix},$$

마지막 등식은 두번째 열과 세번째 열을 바꾼 것이다. 종합하면,

$$\begin{aligned} \overline{i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} &= -i \cdot \overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = -i \cdot \left( -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix} \right) \\ &= i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

따라서,  $w$ 는 켤레복소수와 동일하므로 실수이다.

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &\quad + z_1 \overline{z_1} + z_1 \cdot (-\overline{z_2}) + (-z_2) \cdot \overline{z_1} + (-z_2)(-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} + \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - \cancel{z_1 \cdot \overline{z_2}} - \cancel{z_2 \cdot \overline{z_1}} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

복소평면에서  $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$ 를 꼭지점으로 하는 평행사변형  $P$ 를 생각하자. 그러면,  $|z_1 + z_2|$ 는  $P$ 의 한쪽 대각선의 길이가 되고,  $|z_1 - z_2|$ 는 다른쪽 대각선의 길이가 된다. 또한,  $|z_1|, |z_2|$ 는  $P$ 의 두변의 길이이다. 따라서 위의 식이 의미하는 것은 “평행사변형에서 대각선 길이의 제곱의 합은 변의 길이의 제곱의 합의 두배와 같다”이다.

## 연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,  $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ 이므로

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \quad (0.8)$$

모든  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여, 식 (0.8)에서  $z_1$ 과  $z_2$ 의 역할을 바꾸어도 성립하므로

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \quad (0.9)$$

식 0.8과 0.9로부터  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ 이다.

## 연습문제 ??

(1),(2),(3):

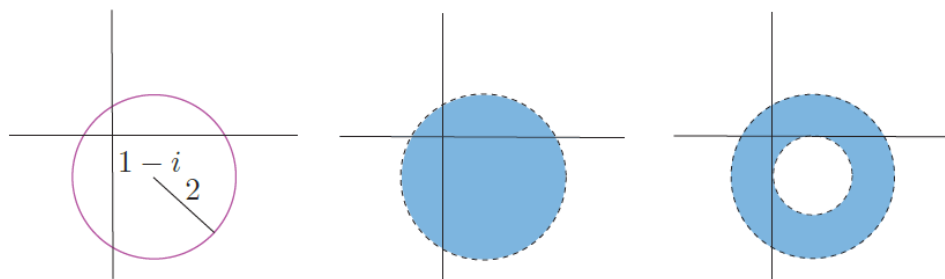
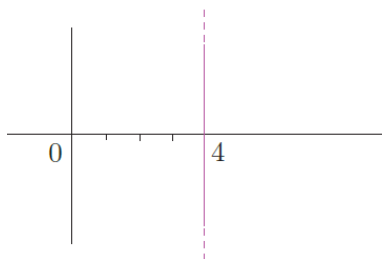


Fig. 5.7 Left to right: The set of points described by  $|z - (1 - i)| = 2$ ,  $|z - (1 - i)| < 2$  and  $1 < |z - (1 - i)| < 2$ , respectively.

Figure 0.6: 왼쪽부터  $|z - (1 - i)| = 2$ ,  $|z - (1 - i)| < 2$ ,  $1 < |z - (1 - i)| < 2$

(4):  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,  $\operatorname{Re}(z - (1 - i)) = 3$ 은  $x - 1 = 3$ 과 동치이므로,  $x = 4$ 이다.



(5):  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,  $|\operatorname{Im}(z - (1 - i))| < 3$ 은  $|y + 1| < 3$ , 즉,  $-4 < y < 2$ 와 같다.

(6):  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|\}$ 는  $1 - i$ 와  $1 + i$ 에서 같은 거리에 있는 복소수  $z$ 의 집합이다. 따라서,  $1 - i$ 와  $1 + i$ 을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다. 즉, 실수축이다.

(7): 방정식  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$ 는  $z$ 에서  $1 + i$ 까지의 거리와  $1 - i$ 까지의 거리의 합이 2가 됨을 의미한다. 그런데  $1 - i$ 와  $1 + i$ 의 거리가 2이므로  $z$ 는  $1 - i$ 와  $1 + i$ 를 잇는 선분에 있다.



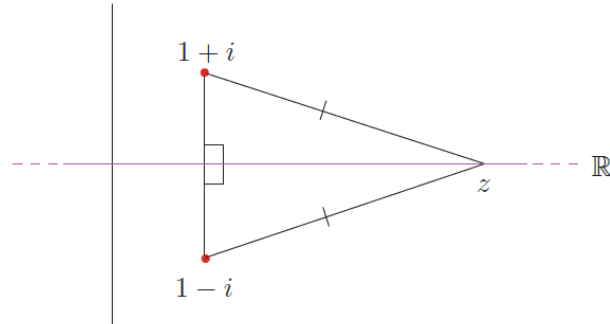
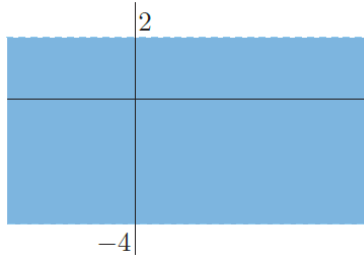


Fig. 5.8 The set of points  $z$  satisfying  $|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$  is  $\mathbb{R}$ .

Figure 0.7:  $|z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|$ 를 만족하는 집합은  $\mathbb{R}$

직접 계산하는 방식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다.  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &\geq |y+1| + |y-1| \geq 1 + y + 1 - y = 2 \end{aligned}$$

이므로  $|y+1| + |y-1| = 2$ 이고,  $x = 1$ 이다.

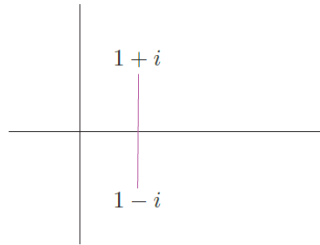


Fig. 5.9 The set of points  $z$  satisfying  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$  is the line segment joining  $1 - i$  to  $1 + i$ .

Figure 0.8:  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2$ 를 만족하는 집합은  $1 - i$ 와  $1 + i$ 를 잇는 선분이다.

(8): 방정식  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 3$ 을 만족하는 집합은 초점이  $1 + i$ 와  $1 - i$ 인 타원  $E$ 이 된다. 따라서,  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3\}$ 은 타원  $E$ 의 내부가 된다.

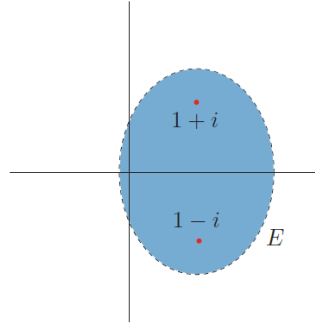


Fig. 5.10 The set of points  $z$  satisfying  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3$  is the interior of the ellipse  $E$ .

Figure 0.9:  $|z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3$ 을 만족하는 집합은 타원  $E$ 의 내부이다.

## 연습문제 ??

$z \neq 0$ 에 대하여  $p(z) = z^d \left( c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|c_{d-1}|}{n} + \cdots + \frac{|c_1|}{n^{d-1}} + \frac{|c_0|}{n^d} \right) = 0$$

이므로, 다음을 만족하도록 충분히 큰  $N$ 을 잡을 수 있다.

$$\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} < \frac{|c_d|}{2}.$$

그러면  $|z| > N =: R$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z|^d \left| c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right| \\ &\geq |z|^d \left( |c_d| - \left| \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d} \right| \right) \\ &\geq |z|^d \left( |c_d| - \left( \frac{|c_{d-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_1|}{|z|^{d-1}} + \frac{|c_0|}{|z|^d} \right) \right) \\ &\geq |z|^d \left( |c_d| - \left( \frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} \right) \right) \\ &\geq |z|^d \left( |c_d| - \frac{|c_d|}{2} \right) = \underbrace{\frac{|c_d|}{2}}_{=: M} |z|^d. \end{aligned}$$

## 연습문제 ??

( $\Leftarrow$ ) :

실수열  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 가 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다고 하자. 그러면, 주어진  $\epsilon > 0$ 에 대하여, 충분히 큰  $N$ 이 존재하여  $n > N$ 이면

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

을 만족하게 할 수 있고,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L))^2 + (\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 은  $L$ 로 수렴한다.

( $\Rightarrow$ ) :

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $L$ 로 수렴한다고 가정하자.  $n > N$ 이면  $|z_n - L| < \epsilon$ 이 되도록 하는  $N$ 을 잡을 수 있다. 그러면 모든  $n > N$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| &= |\operatorname{Re}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon, \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| &= |\operatorname{Im}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

이 되어  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다.

## 연습문제 ??

( $\Rightarrow$ ) :

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $L$ 로 수렴한다고 가정하자. 그러면  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 따라서  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(-\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 은 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $-\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 즉,  $(\operatorname{Re}(\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각  $\operatorname{Re}(\bar{L})$ 과  $\operatorname{Im}(\bar{L})$ 로 수렴한다. 결론적으로  $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\bar{L}$ 로 수렴한다.

( $\Leftarrow$ ) :

$(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\bar{L}$ 로 수렴한다고 하자. 앞의 증명에서  $((\bar{z}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $(\bar{L})$ 로 수렴한다. 다시 쓰면,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $L$ 로 수렴한다.

## 연습문제 ??

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\mathbb{C}$ 의 코시수열이라고 하자.

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| &= |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m|, \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z_m)| &= |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| \end{aligned}$$

이므로  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 도 코시수열이다.  $\mathbb{R}$ 의 완비성으로부터 두 수열은 수렴한다. 각각  $a, b \in \mathbb{R}$ 로 수렴한다고 하자. 그러면  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 은  $\mathbb{C}$ 에서  $a + ib$ 로 수렴한다. 따라서  $\mathbb{C}$ 는 완비공간이다.

## 연습문제 ??

$z_0 \in \mathbb{C}$ 와  $\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자.  $\delta = \epsilon > 0$ 으로 잡으면,  $|z - z_0| < \delta$ 일 때,

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon$$

을 만족한다. 따라서  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 는  $z_0$ 에서 연속이고,  $z_0 \in \mathbb{C}$ 는 임의로 선택할 수 있으므로  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 연속이다.

## 연습문제 ??

$U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$ 이라 하자.  $U$ 의 여집합을  $F := U^C$ 로 쓰자.  $F$ 에 정의된 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\mathbb{C}$ 에서  $L$ 로 수렴한다면,

$$\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n) \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (0.10)$$

이고  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴한다. 따라서,  $(\operatorname{Re}(z_n) \cdot \operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 도 수렴하며 극한은  $\operatorname{Re}(L) \cdot \operatorname{Im}(L)$ 이 된다. 식 (0.10)으로부터  $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1$ 이므로  $L \in F$ 이다. 결론적으로  $F$ 는 닫힌집합이고, 그 여집합인  $U$ 는 열린집합이 된다.

이제  $U$ 가 영역이 아님을 보이자. 우선 영역이라고 가정하자. 그러면  $\gamma(a) = 2 + 2i \in U$ 와  $\gamma(b) = -2 - 2i \in U$ 를 잇는 (계단형) 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ 가 존재한다. 함수  $z \mapsto \operatorname{Re}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 연속이므로,  $t \mapsto \operatorname{Re}(\gamma(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 도 연속이다.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \operatorname{Re}(\gamma(a)) = \operatorname{Re}(2 + 2i) = 2, \\ \varphi(b) &= \operatorname{Re}(\gamma(b)) = \operatorname{Re}(-2 - 2i) = -2. \end{aligned}$$

그런데,  $\varphi(a) = 2 > 0 > -2 = \varphi(b)$ 이므로, 중간값정리에 의해  $0 = \varphi(t_*) = \operatorname{Re}(\gamma(t_*))$ 를 만족하는  $t_* \in [a, b]$ 가 존재한다. 한편,  $\operatorname{Re}(\gamma(t_*)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t_*)) = 0 \not> 1$  이므로  $\gamma(t_*) \notin U$ 이다. 이는  $U$ 가 경로연결된 집합이라는 가정에 모순이 되어,  $U$ 는 영역이 될 수 없다.

## 연습문제 ??

$D$ 가 열린집합이므로 이를 실수축에 대칭시킨  $D^*$ 도 열린집합이다.  $w_1, w_2 \in D^*$ 라 하면,  $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in D$ 이다.  $D$ 가 영역이므로  $\gamma(a) = \overline{w_1}$ ,  $\gamma(b) = \overline{w_2}$ 이고 모든  $t \in [a, b]$ 에 대하여  $\gamma(t) \in D$ 인 계단형 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재한다. 이제  $\gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $\gamma^*(t) = \overline{\gamma(t)}$ 로 정의하자. 그러면  $\gamma^*(a) = \overline{\overline{w_1}} = w_1$ ,  $\gamma^*(b) = \overline{\overline{w_2}} = w_2$ 이고, 모든  $t \in [a, b]$ 에 대하여  $\gamma^*(t) \in D^*$ 이다.  $\gamma^*$ 는 연속함수  $\gamma$ 와  $z \mapsto \bar{z}$ 의 합성함수이므로 연속이다.  $\gamma$ 가 계단형 경로이므로,  $k = 0, 1, \dots, n$ 에 대하여  $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 는 실수부 또는 허수부가 상수인

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$$

가 존재한다. 마찬가지로  $\gamma^*|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 도 실수부 또는 허수부가 상수이다. (실수부는  $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 의 실수부와 같고 허수부는  $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ 의 허수부에 마이너스 부호를 붙인 것과 같다.) 따라서,  $\gamma^*$ 도 계단형 경로이고,  $D^*$ 는 경로연결된 집합이다.

$D^*$ 는 열린집합이고 경로연결된 집합이므로 영역이 된다.

## 연습문제 ??

$$\begin{aligned}\exp\left(i\frac{9\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1(0 + i \cdot 1) = i, \\ \exp(3 + \pi i) &= e^3(\cos\pi + i\sin\pi) = e^3(-1 + i \cdot 0) = -e^3.\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,  $e^x(\cos y + i\sin y) = \pi i$ 를 만족해야 한다. 양변의 절대값을 취하면  $e^x = \pi$ 이므로  $x = \log \pi$ 이다. 따라서  $\cos y + i\sin y = i$ 가 되어  $\sin y = 1$ ,  $\cos y = 0$ 을 만족한다. 따라서  $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )이다. 그림 0.10을 참고하라.

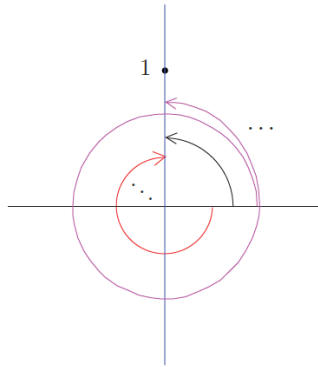


Fig. 5.11 Possible values of  $y$  when  $\cos y + i\sin y = i$  are given by  $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Figure 0.10:  $\cos y + i\sin y = i$ 를 만족하는  $y$ 는  $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )로 주어진다.

$\exp z = \pi i$ 라면,

$$z \in \left\{ \log \pi + i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

역으로 어떤  $k \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $z \in \log \pi + i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$ 라면,

$$\exp z = e^{\log \pi} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right) = \pi(0 + i \cdot 1) = \pi i.$$

결론적으로  $\exp z = \pi i$ 일 필요충분조건은  $z \in \left\{ \log \pi + i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$ 이다.

## 연습문제 ??

$\gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ 라고 하자. 그러면,

$$\gamma(t) = \exp(it) = e^0 (\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t.$$

점  $(\cos t, \sin t)$ 는 중심이  $(0, 0)$ 이고 반지름이 1인 원 위에 있고  $t$ 가 증가함에 따라 반시계방향으로 움직인다. 따라서 곡선  $t \mapsto \gamma(t)$ 는 반시계방향으로 도는 원이 된다. 그림 0.11을 참고하라.

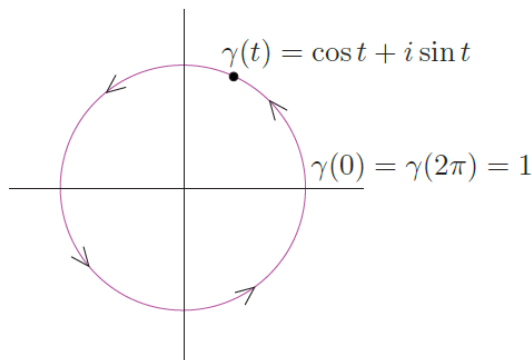


Fig. 5.12 The curve  $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ .

Figure 0.11: 곡선  $t \mapsto \gamma(t) := \exp(it), t \in [0, 2\pi]$

## 연습문제 ??

$\exp(t + it) = e^t(\cos t + i \sin t)$ 이므로 곡선은  $t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$ 로 주어진다. 대강의 그림을 그려 보면 0.12와 같다. 나선형 곡선이 되며,  $t \searrow -\infty$ 일 때  $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ 는 0으로 수렴하고,  $t \nearrow +\infty$ 일 때 나선형의 바깥으로 발산한다.

## 연습문제 ??

$$\exp(z^2) = \exp((x + iy)^2) = \exp(x^2 - y^2 + 2xyi) = e^{x^2 - y^2}(\cos(2xy) + i \sin(2xy))$$

이므로  $|\exp(z^2)| = e^{x^2 - y^2}$ ,  $\operatorname{Re}(\exp(z^2)) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$ ,  $\operatorname{Im}(\exp(z^2)) = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$ 이다.

$z \neq 0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \exp \frac{1}{z} &= \exp \left( \frac{1}{x + iy} \right) = \exp \left( \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} \left( \cos \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + i \sin \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) \end{aligned}$$

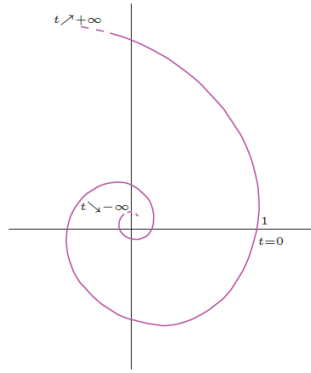


Fig. 5.13 The image of the line  $y = x$  under the map  $z = x + iy \mapsto \exp z$ .

Figure 0.12: 함수  $z = x + iy \mapsto \exp z$ 에 의한 직선  $y = x$ 의 상

이므로

$$\begin{aligned} \left| \exp \frac{1}{z} \right| &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, \\ \operatorname{Re} \left( \exp \frac{1}{z} \right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right), \\ \operatorname{Im} \left( \exp \frac{1}{z} \right) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

연습문제 ??

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} &(\sin z_1)(\cos z_2) + (\cos z_1)(\sin z_2) \\ &= \left( \frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i} \right) \left( \frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2} \right) \left( \frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i} \right) \\ &= \frac{2 \exp(i(z_1 + z_2)) - 2 \exp(-i(z_1 + z_2))}{4i} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

연습문제 ??

$z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = (\cos x)(\cos(iy)) - (\sin x)(\sin(iy)) \\ &= (\cos x) \left( \frac{e^{-y} + e^y}{2} \right) - (\sin x) \left( \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos x)(\cosh y) - (\sin x) \left( -\frac{\sinh y}{i} \right) \\
&= (\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y).
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= (\cos x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2(\sinh y)^2 \\
&= (1 - (\sin x)^2)(\cosh y)^2 + (\sin x)^2 \left( \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} \right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2 \left( \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} - 1 \right) \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2((\cosh y)^2 - 1) \\
&= (\cosh y)^2 - \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} + \cancel{(\sin x)^2(\cosh y)^2} - (\sin x)^2 \\
&= (\cosh y)^2 - (\sin x)^2.
\end{aligned}$$

## 연습문제 ??

$z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )이라 하면,  $\cos z = 3$ 은 다음과 동치이다.

$$(\cos x)(\cosh y) = 3, \quad (0.11)$$

$$(\sin x)(\sinh y) = 0. \quad (0.12)$$

여기서  $\sinh y = 0$ 는  $y = 0$ 와 동치이다. 그런데  $y = 0$ 는 불가능하다. 왜냐하면,  $z = x + iy = x$ 가 실수가 되는데  $\cos x = 3$ 을 만족하는 실수  $x$ 는 없기 때문이다. 그러므로 식 (0.12)에서  $\sin x = 0$ 이다. 따라서  $x \in \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ . 한편,  $\cos x = \pm 1$ 이고, 모든  $y \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$$

이므로 식 (0.11)에서  $\cos x$ 는  $-1$ 이 될 수 없다. 결론적으로  $x \in \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ 이고  $\cos x = 1$ 이다.

이제  $\cosh y = 3$ 에서

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 3.$$

즉,  $(e^y)^2 - 6e^y + 1 = 0$ .

$$e^y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

에서  $y = \log(3 + 2\sqrt{2})$  또는

$$y = \log(3 - 2\sqrt{2}) = \log \frac{9 - 8}{3 + 2\sqrt{2}} = \log \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = -\log(3 + 2\sqrt{2})$$

이므로  $z \in \{2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2}), n \in \mathbb{Z}\}$ .



역으로, 어떤  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $z = 2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2})$ 라면,

$$\begin{aligned}\cos z &= \underbrace{(\cos(2\pi n))}_{=1} (\cosh(\pm(3 \pm 2\sqrt{2}))) - i \underbrace{(\sin(2\pi n))}_{=0} (\sinh \cdots) \\ &= \cosh(\pm(3 \pm 2\sqrt{2})) = \frac{e^{\log(3+2\sqrt{2})} + e^{-\log(3+2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2} + (3 + 2\sqrt{2})^{-1}}{2} \frac{3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}}{2} = 3.\end{aligned}$$

종합하면,  $\cos z = 3$ 일 필요충분조건은  $z \in \{2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2}), n \in \mathbb{Z}\}$ 이다.

연습문제 ??

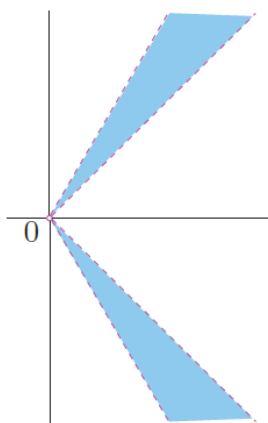


Fig. 5.14 The set  $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \frac{\pi}{4} < |\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\}$ .

Figure 0.13:  $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \frac{\pi}{4} < |\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3}\right\}$

연습문제 ??

$$\begin{aligned}\text{Log}(1+i) &= \text{Log}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \text{Log}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \text{Log}\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$$\text{Log}(-1) = \text{Log}(1 \cdot \exp(i\pi)) = \log 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi,$$

$$\operatorname{Log}(1) = \operatorname{Log}(1 \cdot \exp(i0)) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

$z = -1$ 이면,  $\operatorname{Log}(z^2) = \operatorname{Log}((-1)^2) = \operatorname{Log}(1) = 0$ 인 반면,  $2 \cdot \operatorname{Log}(z) = 2 \cdot \operatorname{Log}(-1) = 2 \cdot i\pi$ .  
따라서  $z = -1$ 일 때,

$$\operatorname{Log}(z^2) = 0 \neq 2 \cdot i\pi = 2 \cdot \operatorname{Log}(z).$$

## 연습문제 ??

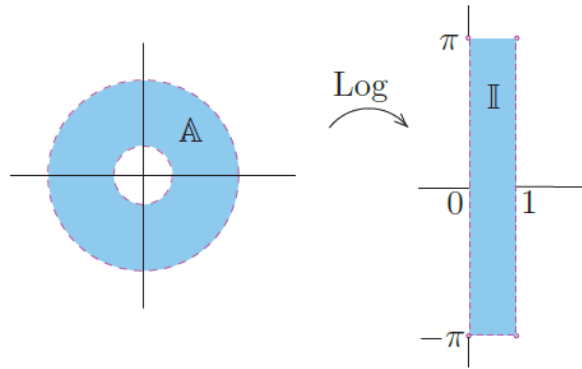
$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < z < e\}$ 라 하면,  $z \in \mathbb{A}$ 일 필요충분조건은  $z = r \exp(i \operatorname{Arg}(z))$ 이고  $1 < r < e$ ,  $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ 이다. 이런  $z$ 에 대하여

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(r \exp(i \operatorname{Arg}(z))) = \log r + i \operatorname{Arg}(z)$$

이고  $0 = \log 1 < \log r < \log e = 1$ 이다. 따라서 상은 직사각형

$$\mathbb{I} := \{x + iy : 0 < x < 1, -\pi < y < \pi\}$$

가 된다.



역으로,  $x + iy \in \mathbb{I}$ 이면,  $z := \exp(x + iy) = e^x \exp(iy) \in \mathbb{A}$ 이다. 왜냐하면,  $|z| = e^x \in (1, e)$ 이고  $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(e^x \exp(iy)) = \log e^x + iy = x + iy$ 이기 때문이다. 따라서  $\mathbb{A}$ 의  $\operatorname{Log}$ 함수에 대한 상은 정확히  $\mathbb{I}$ 와 일치한다.

## 연습문제 ??

$(1 + i)^{1-i}$ 의 주치는  $\exp((1 - i) \operatorname{Log}(1 + i))$ 이다.

$$\operatorname{Log}(1 + i) = \operatorname{Log}\left(\sqrt{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

따라서  $(1+i)^{1-i}$ 의 주치를 계산하면,

$$\begin{aligned}\exp((1-i)\operatorname{Log}(1+i)) &= \exp\left((1-i)\left(\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= e^{\log\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\log\sqrt{2}\right) \\ &= e^{\frac{\pi}{4}}(1+i)\left(\cos\left(\log\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\log\sqrt{2}\right)\right).\end{aligned}$$

## 2장 - 연습문제 풀이

### 연습문제 ??

$z \neq 0$ 에 대하여

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0=\frac{|z|^2-0}{z-0}=\frac{|z|^2}{z}.$$

주어진  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $\delta = \epsilon$ 으로 잡으면,  $0 < |z-0| = |z| < \delta$ 일 때,

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}-0\right|=\left|\frac{|z|^2}{z}\right|=\frac{|z|^2}{|z|}=|z|<\delta=\epsilon.$$

