

# **빠르게 따라잡는 복소해석학**

## **A Friendly Approach to Complex Analysis**

염용진, 허재성 譯

Update on December 30, 2022



# 목 차

<b>머리말</b>	<b>7</b>
<b>1 복소수와 기하학적 의미</b>	<b>15</b>
1.1 복소수체 . . . . .	15
1.2 복소수의 기하학적 표현 . . . . .	18
1.3 $\mathbb{C}$ 의 위상 . . . . .	25
1.3.1 $\mathbb{C}$ 에서의 거리 개념 . . . . .	25
1.3.2 열린 원판, 열린 집합, 닫힌 집합, 콤팩트 집합 . . . . .	26
1.3.3 수렴성과 연속성 . . . . .	27
1.3.4 영역 . . . . .	28
1.4 지수함수와 관련 함수들 . . . . .	30
1.4.1 지수함수 $\exp z$ . . . . .	31
1.4.2 삼각함수 . . . . .	35
1.4.3 로그함수 . . . . .	36
1.5 참고 . . . . .	39
<b>2 복소미분</b>	<b>41</b>
2.1 복소 미분가능성 . . . . .	42
2.2 코시-리만 방정식 . . . . .	48
2.3 복소미분의 기하학적 의미 . . . . .	60
2.4 d-bar 연산자 . . . . .	67
2.5 참고 . . . . .	69

<b>3 코시 적분 정리와 응용</b>	<b>71</b>
3.1 경로적분의 정의 . . . . .	72
3.1.1 하나의 중요한 적분계산 . . . . .	79
3.2 경로적분의 성질 . . . . .	81
3.3 경로적분의 기본정리 . . . . .	86
3.4 코시 적분정리 . . . . .	89
3.4.1 특별한 경우: 단순연결 영역 . . . . .	94
3.4.2 복소해석함수가 아닌 경우는 어떻게 될까? . . . . .	97
3.5 부정적분의 존재성 . . . . .	100
3.6 코시 적분공식 . . . . .	103
3.7 복소해석함수는 무한번 미분가능하다 . . . . .	108
3.8 리우비유 정리와 대수학의 기본정리 . . . . .	111
3.9 모레라 정리: 코시 적분정리의 역 . . . . .	113
3.10 참고 . . . . .	116
<b>4 테일러 급수와 로랑 급수</b>	<b>117</b>
4.1 급수 . . . . .	118
4.2.1 제곱급수와 수렴영역 . . . . .	119
4.2.2 복소해석함수의 제곱급수 . . . . .	124
4.3 테일러 급수 . . . . .	128
4.4 근의 분류 . . . . .	133
4.5 항등정리 . . . . .	137
4.6 최대절대값정리 . . . . .	140
4.7 로랑 급수 . . . . .	141
4.8 특이점의 분류 . . . . .	151
4.8.1 본질적 특이점 근방에서의 역동적 변화 . . . . .	160
4.9 유수 정리 . . . . .	162

4.10 참고 . . . . .	171
<b>5 조화함수</b>	<b>173</b>
5.1 조화함수란? . . . . .	173
5.2 조화함수와 복소해석함수의 연결고리는 무엇인가? . . . . .	175
5.3 (복소해석함수 $\leftrightarrow$ 조화함수)의 양방향성의 결과들 . . . . .	179
5.3.1 매끄러운 조화함수 . . . . .	180
5.3.2 평균값 정리 . . . . .	180
5.3.3 최대원리 . . . . .	181
5.4 디리클레 문제의 해의 유일성 . . . . .	182
5.5 참고 . . . . .	185

목 차

목 차

# 머리말

우선 복소함수론은 무엇이고 왜 중요한지 간단히 살펴보자. 복소수라는 개념 만큼은 다들 언젠가 배웠을 것이므로 복소수에 친숙하다는 가정하에 이야기를 전개한다. 1장과 그 이후에 개념을 처음부터 만들어갈 예정이니 독자들은 머리말에서 이해하지 못한 부분에 대하여 걱정할 필요는 없다.

## 복소해석학이란?

실해석학(real analysis)에서는 실수에 대한 미적분을 엄밀하게 정의하며 실수열의 수렴성, 실변수 함수의 연속성, 미분, 적분의 개념을 공부한다. 이를 바탕으로 복소해석학(complex analysis)은 복소수를 대상으로 하여 유사한 개념들을 공부하는 것으로 추측해 볼 수 있다. 이 예상은 부분적으로 참이다. 미분을 공부하기 전까지는 실해석학과 비교할 때 복소해석학만의 새로운 특징이 보이지 않는다. 하지만 미분부터는 복소해석학과 실해석학의 근본적인 차이가 나타난다. 따라서 복소해석학은 해석학을 복소수 범위로 단순 확장한 것이 아니며, 훨씬 더 특별한 의미를 갖는다.

복소해석학은 “복소 의미로 미분가능한” 함수를 다룬다.

실변수 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

을 만족하는 실수  $L$ 이 존재하면 함수  $f$ 가  $x_0 \in \mathbb{R}$ 에서 **미분가능**하다고 한다. 즉, 모든  $\epsilon > 0$ 에 대하여, 대응되는  $\delta > 0$ 가 존재하여

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ 이면 } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \epsilon \text{ 을 만족한다.}$$

다른 방법으로 표현하면, 거리  $\epsilon$ 이 주어질 때,  $x_0$ 는 아니면서 충분히 가까운 모든  $x$ 에 대하여 변화율

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

와 실수  $L$ 의 거리가  $\epsilon$ 보다 작게 만들 수 있다.

같은 방법으로, 복소함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L$$

을 만족하는 복소수  $L$ 이 존재하면 복소함수  $f$ 가  $z_0 \in \mathbb{C}$ 에서 **복소미분가능**하다고 한다. 즉, 모든  $\epsilon > 0$ 에 대하여, 대응되는  $\delta > 0$ 가 존재하여

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ 이면 } \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L \right| < \epsilon \text{ 을 만족한다.}$$

유일한 차이는 **복소수 절대값**으로 거리를 나타낸 것 뿐이며 직관적인 방법으로 실변수 함수의 미분을 일반화 한 것으로 보인다.

하지만, 단순한 일반화로 생각했던 것과는 달리 깊은 차이가 있으며, 복소미분 가능한 함수들의 집합은 미분가능한 실변수 함수들의 집합과는 근본적인 차이가 있음을 살펴볼 것이다. 이와 관련된 예제를 살펴보자.

**예제 0.1.** 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$  라고 정의하자.



Fig. 0.1 Graphs of the functions  $f$  and its derivative  $f'$ .

Figure 0.1: 함수  $f$ 와 도함수  $f'$ 의 그래프

그러면  $f$ 는 모든 점에서 미분가능하며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

$x \neq 0$ 일 때는  $f'(x)$ 를 직접 계산하여 구할 수 있고,  $f'(0) = 0$ 임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$x \neq 0$ 에 대하여

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| = |x - 0|$$

이므로 주어진  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $\delta = \epsilon (> 0)$ 으로 잡으면  $0 < |x - 0| < \delta$ 일 때,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = |x - 0| < \delta = \epsilon$$

을 얻는다. 하지만,  $f'$ 은 원점  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. 증명은 연습문제 0.1를 참고하라. 요약하면, 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 모든 실수에서 미분가능하지만 그 도함수  $f'$ 은 모든 점에서 미분이 가능하지는 않다.

이와 대조적으로, 복소함수  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 가 모든 복소수에서 복소미분가능하다면, 무한번 복소미분가능함을 공부할 예정이다. 특히, 도함수  $F'$ 도 모든 복소수에서 복소미분가능하다. 실해석학에 익숙하다면 이는 분명 예상을 벗어난 결과이다. 우리는 복소해석학에서 이러한 놀라운 결과가 발생하는 이유에 대하여 살펴볼 예정인데, 복소미분가능하다는 것은 이러한 현상을 가능하게 하는 “엄밀한” 조건을 내포하고 있다. 또한, 이 엄밀함은 복소수의 곱셈의 기하학적인 특성에 따른 결과임을 보일 것이다. ◇

**연습문제 0.1.** 식 (0.1)에서 정의된 함수  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 0에서 미분 불가능함을 보여라.

## 왜 복소해석학을 공부하는가?

복소해석학이 단지 실해석학의 색다른 일반화로만 보일지 모르지만 사실 그렇지 않다. 복소해석학은 수학의 모든 분야에서 필수적이다. 실제로 실해석학과 복소해석학은 뗄 수 없는 관계에 있으며, 응용 과학분야에서도 복소해석학은 중요한 역할을 하고 있음을 살펴볼 예정이다. 여기서는 복소해석학을 공부해야 하는 몇가지 이유를 간단히 나열해보자.

- (1) **편미분방정식:** 복소미분가능한 함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 의 실수부와 허수부  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 는 실함수가 되며,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여  $u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x, y))$ ,  $v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x, y))$ 로 쓸 수 있다.

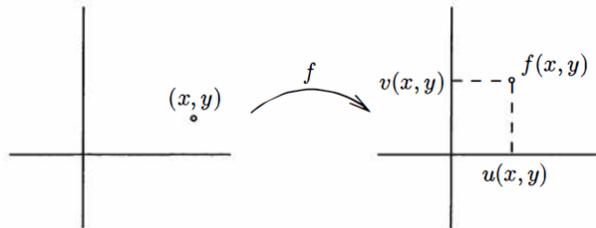


Fig. 0.2 The real and imaginary parts  $u, v$  of  $f$ .

Figure 0.2: 복소함수  $f$ 의 실수부  $u$ 와 허수부  $v$

실수부와 허수부는 라플라스 방정식이라 불리는 중요한 편미분방정식을 만족한다:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

마찬가지로  $\Delta v = 0$ 도 성립한다. 라플라스 방정식은 물리학과 같은 많은 응용문제에서 유도되는 중요한 방정식이다. 예를 들면, 전자기학, 시간에 불변하는 열전도 방정식, 비압축성 유체, 브라운 운동 등에 사용된다.

(2) **실해석:** 복소해석학을 이용하면, 다음 실적분을 쉽게 계산할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

이 문제들은 실수에서 정의된 것이나 복소해석학을 이용하여 풀 수 있다.

또한, 복소해석학을 이용하면 실해석학에서 발생하는 문제들을 명확히 할 수 있다. 예를 들어 다음 함수를 생각해보자.

$$f(x) := \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

그러면  $f$ 는  $x = \pm 1$ 에서 정의되지 않아 특이점을 갖는다. 하지만, 구간  $(-1, 1)$ 에서는 잘 정의된다. 등비급수

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

는  $|x^2| < 1$ 에서, 즉,  $|x| < 1$ 에서 수렴하므로  $x \in (-1, 1)$ 에 대하여

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2} = f(x).$$

$f$ 가  $x = 1$ 과  $x = -1$ 에서 특이점을 가지므로 위의 급수표현은  $x \in (-1, 1)$ 에 대해서만 유효함은 당연해 보인다. 이제 새로운 함수  $g$ 를 다음과 같이 생각해보자.

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

등비급수

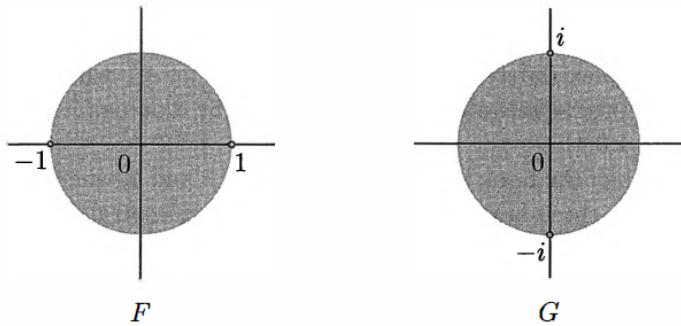
$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

는  $|-x^2| < 1$ 에서, 즉,  $|x| < 1$ 에서 수렴하므로  $x \in (-1, 1)$ 에 대하여

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2} = g(x).$$

따라서  $g$ 는  $x = 1$ 과  $x = -1$ 에서 특별히 문제가 될 이유가 없음에도 불구하고 함수  $g$ 도  $x \in (-1, 1)$ 에 대해서만 유효한 급수표현을 갖는다. 이 미스테리는 책의 후반부에서 해결할 예정이며 다음 복소함수를 살펴볼 필요가 있다.

$$F(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad G(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Fig. 0.3 Singularities of  $F$  and  $G$ .Figure 0.3: 복소함수  $F$ 와  $G$ 의 특이점

두 함수의 정의역을  $\mathbb{R}$ 로 한정하면 각각  $f$ 와  $g$ 를 얻는다. 특히, 복소함수  $G$ 는 이제  $z = \pm i$ 에서 특이점을 갖는다. 그림에서  $z = 0$ 을 중심으로 급수 전개가 유효한 최대 원판은  $G$ 의 특이점을 포함하지 않아야 함을 알 수 있다.

- (3) **응용 문제:** 푸리에 변환, 라플라스 변환, z-변환과 같이 응용 문제 해결에 사용되는 많은 도구들은 복소함수 이론에 의존한다. 이 도구들은 여러 응용 분야에서 나타나는 미분방정식의 해결에 유용하다. 복소해석학은 수리물리와 공학분야의 응용에 중요한데, 예를 들면, 제어이론, 신호처리 등이 있다.
- (4) **해석 정수론:** 자연수와 관련된 많은 문제가 복소해석학을 이용하여 해결된다는 것은 아마도 놀라울 것이다. 예를 들면, 소수정리는 큰 자연수  $n$ 에 대하여  $n$ 보다 작은 소수의 개수  $\pi(n)$ 을 점근적으로 판정하는 방법을 알려준다.

### 정리 0.1. (소수정리)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/(\log n)} = 1.$$

소수정리는 리만 제타함수라는 복소미분가능 함수의 성질을 이용하여 증명할 수 있음이 밝혀졌다. 리만 제타함수와 관련된 해석 정수론의 유명한 미해결 문제로 리만가설이 있다. 리만 제타함수의 모든 비자명해는 복소평면에서 직선  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$  위에 존재한다는 것이다. 우리는 리만 제타함수를 연습문제 4.5에서 만날 것이다.

## 복소해석학에서는 무엇을 배우는가?'

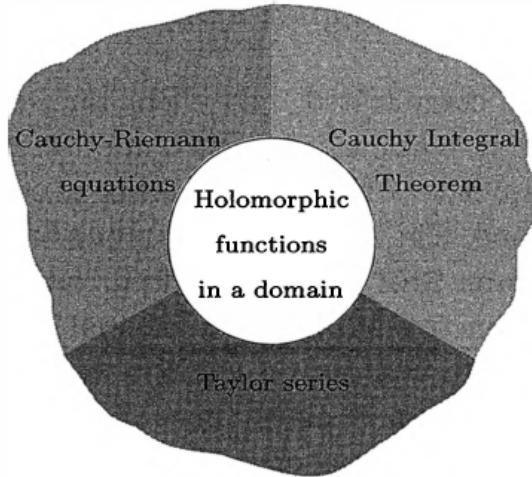
이 과정의 중심이 되는 주제는 다음과 같다.

복소영역에 정의된 복소해석함수들

즉, 복소영역  $D$ 에 정의된 복소미분가능 함수  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 대상이다. “복소영역”  $D$ 에 대한 정확한 의미는 1.3.4 절에서 다룬다.

책의 중심인 2, 3, 4장에서는 핵심 주제인 복소해석(holomorphic) 함수에 빛을 비춰줄 다음 3 가지를 다룬다.

- (1) 코시-리만 방정식
- (2) 코시 적분 정리
- (3) 테일러 급수



다음은 이 책의 핵심정리이다.

**정리 0.2.** 경로연결된 열린집합  $D$ 에 정의된 함수  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 다음은 동치이다.

- (1)  $D$ 의 모든 점  $z$ 에서  $f'(z)$ 가 존재한다.
- (2)  $D$ 의 모든 점  $z$ 에서 모든 차수 ( $n \geq 0$ )의 미분  $f^{(n)}(z)$ 가 존재한다.
- (3) 실수부와 허수부  $u := \operatorname{Re}(f), v := \operatorname{Im}(f)$ 는 연속미분가능하며

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

을 만족한다.

- (4)  $D$ 의 단순연결 부분영역  $S$ 에 대하여 복소해석함수  $F: S \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재하여  $S$ 의 모든 점  $z$ 에서  $F'(z) = f(z)$ 를 만족한다.

- (5)  $f$  가  $D$ 에서 연속이고,  $D$ 의 모든 단순연결 부분영역에서 임의의 조각마다 매끄러운 닫힌곡선  $\gamma$ 에 대하여 다음이 조건이 성립한다.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- (6)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$ 이면  $|z - z_0| < r$ 을 만족하는 임의의  $z$ 에 대하여

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

을 만족하는 복소수열  $(c_n)_{n \geq 0}$ 이 유일하게 존재한다. 부가적으로 계수  $c_n$ 는 다음식으로 구할 수 있다.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

## 복소해석학은 복잡한 해석학이 아니다!

실제로 아주 복잡한 것이 아니며, 지나치게 해석적인 것도 아니다. 복소해석학은 실해석학보나 오히려 유연하다. 복소미분의 핵심 개념 몇가지를 정립하고 나면 입실론-델타( $\epsilon$ - $\delta$ )를 포함한 정교한 기법들은 적게 사용된다. 앞의 핵심정리를 보면 실해석학과 근본적으로 다른 결과가 도출됨을 예상할 수 있다. 예를 들어 실함수가 열린구간  $(a, b)$ 에 정의된 미분가능할 때 그 도함수는 연속함수가 아닐 수 있다. 반면 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 열린집합에 정의된 복소미분가능함수는 무한번 미분가능하다! 그 이유는 복소곱셈이 특별한 기하학적 의미를 갖기 때문인데 복소미분가능함수는 국소적인 성질로 전체가 규정되며 함수값을 임의로 매핑하는 것을 허용하지 않는다. 이렇게 제어되는 성질이 복소함수를 한정적으로 만드는데 2.3절에서 이를 자세히 살펴볼 예정이다. 그럼에도 불구하고 자명하지 않으며 충분히 흥미로운 주제이다!

## 대상 독자

복소함수론은 미적분학과 다변수 미적분학을 학습한 학생을 대상으로 하는 기초 과정이다. 책의 제목에서 짐작할 수 있듯이 가장 최소한의 선수지식으로 학습할 수 있는 복소함수의 핵심적인 내용을 담고 있다. 이 책은 저자가 수학과 및 경제학과 3학년 학생을 대상으로 강의했던 강의록을 바탕으로 만들어졌다.

## 감사의 글

많은 유용한 의견을 보내준 Raymond Mortini, Adam Ostazewski, Rudolf Rupp에게 감사드린다. 참고문헌 목록에 있는 기존 학습자료에 의존하였으며 이는 연습문제의 경우도 마찬가지다. 몇 가지 경우는 각 장의 끝에 “참고” 절을 넣고 상세한 참고문헌을 제시했지만 참고 절을 넣지 않은 경우에도 이 책만의 독창성을 주장하는 것은 아니다.

2013년, 런던과 루트에서

Sara Maad Sasane과 Amol Sasane

# Chapter 1

## 복소수와 기하학적 의미

이 장에서는 복소해석학을 펼칠 무대를 만들기 위해 다음 3가지 중심 주제를 다룬다.

- (1) 복소수의 집합과 연산을 정의하고 실수체의 확장으로서 복소수체  $\mathbb{C}$ 를 만든다.
- (2)  $\mathbb{C}$ 의 원소는 평면  $\mathbb{R}^2$  위의 점으로 표시할 수 있으며, 복소수체  $\mathbb{C}$ 의 연산에 대하여 기하학적 의미를 부여할 수 있다. 복소수체와 평면위의 점의 대응 관계로부터  $\mathbb{C}$ 에 평면의 유클리드 위상을 가져올 수 있다.
- (3) 끝으로 복소해석학의 기초함수인 지수함수를 공부한다. 또한, 지수함수와 관련된 기본함수인 삼각함수와 로그함수도 살펴본다.

### 1.1 복소수체

복소수는 실수의 순서쌍으로 정의한다. 예를 들면,

$$(1, 0), (0, 1), (0, 0), \left(-\frac{3}{4}, \sqrt{2}\right)$$

는 모두 복소수로 간주할 수 있다. 복소수 전체의 집합  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 을  $\mathbb{C}$ 라 표기한다. 즉,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x \in \mathbb{R}, \text{이고 } y \in \mathbb{R}\}.$$

복소수  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )에 대하여 실수  $x$ 는  $z$ 의 실수부,  $y$ 는  $z$ 의 허수부라고 한다.

집합  $\mathbb{C}$ 의 복소수  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 에 대하여 덧셈 “+”과 곱셈 “.”을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

이 연산에 따라  $\mathbb{C}$ 는 체(field)가 된다. 즉,

(F1)  $(\mathbb{C}, +)$ 는 가환군(Abelian group)이다.

(F2)  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ 는 가환군이다.

(F3)  $a, b, c \in \mathbb{C}$ 에 대하여 분배법칙이 성립한다:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

(F1)에서 가환군이란 연산  $+$ 에 대하여 결합법칙, 교환법칙이 성립하며, 모든  $(x, y)$ 에 대하여

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) = (0, 0) + (x, y)$$

를 만족하는 항등원  $(0, 0)$ 과

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = (-x, -y) + (x, y)$$

를 만족하는 덧셈의 역원  $(-x, -y)$ 이 존재한다는 뜻이다.

유사하게, (F2)에서 곱셈의 항등원  $(1, 0)$ 이 존재하고, 복소수  $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$ 의 곱셈의 역원은 다음과 같다.

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad (1.1)$$

**연습문제 1.1.** ?? 식 (1.1)이 복소수  $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$ 의 곱셈의 역원이 됨을 직접 확인하라.

**명제 1.1.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 는 체(field)이다.

실수  $\mathbb{R}$ 은 복소수  $\mathbb{C}$ 에 “포함된다”. 실제로, 복소수  $\mathbb{C}$ 안에  $\mathbb{R}$ 을 넣어 실수  $\mathbb{R}$ 을  $\mathbb{C}$ 의 부분체(sub-field)로 볼 수 있다.

$$x \mapsto (x, 0)$$

을 이용하여 실수  $x$ 를 복소수  $(x, 0)$ 로 보내는 대응 규칙은 단사인 체의 준동형사상(field homomorphism)이다. 즉, 덧셈과 곱셈이 보존되며 서로 다른 실수는 다른 복소수에 대응시키는 사상이다.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$x$	$\mapsto (x, 0)$
$x_1 + x_2$	$\mapsto (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$
$x_1 \cdot x_2$	$\mapsto (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0)$
1	$\mapsto (1, 0)$
0	$\mapsto (0, 0)$

따라서 이 사상을 이용한 동일화에 따라 모든 실수는 복소수로 볼 수 있다. 예를 들어 실수  $\sqrt{2}$ 는 복소수  $(\sqrt{2}, 0)$ 로 볼 수 있다. 이런 생각에 익숙하지 않을 수도 있겠으나 우리는 이미 초등학교 과정에서 비슷한 동일화를 경험한 적이 있다. 정수를 유리수의 일부로 동질화하는 다음 예를 보자.

$$\mathbb{Z} \ni 3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$$

이를 이해하려고 밤잠을 설친 적은 없지 않은가!

실수 해  $x \in \mathbb{R}$ 를 갖지 않는 방정식

$$x^2 + 1 = 0$$

을 복소수 범위에서 다루면 해를 구할 수 있다.

$$(0, 1) \cdot (0, 1) + (1, 0) = (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0).$$

$(0, 1)$ 을 나타내는 특별한 기호로  $i$ 를 도입하면 이 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$i^2 + 1 = 0,$$

여기서 실수 1과 0은 각각 복소수  $(1, 0)$ 과  $(0, 0)$ 에 대응된다.

이제부터 실수  $x, y$ 로 만든 복소수  $(x, y)$ 를  $x + yi$ 로 쓰자.

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\equiv x} + \underbrace{(y, 0)}_{\equiv y} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\equiv i} = x + yi.$$

복소수 곱셈은 교환법칙이 성립하고, 특히  $yi = iy$ 이므로,  $x + yi = x + iy$ 이다.

**연습문제 1.2.**  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여  $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$ 를  $x + yi$  꼴로 표시하면?

**복소수 발견의 역사:** 대중적인 믿음과는 달리 역사적으로 수학자들이 복소수를 진지하게 받아들이게 된 것은 2차 방정식이 아니라 3차 방정식을 풀 필요가 있었기 때문이다. 요지는 다음과 같다. 16세기 경 포물선  $y = x^2$ 과 직선  $y = -bx - c$ 의 교점을 구하는 방법으로 방정식

$$ax^2 + bx + c = 0$$

을 풀려는 시도가 있었다. 이러한 기하학적 해석에 근거하여, 포물선  $y = x^2$ 이 직선  $y = -1$ 과 만나지 않으므로 실계수 2차방정식  $x^2 + 1 = 0$ 이 실수해를 갖지 않음을 쉽게 알 수 있었다. 그럼 1.1의 왼쪽 그래프를 참고하라.

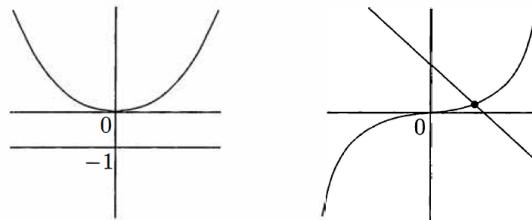


Fig. 1.1 Lack of solvability in reals of  $x^2 = -1$  versus the fact that  $x^3 = 3px + 2q$  always has a real solution  $x$ .

Figure 1.1: 실근이 존재하지 않는 방정식  $x^2 = -1$ 과 항상 실근을 갖는  $x^3 = 3px + 2q$

Cardano (1501-1576)는 3차방정식  $x^3 = 3px + 2q$ 의 실근을 구하는 다음 공식을 만들었다.

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

예를 들어,  $p = 2, q = 3$ 일 때 방정식  $x^3 = 6x + 6$ 은  $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ 를 해로 가진다. 한편, 중간값 정리에 의해 3차함수  $y = x^3$ 은 항상  $y = 3px + 2q$ 와 만난다. 그림 1.1의 오른쪽 그래프를 참고하라. 하지만  $p = 5, q = 2$ 로 방정식  $x^3 = 15x + 4$ 을 만들면  $q^2 - p^3 = -121 < 0$ 이 되어 실수만으로는 Cardano의 공식을 적용하지 못한다. 그럼에도 불구하고 우리는  $x = 4$ 가 실근이 됨을 확인할 수 있다.

$$4^3 = 64 = 60 + 4 = 15 \cdot 4 + 4.$$

Cardano 공식이 나온지 30년 후, Bombelli가 복소수 연산을 도입하면 Cardano 공식으로 원하는 실근을 도출할 수 있음을 제안하였다. 다음 등식이 성립할 수 있을까?

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = ?$$

$(2+i)^3 = 2+11i$ 이고  $(2-i)^3 = 1-11i$ 임을 이용하면 세제곱근 값으로부터 위 등식이 성립함을 알 수 있다. 따라서 Bombelli의 결과로부터 실수 문제에도 복소수 연산이 연결될 수 있음이 입증되었다. 그때부터 복소수가 수학의 주류에 들어가게 되었다.

**연습문제 1.3.** 양의 부분집합  $P \subset \mathbb{F}$ 가 있어 다음을 만족하면 체  $\mathbb{F}$ 는 순서(ordered)를 갖는다고 한다.

(P1) 모든  $x, y \in P$ 에 대하여,  $x + y \in P$ .

(P2) 모든  $x, y \in P$ 에 대하여,  $x \cdot y \in P$

(P3) 모든  $x \in P$ 에 대하여, 다음 3가지 중 정확히 한가지만 참이다.

$$1^\circ x = 0. \quad 2^\circ x \in P. \quad 3^\circ -x \in P.$$

예를 들면,  $P := (0, \infty)$ 를 양의 부분집합이라 하면 실수체  $\mathbb{R}$ 은 순서를 갖는다. (순서를 갖는 체  $\mathbb{F}$ 에서 두 원소  $x, y \in \mathbb{F}$ 의 관계  $>_P$ 를  $y >_P x$ 는  $y - x \in P$ 로 정의하여 대소관계를 정할 수 있다.) 복소수  $\mathbb{C}$ 는 순서를 가질 수 없음을 보여라.

힌트:  $x := i$ 에 대하여  $x \cdot x$ 를 살펴보라.

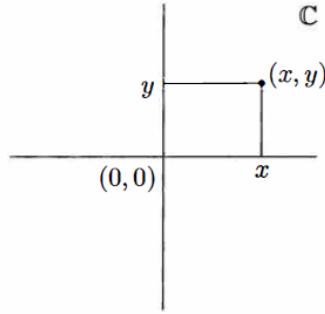
## 1.2 복소수의 기하학적 표현

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 이므로, 그림 1.2와 같이 복소수를 평면위의 점에 대응시킬 수 있다.

복소평면은 Argand<sup>1</sup> 평면이라고도 불린다.

---

<sup>1</sup>Jean-Robert Argand (1768-1822)의 이름에서 따온 것이다. Caspar Wessel (1745-1818)이 더 먼저 사용하긴 했으나.

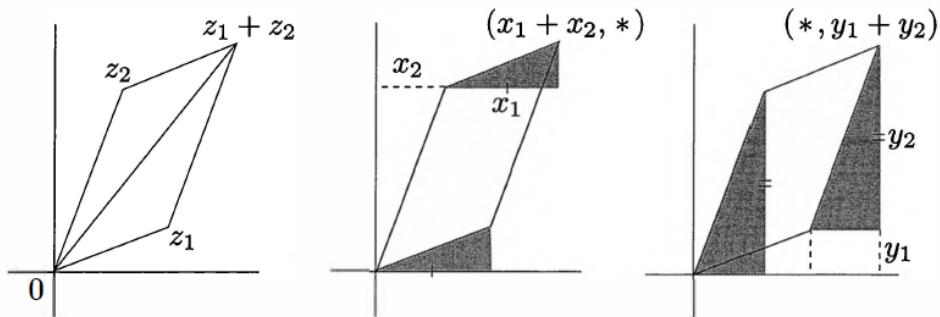
Fig. 1.2 The complex number  $x + iy$  in the complex plane.Figure 1.2: 복소평면에 표시한 복소수  $x + iy$ 

**연습문제 1.4.** 다음 복소수를 복소평면 위의 점으로 표시하라.

$$0, \quad 1, \quad -\frac{3}{2}, \quad i, \quad -\sqrt{2}i, \quad \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

따라서 복소수  $\mathbb{C}$ 는 집합으로서 평면  $\mathbb{R}^2$ 로 간주할 수 있다.  $\mathbb{C}$ 에 정의된 체의 연산이 평면에서 기하학적 의미를 가질까? 우리는 앞으로 실제로 의미가 있음을 살펴볼 것이다.  $\mathbb{C}$ 의 덧셈은 평면벡터의 덧셈이고 곱셈은 조금 더 특별한 의미를 갖는다.

**복소수 덧셈의 기하학적 의미:** 복소수를 평면 위의 점으로 간주하고 복소수의 덧셈을  $\mathbb{R}^2$ 의 벡터 합으로 정의하는 것이 자연스럽다. 벡터 합은 두 벡터를 결합하는 일반적인 방식으로 정의한다. 즉,  $(0,0)$ 과 두 복소수를 잇는 선분으로 이루어진 평생사변형을 완성시킬 때  $(0,0)$ 과 대각선의 반대에 있는 점을 두 복소수의 합이 된다. 그림 1.3을 참고하라.

Fig. 1.3 Addition of complex numbers is vector addition in  $\mathbb{R}^2$ .Figure 1.3: 복소수 덧셈은  $\mathbb{R}^2$ 의 벡터 합이다.

**복소수 곱셈의 기하학적 의미:** 이제 복소수 곱셈이 가진 특별한 기하학적 의미를 살펴보자. 이를 위해 편의상 극좌표를 사용한다.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 의 극좌표  $r \geq 0$ 와  $\theta \in (-\pi, \pi]$ 로 표현된다고 하

자. 이는 원점에서  $(x, y)$ 까지의 거리를  $r (\geq 0)$ 이고,  $(0, 0)$ 에서  $(x, y)$ 를 잇는 반직선이  $x$ -축의 양의 방향과 이루는 각이  $\theta$ 가 된다는 뜻이다. ( $(x, y)$ 가 원점  $(0, 0)$ 인 경우,  $\theta = 0$ 으로 정한다.)

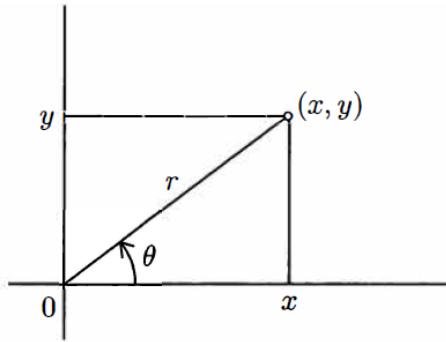


Fig. 1.4 Polar coordinates  $(r, \theta)$  of  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Figure 1.4: 복소수  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 의 극좌표 표현  $(r, \theta)$

그림 1.4의 직각삼각형으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

이로부터 복소수를 극좌표  $(r, \theta)$ 로 표현할 수 있다.

$$x + yi = r \cos \theta + (r \sin \theta)i = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

이제 복소수 곱셈의 기하학적으로 해석하자. 두 볍소수를 모두 극좌표로 쓰면

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \end{aligned}$$

삼각함수의 덧셈정리로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

따라서  $z_1 \cdot z_2$ 는 극좌표로  $(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$ 이다. 다시 말하면,  $z_1 \cdot z_2$ 의 편각은  $z_1$ 과  $z_2$ 가 각각 실수축의 양의 방향과 이루는 각을 더하여 얻을 수 있고, 원점에서의 거리는 각각의 거리를 곱하여 얻는다. 그림 1.5를 참고하라.

특별한 경우로 원점에서의 거리가 1인 볍소수  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ 를 곱하는 경우를 생각해보자. 그러면 위의 식으로부터  $z \in \mathbb{C}$ 와의 곱  $z \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 는 원점과  $z$ 를 연결하는 직선을 반시계방향으로  $\alpha$ 만큼 회전시켜 얻을 수 있다. 특히,  $z$ 에

$$i = 0 + i \cdot 1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

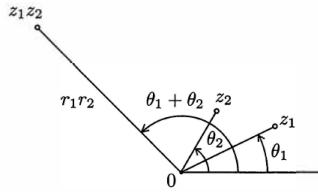


Fig. 1.5 Geometric meaning of complex multiplication: angles get added, distances to the origin get multiplied.

Figure 1.5: 복소수 곱셈의 기하학적 의미: 각은 더하고, 원점에서의 거리는 곱한다.

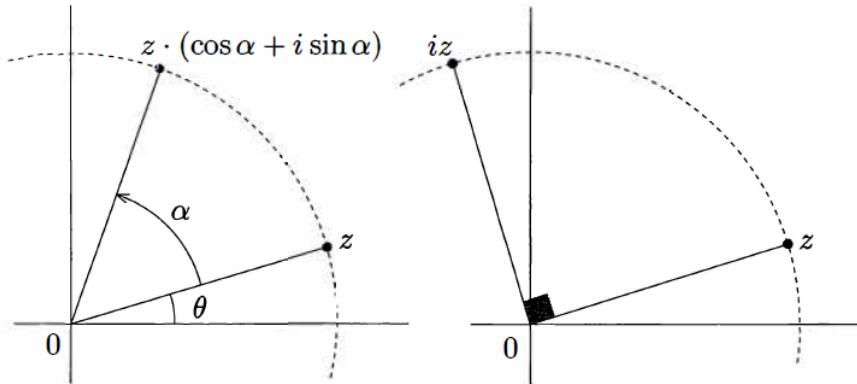


Fig. 1.6 Multiplication by  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  produces an anticlockwise rotation through  $\alpha$ .

Figure 1.6:  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ 를 곱하면 반시계방향으로  $\alpha$ 만큼 회전한 결과를 얻는다.

를 곱하면 반시계방향으로  $90^\circ$  회전한 결과를 얻는다.

**드 므와브르(De Moivre) 정리와 n차 제곱근** : 모든 자연수  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

가 성립하며 이를 드 므와브르 정리라 한다.

**연습문제 1.5.** 드 므와브르의 정리를 이용하여 삼각함수의 3배각 공식  $\cos(3\theta) = 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta$  을 증명하라.

**연습문제 1.6.**  $(1+i)^{10}$ 을 직접 전개하지 않고  $x+iy$  ( $x, y$ 는 실수)의 꼴로 써라? 삼각함수의 3배각 공식  $\cos(3\theta) = 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta$ 을 증명하라.

**연습문제 1.7.**  $(2+i)(3+i)$ 를 이용하여  $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 을 증명하다.

**연습문제 1.8.** 가우스 정수(Gaussian integer)는  $m, n \in \mathbb{Z}$  정수일 때,  $m+in$ 꼴의 복소수로 복소평면 위의 정수 격자점을 이룬다. 모든 꼭지점이 가우스 정수가 되도록 정삼각형을 그리는 것을 불가능함을 증명하라.

힌트: 한변의 회전으로 다른 변을 만들 수 있고,  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ 임을 이용하라.

드 브라우르 공식을 이용하면 복소수  $z$ 의  $n$  제곱근 즉,  $w^n = z$ 를 만족하는 복소수  $w$ 를 쉽게 구할 수 있다. 우선 적당한  $r \geq 0$ 과  $\theta \in [0, 2\pi)$ 에 대하여  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 로 쓰자.  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 가  $w^n = z$ 를 만족한다면,

$$w^n = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = z.$$

양변은 원점에서의 거리가 같으므로  $\rho^n = r$ 을 얻는다.  $\rho$ 와  $r$ 이 음수가 아니므로  $\rho = \sqrt[n]{r}$ 이다. 한편  $w^n$ 이 실수축의 양의 방향과 이루는 각  $n\alpha$ 는 집합  $\{\dots, \theta - 4\pi, \theta - 2\pi, \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots\}$ 에 속한다. 0이 아닌  $z$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각은  $2\pi$ 의 정수배 차이를 무시하면 유일하게 결정되므로  $\theta$  대신  $\theta + 2\pi k$  ( $k$ 는 정수)로도 쓴다. 그림 1.7을 참고하라.

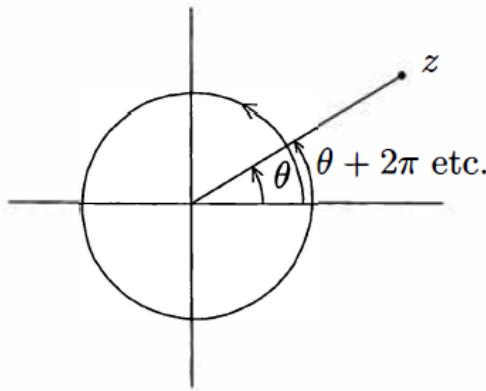


Fig. 1.7 The angle made by  $z$  with the positive real axis.

Figure 1.7: 복소수  $z$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각

이제  $\alpha \in \left\{ \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ 로부터 서로 다른  $w$ 가 되는  $\alpha$ 만 쓰면 다음과 같다.

$$\alpha \in \left\{ \frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right\}.$$

특히,  $z = 1$ 일 때, 1의  $n$ 제곱근은 원에 내접하는 정 $n$ 각형의 꼭지점이다. 그림 1.8을 보라.

**연습문제 1.9.**  $w^4 = -1$ 을 만족하는 모든 복소수  $w$ 를 찾아 복소평면에 표시하라.

**연습문제 1.10.**  $z^6 - z^3 - 2 = 0$ 을 만족하는 모든 복소수  $z$ 를 구하라.

**연습문제 1.11.**  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 를 만족하는 실수  $a, b, c$ 는 모두 같다. 실제로 양변에 2를 곱하고 정리하면  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 을 얻고, 각 항은 음수가 아니므로 모두 0이 될 수밖에 없다. 한편,  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 를 만족하는 복소수  $a, b, c$ 는 복소평면위의 정삼각형의 꼭지점이 됨을 보여라. 실수의 경우와 결과를 비교하라.

힌트: 실수가 아닌 1의 세제곱근  $\omega$ 에 대하여  $((b-a)\omega + (b-c)) \cdot ((b-a)\omega^2 + (b-c))$ 를 계산하라.

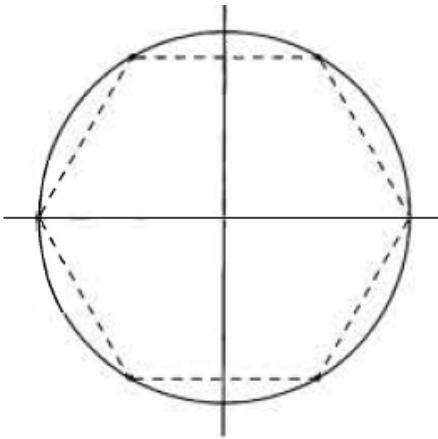


Fig. 1.8 The six 6th roots of unity.

Figure 1.8: 1의 6 제곱근 6개

**연습문제 1.12.** 이항정리에서  $a, b$ 가 실수이고,  $n \in \mathbb{N}$ 이면,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{여기서 } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

는 이항계수라 한다. 대수적 연산을 생각하면 이 등식은  $a, b$ 가 복소수인 경우에도 성립한다.

$$\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \binom{3n}{6} + \dots + \binom{3n}{3n} = \frac{2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n}{3}$$

이 성립함을 보여라.

힌트:  $\omega$ 가 실수가 아닌 1의 세제곱근일 때  $(1 + 1)^{3n} + (1 + \omega)^{3n} + (1 + \omega^2)^{3n}$  을 계산하라.

**연습문제 1.13.** 복소수의 기하학적 성질을 이용하여 사각형의 대변에 외접하는 정사각형 중심을 잇는 선분은 서로를 수직이등분함을 보여라.

**절대값과 켤레복소수:** 복소수  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )의 절대값  $|z|$ 는

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

로 정의한다. 피타고拉斯 정리에 따라 이는  $z$ 와 원점 사이의 거리를 나타낸다. 그림 1.9의 왼쪽을 참고하라.  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 를 극좌표로 쓰거나, 직접 계산하여 확인하면  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 임을 쉽게 확인할 수 있다.

**연습문제 1.14.** 직표좌표로  $z_1, z_2$ 를 써서  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 임을 확인하라.

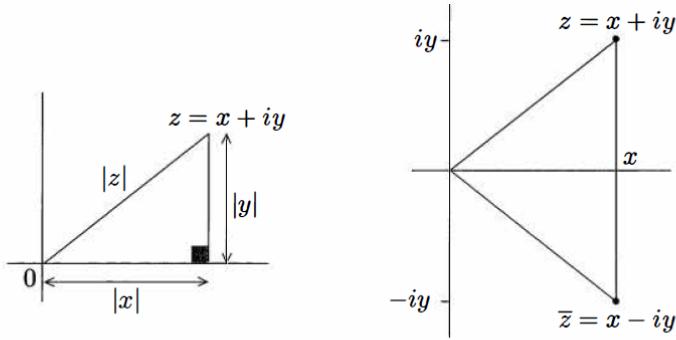


Fig. 1.9 The absolute value of  $z$  is the distance of  $z$  to the origin, and the complex conjugate is obtained by reflecting  $z$  in the real axis.

Figure 1.9: 복소수의 절대값은 원점에서의 거리이고, 콜레복소수는 실수축에 대칭인 복소수이다.

복소수  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )의 콜레복소수  $\bar{z}$ 는

$$\bar{z} = x - iy$$

로 정의한다. 복소평면에서  $\bar{z}$ 는  $z$ 를 실수축으로 대칭시켜 얻는다. 그림 1.9의 오른쪽을 참고하라. 기하학적 표현으로부터 복소수  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

다음 성질도 쉽게 얻을 수 있다.

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

**연습문제 1.15.** 위의 등식 4개를 증명하라.

**연습문제 1.16.** 모든 복소수  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|z| = |\bar{z}|$ ,  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ 임을 증명하고 각각에 대하여 기하학적으로 설명하라.

**연습문제 1.17.**  $|a| < 1$ 과  $|z| \leq 1$ 을 만족하는  $a, z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$ 을 보여라.

**연습문제 1.18.** 계수가  $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ 이고  $c_d \neq 0$ 인 다항식  $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_dz^d$ 을 생각하자.  $w \in \mathbb{C}$ 가  $p(w) = 0$ 을 만족하면  $p(\bar{w}) = 0$ 도 성립함을 보여라.

**연습문제 1.19.** 복소수  $0, a, b \in \mathbb{C}$ 가 만드는 삼각형의 면적은  $\left| \frac{\operatorname{Im}(a\bar{b})}{2} \right|$ 임을 보여라.

**연습문제 1.20.** 임의의 복소수  $z_1, z_2, z_3$ 에 대하여  $i \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}$ 는 실수임을 증명하라.

**연습문제 1.21.** 임의의 두 복소수  $z_1, z_2$ 가  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ 을 만족함을 보여라. 이 등식의 기하학적 의미는 무엇인가?

## 1.3 $\mathbb{C}$ 의 위상

실수  $\mathbb{R}$ 에서 수열의 수렴성, 함수의 연속성과 미분가능성과 같은 일반적인 미적분 개념들은 모두 실수에서 점의 가까움에 대한 개념에 의존한다. 예를 들면, 실수열  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 의 극한이  $L \in \mathbb{R}$ 이라는 것은, 주어진 양수  $\epsilon$ 에 대하여 충분히 큰 인덱스  $N$ 이 있어 이를 넘는 인덱스를 갖는  $a_n$ 은 모두  $L$ 과의 거리가 기껏해야  $\epsilon$ 이하임을 의미한다. “ $a_n$ 과  $L$ 의 거리”는  $|a_n - L|$ 로 정의하며 실수 라인에서  $a_n$ 과  $L$ 을 잇는 선분의 길이를 뜻한다.

이제 복소수에서 미적분을 만들어 보려면 복소수 쌍  $(z_1, z_2)$ 에 대한 거리  $d(z_1, z_2)$ 의 개념이 필요하다. 첫 단계로 거리의 개념이 무엇인지 살펴보자.

### 1.3.1 $\mathbb{C}$ 에서의 거리 개념

복소수  $\mathbb{C}$ 를  $\mathbb{R}^2$ 으로 보면  $\mathbb{R}^2$ 의 유clidean 거리로  $\mathbb{C}$ 의 거리를 정의할 수 있다. 따라서, 복소수  $z_1 = x_1 + iy_1$ 과  $z_2 = x_2 + iy_2$ 에 대하여 다음 식으로 거리를 정의한다.

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|.$$

피타고라스 정리에 의하여 이 값은  $\mathbb{R}^2$  평면의 두 점  $(x_1, y_1)$ 과  $(x_2, y_2)$ 의 거리와 같다. 그림 1.10을 참고하라.

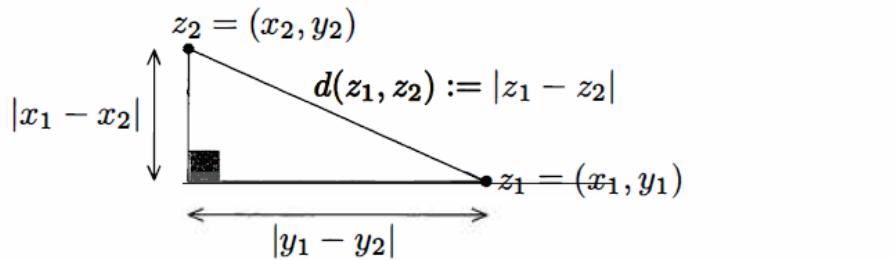


Fig. 1.10 The distance between  $z_1$  and  $z_2$  is the length of the segment joining  $z_1$  to  $z_2$ .

Figure 1.10: 복소수  $z_1$ 과  $z_2$ 사이의 거리는  $z_1$ 과  $z_2$ 를 잇는 선분의 길이다.

복소수 덧셈의 기하학적 의미와 삼각형의 두변의 길이의 합은 가장 큰 변의 길이보다 크다는 유clidean 기하학의 유명한 결과를 이용하면 다음과 같이 복소수 절대값의 삼각 부등식을 얻는다.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

그림 1.11을 보자. 이 삼각 부등식은 실수  $x_1, x_2, y_1, y_2$ 에 대한 코시-슈바르츠 부등식  $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2$ 을 사용하여 확인할 수도 있다.

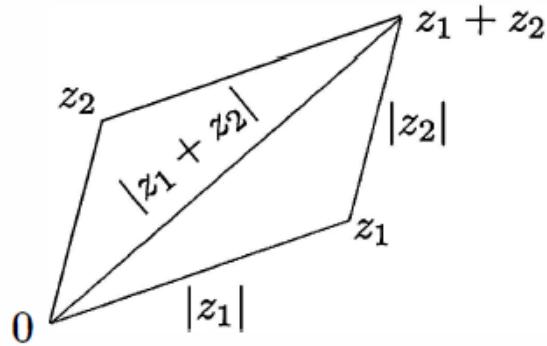


Fig. 1.11 Triangle inequality.

Figure 1.11: 삼각 부등식

**연습문제 1.22.** 모든 복소수  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ 을 증명하라.

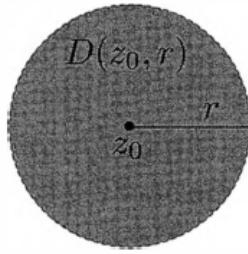
**연습문제 1.23.** 다음 집합을 복소평면에 나타내라.

- (1)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| = 2\}$ .
- (2)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| < 2\}$ .
- (3)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1 - i)| < 2\}$ .
- (4)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z - (1 - i)) = 3\}$ .
- (5)  $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z - (1 - i))| < 2\}$ .
- (6)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| = |z - (1 + i)|\}$ .
- (7)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| = 2\}$ .
- (8)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| + |z - (1 + i)| < 3\}$ .

### 1.3.2 열린 원판, 열린 집합, 닫힌 집합, 콤팩트 집합

주어진 점의 근방에 대한 집합을 다루기 위해 다음 정의들을 도입하는 것이 편리하다. 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $r > 0$ 인 열린 공/원판  $D(z_0, r)$ 은  $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ 로 정의한다.

$\mathbb{C}$ 의 부분집합  $U$ 에 속하는 모든  $z$ 에 대하여  $r_z > 0$ 가 존재하여  $D(z, r_z) \subset U$ 를 만족하면  $U$ 를 열린 집합이라 한다. 다시 말하면,  $U$ 의 어떤 점을 잡더라도 주변의 모든 점이  $U$ 에 속할 수 있는



“공간”이 존재한다. 예를 들면, 열린 원판  $D(z_0, r)$ 은 열린 집합이다. 따라서  $D(z_0, r)$ 를 열린 원판이라 부를 때 사용한 형용사 “열린”은 적절해 보인다. 열린 집합의 예를 조금 더 만들어보자. 원환(annulus)  $\mathbb{A}_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ , 우측 반평면  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ 는 모두 열린 집합이다.

열린 집합의 여집합에 특별한 이름을 붙여 “닫힌 집합”이라 부르면 편리하다. 닫힌 집합은 수열의 수렴성의 관점에서 규정할 수도 있다. 집합  $F \subset \mathbb{C}$ 가 닫힌 집합이라는 것은  $F$ 에 속하는 복소수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\mathbb{C}$ 에서  $L$ 로 수렴한다면 극한  $L$ 이  $F$ 에 속한다는 것과 동치이다.

$\mathbb{C}$ 의 부분집합  $S$ 의 모든 원소  $z$ 에 대하여  $|z| \leq M$ 을 만족하는  $M > 0$ 이 존재하면  $S$ 를 유계(bounded)라 한다. 그러면  $S$ 는 복소평면에서 충분히 큰 원판 내부에 속한다.

$\mathbb{C}$ 의 부분집합  $K$ 가 유계인 닫힌 집합이면 콤팩트 집합이라 한다. 콤팩트 집합에서 정의된 실 변수 연속함수는 최대값과 최소값을 갖는다는 실해석학의 잘 알려진 결과를 앞으로 종종 사용할 것이다.

### 1.3.3 수렴성과 연속성

$\mathbb{C}$ 에서 수열의 수렴성에 대하여 알아보자.

복소수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 수렴하고 극한이  $L$ 이라는 것은 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여 인덱스  $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 모든  $n > N$ 에 대하여  $|z_n - L| < \epsilon$  성립함을 의미한다. 삼각 부등식에 의하여 수렴하는 수열의 극한은 유일하게 결정되며 다음과 같이 쓴다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L.$$

**예제 1.1.** 복소수  $z$ 가  $|z| < 1$ 를 만족한다고 하자. 그러면 수열  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 은 0으로 수렴한다. 왜냐하면,  $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n = ||z|^n - 0|$ 인데  $|z| < 1$ 이므로,  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $|z|^n \rightarrow 0$ 이기 때문이다.

**연습문제 1.24.** 복소수 계수  $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ 의 다항식  $p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_d z^d$  ( $c_d \neq 0$ )를 생각하자.  $|z| > R$ 인 모든  $z$ 에 대하여  $|p(z)| \geq M|z|^d$ 을 만족하는  $M, R > 0$ 이 존재함을 증명하라.

**연습문제 1.25.** 복소수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $L$ 로 수렴함과 실수열  $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 과  $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이 각각  $\operatorname{Re}(L)$ 과  $\operatorname{Im}(L)$ 로 수렴함이 동치임을 보여라.

**연습문제 1.26.** 복소수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $L$ 로 수렴함과  $(\overline{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $\bar{L}$ 로 수렴함은 동치임을 보여라.

**연습문제 1.27.**  $\mathbb{C}$ 가 완비성(completeness)을 가짐을 증명하라. 즉,  $\mathbb{C}$ 의 모든 코시 수열이  $\mathbb{C}$ 의 원소로 수렴한다. (임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여 인덱스  $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여  $m, n > N$  이면,  $|z_n - z_m| < \epsilon$ 을 만족할 때 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 을 코시 수열이라 한다.)

$S$ 가  $\mathbb{C}$ 의 부분집합,  $z_0 \in S$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ 라 하자. 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $\delta > 0$ 가 존재하여  $z \in S$ 가  $|z - z_0| < \delta$ 를 만족하면  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ 일 때  $f$ 는  $z_0$ 에서 연속이라고 한다.

수열의 극한으로도 연속성을 규정할 수 있다.  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0$ 에서 연속임은  $z_0$ 로 수렴하는  $S$ 의 모든 복수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 에 대하여  $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $f(z_0)$ 로 수렴함과 동치이다.

**예제 1.2.** 켤레복소수를 만드는 것은 연속함수이다. 즉,  $z \mapsto \bar{z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 는 연속이다. 모든  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$ 이다. 이로부터 모든  $z_0 \in \mathbb{C}$ 에 대하여 켤레복소수를 대응시키는 함수는 연속이다. 기하학적으로 보면 자명하다. 왜냐하면, 켤레복소수는 단지 실수축에 대하여 대칭시키는 것이므로 가까운 두 점은 함수값도 가까이 머물기 때문이다!

모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $(\overline{\bar{z}}) = z$  켤레복소수의 역함수는 자기자신이다. 따라서 켤레복소수는 가역이며 역함수도 연속이다. 따라서 켤레복소수 함수는  $\mathbb{C}$ 에서  $\mathbb{C}$ 로의 위상동형사상(homeomorphism)이다 (연속인 전단사함수이며 역함수도 연속이다).

**연습문제 1.28.** 함수  $z \mapsto \operatorname{Re}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 은 연속함수임을 증명하라.

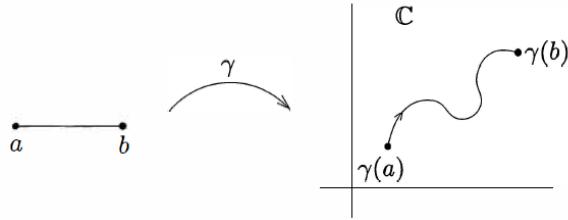
### 1.3.4 영역

이후에는 경로연결된 열린 집합의 개념이 중요한 역할을 한다. 우리 학습의 주요 대상, 즉, 집합  $D \subset \mathbb{C}$ 의 모든 점에서 복소미분 가능함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대한 결과를 증명할 때 사용된다. 많은 정리들이 유효하게 성립하려면  $D$ 가  $\mathbb{C}$ 의 “좋은” 부분집합이 되어야 하며 단순히  $\mathbb{C}$ 의 부분집합이라는 조건만으로는 부족함을 보게 될 것이다. “좋음”이라는 가정을 만족하는 집합을 영역이라 부르며 정확히는 다음과 같이 규정된다.

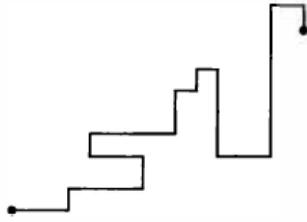
우리는  $\mathbb{C}$ 의 경로연결된 열린 부분집합을 영역(domain)이라 부른다. “열린”의 의미는 이미 알고 있으니 “경로연결된”이 어떤 의미인지 설명해보자.

#### 정의 1.1.

- (1) 연속함수  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $\mathbb{C}$ 의 경로(또는 곡선)이라 한다.



- (2) 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 다음 조건을 만족하면 계단식 경로(stepwise path)라 한다. 점  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ 가 존재하여 부분경로  $\gamma : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )가 실수부가 상수 또는 허수부가 상수인 경로가 된다.



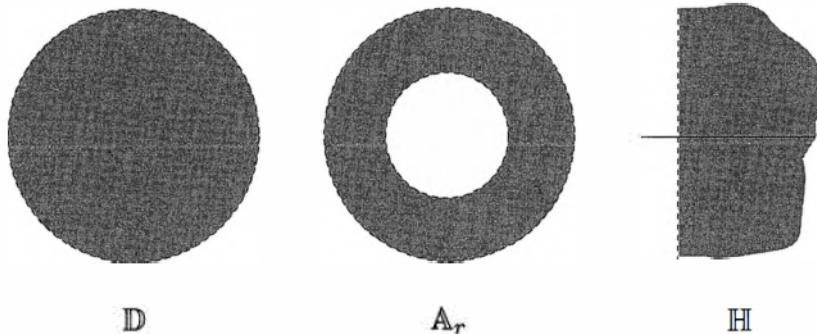
- (3)  $U$ 가 열린 집합일 때, 모든  $z_1, z_2 \in U$ 에 대하여  $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$ 이고 모든  $t \in [a, b]$ 에서  $\gamma(t) \in U$ 인 계단식 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재하면  $U$ 를 경로연결된 열린 집합이라 한다.

실제로 위에서 경로연결된 열린 집합을 정의할 때 경로를 계단식 경로에 한정한 것을 완화할 수 있다. 즉, 열린 집합에 포함된 임의의 두 점이 집합내의 경로로 연결되기만 하면 경로연결된 것으로 정의해도 우리가 정의한 경로연결된 집합과 일치한다. 하지만 우리에게는 불필요한 일반화이며, 앞에서 정의한 것으로 충분하다.

### 예제 1.3.

- (1) 열린 단위원판  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 은 영역이다.
- (2)  $r \in (0, 1)$ 에 대하여 원환  $\mathbb{A}_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ 은 영역이다.
- (3) 우측 반평면  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ 은 영역이다.

한편, 집합  $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ 는 영역이 아니다. 열린 집합이지만 경로연결된 집합이 아니다. 실제로 0과 2를 잇는 경로는 존재하지 않는다. 경로  $\gamma$ 가 존재한다고 가정하면 함수  $t \mapsto |\gamma(t)| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 중간값 정리를 적용하면,  $|\gamma(a)| = 0 < 1 < 2 = |\gamma(b)|$ 이므로,  $|\gamma(t_*)| = 1$ 이 되는  $t_* \in [a, b]$ 가 존재한다. 그러면  $\gamma(t_*) \notin S$ 가 되어 모순이다.

Fig. 1.12 The domains  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{A}_r$  and  $\mathbb{H}$ .Figure 1.12: 영역  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{A}_r$ ,  $\mathbb{H}$ 

**연습문제 1.29.**  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) > 1\}$ 은 열린 집합이지만 영역은 아님을 보여라.

**연습문제 1.30.** 영역  $D$ 에 대하여  $D^* := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$ 라 정의하자.  $D^*$ 도 영역이 됨을 보여라.

## 1.4 지수함수와 관련 함수들

이 장의 마지막 절에서는 기본적인 복소함수들을 다룬다.

지수함수  $z \mapsto \exp z$ ,

삼각함수  $z \mapsto \sin z, \cos z$ ,

로그함수  $z \mapsto \operatorname{Log} z$ .

이 함수들은 실수축에 제한했을 때 미적분학에서 친숙하게 봤던 함수들에 대응된다. 다시 말하면, 함수의 입력을  $z = x \in \mathbb{R}$ 로 제한할 때 잘 알려진 실함수를 얻는다.

$x \mapsto e^x$ ,

$x \mapsto \sin x, \cos x$ ,

$x \mapsto \log x$ .

따라서 우리의 정의는 실함수에 대응되는 확장이다. 그림 1.13을 참고하라.

이러한 확장은 이는 실수에 한정했을 때 가질 수 없었던 새롭고 흥미로운 특성을 복소평면에서 보여준다는 것을 앞으로 살펴볼 것이다. 또한 이 함수들은 복소미분 가능함수의 중요한 예로서의

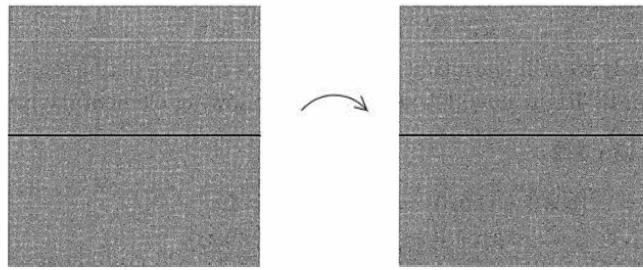


Fig. 1.13 The real valued functions map points on the real line to the real line, but our definitions will give extensions of these to the shaded region, the complex plane.

Figure 1.13: 실함수는 실수축 위의 점을 실수축 위로 대응시키는 반면 우리의 정의는 이를 그림자 영역인 복소평면으로 확장한 것이다.

역할도 한다. 지수함수와 삼각함수는 복소평면 위의 모든 점에서 복소미분 가능하며 로그함수는 연속인 점에서 복소미분 가능하다.

우선 지수함수부터 살펴보자.

### 1.4.1 지수함수 $\exp z$

**정의 1.2 (복소 지수함수).**  $z = x + iy \in \mathbb{C}(x, y \in \mathbb{R})$ 에 대하여 복소 지수함수  $\exp z$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

우선  $y = 0$ 일 때, 우변은  $e^x$ 와 같다. 따라서 이 정의는 일반적인 지수함수 ( $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x (\in \mathbb{R})$ )의 확장이다. 하지만, 정의는 자연스럽게 보이지 않는다.  $z \mapsto e^{\operatorname{Re}(z)}$ 로 정의해도 실수 지수함수의 확장을 얻을 수 있기 때문이다. 이렇게 간단히 정의하면 되는 것을 왜 사용하지 않을까? 우리가 정의한 방식을 쓰는 이유는 실수 지수함수를 복소평면 전체에서 복소미분 가능한 성질을 가지도록 확장하는 유일한 방법이기 때문이다. 이와 관련하여 128페이지 예제 4.8를 참고하라. 실제로 실수 지수함수의 미분공식

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

과 유사하게 다음이 성립함을 보일 예정이다.

$$\frac{d}{dz} \exp z = \exp z \quad z \in \mathbb{C}.$$

결론적으로 우리는 이상하게 보이는 정의가 실제로 자연스럽다는 것을 공부하게 될 것이다. 지금은 다음과 같은 기본적인 성질부터 확인해보자.

**명제 1.2.**

- (1)  $\exp 0 = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot (1 + i0) = 1.$
- (2)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여,  $\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$
- (3)  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여,  $\exp z \neq 0$ 이고  $(\exp z)^{-1} = \exp(-z).$
- (4)  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여,  $\exp(z + 2\pi i) = \exp z.$
- (5)  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여,  $|\exp z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$

### 증명

(2)  $z_1 = x_1 + iy_1$ 과  $z_2 = x_2 + iy_2$ 면,

$$\begin{aligned}\exp(z_1 + z_2) &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) \\ &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).\end{aligned}$$

(3) 앞의 식을 쓰면,

$$1 = \exp 0 = \exp(z - z) = (\exp z)(\exp(-z))$$

에서  $\exp z \neq 0$ 이고  $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$ 을 얻는다. 따라서  $\exp$  함수는  $\mathbb{C}$ 의 원소를 “뚫린(punctured)” 평면  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 으로 보낸다.

(4) 다음 식으로부터

$$\begin{aligned}\exp(z + 2\pi i) &= (\exp z)(\exp(2\pi i)) = (\exp z) \cdot e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) \\ &= (\exp z) \cdot 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = \exp z\end{aligned}$$

$\exp$  함수는 “ $y$ 축 방향으로 주기성”이 있으며, 주기는  $2\pi$ 임을 알 수 있다. 그림 1.14를 보자.

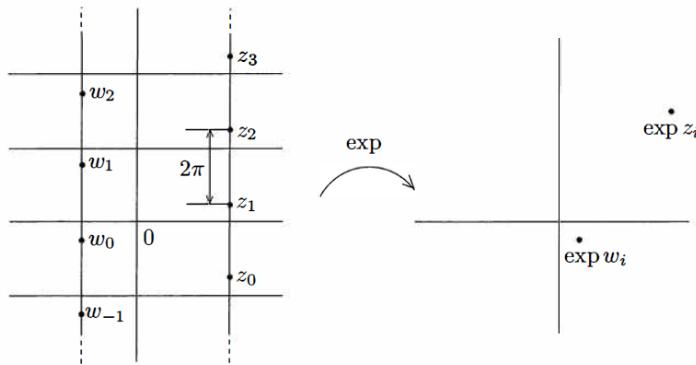
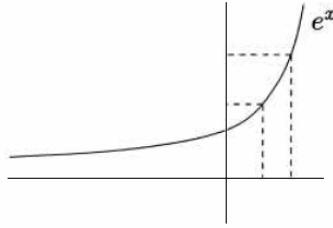


Fig. 1.14 2 $\pi$ -periodicity of  $\exp$  in the  $y$ -direction.

Figure 1.14:  $y$ 축 방향으로  $2\pi$  주기를 갖는 복소 지수함수  $\exp$

Fig. 1.15  $x \mapsto e^x$  is one-to-one.Figure 1.15:  $x \mapsto e^x$ 는 일대일이다

이러한 현상은 실수의 성질 갖는  $x$ 축 방향으로는 나타나지 않는다. 함수  $x \mapsto \exp(x + iy_0)$  ( $y_0 \in \mathbb{R}$ 은 고정하자)는 일대일 함수이다. 그림 1.15를 보라.

(5)  $x, y \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $|e^x \cos y + ie^x \sin y| = \sqrt{e^{2x}((\cos y)^2 + (\sin y)^2)} = e^x$ . 따라서  $|\exp(x + iy)| = e^x$ . 이로부터  $\exp$  함수는 복소평면의 수직선(실수부가 같은 점들)을 원(절대값이 같은 점, 즉, 원점에서의 거리가 일정한 점)으로 보낸다.  $\square$

명제 1.2 (3)은  $\exp$  함수가 일대일이 아니며  $2\pi i$ 의 주기를 가짐을 보여준다. 그림 1.16은 함수  $z \mapsto \exp z$ 가 수평선(허수부  $y$ 가 고정된)과 수직선(실수부  $x$ 가 고정된)에 작용한 결과를 보여준다. 이는 그림 1.17에 표현된 특징을 종합하여 얻을 것이다.

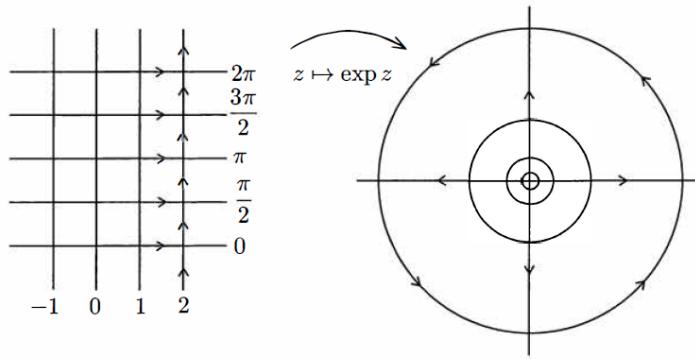


Fig. 1.16 The image of horizontal and vertical lines under the exponential map.

Figure 1.16: 복소 지수함수에 의한 수직선과 수평선의 상(image)

그림 1.16을 보면  $\exp$  함수는 영역 내 곡선이 이루는 각을 보존함을 알 수 있다. 다시 말하면, 서로 수직인 수평선과 수직선은 서로 수직인 원과 방사형 반직선으로 매핑된다. 뒤에서 우리는 이것은 우연한 것이 아니며, “등각 특성(conformality)”, 즉, 두 곡선이 이루는 각도와 함께 “방향(orientation)”까지 보존하는 것은 영역에 정의된 모든 복소미분 가능함수가 갖는 성질임을 보일

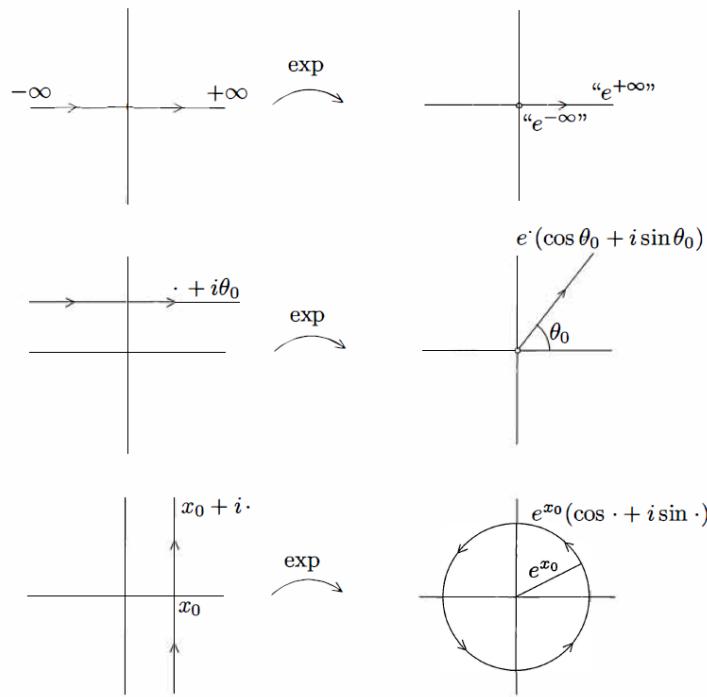


Fig. 1.17 The image of horizontal and vertical lines under the exponential map.

Figure 1.17: 복소 지수함수에 의한 수직선과 수평선의 상(image)

것이다.

**오일러 공식:**  $z = iy$  ( $y \in \mathbb{R}$ )에 대하여

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y$$

를 오일러 공식이라 부른다. 따라서 복소수의 극형식은  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \exp(i\theta)$ 로 다시 쓸 수 있다.

**연습문제 1.31.**  $z : i\frac{91}{2}, 3 + \pi i$ 에 대하여  $\exp z$ 를 계산하라.

**연습문제 1.32.**  $\exp z = \pi i$ 를 만족하는 모든  $z \in \mathbb{C}$ 를 찾아라.

**연습문제 1.33.** 곡선  $t \mapsto \exp(it) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ 를 그려라.

**연습문제 1.34.** 지수함수  $z = x + iy \mapsto \exp z$ 가 직선  $y = x$ 를 어떤 도형으로 보내는지 설명하라. 다음 단계로 진행하면 된다: 우선 매개변수를  $x = t, y = t$ 라 놓고 보낸 이미지의 매개변수방정식을 구하라. 이 곡선을 그리고  $t$ 가 증가함에 따라,  $t \rightarrow \pm\infty$ 에 따라 어떻게 되는지 설명하라.

**연습문제 1.35.**  $z = x + iy$ 의 실수부와 허수부  $x, y$ 를 이용하여  $\exp(z^2)$ 과  $\exp(1/z)$ 의 절대값, 실수부와 허수부를 구하라.

### 1.4.2 삼각함수

지수함수를 확장한 것과 같이 실수에 정의된 삼각함수를 복소수 삼각함수로 확장해보자. 앞에서 언급한 오일러 공식으로부터 실수  $x$ 에 대하여 다음 식을 얻는다.

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x, \quad \exp(-ix) = \cos x - i \sin x.$$

이로부터

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

를 얻어 복소수  $z \in \mathbb{C}$ 에 까지 확장한 다음 정의를 만들 수 있다.

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

당연히 이 정의는 실수에 정의된 삼각함수의 확장이다. 왜냐하면, 오일러 공식으로부터  $z = x$ 일 때,  $\cos z = \cos x$ ,  $\sin z = \sin x$ 가 됨을 확인할 수 있기 때문이다.

몇 가지 삼각함수 공식은 복소수에서도 여전히 유효하다. 예를 들면,  $\cos(z_1 + z_2) = (\cos z_1)(\cos z_2) - (\sin z_1)(\sin z_2)$ 는 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\cos z_1)(\cos z_2) - (\sin z_1)(\sin z_2) \\ &= \left( \frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2} \right) \left( \frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i} \right) \left( \frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i} \right) \\ &= \frac{2 \exp(i(z_1 + z_2)) + 2 \exp(-i(z_1 + z_2))}{4} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

**연습문제 1.36.** 모든  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\sin(z_1 + z_2) = (\sin z_1)(\cos z_2) + (\cos z_1)(\sin z_2)$ 이 성립함을 보여라.

$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ 도 성립한다.

$$\begin{aligned} (\sin z)^2 + (\cos z)^2 &= \left( \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \right)^2 + \left( \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)}{-4} + \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

하지만, 모든 실수  $x$ 에 대하여 삼각함수가  $|\sin x| \leq 1$ 과  $|\cos x| \leq 1$ 를 만족하는 것과 달리 복소수에서  $z \mapsto \sin z$ 와  $z \mapsto \cos z$ 는 유계가 아니다.  $z = iy$  ( $y \in \mathbb{R}$ )에 대하여

$$\cos(iy) = \frac{\exp(i(iy)) + \exp(-i(iy))}{2} = \frac{\exp(-y) + \exp(y)}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

이므로  $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때,  $\cos(iy) \rightarrow +\infty$ 이다.

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}$$

이므로  $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때,  $|\sin(iy)| \rightarrow +\infty$ 이다.

뒤에서  $z \mapsto \cos z$ 와  $z \mapsto \sin z$ 는 복소평면 위의 모든 점에서 복소미분 가능함을 보일 것이다.

**연습문제 1.37.** 복소수  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )에 대하여

$$\cos z = (\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y), \quad |\cos z|^2 = (\cosh y)^2 - (\sin x)^2$$

을 증명하라. 단,  $\cosh y := \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ ,  $\sinh y := \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ 이다.

**연습문제 1.38.** 방정식  $\cos x = 3$ 은 실근  $x$ 를 갖지 않음은 잘 알려져 있다. 하지만,  $\cos z = 3$ 을 만족하는 복소수  $z$ 는 존재함을 보이고 해를 모두 찾아라.

### 1.4.3 로그함수

실수의 경우, 양수  $y$ 에 대하여  $\log y \in \mathbb{R}$ 은  $e^{\log y} = y$ 를 만족하는 유일한 실수이다. 따라서  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 은 함수  $x \mapsto e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ 의 역함수이다. 그림 1.18을 보라.

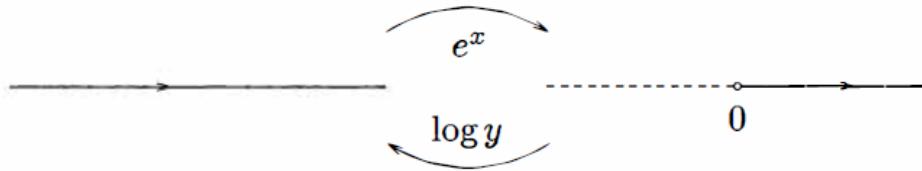
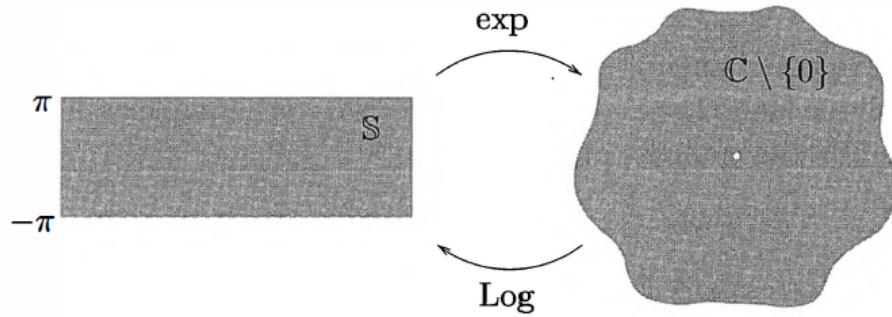


Fig. 1.18 The maps  $x \mapsto e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  and  $y \mapsto \log y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Figure 1.18: 함수  $x \mapsto e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ 과  $y \mapsto \log y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

복소수의 경우, 복소 지수함수는  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 이다. 이제 복소 지수함수의 역함수로서  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서  $\mathbb{C}$ 로의 “복소 로그함수”가 존재하는지 궁금해진다. 우리는  $z \neq 0$ 에 대하여  $\exp w = z$ 를 만족하는 복소수  $w$ 를 찾아 “ $z$ 의 복소 로그값”이라 정의하고자 한다. 그런데 지수함수  $\exp$ 는  $y$ 축 방향으로  $2\pi$  주기임을 알고 있기에  $e^w = z$ 를 만족하는 하나의  $w$ 를 찾는다면, 모든  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $\exp(w + 2\pi in) = \exp w = z$ 로부터 무한히 많은 해를 추가로 얻는다. 무한한 값 중에서 어떤  $w$ 를  $z$ 의 복소 로그값으로 정해야 할까?  $2\pi$  폭을 갖는 특정 수평띠에 속하는  $w$ 를 고르는 것으로 비유일성 문제를 해결하고자 한다. 실제로 0이 아닌 모든 복소수는 가능한 수평띠 중 어떤 것을 고르더라도 수평띠에 속하는 점을 함수  $\exp$ 로 보낸 값으로 얻을 수 있다. 복소 로그함수를 정의하기 위하여 우리는 (다분히 임의로) 수평띠  $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ 를 선택한다. 그림 1.19를 보라.

Fig. 1.19 The strip  $\mathbb{S} := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$  is mapped by  $\exp$  onto  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .Figure 1.19: 수평띠  $\mathbb{S} := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ 에서  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  위로의 함수  $\exp$ 

이 수평띠에 속하는  $w$  가운데  $\exp w = z$ 를 만족하는 것은 유일하게 결정됨을 보일 것이다. 이를 “ $z$ 의 주 로그값(principal logarithm)”이라 부르고  $\text{Log } z$ 라 쓴다. 이를 위해 우선 0이 아닌 복소수의 주편각(principal argument)이라는 개념부터 도입한다.

**복소수의 주편각:**  $z \neq 0$ 에 대하여 다음을 만족하는 실수  $\theta$ 는  $(-\pi, \pi]$ 의 범위에서 유일하게 결정된다.

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

이 때,  $\theta$ 를  $z$ 의 주편각이라고 하며,  $\text{Arg } z$ 로 표기한다. 몇 가지 예를 들면,

$$\text{Arg}(3) = 0, \quad \text{Arg}(-1) = \pi, \quad \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

실수축에서 양의 방향 위에 있는 한점을 선택하고 반시계방향으로 원을 그리며 움직이면, 실수축의 음의 방향을 지나갈 때 주편각이 갑자기 점프하는 현상을 볼 수 있다. 실수축의 음수에 대한 주편각은  $\pi$ 인 반면, 바로 아래쪽에서 다가가는 경우  $-\pi$ 가 된다.

**연습문제 1.39.** 복소평면에 집합  $\left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \frac{\pi}{4} < |\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3} \right\}$ 을 표시하라.

이제 0이 아는 복소수에 대한 주 로그값을 정의할 준비가 되었다.

**정의 1.3.**  $z \neq 0$ 에 대하여 주 로그값  $\text{Log } z$ 는  $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$ 로 정의한다.

우선 다음 식을 살펴보자.

$$\begin{aligned} \exp(\text{Log } z) &= e^{\log |z|} (\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z)) \\ &= |z| (\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z)) = z. \end{aligned}$$

이 식은  $\exp : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 가 전사함수임을 보여준다. 또한, 일대일 함수도 되는데 왜냐하면,  $z_1, z_2 \in \mathbb{S}$ 가  $\exp z_1 = \exp z_2$ 를 만족한다면,  $\exp(z_1 - z_2) = 1$ 이 되므로,  $z_1 - z_2 = 2\pi ni$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )이고,  $z_1, z_2 \in \mathbb{S}$ 의 험수부 차이는  $2\pi$  미만이 되어야 하므로,  $n = 0$  즉,  $z_1 = z_2$ 이다.

따라서, 두 함수  $\exp : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 과  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}$ 는 서로 역함수 관계이다.

물론 0이 아닌 복소수  $z = |z|e^{i\theta}$ 의 주편각  $\theta$ 의 범위를  $(a, 2\pi + a]$  또는  $[a, 2\pi + a)$ 가 되도록 다른  $a$ 를 선택할 수도 있다. 그러면, 잘 정의된 다른 로그함수를 얻는다(마찬가지로 유효하다). 하지만 이 책에서  $z$ 의 주 로그값이라 함은 항상 주편각  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ 를 사용하는  $\log |z| = i \text{Arg } z$ 를 뜻한다. 예를 들면,

$$\text{Log}(-i) = \log |-i| + i \text{Arg}(-i) = \log 1 - \frac{\pi}{2}i = 0 - \frac{\pi}{2}i = -\frac{\pi}{2}i.$$

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 Log의 연속성:  $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ 가 실수축의 음수 부분에서 연속성을 갖지 못하기 때문에 Log는  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 연속함수가 될 수 없다. 즉,  $(-\infty, 0)$ 에 속하는 모든 점에서 연속이 되지 못한다.  $-1$ 에서 Log가 불연속임을 보이기 위해  $-1$ 로 수렴하는 다음 수열을 생각하자.

$$\left( \exp \left( i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \left( \cos \frac{1}{n} + i \sin \frac{1}{n} \right) = -1(1 + i0) = -1.$$

한편,

$$\text{Log} \left( \exp \left( i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) \right) \right) = \log 1 + i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) = i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right)$$

이므로, 다음 두 식은 다른 극한을 갖게 되며

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \left( \exp \left( i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) \right) \right) = i(0 - \pi) = -i\pi,$$

$$\text{Log} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( i \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) \right) \right) = \text{Log}(-1) = i\pi,$$

결론적으로 Log는  $-1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 불연속이다.

하지만, 조금 더 작은 정의역  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 Log는 연속이다. 이는 주편각  $\text{Arg}(z)$ 가  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 연속임을 보이면 바로 얻을 수 있는 결론이다. 증명에 필요한 핵심적인 성질은  $(-\infty, 0]$ 에 속하지 않는 임의의  $z_0$ 에 대하여  $(-\infty, 0]$ 에 닿지 않는  $z_0$ 의 근방을 만들 수 있는 여지가 있다는 것이다. 즉, 충분히 작은  $r$ 을 잡아 원판  $D(z_0, r)$ 가  $(-\infty, 0]$ 에 닿지 않도록 할 수 있다. 따라서, 주어진  $\epsilon > 0$ 에 대하여 필요하다면  $r$ 을 더 줄여서  $D(z_0, r)$ 에 속하는 모든  $z$ 가  $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_0)| < \epsilon$ 을 만족하게 할 수 있다. 그림 1.20을 참고하라.

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 두 함수  $z \mapsto \log |z|$ 와  $\text{Arg}$ 가 연속이므로, Log도 연속이다.

우리는 나중에 Log가  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 연속임을 이용하여 복소미분도 가능함을 보일 것이다.

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $a^b$ :  $a, b$ 가 복소수이고  $a \neq 0$ 일 때,  $a^b$ 에 대하여 생각해보자.  $a^b$ 의 주치(principal value)를 다음과 같이 정의한다.

$$a^b := e^{b \text{Log}(a)}.$$

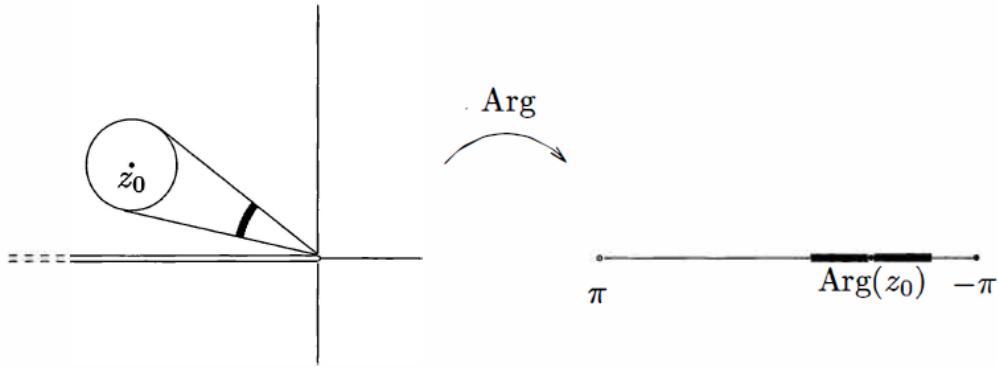
Fig. 1.20 Continuity of the principal argument  $\text{Arg}$  in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

Figure 1.20:  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에 정의된 주편각  $\text{Arg}$ 의 연속성

예를 들면,  $i^i$ 의 주치는

$$\exp(i \cdot \text{Log}(i)) = \exp(i(\log|z| + i \text{Arg } i)) = \exp\left(i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

**연습문제 1.40.**  $\text{Log}(1+i)$ 를 구하라.

**연습문제 1.41.**  $\text{Log}(-1)$ 과  $\text{Log}(1)$ 을 구하라.  $\text{Log}(z^2)$ 은  $2 \cdot \text{Log}(z)$ 와 항상 같지는 않음을 보여라.

**연습문제 1.42.** 주 로그함수에 의한 원환  $\{z : 1 < |z| < e\}$ 의 상을 구하라.

**연습문제 1.43.**  $(1+i)^{1-i}$ 의 주 로그값을 구하라.

## 1.5 참고

복소수의 역사에 대한 설명은 [Needham (1997)]을 인용하였다. 연습문제 1.2는 [Shastri (2000)]에서, 연습문제 1.7, 1.13, 1.19는 [Needham (1997)]에서 가져왔다. 연습문제 1.23, 연습문제 1.34는 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]을 인용하였다.



# Chapter 2

## 복소미분

이 장에서는 다음 3가지 주제를 중점적으로 다룬다.

- (1) 복소미분의 정의: 즉,  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합  $U$ 에 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 와  $z_0 \in U$ 가 주어졌을 때, “ $f$ 가  $z_0$ 에서 복소미분가능하고 복소미분값은  $f'(z_0)$ 이다”라는 의미에 대하여 학습한다.

- (2) 코시-리만 방정식:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  와  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

이 방정식은 복소미분가능함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 의 실수부와 허수부  $u, v$ 가 만족하는 편미분방정식이다.

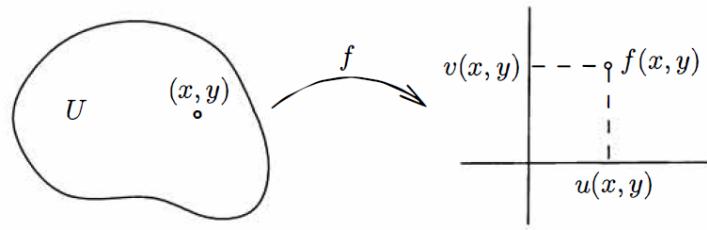


Fig. 2.1 The real and imaginary parts  $u, v$  of  $f$ .

Figure 2.1:  $f$ 의 실수부와 허수부  $u, v$

역으로, 어떤 열린집합  $U$ 의 모든 점에서  $C^1$ -함수  $u, v$ 가 코시-리만 방정식을 만족한다면  $f = u + iv$ 는  $U$ 에서 복소미분가능하다.

- (3) 복소미분  $f'(z_0)$ 의 기하학적 의미: 국소적으로 보면, 함수  $f$ 는  $|f'(z_0)|$ 만큼 확대하면서 반시계방향으로  $\text{Arg}(f'(z_0))$ 만큼 회전시키는 변환이다.

이 장에서는 열린집합에 정의된 복소미분가능함수가 코시-리만 방정식을 만족할 필요충분조건(다소 덜 엄밀한 방식으로)에 대하여 중점적으로 다룬다.

## 2.1 복소 미분가능성

### 정의 2.1.

- (1)  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in U$ 라 하자. 다음 식을 만족하는 복소수  $L$ 이 존재하면,  $f$ 가  $z_0$ 에서 **복소미분가능**이라 한다.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L.$$

즉, 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $\delta > 0$ 가 존재하여,  $z \in U$ ,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 이면

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L \right| < \epsilon$$

을 만족한다.

극한값  $L$ 은 유일하게 결정되며 다음과 같이 나타낸다.

$$f'(z_0) \quad \text{또는} \quad \frac{df}{dz}(z_0).$$

- (2) 열린집합  $U$ 에 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $U$ 의 모든 점에서 복소미분가능하면 복소해석적(holomorphic<sup>1</sup>)이라 부른다.
- (3) 복소수  $\mathbb{C}$  전체에서 복소해석적이면 전해석(entire) 함수라 부른다. 즉,  $f$ 의 정의역이 복소수  $\mathbb{C}$  전체이고  $\mathbb{C}$ 에서 복소해석적임을 의미한다.

전해석 함수의 간단한 예를 살펴보자.

**예제 2.1.** 함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $f(z) = z^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ )라 정의하자. 그러면  $f$ 가 전해석 함수임을 보일 수 있다.  $z$ 가  $z_0$ 의 근방에 있을 때,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0 \approx 2z_0$$

이므로,  $f'(z_0) = 2z_0$ 라고 추측할 수 있다. 이를 증명해 보자.  $z \neq z_0$ 에 대하여

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - 2z_0 \right| = \left| \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} - 2z_0 \right| = |z + z_0 - 2z_0| = |z - z_0|.$$

---

<sup>1</sup>“holomorphic”이라는 용어는 전체(entire)를 뜻하는 그리스어 “holo”와 “모양(form)” 또는 “형세(apppearance)”을 나타내는 “morphē”에서 파생되었다.

따라서  $z$ 가  $z_0$ 에 충분히 가까우면 좌변을 원하는 만큼 작은 값으로 만들 수 있다.  $\epsilon > 0$ 이라 하자.  $\delta := \epsilon > 0$ 으로 잡으면,  $z \in \mathbb{C}$ 가  $0 < |z - z_0| < \delta$ 를 만족할 때마다

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - 2z_0 \right| = |z - z_0| < \delta = \epsilon.$$

결론적으로  $f'(z_0) = 2z_0$ 가 성립한다.  $z_0 \in \mathbb{C}$ 를 임의로 선택할 수 있으므로,  $f$ 는  $\mathbb{C}$  전체에서 복소 해석적이고, 전해석 함수가 된다. 이상에서 다음 결론을 얻는다.

$$\frac{d}{dz} z^2 = 2z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

다른 방향으로, 이제 복소미분가능하지 않은 함수의 예를 보자.

**예제 2.2.** 함수  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $g(z) = \bar{z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ )라 정의하자. 그러면  $g$ 는 어떤 점에서도 복소미분이 불가능함을 보일 수 있다.  $g$ 가  $z_0 \in \mathbb{C}$ 에서 복소미분가능하다고 하자.  $\epsilon := \frac{1}{2} > 0$ 라 하면,  $\delta > 0$ 이 존재하여  $z$ 가  $0 < |z - z_0| < \delta$ 를 만족할 때마다

$$\left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right| = \left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} - g'(z_0) \right| < \epsilon$$

이 성립한다.

그림 2.2의 원쪽을 보자. 위의 식에 따르면, 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $\delta$ 인 뚫린 원판(punctured disk)에  $z$ 가 속할 때마다 부등식이 성립함을 보장한다. 이제 그림의 뚫린 원판 내부에  $z_0$ 의 위쪽과 오른쪽에 한점씩을 선택하자. 이 점들을 부등식에 넣어보면,  $g'(z_0)$ 는 각각  $-1$ 과  $1$ 을 중심으로 하고 반지름  $1/2$ 인 원판 내부에 속해야 한다. 그림 2.2의 오른쪽을 참고하면, 두 원판은 겹치지 않으므로 모순이 되어 증명이 끝난다. 아래에서 좀 더 자세히 살펴보자.

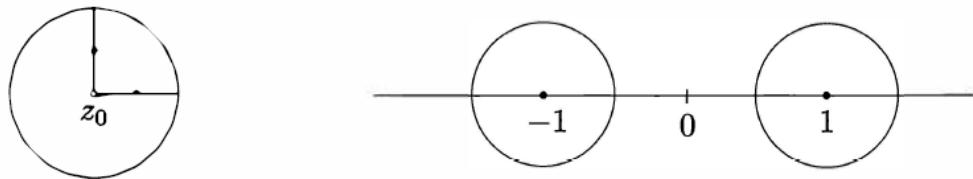


Fig. 2.2 Non complex differentiability of complex conjugation

Figure 2.2: 결례복소수 함수의 미분 불가능성

$z = z_0 + \frac{\delta}{2}$ 로 잡으면,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 므로

$$\left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} - g'(z_0) \right| = \left| \frac{\delta/2}{\delta/2} - g'(z_0) \right| = |1 - g'(z_0)| < \epsilon. \quad (2.1)$$

한편,  $z = z_0 + i\frac{\delta}{2}$ 로 잡으면,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 이므로

$$\left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} - g'(z_0) \right| = \left| \frac{-\delta/2}{\delta/2} - g'(z_0) \right| = |1 + g'(z_0)| < \epsilon. \quad (2.2)$$

식 (2.1)과 (2.2)로부터

$$2 = |1 - g'(z_0) + 1 + g'(z_0)| \leq |1 - g'(z_0)| + |1 + g'(z_0)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

이 되어 모순이다. 따라서  $g$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하지 않다.

**연습문제 2.1.** 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $f(z) = |z|^2$ 로 정의된 함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 는 0에서 복소미분 가능하며  $f'(0) = 0$ 임을 보여라. 나중에 (연습문제 2.9에서)  $f$ 는 0이 아닌 모든 점에서 복소미분 불가능함을 보일 것이다.

**연습문제 2.2.** 영역  $D$ 에 정의된 함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석적이라 하자.  $D^* := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$ 에 함수  $f^* : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$  ( $z \in D^*$ )로 정의하면  $f^*$ 가  $D^*$ 에서 복소해석적임을 증명하라.

복소미분 가능성에 대한 다음 변형은 복소미분에 대한 기본 공식을 증명하는 데 유용하게 사용된다. 대략적으로 말하면, 복소미분가능함수  $f$ 가  $z_0$ 에서 미분값  $L$ 을 갖는다면  $f(z) - f(z_0) - L \cdot (z - z_0)$ 가  $z - z_0$ 보다 0으로 빠르게 수렴함을 뜻한다.

**보조정리 2.1.**  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 집합이고,  $z_0 \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 라 하면, 다음은 동치이다.

(1)  $f$ 가  $z_0$ 에서 복소미분가능하며,  $f'(z_0) = L$ 이다.

(2) 양수  $r > 0$ 과  $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ 에 정의된 함수  $h : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재하여 다음을 만족한다.

(a)  $|z - z_0| < r$ 에 대하여  $f(z) = f(z_0) + (L + h(z))(z - z_0)$ 이고,

(b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$ .

### 증명

(2) $\Rightarrow$ (1):  $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ 에 대하여 (a)의 식을 재정리하면,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L = h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

이므로  $f$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하며  $f'(z_0) = L$ 이다.

(1) $\Rightarrow$ (2): 이제  $f$ 가  $z_0$ 에서 복소미분가능하다고 가정하자. 그러면  $\delta_1 > 0$ 이 존재하여  $0 < |z - z_0| < \delta_1$ ,  $z \in U$ 이면

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < 1$$

이다.  $r := \delta_1$ 으로 설정하고 함수  $h : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ 를

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

로 정의하자. 그러면  $|z - z_0| < r$ 일 때  $f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + h(z))(z - z_0)$ 가 성립한다. 이제 (b)를 보이기 위해  $\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자.  $0 < |z - z_0| < \delta$ 면

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| (= |h(z) - 0|) < \epsilon$$

이 되는  $\delta > 0$ 를 잡을 수 있다 ( $r$ 보다 작다는 조건도 만족하도록). 이로써 (a), (b)를 모두 성립함을 알 수 있다.  $\square$

**연습문제 2.3.** 영역  $D \subset \mathbb{C}$ 에 정의된 함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0 \in D$ 에서 복소미분가능하다면  $f$ 는  $z_0$ 에서 연속임을 보여라. 나중에 우리는  $f$ 가  $D$ 에서 복소해석적이면, 실제로  $D$ 의 모든 점에서 무한변 미분가능함을 보일 것이다.

보조정리 2.1을 이용하여 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

**명제 2.1.**  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0 \in U$ 에서 복소미분가능함수이면 다음이 성립한다.

- (1)  $f + g$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하고  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) = g'(z_0)$ 이다.  
(함수  $f + g : U \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $z \in U$ 에 대하여  $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ 로 정의한다)
- (2)  $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\alpha \cdot f$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하고  $(\alpha \cdot f)'(z_0) = \alpha f'(z_0)$ 이다.  
(함수  $\alpha \cdot f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $z \in U$ 에 대하여  $(\alpha \cdot f)(z) = \alpha f(z)$ 로 정의한다)
- (3)  $fg$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하고  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ 이다.  
(함수  $fg : U \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $z \in U$ 에 대하여  $(fg)(z) = f(z)g(z)$ 로 정의한다)

**참고 2.1.**  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고,  $\text{Hol}(U)$ 가  $U$ 에 정의된 복소해석 함수의 집합이라고 하자. 그러면 위 명제로부터  $\text{Hol}(U)$ 가 점별 연산에 대하여 복소 벡터공간을 이룸을 알 수 있다. 한편 위 명제의 세번째 내용은 두 복소해석 함수의 점별 곱셈은 다시 복소해석적임을 뜻한다. 따라서  $\text{Hol}(U)$ 는 점별 덧셈과 곱셈에 대하여 환(ring) 구조를 갖는다.

**예제 2.3.**  $f(z) := z$  ( $z \in \mathbb{C}$ )에 대하여  $f'(z) = 1$ 임을 쉽게 보일 수 있다. 두 복소해석함수의 점별 곱셈에 대한 복소미분 규칙을 이용하면, 수학적 귀납법으로 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에  $z \mapsto z^n$ 이 전해석함수이고

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

임을 알 수 있다. 특히, 모든 다항식은 전해석함수이다.

**연습문제 2.4.** 명제 2.1을 증명하라.

**연습문제 2.5.**  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 이고  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ 가  $\mathbb{D}$ 에 정의된 복소해석함수의 점별 연산으로 이루어진 복소 벡터공간이라 하자.  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ 는 유한차원인가?

**연습문제 2.6.**  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고,  $U$ 에 정의된 복소해석함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z \in U$ 에 대하여  $f(z) \neq 0$ 라고 하자.

$$\frac{1}{f} : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ 를 } \left(\frac{1}{f}\right)(z) = \frac{1}{f(z)} \text{ 로 정의할 때}$$

복소해석함수가 되며 복소미분이 다음과 같음을 보여라.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} \quad (z \in U).$$

**연습문제 2.7.**  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 정수  $m \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $\frac{d}{dz} z^m = mz^{m-1}$ 임을 증명하라.

실수에서 정의된 합성함수의 미분에 대한 연쇄법칙과 같이 복소해석함수의 합성에 대해서도 유사한 연쇄법칙이 존재한다.

**명제 2.2 (연쇄법칙).**

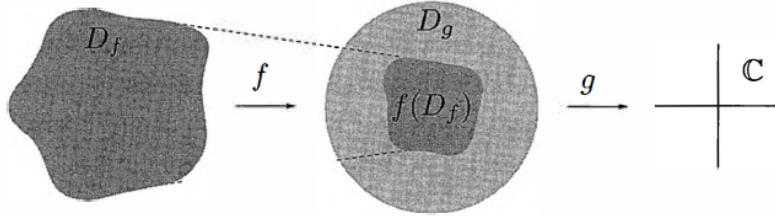
- (1)  $D_f, D_g$ 가 복소평면 위의 영역이고,
- (2)  $f : D_f \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D_f$ 에서 복소해석적이고,
- (3)  $g : D_g \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D_g$ 에서 복소해석적이고,
- (4)  $f(D_f) \subset D_g$ 일 때,

$z \in D_f$ 에 대하여  $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ 로 정의된 합성함수  $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $D_f$ 에서 복소해석함수이고, 모든  $z \in D_f$ 에 대하여  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ 이다.

### 증명

$z_0 \in D_f$ 라 하자. 그러면  $f(z_0) \in D_g$ 이다.  $f$ 가  $z_0$ 의 근방에서 복소미분가능하고  $g$ 가  $f(z_0)$ 의 근방에서 복소미분가능하므로, 원판  $D(z_0, r_f) \subset D_f$ 와  $D(f(z_0), r_g) \subset D_g$ 에 각각 정의된 함수  $h_f$ 와  $h_g$ 가 존재하여 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (f'(z_0) + h_f(z))(z - z_0), \\ g(w) - g(f(z_0)) &= (g'(f(z_0)) + h_g(w))(w - f(z_0)), \end{aligned}$$

Fig. 2.3 The chain rule:  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ ,  $z \in D_f$ .Figure 2.3: 연쇄법칙:  $z \in D_f$ 에 대하여  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ 

또한

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h_f(z) = 0, \quad \lim_{w \rightarrow f(z_0)} h_g(w) = 0.$$

$f$ 가  $z_0$ 에서 연속이므로  $z$ 가  $z_0$ 에 가까워질 때  $w := f(z)$ 도  $f(z_0)$ 에 가까워지므로  $z \neq z_0$ 이고  $z_0$ 에 가까워지면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = (g'(f(z_0)) + h_g(f(z)))(f'(z_0) + h_f(z)).$$

이로써 증명이 끝난다.  $\square$

#### 예제 2.4. 연습문제 2.7로부터

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

임을 알지만, 복소미분 정의로부터도의 쉽게 유도할 수 있다. 왜냐하면,  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 대하여 다음 식이 성립하기 때문이다.

$$\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \frac{z_0 - z}{zz_0(z - z_0)} = \frac{-1}{zz_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} -\frac{1}{z_0^2}.$$

이제  $D_f := \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ 에 정의된 함수  $f := 1 + z^2$ 와  $D_g := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 정의된 함수  $g := 1/z$ 를 생각하자.  $f(D_f) \subset D_g$ 이 성립함이 명확하므로 연쇄법칙에 의해  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ 에서

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 + z^2} \right) = -\frac{1}{(1 + z^2)^2} \cdot 2z = -\frac{2z}{(1 + z^2)^2}.$$

**연습문제 2.8.**  $\exp z$ 가 전해석함수이고  $\exp' z = \exp z$ 라 가정하고(나중에 증명할 예정이다),

$$z \mapsto \exp \left( -\frac{1+z}{1-z} \right)$$

가 단위 원판  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 에서 복소미분가능함수임을 보이고, 미분을 구하라.

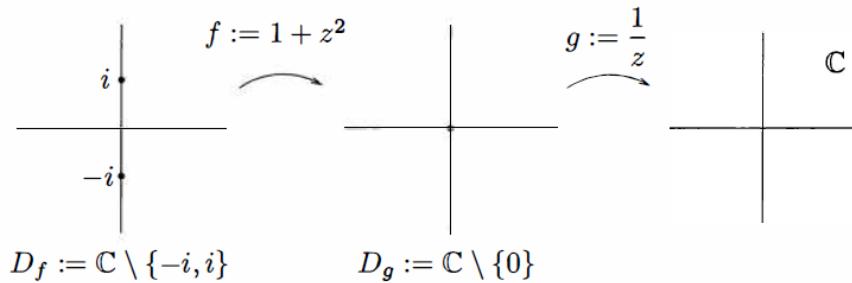
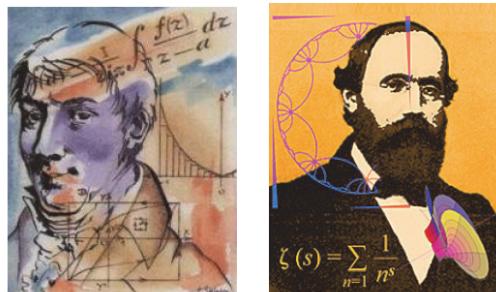


Fig. 2.4 Application of the chain rule.

Figure 2.4: 연쇄법칙의 응용

## 2.2 코시-리만 방정식

이제 이 장에서 가장 중요한 결과를 증명해보자. 간략히 말하면, 함수  $f = u + iv$ 가 복소미분가능하다는 것은 실수부  $u$ 와 허수부  $v$  ( $\mathbb{R}^2$ 의 열린 부분집합에 정의된 실함수로 볼 수 있는)가 코시-리만(Cauchy-Riemann) 방정식이라 불리는 편미분 방정식을 만족함과 동치이다.



Cauchy-Riemann

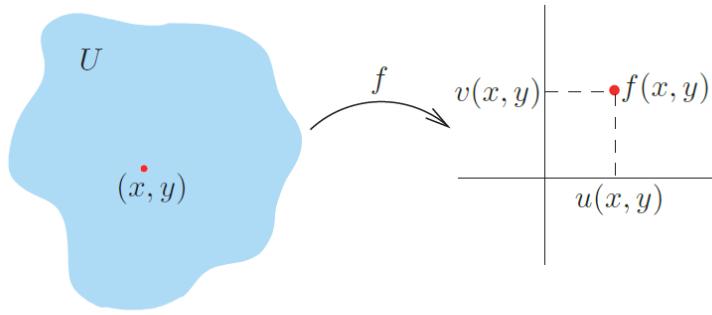
코시-리만(Cauchy-Riemann)

$\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합  $U$ 에 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 를 생각하자. 그러면 임의의 점  $(x, y) \in U$ 에 대하여  $f(x + iy) \in \mathbb{C}$ 이고,  $f(x + iy)$ 의 실수부  $u(x, y)$ 와 허수부  $v(x, y)$ 를 그림 2.5와 같이 볼 수 있다.

점  $(x, y)$ 가 변하면  $f(x + iy)$ 도 변하며,  $u(x, y)$ 와  $v(x, y)$ 도 마찬가지다. 이런 방법으로,  $f$ 와 연관된 실함수를 얻는다.

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}, U \ni (x, y) \mapsto \operatorname{Re}(f(x + iy)) =: u(x, y),$$

$$v : U \rightarrow \mathbb{R}, U \ni (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(f(x + iy)) =: v(x, y).$$

Fig. 2.5 The real and imaginary parts  $u, v$  of  $f$ .Figure 2.5:  $f$ 의 실수부  $u$ 와 허수부  $v$ 

이 장의 첫번째 결과는 코시-리만 방정식이 복소미분가능성에 대한 필요조건이라는 것이며 이는 정리 2.1에서 증명할 것이다. 즉,  $f$ 가  $(x_0, y_0) \in U$ 에서 복소미분가능하다면,

$$(x_0, y_0) \text{에서 } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{이고 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

이를 이 방정식을 코시-리만 방정식이라 부른다. 따라서 복소미분가능함수는 이 방정식을 만족한다. 다시 말하면, 복소함수의 실수부와 허수부가 어떤 점에서 이 방정식을 만족하지 않는다면, 그 점에서 복소미분가능하지 않음을 알 수 있다. 여기서 예제 하나를 보자. 앞에서 우리는  $\epsilon - \delta$ 를 이용한 복소미분의 정의로부터 직접 계산하여  $z \mapsto \bar{z}$ 가 복소평면위의 어느 점에서도 미분가능하지 않음을 보였다. 예제 2.2를 다시 살펴보자.

**예제 2.5.**  $g(z) = \bar{z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ )로 정의된 함수  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(g(x + iy)) = \operatorname{Re}(x - iy) = x, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(g(x + iy)) = \operatorname{Im}(x - iy) = -y \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

이 결과는 코시-리만 방정식이 어떤 점에서도 성립하지 않음을 의미한다. 따라서  $g$ 가 어떤 점에서도 복소미분가능하지 않다는 이전 결과를 쉽게 얻을 수 있다.

코시-리만 방정식이 복소미분가능성에 대한 필요조건이라는 것을 증명하기에 앞서 이 절에서 증명할 두번째로 중요한 결과로 열린집합에서 복소해석적일 충분조건으로서 코시-리만 방정식에 대하여 언급하고자 한다. 좀 더 정확히 말하면, 열린집합  $U$ 에 정의된 함수  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $U$ 에서 연속미분가능하고 (이변수 실함수로서),  $U$ 의 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하면,  $u, v$ 로부터  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  ( $x, y \in U$ )로 정의하여 만든  $(u, v)$ 가  $f$ 의 실수부와 허수부가

되도록) 새로운 복소함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 는 복소해석적이다. 이 중요한 결과로부터 우리는  $\epsilon - \delta$  정의를 이용하는 매우 긴 증명을 통하지 않고 주요 함수의 복소미분가능성을 확인할 수 있다. 예제를 살펴보자.

**예제 2.6.** 뚫린 평면  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 에서

$$u(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) := \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

로 정의된 함수  $u, v$ 를 생각하자. 그러면 다음 편미분을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

당연히  $\mathbb{R}^2$ 에서  $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2, y^2 - x^2, \pm 2xy$ 는 연속함수이고,  $(x^2 + y^2)^2$ 은  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 에서 0이 아니다. 따라서  $u, v$ 는  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 에서 연속미분가능하다. 또한 코시-리만 방정식이 성립한다. 결론적으로  $f := u + iv$ 는  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 복소해석적이다. 실제로 위에서 정의한  $f$ 는 다름 아닌 분수함수  $z \mapsto 1/z$ 이다.

$$f = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

**정리 2.1.**  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ 에서 복소미분가능하다고 하자. 그러면 함수

$$(x, y) \mapsto u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x + iy)) : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x + iy)) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

는  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능하고 다음을 만족한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.3)$$

**증명** (증명의 아이디어는 쉽다. 단지  $(x, y)$ 를  $(x_0, y_0)$ 에 가까이 보낼 때 첫번째로  $y$ 를  $y_0$ 로 고정하는 방법으로 하고 그 다음에  $x$ 를  $x_0$ 로 고정하는 방법을 사용한 후 각 결과를 살펴본다. 그림 2.6을 참고하라.)

$z_0 = (x_0, y_0) \in U$ 라 하자.  $\epsilon > 0$ 에 대하여,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 일 때  $z \in U$ 에 대하여

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad (2.4)$$

을 만족하는  $\delta > 0$ 가 존재한다.

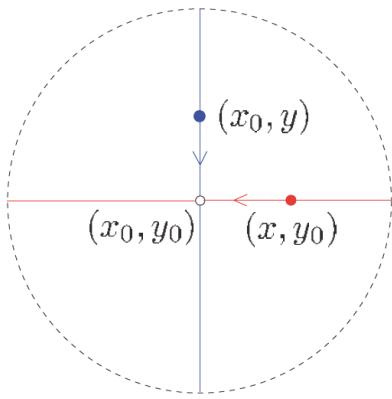


Fig. 2.6 Proof of the necessity of the Cauchy-Riemann (CR) equations for complex differentiability.

Figure 2.6: 복소미분가능성에 대하여 코시-리만(CR) 방정식이 필요조건임을 증명

**단계 1:**  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ 가 존재하고  $\operatorname{Re}(f'(z_0))$ 와 같음을 증명하자.

$0 < |x - x_0| < \delta$ 를 만족하는  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $z := x + iy_0$ 라고 하자. 그러면  $z - z_0 = x - x_0$ 를 만족하므로  $0 < |z - z_0| = |x - x_0| < \delta$ 가 된다. 이제 다음을 식 (2.4)로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \right| &= \left| \operatorname{Re} \left( \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \right) - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \right| \\ &= \left| \operatorname{Re} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \end{aligned}$$

따라서 편미분 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \operatorname{Re}(f'(z_0)). \end{aligned}$$

**단계 2:**  $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Im}(f'(z_0))$ 를 증명하자.

단계 1에서 사용한 표기법을 적용하여 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} - \operatorname{Im}(f'(z_0)) \right| &= \left| \operatorname{Im} \left( \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \right) - \operatorname{Im}(f'(z_0)) \right| \\ &= \left| \operatorname{Im} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) - \operatorname{Im}(f'(z_0)) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \end{aligned}$$

따라서  $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \operatorname{Im}(f'(z_0))$ . 종합하면,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.5)$$

**단계 3:**  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\operatorname{Im}(f'(z_0))$ 를 증명하자.

$0 < |y - y_0| < \delta$ 를 만족하는  $y \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $z := x_0 + iy$ 라고 하자. 그러면  $z - z_0 = i(y - y_0)$ 를 만족하므로  $0 < |z - z_0| = |y - y_0| < \delta$ 가 된다. 이제 실수  $a, b$ 에 대하여  $\operatorname{Re}(a + ib) = \operatorname{Im}(i(a + ib))$ 가 성립함을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \operatorname{Im}(f'(z_0)) \right| &= \left| \frac{\operatorname{Im}(i(f(z) - f(z_0)))}{y - y_0} + \operatorname{Im}(f'(z_0)) \right| \\ &= \left| \operatorname{Im} \left( -\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + f'(z_0) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 편미분은

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} = -\operatorname{Im}(f'(z_0)).$$

단계 2에서 다음 식을 얻은 것을 기억하면

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Im}(f'(z_0)),$$

이로부터 코시-리만 방정식의 두개 중 하나를 얻는다. 즉,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

**단계 4:**  $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{Re}(f'(z_0))$ 를 증명하자.

단계 3에서 사용한 표기법을 적용하고, 실수  $a, b$ 에 대하여  $\operatorname{Im}(a + ib) = -\operatorname{Re}(i(a + ib))$ 가 성립함을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \right| &= \left| -\operatorname{Re} \left( i \frac{f(z) - f(z_0)}{y - y_0} \right) - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \right| \\ &\leq \left| -i \frac{f(z) - f(z_0)}{y - y_0} - f'(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 편미분은

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} = \operatorname{Re}(f'(z_0)).$$

결론적으로

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2.6)$$

식 (2.5)와 (2.6)으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

이로써 코시-리만 방정식 전체를 얻었다.

끝으로  $u, v$ 가  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능함(이변수 실함수로서)을 보이자.  $0 < |z - z_0| < \delta$ 를 만족하는  $z = (x, y)$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} & \left| u(x, y) - u(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) - \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right) (y - y_0) \right| \\ &= \frac{\left| u(x, y) - u(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (x - x_0) + \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (y - y_0) \right|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2} \\ &= \frac{| \operatorname{Re}(f(z)) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) |}{|z - z_0|} < \epsilon. \end{aligned}$$

따라서  $u$ 는  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능하다. 유사한 방법으로  $v$ 도  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능하다.  $\square$

**참고 2.2.** 우리는 나중에 복소미분가능함수의 실수부와 허수부는 실제로 무한번 미분가능함을 보일 예정이다.

**연습문제 2.9.** 연습문제 2.1을 다시 생각하자.  $f$ 가 열린집합  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 의 모든 점에서 미분가능하지 않음을 보여라.

다음과 같이 정리 2.1의 역을 생각할 수도 있다. 함수의 복소미분가능성을 확인하는데 매우 유용하게 사용된다.

**정리 2.2.**

(1)  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고,

(2)  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$  연속미분가능함수이며,

(3)  $u, v$ 가  $(x, y) \in U$ 에서 코시-리만 방정식을 만족한다고 하자.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

그러면,  $f : u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $U$ 에 정의된 복소미분가능함수이고  $x + iy \in U$ 에 대하여

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

### 증명

$z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ 라 하자.  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $z = x + iy \in U$ 가 원판  $D(z_0, \delta) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < \delta\}$ 에 속하면

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right| < \epsilon. \quad (2.7)$$

을 만족하도록  $\delta > 0$ 를 선택하자. ( $u, v$ 가 연속미분가능하기 때문에 가능하다)

$z = x + iy$ 를 뚫린원판  $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ 의 고정된 점이라 하고  $z_0$ 와  $z$ 를 잇는 직선에서  $D(z_0, \delta)$ 에 속하는 부분을 생각하자. 직선 위의 점은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$p(t) = (1 - t)z_0 + tz = ((1 - t)x_0 + tx, (1 - t)y_0 + ty).$$

특히  $p(0) = z_0, p(1) = z$ 이다. 그럼 2.7을 참고하라.

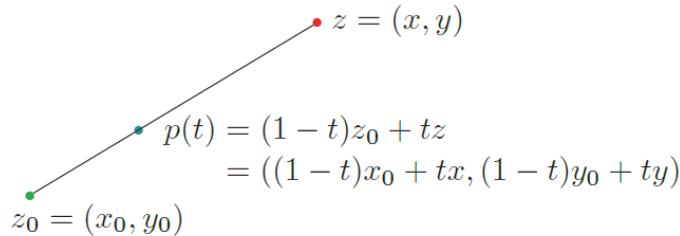


Fig. 2.7 Points  $p(t)$ , on the line joining  $z_0$  to  $z$ .

Figure 2.7:  $z_0$ 와  $z$ 를 잇는 직선 위의 점  $p(t)$

함수  $\varphi_1, \varphi_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u(p(t)) \\ v(p(t)) \end{bmatrix}$$

로 정의하자. 연쇄법칙을 적용하면

$$\begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p(t)) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(p(t)) \cdot (y - y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p(t)) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(p(t)) \cdot (y - y_0) \end{bmatrix}.$$

이제 새로운 표기법을 위해 아래 두 함수를 정의하자.

$$A(t) := \frac{\partial u}{\partial x}(p(t)) = \frac{\partial v}{\partial y}(p(t)),$$

$$B(t) := -\frac{\partial u}{\partial y}(t(p(t))) = \frac{\partial v}{\partial x}(p(t))$$

여기서 맨오른쪽 등호는 코시-리만 방정식을 적용한 결과이다. 이제 이 표기법으로부터

$$\begin{bmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A(t)(x - x_0) - B(t)(y - y_0) \\ B(t)(x - x_0) + A(t)(y - y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(A(t) + iB(t))(z - z_0) \\ \operatorname{Im}(A(t) + iB(t))(z - z_0) \end{bmatrix}$$

를 얻으면,

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) \\ &= \varphi_1(1) - \varphi_1(0) + i(\varphi_2(1) - \varphi_2(0)) \\ &= \int_0^1 \varphi'_1(t) dt + i \int_0^1 \varphi'_2(t) dt \\ &= \left( \int_0^1 A(t) dt + i \int_0^1 B(t) dt \right) \cdot (z - z_0). \end{aligned}$$

정리하면

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &- \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(p(t)) - \frac{\partial u}{\partial x}(p(0)) \right) dt + i \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial x}(p(t)) - \frac{\partial v}{\partial x}(p(0)) \right) dt. \end{aligned}$$

식 (2.7)로부터

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

이  $0 < |z - z_0| < \delta$ 를 만족하는 모든  $z$ 에 대하여 성립한다. 따라서  $f$ 는  $z_0$ 에서 복소미분가능하고

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

가 되어 증명이 끝난다. □

예제 2.1을 다시 살펴보자. 이제는 복소미분의 정의에 사용한  $\epsilon$ - $\delta$ 를 대신하여 위 정리로부터 제곱함수의 복소미분가능성을 확인할 수 있다.

**예제 2.7.** 함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $f(z) = z^2$ 으로 정의하면

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(f(x + iy)) = \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) = x^2 - y^2, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(f(x + iy)) = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2xyi) = 2xy \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - 2y &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

로부터  $\mathbb{C}$  전체에서 코시-리만 방정식이 성립함을 알 수 있다. 따라서 앞에서 보인 바와 같이  $f$ 는 전해석함수가 된다. 또한,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2yi = 2z$$

이므로 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $f'(z) = 2z$ 이다.  $\diamond$

**예제 2.8** ( $\exp, \sin, \cos$ 은 전해석함수이다). 함수  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $g(z) = \exp z$ 로 정의하면,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(g(x + iy)) = \operatorname{Re}(e^x(\cos y + i \sin y)) = e^x \cos y, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(g(x + iy)) = \operatorname{Im}(e^x(\cos y + i \sin y)) = e^x \sin y \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - e^x \sin y &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

로부터  $\mathbb{C}$  전체에서 코시-리만 방정식이 성립함을 알 수 있다. 따라서  $\exp$  함수가 전해석이라는 중요한 결론에 도달한다. 또한,

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp z$$

이므로 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$ 이다. 명제 2.2로부터 삼각함수

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

도 전해석함수이며 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin z &= \frac{i \exp(iz) - (-i) \exp(-iz)}{2i} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \cos z, \\ \frac{d}{dz} \cos z &= \frac{i \exp(iz) + (-i) \exp(-iz)}{2} = -\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = -\sin z. \end{aligned}$$

$\diamond$

**예제 2.9** ( $\log$ 의 복소미분가능성). 주 로그함수가 열린집합  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 복소미분가능함을 보이자. 주 로그함수는 더 큰 집합  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 정의된 함수이지만 여기서는 연속함수가 될 수 없음을 앞에서 이미 보였다(실수축의 음수부분에서 불연속이다). 또한 더 작은 집합  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서는 주 로그함수가 연속임을 보였다. 이제 이 연속성을 이용하여  $\log$ 가  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 복소미분가능하고 그 미분은

$$\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$$

임을 증명하고자 한다.

우선 같지 않은  $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에 대하여  $\log(z) \neq \log(z_0)$ 이다 (왜?).  $\epsilon > 0$ 에 대하여

$$\epsilon_1 := \min \left\{ \frac{|z_0|}{2}, \frac{|z_0|^2}{2} \epsilon \right\}$$

로 정한다.  $\exp w$ 가  $w_0 := \text{Log}(z_0)$ 에서 미분가능하므로,  $0 < |w - w_0| = |w - \text{Log}(z_0)| < \delta_1$ 을 만족하는 모든  $w$ 에 대하여 다음 식이 성립하도록 하는  $\delta_1 > 0$ 이 존재한다.

$$\left| \frac{\exp w - \exp w_0}{w - w_0} - \exp w_0 \right| = \left| \frac{\exp w - z_0}{w - \text{Log}(z_0)} - z_0 \right| < \epsilon_1.$$

$\text{Log}$ 가  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 연속인 단사함수이므로  $0 < |z - z_0| < \delta$ 면

$$0 < |\text{Log } z - \text{Log } z_0| < \delta_1$$

을 만족하도록 하는  $\delta > 0$ 가 존재한다.

이제  $w := \text{Log } z$ ,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 로부터  $0 < |w - w_0| < \delta_1$ 을 얻게 되어

$$\left| \frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0} - z_0 \right| < \epsilon_1$$

이 성립한다. 한편, 삼각부등식을 사용하면  $\left| \frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0} \right| \geq |z_0| - \epsilon_1 \geq \frac{|z_0|}{2}$ 이다. 따라서  $0 < |z - z_0| < \delta$ 를 만족하면 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{Log } z - \text{Log } z_0}{z - z_0} - \frac{1}{z_0} \right| &= \left| \left( z_0 - \frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0} \right) \cdot \frac{1}{\frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0}} \cdot \frac{1}{z_0} \right| \\ &= \left| z_0 - \frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0} \right| \cdot \frac{1}{\left| \frac{z - z_0}{\text{Log } z - \text{Log } z_0} \right|} \cdot \frac{1}{|z_0|} \\ &< \epsilon_1 \cdot \frac{1}{|z_0|/2} \cdot \frac{1}{|z_0|} = \frac{2\epsilon_1}{|z_0|^2} < \epsilon. \end{aligned}$$

이상에서  $\text{Log}$ 가  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 복소미분가능하고  $\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}$ 임을 보였다.  $\diamond$

**예제 2.10.** 다음과 같이 정의된 함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를 생각하자.

$$x + iy \neq 0 \text{에 대하여 } f(x + iy) = \frac{xy(x + iy)}{x^2 + y^2} \text{이고, } f(0) = 0.$$

0이 아닌  $(x, y) \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$u(x, y) = \text{Re}(f(x + iy)) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

이고  $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$ 이다. 따라서,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$$

로부터  $(0, 0)$ 에서 코시-리만 방정식이 만족된다. 하지만, 함수  $f$ 는 0에서 복소미분 가능하지 않다.

만약 미분 가능하다면,

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0 + i0 = 0$$

이 되어야 한다.  $\epsilon = 1/4$ 로 잡으면 대응하는  $\delta$ 가 존재하여  $0 < |z - 0| = |x + iy| < \delta$ 면

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} - f'(0) \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

이 항상 성립해야 한다. 하지만,  $x + iy = \frac{\delta}{2} + i\frac{\delta}{2}$ 로 택하면

$$\frac{1}{2} = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon = \frac{1}{4}$$

가 되어 모순이 생긴다. 따라서  $f$ 는 0에서 복소미분 불가능이다.

$u$ 가  $(0, 0)$ 에서 미분 가능하지 않기 때문에 정리 2.2와 모순되지는 않는다. 만약  $u$ 가 미분 가능하다면  $(0, 0)$ 에서의 미분은 선형변환

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

이 된다. 그렇다면  $\epsilon := 1/3$ 이라 하면  $\delta > 0$ 가 존재하여  $0 < \|(x, y) - (0, 0)\|_2 < \delta$ 면 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{|u(x, y) - u(0, 0) - 0((x, y) - (0, 0))|}{\|(x, y) - (0, 0)\|_2} = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} < \epsilon = \frac{1}{3}.$$

그런데  $(x, y) = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ 로 택하면,  $\|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ 지만

$$\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{\delta}{2}}{\left(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8}} < \epsilon = \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{9}}$$

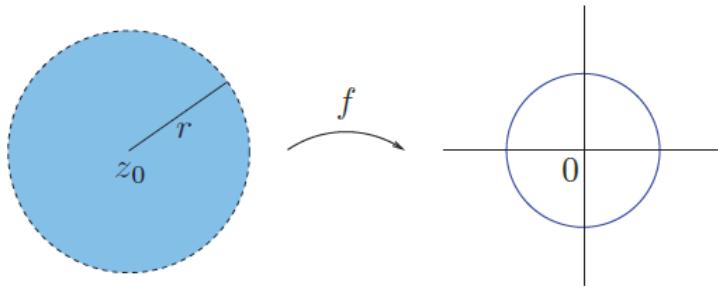
가 되어 모순이다. 따라서  $u$ 는  $(0, 0)$ 에서 미분 가능하지 않다. <sup>2</sup> ◇

---

<sup>2</sup>미분 경로에 따라 미분값이 달라진다는 것을 보이는 방법으로도 같은 결과를 얻을 수 있다.

코시-리만 방정식은 몇가지 흥미로운 사실들의 증명에도 사용된다. 다음 예제는 앞에서 미리 언급했던 복소미분의 “엄밀성”을 보여준다. 연습문제 2.12에서도 엄밀성을 엿볼 수 있다.

**예제 2.11**(절대값이 일정한 복소미분가능 함수는 상수함수이다). 원판  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  을 생각하자. 코시-리만 방정식의 응용하면 복소미분가능함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 모든  $z \in D$ 에 대하여  $|f(z)| = c$ 를 만족하는 상수  $c \in \mathbb{R}$ 가 존재한다면  $f$ 는 상수함수임을 보이자 (이 결과는 나중에 “최대 절대값 정리(Maximum Modulus Theorem)”라 불리는 결과를 학습할 때 사용할 것이다). 아래 그림을 보자.



$u, v$ 를 각각  $f$ 의 실수부와 헤수부라 하자. 가정에서  $c^2 = |f|^2 = u^2 + v^2$ 임을 알 수 있고 이를 미분하면,

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

처음 방정식에  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 를 두번째 방정식에  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ 를 적용하면

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{2.8}$$

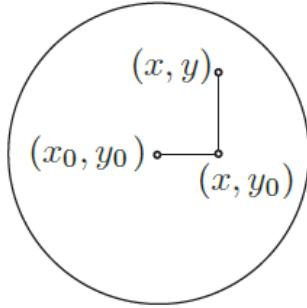
$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.9}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ 를 소거하기 위해 식 (2.8)에  $u$ 를 곱하고 식 (2.9)에  $v$ 를 곱하여 더하면  $(u^2 + v^2) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 을  $\frac{\partial u}{\partial x}$ 를 소거하기 위해 식 (2.8)에  $-v$ 를 곱하고 식 (2.9)에  $u$ 를 곱하여 더하면  $(u^2 + v^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 을 얻는다.  $c = 0$ 이면  $u^2 + v^2 = c^2 = 0$ 이 되어  $u = v = 0$ 이므로  $D$ 에서  $f = 0$ 이 된다.  $c \neq 0$ 이면  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 이고 코시-리만 방정식을 적용하면  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 도 얻는다. 적분의 기본정리로부터

$$u(x, y_0) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_0) d\xi,$$

$$u(x, y) - u(x, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, \eta) d\eta$$

를 알고, 임의의 점  $(x, y)$ 에서  $u$ 는  $z_0 = (x_0, y_0)$ 에서와 같은 값을 갖게 되어  $u$ 는  $D$ 에서 상수이다.



비슷한 방법으로  $v$ 가  $D$ 에서 상수임을 보일 수 있어 결론적으로  $f = u + iv$ 가  $D$ 에서 상수함수이다. ◇

**연습문제 2.10.** 코시-리만 방정식을 이용하여  $z \mapsto z^3$ 이 전해석함수임을 보여라.

**연습문제 2.11.**  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 는 어떤 점에서도 복소미분가능하지 않음을 증명하라.

**연습문제 2.12.**  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이라 하자. 코시-리만 방정식을 이용하여  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 모든  $z \in D$ 에 대하여  $f(z) \in \mathbb{R}$ 이면  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수임을 보여라.

**연습문제 2.13.**  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이라 하자.  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 모든  $z \in D$ 에 대하여  $f'(z) = 0$ 이면  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수임을 보여라.

**연습문제 2.14.** 전해석함수  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여  $u := \operatorname{Re}(f), v := \operatorname{Im}(f)$ 라 하자.  $u = h \circ v$ 를 만족하는 미분가능함수  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다면  $f$ 는 상수함수임을 보여라.

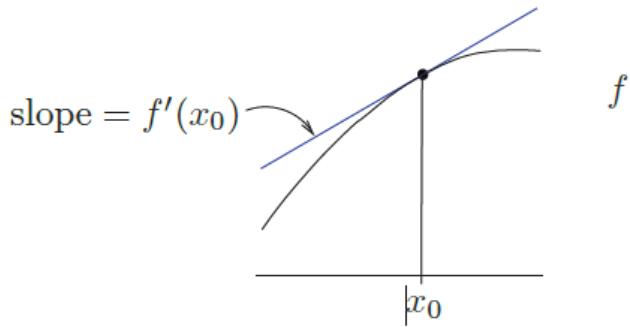
**연습문제 2.15.** 고정된 상수  $k \in \mathbb{R}$ 가 주어졌을 때 모든  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )에 대하여  $f(z) = (x^2 - y^2) + kxyi$ 로 정의하자.  $f$ 가 전해석함수일 필요충분조건은  $k = 2$ 임을 보여라.

## 2.3 복소미분의 기하학적 의미

미분의 기본을 공부할 때, 점  $x_0 \in \mathbb{R}$ 에서 실변수 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 의 미분  $f'(x_0)$ 에 대한 기하학적 의미는  $x_0$ 점에서  $f$ 에 접하는 접선의 기울기를 의미함을 이미 배웠을 것이다. 그림 2.8을 참고하라.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ 은  $x_0$  근방의  $x$ 에 대하여  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0)$ 임을 의미한다. 즉,

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

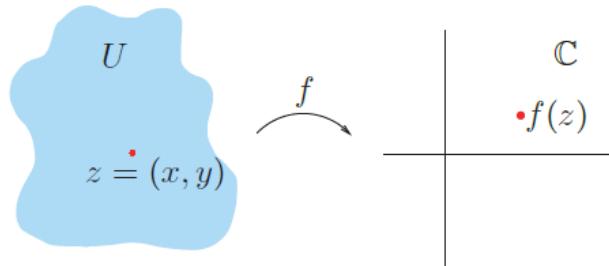
Fig. 2.8 Meaning of  $f'(x_0)$ .Figure 2.8:  $f'(x_0)$ 의 의미

국소적으로  $x_0$  근방에서  $f(x) - f(x_0)$ 는  $x - x_0$ 에 선형함수  $h \mapsto f'(x_0)h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 적용한 것으로 볼 수 있음을 의미한다. 그림으로 보면  $x_0$  근방에서  $(x_0, f(x_0))$ 를 지나고 기울기가  $f'(x_0)$ 인 접선과 함수  $f$ 의 그래프의 차이가 거의 없음을 의미한다. 다시 말하면,  $(x_0, f(x_0))$ 의 근방을 확대하면 함수의 그래프는 직선과 거의 일치한다.

이 절에서는  $U$ 에 정의된 복소함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0$ 에서 복소미분 가능할 때 비슷한 질문을 유추해보자.

복소수  $f'(z_0)$ 의 기하학적 의미는 무엇인가?

우리가  $f$ 의 그래프를 그려볼 수는 없다. 왜냐하면,  $z$ 와  $f(z)$ 가  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 에 속하므로  $(z, f(z))$ 는  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ 의 점이 되기 때문이다. 하지만 아래 그림과 같이 정의역  $U$ 를 원쪽 평면에 공역  $\mathbb{C}$ 를 오른쪽에 놓고  $f$ 가 원쪽  $U$ 의 한점을 오른쪽으로 보내는 것으로 그려볼 수 있다.



복소수  $f'(z_0)$ 를  $z_0$ 의 근방에서 국소적으로 보면 복소미분가능함수를 반시계방향으로 각도  $\text{Arg}(f'(z_0))$ 만큼 회전시키고  $|f'(z_0)|$ 만큼 확대시키는 것임을 보이도록 하자.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$f'(z_0)$ 는  $z_0$  근방의  $z$ 에 대하여  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \approx f'(z_0)$ 임을 의미한다. 즉,

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0).$$

복소수 곱셈의 기하학적 의미로부터  $z - z_0$ 에  $f'(z_0)$ 를 곱하는 것은  $z - z_0$ 를 각도  $\text{Arg}(f'(z_0))$  만큼 반시계방향으로 회전시키고,  $z - z_0$ 의 길이는  $f'(z_0)$ 의 길이를 곱하는 것임을 알고 있다. 즉,  $|f'(z_0)|$ 만큼 확대한 것이다. 이를 잘 이해하기 위해 그림 2.9를 참고하자.

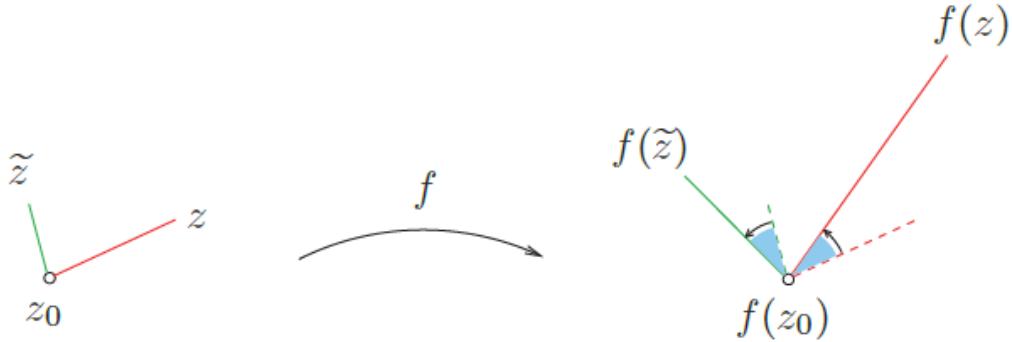
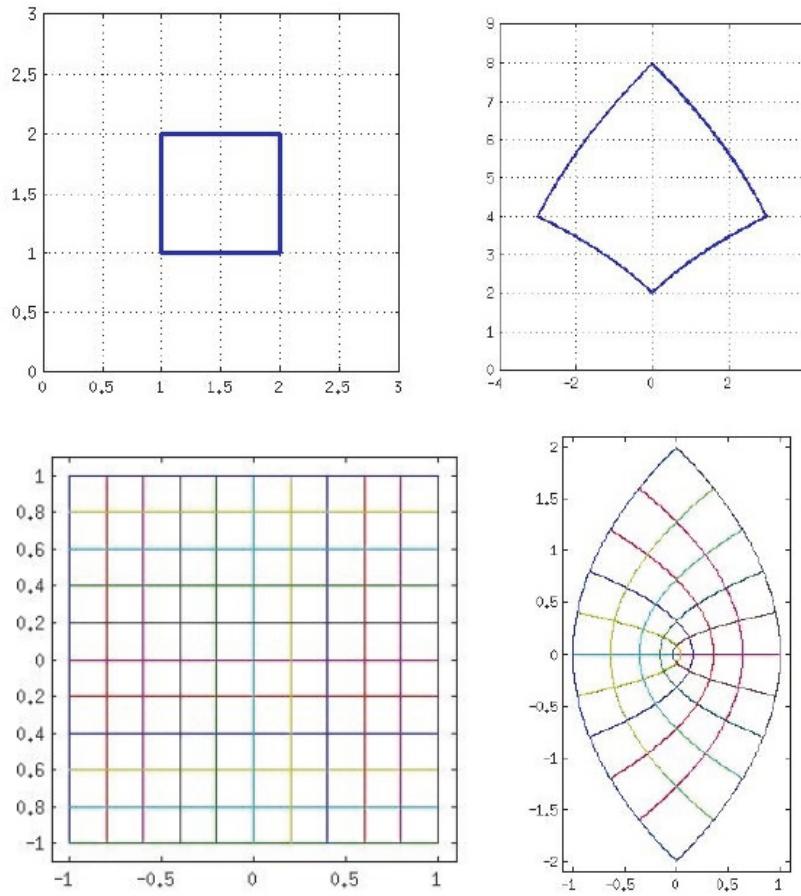


Fig. 2.9 Geometric local meaning of the complex derivative.

Figure 2.9: 국소적으로 본 복소미분의 기하학적 의미

$f'(z_0) = \sqrt{3} + i$ 라고 가정하자. 그러면  $|f'(z_0)| = 2^\circ$ 이고  $\text{Arg}(f'(z_0)) = \pi/6^\circ$ 이다. 영역  $D$ 의 내부에서  $z - z_0$ 는  $z$ 와  $z_0$ 를 잇는 선분으로 볼 수 있다. 오른쪽 그림에 이를 평행이동시킨 선분을  $f(z_0)$ 에서 출발하는 점선으로 표시하였다.  $f(z)$ 의 위치를 찾기 위해서는  $f(z) - f(z_0)$ 는  $f'(z_0)$ 에  $z - z_0$ 를 곱한 것과 근사적으로 같다는 것을 이용한다. 오른쪽 그림에서 실선으로 표시된  $f(z) - f(z_0)$ 는 점선을 각도  $\text{Arg}(f'(z_0))$ 만큼 반시계방향으로 회전시켜 얻는다 (이 그림에서는  $30^\circ$ 로 가정하였다). 또한 길이는 점선의 길이를  $|f'(z_0)| = 2$ 만큼 확대하여 얻는다.  $z_0$  근방의 다른 점  $\tilde{z}$ 에 대한 이미지를 얻기 위해서는 같은 과정을 반복하면 된다. 즉, 먼저  $z_0$ 와  $\tilde{z}$ 를 잇는 선분을 왼쪽에 실선으로 그린다. 평행이동시킨 선분을  $f(z_0)$ 에서 출발하는 점선으로 오른쪽에 표시한다.  $f(\tilde{z})$ 의 위치를 찾기 위해 점선을  $f'(z_0)$ 의 편각, 즉,  $30^\circ$ 만큼 반시계방향으로 회전시키고 점선의 길이를  $|f'(z_0)| = 2$ 만큼 확대한 실선을 그린다. 이를 통해  $f(\tilde{z}) - f(z_0)$ 를 표현하는 실선을 얻고 한쪽 끝을  $f(z_0)$ 에 두면 다른 쪽은  $f(\tilde{z})$ 를 얻는다 (근사적으로!). 따라서  $f$ 의 국소적인 영향을 다듬과 같이 정리할 수 있다. 영역을 고무판으로 간주하고 고무판 위에 점  $z_0$ 를 관찰하자.  $z_0$  주변의 작은 부분을 뜯어내자. 함수  $f$ 는 고무판 위의 점  $z_0$ 를 복소평면 위 어딘가에 있는  $f(z_0)$ 로 보낸다. 뜯어진 작은 고무판위의 다른 점들은  $f$ 에 의해 어떤 점으로 가는지를 알아보려면 다음 과정을 따른다. 복소평면의  $f(z_0)$ 의 바로 위에  $z_0$ 가 올려지도록 고무판을 위치시킨다 (뜯어진 작은 고무판 위의 점  $z_0$ 에 핀을 꽂아 평면 위에 고정시킨다고 상상하자). 이제  $z_0$ 를 중심으로 하여  $|f'(z_0)|$ 의 배율로 고무판을 당기고, 당겨진 고무판을  $z_0$  주변으로 각도  $\text{Arg}(f'(z_0))$ 만큼 반시계방향으로 회전시킨다.

기하학적 해석을 강조하기 위해 제곱함수  $z \mapsto z^2$ 을 다루는 예제 2.1를 다시 생각해보자. 그림 2.10과 예제 2.12를 참고하자.

Fig. 2.10 The image of a square and a square grid under the mapping  $z^2$ .Figure 2.10: 함수  $z^2$ 에 의한 정사각형과 사각 격자의 상

**예제 2.12.** 점  $z_0 \in \mathbb{C}$ 에서 제곱함수  $z \mapsto z^2$ 의 복소미분가능성을 가정하자.  $z_0$  근방에서 제곱함수에 의한 국소 확대와 국소 회전을 기하학적으로 이해함으로써  $z_0$ 에서 제곱함수의 복소미분이  $2z_0$ 가 되어야 함을 증명하도록 하자.

첫번째 질문: 국소 회전은 얼마나 되는가? 이를 찾기 위해  $z_0$ 에 가까운 점  $z$ 와  $z_0$ 에서  $z$ 를 잇는 반직선이 원점을 지난다고하자.<sup>3</sup> 그림 2.11은 제곱함수의 영향을 나타낸다. 즉, 편각은 두배가 되고 원점에서의 거리는 제곱이 된다.  $z^2$ 은 원점과 실수축의 양의 방향과 이루는 각이  $2\operatorname{Arg}(z_0)$ 인  $z_0^2$ 을 잇는 반직선 위에 있다. 따라서  $z_0^2$ 과  $z^2$ 을 잇는 선분은  $z_0$ 와  $z$ 를 잇는 선분을  $\operatorname{Arg}(z_0)$ 만큼 반시계방향으로 회전시켜 얻을 수 있다.<sup>4</sup> 결론적으로  $\operatorname{Arg}(f'(z_0)) = \operatorname{Arg}(z_0)$ 이다.

<sup>3</sup>반직선이 ‘원점’을 지난다는 조건이 필요하다<sup>4</sup>회전시킨 후 선분의 길이도 조정해야 한다

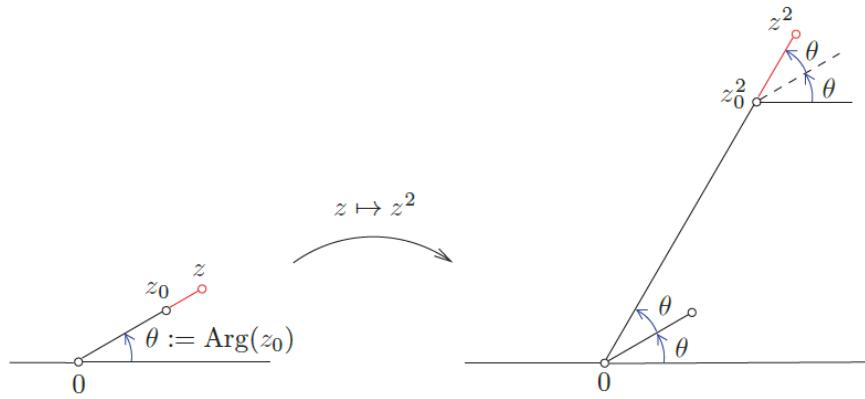


Fig. 2.11 Calculation of the amount of local rotation produced by the squaring map.

Figure 2.11: 제곱함수에 의한 국소 회전량의 계산

다음 질문: 확대 비율은 얼마인가? 이를 찾기 위해  $z_0$ 에 가까운 점  $z$ 가 다음 조건을 만족하도록 선택한다.  $z$ 는 원점에서의 거리가  $z_0$ 와 같으며 실수축의 양의 방향과 이루는 각은  $\theta + d\theta$ 로 약간 크다. 그림 2.12에 표현된 제곱함수의 성질을 보면,  $d\theta$ 가 작은 값이기 때문에 근사적으로 길이  $|z - z_0|$ 는  $|z_0| \cdot d\theta$ 이고, 길이  $|z^2 - z_0^2|$ 은  $|z_0|^2 \cdot 2d\theta$ 이다. 결론적으로 확대비율  $|f'(z_0)|$ 는  $(|z_0|^2 \cdot 2d\theta) / (|z_0| \cdot d\theta) = 2|z_0|$ 이다.

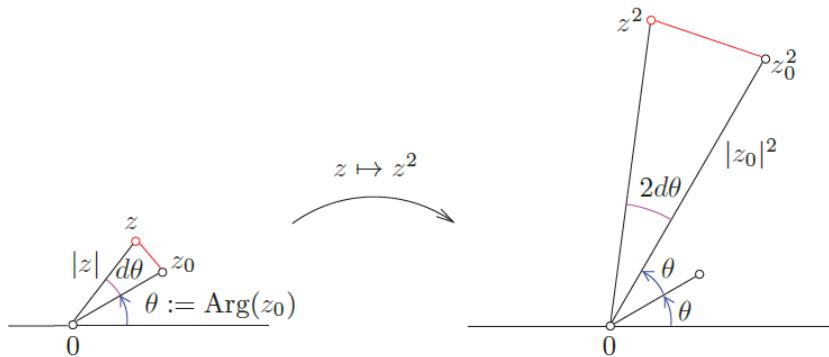


Fig. 2.12 Finding the amount of local magnification produced by the squaring map.

Figure 2.12: 제곱함수에 의한 국소 확대 배율의 계산

종합하면,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= |f'(z_0)| \cdot (\cos(\text{Arg}(f'(z_0))) + i \sin(\text{Arg}(f'(z_0)))) \\ &= 2|z_0| \cdot (\cos(\text{Arg}(z_0)) + i \sin(\text{Arg}(z_0))) \\ &= 2z_0 \end{aligned}$$

이고,  $z_0$  근방에서 제곱함수  $f$ 의 국소적 성질을 조사함으로써 복소미분  $f'(z_0)$ 를 구할 수 있다. ◇

**예제 2.13** (켤레복소수 함수는 어떤 점에서도 복소미분이 불가능하다). 그림 2.13을 보자.

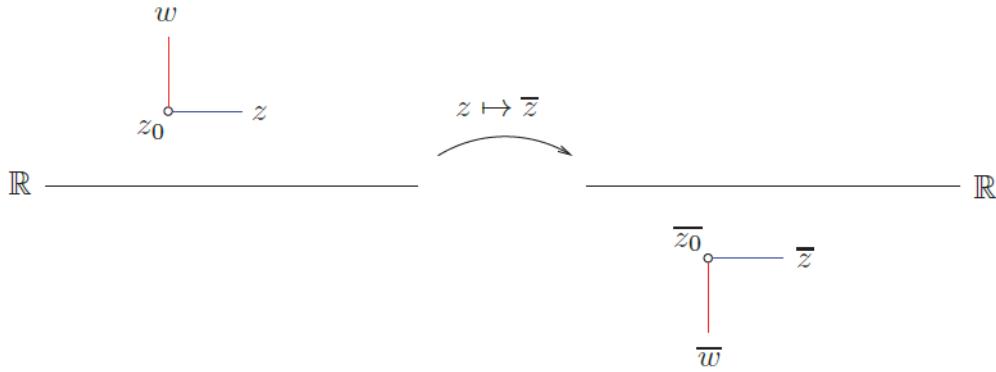


Fig. 2.13  $z \mapsto \bar{z}$  is not holomorphic.

Figure 2.13:  $z \mapsto \bar{z}$ 는 복소미분가능하지 않다

$z \mapsto \bar{z}$ 가  $z_0$ 에서 복소미분가능하다고 가정하자. 그러면  $z_0$  근방에서 함수는 국소적으로 회전과 확대를 나타낸다.  $z$ 를  $z_0$ 에서 수평으로 약간 평행이동한 점이라고 하자. 그럼에서  $\bar{z}_0$ 와  $\bar{z}$ 를 보면  $\bar{z} - \bar{z}_0 = z - z_0$ 이므로 회전은 일어나지 않는다. 한편  $w$ 를  $z_0$ 를 수직방향으로 약간 이동한 점이라고 하면 그림에서  $\bar{w} - \bar{z}_0 = -(w - z_0)$ 이므로  $180^\circ$ 의 회전이 일어났다. 그런데 국소적으로 함수는 회전을 나타내지 못한다 (회전을 나타낸다면  $z_0$ 를 중심으로 하는 작은 벡터 모두에 대하여  $f$ 가 동일한 양의 회전을 보여야 한다). ◇

**연습문제 2.16.** 우리는 거듭제곱 함수  $z \mapsto z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )가 전해석함수임을 알고 있다. 국소적 성질을 조사하는 방법으로 이 함수의 복소미분을 구하라.

힌트:  $z_0$ 를 중심으로 하는 작은 벡터 모두에 대하여 회전과 확대가 동일하기 때문에 원점과  $z_0$ 를 있는 반직선에 수직인 작은 벡터에 대하여 예제 2.12를 적용하면 간단히 결론을 얻을 수 있다.

**연습문제 2.17.** 우리는 거듭제곱 함수  $z \mapsto e^z$ 가 전해석함수임을 알고 있다. 국소적 성질을 조사하는 방법으로 이 함수의 복소미분을 구하라.

힌트: 점  $z_0$ 를 위쪽으로 거리  $\delta$ 만큼 이동시키고 함수를 적용한 결과로부터 확대 배율을 결정하라. 비슷한 방법으로 점  $z_0$ 를 수평으로  $\delta$ 만큼 이동시키고 국소적인 회전량을 결정하라.

**연습문제 2.18.** 함수  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ 가  $\mathbb{C}$ 의 어떤 점에서도 복소미분가능하지 않음을 보이기 위하여 그림을 이용하는 방법을 제시하라.

**등각성(comformality):** 전해석함수  $\exp$ 를 표현한 그림 1.16을 다시 보자. 이 그림에서 정의역에 있는 수직선과 수평선은 함수로 보낸 이미지도 다시 서로 수직이 됨을 알 수 있다. 이미 언급했었지만 이러한 특성을 등각성이라 한다. 즉, 모든 복소미분가능 함수는 정의역에서 두 곡선이 이루는

각도를 “방향”과 함께 보존한다. 이는 모든 복소해석함수가 갖는 성질임을 이미 언급했었다. 이제 복소해석함수가 왜 이런 성질을 갖는지 그 이유를 앞에서 학습한 복소미분가능함수의 국소적 성질을 바탕으로 규명해보자.

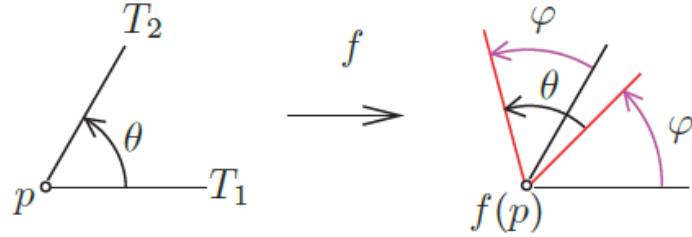


Fig. 2.14 Conformality of a holomorphic  $f$ . Here  $\varphi = \text{Arg}(f'(p))$ .

Figure 2.14: 복소해석함수  $f$ 의 등각성.  $\varphi = \text{Arg}(f'(p))$

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수라 하고, 점  $p \in U$ 에서 교차하는 두 개의 매끄러운 곡선을 생각하자. 곡선들은 미분가능하므로  $p$ 에서 접선  $T_{1,2}$ 를 갖는다. 그럼 2.14를 보자.  $p$  근방에서는 곡선과 접선의 차이가 거의 없기 때문에 곡선을 접선으로 간주할 수 있다. 이제 이 접선들이 이루는 각을 생각할 수 있는데  $f$ 가 접선에 대하여 어떤 작용을 하는지 살펴보자. 곡선들은  $f$ 에 의해  $f(p)$ 에서 교차하는 새로운 곡선으로 변환된다. 변환된 결과도 매끄러운 곡선이며 접선을 갖는다. 한편  $p$  근방에서  $f$ 의 국소적 변환은  $\text{Arg}(f'(p))$  만큼 반시계방향으로 회전시키고 확대하는 것이므로, 변환된 곡선의 접선은 정의역의 접선을 회전시키고 확대한 결과이다. 당연히 두 접선을 동일한 각도로 회전시키며 방향도 동일하게 유지한다. 따라서 복소해석함수의 등각성은 이제 더 이상 신기한 특징이 아니다!

**실함수 미분가능성과의 관계, 코시-리만 방정식의 재고찰:** 열린집합  $U$ 의 한점  $z_0 = (x_0, y_0)$ 에서 복소미분가능한 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 를 생각하자.  $u, v$ 를  $f$ 의 실수부와 허수부라 하면  $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ 은  $(x_0, y_0)$ 에서 미분가능함을 알고 있다. 따라서  $f$ 를 함수  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ 로 보면 미분가능하며(실변수 함수로서), 미분은 국소적으로 선형변환을 나타낸다.

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

한편  $f$ 가 복소미분가능하므로 국소변환은 각도  $\theta := \text{Arg}(f'(z_0))$  만큼 반시계방향으로 회전시키고  $r := |f'(z_0)|$ 의 배율로 확대한 것이다. 따라서 선형변환은 다음 행렬로 나타낼 수 있다.

$$r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

이 행렬이  $A$ 와 같아야 하므로 다음 관계식을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = r \cos \theta = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = r \sin \theta = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

또한, 미분은  $f'(z_0) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ 이다.

요약하면,  $f$ 가  $z_0$ 에서 복소미분가능하면 실함수로서 미분도 가능하다( $U \subset \mathbb{R}^2$ 에서  $\mathbb{R}^2$ 로의 함수로서). 하지만 실함수의 미분과 복소미분의 차이를 보면 실함수 미분은 단지 선형변환을 나타내지만 복소미분은 특별한 형식의 선형변환을 나타낸다. 즉, 각도  $\theta$ 만큼 반시계방향으로 회전하는 것과  $r$ 만큼의 배율로 확대하는 것을 나타낸다.

## 2.4 d-bar 연산자

두 개의 식으로 된 코시-리만 방정식은 다음 “d-bar 연산자” 개념을 도입하면 단일 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

미분 작용소를 다음과 같이 정의하자.

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

미분 작용소는 함수에 작용하여 새로운 함수를 만든다. 예를 들어, 위의 두 미분 작용소를  $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합  $U$ 에 정의된 매끄러운 함수  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ 에 작용시키기 보자. 그러면  $\varphi$ 가 미분가능하기 때문에  $U$ 의 모든 점에서  $x, y$ 에 대한 1차 편도함수가 존재하므로 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

또한  $U$ 에 정의된 매끄러운 실변수 함수  $u, v$ 에 대하여

$$\frac{\partial}{\partial z}(u + iv) := \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}},$$

라 정의한다.

이 표현을 따르면, 열린집합  $U \subset \mathbb{C}$ 에 정의된 복소해석함수  $f = u + iv$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 0 + i0 = 0, \end{aligned}$$

여기서  $f$ 의 실수부와 허수부  $u, v$ 에 대한 코시-리만 방정식을 이용하여 마지막 등식을 얻었다. 또한,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} f &= \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f'.\end{aligned}$$

요약하면,  $U$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 에 대하여  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ 이고,  $\frac{\partial}{\partial z} f = f'$ 이다.

개념적으로,  $z$ 와  $\bar{z}$ 의 함수로 볼 때 복소해석함수는  $\bar{z}$ 에 무관한 함수라고 할 수 있다.

**예제 2.14.**  $\bar{z}$ 는 복소해석함수가 아니다. 왜냐하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x - iy) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) x - i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) y \\ &= \frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \cdot i = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

**예제 2.15.**  $|z|^2 = z\bar{z}$ 는  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 복소해석함수가 아니다. 왜냐하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2x + i2y) = x + iy = z \neq 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

**예제 2.16.**  $z^2$ 은 전해석함수이다. 왜냐하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - y^2) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy) \\ &= \frac{1}{2}(2x - i2y) + i \frac{1}{2}(2y + i2x) = 0.\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - y^2) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy) \\ &= \frac{1}{2}(2x + i2y) + i \frac{1}{2}(2y - i2x) = 2(x + iy) = 2z.\end{aligned}$$

**연습문제 2.19.**  $4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \Delta$ 임을 보여라. 여기서  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 는 라플라스 작용소라 부른다.

## 2.5 참고

복소미분의 기하학적 의미에 대한 부분은 [Needham (1997)]의 설명을 따른다. 연습문제 2.16과 연습문제 2.17은 [Needham (1997)]을 인용하였다.



# Chapter 3

## 코시 적분 정리와 응용

복소미분은 어느정도 익숙해졌으니 이제 적분으로 관심을 돌려보자. 이 장에서는 복소해석학에서 매우 중요한 다음 정리를 배울 예정이다.

### 코시 적분 정리

“경로적분”을 정의하는 것으로 시작하여 나중에 코시 적분 정리를 증명할 예정이다. 왜 경로적분과 코시 적분 정리가 왜 그렇게 중요한지 의문을 가질 수 있다. 복소평면에서 적분의 중요성은 복소해석함수의 더 큰 이해로 이어지기 때문이다. 예를 들면, 복소해석함수는 무한번 미분가능하다는 본질적인 성질이 있다. 이 장에서 다음 주제들을 중심으로 공부해보기로 하자.

- (1) 경로적분의 정의와 성질
- (2) 경로적분의 기본정리
- (3) 코시 적분 정리
- (4) 코시 적분 정리의 응용
  - (a) 부정적분의 존재성
  - (b) 복소해석함수의 무한번 미분가능성
  - (c) 리우비우 정리와 대수학의 기본정리
  - (d) 모레라 정리

### 3.1 경로적분의 정의

일반적인 미적분에서 연속함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어질 때

$$\int_a^b f(x)dx \quad (3.1)$$

의 의미는 명확하다. 이제 이를 일반화하여 복소수까지 확장하고 주어진 복소수  $z, w$ 에 대하여

$$\int_z^w f(\zeta)d\zeta$$

에 의미를 부여하길 원한다고 하자.  $z$ 에서  $w$ 까지를 어떻게 해석해야 할까?

$\mathbb{R}$ 에서  $a < b$ 이면, 실수  $a$ 부터 실수  $b$ 까지 가는 경로는 한가지 뿐이다. 따라서 실수의 경우는 단지

- (1)  $a < b$ 이고,
- (2) 연속함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

의 경우만 생각하면 충분하다.

하지만,  $z$ 와  $w$ 가 복소평면 위의 점이면 그림 3.1과 같이 많은 경로에 대하여 적분을 생각할 수 있다.

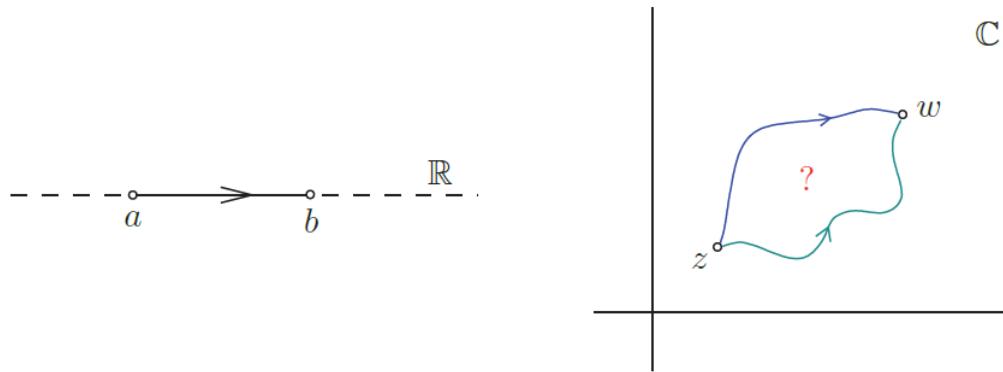


Fig. 3.1 Which path to go from  $z$  to  $w$ ?

Figure 3.1:  $z$ 에서  $w$ 까지 어떤 경로로 가야 할까?

그러므로 복소수의 경우는 끝점  $z$ 와  $w$  외에  $z$ 에서  $w$ 까지의 경로  $\gamma$ 도 지정하고, 실수의 경우를 나타낸 식 (3.1)를 다음과 같이 복소수에 대한 표현으로 바꾸도록 한다.

$$\int_{\gamma} f(z)dz.$$

이 표현을 “경로”적분이라 부르며 계산을 위해 다음을 결정할 필요가 있다.

- (1) 정의역  $D(\subset \mathbb{C})$ 와  $z, w \in D$
- (2) 연속함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$
- (3)  $z$ 와  $w$ 를 잇는 **매끄러운** 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$

$z$ 와  $w$ 를 단순히 연결하는 경로가 아니라 **매끄러운** 경로가 필요하다는 사실에 주목하자. 여기서 “매끄럽다”는 의미는 무엇일까? 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 는 연속함수임을 상기하자.  $\gamma$ 는 실수부와 허수부  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 로 나누어 쓸 수 있다.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b].$$

$x, y$ 가 연속미분가능하면 경로  $\gamma$ 가 **매끄럽다고** 한다. 예를 살펴보자.

**예제 3.1.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $\gamma(t) = t(1+i)$  ( $t \in [0, 1]$ )로 정의하자. 그러면  $\gamma$ 의 실수부와 허수부  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 는  $x(t) = t, y(t) = t, t \in [0, 1]$ 이 된다.  $x, y$ 가  $[0, 1]$ 에서 연속미분가능이므로  $\gamma$ 는 매끄러운 곡선이다. 그림 3.2를 참고하라. 비슷한 방법으로 다음과 같이 주어진 두 경로

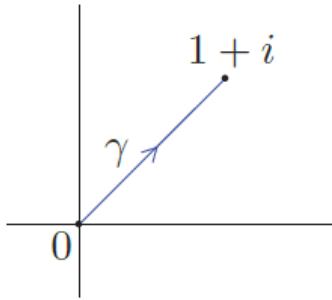


Fig. 3.2 The smooth path  $\gamma$ .

Figure 3.2: 매끄러운 곡선  $\gamma$

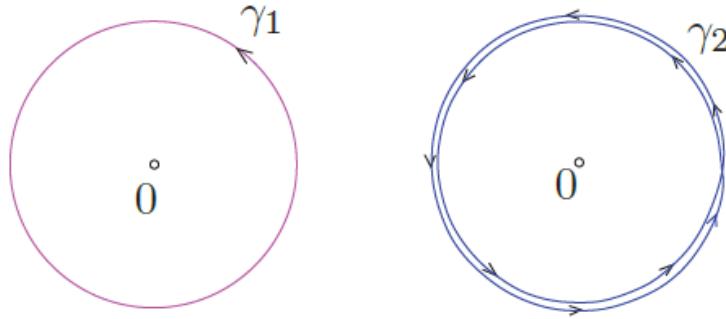
$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 를 생각하자.

$$\gamma_1(t) = \exp(it), \quad \gamma_2(t) = \exp(2it), \quad t \in [0, 2\pi].$$

그러면 이 경로들의 실수부와 허수부는  $\cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t)$ 이고 모두 연속미분가능하다. 따라서  $\gamma_1, \gamma_2$ 는 모두 매끄러운 경로이다. 그림 3.3을 보자. 두 곡선의 이미지 ( $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 의 치역)은 동일하다. 즉, 중심이 원점인 단위원이다.

$$\{\gamma_1(t) : t \in [0, 2\pi]\} = \{\gamma_2(t) : t \in [0, 2\pi]\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

그렇지만  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 는 다른 경로이다. 왜냐하면 함수로서 같지 않기 때문이다. 예를 들면  $\gamma_1(\pi) = -1 \neq 1 = \gamma_2(\pi)$ .  $\diamond$

Fig. 3.3 The smooth path  $\gamma$ .Figure 3.3: 매끄러운 곡선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 

**참고 3.1.** 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 의 치역

$$\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

을 경로(또는 곡선) 자체라고 하는 것이 매우 일반적이며 편리하다. 이 방식에서는 경로는 복소평면에서의 원, 선분 구체적인 기하학적 개체가 되어 (함수라고 생각하는 것과 반대로), 쉽게 그려볼 수 있다. 이 방식에서는 다른 경로를 동일한 이미지로 볼 수 있어 모호함이 생긴다는 어려움이 있다.

경로적분의 정확한 정의는 다음과 같다.

**정의 3.1.** 다음이 주어질 때,

- (1) 정의역  $D$ ,
- (2) 연속함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  (실수부와 헤수부는  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ ),
- (3) 매끄러운 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  (실수부와 헤수부는  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ),

경로적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &:= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt \\
 &:= \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot x'(t) - v(\gamma(t)) \cdot y'(t)) \\
 &\quad + i \int_a^b (v(\gamma(t)) \cdot x'(t) + u(\gamma(t)) \cdot y'(t)) dt.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

여기서 마지막 두 적분은 우리에게 익숙한 실변수 연속함수의 리만적분이다.

다음과 같이 경로적분을 기하학적으로 해석할 수 있다.

$$\gamma'(t)dt = x'(t)dt + iy'(t)dt$$

이 항을 경로를 따라 국소적으로 변하는 증분으로 보자. 이 증분에 값  $f(\gamma(t))$  (국소적으로는 거의 상수이다)을 곱하고, 경로를 따라 더해나가면 결론적으로 적분값

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

에 도달하게 된다. 그림 3.4를 참고하라.

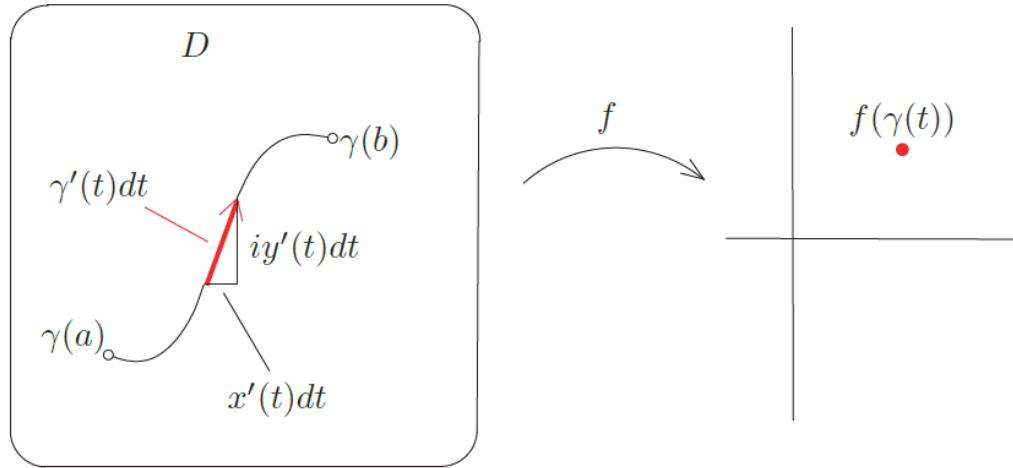


Fig. 3.4 Geometric meaning of the contour integral.

Figure 3.4: 경로적분의 기하학적 의미

**예제 3.2.** 다음과 같이 주어진 조건에 대하여

(1)  $D = \mathbb{C}$ ,

(2)  $\gamma$ 는  $\gamma(t) = t(1+i)$  ( $t \in [0, 1]$ )로 정의된 매끄러운 경로,

(3)  $f = (z \rightarrow \bar{z})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_0^1 \overline{t(1+i)} \cdot (1+i)dt \\ &= \int_0^1 t(1-i) \cdot (1+i)dt = \int_0^1 t(1^2 - i^2)dt = \int_0^1 t(1+1)dt \\ &= 2 \int_0^1 t dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

**연습문제 3.1.** 세 경로  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $t \in [0, 2\pi]$ 에 대하여 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \exp(it), \\ \gamma_2(t) &= \exp(2it), \\ \gamma_3(t) &= \exp(-it).\end{aligned}$$

경로의 이미지는 모두 같지만, 다음 세 경로적분은 모두 다른 값을 가짐을 보여라.

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz, \quad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz, \quad \int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz.$$

**연습문제 3.2.**  $f$ 가 영역  $D$ 에서 복소해석함수이고,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ 가 매끄러운 경로라 하자. 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여 다음을 증명하라.

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

우리는 종종 일반적인 구간  $[a, b]$ 를 사용하지 않고 매끄러운 경로가  $[0, 1]$ 에서 매개변수로 정의된 것으로 가정하기도 한다. 왜 이런 가정을 해도 되는지 이유를 설명해보자.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 와  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 매끄러운 경로라고 하자. 연속미분가능한 함수  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ 가  $a = \varphi(c), b = \varphi(d)$ 이고 모든  $t \in [c, d]$ 에 대하여  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ 를 만족한다고 하자. 이러한 두 경로를 “동치”라고 한다.  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(c)$ 부터  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(d)$ 까지 동일한 길을 따라 간다고 상상해보자. 단, 속도는 다를 수 있다. 그럼 3.5를 보자. 이제 다음 결과를 보일 수 있다.

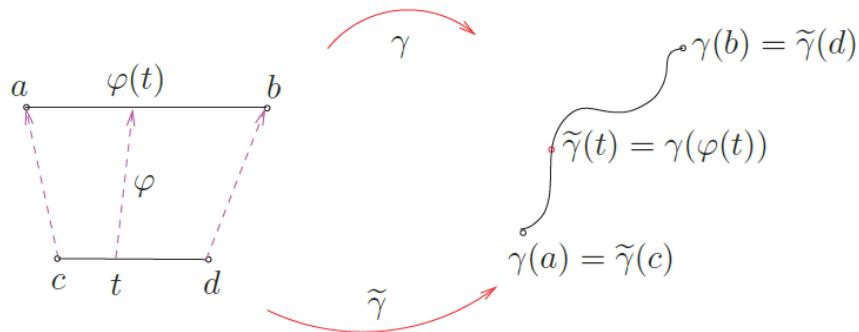


Fig. 3.5 Equivalent paths.

Figure 3.5: 동치 경로

동치 경로에 대한 적분결과는 동일하다: 연쇄법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &\stackrel{(\tau=\varphi(t))}{=} \int_a^b f(\gamma(\tau)) \gamma'(\tau) d\tau = \int_{\gamma} f(z) dz.\end{aligned}$$

특히, 주어진  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(t) = (1 - t)a + tb, \quad t \in [a, b].$$

그러면  $\varphi$ 는 연속미분가능하고,  $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ 이다. 따라서  $c := 0, d := 1$ 로 두고 위의 결과를 적용하면,  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ 라 정의하여 다음을 얻는다.

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

결론적으로, 경로적분과 관련하여 매끄러운 곡선은  $[0, 1]$ 에서 매개화된 것으로 간주해도 일반성을 잃지 않는다.

**조각적으로 매끄러운 경로에 대한 경로적분:** 경로의 정의를 “꺽인 점”을 갖는 경로까지 확장해 보자. 점  $c_1, \dots, c_n$ 가

$$a < c_1 < \dots < c_n < b$$

를 만족하고  $\gamma$ 가 구간  $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_{n-1}, c_n], [c_n, b]$  각각에서 연속미분가능할 때, 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 조각적으로 매끄러운 경로 또는 곡선이라 한다. 이러한 경로에서의 적분은 다음과 같이 정의 한다.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^{c_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \dots \\ &\quad + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_{c_n}^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

**예제 3.3.** 0부터  $1 + i$ 까지의 경로  $\tilde{\gamma}$ 가 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1 + (t - 1)i, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

그림 3.6을 보자. 그러면

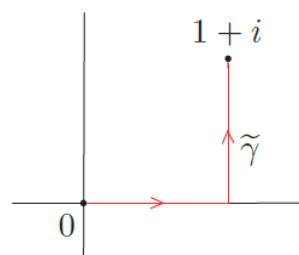


Fig. 3.6 The piecewise smooth path  $\tilde{\gamma}$ .

Figure 3.6: 조각적으로 매끄러운 경로  $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\gamma}} \bar{z} dz &= \int_0^1 \bar{t} 1 dt + \int_1^2 \overline{(1 + (t-1)i)} i dt = \int_0^t t dt + \int_1^2 (1 - (t-1)i) i dt \\
 &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (i + (t-1)) dt \\
 &= \frac{1}{2} + i + \frac{4-1}{2} - 1 = 1 + i.
 \end{aligned}$$

예제 3.2와 3.3에서 얻은 계산결과를 돌아보자. 피적분함수는 같고( $z \rightarrow \bar{z}$ 로 복소해석함수는 아니다), 그럼 3.7과 같이 동일한 양끝점 0과  $1+i$ 를 연결하는 두 경로  $\gamma$ 와  $\tilde{\gamma}$ 에 대하여 다른 적분

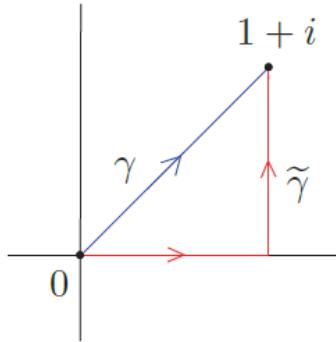


Fig. 3.7 The two paths  $\gamma$  and  $\tilde{\gamma}$ .

Figure 3.7: 두 경로  $\gamma$ 와  $\tilde{\gamma}$

결과를 얻었다.

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = 1 \neq 1 + i = \int_{\tilde{\gamma}} \bar{z} dz.$$

따라서 복소해석함수가 아닌 피적분함수  $z \rightarrow \bar{z}$ 는 경로에 따라 적분결과가 다르다. 경로적분의 정의를 보면 선택한 길에 따라 계산된 경로적분의 값이 다를 것으로 기대되기 때문에 뜻밖의 결과가 아니다. 이 장에서 중요한 목표는 점  $z$ 에서  $w$ 까지 연결하는 두 경로 사이의 영역에서 복소해석적인 함수에 대해서는 두 경로를 따라 적분한 결과는 동일함을 보이는 것이다. 이 결과는 코시 적분정리라 불리는 복소해석학의 핵심 결과로 이어진다.

**예제 3.4.** 앞의 예제 3.2와 3.3에서 정의한 경로  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}$ 를 생각하자. 이번에는 피적분함수로 복소해석함수가 아니었던  $z \mapsto \bar{z}$  대신 전해석함수  $z$ 를 사용하자. 그러면,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z dz &= \int_0^1 (1+i)t(1+i)dt = \int_0^1 2it dt = i \text{이고,} \\
 \int_{\tilde{\gamma}} z dz &= \int_0^1 t \cdot 1 dt + \int_1^2 (1 + (t-1)i)i dt \\
 &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (i - (t-1)) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i = i \text{이므로}
 \end{aligned}$$

경로  $\gamma$ 와 경로  $\tilde{\gamma}$ 를 따른 경로적분값이 동일하다.  $\diamond$

**연습문제 3.3.** 원  $|z| = 2$ 를 따라 반시계방향의 한바퀴 도는 경로로 다음 함수를 적분하라.

- (1)  $z + \bar{z}$
- (2)  $z^2 - 2z + 3$
- (3)  $xy$  ( $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ )

**연습문제 3.4.** 다음 경로  $\gamma$ 를 따라 적분  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$ 를 계산하라.

- (1) 0에서  $1 + i$ 까지 직선으로 연결한 선분
- (2) 중심이  $i$ 이고 반지름이 1인 원을 따라 0부터  $1 + i$ 까지 연결한 원호
- (3) 포물선  $y = x^2$  위에서  $x = 0$ 부터  $x = 1$ 까지 0과  $1 + i$ 를 연결한 곡선

### 3.1.1 하나의 중요한 적분계산

여기서 간단하지만 매우 중요한 경로적분 하나를 계산할 것인데 이 적분은 앞으로 계속 반복하여 다시 돌아볼 예정이다. 하나의 규칙을 정하자: 이 책 전체를 통하여 특별히 언급하지 않으면  $z_0$ 를 중심으로 반지름이  $r > 0$ 인 원을 따라 반시계방향으로 도는 경로  $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $C(t) = z_0 + r \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ 로 정의한다 (따라서 한바퀴만 돈다). 그림 3.8을 참고하라.

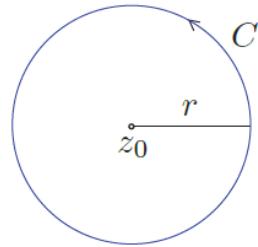


Fig. 3.8 The circular path  $C$  with center  $z_0$  and radius  $r$  traversed in the anticlockwise direction.

Figure 3.8:  $z_0$ 를 중심으로 반지름이  $r$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로  $C$

이제 적분  $\int_C (z - z_0)^n dz$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )를 계산하자. 나중에 이 계산이 매우 유용한 것으로 입증될 것이다.

정리 3.1.  $C$ 를 중심이  $z_0$ 이고 반지름  $r > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로라 하자. 그러면,

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

여기서 적분값은  $r$ 에 무관함을 알 수 있다.

### 증명

경로는  $C(t) = z_0 + r \exp(it) = z_0 + r \cos t + it \sin t$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )이므로 미분은  $C'(t) = -r \sin t + ir \cos t = ir(\cos t + i \sin t) = ir \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )이다. 두 가지 경우의 적분을 각각 계산하면,

1°  $n = -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz &= \int_C (z - z_0)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \exp(it)} \cdot ir \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i. \end{aligned}$$

2°  $n \neq -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n \exp(nit) \cdot ir \exp(it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} \exp(i(n+1)t) dt \\ &= -r^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + ir^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

이로써 증명이 완성된다.  $\square$

우리는 나중에 이 결과가 의미심장한 결과를 갖는다는 것을 보게 될 것이다. 예를 들어, 중심이  $z_0$ , 안쪽 반지름이  $r$ , 바깥쪽 반지름이  $R$ 인 원환  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에 정의된  $f$ 가  $z$ 에 대하여 “정수 지수를 갖는 항으로 된 급수전개”를 가진다고 가정하자 (그 의미가 무엇이든).

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{A}.$$

이 (무한) 합의 정확한 의미는 나중에 알아보기로 하고 지금은 단지 유한 합 (유한개의  $a_n$ 을 제외하고는 모두 0되는)이라 생각해도 된다. 그러면 양변에  $(z - z_0)^{-(m+1)}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ )을 곱하여

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^{n-m-1}$$

을 얻게 되므로

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_C (z - z_0)^{n-m-1} dz = a_m.$$

여기서 우리는  $C$ 을 따르는 경로적분과 합의 순서를 바꿀 수 있다고 가정했는데, 유한 합의 경우는 다음 절에서 적분의 정의로부터 가능함을 보일 것이다. 무한 합의 경우는 나중에 정확한 의미를 만들어 가겠지만 근본적으로는 제안한 계산 방식대로 작동한다. 궁극적으로는 계수들이 경로적분으로 표현될 수 있다는 것을 의미하며, 우리는 나중에 원환에 정의된 복소해석함수는 항상 이러한 급수 표현을 갖는다는 것을 보일 예정이다.

**연습문제 3.5.**  $C$ 를 중심이 0이고 반지름이 1인 원을 반시계방향으로 도는 경로라고 하자.  $0 \leq k \leq n$ 에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz.$$

## 3.2 경로적분의 성질

이 절에서는 경로적분의 몇가지 유용한 성질을 살펴볼 것이다. 다음 정리는 경로적분의 정의로부터 직접 얻을 수 있다.

**명제 3.1.** 복소수  $\mathbb{C}$ 의 영역  $D$ 에 대하여  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 조각적으로 연속인 경로라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) 연속함수  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\int_{\gamma} (f + g)(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$$

(2) 연속함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 와 상수  $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여,

$$\int_{\gamma} (\alpha f)(z) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz.$$

$C(D; \mathbb{C})$ 를  $D$ 에 정의된 연속인 복소함수의 (점별 연산에 대한)  $\mathbb{C}$ 상의 벡터공간이라 하자.<sup>1</sup> 그러면 위 결과는  $D$ 에 속하는 조각적으로 매끄러운 경로  $\gamma$ 는  $C(D; \mathbb{C})$ 에서  $\mathbb{C}$ 로의 선형변환을 유도함을 의미한다.<sup>2</sup> 즉,

$$f \mapsto \int_{\gamma} f(z) dz : C(D; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

<sup>1</sup>역주: 점별연산이란  $f, g$ 의 합  $h := f + g$ 을  $h(z) := f(z) + g(z)$ 로 정의함을 뜻한다

<sup>2</sup>역주:  $T : C(D; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ 가 선형변환이면  $T(f + g) = T(f) + T(g), T(\alpha f) = \alpha T(f)$ 를 만족한다.

**연습문제 3.6.** 명제 3.1을 증명하라.

**반대경로:** 영역  $D$ 에 매끄러운 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 주어졌을 때, **반대경로**  $-\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 는  $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$ ,  $t \in [a, b]$ 로 정의한다. 그러면  $(-\gamma)(a) = \gamma(b)$ ,  $(-\gamma)(b) = \gamma(a)$ 이다. 따라서  $-\gamma$ 는  $\gamma$ 의 끝점에서 시작하고,  $\gamma$ 의 시작점에서 끝나는 경로이며,  $\gamma$ 와 동일한 길을 반대 방향으로 이동한다. 그럼 3.9를 보라.

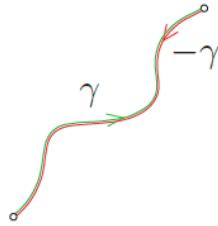


Fig. 3.9 The opposite path  $-\gamma$  to the path  $\gamma$ .

Figure 3.9: 경로  $\gamma$ 의 반대경로  $-\gamma$

그런데 왜 반대경로를  $-\gamma$ 라고 쓸까? 그 이유는 다음과 같다.

**명제 3.2.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 영역  $D$ 의 매끄러운 경로이고  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속함수라고 하자. 그러면

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**증명**

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f((-\gamma)(t)) \cdot (-\gamma)'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \cdot (\gamma'(a + b - t)) \cdot (-1) dt \\ &\stackrel{(\tau=a+b-t)}{=} \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = - \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau \\ &= - \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

**연습문제 3.7.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 영역  $D$ 의 매끄러운 경로일 때,  $-(-\gamma) = \gamma$ 임을 보여라.

**경로의 결합:** 영역  $D$ 에 대하여, 두 경로

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D,$$

$$\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow D$$

가 다음을 만족한다고 하자.

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$$

(그러면  $\gamma_2$ 는  $\gamma_1$ 의 끝점에서 시작한다.) 경로의 결합  $\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow D$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

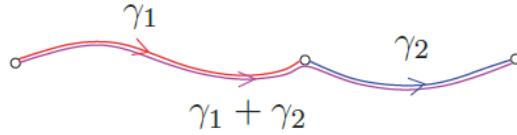


Fig. 3.10 Concatenation  $\gamma_1 + \gamma_2$  of two paths  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Figure 3.10: 두 경로  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 의 결합  $\gamma_1 + \gamma_2$

**명제 3.3.**  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이고 두 경로  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D$ 와  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow D$ 가  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ 를 만족한다고 하자. 그러면

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

### 증명

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz &= \int_{a_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f((\gamma_1 + \gamma_2)(t)) (\gamma_1 + \gamma_2)'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f((\gamma_1 + \gamma_2)(t)) (\gamma_1 + \gamma_2)'(t) dt \\ &\quad + \int_{b_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f((\gamma_1 + \gamma_2)(t)) (\gamma_1 + \gamma_2)'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt \\ &\quad + \int_{b_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f(\gamma_2(\tau - b_1 + a_2)) \gamma_2'(\tau - b_1 + a_2) d\tau \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds \quad (s = \tau - b_1 + a_2) \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

**연습문제 3.8.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 영역  $D$ 의 매끄러운 경로이고  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속함수라고 하자. 다음을 증명하라.

$$\int_{\gamma+(-\gamma)} f(z)dz = 0.$$

**유용한 판정식:** 이제 경로적분의 크기를 경로에서의  $|f|$ 의 크기, 경로의 길이의 관점에서 나타낸 부등식을 증명한다. 이 부등식은 향후 필수적인 것으로 입증될 것이다.

#### 명제 3.4.

- (1)  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이고,
- (2)  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 조각적으로 매끄러운 경로이고,
- (3)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속함수이면,

다음 부등식이 성립한다.

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \left( \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \right) \cdot (\gamma \text{의 길이}). \quad (3.3)$$

$\gamma$ 의 길이는

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

로 주어지며  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 는 경로  $\gamma$ 의 실수부와 허수부를 나타낸다. 그림 3.11을 보라.

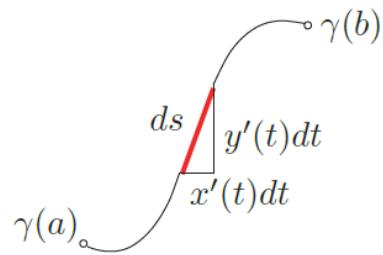


Fig. 3.11 The arc length of the path  $\gamma$  is the sum of the incremental arc lengths  $ds$ , where  $ds = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

Figure 3.11: 경로  $\gamma$ 의 길이는 국소적인 곡선 길이  $ds$ 의 합이고,  $ds = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ 이다.

증명

우선 곡선  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 부등식을 증명하자.

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

이를 위해  $\int_a^b \varphi(t) dt = r \cdot \exp(i\theta)$ 로 쓰자. 여기서  $r \geq 0$ 이고  $\theta \in (-\pi, \pi]$ 이다. 그러면,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| &= r = \exp(-i\theta) \cdot r \cdot \exp(i\theta) \\ &= \exp(-i\theta) \cdot \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \exp(-i\theta) \cdot \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(-i\theta) \cdot \varphi(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\exp(-i\theta) \cdot \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

그런데 좌변은 실수이므로, 우변의 허수부 적분은 0이 되어야 한다. 따라서

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| &= \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(-i\theta) \cdot \varphi(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}(\exp(-i\theta) \cdot \varphi(t))| dt \\ &\leq \int_a^b |\exp(-i\theta) \cdot \varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

$\varphi(t) := f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ ,  $t \in [a, b]$ 라 두면

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \left( \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \right) \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

실함수  $x, y$ 를 써서  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ 라 쓰면

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \gamma \text{의 길이}$$

가 되어 증명이 끝난다.  $\square$

**연습문제 3.9.**  $\gamma$ 가 0부터  $1+i$ 까지의 선분일 때, 적분

$$\int_{\gamma} z^2 dz$$

의 절대값의 상한을 식 (3.3)에 주어진 방법으로 계산하라. 또한, 직접 적분을 계산하고 절대값을 구하라.

**연습문제 3.10.** 연습문제 3.5의 결과를 이용하여  $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ 을 보여라.

### 3.3 경로적분의 기본정리

실함수에 대한 미적분학의 기본정리를 다시 보자.

**정리 3.2** (미적분학의 기본정리).  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 연속미분가능하고,  $[a, b]$ 에서  $F' =: f$ 라 하면,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

이 정리는 리만 적분의 계산을 용이하게 해주는 중요한 정리이다. 실제로 함수가 어떤 함수의 도함수인 것을 안다면, 정적분을 쉽게 계산할 수 있다. 예를 들면,

$$x^2 = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{3} \right) \text{을 이용하면, } \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

유사하게, 함수  $f$ 가 복소해석함수의 미분이라면 실함수에 대한 미적분학의 기본정리와 비슷한 다음 정리로부터 경로적분

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

의 계산이 쉽게 얻어진다.

**정리 3.3** (경로적분에 대한 미적분학의 기본정리). <sup>3</sup>

- (1)  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이고,
- (2)  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 조각적으로 매끄러운 경로이고,
- (3)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 연속함수이고,
- (4)  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서  $F' = f$ 를 만족하는 복소해석함수이면,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

이 정리가 어떤 도움을 줄까? 이제 우리는 어떤 경로적분들은 매우 쉽게 계산할 수 있다 (보통의 미적분에서와 마찬가지로). 아래 예제를 보자.

**예제 3.5.**  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{2} \right) = z$ 이므로, 0부터  $1 + i$ 까지의 임의의 경로  $\gamma$ 에 대한 적분은

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

가 되어 예제 3.4와 같은 결과를 얻는다. ◇

---

<sup>3</sup>실해석의 결과와 유사함을 강조하기 위해 정리의 이름에 “기본”이란 용어를 사용하였다. 하지만, 복소해석학에서 그만큼 “근본적(fundamental)”이진 않다. 더 확실하게 근본적인 코시 적분정리를 곧 배우게 될 것이다.

앞의 예제에서 살펴본 바와 같이  $D$ 에서  $f$ 가 “부정적분” 또는 “원시함수”라 불리는  $F$ 를 가지면

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(w) - F(z)$$

은  $z$ 와  $w$ 를 잇는 경로  $\gamma$ 에 무관하다.

**예제 3.6.** 모든  $\mathbb{C}$ 에 대하여  $F'(z) = \bar{z}$ 를 만족하는 함수  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 는 없다. 실제로 예제 3.2와 3.3의 계산은 0부터  $1 + i$ 까지의 적분이 경로에 의존적임을 보여준다.  $\diamond$

### 증명 (정리 3.3)

$z = x + iy \in D$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )에 대하여 실함수  $U, V, u, v$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= U(x, y) + iV(x, y), \\ f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

또한,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  ( $t \in [a, b]$ )라고 하자. 여기서  $x, y$ 는 실함수이다. 그러면, 코시-리만 방정식에 의해

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= f(x + iy) = F'(x + iy) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial U}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

위 식에 연쇄법칙을 적용하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) &= \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot y'(t). \end{aligned}$$

비슷한 방법으로,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= v(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + u(x(t), y(t)) \cdot y'(t). \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) dt \\ &= U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) + i(V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

이로써 증명이 끝난다.  $\square$

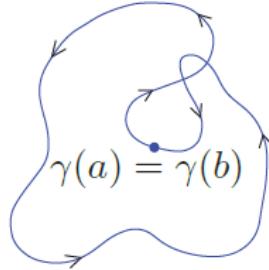
**연습문제 3.11.** 코시-리만 방정식을 이용하여  $\mathbb{C}$ 에 정의된 함수  $z \mapsto \bar{z}$ 는 원시함수(부정적분)를 갖지 않음을 보여라.

**연습문제 3.12 (부분적분 공식).** 영역  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f, g$ 의 미분  $f', g'$ 이  $D$ 에서 연속이라고 하자. 영역  $D$  내부의 경로  $\gamma$ 가 점  $w \in D$ 에서  $z \in D$ 까지의 조각적으로 매끄러운 경로이면 다음 공식이 성립함을 보여라.

$$\int_{\gamma} f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta = f(z)g(z) - f(w)g(w) - \int_{\gamma} f'(\zeta)g(\zeta)d\zeta.$$

**연습문제 3.13.**  $-i$ 와  $i$ 를 잇는 임의의 경로  $\gamma$ 에 대하여 경로적분  $\int_{\gamma} \cos z dz$ 를 계산하라.

**정의 3.2.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $\gamma(a) = \gamma(b)$ 를 만족하면 **닫힌경로**라고 한다.



### 따름정리 3.1.

- (1)  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이고,
- (2)  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 가 조각적으로 매끄러운 **닫힌경로**이고,
- (3)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 연속함수이고,
- (4)  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서  $F' = f$ 를 만족하는 복소해석함수이면,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**증명**  $\gamma(b) = \gamma(a)$ 이므로,  $\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ . □

**예제 3.7.**  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $z \in D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 대하여,  $\frac{d}{dz} \left( \frac{z^m}{m} \right) = z^{m-1}$ 이므로,  $D$ 의 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\gamma} z^{m-1} dz = 0.$$

$m = 0$ 일 때는 어떻게 될까?  $z \in \tilde{D} := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ 에서  $\text{Log}' z = 1/z$ 이므로  $\tilde{D}$ 의 임의의 닫힌경로  $\tilde{\gamma}$ 에 대하여

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = 0$$

임을 알고 있다. 하지만, 영역  $D$ 에서  $\frac{1}{z}$ 는 부정적분을 갖지 않는다. 연습문제 3.16을 보라.

**연습문제 3.14.** 경로적분의 기본정리를 이용하여 0과  $a + ib$ 를 잇는 경로  $\gamma$ 에 대하여 다음 적분을 계산하라.

$$\int_{\gamma} \exp z dz.$$

0부터  $a + ib$ 까지 직선을 따라 매개변수 적분으로 계산한 결과와 동일함을 이용하여 다음 등식을 증명하라.

$$\int_0^1 e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{a(e^a \cos b - 1) + be^a \sin b}{a^2 + b^2}.$$

**연습문제 3.15.**  $\exp z$ 와 원형 경로에 경로적분의 기본정리를 적용하여 모든  $r > 0$ 에 대하여 다음 등식을 증명하라.

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta + |theta|) d\theta = 0.$$

**연습문제 3.16.** 뚫린 평면  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서  $1/z$ 는 부정적분을 갖지 않음을 보여라.

## 3.4 코시 적분정리

이제 복소해석학의 중요 결과 중 하나인 코시 적분정리를 증명하고자 한다.

**정리 3.4 (코시 적분정리).**

- (1)  $D$ 가 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석적이고,
- (3) 두 경로  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ 는 조각적으로 매끄러운 닫힌경로로  $D$ -호모토피(homotopic)이면,

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

더 진행하기에 앞서 정리의 의미를 이해해보자. 우선  $D$ 의 두 경로는 닫힌경로이다. 다음으로 두 닫힌경로가  $D$ -호모토피이라는 것은 무엇일까? 직관적으로 다음과 같은 의미를 가진다. 한 영역의 내부에 두 경로를 나타낸 그림 3.12를 보자.  $\gamma_0$ 를 따라 고무밴드를 위치시킨다고 상상하자.  $\gamma_0$ 가  $\gamma_1$ 과  $D$ -호모토피이려면 이 고무밴드를 변형하여  $\gamma_1$ 에 맞출 수 있어야 한다. 이 때, 중간과정에서 고무밴드의 위치는 반드시 영역  $D$ 의 내부에 머물러야 한다. 분명히 어떤 경우는 이 변형이 불가능할

수도 있다. 예를 들면 영역에 구멍을 가진 경우가 그렇다. 그림 3.12의 오른쪽 그림을 보면 영역  $D$  를 뚫린 복소평면  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 으로 정하면 영역의 두 경로가  $D$ -호모토피이 될 수 없다.

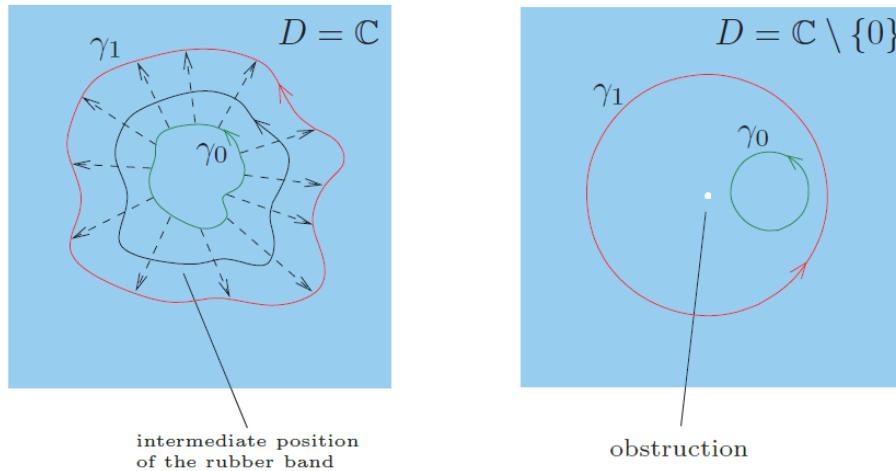


Fig. 3.12  $\gamma_0, \gamma_1$  in  $D := \mathbb{C}$  are  $\mathbb{C}$ -homotopic in the picture on the left, but in the picture on the right, the two paths  $\gamma_0, \gamma_1$  in  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  are not  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotopic.

Figure 3.12: 왼쪽 그림에서  $D := \mathbb{C}$ 의 경로  $\gamma_0, \gamma_1$ 은  $D$ -호모토피이다. 하지만, 오른쪽 그림에서  $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 의 두 경로  $\gamma_0, \gamma_1$ 은  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토피이 아니다.

이제 엄밀한 정의를 만들어보자.

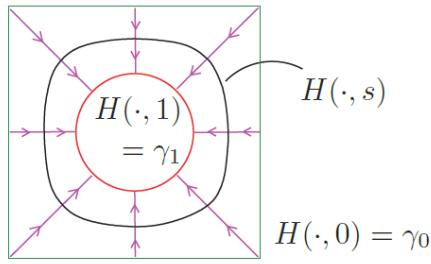
**정의 3.3.**  $D$ 를 복소평면  $\mathbb{C}$ 의 영역,  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ 를 닫힌경로라고 하자. 다음 조건을 만족하는 연속함수  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ 가 존재하면  $\gamma_0$ 는  $\gamma_1$ 과  $D$ -호모토피이라 한다.

(H1) 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ .

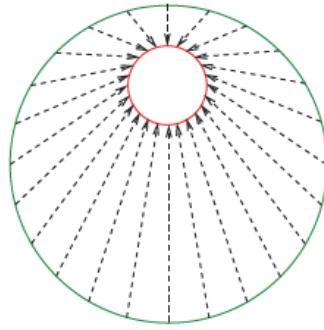
(H2) 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ .

(H3) 모든  $s \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(0, s) = H(1, s)$ .

$H$ 를 주어진 시각  $s$ 에 대하여  $[0, 1]$ 에서  $D$ 로의 닫힌경로의 모임으로 간주할 수 있다. 시각  $s$ 에서 닫힌경로를 시각  $s$ 에서 고무밴드의 위치로 생각해도 된다. 초기에는  $s = 0$ 이고,  $H(\cdot, 0)$ 는 경로  $\gamma_0$ 가 되며, 마지막으로  $s = 1$ 일 때, 경로  $\gamma_1$ 을 나타내는  $H(\cdot, 1)$ 가 된다. 여기까지는 조건 (H1)과 (H2)의 의미이다. 조건 (H3)로부터 주어진 시각  $s$ 에 대하여 중간 경로  $\gamma_s := H(\cdot, s)$ 도 닫힌경로임이다.  $H$ 의 연속성은 고무밴드가 끊어지지 않음을 보장하며 변형이 매끄럽게 이루어진다는 것을 의미한다. 아래 그림은 이를 표현한 것이다.



**예제 3.8.**  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 이고 원형 경로  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $\gamma_0 = 4 \exp(2\pi i t)$ 와  $\gamma_1 = 2i + \exp(2\pi i t)$  ( $t \in [0, 1]$ )로 주어졌다고 하자. 그러면  $\gamma_0$ 는  $\gamma_1$ 과  $\mathbb{C}$ -호모토피이다. 실제로  $H$ 를  $\gamma_0(t)$ 와  $\gamma_1(t)$ 의 점에 대한 볼록결합으로 정의하면 된다. 그림 3.8을 참고하라.



$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $H(t, s) = (1 - s) \cdot \gamma_0(t) + s \cdot \gamma_1(t) = (4 - 3s) \cdot \exp(2\pi i t) + s \cdot 2i$  ( $0 \leq t, s \leq 1$ )로 정의하자. 그러면  $H$ 가 연속임은 분명하며 다음이 성립한다.

(H1) 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(t, 0) = (4 - 0) \cdot \exp(2\pi i t) + 0 \cdot 2i = \gamma_0(t)$ .

(H2) 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(t, 1) = (4 - 3) \cdot \exp(2\pi i t) + 1 \cdot 2i = \gamma_1(t)$ .

(H3) 모든  $s \in [0, 1]$ 에 대하여,  $H(0, s) = (4 - 3s) \cdot 1 + s \cdot 2i = H(1, s)$ .

따라서 (H1), (H2), (H3)가 만족되므로  $\gamma_0$ 는  $\gamma_1$ 과  $\mathbb{C}$ -호모토피이다.

한편, 이 경로들은  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토피은 아니다. 왜 그렇게 될까? 만일  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -호모토피이라면 코시-적분정리에 의해  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 복소해석함수인  $1/z$ 의 두가지 경로적분이 같은 값을 가져야 한다. 하지만

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$$

이므로 모순이다.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서  $1/z$ 가 부정적분  $\text{Log } z$ 을 가지므로, 마지막 등호는 경로적분의 기본 정리로부터 얻어진다. ◇

**연습문제 3.17.**  $D$ 가  $\mathbb{C}$ 의 영역이라고 하자.  $D$ 의 모든 닫힌경로의 집합에서  $D$ -호모토피는 동치관 계임을 보여라. 특히, “ $\gamma_0$ 가  $\gamma_1$ 에  $D$ -호모토피하다”는 대신 “ $\gamma_0$ 과  $\gamma_1$ 가  $D$ -호모토피하다”라고 쓸 수 있다.

**증명** (정리 3.4) 호모토피  $H$ 가 두번 연속미분가능하다고 가정하자. 매끈함에 대한 이 조건을 생략해도 증명은 가능하다 ([Conway (1978)]을 보라). 하지만 증명이 복잡해진다. 또한 두번 연속 미분가능하다는 것이 강한 조건은 아니다. 앞으로 편미분의 순서를 바꿀 필요가 있을 때 이 조건을 사용할 것이다.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}.$$

**증명의 아이디어:** 시간  $s$ 에서의 중간 경로를  $\gamma_s := H(\cdot, s)$ 라 하고 다음과 같이 함수  $I(s)$ 를 정의하자.

$$I(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz, \quad s \in [0, 1].$$

적분기호하에서  $s$ 에 대한 미분을 사용하여

$$\frac{d}{ds} I(s) \equiv 0$$

을 보임으로써  $s \mapsto I(s)$ 가 상수함수임을 증명할 것이다. 특히, 보이고자 하는 결론

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = I(0) = I(1) = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f(z) dz = \frac{d}{ds} \int_0^1 f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left( f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(t, s) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( f'(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) + f(H(t, s)) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}(t, s) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \right) dt \end{aligned}$$

이므로 적분에 대한 기본정리에 의하여,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds}(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( f(H(t, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \right) dt \\ &= f(H(1, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(1, s) - f(H(0, s)) \frac{\partial H}{\partial s}(0, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(H(1, s)) \lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{H(1, \sigma) - H(1, s)}{\sigma - s} - f(H(0, s)) \lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{H(0, \sigma) - H(0, s)}{\sigma - s} \\
&= f(H(1, s)) \lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{H(1, \sigma) - H(1, s)}{\sigma - s} - f(H(1, s)) \lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{H(1, \sigma) - H(1, s)}{\sigma - s} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

따라서 함수  $s \mapsto I(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 는 상수이고, 특히 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = I(0) = I(1) = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

이로써 증명이 끝난다. 하지만  $f$ 가 복소해석함수라는 조건을 어디에서 사용했을까? 위 식의 세번째 줄에서 이 조건을 아래와 같이 사용했다.

$$\frac{\partial}{\partial s}(f(H(t, s))) = f'(H(t, s)) \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(t, s).$$

$f = u + iv, H = X + iY$ 라 하자 ( $u, v, X, Y$ 는 실함수). 매개변수  $(t, s)$ 를 생략하고 식을 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(f(H(t, s))) &= \frac{\partial}{\partial s}(u(X, Y) + iv(X, Y)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(X, Y) \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \\
&\quad + i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y}(X, Y) \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial X}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \\
&\quad + i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}(X, Y) \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \right) \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x}(X, Y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(X, Y) \right) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial s} + i \frac{\partial Y}{\partial s} \right) \\
&= f'(X + iY) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(X + iY) = f'(H(t, s)) \cdot \frac{\partial H}{\partial s}(t, s).
\end{aligned}$$

주의깊은 독자는 적분기호하에서 미분할 때  $f'$ 이 연속이라고 가정했음을 알아챘을 것이다. 이 가정이 없어도 결과는 성립하지만 여기서 다루진 않을 것이다. 관심있는 독자는 [Conway (1978)] 등에서 코시 적분정리의 완전한 증명을 찾아보기 바란다.  $\square$

**연습문제 3.18.**  $C$ 가 중심이 0이고 반지름 1인 원을 반시계방향으로 도는 원형 경로이면

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

임을 이미 알고 있다. 이제  $\pm 1, \pm i$ 를 꼭지점으로 하는 사각형을 따라 반시계방향으로 도는 경로  $S$ 를 생각하자. 그림을 그려서  $S$ 가  $C \setminus \{0\}$ -호모토픽임을 확인하라. 매개변수 적분

$$\int_S \frac{1}{z} dz$$

를 직접 계산하여 결과가 실제로  $2\pi i$ 가 됨을 확인하라.

**연습문제 3.19.**  $a > 0, b > 0$ 이고,  $E : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ 는 타원

$$E(t) = a \cos t + ib \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

이라고 하자. 적분  $\int_E \frac{1}{z} dz$ 를 고려하여  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$  임을 보여라.

### 3.4.1 특별한 경우: 단순연결 영역

“퇴화된” 단한곡선으로 상수의 경우를 생각하자. 즉,  $D$ 가 영역이고  $p \in D$ 일 때,  $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow D$ 가 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여  $\gamma_p(t) = p$ 인 경우이다. 그러면  $\gamma_p$ 는  $\gamma_p(0) = \gamma_p(1)$ 을 만족하므로 닫힌경로이다. 임의의 연속함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여, 적분

$$\int_{\gamma_p} f(z) dz$$

은 어떤 값을 가질까? 모든  $t \in [0, 1]$ 에 대하여  $\gamma'_p(t) = 0$ 이므로 적분값은 0이 된다.

$$\int_{\gamma_p} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma_p(t)) \cdot \gamma'_p(t) dt = 0.$$

이로부터 코시 적분정리의 특별하고 중요한 경우로 닫힌경로  $\gamma$ 가 한점(즉, 상수경로  $\gamma_p(t) = p, t \in [0, 1]$ )과  $D$ -호모토피일 때를 생각할 수 있다. 이 경우  $\gamma$ 를  $D$ -축약가능하다고 한다.  $\gamma$ 를 따라 고무밴드를 놓고 중간단계에서 고무밴드가  $D$ 를 벗어나지 않도록 유지하며 수축시켜 한점으로 만들자.  $D$ -축약가능한 경로  $\gamma$  (즉, 한점  $p \in D$ 와  $D$ -호모토피인 경로)와 복소해석함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 코시 적분정리로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_p} f(z) dz = 0.$$

모든 닫힌경로가  $D$ -축약가능한 영역을 단순연결 영역이라고 한다.

예를 들어  $\mathbb{C}, \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 는 모두 단순연결 영역이다. 앞의 두 예에서 영역에 속하는 임의의 점  $p$ 를 잡으면 호모토피를 다음과 같이 만들 수 있다.

$$H(t, s) := (1 - s)\gamma(t) = sp, \quad t, s \in [0, 1].$$

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 의 경우는 임의의 경로  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ 에 대하여 점  $p$ 를 양수로 잡으면 (예를 들어  $p = 1$ ) 위와 같은  $H$ 를 만들 수 있다. 위의 예는 공통적으로 “구멍”을 갖지 않는다는 점에 주목하자. 한편 구멍을 갖는 영역은 단순연결 영역이 아니다. 예를 들어 뚫린 복소평면  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 은 단순연결이 아니다. 중심이 0이고 반지름  $r$ 인 원을 반시계방향으로 한바퀴 도는 원형 경로에 대하여

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

이다. 그런데  $C$ 가 뚫린 복소평면의 어떤 한점으로  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -축약가능하다면 코시 적분정리에 의하여

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 0$$

이 되어야 한다. 따라서  $C$ 는  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 의 한점으로  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -축약가능한 경로가 아니며  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 는 단순연결 영역이 아니다. 유사하게 원환

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$$

가 단순연결이 아님을 보일 수 있다. 그럼 3.13을 보자. 구멍의 방해는 명면을 뚫고 나오는 못 또는 기둥으로 생각할 수 있으며, 이는 구멍을 둘러싸고 있는 고무밴드가 평면을 떠나지 않으면서 한점으로 축소되는 것을 막는다.

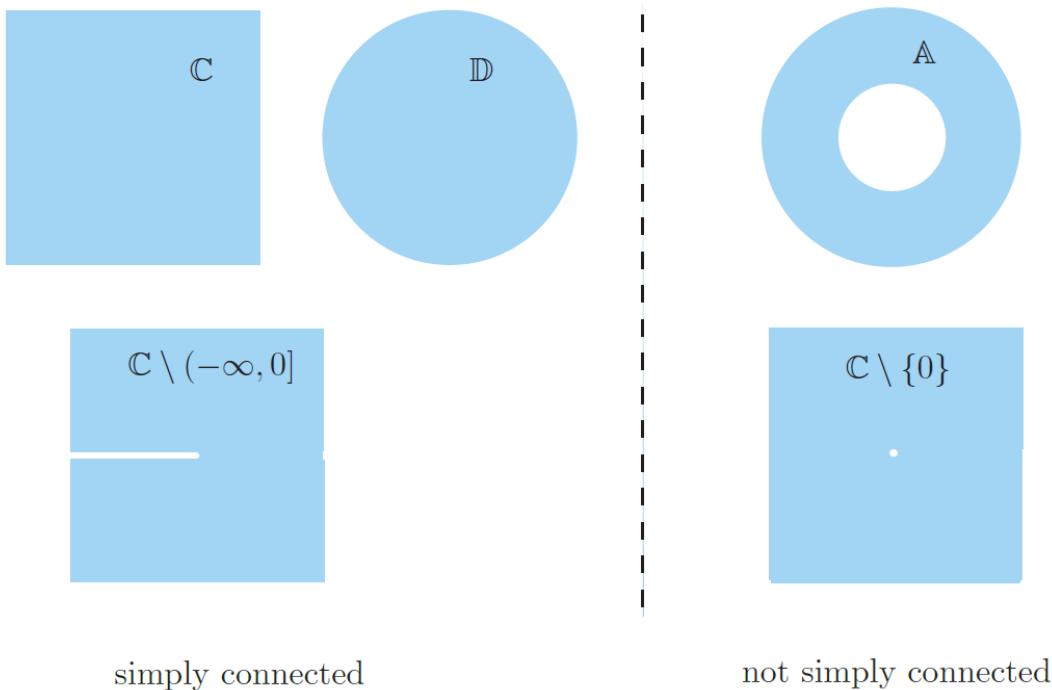


Fig. 3.13 The domains  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  and  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  are simply connected, while the annulus  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  and the punctured plane  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  aren't.

Figure 3.13:  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 는 모두 단순연결 영역이지만, 원환  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ 와 뚫린 복소평면  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 는 아니다.

다음은 코시 적분정리의 따름정리이다.

### 따름정리 3.2.

- (1)  $D$ 가 단순연결 영역이고,

- (2)  $\gamma$ 는 영역  $D$ 에서 조각적으로 매끄러운 닫힌경로이고,  
(3)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $D$ 에서 복소해석적이면,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

이 따름정리가 코시 적분정리로 불리기도 한다.

**예제 3.9.**  $\exp$ 가 전해석함수이고,  $\mathbb{C}$ 가 단순연결 영역이므로 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\gamma} \exp z dz = 0.$$

실제로 임의의 전해석함수  $f$ 와 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 에 대하여,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ 이다.  $\diamond$

$D$ 가 단순연결 영역이 아닌 경우에도 복소미분가능한 함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 영역  $D$ 의 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

를 만족할 수 있다. 예를 들면  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f := 1/z^2$ 이면,  $1/z^2$ 은  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 부정적분을 가지므로

$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

뚫린 복소평면의 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

**연습문제 3.20.**  $|z| = 3$ 을 따라 반시계방향으로 도는 원형 경로를 따라 다음 함수의 적분을 구하라.

(1)  $\text{Log}(z - 4i)$ .

(2)  $\frac{1}{z - 1}$ .

(3)  $i^{z-3}$ 의 주치.

**연습문제 3.21** (경로의 회전수).  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 0을 지나지 않는 매끄러운 닫힌경로라고 가정하자. (0에 대한)  $\gamma$ 의 회전수를 다음과 같이 정의한다.

$$w(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

- (1)  $\exp(2\pi i a) = 1$ 일 필요충분조건이  $a \in \mathbb{Z}$ 임을 이용하여,  $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$ 임을 다음 과정으로 증명하라. 함수  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 를

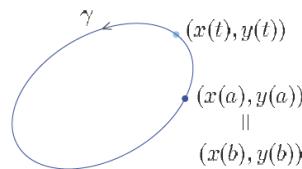
$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right), \quad t \in [0, 1]$$

로 정의하자.  $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$ 를 증명하려면  $\varphi(1) = 1$ 을 보이면 충분하다. 이를 위해,  $\varphi'(t)$ 를 계산하여  $\varphi/\gamma$ 가  $[0, 1]$ 에서 상수임을 증명하라. 이 사실로부터  $\varphi(1) = 1$ 이라는 결론을 얻을 수 있다.

- (2)  $\Gamma_1(t) = \exp(2\pi i t)$  ( $t \in [0, 1]$ )로 주어진 경로  $\Gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 의 회전수를 계산하라.
- (3)  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 0을 지나지 않는 매끄러운 닫힌경로라 하자. 두 경로의 곱  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ 을 점별 곱으로 정의하면,  $w(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = w(\gamma_1) + w(\gamma_2)$ 임을 증명하라.
- (4)  $m \in \mathbb{N}$ 이라 하자.  $\Gamma_m(t) = \exp(2\pi i m t)$  ( $t \in [0, 1]$ )로 주어진 경로  $\Gamma_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ 의 회전수를 계산하라.
- (5) 회전수 함수  $\gamma \mapsto w(\gamma)$ 는 “국소적으로 상수함수”임을 보여라. 즉,  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 가 매끄러운 닫힌경로이면,  $\|\gamma - \gamma_0\|_\infty := \max\{|\gamma(t) - \gamma_0(t)| : t \in [0, 1]\} < \delta$ 를 만족하는 모든 닫힌경로  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 대하여  $w(\gamma) = w(\gamma_0)$ 가 되도록 하는  $\delta > 0$ 가 존재한다. (다시 말하면, 곡선의 집합에 균등 위상(uniform topology)을 설정하고  $\mathbb{Z}$ 에 이산 위상(discrete topology)을 설정하면,  $\gamma \mapsto w(\gamma)$ 는 연속함수이다)

### 3.4.2 복소해석함수가 아닌 경우는 어떻게 될까?

이제  $f$ 가 복소해석함수라는 가정을 생략하면 코시 적분정리가 만족되지 않을 수 있음을 강조하고자 한다. 복소해석함수가 아님을 잘 알고 있는 캘레복소수 함수  $z \mapsto \bar{z}$ 에 정리를 적용하면 어떻게 되는지 살펴보자. 0을 둘러싸는 닫힌경로  $\gamma$ 를 따라 적분하는 경우,  $\bar{z}$ 를  $\gamma$ 를 따라 경로적분한 결과는  $\gamma$ 로 둘러싸인 영역의 넓이와 같음을 보일 것이다. 당연히 넓이는 경로  $\gamma$ 의 모양에 의존하므로  $\mathbb{C}$ -호모토피한 두 경로로 둘러싸인 영역의 넓이는 다르다(단지 다른 반지름을 가진 두개의 동심원을 상상해보면 충분하다). 엄밀한 증명을 대신하여 아래 그림과 같이 특정 영역에 대한 타당한 설명만 제공하고자 한다.



매끄러운 경로  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_a^b (x(t) - iy(t))(x'(t) + iy'(t))dt \\
 &= \int_a^b x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + i((x(t)y'(t) - y(t)x'(t)))dt \\
 &= \frac{(x(b))^2 - (x(a))^2 + (y(b))^2 - (y(a))^2}{2} + i \int_a^b ((x(t)y'(t) - y(t)x'(t)))dt \\
 &= 0 + i \int_a^b ((x(t)y'(t) - y(t)x'(t)))dt.
 \end{aligned}$$

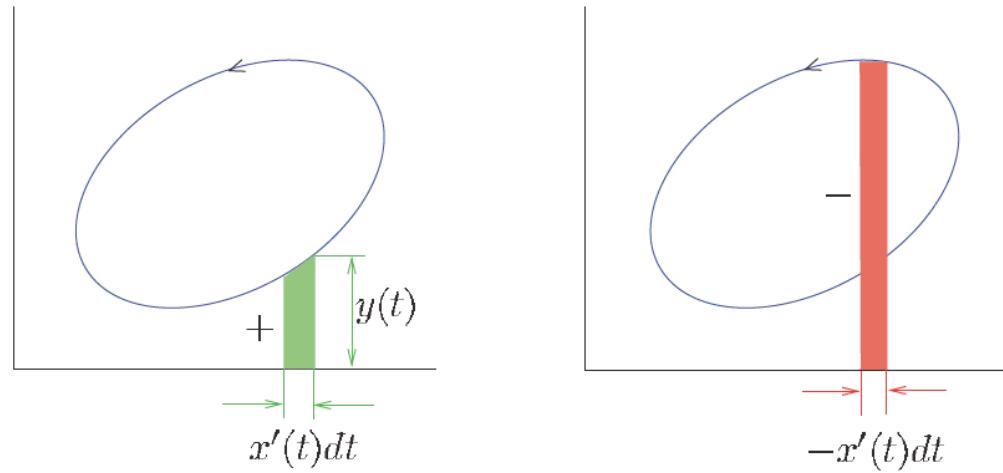
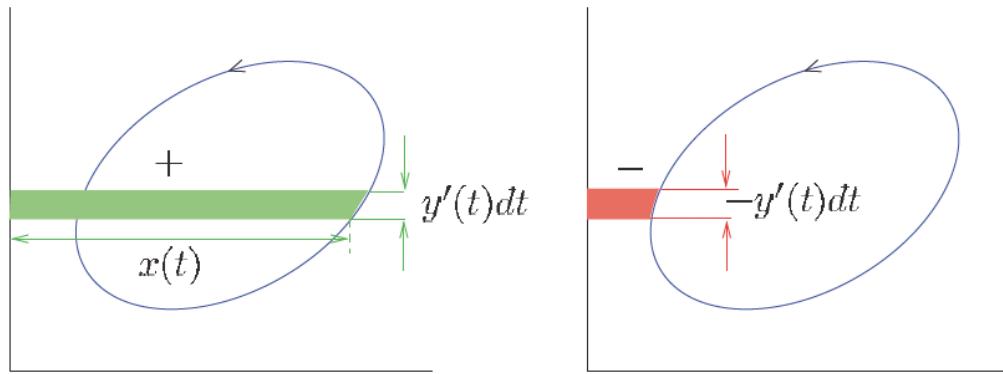


Fig. 3.14  $\int_a^b x(t)y'(t)dt$  and  $\int_a^b x'(t)y(t)dt$ .

Figure 3.14:  $\int_a^b x(t)y'(t)dt \oplus \int_a^b x'(t)y(t)dt$

그림 3.14를 보면, 위쪽 두 그림에서

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = (\gamma \text{로 둘러싸인 영역의 넓이})$$

이고, 아래 두 그림에서 다음 식을 얻는다.

$$\int_a^b x'(t)y(t)dt = -(\gamma \text{로 둘러싸인 영역의 넓이})$$

종합하면  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = i \int_a^b ((x(t)y'(t) - y(t)x'(t))) dt = 2i \cdot (\gamma \text{로 둘러싸인 영역의 넓이})$ . 따라서 복소해석함수에 대한 코시 적분정리와 달리 이와 같이 복소해석함수가 아닌 경우는 닫힌경로를 따라 적분한 결과가 0이 아니며,  $\bar{z}$ 의 경우는 영역의 넓이와 관련이 있다!

**연습문제 3.22.** 반지름  $r$ 의 동전이 고정된 반지름  $R$ 의 더 큰 동전에 외접하며 구른다고 가정하자. 이 때, 구르는 동전의 둘레에 있는 한점이 그리는 경로를 에피사이클로이드라 부른다. 어떤 자연수  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $R = nr$ 를 만족하면 닫힌경로가 얻어진다. 그림 3.22를 보라.

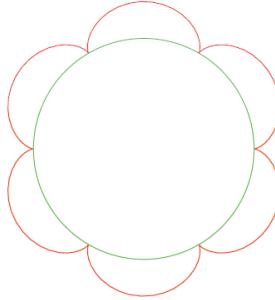


Fig. 3.15 The epicycloid with  $n = 6$ .

Figure 3.15:  $n = 6$ 인 에피사이클로이드(epicycloid) 곡선

- (1) 고정된 동전의 중점을 원점으로 설정하면, 에피사이클로이드는 다음과 같은 매개변수방정식으로 쓸 수 있음을 보여라.

$$z(t) = r((n+1) \exp(it) - \exp(i(n+1)t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (2) 에피사이클로이드를 따라 함수  $\bar{z}$ 의 적분을 계산함으로써 에피사이클로이드로 둘러싸인 영역의 넓이가  $\pi r^2(n+1)(n+2)$ 가 됨을 보여라.

이 장의 나머지 부분에서는 코시 적분정리에서 파생된 다양한 결과를 배울 예정이다. 특히, 다음과 같은 주제를 다룬다.

- (1) 단순연결 영역에서 모든 복소해석함수는 부정적분(원시함수)을 갖는다.
- (2) 복소해석함수는 무한번 미분가능하다.
- (3) 유계인 전해석함수는 상수함수 뿐이다 (리우비유 정리).
  - (이) 결과를 이용하여 대수학의 기본정리를 증명한다
- (4) 모레라 정리라 불리는 코시 적분정리의 역의 일종이 성립한다.

### 3.5 부정적분의 존재성

단순연결 영역에서 모든 복소해석함수는 어떤 복소해석함수의 도함수가 됨을 증명하자.

**정리 3.5.**

- (1)  $D$ 가 단순연결 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수이면,

모든  $z \in D$ 에 대하여  $F'(z) = f(z)$ 를 만족하는 복소해석함수  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재한다.

#### 증명

한점  $p \in D$ 를 고정하고  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

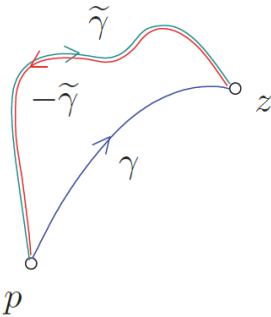
여기서  $\gamma_z$ 는  $p$ 와  $z$ 를 잇는  $D$  내부의 경로이다.  $F$ 는 잘 정의된 함수인가? 즉,  $F(z)$ 가  $p$ 에서  $z$ 까지의 경로에 의존하지 않고 정의되는가?  $\tilde{\gamma}_z$ 를  $p$ 와  $z$ 를 잇는  $D$ 의 다른 경로라 하면,  $\gamma_z - \tilde{\gamma}_z$ 는 단순연결 영역  $D$ 의 매끄러운 닫힌경로이다. 그럼 3.16을 참고하자.

코시 적분정리로부터

$$0 = \int_{\gamma_z - \tilde{\gamma}_z} f(z) dz = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta$$

이므로  $\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta$ 가 되어  $F$ 가 잘 정의된다.

다음 단계로  $D$ 에서  $F' = f$ 를 만족하여  $F$ 가 복소해석함수가 됨을 증명하자.  $D$ 에서  $f$ 가 복소해석함수이므로 연속함수도 된다. 따라서 주어진 점  $z \in D$ 에서 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여 대응하는

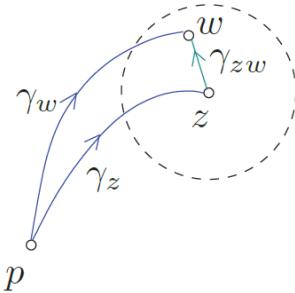
Fig. 3.16  $\gamma - \tilde{\gamma}$  forms a closed path.Figure 3.16:  $\gamma - \tilde{\gamma}$ 가 만드는 닫힌경로

$\delta > 0$ 가 존재하여  $|w - z| < \delta$ 이면  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ 을 만족한다. 이제  $w$ 를  $0 < |w - z| < \delta$ 가 되도록 잡으면

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \left( \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \right).$$

$\gamma_{zw}$ 를  $z$ 와  $w$ 를 잇는 선분이라 하면, 경로  $\gamma_z, \gamma_{zw}, -\gamma_w$ 를 연접하면 닫힌경로가 되고 코시 적분 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$0 = \int_{\gamma_z + \gamma_{zw} - \gamma_w} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{zw}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta.$$



경로적분의 기본정리로부터

$$\int_{\gamma_{zw}} 1 d\zeta = \int_{\gamma_{zw}} \zeta' d\zeta = w - z$$

이므로

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{zw}} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{zw}} f(z) d\zeta$$

$$= \frac{1}{w-z} \int_{\gamma_{zw}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

이고

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w-z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{w-z} \int_{\gamma_{zw}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|w-z|} \left| \int_{\gamma_{zw}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|w-z|} \left( \max_{\zeta \in \gamma_{zw}} |f(\zeta) - f(z)| \right) \cdot (\text{length of } \gamma_{zw}) \\ &< \frac{1}{|w-z|} \epsilon |w-z| = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서  $F'(z) = f(z)$ 가 되어  $F$ 는 복소해석함수이다.  $\square$

**참고 3.2.** 단순연결 영역에서 복소해석함수  $f$ 의 부정적분은 상수를 무시하면 유일하게 결정된다. 실제로  $F$ 와  $\tilde{F}$ 가 모두  $f$ 의 부정적분이라고 하면  $D$ 에서  $F' = f = \tilde{F}'$ 가 되어

$$\frac{d}{dz}(F - \tilde{F}) = F' - \tilde{F}' = f - f = 0 \quad (D \text{에서}).$$

연습문제 2.13에 의해  $F - \tilde{F} = C$ 를 만족하는 상수  $C$ 가 존재한다. 즉,  $D$ 에서  $F = \tilde{F} + C$ 이다.

**예제 3.10.**  $\exp(-z^2)$ 은 전해석함수이다. 따라서 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $F'(z) = \exp(-z^2)$ 을 만족하는 함수  $F$ 가 존재한다 (하지만 우리는  $F$ 를 기본함수를 이용하여 나타내지는 못한다). 한가지 부정적분은 다음식으로 쓸 수 있다.

$$\tilde{F}(z) = \int_{\gamma_z} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (z \in \mathbb{C}),$$

여기서  $\gamma_z$ 는 0과  $z$ 를 잇는 선분으로 정하자. 그러면 특히 실수  $x$ 에 대하여,

$$\tilde{F}(x) = \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

이고 이 값은 (다른 부정적분도 마찬가지로) 기본함수로 표현할 수 없다.  $\diamond$

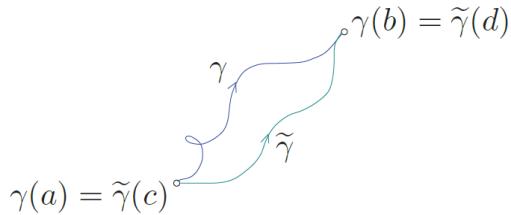
**연습문제 3.23.** 영역  $D$ 가 주어졌다고 하자.  $f$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고  $D$ 에서  $F' = f$ 를 만족하는 복소해석함수  $F$ 가 존재하지 않는다면,  $D$ 는 단순연결 영역이 될 수 없음을 알 수 있다.  $D$ 와  $f$ 의 구체적인 예를 제시하라.

### 따름정리 3.3.

- (1)  $D$ 가 단순연결 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수이고,

- (3)  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 와  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow D$ 가 같은 시작점과 끝점을 갖는 매끄러운 경로이면 (즉,  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(c)$ 이고  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(d)$ 이다),

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$



증명  $f$ 가 부정적분  $F$ 를 가지므로

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\tilde{\gamma}(d)) - F(\tilde{\gamma}(c)) = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

## 3.6 코시 적분공식

이제 코시 적분공식이라 불리는 결과를 학습할 예정인데, 개요를 말하자면, 자신과는 교차하지 않는 닫힌경로  $\gamma$ 와  $\gamma$  내부에서 복소해석함수인  $f$ 에 대하여,  $\gamma$  내부 임의의 점에서 함수  $f$ 의 값은  $\gamma$  위에서의 함수값으로 결정된다! 이는 복소해석함수의 “엄밀성”을 보여주는 예이다.

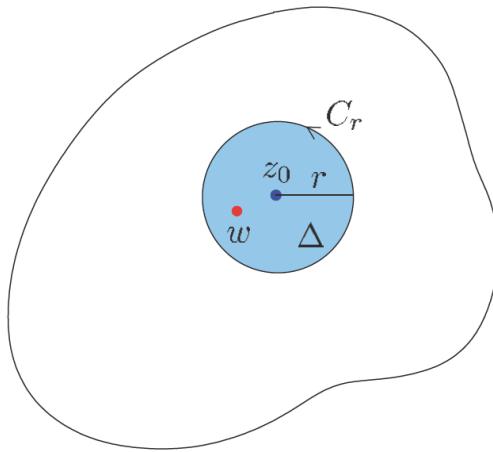
다음 장에서 좀 더 일반적인 코시 적분공식을 공부할 계획인데,  $\gamma$  내부의 점에서  $f$ 의 모든 미분은  $\gamma$  위에서의 함수값으로 표현된다. 따라서 이 장에서는 일반화된 결과 중 “ $n = 0$ 인 경우”的 기본 결과만을 고려한다.

**정리 3.6** (원형 경로에 대한 코시 적분공식).

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수이고,
- (3)  $r > 0, z_0 \in D, \Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$ 를 만족하면,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz, \quad |w - z_0| < r,$$

여기서  $C_r$ 은  $C_r(t) = z_0 + r \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ 로 정의된, 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $r > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로이다.



이 결과를 증명하기 위해 나중에 유용하게 사용될 다음 계산기법을 먼저 보아도록 하자.

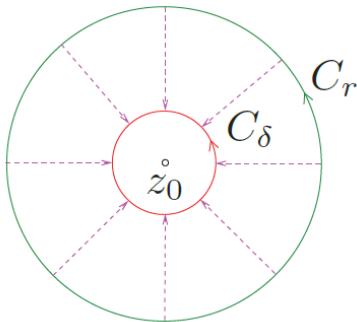
### 명제 3.5.

- (1)  $D$ 가 영역이고,  $z_0 \in D$ ,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D \setminus \{z_0\}$ 에서 복소해석함수이고,  $D$ 에서 연속이고,
- (3)  $r > 0$ ,  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ 가  $D$ 에 포함되면,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

여기서  $C_r$ 은  $C_r(t) = z_0 + r \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ 로 정의된, 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $r > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로이다.

**증명**  $\epsilon > 0$ 이라 하자. 그러면  $\delta > 0$  ( $r$ 보다 작게 잡는다)가 존재하여  $0 < |z - z_0| \leq \delta$ 이면  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ 을 만족한다. 중심이  $z_0$ , 반지름이  $\delta$ 인 원을 반시계방향으로 도는 원형 경로  $C_\delta$ 를 생각하자.  $C_\delta$ 와  $C_r$ 은  $D \setminus \{z_0\}$ -호모토픽임을 쉽게 알 수 있다.



실제로 호모토피  $H$ 는  $C_r$ 과  $C_\delta$  위의 점들에 대한 볼록결합으로 얻을 수 있다.

$$H(\cdot, s) := (1-s)C_r(\cdot) + sC_\delta(\cdot), \quad s \in [0, 1].$$

그러면 코시 적분정리에 의해

$$\int_{c_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

이므로

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{1}{z - z_0} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \left( \max_{z \in C_\delta} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \right) \cdot 2\pi\delta \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi\delta} \cdot 2\pi\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ 은 임의로 작게 잡을 수 있으므로 증명이 끝난다.  $\square$

이로부터 다음 따름정리를 바로 얻을 수 있다.

#### 따름정리 3.4.

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,
- (3)  $r > 0, z_0 \in D, \Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$ 를 만족하면,

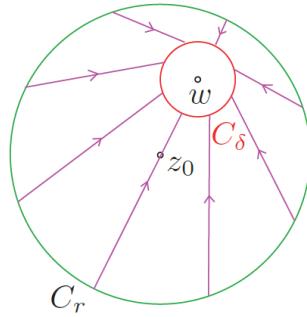
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

여기서  $C_r$ 은  $C_r(t) = z_0 + r \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ 로 정의된, 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $r > 0$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로이다.

이제 코시 적분공식의 기본형인 정리 3.6을 증명하자. 따름정리 3.4와 달리  $w$ 는 중심  $z_0$ , 반지름  $r$ 인 원 내부의 임의의 점이며, 따름정리와 같이 반드시 중심  $z_0$ 일 필요가 없다.

#### 증명 (정리 3.6)

$w$ 를  $|w - z_0| < r$ 을 만족하는 점이라 하자.  $\delta > 0$ 를 충분히 작게 잡아 중심이  $w$ , 반지름이  $\delta$ 인 원형 경로  $C_\delta$ 가  $C_r$ 의 내부에 포함되도록 한다. 그러면  $C_r$ 과  $C_\delta$ 는  $D \setminus \{w\}$ -호모토픽임을 예제 ??과 같은 방법으로 보일 수 있다.



$D \setminus \{w\}$ 에서

$$\frac{f(\cdot)}{\cdot - w}$$

가 복소미분가능함수이므로 코시 적분정리로부터 아래 두번째 등호가 성립한다.

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

이로써 증명이 끝난다.  $\square$

**연습문제 3.24.**  $0 < a < 1$ 이고,  $\gamma$ 는 중심이 0인 단위원을 반시계방향으로 도는 경로일 때, 다음을 증명하라.

$$\int_{\gamma} \frac{i}{(z - a)(az - 1)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt.$$

코시 적분공식을 이용하여  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt = \frac{2\pi}{1 - a^2}$ 을 유도하라.

**연습문제 3.25.** 아래 빈 칸을 채워라.

$$(1) \int_{\gamma} \frac{\exp z}{z - 1} dz = \text{_____}, \text{ 단, } \gamma \text{는 } |z| = 2 \text{를 반시계방향으로 도는 원형 경로이다.}$$

$$(2) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \text{_____}, \text{ 단, } \gamma \text{는 } |z - 1| = 1 \text{를 반시계방향으로 도는 원형 경로이다.}$$

$$(3) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \text{_____}, \text{ 단, } \gamma \text{는 } |z - i| = 1 \text{를 반시계방향으로 도는 원형 경로이다.}$$

$$(4) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \text{_____}, \text{ 단, } \gamma \text{는 } |z + 1| = 1 \text{를 반시계방향으로 도는 원형 경로이다.}$$

$$(5) \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \text{_____}, \text{ 단, } \gamma \text{는 } |z| = 3 \text{를 반시계방향으로 도는 원형 경로이다.}$$

**연습문제 3.26.** 영역  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ 에서 함수  $z \mapsto \frac{1}{z(1 - z^2)}$ 은 부정적분을 갖는가?

파름정리 3.5 (일반 경로에 대한 코시 적분공식).

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,
- (3)  $z_0 \in D$ ,
- (4)  $z_0$ 를 중심으로 하는 원형 경로  $C$ 와 그 내부가 영역  $D$ 에 속하고, 영역  $D$ 의 닫힌경로  $\gamma$ 가  $C$ 와  $D \setminus \{z_0\}$ -호모토피하면,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**증명** 원형 경로에 대한 코시 적분공식으로부터

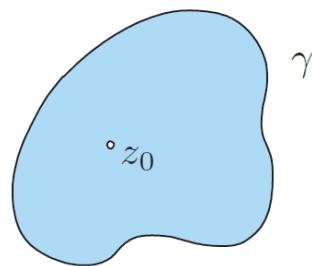
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

그런데  $\gamma$ 가  $C$ 와  $D \setminus \{z_0\}$ -호모토피하므로 코시 적분정리에 의하여

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

가 되어 증명이 끝난다.  $\square$

이 결과는 앞에서 언급했던 복소해석함수와 관련된 “엄밀성”을 강조한다. 복소해석함수는 매우 구조적인 성질(모든 곳에서 국소적으로는 회전변환과 확대로 표현되는)이 있어 매우 제한적인 정보만으로 함수의 정확한 움직임을 찾아낼 수 있다. 즉, 평면의 아주 작은 부분(예를 들면 닫힌경로를 따라)에서 복소해석함수의 특징을 안다면, 멀리 떨어진 다른 점들에서의 값을 유일하게 결정할 수 있다. 아래 그림은 코시 적분공식의 경우를 예로 보여준다. 경로  $\gamma$ 에서  $f$ 의 값을 안다면 색칠된 부분의 모든 점에서의 함수값을 결정할 수 있다!



**연습문제 3.27.** 함수  $F$ 를  $F(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + 1}$ 로 정의하고,  $R > 1$ 이라 하자.

- (1) 실수축 위의 점  $-R$ 부터  $R$ 까지를 잇는 선분  $S$ 와 반지름이  $R$ 이고  $R$ 에서  $-R$ 까지를 연결하는 상반평면의 원호  $T$ 를 연결한 반원형 닫힌경로를  $\sigma$ 라고 하자. 다음을 증명하라.

$$\int_{\sigma} F(z) dz = \frac{\pi}{e}.$$

- (2)  $z$ 가 상반평면의 점일 때,  $|\exp(iz)| \leq 1$ 임을 증명하여, 충분히 큰  $|z|$ 에 대하여  $|F(z)| \leq 2/|z|^2$ 임을 보여라.

- (3)  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_T F(z) dz = 0$ 임을 보여라. 그러면  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S F(z) dz = \frac{\pi}{e}$ 가 된다.

- (4) 결론적으로  $S$ 를 따른 적분을 매개변수  $x$ 의 적분으로 표현하면 다음 결과가 얻어짐을 보여라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

**연습문제 3.28.** 적분  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta$ 을 구하라. 힌트: 함수  $\exp(\exp(i\theta))$ 를 생각해보자.

## 3.7 복소해석함수는 무한번 미분가능하다

이 절에서는 영역에 정의된 복소해석함수의 근본적인 성질로서 무한번 복소미분가능함을 보일 것이다.

이는 실해석의 경우와 대비되는 결과이다. 이미 예제 0.1에서 살펴본 바와 같이 실함수는 고립점에서 미분가능하지 않을 수 있다. 좀 더 극단적인 현상을 보여주는 예로 모든 점에서 미분가능하지만,  $f'$ 은 어떤 점에서도 미분이 불가능한 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다. 관심있는 독자는 [Gelbaum 과 Olmsted (1964)] 을 찾아보기 바란다. 그 책에서 모든 점에서 연속인 함수  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든 점에서 미분이 불가능한 예를 찾을 수 있는데, 그 적분

$$f(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

으로 정의된  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 모든 점에서 미분가능하며, 도함수인  $g$ 는 어떤 점에서도 미분이 불가능하게 된다.

### 파를정리 3.6.

- (1)  $D$ 가 영역이고,  
 (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 는  $D$ 에서 복소해석함수이면,

$f'$ 도  $D$ 에서 복소해석함수이다.

이 결과를 이용하면 다음과 같이 연쇄적인 결과를 얻을 수 있음에 주목하자.

$$\boxed{f \in \text{Hol}(D)} \Rightarrow \boxed{f' \in \text{Hol}(D)} \Rightarrow \boxed{f'' \in \text{Hol}(D)} \Rightarrow \dots$$

따라서  $f$ 가 영역  $D$ 에서 복소해석함수이면 (즉,  $f \in \text{Hol}(D)$ ), 무한번 복소미분가능하다.

어떻게 증명할지 계획을 만들어보자. 코시 적분공식에서 다음을 알고 있다.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

여기서  $C_r$ 은  $z$ 를 중심으로 하고 반지름  $r$ 인 원이다. 적분기호하에서 형식적인 미분을 적용하면  $f$ 의 미분에 대한 표현을 얻을 수 있다.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

이 식을 증명한 후, 점  $z$ 와  $w$ 에서의 미분에 대한 위의 표현을 사용하여, 극한

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f'(w) - f'(z)}{w - z}$$

이 존재함을 보일 것이다.

### 증명

$z_0 \in D$ 라 하고, 함수  $g$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

$g$ 가  $D \setminus \{z_0\}$ 에서 복소해석함수이고,  $D$ 에서 연속함수임은 분명하다. 이제 명제 3.5에 사용한 기법을  $g$ 에 적용하자. 원판  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ 이 영역  $D$ 에 포함되도록 충분히 작은  $r > 0$ 을 고르고  $C_r$ 을  $z_0$ 을 중심으로 반지름  $r$ 인 원을 반시계방향으로 도는 경로라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} f'(z_0) = g(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{g(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^2} dz \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{1}{(z - z_0)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz - 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

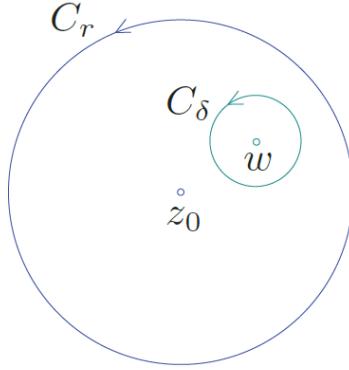
따라서  $C_r$  내부의  $w$ 에 대하여  $w \neq z_0$ 이면, 다음을 얻는다.

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz,$$

단,  $C_\delta$ 는 중심  $w$  반지름  $\delta$ 인  $C_r$  내부의 작은 원이다. 두 번째 등식은 코시 적분정리로부터 얻어진다. 왜냐하면,

$$\frac{f(\cdot)}{(\cdot - w)^2}$$

이  $D \setminus \{w\}$ 에서 복소해석적이고, 경로  $C_r$ 과  $C_\delta$ 가  $D \setminus \{w\}$ -호모토피이기 때문이다.



따라서  $C_r$ 의 내부에서  $w \neq z_0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{f'(w) - f'(z_0)}{w - z_0} &= \frac{1}{w - z_0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)(2z - z_0 - w)}{(z - w)^2(z - z_0)^2} dz. \end{aligned}$$

만일  $w \approx z_0$ 이면 이 값은 어떻게 될까? 분자는

$$f(z)(2z - z_0 - w) = 2f(z)(z - z_0)$$

에 분모는  $(z - z_0)^2(z - z_0)^2$ 에 가깝게 된다. 따라서 다음 결과를 예상해볼 수 있다.

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f'(w) - f'(z_0)}{w - z_0} = \frac{2}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

두 값의 차이를 계산해보면,

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f'(w) - f'(z_0)}{w - z_0} - \frac{2}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = (w - z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{(3z - z_0 - 2w)f(z)}{(z - w)^2(z - z_0)^3} dz.$$

$z_0$ 에 가까운 모든  $w$ 에 대하여 이 적분값이 적당한 상수로 유계이면,  $w - z_0$ 를 곱한 값은  $w \rightarrow z_0$  일 때 원하는 만큼 작게 만들 수 있다. 이를 보이기 위해 중심이  $z_0$ 이고 반지름이  $r$ 보다 작은, 예를 들면  $r/2$ 인 원판을 생각하고  $w$ 를 이 원판 내부로 제한하자 ( $w$ 가  $z_0$ 의 근방에 있도록). 이제부터  $w$  가 다음 콤팩트 집합에 속한다고 할 수 있다.

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq \frac{r}{2} \right\}.$$

연속함수  $\varphi$ 를

$$(z, w) \xrightarrow{\varphi} \left| \frac{(3z - z_0 - 2w)f(z)}{(z - w)^2(z - z_0)^3} \right| \\ : C_r \times \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq \frac{r}{2} \right\} (=: K \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}$$

라 정의하면  $K$ 는  $\mathbb{R}^4$ 에서 유계인 닫힌집합이므로 콤팩트 집합이다. 따라서 콤팩트 집합  $K$ 에 정의된 연속함수  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ 는 최대값  $M \geq 0$ 을 갖는다. 이제,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)(2z - z_0 - w)}{(z - w)^2(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} M(C_r \text{의 길이}) = \frac{1}{2\pi} M 2\pi r = Mr$$

이므로

$$\left| \frac{f'(w) - f'(z_0)}{w - z_0} - \frac{2}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \right| \leq |w - z_0| Mr \xrightarrow{w \rightarrow z_0} 0$$

가 되어  $f'$ 이  $z_0$ 에서 복소미분가능함을 알 수 있다.  $z_0$ 의 선택을 임의로 할 수 있으므로  $f'$ 은 영역  $D$ 에서 복소해석함수이다.  $\square$

**연습문제 3.29.** 영역  $D$ 에서  $f$ 가 복소해석함수라 하자.  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $f^{(n)}$ 이 연속적으로 복소미분가능함이 당연한가?

## 3.8 리우비유 정리와 대수학의 기본정리

복소해석함수와 관련된 엄밀성을 보여주는 예를 하나 더 살펴보자.

**정리 3.7** (리우비유(Liouville) 정리). 유계인 전해석함수는 상수함수이다.

다시 한번 실해석의 경우와 비교해보자. 우리가 잘 아는 함수  $x \rightarrow \sin x$ 의 예를 보면  $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하며, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $|\sin x| \leq 1$ 이므로 유계이다. 하지만  $\sin$ 은 상수함수가 아니다.

한편, 리우비유 정리를 적용해보면 전해석함수  $z \mapsto \sin z$ 는 상수함수가 아니기 때문에  $\mathbb{C}$ 에서 유계가 될 수 없다. 앞의 1.4.2절에서 확인한 바와 같이,  $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때  $|\sin(iy)| \rightarrow \infty$ 이므로, 정의에 따라 직접 계산하는 방법으로도 이를 확인할 수 있다.

**증명** 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|f(z)| \leq M$ 인 상수  $M \geq 0$ 이 존재한다고 하자.  $w \in \mathbb{C}$ 이고  $\gamma$ 가 중심  $w$ , 반지름  $R$ 인 원형 경로하고 하자, 여기서  $R$ 은 임의의 양수이다. 그러면 따름정리 3.6의 증명에서 (특히), 식 (3.5)에서

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz$$

이므로

$$|f'(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}$$

이다. 그런데  $R > 0$ 을 임의로 잡을 수 있으므로  $f'(w) = 0$ 이다. 즉, 모든  $w \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $f'(w) = 0$ 이 되어  $f$ 는 상수함수이다. 이미 연습문제 2.13에서 증명했지만 다른 방식으로 보이도록 하자.  $z \in \mathbb{C}$ 이면, 0부터  $z$ 까지 있는 선분  $\gamma_z$ 에 대하여

$$f(z) - f(0) = \int_{\gamma_z} f'(\zeta) d\zeta = 0$$

가 되어 증명이 끝난다.  $\square$

이 결과는 대수학의 기본정리에 대한 간단한 증명에 사용될 수 있다.<sup>4</sup>

**따름정리 3.7** (대수학의 기본정리). 1차 이상의 모든 다항식은  $\mathbb{C}$ 에서 해를 갖는다.

$p(z) = x_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$  ( $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}, c_d \neq 0$ )로 정의된 다항식  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여,  $d$ 를  $p$ 의 차수(degree)라 한다.  $p(z_0) = 0$ 을 만족하는  $z_0 \in \mathbb{C}$ 를  $p$ 의 해(zero/root)라 부른다.

**증명**  $d \geq 1$ 인 다항식  $p(z) = x_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$ 가  $\mathbb{C}$ 에서 해를 갖지 않는다고 하자. 즉, 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $p(z) \neq 0$ 이다. 그런데  $p$ 는 전해석함수이고 0이 될 수 없으므로 역수를 함수  $f(z) = 1/p(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ )라 정의하면  $f$ 로 전해석함수이다. 연습문제 2.6을 보라. 연습문제 1.24에서 다항식의 증가율을 계산했던 결과를 인용하면

$$M, R > 0 \text{이 존재하여, } |z| > R \text{이면 } |p(z)| \geq M|z|^d \text{이다.}$$

콤팩트 집합  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ 에서 연속함수  $z \mapsto |p(z)|$ 는 양의 최솟값  $m$ 을 갖는다 ( $p$ 가 0이 될 수 없으므로). 따라서

$$|f(z)| \leq \max \left\{ \frac{1}{MR^d}, \frac{1}{m} \right\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

리우비유 정리에 의해  $f$ 는 상수함수가 되어야 한다. 따라서  $p$ 도 상수가 되어 차수  $d \geq 1$ 이라는 가정에 모순이다.  $\square$

예를 들면, 다항식  $p(z) = z^{1976} - 3z^{28} + \sqrt{399}$ 의 해가 복소평면 어딘가에 존재함을 보장할 수 있다.

**연습문제 3.30.** 전해석함수  $f$ 가 0에서 일정한 거리만큼 떨어져 있으면, (즉,  $\delta > 0$ 가 존재하여 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|f(z)| \geq \delta$ 를 만족한다)  $f$ 가 상수함수임을 보여라.

**연습문제 3.31.** 전해석함수  $f$ 의 치역이  $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r\}$ 과 만나지 않으면  $f$ 는 상수함수임을 보여라.

---

<sup>4</sup>이름과 달리 완전히 대수적으로만 이 정리를 증명하는 방법은 없다. 증명에는 실수의 완비성이 필요한데 이것은 대수적 개념이 아니기 때문이다. 또한, 현대대수에서 실제로 “근본적(fundamental)”인 것도 아니다. 이 이름은 붙여진 것은 대수학의 연구가 주로 실계수 또는 복소계수 다항식의 해와 관련되었던 시대이다.

**연습문제 3.32.** 전해석함수  $f$ 가 실수축과 허수축 양방향으로 주기성을 가지면 상수함수임을 보여라. 즉,  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ 이 존재하여 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에서  $f(z) = f(z + T_1) = f(z + iT_2)$ 를 만족한다.

**연습문제 3.33.** 전해석함수의 이론에서 다루는 고전적 주제는  $|z|$ 가 커짐에 따라  $|f|$ 가 어떻게 증가하는지에 따라 전해석함수  $f$ 를 규정하는 것이다. 예를 한가지 보자.

- (1) 전해석함수  $f$ 가 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|f(z)| \leq |\exp z|$ 를 만족하면,  $|c| \leq 1$ 인 상수  $c$ 가 존재하여  $f$ 는  $c \cdot \exp z$ 가 됨을 보여라. (따라서 상수함수가 아닌 전해석함수가 지수함수보다 빠르지 않게 증가한다면 실제로 지수함수가 된다)
- (2) “다항식은 지수함수보다 천천히 증가하지만  $p \neq \exp z$ ”라는 근거로 위의 결과가 옳지않다는 성급한 주장을 할 수 있다. 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $p$ 가  $|p(z)| \leq |\exp z|$ 를 만족한다면  $p \equiv 0$ 임을 보여 이 주장에서 논리적으로 틀린 부분을 찾아라.  
힌트:  $z = x < 0$ 인 경우를 생각하자.

**연습문제 3.34.**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 가 전해석함수라고 하자. 중심이  $0$ 이고 반지름  $R > 0$ 인 원을 반시계방향으로 한바퀴 도는 원형경로  $C$ 의 내부에 복소수  $a_1, a_2$ 가 있으며  $a_1 \neq a_2$ 라 가정하자.

- (1)  $\left| \int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{(R - |a_1|)(R - |a_2|)} \max_{z \in C} |f(z)|$ 를 증명하라.
- (2) 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} = \frac{\alpha}{z - a_1} + \frac{\beta}{z - a_2}$ 를 만족하는  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 를 구하라.
- (3) 적분  $\int_C \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz \stackrel{\text{Def}}{=} \int_C \frac{f(z)}{z - a_1} dz + \int_C \frac{f(z)}{z - a_2} dz$ 로 나타내고, 코시 적분공식을 이용하여 식을 간단히 정리하라.
- (4) 위 결과를 이용하여 리우비유 정리를 증명하라.

## 3.9 모레라 정리: 코시 적분정리의 역

코시 적분정리를 다시 돌아보자.

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 는 복소해석함수이고,
- (3)  $\Delta$ 는  $\Delta \subset D$ 의 임의의 원판이고,
- (4)  $\gamma$ 는  $\Delta$  내부의 조각적으로 매끄러운 닫힌 경로이면,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

이제 다음과 같이 그 역도 성립함을 보일 것이다.

**정리 3.8 (모레라 정리).**

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 는 연속함수이고,
- (3)  $D$ 에 속하는 모든 닫힌 사각형 경로  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

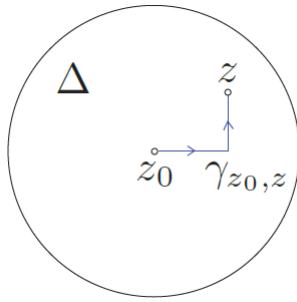
이면,

$f$ 는  $D$ 에서 복소해석함수이다.

다시 말하면, 특별한 경로적분들이 0이면  $f$ 가 복소해석함수라는 결론을 얻는다!

### 증명

$z_0 \in D$ ,  $\Delta$ 는 중심이  $z_0$ 이고  $\Delta \subset D$ 인 원판이고,  $\gamma_{z_0,z}$ 는  $z_0$ 에서 수평방향으로 먼저 진행한 후 수직방향으로 움직여  $z$ 에 도달하는 경로라고 하자.



$$F : \Delta \rightarrow \mathbb{C} \text{를 } F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) d\zeta, z \in \Delta \text{로 정의하자.}$$

이제  $F$ 가  $\Delta$ 에서 복소해석함수이고, 그 미분이  $f$ 가 됨을 보일 것이다. 이로써  $f$ 가  $\Delta$ 에서 복소해석함수임이 증명된다. 왜?  $f$ 가 복소해석함수의 도함수이므로 따름정리 3.6에 의해  $D$ 에서 복소해석함수이다.

$z \in \Delta$ 가 주어졌고,  $\epsilon > 0$ 이라 가정하자.  $f$ 가 연속이므로,  $\delta > 0$ 가 존재하여  $|w - z| < \delta$ 와  $w \in \Delta$ 를 만족할 때마다  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ 가 성립한다.

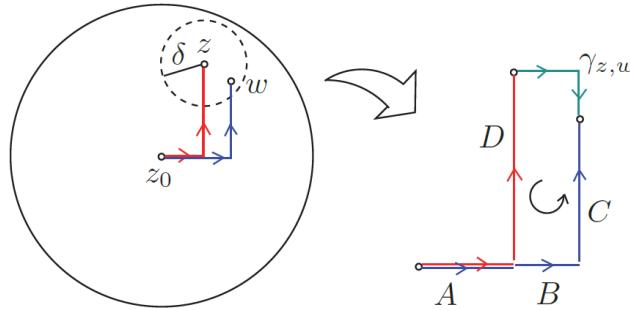
$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma_{z_0,w}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) d\zeta$$

이므로 닫힌 사각형 경로에서  $f$ 의 적분이 0임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta) d\zeta,$$

여기서  $\gamma_{z,w}$ 는  $z$ 에서 수평방향으로 먼저 진행한 후 수직방향으로 움직여  $w$ 에 도달하는 경로이다. 예를 들어 아래 그림의 적분 경로에서는 다음과 같이 계산된다 (피적분함수는 생략하고 쓰면).

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,w}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\zeta) d\zeta = \int_A + \int_B + \int_C - \left( \int_A + \int_D \right) \\ &= \underbrace{\int_B + \int_C + \int_{-\gamma_{z,w}}}_{=0} + \int_{-D} + \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$



따라서  $0 < |w - z| < \delta$ 에 대하여, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) &= \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{z,w}} f(\zeta) d\zeta - f(z) \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{z,w}} 1 d\zeta \\ &= \int_{\gamma_{z,w}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

여기서

$$\int_{\gamma_{z,w}} 1 d\zeta = w - z$$

를 얻기위해 복소해석함수 1에 대하여 경로적분의 기본정리를 사용하였다. 결론적으로 위의 결과와 경로  $\gamma_{z,w}$ 의 길이가

$$|\operatorname{Re}(w - z)| + |\operatorname{Im}(w - z)| \leq 2|w - z|$$

를 만족한다는 성질로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{w - z} \int_{\gamma_{z,w}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &< \frac{\epsilon}{|w - z|} (|\operatorname{Re}(w - z)| + |\operatorname{Im}(w - z)|) \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

이로써 증명이 끝난다. □

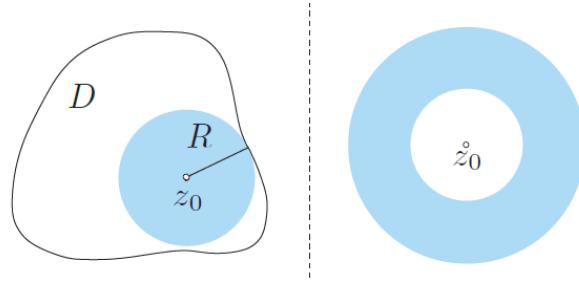
## 3.10 참고

정리 3.4의 증명은 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]의 설명을 거의 따랐다. 연습문제 3.3, 3.4, 3.12, 3.20, 3.27은 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]에서 가져왔다. 연습문제 3.10, 3.14, 3.18, 3.19, 3.22, 3.24는 [Needham (1997)]을 인용하였다. 연습문제 3.21은 [Rudin (1987)]에서, 연습문제 3.26, 3.33, 3.34는 [Flanigan (1972)]에서, 연습문제 3.28은 [Howie (2003)]에서 각각 가져왔다.

# Chapter 4

## 테일러 급수와 로랑 급수

이 장에서는 영역  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 는  $D$ 의 임의의 점에서 급수 전개가 가능하다는 근본적인 성질을 먼저 공부할 것이다. 다음 그림에서 왼쪽을 참고하라.



$$\text{테일러 급수: } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad \text{로랑 급수: } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$$

즉, 각각의  $z_0 \in D$ 에 대하여 다음을 만족하는  $R > 0$ 이 존재한다.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

역으로, 적당한  $R$ 에 대하여  $|z - z_0| < R$ 을 만족하는 두 개 이상의 점에서 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

가 수렴하면  $|z - z_0| < R$ 에서 복소해석함수이다. 이를 보이는 과정에서 복소해석함수에 대한 근본적인 성질들을 증명할 것이다.

(1) (일반화된) 코시 적분공식과 코시 부등식

(2) 해의 분류와 항등정리

(3) 최대절대값정리

이 장의 후반부에서는 급수와 유사하지만  $z - z_0$  항의 지수를 음의 정수까지 확장한 로랑 급수를 공부할 것이다. 이는 원환(특히 뚫린 원판)에 정의된 복소해석함수를 연구하는데 특히 유용하다, 앞의 그림에서 오른쪽을 참고하라. 끝으로 로랑 급수는 “특이점”의 분류와 실함수 적분의 계산에도 유용함을 살펴볼 것이다.

## 4.1 급수

실수열의 경우와 유사하게 주어진 복소수열  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 에 대하여 부분합 수열  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 을 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1, \\ s_2 &:= a_1 + a_2, \\ s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

**정의 4.1.**

(1) 복소수열  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 라 쓰고 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴한다고 정의한다.

(2) 복소수열  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 발산하면, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다고 정의한다.

(3) 실급수  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴하면, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 절대수렴한다고 정의한다.

복소수열이 수렴할 필요충분조건은 실수부와 허수부로 만든 수열이 각각 수렴하는 것이라는 연습문제 1.25의 결과로부터,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴한다.} \iff \text{실수열 } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n) \text{과 } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n) \text{가 수렴한다.}$$

따라서 실해석학의 결과를 아용하여 복소수열의 수렴성을 판정할 수 있다. 예를 들면, 다음 결과들을 쉽게 얻을 수 있는데 이는 연습문제로 남긴다.

**연습문제 4.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 임을 보여라.

**연습문제 4.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴하면,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴함을 증명하라.

**연습문제 4.3.**  $|z| < 1$ 이면  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 이 수렴하고  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ 임을 보여라.

**연습문제 4.4.**  $|z| < 1$ 이면  $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{(n-1)^2}$ 임을 보여라.

**연습문제 4.5.**  $\operatorname{Re}(s) > 0$ 인 모든 복소수  $s \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ 가 수렴함을 보여라. 그러면

$$s \mapsto \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

는 반평면  $\operatorname{Re}(s) > 1$ 에서 잘 정의된 함수가 되며, 이를 **리만 제타함수**라고 한다. 리만 제타함수와 정수론의 소수이론을 연결한 **오일러 곱셈공식**에 따르면, 소수를 증가하는 순서대로 나열한  $p_1 := 2 < p_2 := 3 < p_3 := 5 < \dots$ 를 무한 소수열로 정의할 때 다음이 성립한다.

$$\zeta(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^K \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

버나드 리만(1826-1866)은 제타함수  $\zeta$ 를 확장하여  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 의 복소해석함수로 정의할 수 있음을 보였다.  $\zeta$ 는  $-2, -4, -6, \dots$ 에서 “자명해(trivial zero)”를 갖지만 다른 해도 존재한다. 리만이 계산한 모든 비자명해(nontrivial zero)는 모두 직선  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 위에 있다. 이로부터 리만은 다음과 같이 예측(conjecture)하였는데 이는 여전히 수학계의 유명한 미해결 문제이다.

**추측 4.1** (리만가설). 리만 제타함수의 모든 비자명해는 직선  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$  위에 있다.

## 4.2 급수

### 4.2.1 제곱급수와 수렴영역

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 을 복소수열이라고 하자. 다음과 같은 표현을

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

복소수 변수  $z$ 의 제곱급수라고 한다 ( $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 을 계수들의 수열로 생각해도 된다). 이제 특정한 값을 급수의  $z$ 에 대입하는 경우를 생각해볼 수 있다. 그러면 어떤  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 제곱급수가 수렴할 수 있고, 다른 값에서는 발산할 수도 있다.

**예제 4.1.** 모든 다항식은 유한개의 항에서만 계수가 0이 아닌 제곱급수 꼴로 쓸 수 있다. 따라서 다항식은 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 수렴한다.

## 제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

는  $|z| < 1$ 에서 수렴한다.  $|z| \geq 1$ 에서 급수는 발산한다 (왜냐하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ 이 성립하지 않으므로).  $\diamond$

## 근본적인 질문으로

어떤  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 가 수렴하는가?

이 문제에 대한 답은 다음 정리에서 얻을 수 있다.

**정리 4.1.** 제곱급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 에 대하여 다음 두 가지 중 정확히 하나만 성립한다.

- (1) 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 절대수렴하거나
- (2) 음이 아닌 실수  $R$ 이 유일하게 존재하여 다음을 만족한다.
  - (a)  $|z| < R$ 인 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 이 절대수렴하고,
  - (b)  $|z| > R$ 인 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 는 발산한다.

위 정리에서 유일한  $R > 0$ 을 급수의 수렴반경이라 부른다. 급수가 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 수렴하면 무한대의 수렴반경을 가지며 “ $R = \infty$ ”라 쓴다.

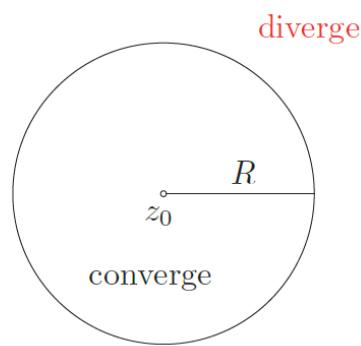


Fig. 4.1 Convergence region of a power series in  $\mathbb{C}$ .

Figure 4.1:  $\mathbb{C}$ 에 정의된 제곱급수의 수렴영역

원  $|z| = R$ 에서는 어떻게 될까? 복소 제곱급수는  $|z| = R$ 로 주어진 경계의 모든 점에서 발산하거나, 어떤 점에서는 발산하고 어떤 점에서는 수렴하거나, 아니면 경계의 모든 점에서 수렴할 수도

있다. 경계위의 각 점에 대하여 어떻게 되는지 답을 구하는 일반적인 방법은 없다. 특정한 제곱급수가 주어지면 그 특성에 따라 찾아 직접 확인해야 한다,

**증명** (정리 4.1)

$$S := \left\{ y \in [0, \infty) : \exists z \in \mathbb{C}, y = |z| \text{이고 } \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{이 수렴한다.} \right\}$$

라 정의하자.  $0 \in S$ 은 분명하기에  $S$ 는 공집합이 아니며 다음 두 가지 경우가 가능하다.

1°  $S$ 가 위로 유계가 아닌 경우: 이 경우는 수렴반경은 무한대가 됨을 보일 것이다.  $z \in \mathbb{C}$ 가 주어졌다고 하면,  $|z| < y$ 인  $y \in S$ 가 존재한다. 그런데  $y \in S$ 이므로  $y = |z_0|$ 이고

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

이 수렴하는  $z_0 \in S$ 가 존재한다. 이로부터  $n \rightarrow \infty$ 일 때 각 항이 0으로 수렴한다. 특히, 각 항은  $|c_n z_0^n| \leq M$ 으로 유계이다. 이제  $r := |z|/|z_0| (< 1)$ 로 잡으면

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left( \frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \leq M r^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

한편  $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n$ 이 수렴한다 ( $r < 1$ ). 비교판정법을 쓰면

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

은 절대수렴한다.  $z$ 는 우리가 임의로 선택할 수 있기 때문에 정리의 (1)이 성립한다.

2°  $S$ 가 위로 유계인 경우: 이 경우 수렴반경이  $\sup S$ 가 됨을 보일 것이다. 즉,

(a)  $|z| < \sup S$ 이면  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 이 절대수렴하고,

(b)  $|z| > \sup S$ 이면  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 는 발산한다.

$z \in S$ 가  $|z| < \sup S$ 를 만족하면 상한(supremum)의 정의에 따라,  $|z| < y$ 인  $y \in S$ 가 존재한다. 그러면 1°  $S$ 의 증명과정을 아래와 같이 반복할 수 있다.  $y \in S$ 이므로  $y = |z_0|$ 이고

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

이 수렴하는  $z_0 \in S$ 가 존재한다. 이로부터  $n \rightarrow \infty$ 일 때 각 항이 0으로 수렴한다. 특히, 각 항은  $|c_n z_0^n| \leq M$ 으로 유계이다. 이제  $r := |z|/|z_0| (< 1)$ 로 잡으면

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left( \frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \leq M r^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

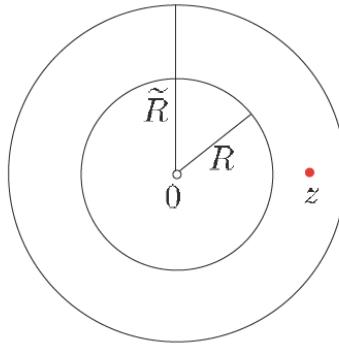
한편  $\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$ 이 수렴한다 ( $r < 1$ ). 비교판정법을 쓰면

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

은 절대수렴한다. 끝으로,  $z \in \mathbb{C}$ 가  $|z| > \sup S$ 를 만족하면,  $y := |z|$ 라 할 때  $y \in S$ 이고  $S$ 의 정의로부터

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

이 발산한다 (그렇지 않다면  $y \in S$ 를 만족해야 한다).



$R$ 의 유일성은 다음과 같이 증명된다.  $R$ 과  $\tilde{R}$ 이 정리의 조건을 만족하고  $R < \tilde{R}$ 이라 하자. 그러면

$$R < r := \frac{R + \tilde{R}}{2} < \tilde{R}.$$

$r < \tilde{R}$ 로부터  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ 이 수렴하고,  $R < r$ 로부터  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ 은 발산하며 모순이 된다.  $\square$

다음 결과를 이용하면 몇가지 경우의 수렴반경을 계산할 수 있다,

#### 정리 4.2. 제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

에 대하여 극한  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ 가 존재한다고 하자.

(1)  $L \neq 0$ 이면, 수렴반경은  $1/L$ 이고,

(2)  $L = 0$ 이면, 수렴반경은 무한대이다.

#### 증명

$L \neq 0$ 이라 하자. 그러면  $|z| < 1/L$ 인 모든  $z \neq 0$ 에 대하여  $q < 1$ 와 충분히 큰  $N$ 이 존재하여

$$\left| \frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} z \right| |z| \leq q < 1 \quad (n > N)$$

을 만족한다 (왜냐하면,

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} z \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|z| < 1$$

이므로  $q = (L|z| + 1)/2 < 1$ 로 잡으면 된다). 비율판정법을 적용하면 급수는 절대수렴한다.

$L = 0$ 이면 0이 아닌 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $q < 1$ 가 존재하여

$$\left| \frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} z \right| |z| \leq q < 1 \quad (n > N)$$

을 만족한다 (왜냐하면

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} z \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0|z| = 0 < 1$$

이므로  $q = 1/2 < 1$ 도 두면된다). 따라서 비율판정법을 다시 쓰면 급수는 절대수렴한다.

한편,  $L \neq 0$ 이고  $|z| > 1/L$ 이면,  $\left| \frac{c_{n+1}z}{c_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L|z| > 1$ 이므로 충분히 큰  $N$ 이 존재하여

$$\left| \frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} z \right| |z| > 1 \quad (n > N)$$

을 만족한다. 이 경우 비율판정법에 따라 급수는 발산한다.  $\square$

### 예제 4.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 는  $|z| < 1$ 에서 수렴하고  $|z| > 1$ 에서 발산한다.  $|z| = 1$ 이면

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 는 절대수렴한다. 즉, 원  $|z| = 1$  위의 모든 점에서 급수가 수렴한다. 한편 기하급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

은 원  $|z| = 1$  위의 어떤 점에서도 수렴하지 않는다.  $\diamond$

**연습문제 4.6.** 급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 에 대하여 극한  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 이 존재할 때 다음을 보여라.

(1)  $L \neq 0$ 이면 수렴반경은  $1/L$ 이다.

(2)  $L = 0$ 이면 수렴반경은 무한대이다.

**연습문제 4.7.** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ 은  $z = 0$ 에서만 수렴함을 보여라.

**연습문제 4.8.** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ 은 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 수렴함을 보여라.

**연습문제 4.9.** 다음 복소제곱급수의 수렴반경을 구하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{2012} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

## 4.2.2 복소해석함수의 제곱급수

다항식은 수렴반경이 무한대인 제곱급수로 간주할 수 있다. 즉, 모든  $\mathbb{C}$ 에서 수렴한다. 이 성질은 복소해석함수에서도 성립하는데 이는 우연이 아니다. 일반적으로 제곱급수

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

가  $|z| < R$ 에 대하여 수렴하면  $|z| < R$ 에서 복소해석함수가 되며 다음 등식이 성립한다.

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}.$$

(항의 개수가 유한한 경우, 즉, 다항식처럼 항별 미분이 가능할 것으로 예상한 결과와 같다)

**정리 4.3.**  $R > 0$ 이고  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 가  $|z| < R$ 에서 수렴한다고 하면  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$ .

### 증명

**단계 1.** 우선 다음 제곱급수가  $|z| < R$ 에서 절대수렴함을 보이자.

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^3 + \dots$$

$z$ 는 고정하자.  $|z| < r < R$ 을 만족하는  $r$ 을 잡으면, 가정으로부터

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

이 수렴한다. 따라서 모든  $n$ 에 대하여  $|c_n r^n| < M$ 을 만족하는 양수  $M$ 이 존재한다.  $\rho := |z|/r$ 라고 하면,  $0 \leq \rho < 1$ 이고,

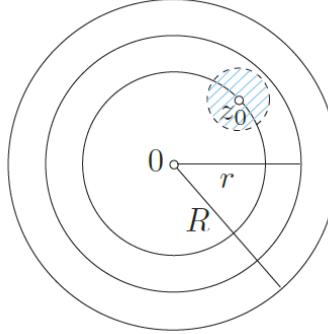
$$|nc_n z^{n-1}| = |c_n r^n| \cdot \frac{1}{r} \cdot n \left| \frac{z}{r} \right|^{n-1} \leq \frac{M n \rho n - 1}{r}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ 은  $(1/(1-\rho)^2$ 으로) 수렴한다 (연습문제 4.4 참고). 따라서 비교판정법에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ 은 절대수렴한다.

단계 2. 이제  $|z_0| < R$ 에 대하여  $f'(z_0) = g(z_0)$ 임을 보이자. 즉,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right) = 0.$$

단계 1에서 했던 것처럼  $|z_0| < r < R$ 을 만족하는  $r$ 을 잡으면,  $z \rightarrow z_0$ 로부터  $|z| < r$ 도 성립한다.



$\epsilon > 0$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n r^{n-1}$ 이 절대수렴하므로 다음을 만족하는  $N$ 이 존재한다.

$$\sum_{n=N}^{\infty} |nc_n r^{n-1}| < \frac{\epsilon}{4}.$$

이제부터  $N$ 을 고정하자.  $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n)$ 이므로,  $z \neq z_0$ 에 대하여

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}).$$

따라서,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1}).$$

이 급수에서 처음  $N - 1$ 개 항의 합을  $S_1$ 이라 하고 (즉,  $n = 1$ 에서  $n = N - 1$ 까지),  $S_2$ 를 나머지 항의 합이라고 하자. 그러면,  $|z|, |z_0| < r$ 로부터

$$|S_2| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \left( \underbrace{r^{n-1} + r^{n-1} + \cdots + r^{n-1}}_{n\text{개 항}} + nr^{n-1} \right) = \sum_{n=N}^{\infty} 2n |c_n| r^{n-1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

한편,

$$S_1 = \sum_{n=1}^N c_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})$$

는  $z$ 의 다항식이며 극한은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} S_1 &= \sum_{n=1}^N c_n (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^N c_n (nz_0^{n-1} - nz_0^{n-1}) = 0.\end{aligned}$$

따라서  $|z - z_0| < \delta$ 이면,  $|S_1| < \epsilon/2$ 가 되는 양수  $\delta$ 가 존재한다. 이제  $|z| < r$ 이고  $0 < |z - z_0| < \delta$ 에 대하여

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq |S_1| + |S_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

이로써  $f'(z_0) = g(z_0)$ 가 증명된다.  $\square$

**참고 4.1.**  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 실수열일 때, 실제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

를 생각해보자. 실해석의 결과로부터 어떤  $R > 0$ 이 존재하여 이 제곱급수는 구간  $(-R, R)$ 에서 수렴하고  $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$ 에서 발산한다. 정리 4.1과 4.3로부터 실변수  $x$ 를 복소변수  $z$ 로 바꾸면 실제곱급수의 결과가 복소평면의 원판  $|z| < R$ 에 정의된 복소해석함수로 확장됨을 알 수 있다. 따라서 실해석함수(즉, 국소적으로 제곱급수 전개를 갖는 실변수함수)는 복소해석함수를 실수축에 제한한 것으로 볼 수 있다. 이 결과로 실해석학과 복소해석학의 세계를 연결하는 상호작용을 엿볼 수 있다(우리는 코시-리만 방정식을 공부하면서 이미 이러한 사례를 살펴 본 바 있다).

앞의 결과를 반복하면 다음을 쉽게 얻는다.

**파름정리 4.1.**  $R > 0$ 이고,  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 이  $|z| < R$ 에서 수렴한다고 하자. 그러면,  $k \geq 1$ 에 대하여

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) c_n z^{n-k}. \quad (|z| < R) \quad (4.1)$$

특히,  $n \geq 0$ 에 대하여,  $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ .

### 증명

직접 계산하여 바로 얻을 수 있는 결과이며, 두번째 결과를 얻기 위해 식 (4.1)에  $z = 0$ 을 대입하면

$$f^{(k)}(0) = k(k-1) \cdots 1 c_k + z \sum n = k + 1 \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n z^{n-k-1} \Big|_{z=0} = k! c_k$$

이며,  $f(0) = c_0$ 이다.  $\square$

이는 0을 중심으로 전개한 제곱급수에 한정된 결과가 아니다. 복소수  $z_0$ 를 택하여 제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

를 생각하면, 정리 4.1과 4.3으로부터 다음 결과를 바로 얻는다.

**따름정리 4.2.** 제곱급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 에 대하여 다음 두 가지 중 정확히 하나만 성립한다.

- (1) 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 절대수렴하거나
- (2) 음이 아닌 실수  $R$ 이 유일하게 존재하여 다음을 만족한다.

(a)  $|z - z_0| < R$ 인 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 이 절대수렴하고,

(b)  $|z - z_0| > R$ 인 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 는 발산한다.

**따름정리 4.3.**  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ 이고,  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 이  $|z - z_0| < R$ 에서 수렴한다고 하자.

그러면,  $k \geq 1$ 에 대하여

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k}. \quad (|z - z_0| < R)$$

특히,  $n \geq 0$ 에 대하여,  $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ .

**참고 4.2 (계수의 유일성).** 중심이  $z_0$ , 반지름  $R > 0$ 인 열린원판에서 두 제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad \text{와} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z - z_0)^n$$

가 모두 같은 함수  $f$ 로 수렴한다고 하자. 그러면 위의 따름정리로부터 모든  $n \geq 0$ 에 대하여

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \tilde{c}_n.$$

**연습문제 4.10.**  $|z| < 1$ 일 때,  $1^2 + 2^2z + 3^2z^2 + 4^2z^3 + \cdots$ 의 값은?

**연습문제 4.11.** 제곱급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 에 대하여 다음 문장의 참, 거짓을 판정하라.

- (1) 급수가 수렴하는 복소수  $z$ 의 집합은  $\{0\}$ 이거나, 유한한 반지름을 갖는 열린원판, 또는 복소평면 전체가 되며 다른 경우는 생길 수 없다.
- (2) 제곱급수가  $z = 1$ 에서 수렴하면  $|z| < 1$ 에서 수렴한다.

- (3) 제곱급수가  $z = 1$ 에서 수렴하면 원  $|z| = 1$ 의 모든 점에서 수렴한다.
- (4) 제곱급수가  $z = 1$ 에서 수렴하면  $z = -1$ 에서 수렴한다.
- (5) 제곱급수가 원점이 중심이고 반지름이 유한한 열린원판에서 수렴하면 원판의 경계(즉, 원판을 둘러싸는 원)의 전체 또는 일부에서도 수렴할 수 있으나 그 이외의 점에서는 수렴할 수 없다.
- (6) 수렴하는 범위가 닫힌원판  $|z| \leq 1$  전체인 제곱급수가 존재한다.
- (7) 제곱급수가  $z = i$ 에서 발산하면,  $z = 1 + i$ 에서도 발산한다.

### 4.3 테일러 급수

앞 절에서 수렴반경이  $R$ 인 복수제곱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

은 영역  $|z - z_0| < R$ 에서 복소해석함수가 됨을 살펴보았다. 이 절에서는 역으로  $f$ 가 원판  $|z - z_0| < R$ 에서 복소해석함수이면

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

임을 보일 것이다. 여기서 계수  $c_n$ 은  $f$ 로부터 결정된다. 따라서 영역  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 는 임의의 점  $z_0 \in D$ 의 근방에서 제곱급수 전개를 갖는다.

**정리 4.4.**  $f \upharpoonright D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이면,  $z \in D(z_0, R)$ 에 대하여  $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots$ 이다. 여기서,  $n \geq 0$ 에 대하여

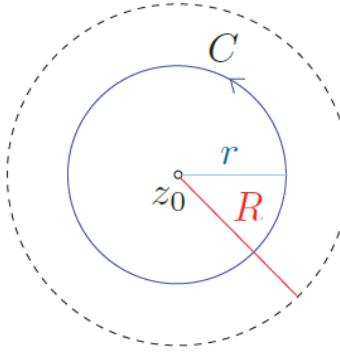
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

이고,  $C$ 는 중심이  $z_0$ 이고 반지름  $r$  ( $0 < r < R$ )인 원을 반시계방향으로 도는 원이다.

#### 증명

$z \in D(z_0, R)$ 이라 하자. 우선  $|z - z_0| < r < R$ 인  $r$ 을 잡고 코시 적분공식을 적용하면

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} d\zeta$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta.$$

$w := \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$  라 하면,  $|w| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$  이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} &= \frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1 - w} \\ &= 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(\zeta - z_0)^{n-1}} + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n-1}(\zeta - z)}. \end{aligned}$$

이 결과를 종합하면

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z_0} + \cdots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(\zeta - z_0)^n} + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} \right) d\zeta \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \end{aligned}$$

여기서

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} d\zeta.$$

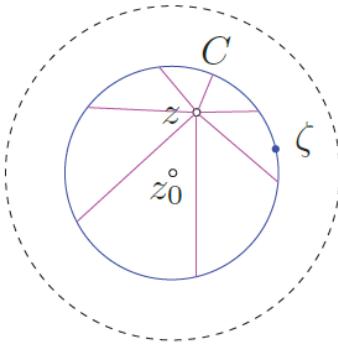
이제  $n \rightarrow \infty$  일 때,  $R_n(z)$  가 0 으로 수렴하는 것을 보이면 증명이 끝난다. 콤팩트 집합의 연속 실함수이므로  $|f|$  는 원 위에서 유계이다. 즉, 원 위의 모든  $\zeta \in C$  에 대하여  $|f(\zeta)| < M$  을 만족하는 상수  $M > 0$  이 존재한다 (약간 왜곡하면 경로  $C$  를 생각할 때, 점  $C(t)$  의 집합 ( $t \in [0, 2\pi]$ ) 으로 간주할 수 있다). 또한  $\zeta \in C$  에 대하여

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \right| = \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

한편  $\zeta \in C$  에 대하여  $1/|\zeta - z|$  는 어떻게 되는가? 어떤 수로 유계임을 보일 수 있는가? 아래 그림을 보면 실제로 원  $C$  와  $z$  의 거리의 역수로 유계이다.

$$|\zeta - z| = |\zeta - z_0 - (z - z_0)| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = r - |z - z_0| \text{ 이므로}$$

$$|R_n(z)| \leq \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \frac{M}{r - |z - z_0|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



따라서 제곱급수  $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots$ 는  $f(z)$ 로 수렴한다. 지금까지 결과로

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

이  $|z - z_0| < r < R$ 인  $r$ 에서 성립한다는 것만을 보였다. 하지만 코시 적분정리를 사용하면 적분이  $r$ 에 무관함을 알 수 있고  $r \in (0, R)$ 의 다음을 만족하도록 선택할 수 있다.

- (1)  $\frac{f(\cdot)}{(\cdot - z_0)^{n+1}}$ 은  $0 < |z - z_0| < R$ 인 뚫린 원판  $D_*(z_0, R)$ 에서 복소해석함수이다.
- (2)  $C$ 의 외의 다른 경로로 중심이  $z_0$ , 반지름  $\tilde{r} \in (0, R)$ 인 원  $\tilde{C}$ 를 잡으면  $C$ 와  $\tilde{C}$ 는  $D_*(z_0, R)$ 에서 호모토피하다.

이로써 증명이 완성된다. □

한편 정리 4.3으로부터

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

로 정의하면  $n \geq 0$ 에 대하여  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 이다. 이상에서 적분으로 주어진 계수  $c_n$ 에 대한 다른 표현식을 얻었다. 하지만 임의의 원판에서 제곱급수를 전개할 때 계수는 유일하게 결정된다. 따라서 두 표현식은 같은 결과가 된다는 것을 기억하면 다음 결과를 얻는다.

#### 파름정리 4.4. (테일러<sup>1</sup> 급수)

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수이고,

---

<sup>1</sup>이 급수 전개에 대하여 연구한 학자 중 실해석 함수 관점에서 연구한 브룩 테일러(Brook Taylor, 1685-1731)의 이름이다.

(3)  $z_0 \in D$  이면,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots, \quad |z - z_0| < R.$$

여기서  $R$ 은  $z_0$ 를 중심으로 하는 원판 중 영역  $D$ 에 속하는 가장 큰 열린집합의 반지름이다. 또한,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (4.2)$$

단,  $C$ 는  $z_0$ 를 중심으로 하는 반지름  $r$  ( $0 < r < R$ )인 원을 반시계방향으로 회전하는 경로이다.

식 (4.2)은 (일반화된) 코시 적분공식이라 불린다. 우리는 앞서  $n = 0$ 인 경우(정리 3.4)와  $n = 1$ 인 경우(정리 3.6의 증명)에 대하여 증명했었다. 여기에 더하여 위 결과로부터 임의의 점  $w \in \Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에 대하여 다음 식을 얻는다.

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz.$$

이는 코시 적분정리로부터 얻어지는데, 우선  $w$ 를 중심으로 하는 작은 원  $C_\delta$ 에 대하여 위 식을 증명한 다음 경로  $C$ 와  $C_\delta$ 가  $\Delta \setminus \{w\}$ -호모토피이며,  $f(\cdot)/(\cdot - w)^{n+1}$ 이  $\Delta \setminus \{w\}$ 에서 복소해석함수임을 이용하여 보일 수 있다.

### 증명

정리 4.4로부터, 중심이  $z_0$ 이고  $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 가  $D$ 에 포함되는 가장 큰 열린원판이 되도록  $R$ 을 선택한다.

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots, \quad z \in D(z_0, R). \quad (4.3)$$

또한,  $n \geq 0$ 에 대하여

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

여기서  $C$ 는  $z_0$ 를 중심으로 하는 반지름  $r$  ( $0 < r < R$ )인 원을 반시계방향으로 회전하는 경로이다. 한편, 따름정리 4.3에 의하여 제곱급수는 무한번 미분가능하고,  $n \geq 0$ 에 대하여

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = c_n$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. □

요약하면,  $f$ 가 영역  $|z - z_0| < R$ 에 정의된 복소해석함수이면,  $|z - z_0| < R$ 에서

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

여기서  $C(t) = z_0 + r \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )이고  $r$ 은  $0 < r < R$ 을 만족하는 임의의 실수이다.

**예제 4.3.** 지수함수  $f, z \mapsto f(z) := \exp z$ 는 전해석함수이다. 따라서 적당한 계수  $c_n$ 에 대하여

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

로 쓸 수 있다. 다음 식으로 주어진 계수들을 실제로 구하면?

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n \geq 0$$

$$\frac{d}{dz} \exp z = \exp z \circ | \text{and } f^{(n)}(0) = 1 \circ | \text{므로}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

◇

**예제 4.4.**  $f(z) = \text{Log}(z)$ 로 정의된 함수  $f$ 는  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 복소해석함수이다. 이 잘린 평면에서  $z_0 = 1$ 을 중심으로 가장 큰 열린원판을 잡으면  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ 이다.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{z_0^n} = (-1)^n (n-1)!$$

이므로  $|w| < 1$ 에 대하여

$$\text{Log}(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n w^n}{n} + \cdots$$

를 얻는다. ◇

**연습문제 4.12.**  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 등식을 보여라.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots.$$

**연습문제 4.13.**  $z_0 = 1$ 을 중심으로 하여 다항식  $z^{-} z^4 + z^2 - 1$ 의 테일러 급수를 구하라.

**연습문제 4.14.** 함수  $f$ 가 다음과 같을 때 테일러 급수  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 의 계수  $c_n$ 을 구하라.

- (1)  $f(z) = \int_{\gamma_{0z}} \exp(\zeta^2) d\zeta$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), 단,  $\gamma_{0z}$ 는 0에서  $z$ 까지 연결하는 직선 경로이다.  
 힌트:  $f'(z) = \exp(z^2)$ .

- (2)  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ).  
 힌트:  $|z| < 1$ 에 대하여,  $\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - \cdots$

일반화된 코시 적분정리에서 얻어지는 결과를 더 살펴보자.

**따름정리 4.5** (코시 부등식).

(1)  $f$ 가  $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에 정의된 복소해석함수이고,

(2) 모든  $z \in D(z_0, R)$ 에 대하여  $|f(z)| \leq M$ 이면,

$$n \geq 0 \text{에 대하여 } |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

**증명**

$C$ 가  $z_0$ 를 중심으로 하고 반지름이  $r < R$ 인 원이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \max_{z \in C} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}. \end{aligned}$$

극한  $r \nearrow R$ 을 취하면 원하는 결과를 얻는다.  $\square$

**연습문제 4.15.**  $f$ 가 전해석함수이고 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|f(z)| \leq M|z|^n$ 을 만족하는  $M > 0$  과 정수  $n \geq 0$ 가 존재한다고 가정하자. 코시 부등식을 이용하여 모든  $z$ 에 대하여  $f^{(n+1)}(z) = 0$ 을 증명하고  $f$ 는  $n$ 차 이하 다항식임을 보여라.  $n = 0$ 일 때는 어떤 결론을 얻는가?

**연습문제 4.16.**  $C$ 가 원점을 중심으로 반지름 1인 원을 반시계방향으로 도는 원형 경로일 때,  $\int_C \frac{\sin z}{z^{2013}} dz$  를 구하라.

## 4.4 근의 분류

영역  $D$ 에서  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수라고 하자. 항등적으로 0이 아닌 함수  $f$ 의 근은 어떤 모습 일까? ( $f(z_0) = 0$ 를 만족하는 점  $z_0 \in D$ 를  $f$ 의 **근(zero)**이라 한다) 이 절에서는 이 문제의 답으로 근들이 “고립”되어 있음을 보일 것이다. 연속함수의 경우는 이러한 일이 일어나지 않는다. 연속함수는 복소해석함수만큼 엄격한 조건을 갖지 않기 때문에 의 근이 고립될 필요가 없다.

**예제 4.5.**

(1)  $\exp z$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 근을 갖지 않는다. 실제로, 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$ 이다.

(2)  $\cos z - 3$ 은  $\mathbb{C}$ 에서 무한이 많은 근  $2\pi n \pm i \log(3 + 2\sqrt{2})$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )을 갖는다. 모든 근은 수평선에 분포하고 인접한 근과의 간격은  $2\pi$ 이다. 계산방법은 연습문제 1.38을 참고하라.

(3) 다항식  $p(z) = (z+1)^3 z^9 (z-1)^9$ 은  $-1, 0, 1$ 에서 근을 갖는다. ◇

$p$ 가 항등적으로 0이 아닌 다항식이고  $p(z_0) = 0$ 이면 나눗셈정리에 따라

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

을 만족하는 다항식  $q$ (몫)가 존재한다 (즉, 나머지가 0이다). 이제 다음 두 가지 가능성을 생각할 수 있다.

1°  $q(z_0) \neq 0$ . 그러면  $z_0$ 는  $p$ 의 고립 근이다.

2°  $q(z_0) = 0$ . 그러면  $p$ 를  $q$ 로 바꾸어 위 과정을 반복한다.

궁극적으로 적당한  $m \geq 1$ 에 대하여  $p(z) = (z - z_0)^m q(z)$ 이고  $q(z_0) \neq 0$ 에 도달한다. 이 때  $m$  을 ( $p$ 의 근)  $z_0$ 의 중복도(multiplicity) 또는 차수(order)라 부른다. 아래 명제 4.1에서 복소해석함수  $f$  에서도 (다항식  $p$ 를 대체하여) 같은 종류의 결과를 얻을 수 있음을 보일 것이다. 다만, 결과가 다항식  $q$  대신 복소해석함수  $g$ 로 마무리된다는 것만 다르다. 이는 아주 놀라운 결과는 아니다. 왜냐하면, 제곱급수는 다항식으로부터 유추될 수 있고 임의의 복소해석함수는 국소적으로 제곱급수 전개가 가능하기 때문이다. 우선 다음 정의를 만들자.

**정의 4.2.**  $D$ 가 영역이고,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수라고 하자.  $f(z_0) = 0$ 이면 점  $z_0 \in D$  를  $f$ 의 근이라고 한다. 다음 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를  $m \in \mathbb{N}$ 이 존재하면,

(1)  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ 이고,

(2)  $f(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ .

$z_0$ 는  $f$ 의  $m$  중근이라 한다 (관습적으로  $f^{(0)} := f$ 라 한다).

그러면, 복소해석함수의 근의 분류에 대한 다음 결과를 얻는다.

**명제 4.1 (근의 분류).**

(1)  $D$ 가 영역이고,

(2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,

(3)  $z_0 \in D$ 가  $f$ 의 근이라고 하자.

그러면, 정확히 다음 두 가지 가능성이 있다.

1° 양수  $R$ 이 존재하여  $|z - z_0| < R$ 인 모든  $z$ 에 대하여  $f(z) = 0$ .

2°  $m \in \mathbb{N}$ 이 존재하여  $z_0$ 가  $f$ 의  $m$ 중근이다. 또한,  $g(z_0) \neq 0$ 이고 모든  $z \in D$ 에 대하여  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 인 복소해석함수  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재한다.

2°의 경우  $g$ 가 연속이고  $g(z_0) \neq 0$ 이므로  $g$ 는  $z_0$ 를 중심으로 하는 작은 원판  $\Delta$ 에서 0이 아니며,  $z \in \Delta \setminus \{z_0\}$ 에서  $f(z) = (z - z_0)^m g(z) \neq 0$ 이므로  $f$ 는  $\Delta \setminus \{z_0\}$ 에서 0이 아니다. 따라서  $z_0$ 는  $\Delta$ 에서  $f$ 의 유일한 근이다. 즉, 고립된 근이다.

한편, 앞으로 보게 될 항등정리에 따르면 1°의 경우는 영역  $D$  전체에서  $f \equiv 0$ 이다.

### 증명

중심이  $z_0$ 이고 반지름  $R > 0$ 인 원판에서  $f$ 의 제곱급수 전개를 하면,

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots, \quad (|z - z_0| < R).$$

$f(z_0) = 0$ 이므로,  $c_0 = 0$ 임을 바로 알 수 있다. 이제 정확히 두 가지 가능성성이 있다.

1° 모든  $c_n$ 이 0이다. 그러면,  $|z - z_0| < R$ 에서  $f(z) = 0$ 이다.

2°  $c_m \neq 0$ 인 가장 작은  $m \geq 1$ 이 존재한다. 그러면  $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ 이고,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \geq 0$$

로부터  $z_0$ 는  $m$  중근이다. 또한, 제곱급수 전개로부터  $|z - z_0| < R$ 에 대하여

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - z_0)^k. \quad (4.4)$$

따라서  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ 를

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}, & z \neq z_0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - z_0)^k, & |z - z_0| < R \end{cases}$$

로 정의하면, 식 (4.4)로부터 두 가지 조건을 모두 만족하는 경우 두 가지 경우의 계산결과가 일치하므로  $g$ 는 잘 정의된다. 추가적으로 다음 결론을 얻는다.

- (1)  $g$ 는  $D$ 에서 복소해석함수이다.  $z \neq z_0$ 에서  $f$ 와  $1/(z - z_0)^m$ 이  $D \setminus \{z_0\}$ 에서 복소해석함수이므로  $|z - z_0| < R$ 에 대하여 제곱급수로 정의된  $g$ 는 복소해석함수이다.
- (2)  $g(z_0) = c_m \neq 0$  ( $m$ 의 정의에서)
- (3) 식 (4.4)로부터  $z \in D \setminus \{z_0\}$ 에 대하여  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ . 한편,  $z = z_0$ 이면 양변이 0이 된다. 따라서 모든  $z \in D$ 에 대하여  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 이 성립한다.

- (4)  $z_0$ 는  $m$  중근이다. 왜냐하면, 모든  $n$ 에 대하여  $c_n = f^{(n)}(z_0)/n! \neq 0$ 이고,  
 $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$ .

이상에서 정리가 증명된다.  $\square$

#### 예제 4.6.

- (1)  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $n\pi$ 는  $\sin z$ 의 근이다.  $\sin z$ 를 실수축에 한정하면  $n\pi$ 의 근방에서  $\sin z$ 가 항등적으로 0이 아님을 알 수 있다.  $\sin z$ 의 근으로서  $n\pi$ 는 몇 중근인가?  $\sin' z = \cos z \neq 0$ 이고,  
 $\cos z \Big|_{z=n\pi} = (-1)^n \neq 0$ 므로  $n\pi$ 는  $\sin z$ 의 근이지만 중근이 아니다.
- (2)  $\exp(0^2) - 1 = 1 - 1 = 0$ 으로  $\exp(z^2) - 1$ 은 근으로 0을 갖는다. 몇 중근일까?

$$\exp(z^2) = 1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{3!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

이고,  $\exp(z^2) - 1 = z^2 g(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), 여기서  $g(z) := \frac{1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$ .  $g$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 수렴하는 제곱급수로 전개되므로 전해석함수이다. 또한,  $g(0) = 1 \neq 0$ 이다. 따라서 0은  $\exp(z^2) - 1$ 의 2중근이다. 다른 방법으로 보일 수도 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\exp(z^2) - 1) \Big|_{z=0} &= (\exp(z^2)) \cdot 2z \Big|_{z=0} = 0, \\ \frac{d^2}{dz^2}(\exp(z^2) - 1) \Big|_{z=0} &= (\exp(z^2)) \cdot 2 \Big|_{z=0} + (\exp(z^2)) \cdot (2z^2) \Big|_{z=0} \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

$\exp(z^2) - 1$ 의 근으로서 0은 이중근이다.

**연습문제 4.17.**  $D$ 가 영역이고,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $R > 0$ ,  $z_0 \in D$ 라고 하자. 복소해석함수  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $g(z_0) \neq 0$ 이고  $|z - z_0| < R$ 에 대하여  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 면,  $z_0$ 가  $f$ 의  $m$  중근임을 증명하라.

**연습문제 4.18.** 함수  $f$ 를 다음과 같이 정의할 때  $f$ 의 근  $z_0$ 의 차수는?

- (1)  $z_0 = i$ ,  $f(z) = (1 + z^2)^4$ .
- (2)  $z_0 = 2n\pi i$  ( $n$ 은 정수),  $f(z) = \exp z - 1$ .
- (3)  $z_0 = 0$ ,  $f(z) = \cos z - 1 + \frac{1}{2}(\sin z)^2$ .

**연습문제 4.19.**  $f$ 가 원  $\gamma$ 를 내부에 포함하는 원판에서 복소해석함수라고 하자.  $f$ 의 근  $z_0$ 의 차수는 1이고,  $z_0$ 는 원  $\gamma$ 의 내부에 있다. 다음을 증명하라.

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

**연습문제 4.20.**  $f$ 가 영역  $D$ 에서 복소해석함수이고  $z_0 \in D$ 에서 차수  $m$ 의 근을 갖는다고 하자. 함수  $z \mapsto (f(z))^2$ 은 차수  $2m$ 의 근을 가지며,  $f'$ 은 차수  $m-1$ 의 근을 가짐을 보여라.

**연습문제 4.21.** 복소 연속함수의 경우는 명제 4.1의 복소해석함수에 대한 이분법적 결론을 적용할 수 없다.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 0이 고립된 근도 아니며  $f$ 가 0을 포함하는 작은 원판에서 항등적으로 0이 되지 않는 예를 보여라.

## 4.5 항등정리

이 절에서는 복소해석함수의 엄밀성을 다시 강조하는 항등정리 학습한다. 개략적으로 말하자면 항등적으로 0이 아닌 복소해석함수는 정의역에서 근의 집적점(accumulation)을 갖지 않는다.

**정리 4.5.**

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,
- (3)  $f$ 의 서로 다른 근으로 이루어진 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid z_* \in D$ 로 수렴한다면,

$f$ 는  $D$ 에서 항등적으로 0이다.

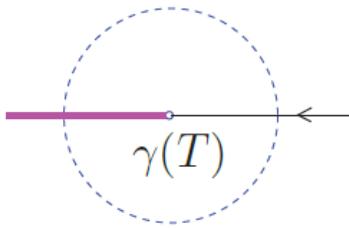
### 증명

우선  $z_*$ 도  $f$ 의 근이 됨을 보이자.  $f$ 의 연속성으로부터

$$f(z_*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$z_*$ 를 중심으로 반지름  $r > 0$ 인 어떤 원판  $\Delta$ 에서  $f \equiv 0$ 임을 보아자. 그렇지 않다면,  $z_*$ 가 차수  $m$ 의 근이라고 하자.  $z \in \Delta$ 에 대하여  $f(z) = (z - z_*)^m g(z)$ 이고  $g(z) \neq 0$ 이다. 하지만  $n$ 을 크게 잡을 수으면  $\Delta$ 에 속하게 되고  $0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^m g(z_n) \neq 0$ 가 되어 모순이다.

다음으로  $D$ 에서  $f \equiv 0$ 임을 보이자. 어떤 점  $w \in D$ 에서  $f(w) \neq 0$ 라고 가정하자. 그러면  $z_*$ 와  $w$ 를 잇는 경로  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ 를 만들 수 있다 ( $\gamma(0) = z_*$ ,  $\gamma(1) = w$ ). 집합  $S := \{t \in [0, 1] : f(\gamma(t)) = 0, 0 \leq t \leq t\}$ 의 상한을  $T := \sup S$ 라 하자.  $S$ 가 공집합이 아니기 때문에 (적어도 0은  $S$ 에 속한다)  $\sup S$ 가 존재함을 알 수 있고  $S$ 는 위로 유계이다 (1을 넘지 못한다). 그렇다면  $T$ 의 값은? 변수  $t$ 를 시간이라고 생각하여 시간  $t = 0$ 에  $z_*$ 에서 출발하여 경로  $\gamma$ 를 따라 움직여 시간  $t = 1$ 에  $w$ 에 도착한다고 하면,  $T$ 는 경로를 따라 움직일 때 함수  $f$ 의 값이 0을 유지하는 가장 큰 시간을 의미한다.  $T = 1$ 이라면 증명이 끝난다. 왜냐하면  $f$ 의 연속성에서  $f(w) = f(\gamma(T)) = 0$ 이기 때문이다. 따라서  $T < 1$ 이라 하자. 그러면 연속성에서  $f(\gamma(T)) = 0$ 이다.



그런데  $\gamma(T)$ 는  $f$ 의 고립된 근이 아니므로  $\gamma(T)$ 를 중심으로 적당한 반지름  $\delta$ 의 원판에서  $f(z) = 0$ 이다. 즉,  $t$ 를  $T$ 에 가깝게 잡아  $|\gamma(t) - \gamma(T)| < r$ 을 만족하면  $T$ 보다 큰  $t$ 에 대하여  $f(\gamma(t)) = 0$ 이 된다. 이는  $T$ 의 정의에 모순이다. 따라서  $T$ 는 1보다 작을 수 없어 증명이 끝난다.  $\square$

**예제 4.7.**  $\cos z$ 와  $\sin z$ 의 정의로부터 모든 복소수  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ 임을 이미 알고 있다. 여기서는 정리의 결과를 이용하여 이를 증명해보자.  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $f(z) = (\cos z)^2 + (\sin z)^2 - 1$ 로 정의하자. 그러면  $f$ 는 전해석함수이다. 또한 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $f(x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 - 1 = 0$ 이다. 이제 정리를 적용하면  $\mathbb{C}$ 에서  $f \equiv 0$ 임을 알 수 있다.

정리로부터 다음 결과를 바로 얻는다.

**따름정리 4.6 (항등정리).**

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,
- (3)  $D$ 의 서로 다른 점으로 만든 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \circ | z_* \in D$ 로 수렴하고,  $f(z_n) = g(z_n)$ 이면,

모든  $z \in D$ 에 대하여  $f(z) = g(z)$ 이다.

### 증명

$z \in D$ 에 대하여  $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $h(z) = f(z) - g(z)$ 로 정의하고  $z_n$ 을 복소해석함수  $h$ 의 근이라 하자. 정리의 결과로부터  $h$ 는  $D$ 에서 항등적으로 0이 되므로 증명이 끝난다.  $\square$

**예제 4.8.** 함수  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\exp z = \exp(x + iy) := e^x(\cos y + i \sin y), \quad z + x + iy \in \mathbb{C}$$

는 전해석함수이고,  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $\exp x = e^x$ 를 만족한다. 다시 말하면,  $\exp$  함수는 실수에 정의된 지수함수를 복소수 전해석함수로 확장한 것이다. 전해석함수로 확장하는 다른 방법이 있을까? 그렇지 않다는 것을 보이자.  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $g(x) = e^x$ 를 만족하는 전해석함수라고 가정하자. 그러면,

$$\text{모든 } x \in \mathbb{R} \text{에 대하여 } \exp x = g(x).$$

특히,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

이고  $1/n \rightarrow 0 \in \mathbb{C}$ 이다. 따라서 항등정리에 의해 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $\exp z = g(z)$ 이다. 따라서 실수로 한정했을 때  $e^x$ 가 되는 전해석함수는 유일하다. 이 결과는 1.4.1의 복소 지수함수가 자연스러운 정의임을 설명해준다. ◇

**연습문제 4.22.** 항등정리를 이용하여 모든  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\cos(z_1 + z_2) = (\cos z_1)(\cos z_2) - (\sin z_1)(\sin z_2)$$

이 성립함을 보여라.  $z_1, z_2$ 가 실수인 경우에 성립함을 활용하라.

**연습문제 4.23.** 영역  $D$ 에 정의된 복소해석함수의 집합을  $\text{Hol}(D)$ 라 하자. 그러면  $z \in D$ 와  $f, g \in \text{Hol}(D)$ 에 대한 점별 연산

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \\ (f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$$

에 대하여  $\text{Hol}(D)$ 가 가환환(commutative ring)이 됨을 쉽게 확인할 수 있다. (가환환  $R$ 은 두 연산  $+$ 와  $\cdot$ 를 가지며  $(R, +)$ 는 가환군이고  $\cdot$ 는 교환법칙, 결합법칙을 만족하며 분배법칙도 성립한다. 즉,  $a, b, c \in R$ 에 대하여  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 이다.)  $\text{Hol}(D)$ 가 정역(integral domain)이 됨을 보여라. 즉, 영인자(zero divisor)를 갖지 않는다. 다시 말해  $f, g \in \text{Hol}(D)$ 가  $f \cdot g = 0$ 를 만족하면  $f = 0$ 이거나  $g = 0$ 이다.

$\text{Hol}(D)$  대신  $D$ 에 정의된 복소 연속함수의 집합  $C(D)$ 를 생각하면  $C(D)$ 도 점별 연산에 대하여 가환환이 된다.  $C(D)$ 도 정역인가? (이 결과는 연속함수는 복소해석함수만큼 “엄밀”하지 않음을 보여준다.)

**연습문제 4.24.** 영역  $D$ 에서  $f, g$ 가 복소해석함수라 하자. 다음 중 어떤 조건이 영역 전체에서  $f = g$ 임을 보장하는가?

- (1)  $D$ 의 서로 다른 점으로 된 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이 존재하여 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에서  $f(z_n) = g(z_n)$ 을 만족한다.
- (2)  $D$ 의 서로 다른 점으로 된 수열  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 이  $D$ 의 한점으로 수렴하고 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에서  $f(z_n) = g(z_n)$ 을 만족한다.
- (3)  $D$ 의 서로 다른 두 점  $a, b$ 를 연결하는 매끄러운 경로  $\gamma$ 에서  $f = g$ 이다.
- (4)  $w \in D$ 이고, 모든  $n \geq 0$ 에 대하여  $f^{(n)}(w) = g^{(n)}(w)$ 이다.

**연습문제 4.25.**  $f$ 가 전해석함수라고 가정하자. 임의의 점  $z_0 \in \mathbb{C}$ 에 대한 제곱급수 전개  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 마다 적어도 하나의 계수가 0이다.  $f$ 는 다항식임을 증명하라.

## 4.6 최대절대값정리

이 절에서는 복소해석학의 중요한 결과인 최대절대값정리를 증명할 것이다. 이는 상수함수가 아닌 복소해석함수  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 의 절대값  $|f|$ 는 영역  $D$ 에서 최대값을 가질 수 없음을 의미한다.

**정리 4.6 (최대절대값정리).**

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $D$ 에서 복소해석함수이고,
- (3) 모든  $z \in D$ 에 대하여  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ 를 만족하는  $z_0 \in D$ 가 존재하면,

$f$ 는  $D$ 에서 상수함수이다.

### 증명

중심이  $z_0$ 이고 반지름  $2r$ 인 원판이 영역  $D$ 에 포함되는  $r > 0$ 을 잡고,  $C_r$ 을  $C_r(t) = z_0 + r \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )로 정의된 원형 경로라 하자. 그러면, 코시 적분공식에 의해,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \exp(it))}{r \exp(it)} ir \exp(it) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(it)) dt \end{aligned}$$

이며, 여기서 마지막 식은  $C_r$ 에서  $f$ 의 “평균”으로 해석할 수 있다. 모든  $t$ 에 대하여  $|f(z_0 + r \exp(it))| \leq |f(z_0)|$ 므로

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(it)) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r \exp(it))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

이 식에서 부등호  $\leq$ 는 모두 등호로 바뀔 수 있기 정리하면

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left( |f(z_0)| - |f(z_0 + r \exp(it))| \right)}_{\geq 0} dt = 0.$$

를 얻는다. 피적분함수가 0보다 크거나 같기 때문에 모든  $t$ 에 대하여  $|f(z_0 + r \exp(it))| = |f(z_0)|$ 이다.  $r$ 을 더 작은 값으로 바꾸어도 같은 결과를 얻는다. 따라서  $f$ 는 원판  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ 을 원  $\{w \in \mathbb{C} : |w| = |f(z_0)|\}$  위로 보낸다. 연습문제 2.11의 결과로부터  $f$ 는  $\Delta$ 에서 상수함수이다. 따라서 항등정리를 적용하면  $f$ 는  $D$  전체에서 상수함수이다.  $\square$

**예제 4.9.**  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ 를 우측 반평면이라 하고  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(z) = \frac{\exp(-z)}{z+1}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

그러면 다음 최대값이 존재한다.

$$\|f\|_\infty := \max_{z \in \mathbb{H}} |f(z)|.$$

최대값의 존재성에 대한 우려를 잊고, 일단 존재한다는 가정하에, 최대절대값정리가 어떻게 그 값을 계산하는데 도움을 주는지 살펴보자.  $z_0 \in \mathbb{H}$ 에서 최대값을 갖는다고 가정하자. 그러면 최대 절대값정리로부터  $z_0$ 의 실수부는 양수가 될 수 없다. 따라서  $z_0 \in i\mathbb{R}$ 이고, 어떤  $y_0 \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $z_0 = iy_0$ 라 하자. 한편,

$$|f(iy)| = \left| \frac{\exp(-iy)}{iy+1} \right| = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, y \in \mathbb{R}.$$

따라서  $\|f\|_\infty = \max_{z \in \mathbb{H}} |f(z)| = \max_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| = \max_{y \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1$ .  $\diamond$

**연습문제 4.26.** 영역  $D$ 에서  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 상수함수가 아닌 복소해석함수라 하자. 그러면  $z \mapsto |f(z)|$ 를 최대로 하는 점이  $D$ 에 존재하지 않음을 보여라.

**연습문제 4.27 (최소절대값정리).** 영역  $D$ 에서  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ 가 복소해석함수라 하자. 모든  $z \in D$ 에 대하여  $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ 를 만족하는  $z_0 \in D$ 가 존재한다고 하자. 그러면  $f(z_0) = 0$ 이거나  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수임을 증명하라.

**연습문제 4.28.** 함수  $f(z) = z^2 - 2$ 에 대하여  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 에서  $|f(z)|$ 의 최댓값과 최솟값을 구하라.

## 4.7 로랑 급수

로랑(Laurent) 급수는 테일러 급수의 일반화이다. 테일러 급수

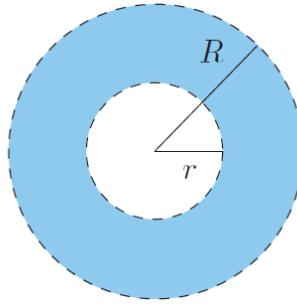
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

는  $z - z_0$ 의 음의 지수를 갖지 않으며 적당한 원판에서 수렴하는데, 로랑 급수는

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \cdots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0)^1 + \cdots$$

는  $z - z_0$ 의 음의 지수도 갖는다.

앞으로 다음을 살펴볼 예정이다.



- (1) 로랑 급수는  $z_0$  중심의 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 “수렴”하는 복소해석함수가 된다.
- (2) 역으로,  $z_0$ 를 중심으로 하는 원환에 정의된 복소해석함수가 특이점을 원환의 안쪽 구멍에서 만 갖는다면 함수는 원환에서 로랑급수를 갖는다. 예를 들어 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

이고  $z \neq 0$ 에 대한 “로랑 급수 전개”는

$$\exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

$\exp(1/z)$ 은  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 복소해석함수이다.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 는 원환의 퇴화된 모습으로 중심이 0이고 안쪽 반지름  $r = 0$ , 바깥쪽 반지름  $R = +\infty$ 인 경우다.

우선  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 의 수렴에 대한 개념부터 만들자.

**정의 4.3.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

이 모두 수렴하면, 로랑 급수  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 가 수렴한다.

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 가 수렴하면, 다음과 같이 쓸 수 있고

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

는 로랑 급수의 합이라 부른다.

**예제 4.10.** 어떤  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 로랑 급수

$$\dots + \frac{1}{8z^3} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{2z} + 1 + z^2 + z^3 + \dots$$

가 수렴할까?

(1)  $1 + z^2 + z^3 + \cdots$  은  $|z| < 1$ 에서 수렴하고,  $|z| > 1$ 에서 발산한다.

(2)  $\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^3} + \cdots$  는  $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$ 에서 수렴하고,  $\left|\frac{1}{2z}\right| > 1$ 에서 발산한다.

즉, 이 로랑 급수는  $|z| < 1$ 과  $|z| > 1/2$ 를 모두 만족하는 경우 수렴하므로 원환  $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 1\}$ 에서 수렴하고,  $|z| > 1$ 이나  $|z| < 1/2$ 면 발산한다. ◇

어떤  $z$ 에 대하여  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 이 수렴할까?

(1) 정리 4.1에 의하면  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  가  $|z - z_0| < R$ 에서 수렴하고,  $|z - z_0| > R$ 에서 발산하는 상수  $R$ 이 존재한다.

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ 은 어떨까? 제곱급수  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$ 도  $|w| < \tilde{R}$ 에서 수렴하고  $|w| > \tilde{R}$ 에서 발산한다. 따라서,  $w := (z - z_0)^{-1}$ 로 두면,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ 은  $1/|z - z_0| < \tilde{R}$ 에서 수렴한다. 즉,  $|z - z_0| > 1/\tilde{R} =: r$ 에서 수렴,  $|z - z_0| < r$ 에서 발산한다.

따라서 로랑 급수는 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 수렴하고  $|z - z_0| < r$ 이나  $|z - z_0| > R$ 일 때 발산한다.

수렴하는 원판에서 제곱급수는 복소해석함수일까?

(1)  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 은  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이다. 따라서, 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서도 복소해석함수이다.

(2) 함수

$$w \xrightarrow{g} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$$

는  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < \tilde{R}\}$ 에서 복소해석함수이다. 또한, 함수  $z \xrightarrow{f} (z - z_0)^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ 도 복소해석함수이다. 그러므로 합성함수  $g \circ f$ 는  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ 에서 복소해석함수이다. 즉,

$$z \xrightarrow{g \circ f} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

이  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\}$ 에서 복소해석함수이다. 특히 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서도 복소해석함수이다.

따라서 합으로 정의된 함수  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 은 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이다.

요약하면, 로랑 급수  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 는 적당한  $r, R$ 에 대하여 원환<sup>2</sup>  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이고 함수

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$$

는 원환  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수임을 살펴보았다.

역으로 원환에서 정의된 복소해석함수는 로랑 급수 전개를 가짐을 다음 정리로부터 알 수 있다.

**정리 4.7.**  $f$ 가  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이면,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{A} \quad (4.5)$$

이다. 여기서

$$(1) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

(2)  $C$ 는  $C(t) = z_0 + \rho \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )로 정의된 원형 경로,

(3)  $\rho$ 는  $r < \rho < R$ 인 임의의 실수이다.

또한, 식 (4.5)의 계수는 유일하게 결정된다.

**예제 4.11.** 함수  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ 를  $f(z) = z^3 \exp(1/z)$  ( $z \neq 0$ )로 정의하자. 그러면,  $f$ 는  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < +\infty\}$ 에서 복소해석함수이다. 따라서 정리의 결과를 적용하면  $f$ 는 로랑 급수

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

을 갖는다. 계수를 직접 찾아보면

$$\exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots, \quad z \neq 0$$

이므로  $f(z) = z^3 \exp \frac{1}{z} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \cdots$  ( $z \neq 0$ )를 얻는다. 따라서,

$$\dots, c_{-1} = \frac{1}{4!}, c_0 = \frac{1}{3!}, c_1 = \frac{1}{2!}, c_2 = 1, c_3 = 1,$$

이고  $n \geq 4$ 에 대하여  $c_n = 0$ 이다.  $\diamond$

**증명 (정리 4.7) (존재성).**

---

<sup>2</sup>공집합이 될 수도 있다!

$z \in \mathbb{A}$ 를 고정하자.  $r < \tilde{r} < |z - z_0| < \tilde{R} < R$ 을 만족하는  $\tilde{r}$ 과  $\tilde{R}$ 을 선택한다.  $t \in [\theta, 2\pi + \theta]$ ,  $\theta := \text{Arg}(z) + \pi/2$ 에 대하여 원형 경로  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 를

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= z_0 + \tilde{r} \exp(it), \\ \gamma_2(t) &= z_0 + \tilde{R} \exp(it)\end{aligned}$$

라고 하자.  $\gamma_3 : [\tilde{r}, \tilde{R}] \rightarrow \mathbb{A}$ 는 경로

$$\gamma_3(t) = ti \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$$

라 하자. (이 경로는  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 를 잇는 직선 경로이다.  $i$ 를 곱한 것은  $z$ 를 피하기 위해  $90^\circ$  회전을 의미 한다.) 그림 4.2를 참고하라.

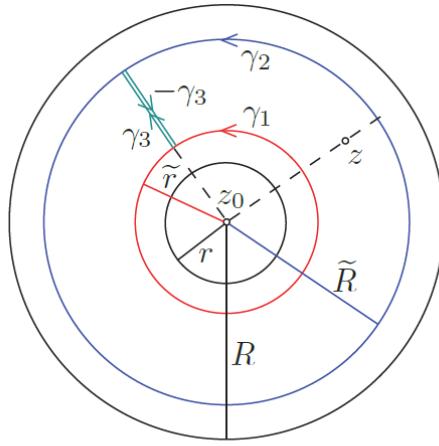


Fig. 4.2 Laurent series.

Figure 4.2: 로랑 급수

당연히 경로  $\gamma := \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_3$ 는  $z$ 를 중심으로 하는 작은 원  $C_\delta$ 와  $\mathbb{A} \setminus \{z\}$ -호모토피하다. 또한,  $\frac{f(\cdot)}{\cdot - z}$ 는  $\mathbb{A} \setminus \{z\}$ 에서 복소해석함수이므로

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot 2\pi i,$$

여기서 첫번째 등호는 코시 적분정리로부터, 두번째 등호는 코시 적분공식로부터 얻어진다.  $\gamma_3$ 를 따른 경로적분은  $-\gamma_3$ 에서의 경로적분과 상쇄된다.

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(II)}.\end{aligned}$$

이제 적분 (I)은

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

으로 적분 (II)는

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

으로 표현되고 이를 합하면  $f$ 의 로랑 급수 전개를 얻는다는 것을 보이자.

**단계 1.** 이 단계에서는  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  을 증명하자.

$\zeta \in \gamma_2$ 에 대하여

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1 - w)},$$

여기서  $w := \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ 이다.  $|w| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$ 이므로

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1 - w}.$$

피적분함수를 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + w + \cdots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1 - w}\right) \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} + \cdots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} (z - z_0)^{n-1} + \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}. \end{aligned}$$

따라서 적분은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \cdots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta \cdot (z - z_0)^{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta \cdot (z - z_0)^n \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \end{aligned}$$

여기서,

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta.$$

이 계산과정에서  $\gamma_2$ 가 중심이  $z_0$ 이고 반지름  $\rho$  ( $r < \rho < R$ )인 임의의 원과  $\mathbb{A}$ -호모토피함을 이용했다. 정리 3.4에 의해

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta = c_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

이제  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ 만 보이면, 원하는 식을 얻는다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

모든  $\zeta \in \gamma_2$ 에 대하여  $|f(\zeta)| < M$ 인  $M > 0$ 이 존재한다. 또한  $|\zeta - z_0| = \tilde{R}$ 이고,

$$|\zeta - z| = |\zeta - z_0 - (z - z_0)| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \tilde{R} - |z - z_0|$$

이므로

$$|R_n(z)| \leq \left( \frac{|z - z_0|}{\tilde{R}} \right)^n \frac{M\tilde{R}}{\tilde{R} - |z - z_0|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

결론적으로  $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ .

**단계 2.** 이 단계에서는  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ 를 보이자.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (\zeta - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0) \left( 1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)} d\zeta \end{aligned}$$

에서  $w := \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}$ 라 두면,  $|w| = \frac{\tilde{r}}{|z - z_0|} < 1$ 므로

$$\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1 - w}.$$

따라서

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) \left( \frac{1}{z - \zeta} + \dots + \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n (z - \zeta)} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta \cdot \frac{1}{z - z_0} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) (\zeta - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n (z - \zeta)} d\zeta \\ &= c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \dots + c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \tilde{R}_n(z), \end{aligned}$$

여기서,

$$\tilde{R}_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) (\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n (z - \zeta)} d\zeta.$$

이 계산과정에서  $\gamma_1$ 의 중심이  $z_0$ 이고 반지름  $\rho$  ( $r < \rho < R$ )인 임의의 원과  $\mathbb{A}$ -호모토피함을 이용했다. 정리 3.4에 의해

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta = c_{k-1}, \quad k = 0, -1, \dots, -n+1.$$

이제  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n = 0$ 만 보이면, 원하는 식을 얻는다. 모든  $\zeta \in \gamma_1$ 에 대하여  $|f(\zeta)| < M$ 인  $M > 0$ 이 존재한다. 또한  $|\zeta - z_0| = \tilde{r}$ 이고,

$$|z - \zeta| = |(z - z_0) - (\zeta - z_0)| \geq |z - z_0| - |\zeta - z_0| = |z - z_0| - \tilde{r}$$

이므로

$$|\tilde{R}_n(z)| \leq \left( \frac{\tilde{r}}{|z - z_0|} \right)^n \frac{M\tilde{r}}{|z - z_0| - \tilde{r}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

결론적으로  $c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \dots + c_{1(n-1)}(z - z_0)^{-(n-1)} + \dots = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  이로써 로랑 급수 전개의 존재성을 증명하였다.

**계수들의 유일성.** 코시 적분공식을 이용하여 로랑 급수가 유일함을 보이자. 즉,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R$$

이면, 모든  $n$ 에 대하여  $\tilde{c}_n = c_n$ 이다.  $n \neq 1$ 일 때,  $(z - z_0)^n = \frac{d}{dz} \left( \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \right)$ 이므로

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n \neq 1),$$

여기서  $C$ 는  $C(t) = z_0 + \rho \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )로 주어진 경로이다. 직접 계산하는 방법으로

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \exp(it)} ir \exp(it) dt = 2\pi i.$$

따라서 원환에서 항별 적분을 적용할 수 있다면,

$$\int_C (z - z_0)^{-m-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n \int_C (z - z_0)^{n-m-1} dz = 2\pi i \tilde{c}_m$$

이 되므로 계수의 유일성을 얻는다. 이제 항별 적분이 가능함을 보아자.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n (z - z_0)^{n-m-1} &= \left( \dots + \frac{\tilde{c}_{m-2}}{(z - z_0)^3} + \frac{\tilde{c}_{m-1}}{(z - z_0)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\tilde{c}_m}{z - z_0} + (\tilde{c}_{m+1} + \tilde{c}_{m+2}(z - z_0) + \dots) \\ &= f_1(z) + \frac{\tilde{c}_m}{z - z_0} + f_2(z). \end{aligned}$$

$f_1$ 과  $f_2$ 가 원환에서 부정적분을 가짐을 보이면 된다. 그러면, 원하는 결과로

$$\begin{aligned} \int_C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}(z - z_0)^{n-m-1} dz &= \int_C \left( f_1(z) + \frac{\tilde{c}_m}{z - z_0} + f_2(z) \right) dz \\ &= 0 + 2\pi i \tilde{c}_m + 0 = 2\pi i \tilde{c}_m. \end{aligned}$$

을 얻는다.  $|z - z_0| < R$ 에서  $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{m+n} (z - z_0)^{n-1}$ 이다.

$$F_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{m+1}}{n} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R$$

이면,  $\frac{d}{dz} F_2(z) = f_2(z)$ 가 되어  $F_2$ 는  $f_2$ 의 부정적분이 된다.  $f_1$ 에 대하여

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{m-n}}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{m-n} w^{n+1},$$

$w = \frac{1}{z - z_0}$ 이다.  $R > |z - z_0| > r$ 에서 유효하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{m-n} w^{n+1}$$

은  $|w| < \frac{1}{r}$ 에서 수렴한다.

$$G(w) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{m-n}}{n} w^n, \quad |w| < \frac{1}{r}$$

이라 하면,  $\frac{d}{dz} G(w) = - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{m-n} w^{n-1}$ 이다. 이제 모든  $z \in \mathbb{A}$ 에 대하여

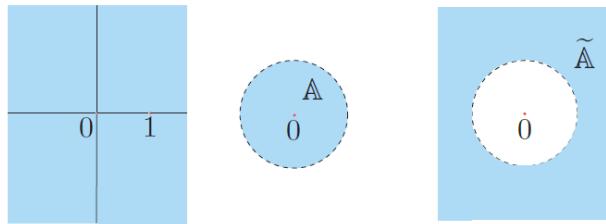
$$F_1(z) = G\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{m-n}}{n} (z - z_0)^{-n}$$

로 정의하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F_1(z) &= \left( G' \left( \frac{1}{z - z_0} \right) \right) \left( -\frac{1}{(z - z_0)^2} \right) \\ &= (z - z_0)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{m-n} (z - z_0)^{-n+1} = f_1(z). \end{aligned}$$

□

계수의 유일성은 고정된 원환에 대해서만 유효하다. 같은 함수라도 다른 원환들에서 유효하도록 로랑 급수를 전개하면 다른 로랑 급수를 얻는다.

Fig. 4.3  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$  and  $\tilde{\mathbb{A}} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < +\infty\}$ .Figure 4.3: 영역  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ,  $\tilde{\mathbb{A}} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ .

**예제 4.12.** 함수  $f$ 를  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 에서  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 로 정의하자.

$f$ 는 원환  $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ 에서 복소해석함수이다. 그 로랑 급수를 구하면?  $|z| < 1$  이므로

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

로 쓸 수 있기 때문에 계수를 구하면

$$\begin{aligned} c_{-2} &= c_{-3} = \dots = 0, \\ c_{-1} &= c_0 = c_1 = \dots = -1. \end{aligned}$$

그런데  $f$ 는 안쪽 반지름이 1이고 바깥쪽 반지름이 무한대인 원환  $\tilde{\mathbb{A}} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$ 에서도 복소해석함수이다. 따라서  $f$ 는  $\tilde{\mathbb{A}}$ 에서도 로랑 급수 전개가 가능하다.  $|z| > 1$ 에서

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2(1-1/z)} = \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

이므로 로랑 급수의 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{-2} &= \tilde{c}_{-3} = \dots = 1, \\ \tilde{c}_{-1} &= \tilde{c}_0 = \tilde{c}_1 = \dots = 0. \end{aligned}$$

두 가지 로랑 급수의 계수가 다르게 나오는데 놀라운 일이 아니다. 왜냐하면 다른 원환에서 로랑 급수를 전개했기 때문이다. ◇

**연습문제 4.29.** 예제 4.12를 다시 생각해보자. 원환  $\tilde{\mathbb{A}}_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ 과 원환  $\tilde{\mathbb{A}}_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1|\}$ 에서  $f$ 의 로랑 급수를 구하라.

## 4.8 특이점의 분류

다음 세 함수

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z^3}, \quad \exp \frac{1}{z}$$

는 모두 0에서 정의되지 않기 때문에 0을 이 함수들의 “특이점(singularity)”이라 부른다. 그런데 특이점 근방에서 세 함수의 특성은 매우 다르다. 즉,  $-bf$  특이점의 본질은 각 경우에서 모두 다르다. 우리는 각각의 경우 함수가 특이점 근방에서 어떻게 되는지를 상세하게 살펴볼 예정인데 이를 특이점의 분류라 한다. 또한, 특이점의 종류를 쉽게 판별하는 분류법 2가지를 보게 될 것인데, 하나는 극한을 이용하여 특이점을 규명하는 방법이고 다른 하나는 로랑 급수의 계수 입장에서 특이점을 분류하는 것이다. 우선 다음 정의부터 시작하자.

**정의 4.4.** 복소함수  $f$ 가  $z_0$ 에서 정의되지 않고  $z_0$ 를 중심으로 반지름  $R > 0$ 인 뚫린 원판  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수라고 하자. 그러면,  $z_0$ 를  $f$ 의 고립 특이점(isolated singularity)이라고 한다.

**예제 4.13.** 예를 들어 다음 함수

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z^3}, \quad \exp \frac{1}{z}$$

는 0에서 고립 특이점을 갖는다. 한편,

$$f(z) := \frac{1}{\sin(1/z)}$$

는 0에서 특이점을 갖지만, 고립 특이점은 아니다. ( $f$ 는  $z = 1/n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 에서 정의되지 않는다.) ◇

**정의 4.5.**  $f$ 의 고립 특이점  $z_0$ 는

- (1) 원판  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수  $F$ 가 존재하여 뚫린원판  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ 에서  $F = f$ 를 만족하면 제거가능한 특이점(removable singularity)이라 한다.
- (2)  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ 이면 극(pole)이라 한다. 즉, 모든  $M > 0$ 에 대하여  $0 < |z - z_0| < \delta$ 이면  $|f(z)| > M$ 인  $\delta > 0$ 가 존재한다.
- (3) 제거가능한 특이점이나 극이 아니면, 본질적 특이점(essential singularity)이라 한다.

**예제 4.14.**

- (1) 함수  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 는 0에서 제거가능한 특이점을 갖는다. 왜냐하면,  $z \neq 0$ 에 대하여

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

이고 우변 제곱급수의 수렴반경은 무한대이므로 (왜?) 전해석함수  $F$ 를 정의한다. 함수  $F$ 와  $f$ 는  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 일치하므로  $f$ 는 0에서 제거가능한 특이점을 갖는다.

(2)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{|z|^3} = +\infty$ 이므로 함수  $\frac{1}{z^3}$ 은 0에서 극을 갖는다.

(3) 함수  $\exp \frac{1}{z}$ 는 0에서 본질적 특이점을 갖는다. 왜냐하면,

(a)  $\lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ 이므로 0은 제거가능한 특이점이 될 수 없다.

(b) 0은 극도 될 수 없다. 왜냐하면,  $\lim_{x \nearrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ 이므로  $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty$ 이 될 수 없다.

◇

이제 극한의 성질로부터 특이점을 분류하는 방법을 알아보자.

**정리 4.8** (극한을 이용한 특이점의 분류).  $z_0$ 가  $f$ 의 고립 특이점이라고 하자. 그러면,

$z_0$ 는 제거가능한 특이점이다.	$\Leftrightarrow$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ .
$z_0$ 는 극이다.	$\Leftrightarrow$	(a) $\neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \right)$ 이고 (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1}f(z) = 0$ . (가장 작은 $n$ 을 $z_0$ 에서 극의 차수 (order)라고 한다.)
$z_0$ 는 본질적 특이점이다.	$\Leftrightarrow$	$\forall n \in \mathbb{N}, \neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0 \right)$

### 증명

(1)  $z_0$ 는 제거가능한 특이점이다.  $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$

$z_0$ 를 제거가능한 특이점이라 하자. 그러면  $F$ 는

$$D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

에서 해석적이고  $0 < |z - z_0| < R$ 에서  $F = f$ 이다.  $F$ 가  $z_0$ 에서 연속임을 이용하면,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)F(z) = 0 \cdot F(z_0) = 0.$$

따라서 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $0 < |z - z_0| < \delta$ 이면

$$|(z - z_0)f(z) - 0| = |(z - z_0)F(z) - 0| < \epsilon$$

를 만족하는  $\delta > 0$ 가 존재한다. 결론적으로

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

을 얻는다. 이제  $\boxed{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \Rightarrow z_0 \text{는 제거가능한 특이점이다.}}$  를 증명하자.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

를 가정하면,  $f$ 는 뚫린원판  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이므로  $f$ 의 로랑 급수 전개

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

를 생각할 수 있다. 여기서 계수  $c_n$ 은 중심이  $z_0$ 이고 반지름  $r < R$ 인 원형경로  $C_r$ 을 따른 경로적분으로 주어진다.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

이제  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $c_{-n} = 0$ 를 보이자. 주어진  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $C_r$  위에서  $|(z - z_0)f(z)| < \epsilon$ 이 되도록  $r$ 을 작게 잡자. 그러면 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{(z - z_0)f(z)}{(z - z_0)^{-n+2}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r^{-n+2}} 2\pi r = \epsilon r^{n-1} \leq \epsilon R^{n-1}. \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ 을 임의로 작게 선택할 수 있으므로 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $c_{-n} = 0$ 이다. 따라서

$$F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n,$$

으로 정의하면  $F$ 는  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이고 뚫린원판  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ 에서  $F = f$ 이다.

$$(2) \quad z_0 \text{는 극이다.} \Rightarrow \begin{cases} \neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \right) \text{이고,} \\ \exists n \in \mathbb{N}, \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1}f(z) = 0. \end{cases}$$

$z_0$ 가  $f$ 의 극이라고 가정하자. 그러면  $z_0$ 는 제거가능한 특이점은 아니다. (왜?) 따라서

$$\neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \right).$$

(여기서 기호 ‘ $\neg$ ’는 논리적 부정(NOT)을 나타내는 것으로 ‘ $\sim$ 을 만족하지 않는다’는 뜻이다.) 뚫린 원판

$$D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$

에서  $|f(z)| > 1$ 이 되도록  $R > 0$ 을 선택할 수 있다. 함수  $g$ 를 뚫린원판  $D$ 에서

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

로 정의하자.  $z_0$ 가  $f$ 의 극이므로  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ 이다. 특히

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0$$

이고  $g(z)$ 는

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

까지 복소해석함수  $G$ 로 확장될 수 있다. 또한,

$$G(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0.$$

$z_0$ 가  $G$ 의 근이고  $G$ 는  $z_0$  근방에서 항등적으로 0이 되지는 않기 때문에  $z_0$ 는 적당한 차수  $n \in \mathbb{N}$ 의 근이다.  $|z - z_0| < R$ 에 정의된 복소해석함수  $H$ 가 존재하여  $H(z_0) \neq 0$ 이고

$$G(z) = (z - z_0)^n H(z)$$

를 만족한다. 특히,  $0 < |z - z_0| < R$ 에서

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n H(z)}$$

이므로

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{H(z)} = \frac{0}{H(z_0)} = 0$$

가 되어 증명이 끝난다.

$$\boxed{\begin{cases} \neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \right) \text{이고,} \\ \exists n \in \mathbb{N}, \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0. \end{cases} \Rightarrow z_0 \text{는 극이다.}}$$

이 조건을 만족하는 가장 작은  $n$ 을  $n_*$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n_*+1} f(z) &= 0, \\ \neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n_*} f(z) = 0 \right). \end{aligned}$$

그러면,  $(z - z_0)^{n_*} f(z)$ 는  $z = z_0$ 에서 제거가능한 특이점을 갖는다. 따라서  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 정의된 복소해석함수  $F$ 가 존재하여  $0 < |z - z_0| < R$ 에서

$$(z - z_0)^{n_*} f(z) = F(z)$$

를 만족한다.

$$F(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n_*} f(z) \neq 0$$

를 만족하도록  $n_*$ 를 잡았음을 상기하자.

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^{n_*}}$$

로부터  $0 < |z - z_0| < R$ 에서

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|F(z)|}{|z - z_0|^{n_*}} = \underbrace{|F(z_0)|}_{\neq 0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|^{n_*}} = +\infty$$

를 만족하므로  $z_0$ 는  $f$ 의 극이다.

(3) 이 증명은 앞의 두 결과로부터 쉽게 얻어진다.  $z_0$ 가  $f$ 의 본질적 특이점이라고 하자. 그러면, 제거가능한 특이점은 아니므로

$$\neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \right)$$

에서  $n = 1$ 인 경우를 확인하고  $z_0$ 가 극이 아니므로 (2)에서 모든 다른  $n$ 를 선택해도 같은 결과를 얻어 원하는 결론이 증명된다.

역으로, 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0 \right)$$

라면, 특히  $n = 1$ 인 경우를 생각하면  $z_0$ 는 제거가능한 특이점이 될 수 없다.  $n \geq 2$ 인 경우를 보면  $z_0$ 는 극이 될 수도 없다. 따라서  $z_0$ 는 본질적 특이점이다.  $\square$

예제 4.14를 다시 생각하자.

### 예제 4.15.

(1)  $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = \sin 0 = 0$  이므로 0은  $\frac{\sin z}{z}$ 의 제거가능한 특이점이다.

(2)  $\neg \left( \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z^3} = 0 \right)$  이고  $\lim_{z \rightarrow 0} z^4 \cdot \frac{1}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} z = 0$  이므로 0은  $\frac{1}{z^3}$ 의 극이다.

$\neg \left( \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot \frac{1}{z^3} = 0 \right)$  이고  $\neg \left( \lim_{z \rightarrow 0} z^3 \cdot \frac{1}{z^3} = 0 \right)$  이므로 3차의 극을 갖는다.

(3)  $x > 0$ 에 대하여  $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} + \dots > \frac{1}{n!x^n}$  이므로, 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $x^n e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{n!}$  이고

$$\neg \left( \lim_{x \searrow 0} x^n e^{\frac{1}{x}} = 0 \right).$$

따라서 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\neg \left( \lim_{z \rightarrow 0} z^n \exp \frac{1}{z} = 0 \right)$$

이 되어 0은  $\exp \frac{1}{z}$ 의 본질적 특이점이다.  $\diamond$

이제 로랑 급수를 이용한 특이점의 두번째 분류방법 살펴보자.

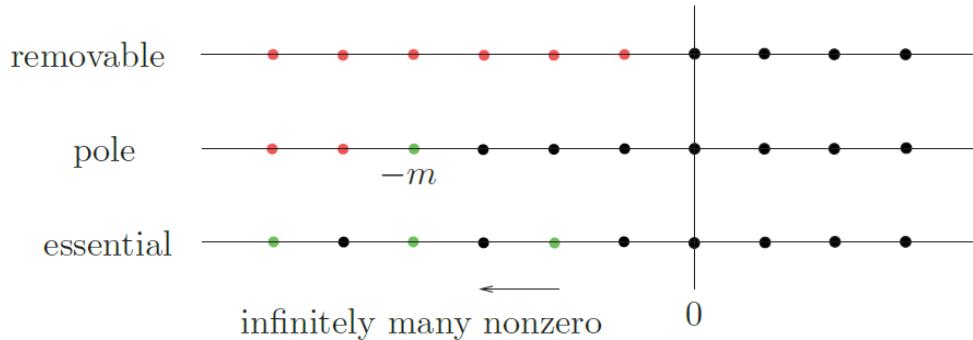
**정리 4.9** (로랑 급수의 계수를 이용한 분류법).

(1)  $z_0$ 가  $f$ 의 고립 특이점이고,

(2) 어떤  $R > 0$ 에 대하여  $0 < |z - z_0| < R$ 에서  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$ 이라 하자.

그러면,

$z_0$ 는 제거가능한 특이점이다.	$\Leftrightarrow$	모든 $n < 0$ 에 대하여 $c_n = 0$ .
$z_0$ 는 극이다.	$\Leftrightarrow$	다음을 만족하는 $m \in \mathbb{N}$ 이 존재한다. (a) $c_{-m} \neq 0$ 이고, (b) $n < -m$ 에 대하여, $c_n = 0$ 이다. $m$ 을 극의 차수라고 한다.
$z_0$ 는 본질적 특이점이다.	$\Leftrightarrow$	무한이 많은 음수 $n$ 에 대하여 $c_n \neq 0$ .



### 증명

(1)  $z_0$ 는 제거가능한 특이점이다.  $\Rightarrow$  모든  $n < 0$ 에 대하여  $c_n = 0$ .

$z_0$ 가 제거가능한 특이점이라고 가정하자. 그러면  $f$ 는  $|z - z_0| < R$ 에 정의된 복소해석함수  $F$ 로 확장할 수 있다.  $F$ 의 테일러 급수 전개는

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

특히,  $0 < |z - z_0| < R$ 에서

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

이고 고정된 원환에서 로랑 급수 전개의 유일성으로부터  $n \geq 0$ 에서  $c_n = \tilde{c}_n$ 이고,  $n < 0$ 에서  $c_n = 0$ 이다.

모든  $n < 0$ 에 대하여  $c_n = 0 \Rightarrow z_0$ 는 제거가능한 특이점이다.

모든  $n < 0$ 에서  $c_n = 0$ 라고 가정하자. 그러면,  $0 < |z - z_0| < R$ 에서

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

이고  $|z - z_0| < R$ 에서  $F$ 를

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z - z_0)^n$$

로 정의하면,  $F$ 는  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서 복소해석함수이다. (왜냐하면 제곱급수로 정의되었기 때문에) 또한,  $0 < |z - z_0| < R$ 에서  $F = f$ 이다.

(2)  $z_0$ 가  $m$ 차의 극이면,

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

이고  $c_{-m} \neq 0$ 임을 증명해보자.  $z_0$ 가  $m$ 차의 극이라고 가정하자. 정리 4.8을 이용하면,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)((z - z_0)^m f(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) = 0,$$

이고  $(z - z_0)^m f(z)$ 는  $z_0$ 에서 제거가능한 특이점을 갖는다.

$$(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^{n+m}$$

의 급수 전개에서  $z - z_0$ 의 차수가 음수인 항의 계수들은 모두 0이 되어야 한다. 즉,  $0 = c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \cdots$ . 따라서  $0 < |z - z_0| < R$ 에 대하여

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots \quad (4.6)$$

이므로,

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

또한,  $c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$ 는 복소해석함수이고,  $z \rightarrow z_0$ 일 때 극한값  $c_{-m}$ 을 갖는다.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots) = c_{-m}.$$

한편,  $z_0$ 는  $m$ 차 극이므로,

$$\neg \left( \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0 \right).$$

따라서 식 (4.6)으로부터  $c_{-m} \neq 0$ 이다.

이제

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

이고  $c_{-m} \neq 0$ 를 가정하고  $z_0$ 가  $m$ 차 극임을 보이자. 어떤  $m \in \mathbb{N}$ 이 존재하여,  $c_{-m} \neq 0$ 이고,  $n < -m$ 에 대하여  $c_n = 0$ 이라고 가정하자. 그러면,  $(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$ 이고 우변은 복소해석함수를 정의한다. 이를  $h$ 라 하자.  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = h(z_0) = c_{-m} \neq 0, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) &= 0 \cdot c_{-m} = 0.\end{aligned}$$

따라서, 정리 4.8에 의해  $z_0$ 는  $m$ 차 극이다.

(3) 본질적 특이점은 제거가능한 특이점 또는 극이 아닌 경우를 뜻하므로 앞의 두 경우의 증명으로부터 쉽게 도출된다.  $\square$

다시 예제 4.14를 돌아보자.

#### 예제 4.16.

(1)  $z \neq 0$ 에 대하여

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.$$

로랑 급수에서  $z$ 의 음의 지수 항이 나타나지 않기 때문에 0은 제거가능한 특이점이다.

(2)  $z \neq 0$ 에 대하여

$$\frac{1}{z^3} = \cdots + 0 + \frac{1}{z^3} + 0 + \cdots.$$

$c_{-3} = 1 \neq 0$ 이고  $0 = c_{-4} = c_{-5} = \cdots$ 이다. 따라서  $\frac{1}{z^3}$ 은 0에서 3차의 극을 갖는다.

(3)  $z \neq 0$ 에 대하여

$$\exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

무한이 많은 음의 인덱스 (실제로 모든)  $n$ 에서 0이 아니므로

$$c_{-n} = \frac{1}{n!} \neq 0$$

0은  $\exp \frac{1}{z}$ 의 본질적 특이점이다.  $\diamond$

**연습문제 4.30.** 영역  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 가  $D$ 에서 유일한 근으로  $m$ 중근  $z_0$ 를 갖는다고 하자. 함수  $z \mapsto 1/f(z)$ 는  $z_0$ 에서  $m$ 차 극을 가짐을 보여라.

**연습문제 4.31.**  $D$ 가  $z_0$ 를 중심으로 하는 원판이고,  $D \setminus \{z_0\}$ 에 정의된 함수  $f$ 는 함수값이 0이 되지 않으며  $z_0$ 에서  $m$ 차 극을 갖는다고 하자. 함수  $z \mapsto 1/f(z)$ 는  $D$ 에 정의된 복소해석함수  $g$ 로 확장될 수 있으며  $g$ 는  $z_0$ 에서  $m$ 중근을 가짐을 보여라.

**연습문제 4.32.** 영역  $D$ 와  $z_0 \in D$ 에 대하여  $f$ 는  $z_0$ 에서  $m$ 차 극을 가지며 다음과 같은 로랑 급수 전개가 가능하다고 하자.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

단,  $R$ 은 양의 상수이다. 다음 식이 성립함을 보여라.

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

**연습문제 4.33.** 참 또는 거짓을 밝혀라.

- (1)  $f$ 의 로랑 급수가  $z^{-1} + c_0 + c_1 z + \dots$  가 원점을 중심으로 하는 어떤 뚫린원판에서 수렴한다면,  $f$ 는 0에서 극을 갖는다.
- (2) 하나의 함수가 수렴하는 원환의 선택에 따라  $z_0$ 를 중심으로 다른 로랑 급수를 가질 수 있다.
- (3)  $f$ 가  $z_0$ 에서 고립 특이점을 갖는다면,  $z_0$ 를 중심으로 하는 로랑 급수는 원환  $0 < |z - z_0| < R$ 에서 수렴한다.
- (4)  $f$ 의 로랑 급수가 원환  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 에서 실제로 테일러 급수가 되면 ( $z - z_0$ 의 음의 지수 항이 없다면), 이 급수는 실제로 (적어도) 원판  $|z - z_0| < R_2$ 에서 수렴한다.
- (5) 앞의 결과가 맞다면,  $f$ 가 원판  $|z - z_0| < R_2$ 에서 특이점이 있더라도 제거가능한 특이점만 존재하며 이 원판에서 복소해석함수로 간주할 수 있다.

**연습문제 4.34.** 다음 함수들이 0에서 특이점을 갖는다면 어떤 종류인지 판정하라. 복소해석함수이거나 고립 특이점을 갖는 함수이면 뚫린원판  $0 < |z| < R$ 에서 수렴하는 급수로 전개하라.

$$\sin z, \quad \sin \frac{1}{z}, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}, \quad z \sin \frac{1}{z}$$

**연습문제 4.35.** 참 또는 거짓을 밝혀라.

- (1)  $\lim_{z \rightarrow 0} \left| \exp \frac{1}{z} \right| = +\infty$ .
- (2)  $f$ 가  $z_0$ 에서  $m$ 차 극을 가지면,  $z_0$ 를 중심으로 하는 원판에서  $f - \frac{p}{(z - z_0)^m}$  가 복소해석함수가 되게 하는 다항식  $p$ 가 존재한다.

- (3)  $f$ 가 0의 근방에서 복소해석함수이면,  $n > m$ 일 때  $\frac{f}{z^n}$ 이 0에서 극을 갖는 정수  $m$ 이 존재한다.
- (4)  $z_0$ 에서  $f, g$ 가 각각  $m_f$ 차,  $m_g$ 차 극을 갖는다면, 점별 곱으로 정의된 함수  $f \cdot g$ 는  $z_0$ 에서  $m_f + m_g$  차 극을 갖는다.

**연습문제 4.36.** 두 본질적 특이점 0과 1을 제외한  $\mathbb{C}$ 에서 복소해석함수인 예를 들면?

**연습문제 4.37.** 함수  $f(z) = 1/(z - 1)$ 은 0에서 특이점을 갖지 않음은 분명하다. 그런데  $|z| > 1$ 에서 로랑 급수가  $z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$  이므로 무한이 많은  $z$ 의 음의 차수 항이 0이 아기 때문에 0은  $f$ 의 본질적 특이점으로 오해할 수 있다. 이 주장에서 무엇이 잘못되었는지 찾아라.

**연습문제 4.38.** 증명 또는 반증하라:  $z_0$ 에서  $f$ 와  $g$ 가 각각 극과 본질적 특이점을 찾는다면,  $fg$ 는  $z_0$ 에서 본질적 특이점을 갖는다.

### 4.8.1 본질적 특이점 근방에서의 역동적 변화

이제 본질적 특이점  $z_0$ 의 근방에서 함수  $f$ 의 “역동적” 변화를 보여주는 결과를 살펴보자. 임의의 복소수  $w$ 와  $\epsilon > 0$ ,  $z_0$ 를 중심으로 하는 임의의 작은 뚫린원판  $\Delta$ 이 주어졌을 때,  $f(z)$ 와  $w$ 의 거리가  $\epsilon$ 보다 작은 점  $z$ 가  $\Delta$ 에 존재한다. 따라서 본질적 특이점을 중심으로 하는 임의의 뚫린원판의 상(image)은  $\mathbb{C}$ 에서 조밀하다. 다른 표현으로는, 본질적 특이점  $z_0$ 의 임의의 근방에서 함수  $f$ 는 임의의 복소수에 가까이 다가갈 수 있다.

**정리 4.10 (카소라티-바이어스트拉斯).** <sup>3</sup>  $z_0$ 가  $f$ 의 본질적 특이점이하고 하자. 그러면,

- (1) 임의의 복소수  $w$ ,
- (2) 임의의  $\delta > 0$ ,
- (3) 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여,

$z \in \mathbb{C}$ 가 존재하여  $|z - z_0| < \delta$ 와  $|f(z) - w| < \epsilon$ 을 만족한다.

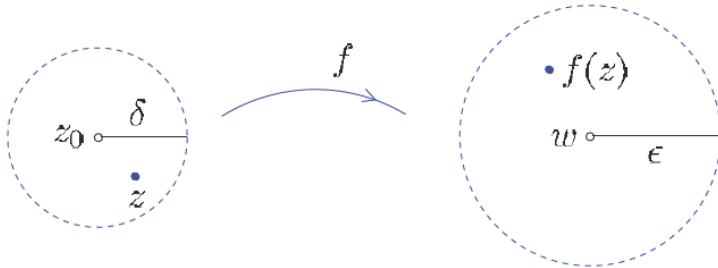
#### 증명

증명의 결과를 부정하자. 그러면  $w \in \mathbb{C}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ 이 존재하여  $z \in D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 일 때  $|f(z) - w| \geq \epsilon$ 를 얻는다. 이제  $z \in D$ 에 대하여

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

---

<sup>3</sup>이 결과는 바이어스트拉斯(Weierstrass)에 의해 1876년 (독일어로) 그리고 소콧스키(Sokhotski)에 의해 1873년(러시아어로) 발표되었다. 따라서 러시아 문헌에서는 소콧스키 정리로 서양에서는 바이어스트拉斯 정리로 불렸다. 같은 정리는 이미 1868년 카소라티(Casorati)가 출판하였고, 1859년 Briot와 Bouquet의 책의 초판에도 소개되었다. 하지만, 이들은 1875년 개정판을 만들면서 정리를 삭제해버렸다.



로 정의하면,  $g$ 는 복소해석함수이고,

$$0 \leq |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\epsilon}, \quad z \in D$$

이므로  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0$ 이다. 따라서  $g$ 는 제거가능한 특이점  $z_0$ 를 갖는다. 이 함수를 확장한 것도  $g$ 로 쓰기로 하자.  $g$ 가  $z_0$ 에서  $m$ 중근을 갖는다고 하면 ( $g(z_0) \neq 0$ 이면  $m = 0$ 으로 설정한다)  $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ 로 쓸 수 있다. 여기서,  $h$ 는  $D$ 에 정의된 복소해석함수로  $h(z_0) \neq 0$ 이다. 그러면,  $0 < |z - z_0| < \delta$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (z - z_0)^{m+1} f(z) &= (z - z_0)^{m+1} (f(z) - w + w) \\ &= (z - z_0)^{m+1} \frac{1}{g(z)} + (z - z_0)^{m+1} \cdot w \\ &= \frac{z - z_0}{h(z)} + (z - z_0)^{m+1} \cdot w \\ &\xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{0}{h(z_0)} + 0 \cdot w = 0. \end{aligned}$$

따라서,  $f$ 는  $z_0$ 에서 제거가능한 특이점을 갖거나( $m = 0$ 일 때), 극( $m \in \mathbb{N}$ 일 때)을 갖는다. 따라서  $z_0$ 는  $f$ 의 본질적 특이점이 되지 못하므로 모순이 되어 증명이 끝난다.  $\square$

**예제 4.17.** 함수  $\exp(1/z)$ 은 0에서 본질적 특이점을 갖는다. 0의 임의의 근방에서 0이 아닌 모든  $w (= \rho \exp(i\theta), \rho, \theta \in \mathbb{R})$ 를 함수값으로 가짐을 보일 것이다. 이를 위해  $z = r \exp(it)$ 라 하면,

$$\exp \frac{1}{z} = \exp \left( \frac{\cos t}{r} - i \frac{\sin t}{r} \right) = \rho e^{i\theta}$$

를 풀어야 한다. 절대값을 취하는 방법으로

$$\frac{\cos t}{r} = \log \rho,$$

한편 편각을 비교하면 하나의 해는

$$-\frac{\sin t}{r} = \theta.$$

를 풀어서 얻을 수 있다.  $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ 을 이용하면,

$$r = \frac{1}{\sqrt{(\log \rho)^2 + \theta^2}}$$

과

$$\tan t = -\frac{\theta}{\log \rho}$$

를 얻는다.  $\theta$ 가  $2\pi$  주기를 가지므로  $2\pi$ 의 정수배를 더해도  $w$ 는 변하지 않는다. 이로부터  $r$ 을 원하는 만큼 작게 만들 수 있다.  $\diamond$

이 예제는 카소라티-바이어스트拉斯 정리가 얼마나 강력한 것인지 보여준다. 피카드는 본질적 특이점을 중심으로 하는 임의의 뚫린원판의 상은 복소평면에서 기껏해야 한 점을 제외한 집합이 됨을 보였다. 우리는 예제에서 함수의 상이  $w = 0$ 를 제외한 집합이 됨을 확인하였다. 피카드 정리는 이 책의 범위를 벗어나며, [Conway (1978)]을 참고하라.

**연습문제 4.39.** 카소라티-바이어스트拉斯 정리를 이용하여  $f$ 가  $z_0$ 에서 본질적 특이점을 가지고,  $w$ 가 임의의 복소수라고 하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w.$$

를 만족하는 복소수열  $z_1, z_2, z_3, \dots$ 이 존재함을 보여라.

## 4.9 유수 정리

$D$ 가 영역일 때 복소해석함수  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $z_0$ 에서 고립 특이점을 갖는다고 하자.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

이 때,  $c_{-1}$ 을  $z_0$ 에서  $f$ 의 유수(residue)라고 하며,

$$\text{res}(f, z_0)$$

로 쓴다. 왜 이런 이름을 붙였을까? 일상적인 언어에서 유수(residue)는 남은 것(left over)을 뜻한다. 위의  $c_{-1}$ 도 다음과 같이 남은 것으로 생각할 수 있다.

$$2\pi i c_{-1} = \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}} dz = \int_{C_r} f(z) dz = \int_{C_r} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \right) dz,$$

여기서  $C_r$ 은  $C_r(t) = z_0 + r \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )이고  $r < R$ 이다.

$$\int_{C_r} (c_n (z - z_0)^n) dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i c_{-1}, & n = -1 \end{cases}$$

로부터  $f$ 의 로랑 급수 전개를 (수렴성은 따지지 않고) 항별 적분이 가능하다고 상상해보면 적분 결과로  $2\pi i c_{-1}$ 만 남는다.

유수가 무엇이길래 큰 소란일까? 등식

$$2\pi i c_{-1} = \int_{C_r} f(z) dz$$

은 경로적분의 계산을  $z_0$ 에서  $f$ 의 유수를 계산하는 방법으로 구할 수 있음을 뜻한다. (물론  $f$ 의 로랑 급수로부터 계수  $c_{-1}$ 을 구하는 것이 필요하다.) 따라서  $c_{-1}$ 을 쉽게 구하는 방법이 있다면 경로  $C_r$ 과  $D \setminus \{z_0\}$ -호모토픽한 임의의 닫힌경로  $\gamma$ 를 따르는 적분을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_{\gamma} f(z) dz \left( = \int_{C_r} f(z) dz \right) = 2\pi i c_{-1}. \quad (4.7)$$

연습문제 4.32의 결과에서  $z_0$ 가  $m$ -중극 일 때,  $c_{-1}$ 을 계산하는 공식을 얻는다.

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

계산하기 불편한 실적분의 경우 때로는 적절한 복소해석함수  $f$ 의  $\gamma$ 를 따른 경로적분으로 변형한 다음 유수를 이용하여 경로적분을 구한다. 그러면 원하는 실적분의 값을 얻을 수 있다. 관련하여 다음 예제를 보자.

**예제 4.18.** 실적분

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta$$

를 계산해보자. 우선 이 적분을 원을 따르는 경로적분으로 변형한다.  $z := \exp(i\theta)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

$\gamma$ 를 중심이 0이고 반지름 1인 원형경로로 잡으면,

$$\gamma(\theta) = \exp(i\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

이고  $\gamma'(\theta) d\theta = i \exp(i\theta) d\theta = iz d\theta$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta &= \int_{\gamma} \frac{1}{5 + 3 \cdot \left( \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} \frac{1}{iz} dz = \int_{\gamma} -\frac{2i}{(3z+1)(z+3)} dz. \\ f(z) &= -\frac{2i}{(3z+1)(z+3)} \end{aligned}$$

로 정의하면  $f$ 는  $-1/3$ 과  $-3$ 에서 극을 가지며, 두 극의 차수는 모두 1이고, 그 중에서  $-1/3$ 만 닫힌 경로  $\gamma$ 의 내부에 존재한다. 따라서

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{res} \left( f, -\frac{1}{3} \right).$$

$c^{-1}$ 의 값은? 중심  $-1/3$ 의 뚫린원판에서

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z + \frac{1}{3}} + c_0 + c_1 \left( z + \frac{1}{3} \right) + c_2 \left( z + \frac{1}{3} \right)^2 + \dots$$

이고  $\left( z + \frac{1}{3} \right) f(z) = c_{-1} + c_0 \left( z + \frac{1}{3} \right) + \dots$  이다. 따라서

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow -1/3} \left( z + \frac{1}{3} \right) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1/3} -\frac{2i}{3(z+3)} = -\frac{i}{4}.$$

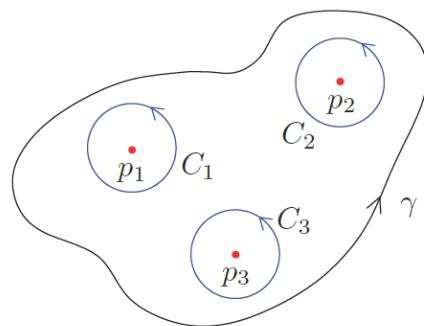
결론적으로  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$ 이다.

좀 더 일반화하면,  $f$ 가  $D$ 에서 유한개의 극을 갖는 경우, 적분을 식 (4.7)과 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 이를 다음 정리에서 다룬다.

**정리 4.11 (유수정리).**

- (1)  $D$ 가 영역이고,
- (2)  $f$ 가  $D \setminus \{p_1, \dots, p_K\}$ 에서 해석적이고,
- (3)  $f$ 가  $p_1, \dots, p_K$ 에서 각각  $m_1, \dots, m_K$ -중극을 가지며,
- (4)  $\gamma$ 는  $D \setminus \{p_1, \dots, p_K\}$ 의 닫힌경로이고,
- (5)  $\gamma$ 는 각각의  $k = 1, \dots, K$ 에 대하여  $C_k$ 와  $D \setminus \{p_k\}$ -호모토픽하다. 여기서,  $C_k$ 는 중심이  $p_k$ 이고  $C_k$ 의 내부는  $D$ 에 속하며 내부의 극은  $p_k$ 뿐이다.

그러면,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^K \text{res}(f, p_k)$ 이다.



**증명.**

각각의  $k = 1, \dots, K$ 에 대하여, 적당한  $R_k > 0$ 가 존재하여  $0 < |z - p_k| < R_k$ 에서

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m_k} c_{-n,k}(z - p_k)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}(z - p_k)^n = f_k(z) + h_k(z)$$

로 쓸 수 있다.  $z - p_k$ 의 음의 차수를 갖는 항은  $f_k$ 로, 음이 아닌 차수 부분은  $h_k$ 로 표시하자.  $h_k$ 는  $|z - p_k| < R_k$ 에서 복소해석함수이고  $f_k$ 는  $\mathbb{C} \setminus \{p_k\}$ 에 정의되고 유일한 특이점으로 극  $p_k$ 를 갖는 유리함수이다. 따라서  $f - f_k$ 는  $p_k$ 를 포함한 작은 원판에서 복소해석함수이다.  $g := f - (f_1 + \dots + f_K)$ 라고 하자.  $k \in \{1, \dots, K\}$ 를 고정하면

$$g = (f - f_k) = \sum_{j \neq k} f_j$$

로 쓸 수 있다.  $f - f_k$ 와  $j \neq k$ 인  $f_j$ 는 모두  $p_k$ 를 중심으로 하는 작은 원판에서 복소해석함수이다. 그러므로  $g$ 는  $D$ 에서 복소해석함수이다.  $\gamma$ 는  $p_1$ 을 중심으로 하는 원  $C_1$ 과  $D \setminus \{p_1\}$ -호모토픽하므로 코시 적분정리에서

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

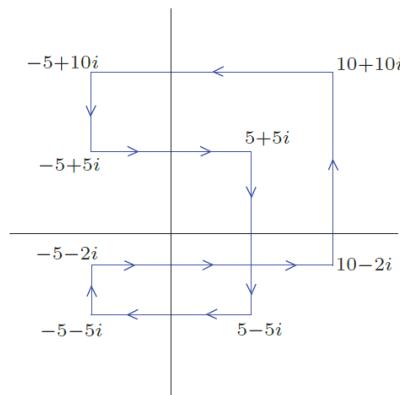
이고,  $\int_{\gamma} (f - (f_1 + \dots + f_K)) dz = 0$ 이다. 코시 적분정리를 다시 적용하면,

$$\int_{\gamma} f_k(z) dz = \int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i c_{-1,k}, \quad k = 1, \dots, K$$

이므로

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^K \int_{\gamma} f_k(z) dz = \sum_{k=1}^K 2\pi i c_{-1,k} = 2\pi i \sum_{k=1}^K \text{res}(f, p_k).$$

**연습문제 4.40.** 아래 그림과 같은 경로  $\gamma$ 를 따라 적분  $\int_{\gamma} \frac{\text{Log}(z)}{1 + \exp z} dz$ 를 계산하라.



### 유수정리를 이용한 유리함수의 실적분

앞에서 언급한 바와 같이 유수정리는 경로적분에 사용될 수 있지만 때로는 실적분을 쉽게 계산하기 위해 사용될 수도 있다. 다음 유형의 실적분을 생각하자.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

이러한 적분은 적분구간이 유한하지 않기 때문에 특이적분(improper integral)이라 부르며 다음식에서 우변의 두 극한이 모두 존재할 때 정의된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx. \quad (4.8)$$

두 극한이 모두 존재하는 경우 적분값은 아래와 같이 쓸 수도 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x)dx. \quad (4.9)$$

식 (4.9)의 우변의 극한이 존재하면 이를 적분의 코시 주치(Cauchy principal value)라고 한다. 코시 주치는 존재하지만 특이적분은 존재하지 않을 수 있다. 예를 들면,  $\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$ 이므로

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r x dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{(-r)^2}{2} \right) = 0$$

이지만, 특이적분은 존재하지 않는다.

식 (4.8)에서 피적분함수가 유리함수이고 분모가 모든 실수  $x$ 에 대하여 0이 되지 않으며 분모의 차수는 분자의 차수보다 적어도 2 이상 큰 경우를 생각하자. 그러면 식 (4.8)의 극한이 존재한다. 따라서 적분값의 계산은 식 (4.9)로 시작하면 된다.

그림 4.4의 경로  $\gamma$ 를 따르는 적분  $\int_{\gamma} f(z)dz$ 를 생각하자.

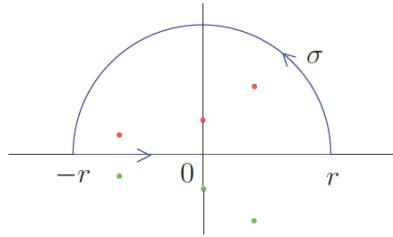


Fig. 4.4  $\gamma$  consists of the semicircular arc  $\sigma$  and the straight line joining  $-r$  to  $r$ .

Figure 4.4: 반원  $\sigma$ 와  $-r$ 과  $r$ 을 잇는 직선으로 구성된 경로  $\gamma$

$f$ 가 유리함수이므로  $z \mapsto f(z)$ 는 상반평면에서 (기껏해야) 유한개의 극을 가지므로,  $r$ 을 충분히 크게 잡으면 상반평면의 모든 극을  $\gamma$ 의 내부에 포함할 수 있다. 유수정리에 의하여

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im}(p_k) > 0} \operatorname{res}(f, p_k),$$

여기서, 상반평면에 있는 극에 대해서만 합을 계산한다. 이로부터

$$\int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im}(p_k) > 0} \operatorname{res}(f, p_k) - \int_{\sigma} f(z) dz.$$

$r$ 이 커짐에 따라 반원  $\sigma$ 를 따라 적분한 값이 0에 가까워짐을 보일 수 있다.  $f$ 의 분모와 분자의 차수가 2 이상이므로,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| > r_0)$$

를 만족하는  $M, r_0$ 가 존재한다. 따라서  $r > r_0$ 에 대하여

$$\left| \int_{\sigma} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{r^2} \pi r = \frac{M\pi}{r}.$$

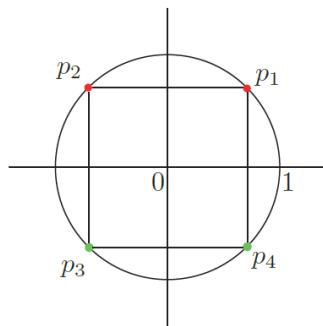
결론적으로  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\sigma} f(z) dz = 0$ 이 되어

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im}(p_k) > 0} \operatorname{res}(f, p_k).$$

이 방법을 예제에 적용해보자.

**예제 4.19.**  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 를 계산해보자. 함수  $f$ 를  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 라 정의하면 4개의 극을 갖는다.

$$p_1 = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \quad p_2 = \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right), \quad p_3 = \exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right), \quad p_4 = \exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right).$$



처음 두 개의 극은 상반평면에 있다. 유수를 계산하면,

$$\begin{aligned}\text{res}(f, p_1) &= \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{z - p_1}{1 + z^4} = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{1}{(1 + z^4) - (z + p_1^4)} \\ &= \frac{1}{\frac{d}{dz}(1 + z^4)\Big|_{z=p_1}} = \frac{1}{4p_1^3} = -\frac{1}{4} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{res}(f, p_2) &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{z - p_2}{1 + z^4} = \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{1}{(1 + z^4) - (z + p_2^4)} \\ &= \frac{1}{\frac{d}{dz}(1 + z^4)\Big|_{z=p_2}} = \frac{1}{4p_2^3} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right).\end{aligned}$$

따라서

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = 2\pi i \left( -\frac{1}{4} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) + \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \right) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$f$ 가 우함수 (모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $f(x) = f(-x)$ )이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

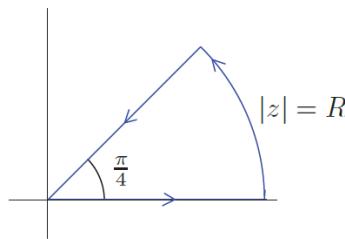
◇

피적분함수가 유리함수가 아닌 색다른 유형의 계산 예를 살펴보자.

**예제 4.20** (프레넬 적분). <sup>4</sup>

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

를 계산해보자. 경로  $\gamma$ 가 아래 그림과 같을 때 경로적분  $\int_{\gamma} \exp(iz^2) dz$ 을 생각하자.



<sup>4</sup>oi 적분은 광학에서 회절현상을 설명하기 위해 사용된다.

$\exp(iz^2)$ 은 전해석함수이므로 코시 적분정리에 의해

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \exp(iz^2) dz \\ &= \int_0^R \exp(ix^2) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(iR^2 \exp(2i\theta)) iR \exp(i\theta) d\theta \\ &\quad - \int_0^R \exp\left(it^2 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) dt. \end{aligned}$$

$R \rightarrow \infty$ 일 때, 가운데 적분값은 0으로 수렴함을 보이자. 우선

$$\begin{aligned} |\exp(iR^2 \exp(2i\theta)) iR \exp(i\theta)| &= |R \exp(R^2(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)))| \\ &= Re^{-R^2 \sin(2\theta)}. \end{aligned}$$

그림 4.5를 보면  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 인  $t$ 에 대하여

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t}$$

가 성립한다. 왜냐하면, 호  $PAQ$ 의 길이는  $2t$ 이고, 반원  $PBQ$ 의 길이  $\pi \sin t$ 보다 짧기 때문이다. (다른 방법으로  $t \mapsto \sin t$ 는  $[0, \pi]$ 에서 두번 미분하면  $-\sin t$ 로 음수가 되므로 위로 볼록하다. 따라서  $\sin t$ 의 그래프는 두 점  $(0, 0)$ 과  $(\pi/2, 1)$ 을 잇는 직선  $2t/\pi$ 보다 위에 있다.)

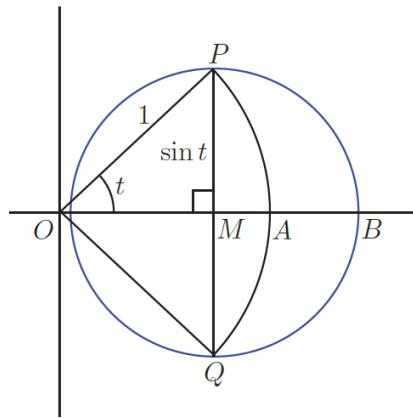


Fig. 4.5 Here  $P$  is any point on the circle with center 0 and radius 1 such that  $OP$  makes an angle  $t$  with the positive real axis. We reflect  $P$  in the real axis to get the point  $Q$ , and let  $M$  be the intersection of  $PQ$  with the real axis. With  $M$  as center and radius  $PM$ , we draw a circle, meeting the real axis on the right of  $A$  at the point  $B$ .

Figure 4.5: 원점을 중심으로 반지름 1인 원 위의 한점  $P$ 를 잡고  $OP$ 가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도를  $t$ 라 하자.  $P$ 를 실수축에 대칭시켜  $Q$ 를 잡고,  $M$ 을  $PQ$ 와 실수축의 교점이라 하자.  $M$ 을 중심으로 반지름  $PQ$ 인 원을 그릴 때  $A$ 의 오른쪽에서 실수축과 만나는 점을  $B$ 라고 정한다.

이 부등식에  $t = 2\theta$ 를 대입하면,

$$|\exp(iR^2 \exp(2i\theta)) iR \exp(i\theta)| = Re^{-R^2 \sin(2\theta)} \leq Re^{-R^2 \frac{4\theta}{\pi}}$$

이므로

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(iR^2 \exp(2i\theta)) iR \exp(i\theta) d\theta \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \frac{4\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})$$

은  $R \rightarrow +\infty$  일 때 0으로 수렴한다. 따라서,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \exp(ix^2) dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \exp\left(it^2 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

마지막 계산을 위해 잘 알려진 공식<sup>5</sup>을 사용했다.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

실수부와 허수부를 나누어 비교하면, 원하는 결과를 얻는다.

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

**연습문제 4.41.** 적분  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$  을 계산하라.

**연습문제 4.42.** 다음 적분값을 구하라.

$$(1) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx \text{ (단, } a > b > 0).$$

$$(3) \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$(4) \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

**연습문제 4.43.**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C$  는  $C(t) = \exp(i\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  일 때, 적분  $\int_C \frac{\exp z}{z^{n+1}} dz$  를 계산하고,

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!} \text{ 임을 유도하라.}$$


---

$$\begin{aligned} I := \int_0^\infty e^{-x^2} dx \text{ 라 하면, } I^2 &= \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**연습문제 4.44.**  $f$ 가  $z_0$ 에서 차수 1의 근을 가지면,  $1/f$ 는  $z_0$ 에서 차수 1의 극을 가진다.  $\text{res}\left(\frac{1}{f}, z_0\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$  임을 증명하라.

**연습문제 4.45.**  $\text{res}\left(\frac{1}{\sin z}, k\pi\right) = (-1)^k$  임을 증명하라.

**연습문제 4.46.**  $n \geq 0$  일 때, 피보나치 수열의  $n$ 번째 항  $f_n$ 은 점화식  $f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  ( $n \geq 2$ )로 주어진다.  $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ 이라 하자.

(1) 점화식으로부터 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $f_n \leq 2^n$ 임을 보여라.

(2)  $f_n \leq 3^n$ 로부터  $F$ 의 수렴반경이 적어도  $1/2$  이상임을 유도하라.

(3)  $f_n$ 의 점화식을 이용하여  $F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$ 임을 보여라.

힌트:  $zF(z)$ 와  $z^2F(z)$ 의 테일러 급수를 쓰고 더하라.

(4)  $\text{res}\left(\frac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)}, 0\right) = f_n$ 이 됨을 확인하라.

(5) 유수정리를 이용하여 다음을 증명하라.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

힌트:  $\frac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)}$ 을 원점을 중심으로 반지름  $R$ 인 원의 둘레로 적분하고  $R \rightarrow +\infty$  일 때 적분이 0으로 수렴함을 보여라.

## 4.10 참고

4.8은 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]을 거의 따랐다. 연습문제 4.11, 4.24, 4.33, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39는 [Franigan (1972)]에서 가져왔다. 연습문제 4.14는 [Volkovyskiĭ, Lunts, Aramanovich (1991)]을 인용하였다. 연습문제 4.15, 4.25는 [Rudin (1987)]에서 연습문제 4.28은 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]에서 연습문제 4.40은 [Ash and Novinger (2007)]에서 각각 인용하였다.



# Chapter 5

## 조화함수

마지막 장에서는 다음 내용을 다룬다.

- (1) 라플라스 방정식이라 불리는 편미분방정식의 해가 되는 실함수로서 조화함수를 공부한다.
- (2) 복소해석함수의 실수부와 허수부는 조화함수가 되며 국소적으로 역도 성립한다. 단순연결 영역에서는 전체적으로 역이 성립한다.
- (3) 조화함수와 복소해석함수의 상호관계로부터 도출되는 결과들, 특히 디리클레 방정식이라 불리는 경계값문제에 대한 결과를 살펴본다.

### 5.1 조화함수란?

**정의 5.1.**  $U$ 를  $\mathbb{R}^2$ 의 열린 부분집합이라고 하자. 함수  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 2차까지의 도함수가 존재하고 연속이면서(줄여서  $u \in C^2$ 라 한다) 라플라스 방정식

$$(\Delta u)(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in U$$

을 만족하면, 조화함수(harmonic function)라고 한다.

**예제 5.1.**  $U = \mathbb{R}^2$ 라 하자. 함수  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에서  $u(x, y) = x^2 - y^2$ 로 주어지면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2\end{aligned}$$

이므로  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2 - 2 = 0$ 이다.  $\mathbb{R}^2$ 에서  $u \in C^2$ 이고  $\Delta u = 0$ 으로  $u$ 는 조화함수이다. ◇

물론 모든 함수가 조화함수는 아니다.

**예제 5.2.**  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에서  $\tilde{u}(x, y) = x^2 + y^2$ 으로 정의된 함수  $\tilde{u}$ 를 생각하면,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

따라서  $\Delta \tilde{u}$ 는  $\mathbb{R}^2$ 의 모든 점에서 0이 되지 않기에  $\tilde{u}$ 는  $\mathbb{R}^2$ 의 어떤 열린 부분집합에서도 조화함수가 될 수 없다. ◇

**연습문제 5.1.** 다음 함수  $u$ 가 주어진 열린집합  $U$ 에서 조화함수임을 보여라.

$$(1) u(x, y) = \log(x^2 + y^2), U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(2) u(x, y) = e^x \sin y, U = \mathbb{R}^2.$$

**연습문제 5.2.** 열린집합  $U$ 에 정의된 모든 조화함수의 집합  $\text{Har}(U)$ 는 점별 연산에 대하여 실벡터 공간을 이룸을 보여라.

**연습문제 5.3.** 식 조화함수의 점별 곱으로 만든 함수도 조화함수가 되는가?

### 왜 조화함수에 신경써야 하는가?

조화함수는 라플라스 방정식을 만족하기 때문에 중요한데, 라플라스 방정식은 여러가지 이유 중 다음 두 가지 때문에 특히 중요하다.

(1) 라플라스 방정식은 편미분방정식(PDE)의 3가지 유형 중에서 타원형 방정식이라는 중요한 유형에 속한다.

PDE 유형	예
타원형	라플라스 방정식 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
포물형	확산 방정식 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
쌍곡형	파동 방정식 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(2) 라플라스 방정식은 많은 응용분야에서 사용된다. 다음과 같이 물리학에서 사용되는 예를 살펴보자. 유체역학에서 유체흐름의 “속도 포텐셜(velocity potential)”은 라플라스 방정식을 만족한다. 한편, 정전기학에서는 정전기 전위(electronic potential)가 라플라스 방정식을 만족한다. 라플라스 방정식은 확률과정(stochastic process)과도 중요한 연결고리를 갖는다. 아래에서 이를 간단히 알아보자. 열린 단위원판  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 을 생각하자. 입자가 한점  $z \in \mathbb{D}$ 에서 브라운 운동을 따른다고 하자. (예를 들면, 무작위 운동을 만드는 물분자에

의해 충격받는 물 속의 꽃가루를 생각하자.) 직관적으로 무작위 운동으로 언젠가는 입자가  $\mathbb{D}$ 의 경계  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 를 벗어난다.  $z$ 에서 출발한 입자가 처음으로 단위원  $\mathbb{T}$ 를 벗어나는 점을  $\zeta_z$ 라고 하자. 그러면 확률변수  $\zeta_z$ 는 단위원 위에 표시된다. 그럼 5.1을 참고 하라. 이제 연속함수  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 주어졌다고 하자. 그러면  $f(\zeta_z)$ 를  $\mathbb{T}$ 에 정의된 실수 값을

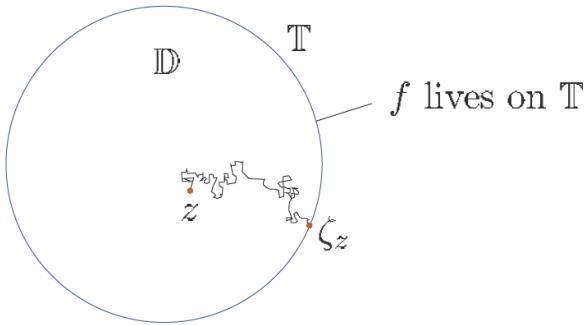


Fig. 5.1 Brownian motion and the Dirichlet problem.

Figure 5.1: 브라운 운동과 디리클레 문제

갖는 확률변수로 생각할 수 있다. 그 기댓값을  $\mathbb{E}(f(\zeta_z))$ 으로 표기하자. 이 값은 어디에서 출발하는지에 따라 달라진다. 즉,  $z$ 에 의존하는 값이다.  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 을  $u(z) = \mathbb{E}(f(\zeta_z))$  ( $z \in \mathbb{D}$ )로 정의하자. 이 때,  $u$ 는 조화함수이고 실제로 디리클레 문제의 해가 됨이 알려져 있다. 이는 경계값 문제로 경계  $\mathbb{T}$ 에서 함수  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어져 있을 때,  $\mathbb{T}$ 의 내부  $\mathbb{D}$ 에서는 라플라스 방정식을 만족하고 경계  $\mathbb{T}$ 까지 연속함수로 확장되어  $f$ 와 일치하는 함수  $u$ 를 찾는 문제이다.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \mathbb{D} \text{에서}, \\ u|_{\mathbb{T}} = f. \end{cases}$$

## 5.2 조화함수와 복소해석함수의 연결고리는 무엇인가?

조화함수는 단지 실해석의 영역에 속해야 하는 것처럼 보일 수 있다. 이 절에서는 복소해석학에 대한 연구를 충분히 정당화할 수 있는 두 가지 결과를 알아볼 것이다. 개략적으로 말하면, 열린집합에 정의된 조화함수는 국소적으로 복소해석함수의 실수부라는 조건과 동치이다.

**정리 5.1.**

- (1)  $U$ 가  $\mathbb{C}$ 의 열린 부분집합이고,
- (2)  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ 가  $U$ 에서 복소해석함수이면,

$$\begin{cases} u := \operatorname{Re}(f), \\ v := \operatorname{Im}(f) \end{cases}$$

는  $U$ 에서 조화함수이다.

이 정리의 역도 참인데 다음과 같이 쓸 수 있다.

**정리 5.2.**

(1)  $U$ 가 단순연결영역이고,

(2)  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $U$ 에서 조화함수이면,

$f : u + iv$ 가  $U$ 에서 복소해석함수가 되도록 하는 조화함수인  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다.

정리의 결론으로 얻은 함수  $f$ 는  $\operatorname{Re}(f) = u$ 와  $\operatorname{Im}(f) = v$ 를 만족한다. 따라서 정리에서 말하고자 하는 내용은 단순연결영역의 조화함수는 어떤 복소해석함수의 실수부가 된다는 것이다. 단위원판은 단순연결영역이므로 단위원판의 모든 조화함수는 (적어도 정의된 단위원판에서는) 국소적으로 복소해석함수의 실수부가 된다. 단순연결영역의 조건이 불필요한 것이 아님을 연습문제 5.5에서 보게 될 것이다. 즉, 단순연결이 아닌 영역에 주어진 조화함수는 영역 전체에서 복소해석함수의 실수부로 표현되지 못할 수도 있다. 하지만 일단 미루고 첫번째 결과에 집중하도록 한다. 정리 5.1을 증명하기 전에 예제 5.1을 다시 살펴보자.

**예제 5.3.** 앞의 예제에서  $U = \mathbb{R}^2$ 이고  $u = x^2 - y^2$ 이면,  $u = \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2xy i)$ 이고  $z^2$ 은 전해석함수이다. 따라서 정리 5.1을 이용해도  $u$ 가  $\mathbb{R}^2$ 에서 조화함수임을 임을 알 수 있다. 실제로 정리 5.1로부터  $v := 2xy = \operatorname{Im}(z^2)$ 도 조화함수이다. (물론 직접 계산하여 확인할 수도 있다.)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

이므로  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ 이다.)

한편, 예제 5.2와 정리 5.1로부터  $\mathbb{C}$ 의 임의의 열린 부분집합  $U$ 에서  $\tilde{u} := x^2 + y^2$ 은 복소해석함수의 실수부가 될 수 없다. ◇

**증명** (정리 5.1)

$(x, y) \in U$ 에 대하여  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 로 쓸 수 있다.  $f$ 가 무한번 미분가능하므로,  $u, v$ 는 모든 차수의 편미분이 존재하고 코시-리만 방정식에서

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \stackrel{(C-R)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \stackrel{u \in C^2}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{(C-R)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

이므로  $u$ 는 조화함수이다. 유사한 방법으로

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{(C-R)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \stackrel{v \in C^2}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \stackrel{(C-R)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

이므로  $v$ 도 조화함수이다. (다른 방법으로,  $v = \operatorname{Re}(-if)$ 를 이용하여 증명할 수도 있다.)  $\square$

이제 열린 집합이 단순연결영역일 때 위의 결과의 역이 성립한다는 정리 5.2를 증명해보자. 앞에서 언급한 것처럼, 일반적인 영역에 대하여 조화함수는 영역 전체에 정의된 복소해석함수의 실수부로 쓸 수 없을 수도 있다. 연습문제 5.5의 예와 같이

- (1)  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (단순연결영역이 아니다)
- (2)  $u := \log(x^2 + y^2)$  ( $U$ 에서 조화함수이다)

로 정하면,  $U$ 에서  $u = \operatorname{Re}(f)$ 를 만족하고  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 가 존재할 수 없다.

### 증명 (정리 5.2)

실수부가  $u$ 인 복소해석함수  $f$ 를 만들고  $v := \operatorname{Im}(f)$ 가 조화함수임을 보이도록 하자. 우선

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

라 하자.  $g$ 가 복소해석함수임을 보이고  $g$ 의 부정적분을 만들면 우리가 원하는  $f$ 가 된다.  $g$ 가 복소해석함수임을 보이기 위해 정리 2.2를 사용한다. 우선  $u$ 가 조화함수이므로

$$\operatorname{Re}(g) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \operatorname{Im}(g) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

가 연속인 편도함수를 갖는다. 또한  $u$ 가 라플라스 방정식을 만족한다는 것을 이용하면 실수부와 허수부는 코시-리만 방정식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re}(g)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Im}(g)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re}(g)) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im}(g))\end{aligned}$$

따라서  $g$ 는  $U$ 에서 복소해석함수이다. 정리 3.5에 의하여 단순연결영역  $U$ 에서 부정적분  $G$ 를 갖는다.  $G = \tilde{u} + i\tilde{v}$ 를 실수부  $\tilde{u}$ 와 허수부  $\tilde{v}$ 로 나누어 보면

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = g = G' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \tag{5.1}$$

이고

$$\frac{\partial(u - \tilde{u})}{\partial x} = 0$$

적분학의 기본정리에 의하여  $u - \tilde{u}$ 는 국소적으로 수평방향을 따라 상수이다. 식 (5.1)에 코시-리만 방정식을 적용하면

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \stackrel{(C-R)}{=} -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

에서

$$\frac{\partial(u - \tilde{u})}{\partial y} = 0$$

이므로  $u - \tilde{u}$ 는 국소적으로 수직방향으로도 상수이다. 영역  $U$ 의 두 점은 계단형 경로로 연결가능 하므로  $\tilde{u} - u$ 는 상수함수이다. 상수를  $C(\in \mathbb{R})$ 라 하자. 그러면

$$f := G - C = (\tilde{u} - C) + i\tilde{v} = u + iv$$

는  $U$ 에서 복소해석함수이며  $u = \operatorname{Re}(f)$ 와  $v := \tilde{v} = \operatorname{Im}(G)$ 은 조화함수인  $f = u + iv$ 을 얻어 증명이 끝난다.  $\square$

**정의 5.2.** 열린집합  $U$ 에 정의된 조화함수  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  $f := u + iv$ 가 복소해석함수가 되는 조화함수  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ 를  $u$ 의 **조화켤레함수**(harmonic conjugate)라 한다.

**예제 5.4.**  $v := 2xy$ 는 예제 5.1에서 언급한  $u := x^2 - y^2$ 의 조화켤레함수이다. 왜냐하면,  $z = x + iy$  라 할 때,

$$f := u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi = (x + iy)^2 = z^2$$

은 전해석함수가 된다.

조화켤레함수에 상수를 더하면 새로운 조화켤레함수가 되므로 조화켤레함수는 유일하지 않다. 정리 5.2는 단순연결영역에서 모든 조화함수가 조화켤레함수를 가진다는 것을 보장한다. 하지만, 조화켤레함수를 찾는데 특별히 유용하지는 않다.(증명을 따른다면 부정적분  $G$ 를 직접 찾아야 하기 때문이다.) 좀 더 직접적인 방법은 다음 예제와 같이 코시-리만 방정식을 이용하는 것이다.

**예제 5.5.**  $u = -(\sin x)(\sinh y)$ 라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= +(\sin x)(\sinh y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -(\sin x)(\sinh y)\end{aligned}$$

이므로  $u$ 는  $\mathbb{R}^2$ 에서 조화함수이다.  $\mathbb{R}^2$ 이 단순연결영역이므로 조화켤레함수가 존재함을 알 수 있다. 어떻게 찾을 수 있을까?  $v$ 가 조화켤레함수라면  $u + iv$ 가 복소해석함수이므로  $u$ 와  $v$ 는 코시-리만 방정식을 만족한다. 따라서

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = +(\sin x)(\cosh y), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -(\cos x)(\sinh y). \tag{5.3}$$

식 (5.2)에서  $y$ 를 고정하고  $x$ 에 대하여 적분하면

$$v = -(\cos x)(\cosh y) + C(y), \quad (5.4)$$

여기서 상수  $C(y)$ 는  $y$ 에는 의존한다.  $C(y)$ 가 미분가능하다고 가정하면,

$$-(\cos x)(\sinh y) \stackrel{(5.3)}{=} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{(5.4)}{=} -(\cos x)(\sinh y) + \frac{dC}{dy}(y).$$

따라서

$$\frac{dC}{dy}(y) = 0$$

이므로  $C(y) = C$ 이다. 상수  $C$ 는 임의로 잡을 수 있는데 특별히  $C = 0$ 으로 선택하자. 그러면

$$v = -(\cos x)(\cosh y)$$

를  $u$ 의 조화켤레함수의 후보로 택할 수 있다. 이 선택이 맞는지 검증하기 위해  $u, v$ 가 코시-리만 방정식을 만족하는지 빠르게 확인할 수 있어  $f : u + iv$ 는 복소해석함수이다. 한편, 연습문제 1.37 을 계산을 활용하면  $f$ 가 복소해석함수임을 직접 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} f &= u + iv = -(\sin x)(\sinh y) - i(\cos x)(\cosh y) \\ &= -i((\cos x)(\cosh y) - i(\sin x)(\sinh y)) = -i \cos z \end{aligned}$$

이므로  $f$ 는 전해석함수이다.  $\diamond$

**연습문제 5.4.** 다음 조화함수의 조화켤레함수를 찾아라.

$$e^x \sin y, \quad x^3 - 3xy^2 - 2y, \quad x(1+2y).$$

**연습문제 5.5.**  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 의 실수부가  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 에서  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ 이 될 수 없음을 보여라.

힌트:  $v$ 를  $u$ 의 조화켤레함수라 하면,  $h(z) := z^2 \exp(-(u + iv))$ 는 복소해석함수이다.  $|h|$ 를 찾고  $h' = 0$ 임을 보여라.  $h' = 0$ 로부터  $2/z$ 가  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 부정적분을 가지게 되는데 이는 불가능하다.

**연습문제 5.6.**

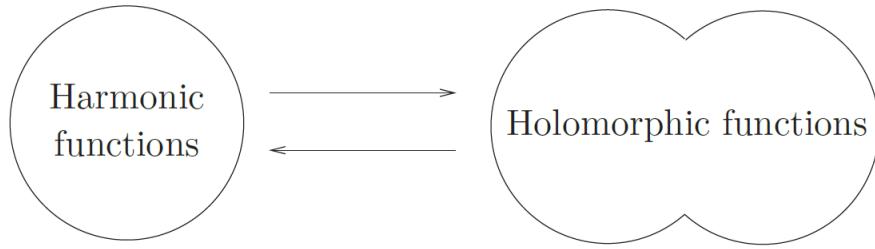
$$f(x + iy) = x^3 + y^3 + iv(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

이  $\mathbb{C}$ 에서 복소해석함수가 되는  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 찾을 수 있는가?

### 5.3 (복소해석함수 $\leftrightarrow$ 조화함수)의 양방향성의 결과들

앞에서 정리 5.1과 5.2의 결과로부터 조화함수의 실해석학 세계와 복소해석학 세계 사이의 유용한 상호 작용을 살펴보았다.

앞의 3개의 장에 걸쳐 복소해석함수가 갖는 많은 성질을 살펴보았다. 이제 이로부터 조화함수가 갖는 중요한 성질을 유도해보자. 특히, 다음 결과를 강조하고자 한다.



- (1)  $u$ 가 조화함수이면  $C^\infty$
- (2) 조화함수에 대한 평균값정리
- (3) 조화함수의 최대원리
- (4) 디리클레 방정식 해의 유일성

### 5.3.1 매끄러운 조화함수

**파름정리 5.1.** 조화함수는 무한번 미분가능하다.

(조화함수의 정의는 단지 두번 미분가능한 성질만 요구한다. 그런데 라플라스 방정식을 만족한다는 성질로부터 무한번 미분가능하다는 놀라운 결과가 얻어진다. 이런 종류의 결과를 편미분방정식 이론에서 정칙성(regularity)이라 부른다.)

#### 증명

$u$ 가 열린집합  $U$ 의 조화함수이고  $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ 라 하자. 그러면  $z_0$ 를 중심으로 반지름  $r$ 인 원판  $D$ 가  $U$ 에 포함되게 하는  $r > 0$ 이 존재한다. 그런데  $u|_D$ 가  $D$ 에서 조화함수이고  $D$ 는 단순연결영역이다. 따라서  $D$ 에서  $\operatorname{Re}(f) = u$ 를 만족하는 복소해석함수  $f$ 가 존재한다.  $D$ 에서  $f$ 는 무한번 복소미분 가능한 함수이므로  $u$ 가  $D$ 에서, 특히  $z_0$ 에서 무한번 미분가능하다.  $z_0$ 의 선택을 임의로 할 수 있기 때문에 모든 점에서 무한번 미분가능하다.  $\square$

**연습문제 5.7.** 조화함수의 모든 편미분이 조화함수임을 보여라.

### 5.3.2 평균값 정리

코시 적분공식을 이용하면 조화함수의 평균값 정리를 바로 얻을 수 있다. 어떤 점에서 조화함수는 그 점을 중심으로 하는 원에서의 함수값의 평균으로 주어진다.

**정리 5.3 (조화함수의 평균값 정리).**

- (1)  $U$ 가 열린집합이고,
- (2)  $U$ 에서  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 조화함수이고,
- (3)  $z_0 \in U$ ,
- (4) 원판  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset U$ 인  $R > 0$ 이 존재하면,

모든  $r$  ( $0 < r < R$ )에 대하여  $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r \exp(it)) dt$ 이다.

### 증명

원판  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ 이 단순연결영역이므로  $D$ 에서 실수부가  $u$ 인 복소해석함수  $f$ 가 존재한다. 한편, 코시 적분공식에 의하면,  $C(t) = z_0 + r \exp(it)$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )로 주어진 원형경로  $C$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_0 + r \exp(it))}{r \exp(it)} ir \exp(it) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(it)) dt. \end{aligned}$$

양변의 실수부만 취하면 원하는 결과를 얻는다.  $\square$

### 5.3.3 최대원리

최대절대값정리(140페이지 참고)로부터 다음 정리를 얻는다.

**정리 5.4 (최대원리).**

- (1)  $U$ 가 단순연결영역이고,
- (2)  $U$ 에서  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 조화함수이고,
- (3)  $z_0 \in U$ 가 모든  $z \in U$ 에 대하여  $u(z_0) \geq u(z)$ 를 만족하면,

$u$ 는  $U$ 에서 상수함수이다.

### 증명

$u$ 를 실수부로 가지며  $U$ 에 정의된 복소해석함수  $f$ 가 존재한다. 그러면  $g(z) = \exp(f(z))$ 로 정의하면  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ 도  $U$ 에서 복소해석함수이다.

$$|g(z_0)| = |\exp(f(z_0))| = e^{\operatorname{Re}(f(z_0))} = e^{u(z_0)} \geq e^{u(z)} = |g(z)| \quad (z \in U)$$

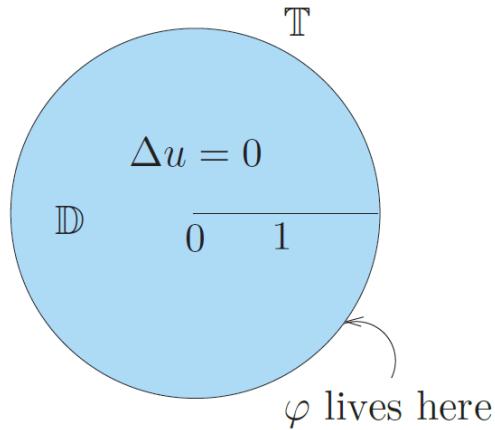
최대절대값정리를  $g$ 에 적용하면  $g$ 는  $U$ 에서 상수함수이다. 그러면  $|g|$  또한  $U$ 에서 상수, 즉,  $|g| = e^{\operatorname{Re}(f)}$ 가 상수이다. 양변에 (실함수) 로그를 취하면  $u$ 는  $U$ 에서 상수함수이다.  $\square$

## 5.4 디리클레 문제의 해의 유일성

최대원리로부터 디리클레 문제의 해가 유일하다는 중요한 결론을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \\ \mathbb{T} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\end{aligned}$$

라고 하자.



디리클레(Dirichlet) 문제는 다음과 같다.

주어진 연속함수  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여

- (1)  $u$ 는  $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ 에서 연속이고,
- (2)  $u|_{\mathbb{T}} = \varphi$ ,
- (3)  $u$ 는  $\mathbb{D}$ 에서 연속인 2차편도함수를 가지고,
- (4)  $\mathbb{D}$ 에서  $\Delta u = 0$ 을 만족하는

$u : \mathbb{D} \cup \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 찾아라.

주어진 함수  $\varphi$ 를 경계값이라고 부른다. 디리클레 문제를 푸는데 관심을 가지는 이유 중 하나는 열 전도, 정전기학, 유체역학 등의 응용에 필요하기 때문이다. 최대원리를 이용하면 다음 결과를 보일 수 있다.

**명제 5.1.** 디리클레 문제의 해는 유일하다.

증명

$u_1, u_2$ 가 경계값이  $\varphi$ 로 주어진 디리클레 문제의 서로 다른 해라고 하자. 경계  $\mathbb{T}$ 에서는  $u_1 = u_2 \circ |$ 으로  $u_1$ 과  $u_2$ 는  $\mathbb{D}$  내부의 어떤 점에서 다른 값을 가져야 한다. 그 점을  $w \in \mathbb{D}$ 라 하고  $u_1(w) > u_2(w)$ 라고 해도 일반성을 잃지 않는다. 그러면,  $u := u_1 - u_2$ 는 다음을 만족한다.

- (1)  $u|_{\mathbb{T}} = 0$ ,
- (2)  $u(w) > 0$ ,
- (3)  $u$ 는  $\mathbb{D}$ 에서 조화함수이다.

$z_0 \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ 를 콤팩트 집합  $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ 에서 실변수 연속함수인  $u$ 를 최대로 하는 점이라고 하자. (1), (2)에서  $z \notin \mathbb{T}$ 이므로  $z_0 \in \mathbb{D}$ 이다. 그런데 최대원리에 의해  $u$ 는  $\mathbb{D}$ 에서 상수함수가 되어야 한다.  $u$ 는  $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ 에서 연속이므로  $\mathbb{T}$ 에서  $u$ 는 0이다. 따라서  $u$ 는  $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ 의 모든 점에서 0이 되어 가정  $u_1 = u_2$ 에 모순되어 증명이 끝난다.  $\square$

**참고 5.1.** 경계값이  $\varphi$ 로 주어진 디리클레 문제의 해는 다음 포아송 적분공식(Poisson integral formula)으로 나타낼 수 있다.

$$u(r \exp(it)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \varphi(\exp(i\theta)) d\theta \quad (\exp(i\theta) \in \mathbb{T}).$$

코시 적분공식을 이용하면 이 공식을 유도할 수 있는데 약간의 계산 기술이 필요하여 여기서는 증명을 생략한다.

**연습문제 5.8** (반평면에서의 디리클레 문제). 경계값으로  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \circ |$  주어졌을 때, 닫힌 반평면  $y \geq 0$ 에 정의된 연속 실함수로  $y > 0$ 에서 조화함수이고,  $h(x, 0) = b(0)$ 를 만족하는  $h$ 를 찾는 문제를 생각하자.

- (1)  $b$ 가 다항식이면,  $h(x, y) = \operatorname{Re}(p(x + iy))$ 로  $h$ 를 택하면 됨을 보여라.

- (2)  $b$ 가

$$b(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

으로 주어지면,  $(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(b(x + iy))$ 는 해가 될 수 없다. (왜냐하면,  $z = i$ 에서 극을 갖기 때문이다.)

$$h(x, y) := \operatorname{Re}\left(\frac{i}{z + i}\right) = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$$

라 하면, 주어진 디리클레 문제의 해가 됨을 보여라.

**연습문제 5.9.** 조화함수  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여  $u(x, y) > 0$ 를 만족한다면,  $u$ 는 상수함수임을 보여라.

힌트: 실수부로  $u$ 를 가지는 전해석함수  $f$ 에 대하여  $\exp(-f)$ 를 생각해보자.

**연습문제 5.10.** 라플라스 방정식의 정칙성이 항상 저절로 얻어지는 것은 아니다. 불연속함수가 라플라스 방정식을 만족하는 예를 소개해 보자.  $z \neq 0$ 에 대하여  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를  $e^{-1/z^4}$ 의 실수부로 원점에서는 0으로 정의하자.

(1)  $u$ 는 0에서 불연속임을 보여라.

(2)  $u(x, 0) = e^{-1/x^4}$ ,  $u(0, y) = e^{-1/y^4}$ 임을 확인하라.

(3)  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에 정의된 복소해석함수의 실수부로서  $u$ 는  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ 에서 라플라스 방정식을 만족함은 이미 알고 있다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0)$$

가 존재함을 보여라. 또한  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0) = 0$ 임을 증명하라.

**연습문제 5.11.**  $D_1, D_2$ 가  $\mathbb{C}$ 의 영역이고  $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ 가 복소해석함수라고 하자.  $h : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 이 조화함수이면,  $h \circ \varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 도 조화함수임을 보여라. 이제  $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ 가 전단사 복소해석함수이고 역함수  $\varphi^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$ 도 복소해석함수라고 가정하자. 이러한 함수를 **쌍정칙함수**(biholomorphism)라고 한다. 함수  $h : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 이 조화함수인 것은  $h \circ \varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 이 조화함수인 조건과 동치임을 보여라.

두 영역 사이에 쌍정칙함수가 존재하면 한 영역의 조화함수(복소해석함수도)를 다른 영역으로 옮길 수 있다.  $D_1$ 이 좋은 영역(반평면 또는 원판)이고  $D_2$ 가 복잡한 영역일 때  $D_2$ 의 문제(디리클레 문제와 같은)를  $D_1$ 의 문제로 바꾸고  $D_1$ 에서 해를 찾은 후 다시  $D_2$ 로 옮기는 것이 가능하다는 장점이 있다.

우선 주어진 영역  $D_1$ 과  $D_2$ 에 대하여 쌍정칙함수가 존재하는지에 대한 질문이 자연스럽다. 이 질문에 대한 답은 리만 사상 정리(Riemann mapping theorem)에서 주어진다. 증명은 이 책의 범위를 벗어나기 때문에 다루지 않으니 필요하면 [Conway(1978)]를 참고하라.

**정리 5.5** (리만 사상 정리). 단순연결영역  $D$ 가  $\mathbb{C}$ 의 진부분집합( $D \neq \mathbb{C}$ )이라고 하자. 그러면 쌍정칙함수  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 가 존재한다.

이 결과는 복소평면 전체가 아닌 임의의 두 단순연결영역 사이에 쌍정칙함수가 존재함을 보장한다. ( $\mathbb{D}$ 를 통하여) 하지만, 실제로 쌍정칙함수를 찾는 알고리즘이 증명에 주어지는 것은 아니다.  $\mathbb{H} := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$ 에 대하여 **뫼비우스(Möbius) 변환**  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$

$$\varphi(s) = \frac{s - 1}{s + 1}, \quad s \in \mathbb{H}$$

은 우측 반평면  $\mathbb{H}$ 와 원판  $\mathbb{D}$ 사이의 쌍정칙함수임을 보여라.

## 5.5 참고

연습문제 5.5, 5.6, 그리고 정리 5.2는 [Beck, Marchesi, Pixton, Sabalka (2008)]에서 인용하였으며, 연습문제 5.8은 [Flanigna (1973)]을 기초로 만들어졌다.

