빠르게 따라잡는 복소해석학
A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진 譯

Update on July 10, 2022

목 차

목차

머리말

우선 복소함수론은 무엇이고 왜 중요한지 간단히 살펴보자. 복소수라는 개념 만큼은 다들 언젠가 배웠을 것이므로 복소수에 친숙하다는 가정하에 이야기를 전개한다. 1장과 그 이후에 개념을 처음부터 만들어갈 예정이니 독자들은 머리말에서 이해하지 못한 부분에 대하여 걱정할 필요는 없다.

복소해석학이란?

실해석학(real analysis)에서는 실수에 대한 미적분을 엄밀하게 정의하며 실수열의 수렴성, 실변수 함수의 연속성, 미분, 적분의 개념을 공부한다. 이를 바탕으로 복소해석학(complex analysis)은 복소수를 대상으로 하여 유사한 개념들을 공부하는 것으로 추측해 볼 수 있다. 이 예상은 부분적으로 참이다. 미분을 공부하기 전까지는 실해석학과 비교할 때 복소해석학만의 새로운 특징이 보이지 않는다. 하지만 미분부터는 복소해석학과 실해석학의 근본적인 차이가 나타난다. 따라서 복소해석학은 해석학을 복소수 범위로 단순 확장한 것이 아니며, 훨씬 더 특별한 의미를 갖는다.

복소해석학은 “**복소 의미로 미분가능한**” 함수를 다룬다.

실변수 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

을 만족하는 실수 L이 존재하면 함수 f가 $x_0 \in \mathbb{R}$에서 **미분가능**하다고 한다. 즉, 모든 $\epsilon > 0$에 대하여, 대응되는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ 이면 } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \epsilon \text{ 을 만족한다.}$$

다른 방법으로 표현하면, 거리 ϵ이 주어질 때, x_0는 아니면서 충분히 가까운 모든 x에 대하여 변화율

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

와 실수 L의 거리가 ϵ보다 작게 만들 수 있다.

 목 차

같은 방법으로, 복소함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$에 대하여

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L$$

을 만족하는 복소수 L이 존재하면 복소함수 f가 $z_0 \in \mathbb{C}$에서 **복소미분가능**하다고 한다. 즉, 모든 $\epsilon > 0$에 대하여, 대응되는 $\delta > 0$가 존재하여

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ 이면 } \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L \right| < \epsilon \text{ 을 만족한다.}$$

유일한 차이는 **복소수 절대값**으로 거리를 나타낸 것 뿐이며 직관적인 방법으로 실변수 함수의 미분을 일반화 한 것으로 보인다.

하지만, 단순한 일반화로 생각했던 것과는 달리 깊은 차이가 있으며, 복소미분 가능한 함수들의 집합은 미분가능한 실변수 함수들의 집합과는 근본적인 차이가 있음을 살펴볼 것이다. 이와 관련된 예제를 살펴보자.

예제 0.1. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ 라고 정의하자.

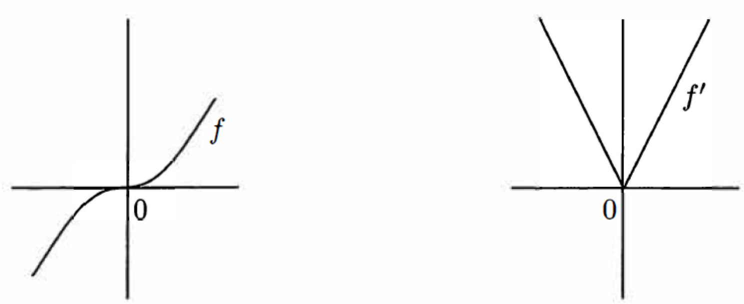


Fig. 0.1 Graphs of the functions f and its derivative f'.

Figure 0.1: 함수 f와 도함수 f'의 그래프

그러면 f는 모든 점에서 미분가능하며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

$x \neq 0$일 때는 $f'(x)$를 직접 계산하여 구할 수 있고, $f'(0) = 0$임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$x \neq 0$에 대하여

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| = |x - 0|$$

 목 차

이므로 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \epsilon(> 0)$으로 잡으면 $0 < |x - 0| < \delta$일 때,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = |x - 0| < \delta = \epsilon$$

을 얻는다. 하지만, f'은 원점 $x = 0$에서 미분가능하지 않다. 증명은 연습문제 0.1를 참고하라. 요약하면, 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 모든 실수에서 미분가능하지만 그 도함수 f'은 모든 점에서 미분이 가능하지는 않다.

이와 대조적으로, 복소함수 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$가 모든 복소수에서 복소미분가능하다면, 무한번 복소미분가능함을 공부할 예정이다. 특히, 도함수 F'도 모든 복소수에서 복소미분가능하다. 실해석학에 익숙하다면 이는 분명 예상을 벗어난 결과이다. 우리는 복소해석학에서 이러한 놀라운 결과가 발생하는 이유에 대하여 살펴볼 예정인데, 복소미분가능하다는 것은 이러한 현상을 가능하게 하는 "엄일한" 조건을 내포하고 있다. 또한, 이 엄밀함은 복소수의 곱셈의 기하학적인 특성에 따른 결과임을 보일 것이다. $\diamondsuit$

연습문제 0.1. 식 (0.1)에서 정의된 함수 $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 0에서 미분 불가능함을 보여라.

왜 복소해석학을 공부하는가?

복소해석학이 단지 실해석학의 색다른 일반화로만 보일지 모르지만 사실 그렇지 않다. 복소해석학은 수학의 모든 분야에서 필수적이다. 실제로 실해석학과 복소해석학은 뗄 수 없는 관계에 있으며, 응용 과학분야에서도 복소해석학은 중요한 역할을 하고 있음을 살펴볼 예정이다. 여기서는 복소해석학을 공부해야 하는 몇가지 이유를 간단히 나열해보자.

(1) **편미분방정식:** 복소미분가능한 함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 의 실수부와 허수부 $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$는 실함수가 되며, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $u(x, y) := \mathrm{Re}(f(x, y))$, $v(x, y) := \mathrm{Im}(f(x, y))$로 쓸 수 있다.

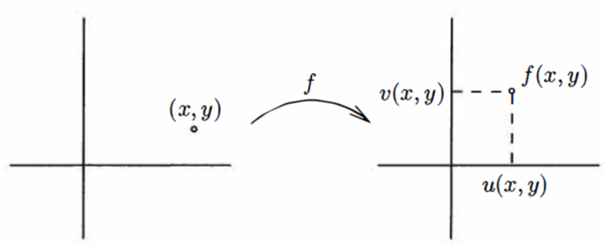


Fig. 0.2 The real and imaginary parts u, v of f.

Figure 0.2: 복소함수 f의 실수부 u와 허수부 v

실수부와 허수부는 라플라스 방정식이라 불리는 중요한 편미분방정식을 만족한다:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

마찬가지로 $\Delta v = 0$도 성립한다. 라플라스 방정식은 물리학과 같은 많은 응용문제에서 유도되는 중요한 방정식이다. 예를 들면, 전자기학, 시간에 불변하는 열전도 방정식, 비압축성 유체, 브라운 운동 등에 사용된다.

(2) **실해석:** 복소해석학을 이용하면, 다음 실적분을 쉽게 계산할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

이 문제들은 실수에서 정의된 것이나 복소해석학을 이용하여 풀 수 있다.

또한, 복소해석학을 이용하면 실해석학에서 발생하는 문제들을 명확히 할 수 있다. 예를 들어 다음 함수를 생각해보자.

$$f(x) := \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

그러면 f는 $x = \pm 1$에서 정의되지 않아 특이점을 갖는다. 하지만, 구간 $(-1,1)$에서는 잘 정의된다. 등비급수

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

는 $|x^2| < 1$에서, 즉, $|x| < 1$에서 수렴하므로 $x \in (-1,1)$에 대하여

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} = f(x).$$

f가 $x = 1$과 $x = -1$에서 특이점을 가지므로 위의 급수표현은 $x \in (-1,1)$에 대해서만 유효함은 당연해 보인다. 이제 새로운 함수 g를 다음과 같이 생각해보자.

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

등비급수

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

는 $|-x^2| < 1$에서, 즉, $|x| < 1$에서 수렴하므로 $x \in (-1,1)$에 대하여

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} = g(x).$$

따라서 g는 $x = 1$과 $x = -1$에서 특별히 문제가 될 이유가 없음에도 불구하고 함수 g도 $x \in (-1,1)$에 대해서만 유효한 급수표현을 갖는다. 이 미스테리는 책의 후반부에서 해결할 예정이며 다음 복소함수를 살펴볼 필요가 있다.

$$F(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad G(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

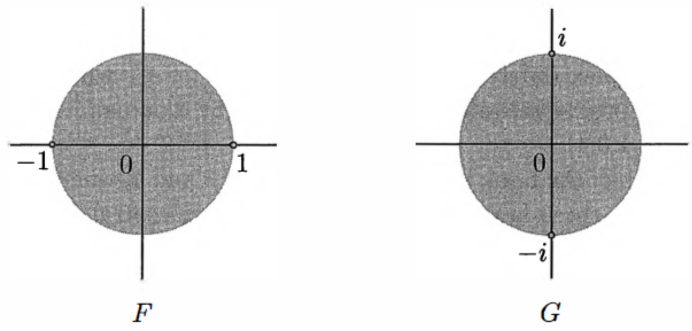


Fig. 0.3 Singularities of F and G.

Figure 0.3: 복소함수 F와 G의 특이점

두 함수의 정의역을 $\mathbb{R}$로 한정하면 각각 f와 g를 얻는다. 특히, 복소함수 G는 이제 $z = \pm i$에서 특이점을 갖는다. 그림에서 $z = 0$을 중심으로 급수 전개가 유효한 최대 원판은 G의 특이점을 포함하지 않아야 함을 알 수 있다.

(3) **응용 문제:** 푸리에 변환, 라플라스 변환, z-변환과 같이 응용 문제 해결에 사용되는 많은 도구들은 복소함수 이론에 의존한다. 이 도구들은 여러 응용 분야에서 나타나는 미분방정식의 해결에 유용하다. 복소해석학은 수리물리와 공학분야의 응용에 중요한데, 예를 들면, 제어이론, 신호처리 등이 있다.

(4) **해석 정수론:** 자연수와 관련된 많은 문제가 복소해석학을 이용하여 해결된다는 것은 아마도 놀라울 것이다. 예를 들면, 소수정리는 큰 자연수 n에 대하여 n보다 작은 소수의 개수 $\pi(n)$을 점근적으로 판정하는 방법을 알려준다.

정리 0.1. (소수정리)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/(\log n)} = 1.$$

소수정리는 리만 제타함수라는 복소미분가능 함수의 성질을 이용하여 증명할 수 있음이 밝혀졌다. 리만 제타함수와 관련된 해석 정수론의 유명한 미해결 문제로 리만가설이 있다. 리만 제타함수의 모든 비자명해는 복소평면에서 직선 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 위에 존재한다는 것이다. 우리는 리만 제타함수를 연습문제 **??**에서 만날 것이다.

복소해석학에서는 무엇을 배우는가?'

이 과정의 중심이 되는 주제는 다음과 같다.

복소영역에 정의된 복소해석함수들

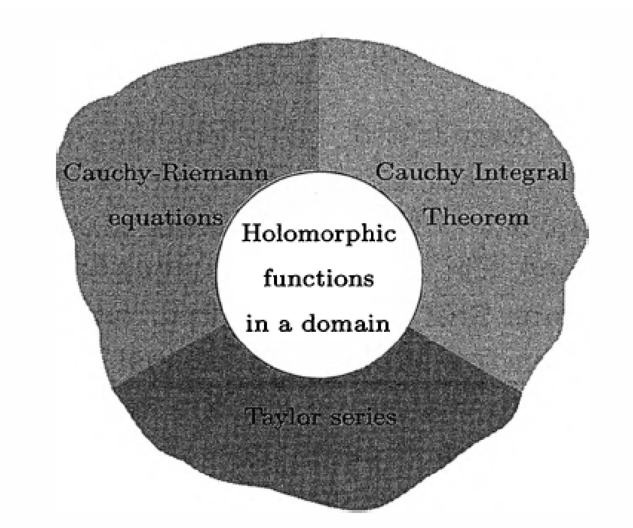
즉, 복소영역 D에 정의된 복소미분가능 함수 $f\colon D \to \mathbb{C}$가 대상이다. “복소영역” D에 대한 정확한 의미는 1.3.4 절에서 다룬다.

책의 중심인 2, 3, 4장에서는 핵심 주제인 복소해석(holomorphic) 함수에 빛을 비춰줄 다음 3 가지를 다룬다.

(1) 코시-리만 방정식

(2) 코시 적분 정리

(3) 테일러 급수



다음은 이 책의 핵심정리이다.

정리 0.2. 경로연결된 열린집합 D에 정의된 함수 $f : D \to \mathbb{C}$에 대하여 다음은 동치이다.

(1) D의 모든 점 z에서 $f'(z)$가 존재한다.

(2) D의 모든 점 z에서 모든 차수 $(n \geq 0)$의 미분 $f^{(n)}(z)$가 존재한다.

(3) 실수부와 허수부 $u := \mathrm{Re}(f)$, $v := \mathrm{Im}(f)$는 연속미분가능하며

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

을 만족한다.

(4) D의 단순연결 부분영역 S에 대하여 복소해석함수 $F : S \to \mathbb{C}$가 존재하여 S의 모든 점 z에서 $F'(z) = f(z)$를 만족한다.

(5) f 가 D에서 연속이고, D의 모든 단순연결 부분영역에서 임의의 조각마다 매끄러운 닫힌곡선 γ에 대하여 다음이 조건이 성립한다.

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(6) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\} \subset D$이면 $|z - z_0| < r$을 만족하는 임의의 z에 대하여

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

을 만족하는 복소수열 $(c_n)_{n\ge 0}$이 유일하게 존재한다. 부가적으로 계수 c_n는 다음식으로 구할 수 있다.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

복소해석학은 복잡한 해석학이 아니다!

실제로 아주 복잡한 것이 아니며, 지나치게 해석적인 것도 아니다. 복소해석학은 실해석학보나 오히려 유연하다. 복소미분의 핵심 개념 몇가지를 정립하고 나면 입실론-델타(ϵ-δ)를 포함한 정교한 기법들은 적게 사용된다. 앞의 핵심정리를 보면 실해석학과 근본적으로 다른 결과가 도출됨을 예상할 수 있다. 예를 들어 실함수가 열린구간 (a, b)에 정의된 미분가능할 때 그 도함수는 연속함수가 아닐 수 있다. 반면 복소평면 $\mathbb{C}$의 열린집합에 정의된 복소미분가능함수는 무한번 미분가능하다! 그 이유는 복소곱셈이 특별한 기하학적 의미를 갖기 때문인데 복소미분가능함수는 국소적인 성질로 전체가 규정되며 함수값을 임의로 매핑하는 것을 허용하지 않는다. 이렇게 제어되는 성질이 복소함수를 한정적으로 만드는데 2.3절에서 이를 자세히 살펴볼 예정이다. 그럼에도 불구하고 자명하지 않으며 충분히 흥미로운 주제이다!

대상 독자

복소함수론은 미적분학과 다변수 미적분학을 학습한 학생을 대상으로 하는 기초 과정이다. 책의 제목에서 짐작할 수 있듯이 가장 최소한의 선수지식으로 학습할 수 있는 복소함수의 핵심적인 내용을 담고 있다. 이 책은 저자가 수학과 및 경제학과 3학년 학생을 대상으로 강의했던 강의록을 바탕으로 만들어졌다.

감사의 글

많은 유용한 의견을 보내준 Raymond Mortini, Adam Ostazewski, Rudolf Rupp에게 감사드린다. 참고문헌 목록에 있는 기존 학습자료에 의존하였으며 이는 연습문제의 경우도 마찬가지다. 몇가지 경우는 각 장의 끝에 "참고" 절을 넣고 상세한 참고문헌을 제시했지만 참고 절을 넣지 않은 경우에도 이 책만의 독창성을 주장하는 것은 아니다.

2013년, 런던과 룬트에서

Sara Maad Sasane과 Amol Sasane

Chapter 1

복소수와 기하학적 의미

이 장에서는 복소해석학을 펼칠 무대를 만들기 위해 다음 3가지 중심 주제를 다룬다.

(1) 복소수의 집합과 연산을 정의하고 실수체의 확장으로서 복소수체 $\mathbb{C}$를 만든다.

(2) $\mathbb{C}$의 원소는 평면 $\mathbb{R}^2$위의 점으로 표시할 수 있으며, 복소수체 $\mathbb{C}$의 연산에 대하여 기하학적 의미를 부여할 수 있다. 복소수체와 평면위의 점의 대응 관계로부터 $\mathbb{C}$에 평면의 유클리드 위상을 가져올 수 있다.

(3) 끝으로 복소해석학의 기초함수인 지수함수를 공부한다. 또한, 지수함수와 관련된 기본함수인 삼각함수와 로그함수도 살펴본다.

1.1 복소수체

복소수는 실수의 순서쌍으로 정의한다. 예를 들면,

$$(1,0),\ (0,1),\ (0,0),\ \left(-\frac{3}{4}, \sqrt{2}\right)$$

는 모두 복소수로 간주할 수 있다. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$을 $\mathbb{C}$라 표기한다. 즉,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \,:\, x \in \mathbb{R},\ \text{이고 } y \in \mathbb{R}\}.$$

복소수 $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$에 대하여 실수 x는 z의 실수부, y는 z의 허수부라고 한다.

집합 $\mathbb{C}$의 복소수 (x_1, y_1), (x_2, y_2)에 대하여 덧셈 "$+$"과 곱셈 "$\cdot$"을 다음과 같이 정의한다.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

이 연산에 따라 $\mathbb{C}$는 체(field)가 된다. 즉,

(F1) $(\mathbb{C}, +)$는 가환군(Abelian group)이다.

(F2) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$는 가환군이다.

(F3) $a, b, c \in \mathbb{C}$에 대하여 분배법칙이 성립한다: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

(F1)에서 가환군이란 연산 $+$에 대하여 결합법칙, 교환법칙이 성립하며, 모든 (x, y)에 대하여

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) = (0, 0) + (x, y)$$

를 만족하는 항등원 $(0, 0)$과

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = (-x, -y) + (x, y)$$

를 만족하는 덧셈의 역원 $(-x, -y)$이 존재한다는 뜻이다.

유사하게, (F2)에서 곱셈의 항등원 $(1, 0)$이 존재하고, 복소수 $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$의 곱셈의 역원은 다음과 같다.

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \tag{1.1}$$

연습문제 1.1. 식 (1.1)이 복소수 $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$의 곱셈의 역원이 됨을 직접 확인하라.

명제 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$는 체(field)이다.

실수 $\mathbb{R}$은 복소수 $\mathbb{C}$에 "포함된다". 실제로, 복소수 $\mathbb{C}$안에 $\mathbb{R}$을 넣어 실수 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{C}$의 부분체(subfield)로 볼 수 있다.

$$x \mapsto (x, 0)$$

을 이용하여 실수 x를 복소수 $(x, 0)$로 보내는 대응 규칙은 단사인 체의 준동형사상(field homomorphism)이다. 즉, 덧셈과 곱셈이 보존되며 서로 다른 실수는 다른 복소수에 대응시키는 사상이다.

$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$
x	$\mapsto$	$(x, 0)$
$x_1 + x_2$	$\mapsto$	$(x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$
$x_1 \cdot x_2$	$\mapsto$	$(x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0)$
1	$\mapsto$	$(1, 0)$
0	$\mapsto$	$(0, 0)$

따라서 이 사상을 이용한 동일화에 따라 모든 실수는 복소수로 볼 수 있다. 예를 들어 실수 $\sqrt{2}$는 복소수 $(\sqrt{2}, 0)$로 볼 수 있다. 이런 생각에 익숙하지 않을 수도 있겠으나 우리는 이미 초등학교 과정에서 비슷한 동일화를 경험한 적이 있다. 정수를 유리수의 일부로 동질화하는 다음 예를 보자.

$$\mathbb{Z} \ni 3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$$

이를 이해하려고 밤잠을 설친 적은 없지 않은가!

실수 해 $x \in \mathbb{R}$를 갖지 않는 방정식

$$x^2 + 1 = 0$$

을 복소수 범위에서 다루면 해를 구할 수 있다.

$$(0,1) \cdot (0,1) + (1,0) = (-1,0) + (1,0) = (0,0).$$

$(0,1)$을 나타내는 특별한 기호로 i를 도입하면 이 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$i^2 + 1 = 0,$$

여기서 실수 1과 0은 각각 복소수 $(1,0)$과 $(0,0)$에 대응된다.

이제부터 실수 x, y로 만든 복소수 (x,y)를 $x + yi$로 쓰자.

$$(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\equiv x} + \underbrace{(y,0)}_{\equiv y} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\equiv i} = x + yi.$$

복소수 곱셈은 교환법칙이 성립하고, 특히 $yi = iy$이므로, $x + yi = x + iy$이다.

연습문제 1.2. $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$를 $x + yi$ 꼴로 표시하면?

복소수 발견의 역사: 대중적인 믿음과는 달리 역사적으로 수학자들이 복소수를 진지하게 받아들이게 된 것은 2차 방정식이 아니라 3차 방정식을 풀 필요가 있었기 때문이다. 요지는 다음과 같다. 16세기 경 포물선 $y = x^2$과 직선 $y = -bx - c$의 교점을 구하는 방법으로 방정식

$$ax^2 + bx + c = 0$$

을 풀려는 시도가 있었다. 이러한 기하학적 해석에 근거하여, 포물선 $y = x^2$ 이 직선 $y = -1$과 만나지 않으므로 실계수 2차방정식 $x^2 + 1 = 0$이 실수해를 갖지 않음을 쉽게 알 수 있었다. 그림 1.1의 왼쪽 그래프를 참고하라.

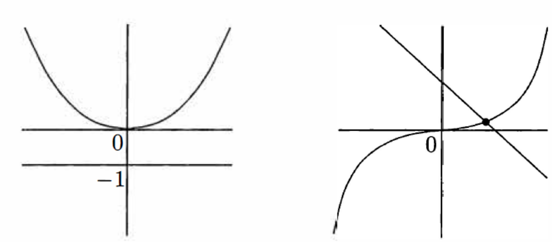


Fig. 1.1 Lack of solvability in reals of $x^2 = -1$ versus the fact that $x^3 = 3px + 2q$ always has a real solution x.

Figure 1.1: 실근이 존재하지 않는 방정식 $x^2 = -1$과 항상 실근을 갖는 $x^3 = 3px + 2q$

Cardano (1501-1576)는 3차방정식 $x^3 = 3px + 2q$의 실근을 구하는 다음 공식을 만들었다.

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

예를 들어, $p = 2, q = 3$일 때 방정식 $x^3 = 6x + 6$은 $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$를 해로 가진다. 한편, 중간값 정리에 의해 3차함수 $y = x^3$은 항상 $y = 3px + 2q$와 만난다. 그림 1.1의 오른쪽 그래프를 참고하라. 하지만 $p = 5, q = 2$로 방정식 $x^3 = 15x + 4$을 만들면 $q^2 - p^3 = -121 < 0$이 되어 실수만으로는 Cardano의 공식을 적용하지 못한다. 그럼에도 불구하고 우리는 $x = 4$가 실근이 됨을 확인할 수 있다.

$$4^3 = 64 = 60 + 4 = 15 \cdot 4 + 4.$$

Cardano 공식이 나온지 30년 후, Bombelli가 복소수 연산을 도입하면 Cardano 공식으로 원하는 실근을 도출할 수 있음을 제안하였다. 다음 등식이 성립할 수 있을까?

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \stackrel{?}{=} 4.$$

$(2 + i)^3 = 2 + 11i$이고 $(2 - i)^3 = 1 - 11i$임을 이용하면 세제곱근 값으로부터 위 등식이 성립함을 알 수 있다. 따라서 Bombelli의 결과로부터 실수 문제에도 복소수 연산이 연결될 수 있음이 입증되었다. 그때부터 복소수가 수학의 주류에 들어가게 되었다.

연습문제 1.3. 양의 부분집합 $P \subset \mathbb{F}$가 있어 다음을 만족하면 체 $\mathbb{F}$는 순서(ordered)를 갖는다고 한다.

(P1) 모든 $x, y \in P$에 대하여, $x + y \in P$.

(P2) 모든 $x, y \in P$에 대하여, $x \cdot y \in P$

(P3) 모든 $x \in P$에 대하여, 다음 3가지 중 정확히 한가지만 참이다.

$$1^\circ\ x = 0. \quad 2^\circ\ x \in P. \quad 3^\circ\ -x \in P.$$

예를 들면, $P := (0, \infty)$를 양의 부분집합이라 하면 실수체 $\mathbb{R}$은 순서를 갖는다. (순서를 갖는 체 $\mathbb{F}$에서 두 원소 $x, y \in \mathbb{F}$의 관계 $>_P$를 $y >_P x$는 $y - x \in P$로 정의하여 대소관계를 정할 수 있다.) 복소수 $\mathbb{C}$는 순서를 가질 수 없음을 보여라.

힌트: $x := i$에 대하여 $x \cdot x$를 살펴보라.

1.2 복소수의 기하학적 표현

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$이므로, 그림 1.2와 같이 복소수를 평면위의 점에 대응시킬 수 있다.

복소평면은 Argrand[1] 평면이라고도 불린다.

[1]Jean-Robert Argand (1768-1822)의 이름에서 따온 것이다. Caspar Wessel (1745-1818)이 더 먼저 사용하긴 했으나.

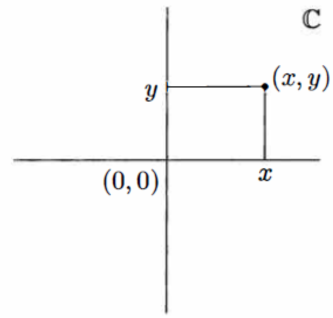


Fig. 1.2 The complex number $x + iy$ in the complex plane.

Figure 1.2: 복소평면에 표시한 복소수 $x + iy$

연습문제 1.4. 다음 복소수를 복소평면 위의 점으로 표시하라.

$$0, \quad 1, \quad -\frac{3}{2}, \quad i, \quad -\sqrt{2}i, \quad \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

따라서 복소수 $\mathbb{C}$는 **집합**으로서 평면 $\mathbb{R}^2$로 간주할 수 있다. $\mathbb{C}$에 정의된 체의 연산이 평면에서 기하학적 의미를 가질까? 우리는 앞으로 실제로 의미가 있음을 살펴볼 것이다. $\mathbb{C}$의 덧셈은 평면벡터의 덧셈이고 곱셈은 조금 더 특별한 의미를 갖는다.

복소수 덧셈의 기하학적 의미: 복소수를 평면 위의 점으로 간주하고 복소수의 덧셈을 $\mathbb{R}^2$의 벡터 합으로 정의하는 것이 자연스럽다. 벡터 합은 두 벡터를 결합하는 일반적인 방식으로 정의한다. 즉, $(0,0)$과 두 복소수를 잇는 선분으로 이루어진 평생사변형을 완성시킬 때 $(0,0)$과 대각선의 반대에 있는 점을 두 복소수의 합이 된다. 그림 1.3을 참고하라.

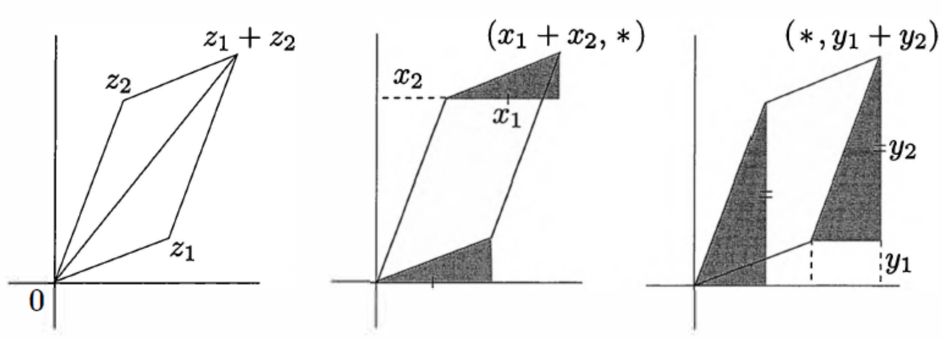


Fig. 1.3 Addition of complex numbers is vector addition in $\mathbb{R}^2$.

Figure 1.3: 복소수 덧셈은 $\mathbb{R}^2$의 벡터 합이다.

복소수 곱셈의 기하학적 의미: 이제 복소수 곱셈이 가진 특별한 기하학적 의미를 살펴보자. 이를 위해 편의상 극좌표를 사용한다. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$이 극좌표 $r \geq 0$와 $\theta \in (-\pi, \pi]$로 표현된다고 하

자. 이는 원점에서 (x, y)까지의 거리를 $r(\geq 0)$이고, $(0, 0)$에서 (x, y)를 잇는 반직선이 x-축의 양의 방향과 이루는 각이 θ가 된다는 뜻이다. ((x, y)가 원점 $(0, 0)$인 경우, $\theta = 0$으로 정한다.)

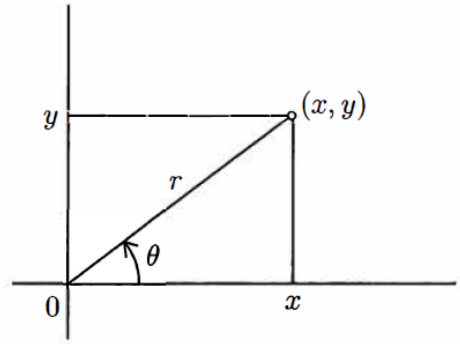


Fig. 1.4 Polar coordinates (r, θ) of $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Figure 1.4: 복소수 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$의 극좌표 표현 (r, θ)

그림 1.4의 직각삼각형으로부터 다음 관계를 얻는다.

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

이로부터 복소수를 극좌표 (r, θ)로 표현할 수 있다.

$$x + yi = r\cos\theta + (r\sin\theta)i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

이제 복소수 곱셈의 기하학적으로 해석하자. 두 복소수를 모두 극좌표로 쓰면

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

삼각함수의 덧셈정리로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

따라서 $z_1 \cdot z_2$는 극좌표로 $(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$이다. 다시 말하면, $z_1 \cdot z_2$의 편각은 z_1과 z_2가 각각 실수축의 양의 방향과 이루는 각을 더하여 얻을 수 있고, 원점에서의 거리는 각각의 거리를 곱하여 얻는다. 그림 1.5를 참고하라.

특별한 경우로 원점에서의 거리가 1인 복소수 $\cos\alpha + i\sin\alpha$를 곱하는 경우를 생각해보자. 그러면 위의 식으로부터 $z \in \mathbb{C}$와의 곱 $z \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$는 원점과 z를 연결하는 직선을 반시계방향으로 α만큼 회전시켜 얻을 수 있다. 특히, z에

$$i = 0 + i \cdot 1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

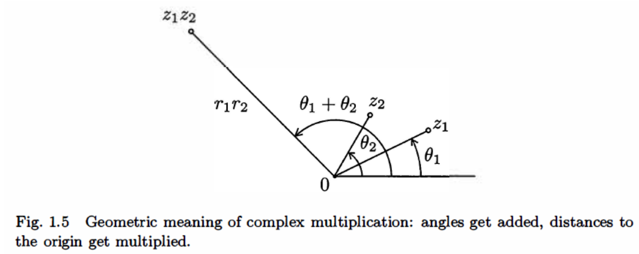


Figure 1.5: 복소수 곱셈의 기하학적 의미: 각은 더하고, 원점에서의 거리는 곱한다.

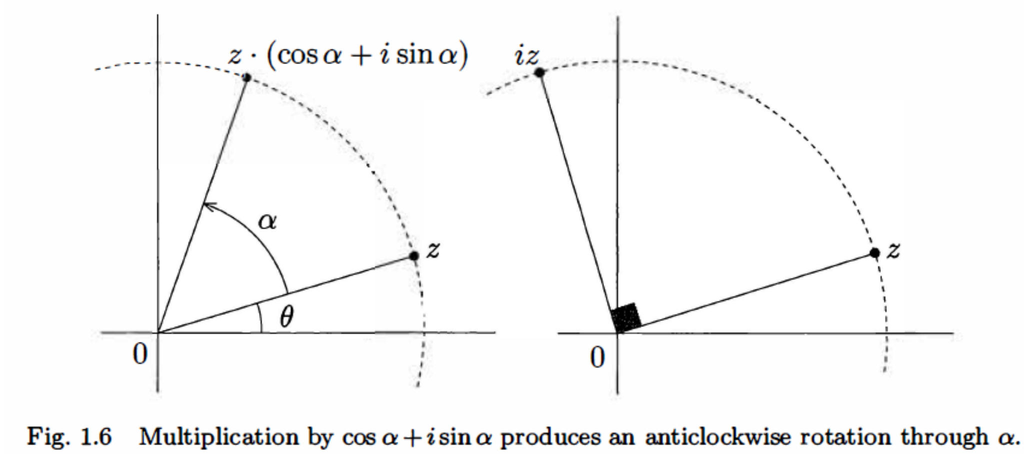


Figure 1.6: $\cos\alpha + i\sin\alpha$를 곱하면 반시계방향으로 α만큼 회전한 결과를 얻는다.

를 곱하면 반시계방향으로 $90°$ 회전한 결과를 얻는다.

드 므와브르(De Moivre) 정리와 n차 제곱근 : 모든 자연수 $n\in\mathbb{N}$에 대하여

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

가 성립하며 이를 드 므와브르 정리라 한다.

연습문제 1.5. 드 므와브르의 정리를 이용하여 삼각함수의 3배각 공식 $\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$을 증명하라.

연습문제 1.6. $(1+i)^{10}$을 직접 전개하지 않고 $x+iy$ (x, y는 실수)의 꼴로 써라? 삼각함수의 3배각 공식 $\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$을 증명하라.

연습문제 1.7. $(2+i)(3+i)$를 이용하여 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$을 증명하다.

연습문제 1.8. 가우스 정수(Gaussian integer)는 m, n이 정수일 때, $m+in$꼴의 복소수로 복소평면 위의 정수 격자점을 이룬다. 모든 꼭지점이 가우스 정수가 되도록 정삼각형을 그리는 것을 불가능함을 증명하라.

힌트: 한변의 회전으로 다른 변을 만들 수 있고, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$임을 이용하라.

드 므와브르 공식을 이용하면 복소수 z의 n 제곱근 즉, $w^n = z$를 만족하는 복소수 w를 쉽게 구할 수 있다. 우선 적당한 $r \geq 0$과 $\theta \in [0, 2\pi)$에 대하여 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$로 쓰자. $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$가 $w^n = z$를 만족한다면,

$$w^n = \rho^n\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

양변은 원점에서의 거리가 같으므로 $\rho^n = r$을 얻는다. ρ와 r이 음수가 아니므로 $\rho = \sqrt[n]{r}$이다. 한편 w^n이 실수축의 양의 방향과 이루는 각 $n\alpha$는 집합 $\{\ldots, \theta - 4\pi, \theta - 2\pi, \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \ldots\}$에 속한다. 0이 아닌 z가 실수축의 양의 방향과 이루는 각은 2π의 정수배 차이를 무시하면 유일하게 결정되므로 θ 대신 $\theta + 2\pi k$ (k는 정수)로도 쓴다. 그림 1.7을 참고하라.

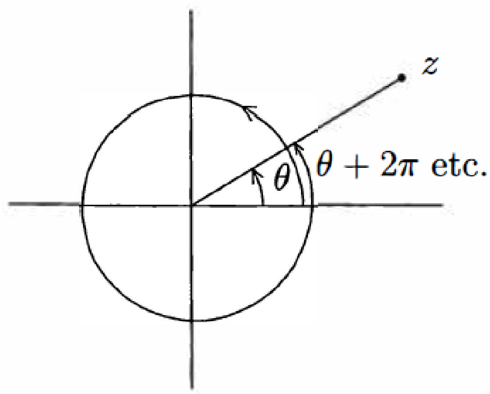


Fig. 1.7 The angle made by z with the positive real axis.

Figure 1.7: 복소수 z가 실수축의 양의 방향과 이루는 각

이제 $\alpha \in \left\{\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$로부터 서로 다른 w가 되는 α만 쓰면 다음과 같다.

$$\alpha \in \left\{\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{\theta}{n} + (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

특히, $z = 1$일 때, 1의 n제곱근은 원에 내접하는 정n각형의 꼭지점이다. 그림 1.8을 보라.

연습문제 1.9. $w^4 = -1$을 만족하는 모든 복소수 w를 찾아 복소평면에 표시하라.

연습문제 1.10. $z^6 - z^3 - 2 = 0$을 만족하는 모든 복소수 z를 구하라.

연습문제 1.11. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$를 만족하는 실수 a, b, c는 모두 같다. 실제로 양변에 2를 곱하고 정리하면 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$을 얻고, 각 항은 음수가 아니므로 모두 0이 될 수밖에 없다. 한편, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$를 만족하는 복소수 a, b, c는 복소평면위의 정삼각형의 꼭지점이 됨을 보여라. 실수의 경우와 결과를 비교하라.

힌트: 실수가 아닌 1의 세제곱근 ω에 대하여 $((b-a)\omega + (b-c)) \cdot ((b-a)\omega^2 + (b-c))$를 계산하라.

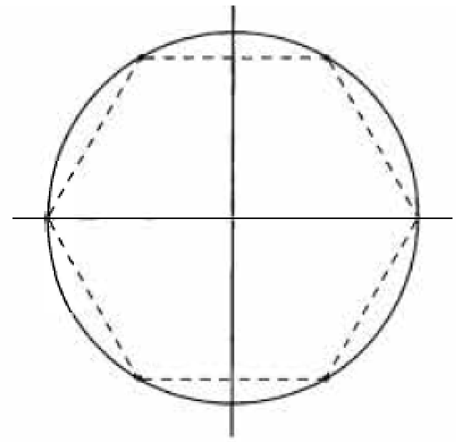


Fig. 1.8 The six 6th roots of unity.

Figure 1.8: 1의 6 제곱근 6개

연습문제 1.12. 이항정리에서 a, b가 실수이고, $n \in \mathbb{N}$이면,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{여기서} \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

는 이항계수라 한다. 대수적 연산을 생각하면 이 등식은 a, b가 복소수인 경우에도 성립한다.

$$\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \binom{3n}{6} + \cdots + \binom{3n}{3n} = \frac{2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n}{3}$$

이 성립함을 보여라.

힌트: ω가 실수가 아닌 1의 세제곱근일 때 $(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n}$을 계산하라.

연습문제 1.13. 복소수의 기하학적 성질을 이용하여 사각형의 대변에 외접하는 정사각형 중심을 잇는 선분은 서로를 수직이등분함을 보여라.

절대값과 켤레복소수: 복소수 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$의 절대값 $|z|$는

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

로 정의한다. 피타고라스 정리에 따라 이는 z와 원점 사이의 거리를 나타낸다. 그림 1.9의 왼쪽을 참고하라. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$를 극좌표로 쓰거나, 직접 계산하여 확인하면 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$임을 쉽게 확인할 수 있다.

연습문제 1.14. 직표좌표로 z_1, z_2를 써서 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$임을 확인하라.

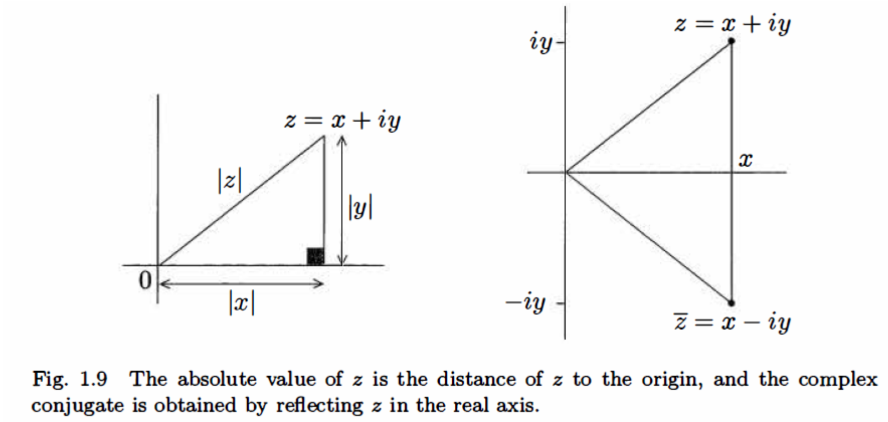


Figure 1.9: 복소수의 절대값은 원점에서의 거리이고, 켤레복소수는 실수축에 대칭인 복소수이다.

복소수 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$의 켤레복소수 $\bar{z}$는

$$\bar{z} = x - iy$$

로 정의한다. 복소평면에서 $\bar{z}$는 z를 실수축으로 대칭시켜 얻는다. 그림 1.9의 오른쪽을 참고하라. 기하학적 표현으로부터 복소수 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

다음 성질도 쉽게 얻을 수 있다.

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

연습문제 1.15. 위의 등식 4개를 증명하라.

연습문제 1.16. 모든 복소수 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|z| = |\bar{z}|$, $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \le z$임을 증명하고 각각에 대하여 기하학적으로 설명하라.

연습문제 1.17. $|a| < 1$과 $|z| \le 1$을 만족하는 $a, z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\left|\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \le 1$을 보여라.

연습문제 1.18. 계수가 $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$이고 $c_d \ne 0$인 다항식 $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$을 생각하자. $w \in \mathbb{C}$가 $p(w) = 0$을 만족하면 $p(\bar{w}) = 0$도 성립함을 보여라.

연습문제 1.19. 복소수 $0, a, b \in \mathbb{C}$가 만드는 삼각형의 면적은 $\left|\dfrac{\mathrm{Im}(a\bar{b})}{2}\right|$임을 보여라.

연습문제 1.20. 임의의 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 $i \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{pmatrix}$는 실수임을 증명하라.

연습문제 1.21. 임의의 두 복소수 z_1, z_2가 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$을 만족함을 보여라. 이 등식의 기하학적 의미는 무엇인가?

1.3 ℂ의 위상

실수 ℝ에서 수열의 수렴성, 함수의 연속성과 미분가능성과 같은 일반적인 미적분 개념들은 모두 실수에서 점의 가까움에 대한 개념에 의존한다. 예를 들면, 실수열 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$의 극한이 $L \in \mathbb{R}$이라는 것은, 주어진 양수 ϵ에 대하여 충분히 큰 인덱스 N이 있어 이를 넘는 인덱스를 갖는 a_n은 모두 L과의 **거리**가 기껏해야 ϵ이하임을 의미한다. "a_n과 L의 거리"는 $|a_n - L|$로 정의하며 실수 라인에서 a_n과 L을 잇는 선분의 길이를 뜻한다.

이제 **복소수**에서 미적분을 만들어 보려면 복소수 쌍 (z_1, z_2)에 대한 거리 $d(z_1, z_2)$의 개념이 필요하다. 첫 단계로 거리의 개념이 무엇인지 살펴보자.

1.3.1 ℂ에서의 거리 개념

복소수 ℂ를 $\mathbb{R}^2$으로 보면 $\mathbb{R}^2$의 유클리드 거리로 ℂ의 거리를 정의할 수 있다. 따라서, 복소수 $z_1 = x_1 + iy_1$과 $z_2 = x_2 + iy_2$에 대하여 다음 식으로 거리를 정의한다.

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = |z_1 - z_2|.$$

피타고라스 정리에 의하여 이 값은 $\mathbb{R}^2$ 평면의 두 점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)의 거리와 같다. 그림 1.10을 참고하라.

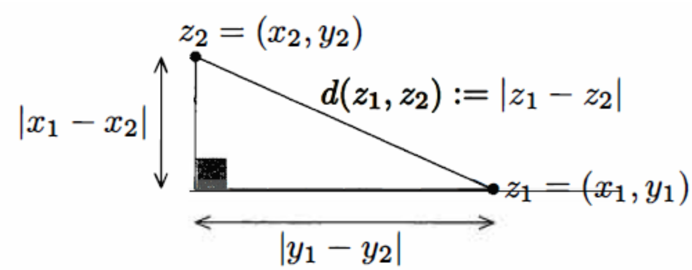


Fig. 1.10 The distance between z_1 and z_2 is the length of the segment joining z_1 to z_2.

Figure 1.10: 복소수 z_1과 z_2사이의 거리는 z_1과 z_2를 잇는 선분의 길이다.

복소수 덧셈의 기하학적 의미와 삼각형의 두변의 길이의 합은 가장 큰 변의 길이보다 크다는 유클리드 기하학의 유명한 결과를 이용하면 다음과 같이 복소수 절대값의 삼각 부등식을 얻는다.

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

그림 1.11을 보자. 이 삼각 부등식은 실수 x_1, x_2, y_1, y_2에 대한 코시-슈바르츠 부등식 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \ge (x_1x_2 + y_1y_2)^2$을 사용하여 확인할 수도 있다.

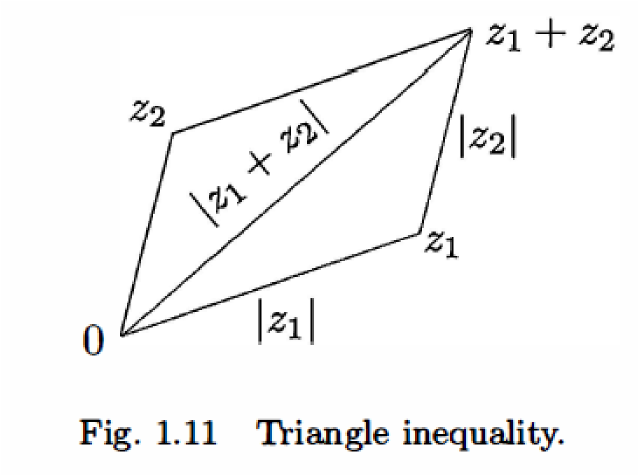


Figure 1.11: 삼각 부등식

연습문제 1.22. 모든 복소수 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여 $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$을 증명하라.

연습문제 1.23. 다음 집합을 복소평면에 나타내라.

(1) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| = 2\}$.

(2) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| < 2\}$.

(3) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1-i)| < 2\}$.

(4) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z - (1-i)) = 3\}$.

(5) $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z - (1-i))| < 2\}$.

(6) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| = |z - (1+i)|\}$.

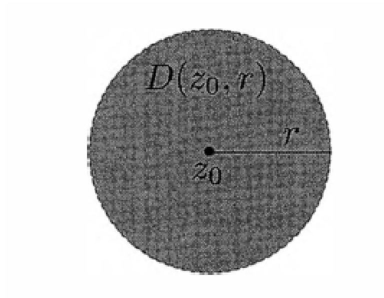
(7) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| + |z - (1+i)| = 2\}$.

(8) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| + |z - (1+i)| < 3\}$.

1.3.2 열린 원판, 열린 집합, 닫힌 집합, 콤팩트 집합

주어진 점의 근방에 대한 집합을 다루기 위해 다음 정의들을 도입하는 것이 편리하다. 중심이 z_0이고 반지름이 $r > 0$인 **열린 공/원판** $D(z_0, r)$은 $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$로 정의한다.

ℂ의 부분집합 U에 속하는 모든 z에 대하여 $r_z > 0$가 존재하여 $D(z, r_z) \subset U$를 만족하면 U를 **열린 집합**이라 한다. 다시 말하면, U의 어떤 점을 잡더라도 주변의 모든 점이 U에 속할 수 있는



"공간"이 존재한다. 예를 들면, 열린 원판 $D(z_0, r)$은 열린 집합이다. 따라서 $D(z_0, r)$를 열린 원판이라 부를 때 사용한 형용사 "열린"은 적절해 보인다. 열린 집합의 예를 조금 더 만들어보자. 원환(annulus) $\mathbb{A}_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$, 우측 반평면 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$는 모두 열린 집합이다.

열린 집합의 여집합에 특별한 이름을 붙여 "닫힌 집합"이라 부르면 편리하다. 닫힌 집합은 수열의 수렴성의 관점에서 규정할 수도 있다. 집합 $F \subset \mathbb{C}$가 닫힌 집합이라는 것은 F에 속하는 복소수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{C}$에서 L로 수렴한다면 극한 L이 F에 속한다는 것과 동치이다.

$\mathbb{C}$의 부분집합 S의 모든 원소 z에 대하여 $|z| \leq M$을 만족하는 $M > 0$이 존재하면 S를 **유계**(bounded)라 한다. 그러면 S는 복소평면에서 충분히 큰 원판 내부에 속한다.

$\mathbb{C}$의 부분집합 K가 유계인 닫힌 집합이면 **콤팩트 집합**이라 한다. 콤팩트 집합에서 정의된 실변수 연속함수는 최대값과 최소값을 갖는다는 실해석학의 잘 알려진 결과를 앞으로 종종 사용할 것이다.

1.3.3 수렴성과 연속성

$\mathbb{C}$에서 수열의 수렴성에 대하여 알아보자.

복소수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하고 극한이 L이라는 것은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 인덱스 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 모든 $n > N$에 대하여 $|z_n - L| < \epsilon$이 성립함을 의미한다. 삼각 부등식에 의하여 수렴하는 수열의 극한은 유일하게 결정되며 다음과 같이 쓴다.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L.$$

예제 1.1. 복소수 z가 $|z| < 1$를 만족한다고 하자. 그러면 수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 0으로 수렴한다. 왜냐하면, $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n = ||z|^n - 0|$인데 $|z| < 1$이므로, $n \to \infty$일 때 $|z|^n \to 0$이기 때문이다.

연습문제 1.24. 복소수 계수 $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$의 다항식 $p(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$ $(c_d \neq 0)$를 생각하자. $|z| > R$인 모든 z에 대하여 $|p(z)| \geq M|z|^d$을 만족하는 $M, R > 0$이 존재함을 증명하라.

연습문제 1.25. 복소수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴함과 실수열 $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\mathrm{Re}(L)$과 $\mathrm{Im}(L)$로 수렴함이 동치임을 보여라.

연습문제 1.26. 복소수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴함과 $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\bar{L}$로 수렴함은 동치임을 보여라.

연습문제 1.27. $\mathbb{C}$가 완비성(completeness)을 가짐을 증명하라. 즉, $\mathbb{C}$의 모든 코시 수열이 $\mathbb{C}$의 원소로 수렴한다. (임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 인덱스 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 $m, n > N$ 이면, $|z_n - z_m| < \epsilon$을 만족할 때 수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$을 **코시 수열**이라 한다.)

S가 $\mathbb{C}$의 부분집합, $z_0 \in S$, $f : S \to \mathbb{C}$라 하자. 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$가 존재하여 $z \in S$가 $|z - z_0| < \delta$를 만족하면 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$일 때 f는 z_0에서 **연속**이라고 한다.

수열의 극한으로도 연속성을 규정할 수 있다. $f : S \to \mathbb{C}$가 z_0에서 연속임은 z_0로 수렴하는 S의 모든 복수열 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$에 대하여 $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 $f(z_0)$로 수렴함과 동치이다.

예제 1.2. 켤레복소수를 만드는 것은 연속함수이다. 즉, $z \to \bar{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$는 연속이다. 모든 $z, z_0 \in \mathbb{C}$에 대하여 $|\bar{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$이다. 이로부터 모든 $z_0 \in \mathbb{C}$에 대하여 켤레복소수를 대응시키는 함수는 연속이다. 기하학적으로 보면 자명하다. 왜냐 하면, 켤레복소수는 단지 실수축에 대하여 대칭시키는 것이므로 가까운 두 점은 함수값도 가까이 머물기 때문이다!

모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\overline{(\bar{z})} = z$ 켤레복소수의 역함수는 자기자신이다. 따라서 켤레복소수는 가역이며 역함수도 연속이다. 따라서 켤레복소수 함수는 $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{C}$로의 위상동형사상(homeomorphism)이다 (연속인 전단사함수이며 역함수도 연속이다).

연습문제 1.28. 함수 $z \mapsto \mathrm{Re}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$은 연속함수임을 증명하라.

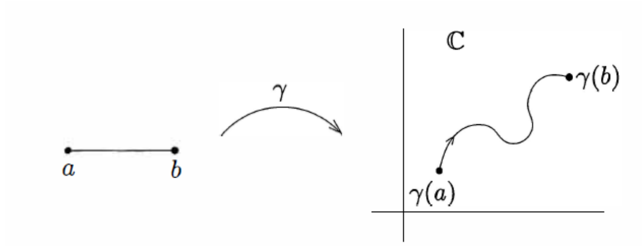
1.3.4 영역

이후에는 경로연결된 열린 집합의 개념이 중요한 역할을 한다. 우리 학습의 주요 대상, 즉, 집합 $D(\subset \mathbb{C})$의 모든 점에서 복소미분 가능함수 $f : D \to \mathbb{C}$에 대한 결과를 증명할 때 사용된다. 많은 정리들이 유효하게 성립하려면 D가 $\mathbb{C}$의 "좋은" 부분집합이 되어야 하며 단순히 $\mathbb{C}$의 부분집합이라는 조건만으로는 부족함을 보게 될 것이다. "좋음"이라는 가정을 만족하는 집합을 영역이라 부르며 정확히는 다음과 같이 규정된다.

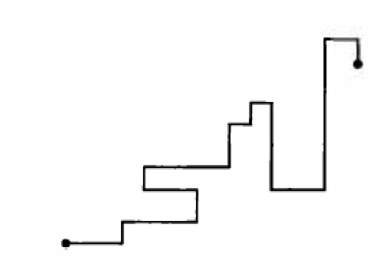
우리는 $\mathbb{C}$의 경로연결된 열린 부분집합을 영역(domain)이라 부른다. "열린"의 의미는 이미 알고 있으니 "경로연결된"이 어떤 의미인지 설명해보자.

정의 1.1.

(1) 연속함수 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$를 $\mathbb{C}$의 경로(또는 곡선)이라 한다.



(2) 경로 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$가 다음 조건을 만족하면 계단식 경로(stepwise path)라 한다. 점 $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$가 존재하여 부분경로 $\gamma : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$가 실수부가 상수 또는 허수부가 상수인 경로가 된다.



(3) U가 열린 집합일 때, 모든 $z_1, z_2 \in U$에 대하여 $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$이고 모든 $t \in [a,b]$에서 $\gamma(t) \in U$인 계단식 경로 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$가 존재하면 U를 경로연결된 열린 집합이라 한다.

실제로 위에서 경로연결된 열린 집합을 정의할 때 경로를 **계단식** 경로에 한정한 것을 완화할 수 있다. 즉, 열린 집합에 포함된 임의의 두 점이 집합내의 경로로 연결되기만 하면 경로연결된 것으로 정의해도 우리가 정의한 경로연결된 집합과 일치한다. 하지만 우리에게는 불필요한 일반화이며, 앞에서 정의한 것으로 충분하다.

예제 1.3.

(1) 열린 단위원판 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$은 영역이다.

(2) $r \in (0,1)$에 대하여 원환 $\mathbb{A}_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$은 영역이다.

(3) 우측 반평면 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$은 영역이다.

한편, 집합 $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$는 영역이 아니다. 열린 집합이지만 경로연결된 집합이 아니다. 실제로 0과 2를 잇는 경로는 존재하지 않는다. 경로 γ가 존재한다고 가정하면 함수 $t \mapsto |\gamma(t)| : [a,b] \to \mathbb{R}$에 중간값 정리를 적용하면, $|\gamma(a)| = 0 < 1 < 2 = |\gamma(b)|$이므로, $|\gamma(t_*)| = 1$이 되는 $t_* \in [a,b]$가 존재한다. 그러면 $\gamma(t_*) \neq S$가 되어 모순이다.

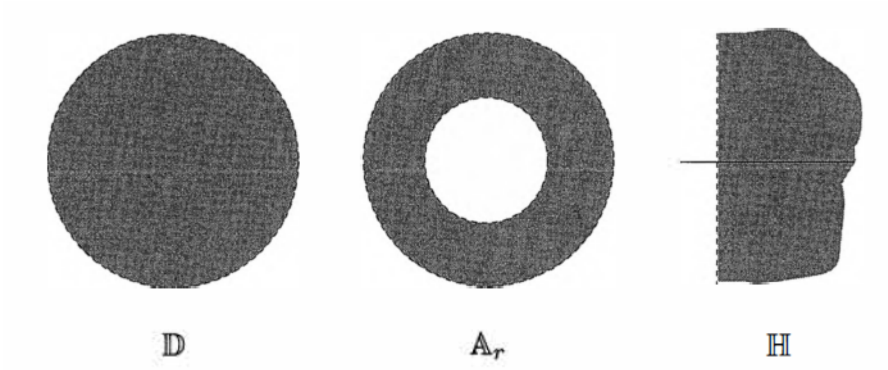


Fig. 1.12 The domains $\mathbb{D}$, $\mathbb{A}_r$ and $\mathbb{H}$.

Figure 1.12: 영역 $\mathbb{D}$, $\mathbb{A}_r$, $\mathbb{H}$

연습문제 1.29. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \cdot Im(z) > 1\}$은 열린 집합이지만 영역은 아님을 보여라.

연습문제 1.30. 영역 D에 대하여 $D^* := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$라 정의하자. D^*도 영역이 됨을 보여라.

1.4 지수함수와 관련 함수들

이 장의 마지막 절에서는 기본적인 복소함수들을 다룬다.

지수함수 $z \mapsto \exp z$,

삼각함수 $z \mapsto \sin z, \cos z$,

로그함수 $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$.

이 함수들은 실수축에 제한했을 때 미적분학에서 친숙하게 봤던 함수들에 대응된다. 다시 말하면, 함수의 입력을 $z = x \in \mathbb{R}$로 제한할 때 잘 알려진 실함수를 얻는다.

$x \mapsto e^x$,

$x \mapsto \sin x, \cos x$,

$x \mapsto \log x$.

따라서 우리의 정의는 실함수에 대응되는 확장이다. 그림 1.13을 참고하라.

이러한 확장은 이는 실수에 한정했을 때 가질 수 없었던 새롭고 흥미로운 특성을 복소평면에서 보여준다는 것을 앞으로 살펴볼 것이다. 또한 이 함수들은 복소미분 가능함수의 중요한 예로서의

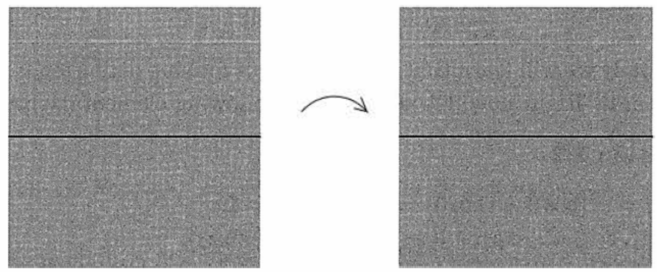


Fig. 1.13 The real valued functions map points on the real line to the real line, but our definitions will give extensions of these to the shaded region, the complex plane.

Figure 1.13: 실함수는 실수축 위의 점을 실수축 위로 대응시키는 반면 우리의 정의는 이를 그림자 영역인 복소평면으로 확장한 것이다.

역할도 한다. 지수함수와 삼각함수는 복소평면 위의 모든 점에서 복소미분 가능하며 로그함수는 연속인 점에서 복소미분 가능하다.

우선 지수함수부터 살펴보자.

1.4.1 지수함수 $\exp z$

정의 1.2 (복소 지수함수)**.** $z = x + iy \in \mathbb{C}(x, y \in \mathbb{R})$에 대하여 복소 지수함수 $\exp z$를 다음과 같이 정의한다.

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

우선 $y = 0$일 때, 우변은 e^x와 같다. 따라서 이 정의는 일반적인 지수함수 $(\mathbb{R} \ni)x \mapsto e^x(\in \mathbb{R})$의 확장이다. 하지만, 정의는 자연스럽게 보이지 않는다. $z \mapsto e^{\mathrm{Re}(z)}$로 정의해도 실수 지수함수의 확장을 얻을 수 있기 때문이다. 이렇게 간단히 정의하면 되는 것을 왜 사용하지 않을까? 우리가 정의한 방식을 쓰는 이유는 실수 지수함수를 복소평면 전체에서 복소미분 가능한 성질을 가지도록 확장하는 유일한 방법이기 때문이다. 이와 관련하여 128페이지 예제 4.8 를 참고하라. 실제로 실수 지수함수의 미분공식

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

과 유사하게 다음이 성립함을 보일 예정이다.

$$\frac{d}{dz}\exp z = \exp z \quad z \in \mathbb{C}.$$

결론적으로 우리는 이상하게 보이는 정의가 실제로 자연스럽다는 것을 공부하게 될 것이다. 지금은 다음과 같은 기본적인 성질부터 확인해보자.

명제 1.2.

(1) $\exp 0 = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot (1 + i0) = 1.$

(2) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, $\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$

(3) $z \in \mathbb{C}$에 대하여, $\exp z \neq 0$ 이고 $(\exp z)^{-1} = \exp(-z).$

(4) $z \in \mathbb{C}$에 대하여, $\exp(z + 2\pi i) = \exp z.$

(5) $z \in \mathbb{C}$에 대하여, $|\exp z| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$

증명

(2) $z_1 = x_1 + iy_1$과 $z_2 = x_2 + iy_2$이면,

$$\begin{aligned}
\exp(z_1 + z_2) &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right) \\
&= e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\right) \\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).
\end{aligned}$$

(3) 앞의 식을 쓰면,

$$1 = \exp 0 = \exp(z - z) = (\exp z)(\exp(-z))$$

에서 $\exp z \neq 0$이고 $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$을 얻는다. 따라서 exp 함수는 $\mathbb{C}$의 원소를 "뚫린(punctured)" 평면 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$으로 보낸다.

(4) 다음 식으로부터

$$\begin{aligned}
\exp(z + 2\pi i) &= (\exp z)(\exp(2\pi i)) = (\exp z) \cdot e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) \\
&= (\exp z) \cdot 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = \exp z
\end{aligned}$$

exp 함수는 "y축 방향으로 주기성"이 있으며, 주기는 2π임을 알 수 있다. 그림 1.14를 보자.

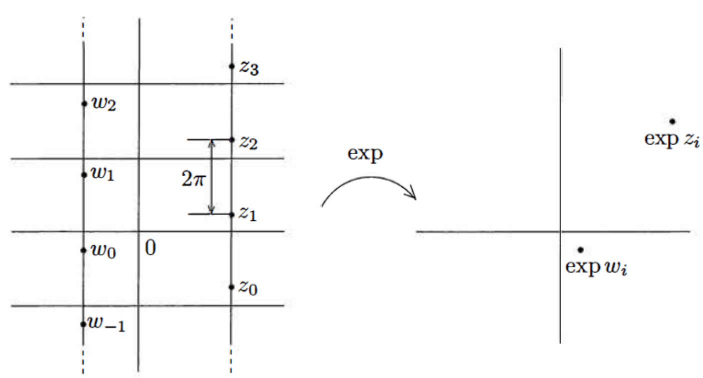


Fig. 1.14 2π-periodicity of exp in the y-direction.

Figure 1.14: y축 방향으로 2π 주기를 갖는 복소 지수함수 exp

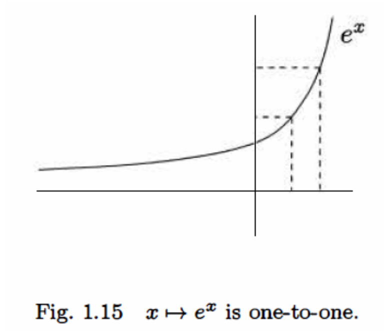


Figure 1.15: $x \mapsto e^x$는 일대일이다

이러한 현상은 실수의 성질 갖는 x축 방향으로는 나타나지 않는다. 함수 $x \mapsto \exp(x+iy_0)$ ($y_0 \in \mathbb{R}$은 고정하자)는 일대일 함수이다. 그림 1.15를 보라.

(5) $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여 $|e^x \cos y + ie^x \sin y| = \sqrt{e^{2x}((\cos y)^2 + (\sin y)^2)} = e^x$. 따라서 $|\exp(x+iy)| = e^x$. 이로부터 exp 함수는 복소평면의 수직선(실수부가 같은 점들)을 원(절대값이 같은 점, 즉, 원점에서의 거리가 일정한 점)으로 보낸다. □

명제 1.2 (3)은 exp 함수가 일대일이 아니며 $2\pi i$의 주기를 가짐을 보여준다. 그림 **??**은 함수 $z \mapsto \exp z$가 수평선(허수부 y가 고정된)과 수직선(실수부 x가 고정된)에 작용한 결과를 보여준다. 이는 그림 **??**에 표현된 특징을 종합하여 얻을 것이다.

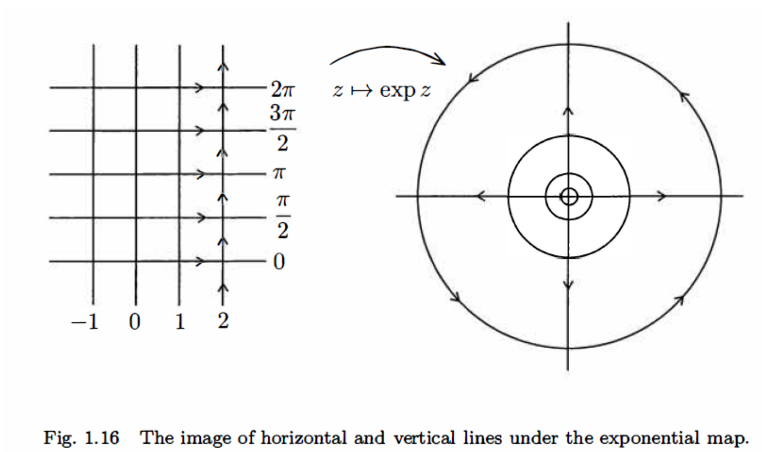


Figure 1.16: 복소 지수함수에 의한 수직선과 수평선의 상(image)

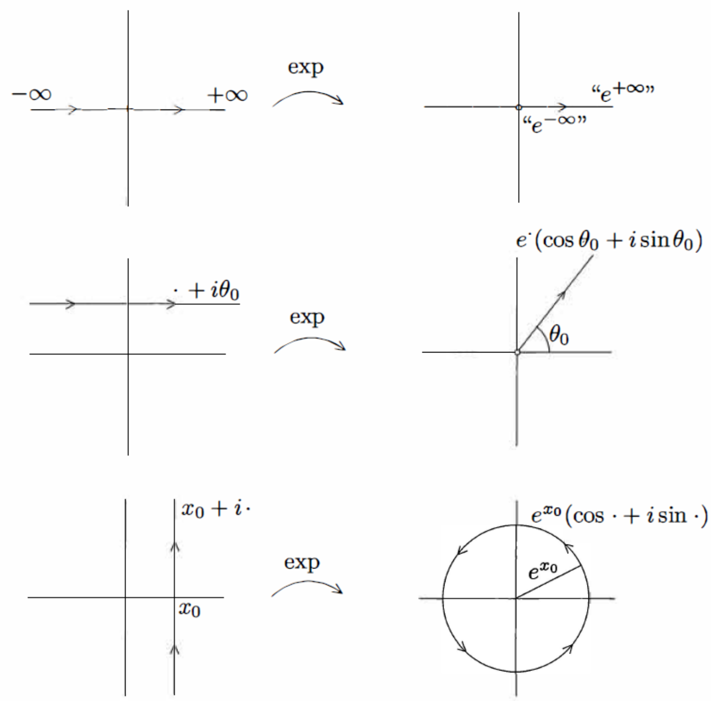


Fig. 1.17 The image of horizontal and vertical lines under the exponential map.

Figure 1.17: 복소 지수함수에 의한 수직선과 수평선의 상(image)