복소해석학 연습문제 풀이
A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진,허재성 譯

Update on January 1, 2023

연습문제 풀이

머리말 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

0에서 f'의 미분이 존재하고 그 값이 L이라고 가정하자. $\epsilon := 1 > 0$으로 잡으면, $0 < |x - 0| < \delta$이면

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다. 특히 $x := \delta/2$로 잡으면 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L \right| = |2 - L| < \epsilon. \tag{0.1}$$

한편 $x := -\delta/2$로 잡아도 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L \right| = |2 + L| < \epsilon. \tag{0.2}$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서 f'은 0에서 미분이 불가능하다.

1장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$이므로, x, y 중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서 $x^2 + y^2 \neq 0$이고,

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$\begin{aligned}
&(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\\
&=\left(x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-y\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),x\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\
&=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right)=(1,0).
\end{aligned}$$

따라서 $(x,y)\neq(0,0)$에 대하여 $(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$이다.

연습문제 ??

$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$이므로, $\tan\theta\in\mathbb{R}$이고,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-i\tan\theta}&=\frac{1}{1^2+(\tan\theta)^2}+i\left(\frac{\tan\theta}{1^2+(\tan\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}+i\left(\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{1}+i\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{1}=(\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta).
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}&=(1+i\tan\theta)((\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta))\\
&=(\cos\theta)^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta)(\cos\theta)\\
&\quad+\left((\sin\theta)(\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2\right)\\
&=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+i2(\sin\theta)(\cos\theta)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta).
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$P\subset\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면, $i\neq 0$이므로 조건 (P3)에 의해 $i\in P$이거나 ($i\neq P$이고 $-i\in P$)이다. 조건 (P2)에서

$$-1=i\cdot i=(-i)\cdot(-i)\in P \tag{0.3}$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \tag{0.4}$$

가 된다. 그런데 $1 \neq 0$이고 $x = 1$이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

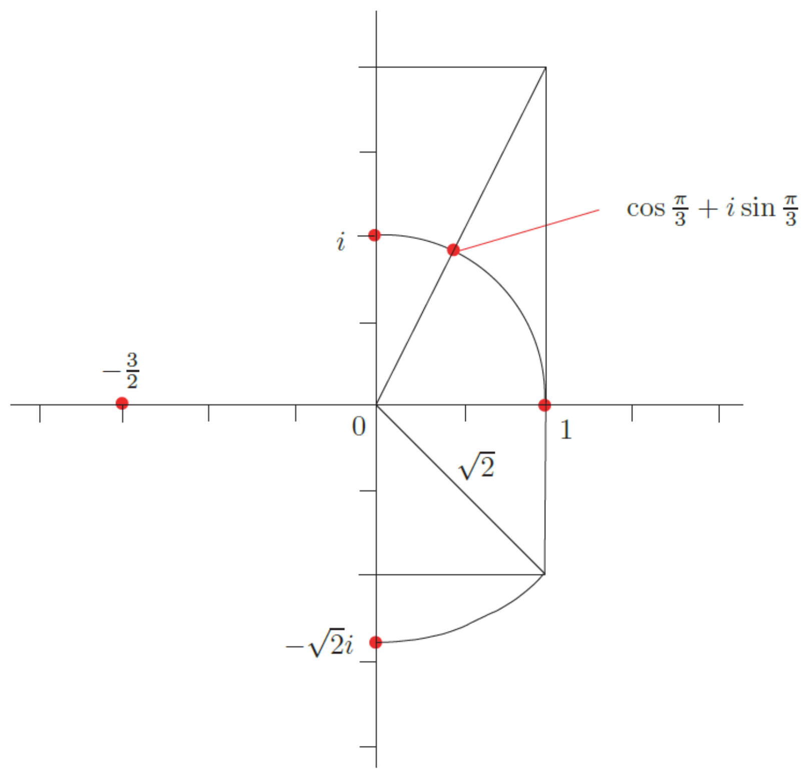


Fig. 5.2 Location of the complex numbers 0, 1, $-3/2$, i, $-\sqrt{2}i$, $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Figure 0.1: 복소수 0, 1, $-3/2$, i, $-\sqrt{2}i$, $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$의 위치

연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$에 대하여 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$이다.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + i2(\cos\theta)(\sin\theta)\right) \\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - (\sin\theta)2(\cos\theta)(\sin\theta)\end{aligned}$$

$$+ i(\,\cdots\,).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\
&= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\
&= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - 1 + (\cos\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(1-\cos\theta)^2 \\
&= (\cos\theta)^3 - \cos\theta + (\cos\theta)^3 - 2\cos\theta + 2(\cos\theta)^3 \\
&= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$이 복소수 $a, b \in \mathbb{C}$와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\
&= \mathrm{Re}((\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3) \\
&= (\cos\theta)^3 - 3(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\
&= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32(0 + i\cdot 1) = 32i.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$2+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2)$이고 $3+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/3)$이다. 따라서, $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$이다. 한편,

$$(2+i)(3+i) = 6 - 1 + i(2+3) = 5 + 5i$$

이므로 $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로, $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$이다.

연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점 A, B, C의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수 z_A, z_B, z_C에 있다고 하자. $\ell(AC) = \ell(AB)$이고 $\angle CAB = \pi/3$이므로,

$$z_C - z_A = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_B - z_A). \tag{0.5}$$

귀류법을 쓰기위해 $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서 $p + iq = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(m + in)$을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \tag{0.6}$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \tag{0.7}$$

식 (0.6)에 $-n$을 곱하고, 식 (0.7)에 m을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데 $m^2 + n^2 \neq 0$이므로 ($z_B \neq z_A$이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.

연습문제 ??

$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$로 쓸 수 있다. $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$가

$$w^4 = \rho^4(\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

를 만족해야 하므로, $\rho^4 = 1$에서 $\rho = 1$이다. 또한, $4\alpha \in \{\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \ldots\}$에서

$$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \pm \pi, \ldots\right\}.$$

따라서 $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 \cdot ((\cos\alpha + i\sin\alpha)$는 다음 집합에 속한다.

$$\left\{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right\}$$
$$= \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

네 개의 해를 복소평면에 그려보면 그림 0.2와 같다.

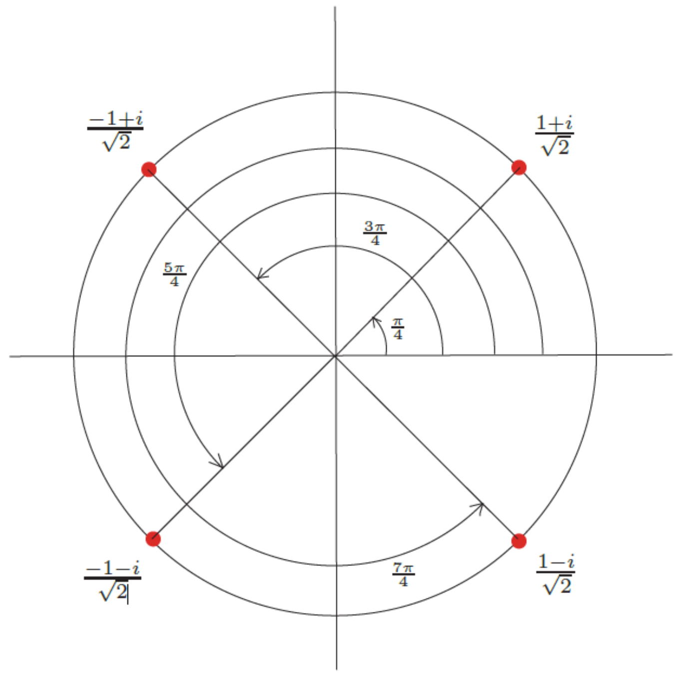


Fig. 5.3 Location of the complex numbers w that satisfy $w^4 = -1$.

Figure 0.2: $w^4 = -1$을 만족하는 복소수 w의 위치

연습문제 ??

방정식으로부터

$$0 = z^6 - z^3 - 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + z^3 - 2 = (z^3 - 2)(z^3 + 1)$$

이므로 $z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1$이다. $z^3 = 2$를 만족하는 해를 구하면

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\}$$

이다. 한편, $z^3 = -1$의 해는

$$z \in \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\pi + i\sin\pi, \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$

로부터

$$z \in \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

이다. 결론적으로 $z^6 - z^3 - 2 = 0$일 필요충분조건은 [$z^3 = 2$ 또는 $z^3 = -1$]이다. 즉,

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2} \right\} \bigcup \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

따라서 구하는 해는

$$z \in \left\{ \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

연습문제 ??

$\omega^3 = 1$을 만족하는 $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$을 생각하자. 그러면, $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} &((b-a)\omega + (b-c))((b-a)\omega^2 + b - c) \\ &\qquad = (b-a)^2\omega^3 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (b-a)^2 \cdot 1 + (b-a)(b-c)(-1) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (b-a)(b-a-b+c) + (b-c)^2 \\ &\qquad = (bc - ca - ab + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\ &\qquad = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0. \end{aligned}$$

따라서 $(b-a)\omega = c - b$이거나 $(b-a)\omega^2 = c - a$이다. 두번째 식은 $(b-a)\omega^3 = (c-a)\omega$와 동치이므로 $(c-b)\omega = b - a$이다. 이로부터 $|b-a| = |c-b|$를 얻고 a와 b, a와 c를 잇는 두 선분의 사잇각은 $\pi/3$이다. 그림 0.3을 참고하라.

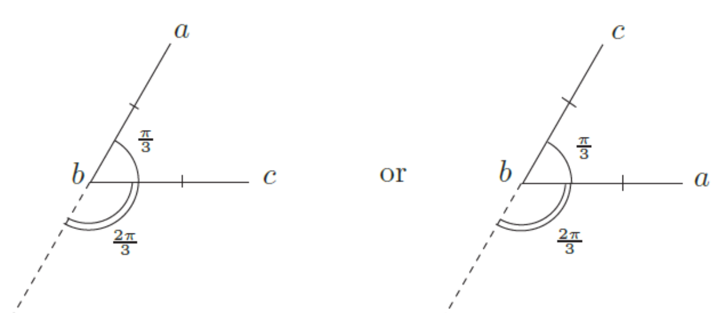


Fig. 5.4 a, b, c form an equilateral triangle.

Figure 0.3: 정삼각형을 이루는 세 점 a, b, c

두 가지 그림 모두 세 점 a, b, c는 정삼각형을 이룬다. a, b, c가 실수인 경우는 한점 $r \in \mathbb{R}$로 모이게 되어 $a = b = c = (= r)$이 되어 실수의 경우도 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

$\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$이 $\omega^3 = 1$을 만족한다고 하자. $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이고, $\omega \neq 1$이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다. 또한, $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega \cdot \omega^3 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$이므로,

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} (1 + \omega^k + \omega^{2k}).$$

그런데,

$$\begin{aligned}
(1 + \omega^k + \omega^{2k}) &= \begin{cases} 1+1+1, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 1 + \omega + \omega^2, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 1 + \omega^2 + \omega^4, & k \equiv 2 \mod 3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 3, & k \equiv 0 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 1 \mod 3, \\ 0, & k \equiv 2 \mod 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

에서

$$(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} = 3 \cdot \left(\binom{3n}{0} + \binom{3n}{3} + \cdots + \binom{3n}{3n} \right).$$

다른 방법으로 보면,

$$\begin{aligned}
(1+1)^{3n} + (1+\omega)^{3n} + (1+\omega^2)^{3n} &= 2^{3n} + (-\omega^2)^{3n} + (-\omega)^{3n} \\
&= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n \\
&= 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

연습문제 ??

그림 0.4와 같이 평면위의 네 점 A, B, C, D를 복소수 a, b, c, d에 각각 대응시키자. AB'은 A를 중심으로 하여 AB를 반시계방향으로 $90°$회전한 것이므로 B'은 복소수 $a - i(b - a)$에 대응된다. P는 BB'의 중점이므로 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{a + b - i(b - a)}{2}.$$

같은 방법으로 Q, R, S는 각각 다음 복소수에 대응된다.

$$\frac{b + c - i(c - b)}{2}, \quad \frac{c + d - i(d - c)}{2}, \quad \frac{d + a - i(a - d)}{2}.$$

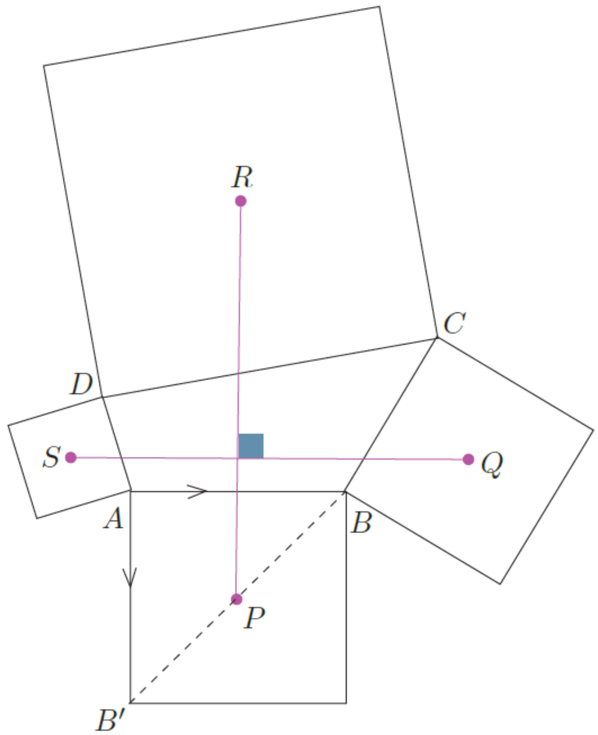


Fig. 5.5 RP and SQ have equal lengths and meet at right angles.

Figure 0.4: RP와 SQ는 길이가 같고 수직으로 만난다

점 P, Q, R, S에 대응되는 복소수를 각각 p, q, r, s라 하면,

$$\begin{aligned} i(q-s) &= i\left(\frac{b+c-i(c-b)}{2} - \frac{d+a-i(a-d)}{2}\right) \\ &= \frac{-b+c-a+d+i(b+c-d-a)}{2} \\ &= \frac{-a-b+i(b-a)}{2} + \frac{c+d-i(d-c)}{2} = -p+r \end{aligned}$$

이므로, $|q-s| = |p-r|$이 되어 $\ell(QS) = \ell(PR)$이다. 또한, i를 곱하는 것은 원점을 중심으로 $90°$ 회전을 의미하기 때문에 $PR \perp QS$이다.

연습문제 ??

실수 x_1, x_2, y_1, y_2에 대하여 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$라 하자. 그러면 $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 = i(x_1y_2 + y_1x_2)$이고,

$$\begin{aligned} |z_1z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + y_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(y_2^2+x_2^2) = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \\
&= |z_1|^2|z_2|^2.
\end{aligned}
$$

$|z_1|, |z_2|, |z_1z_2|$는 모두 음이 아닌 실수 이므로 $|z_1||z_2| = |z_1||z_2|$가 성립한다.

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하자. 그러면,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{x - iy} = x - i(-y) = x + iy = z.$$

또한,

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 + i(-xy + xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

끝으로,

$$
\begin{aligned}
\frac{z+\bar{z}}{2} &= \frac{x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z), \\
\frac{z-\bar{z}}{2i} &= \frac{\cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).
\end{aligned}
$$

연습문제 ??

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면,

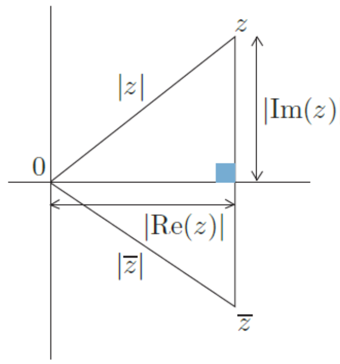
$$
\begin{aligned}
|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{x^2+(-y)^2} = |x-iy| = |\bar{z}|, \\
|\operatorname{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|, \\
|\operatorname{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} &\le \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy| = |z|.
\end{aligned}
$$

$\bar{z}$는 z를 실수축에 대칭시켜 얻어지며, $0 \in \mathbb{R}$이므로 원점과 z와의 거리는 $\bar{z}$와의 거리와 같다. 즉, $|z| = |\bar{z}|$. 부등식 $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$와 $|\operatorname{Im}(z)| \le |z|$는 아래 그림에서 직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 길다는 것을 의미한다.

연습문제 ??

우선 $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| = |a||z| < 1 \cdot 1 = 1$이므로, $\bar{a}z \ne 1$이고,

$$
\begin{aligned}
\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \overline{\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)} = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} &= \frac{z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z}} \\
&= \frac{|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 + |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.
\end{aligned}
$$

따라서 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \underbrace{\dfrac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}}_{\geq 0\ (|z|<1, |a|<1 \text{ 이므로})} \leq 1 - 0 = 1.$

연습문제 ??

$w \in \mathbb{C}$가 $p(w) = 0$, 즉, $c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d = 0$을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \bar{0} = 0$$

이고, 모든 c_k $(0 \leq k \leq d)$가 실수이므로

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{c_0 + c_1 w + \cdots + c_d w^d} = \overline{c_0} + \overline{c_1 w} + \cdots + \overline{c_d w^d} \\
&= \overline{c_0} + \overline{c_1}\,\overline{w} + \cdots + \overline{c_d}\,\overline{w^d} = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d.
\end{aligned}
$$

마지막 등식에서

$$\overline{w^k} = \underbrace{\overline{w \cdots w}}_{k\text{번}} = \underbrace{\bar{w} \cdots \bar{w}}_{k\text{번}} = (\bar{w})^k, \quad 1 \leq k \leq d$$

를 사용하였다. 따라서, $0 = c_0 + c_1 \overline{w} + \cdots + c_d (\bar{w})^d = p(\bar{w})$.

연습문제 ??

$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$라고 하자. 단, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. 그러면,

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|b|(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &= |a||b|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) \end{aligned}$$

이고 $\operatorname{Im}(a\bar{b}) = |a||b|(-(\cos\alpha)(\sin\beta) + (\sin\alpha)(\cos\beta)) = |a||b|\sin(\alpha - \beta)$. 0, a, b를 꼭지점으로 하는 ΔOAB의 면적은 ($O \equiv 0$, $A \equiv a$, $B \equiv b$)

$$\frac{1}{2}\ell(OA)\ell(OB)\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}|a|\cdot|b|\cdot|\sin(\alpha-\beta)| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(a\bar{b})| = \left|\frac{\operatorname{Im}(a\bar{b})}{2}\right|.$$

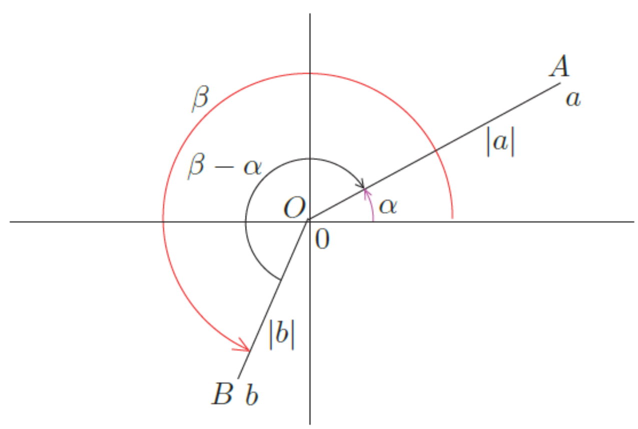


Fig. 5.6 The area of ΔOAB formed by the triangle with vertices at 0, a, b.

Figure 0.5: 0, a, b를 꼭지점으로 하는 ΔOAB의 면적

연습문제 ??

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$에 대하여,

$$w := i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}} = -i\cdot\overline{\det\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3}\end{bmatrix}}.$$

한편, 정사각행렬 $M = [m_{ij}]$에 대하여,

$$\det M = \sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot m_{i\sigma(i)},$$

여기서, S_n은 $\{1,\ldots,n\}$에 대한 모든 치환(permutation)의 집합이다.

$$\overline{\det M} = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot \overline{m_{i\sigma(i)}} = \det \overline{M},$$

여기서, $\overline{M}$은 M의 모든 원소에 대하여 켤레복소수를 취한 것이다. 따라서,

$$\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = \det \begin{bmatrix} 1 & \overline{z_1} & z_1 \\ 1 & \overline{z_2} & z_2 \\ 1 & \overline{z_3} & z_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix},$$

마지막 등식은 두번째 열과 세번째 열을 바꾼 것이다. 종합하면,

$$\begin{aligned}\overline{i\cdot\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} = -i\cdot\overline{\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}} &= -i\cdot\left(-\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}\right) \\ &= i\cdot\det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \overline{z_1} \\ 1 & z_2 & \overline{z_2} \\ 1 & z_3 & \overline{z_3} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

따라서, w는 켤레복소수와 동일하므로 실수이다.

연습문제 ??

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+&|z_1-z_2|^2 \\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} \\ &\qquad + z_1\overline{z_1} + z_1\cdot(-\overline{z_2}) + (-z_2)\cdot\overline{z_1} + (-z_2)(-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \cancel{z_1\cdot\overline{z_2}} + \cancel{z_2\cdot\overline{z_1}} + |z_2|^2 + |z_1|^2 - \cancel{z_1\cdot\overline{z_2}} - \cancel{z_2\cdot\overline{z_1}} + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

복소평면에서 $0, z_1, z_2, z_1+z_2$를 꼭지점으로 하는 평행사변형 P를 생각하자. 그러면, $|z_1+z_2|$는 P의 한쪽 대각선의 길이가 되고, $|z_1-z_2|$는 다른쪽 대각선의 길이가 된다. 또한, $|z_1|, |z_2|$는 P의 두변의 길이이다. 따라서 위의 식이 의미하는 것은 "평행사변형에서 대각선 길이의 제곱의 합은 변의 길이의 제곱의 합의 두배와 같다" 이다.

연습문제 ??

$z_1, z_2\in\mathbb{C}$에 대하여, $|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2|$이므로

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1-z_2|. \tag{0.8}$$

모든 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$에 대하여, 식 (0.8)에서 z_1과 z_2의 역할을 바꾸어도 성립하므로

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \tag{0.9}$$

식 0.8과 0.9로부터 $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$이다.

연습문제 ??

(1),(2),(3):

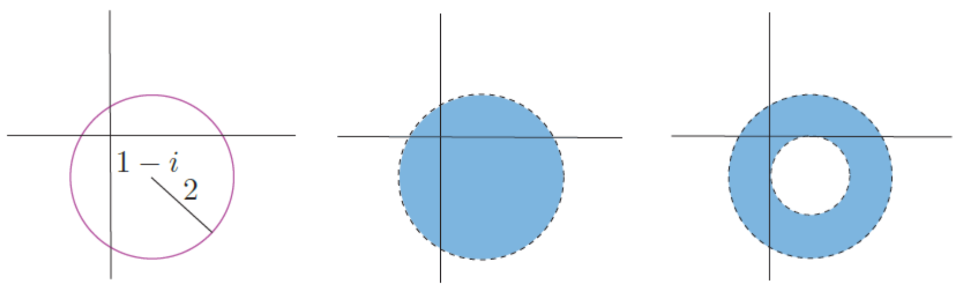
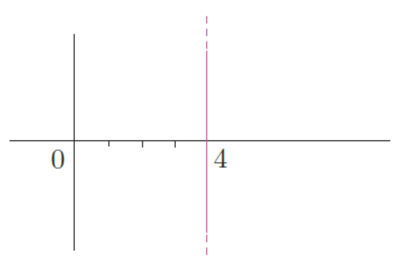


Fig. 5.7 Left to right: The set of points described by $|z-(1-i)|=2$, $|z-(1-i)|<2$ and $1<|z-(1-i)|<2$, respectively.

Figure 0.6: 왼쪽부터 $|z-(1-i)| = 2$, $|z-(1-i)| < 2$, $1 < |z-(1-i)| < 2$

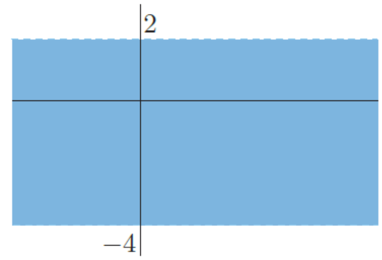
(4): $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $\mathrm{Re}(z - (1-i)) = 3$은 $x - 1 = 3$과 동치이므로, $x = 4$이다.



(5): $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이라 하면, $|\,\mathrm{Im}(z - (1-i))| < 3$은 $|y+1| < 3$, 즉, $-4 < y < 2$와 같다.

(6): $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1-i)| = |z-(1+i)|\}$는 $1-i$와 $1+i$에서 같은 거리에 있는 복소수 z의 집합이다. 따라서, $1-i$와 $1+i$을 잇는 선분의 수직이등분선이 된다. 즉, 실수축이다.

(7): 방정식 $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$는 z에서 $1+i$까지의 거리와 $1-i$까지의 거리의 합이 2가 됨을 의미한다. 그런데 $1-i$와 $1+i$의 거리가 2이므로 z는 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분에 있다.



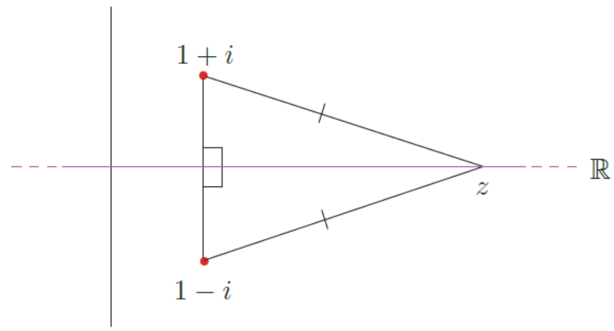


Fig. 5.8 The set of points z satisfying $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$ is $\mathbb{R}$.

Figure 0.7: $|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$를 만족하는 집합은 $\mathbb{R}$

직접 계산하는 방식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다. $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$이면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ &\geq |y+1| + |y-1| \geq 1 + \cancel{y} + 1 - \cancel{y} = 2 \end{aligned}$$

이므로 $|y+1| + |y-1| = 2$이고, $x = 1$이다.

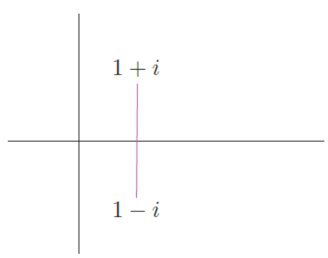


Fig. 5.9 The set of points z satisfying $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$ is the line segment joining $1-i$ to $1+i$.

Figure 0.8: $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 2$를 만족하는 집합은 $1-i$와 $1+i$를 잇는 선분이다.

(8): 방정식 $|z-(1-i)| + |z-(1+i)| = 3$을 만족하는 집합은 초점이 $1+i$와 $1-i$인 타원 E이 된다. 따라서, $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1-i)| + |z-(1+i)| < 3\}$은 타원 E의 내부가 된다.

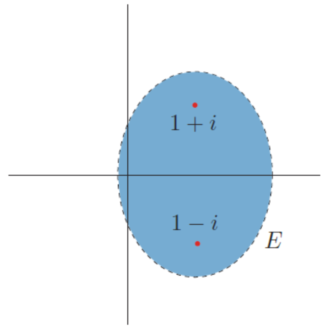


Fig. 5.10 The set of points z satisfying $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$ is the interior of the ellipse E.

Figure 0.9: $|z-(1-i)|+|z-(1+i)|<3$을 만족하는 집합은 타원 E의 내부이다.

연습문제 ??

$z \neq 0$에 대하여 $p(z) = z^d \left(c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|c_{d-1}|}{n} + \cdots + \frac{|c_1|}{n^{d-1}} + \frac{|c_0|}{n^d}\right) = 0$$

이므로, 다음을 만족하도록 충분히 큰 N을 잡을 수 있다.

$$\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d} < \frac{|c_d|}{2}.$$

그러면 $|z| > N =: R$에 대하여

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |z^d| \left|c_d + \frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right| \\
&\geq |z|^d \left(|c_d| - \left|\frac{c_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{d-1}} + \frac{c_0}{z^d}\right|\right) \\
&\geq |z|^d \left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|c_1|}{|z|^{d-1}} + \frac{|c_0|}{|z|^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d \left(|c_d| - \left(\frac{|c_{d-1}|}{N} + \cdots + \frac{|c_1|}{N^{d-1}} + \frac{|c_0|}{N^d}\right)\right) \\
&\geq |z|^d \left(|c_d| - \frac{|c_d|}{2}\right) = \underbrace{\frac{|c_d|}{2}}_{=:M} |z|^d.
\end{aligned}$$

연습문제 ??

$(\Leftarrow)$:

실수열 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$가 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다고 하자. 그러면, 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여, 충분히 큰 N이 존재하여 $n > N$이면

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

을 만족하게 할 수 있고,

$$\begin{aligned} |z_n - L| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L))^2 + (\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon. \end{aligned}$$

따라서 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$은 L로 수렴한다.

$(\Rightarrow)$:

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다고 가정하자. $n > N$이면 $|z - L| < \epsilon$이 되도록 하는 N을 잡을 수 있다. 그러면 모든 $n > N$에 대하여,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| = |\operatorname{Re}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon, \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| = |\operatorname{Im}(z_n - L)| \le |z_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

이 되어 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다.

연습문제 ??

$(\Rightarrow)$:

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다고 가정하자. 그러면 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다. 따라서 $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(-\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$은 각각 $\operatorname{Re}(L)$과 $-\operatorname{Im}(L)$로 수렴한다. 즉, $(\operatorname{Re}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$과 $(\operatorname{Im}(\overline{z_n}))_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 $\operatorname{Re}(\overline{L})$과 $\operatorname{Im}(\overline{L})$로 수렴한다. 결론적으로 $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다.

$(\Leftarrow)$:

$(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{L}$로 수렴한다고 하자. 앞의 증명에서 $(\overline{(\overline{z_n})})_{n\in\mathbb{N}}$이 $\overline{(\overline{L})}$로 수렴한다. 다시 쓰면, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$이 L로 수렴한다.

연습문제 ??