복소해석학 연습문제 풀이
A Friendly Approach to Complex Analysis

염용진,허재성 譯

Update on December 31, 2022

연습문제 풀이

머리말 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

0에서 f'의 미분이 존재하고 그 값이 L이라고 가정하자. $\epsilon := 1 > 0$으로 잡으면, $0 < |x - 0| < \delta$이면

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다. 특히 $x := \delta/2$로 잡으면 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{2(\delta/2) - 0}{(\delta/2) - 0} - L \right| = |2 - L| < \epsilon. \tag{0.1}$$

한편 $x := -\delta/2$로 잡아도 $0 < |x - 0| = \delta/2 < \delta$이므로

$$\left| \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} - L \right| = \left| \frac{-2(-\delta/2) - 0}{(-\delta/2) - 0} - L \right| = |2 + L| < \epsilon. \tag{0.2}$$

식 (0.1)와 (0.2)으로부터 실수 절대값에 대한 삼각부등식을 이용하면

$$4 = |2 + L + 2 - L| \leq |2 + L| + |2 - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2$$

가 되어 모순이다. 따라서 f'은 0에서 미분이 불가능하다.

1장 - 연습문제 풀이

연습문제 ??

$(x, y) \neq 0$이므로, x, y 중 적어도 하나는 0이 아니다. 따라서 $x^2 + y^2 \neq 0$이고,

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

또한,

$$
\begin{aligned}
&(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\\
&\quad=\left(x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}-y\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),x\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\
&\quad=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right)=(1,0).
\end{aligned}
$$

따라서 $(x,y)\neq(0,0)$에 대하여 $(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$이다.

연습문제 ??

$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$이므로, $\tan\theta\in\mathbb{R}$이고,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-i\tan\theta}&=\frac{1}{1^2+(\tan\theta)^2}+i\left(\frac{\tan\theta}{1^2+(\tan\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}+i\left(\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\right)\\
&=\frac{(\cos\theta)^2}{1}+i\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{1}=(\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta).
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}&=(1+i\tan\theta)((\cos\theta)^2+i(\sin\theta)(\cos\theta))\\
&=(\cos\theta)^2-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta)(\cos\theta)\\
&\qquad+\left((\sin\theta)(\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(\cos\theta)^2\right)\\
&=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+i2(\sin\theta)(\cos\theta)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta).
\end{aligned}
$$

연습문제 ??

$P\subset\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$의 양의 부분집합이라고 하자. 그러면, $i\neq 0$이므로 조건 (P3)에 의해 $i\in P$이거나 ($i\neq P$이고 $-i\in P$)이다. 조건 (P2)에서

$$-1=i\cdot i=(-i)\cdot(-i)\in P \tag{0.3}$$

이고, 다시 (P2)에서

$$1 = (-1) \cdot (-1) \in P \tag{0.4}$$

가 된다. 그런데 $1 \neq 0$이고 $x = 1$이라고 하면 (P3)에서 (0.3), (0.4)는 동시에 만족될 수 없기에 모순이다.

연습문제 ??

아래 그림 0.1과 같다.

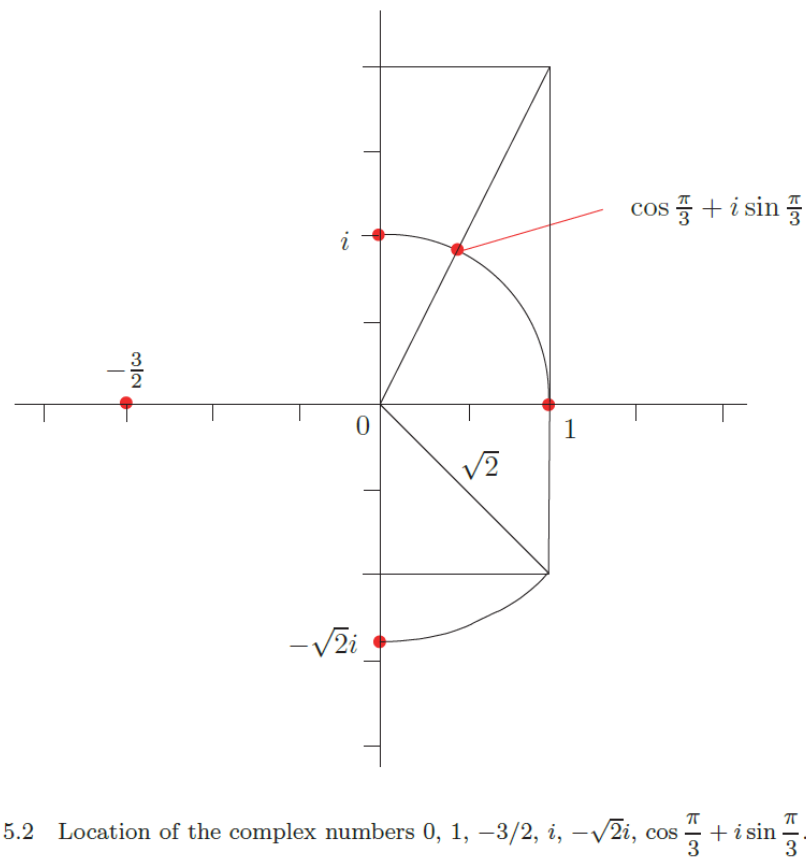

Figure 0.1: 복소수 $0, 1, -3/2, i, -\sqrt{2}i, \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$의 위치

연습문제 ??

$\theta \in \mathbb{R}$에 대하여 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$이다.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + i2(\cos\theta)(\sin\theta)\right) \\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - (\sin\theta)2(\cos\theta)(\sin\theta)\end{aligned}$$

$$+ i(\cdots).$$

따라서 양변의 실수부가 같다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\ &= (\cos\theta)\left((\cos\theta)^2 - 1 + (\cos\theta)^2\right) - 2(\cos\theta)(1-\cos\theta)^2 \\ &= (\cos\theta)^3 - \cos\theta + (\cos\theta)^3 - 2\cos\theta + 2(\cos\theta)^3 \\ &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta\end{aligned}$$

다른 방법으로, 이항정리 공식 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$이 복소수 $a, b \in \mathbb{C}$와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 성립한다는 것을 이용하면,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)) \\ &= \mathrm{Re}((\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3) \\ &= (\cos\theta)^3 - 3(\cos\theta)(\sin\theta)^2 \\ &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$로 쓸 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 32\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32(0 + i\cdot 1) = 32i.\end{aligned}$$

연습문제 ??

$2+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2)$이고 $3+i$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/3)$이다. 따라서, $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는 $\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$이다. 한편,

$$(2+i)(3+i) = 6 - 1 + i(2+3) = 5 + 5i$$

이므로 $(2+i)(3+i)$가 실수축의 양의 방향과 이루는 각도는

$$\tan^{-1}(5/5) = \tan^{-1}1 = \pi/4$$

이다. 결론적으로, $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$이다.

연습문제 ??

정삼각형의 꼭지점 A, B, C의 위치가 반시계방향의 순서로 복소수 z_A, z_B, z_C에 있다고 하자. $\ell(AC) = \ell(AB)$이고 $\angle CAB = \pi/3$이므로,

$$z_C - z_A = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_B - z_A). \tag{0.5}$$

귀류법을 쓰기위해 $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$가

$$z_C - z_A = p + iq, \quad z_B - z_A = m + in$$

을 만족한다고 하자. 그러면, 식 (0.5)에서 $p + iq = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(m + in)$을 다시 쓰면,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \tag{0.6}$$

$$q = \frac{m\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2}. \tag{0.7}$$

식 (0.6)에 $-n$을 곱하고, 식 (0.7)에 m을 곱하여 더하면,

$$qm - pn = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 + n^2)$$

을 얻는다. 그런데 $m^2 + n^2 \neq 0$이므로 ($z_B \neq z_A$이므로),

$$\sqrt{3} = \frac{2(qm - pn)}{m^2 + n^2} \in \mathbb{Q}$$

를 얻어 모순이 생긴다.