

# 上海大学研究生 量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 吴梦之 严禹坤

# Contents

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>2</b>
1.1	引言 . . . . .	2
1.1.1	因果律问题的分析 . . . . .	2
1.1.2	构建理论的一般步骤 . . . . .	2
1.2	分析力学回顾 . . . . .	3
1.2.1	最小作用量原理与Euler-Lagrange方程 . . . . .	3
1.2.2	哈密顿力学 . . . . .	4
1.3	量子力学中的谐振子 . . . . .	5
1.3.1	多体耦合谐振子 . . . . .	5

# 1 引言

## 1.1 引言

构建OFT的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律(causality)

### 1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) := \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \quad (1)$$

其中 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是，假设在 $t_1$ 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态，即位于 $\vec{x}_1$ 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后，它会变成弥漫于空间的波，在 $t_2$ 时刻有一定几率处于 $\vec{x}_2$ ， $K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中，我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速，即类空的两点之间不应该有关联，所以类空的两点之间的传播子应该为0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取Planck常数 $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi it} \right)^{3/2} e^{im|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2/2t} \end{aligned} \quad (2)$$

当 $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ 很大而 $t$ 很小时，这个传播子仍然不为0，说明在类空间隔下的两个点之间存在关联，这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学，此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \int p \sin(p|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}} dp \\ &\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2 - t^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为0，说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题，这将在QFT中得到回答。

### 1.1.2 构建理论的一般步骤

- 1 写下拉氏量，比如 $\mathcal{L}[\phi] = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$
- 2 写下路径积分，比如 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L}[\phi]}$

- 3 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开
- 4 微扰计算路径积分
- 5 发现存在发散问题
- 6 正规化来分离发散部分，比如引入截断 $\Lambda$ ，于是 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \int_{|x| > \frac{1}{\Lambda}} \frac{1}{x^2} dx$
- 7 令耦合系数为截断的微扰展开式
- 8 重整化，只考虑路径积分的有限项
- 9 与实验比较
- 10 拿Nobel奖，或者从头开始

## 1.2 分析力学回顾

### 1.2.1 最小作用量原理与Euler-Lagrange方程

分析力学中，我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函，用来刻画系统的运动规律。

Note: 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$

泛函 $L: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ，其中 $C(\Omega)$ 是 $\Omega$ 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t) dt \quad (4)$$

最小作用量原理(哈密顿原理): 对于真实的一个运动轨迹，当坐标发生一个变分后，作用量不会变小。也就是说 $\delta S = 0$ 。

注: 这里的变分是等时变分，即 $\delta t = 0$ ，故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t} \delta t$ 项。

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{q}_i dt) \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \end{aligned} \quad (5)$$

于是我们得到了Euler-Lagrange方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (6)$$

Euler-Lagrange方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ ，根据Euler-Lagrange方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x} + kx = 0$ 。

考虑Newton第二定律 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ ，对于保守力 $\vec{F}$ ，一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F} = \nabla V$ ，于是Newton第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}} - \nabla V$ 。这与Euler-Lagrange方程具有相同的形式，即如果令 $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V$ ，则Euler-Lagrange方程给出的正是Newton第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中， $L = T - V$ 。

### 1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

对拉氏量作Legendre变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i, p_i; t) = p_i \dot{q}_i - L \quad (8)$$

由于L不显含 $p_i$ ，我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ ；以及根据Euler-Lagrange方程(6)， $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} q_i = -\dot{q}_i$ 。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (9)$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L = T - V$ 。由(7)，不难得到 $H = T + V$ 。应注意此式仅对保守力学系统成立，对于经典电磁场下带电质点，其哈密顿量为 $H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + e\phi(x)$ ，就不再是 $T + V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ 。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -kx \\ \dot{q}_i = \frac{p}{m} \end{cases} \quad (10)$$

定义泊松括号

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (11)$$

这里默认对指标i求和，称为Einstein求和。当然，严格来讲Einstein求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 $q_i$ 和 $p_i$ 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jk} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

力学量 $F = F(q_i, p_i; t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (14)$$

这意味着  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ ，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

### 1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases} \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \end{cases} \quad (15)$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (16)$$

于是可以求出第n能级的态矢量为

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (17)$$

定义粒子数算符  $\hat{N} = \sum_i \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ，于是

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (18)$$

#### 1.3.1 多体耦合谐振子

N个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间(Fock态)为

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hat{H}_k &= \sum \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k^2\hat{x}_k^2 = \sum (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega_k \\ |n_1 n_2 \dots n_k \dots n_N\rangle &= (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N} \end{aligned} \quad (19)$$

耦合谐振子的哈密顿量

对于N个耦合谐振子的哈密顿量，考虑相邻两个谐振子具有相互作用，给出哈密顿量

$$\hat{H} = \sum_j [\frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j)^2] \quad (20)$$