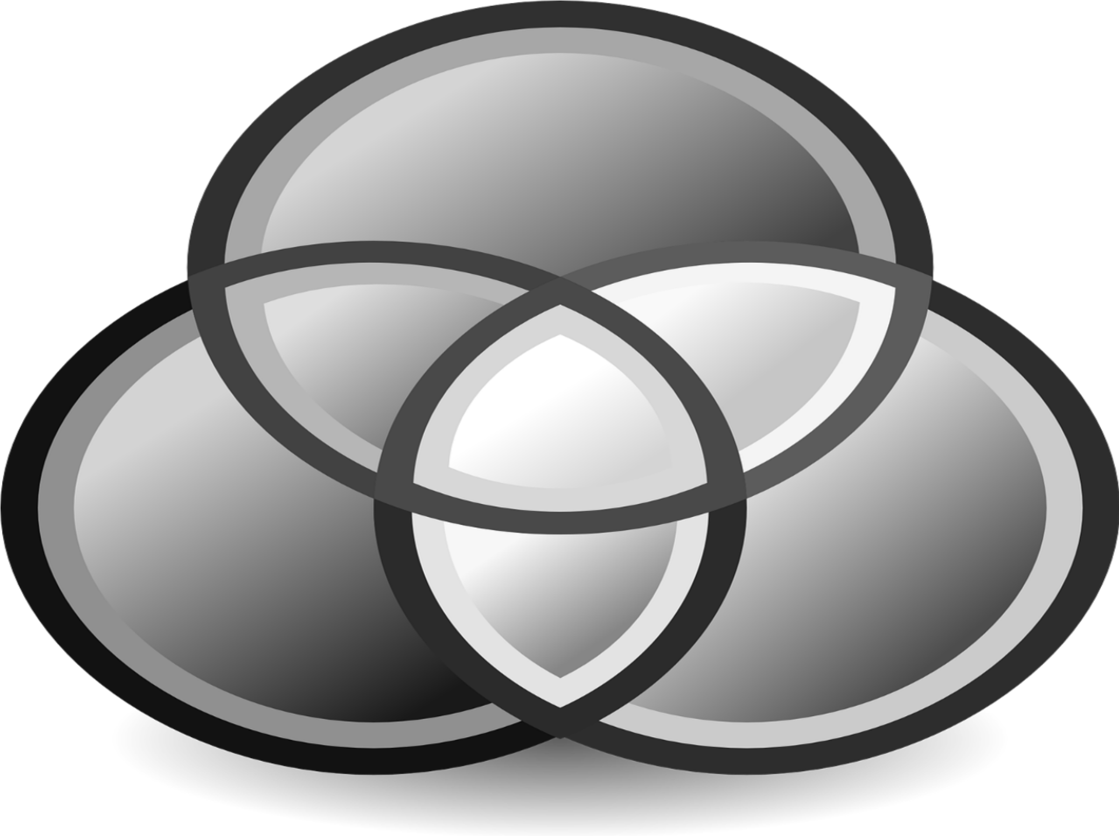


فصل ۱

نظریه مجموعه‌ها

این فصل هنوز کامل آماده نشده است.

فهرست مطالب

دنباله‌ها

این بخش هنوز آماده نشده است.

دنباله

این بخش هنوز آماده نشده است.

دنباله‌های خاص

این بخش هنوز آماده نشده است.

نمایش بازگشتی دنباله‌ها

این بخش هنوز آماده نشده است.

سری

این بخش هنوز آماده نشده است.

توابع مولد

تابع مولد تابعیست که برای نمایش دنباله‌ی a_n به صورت ضرایبی از توان‌های x از آن استفاده می‌شود (بسط آن، مولد اعضای دنباله در قالب ضرایب جملاتش است)، به طوری که ضریب x^n برابر است با جمله‌ی n ام دنباله. تابع مولد برای دنباله‌ی $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ برابر است با:

$$G(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$$

برای مثال، تابع مولد برای دنباله‌ی $1, 1, 1, 1, 1, 1$ به صورت زیر است:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

$$x \neq 1$$

همچنین تابع مولد برای دنباله‌ی $3, 3, 3, \ldots$ به صورت زیر است:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3x^n = \frac{3}{1 - x}$$

$$|x| < 1$$

و برای دنباله‌ی $1, c, c^2, c^3, \ldots$ تابع مولد به صورت زیر است:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (cx)^n = \frac{1}{1 - cx}$$

$$|cx| < 1, c \neq 0$$

۱

اگر $a_n = \binom{m}{n}$ که $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ باشد، تابع مولد دنباله‌ی $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ چیست؟

پاسخ.

تابع مولد برای این دامنه با توجه به تعریف a_n برابر مقدار زیر می‌شود:

$$G(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{m}x^m$$

پس طبق عکس قضیه‌ی ضرایب دوجمله‌ای داریم:

$$G(x) = (1 + x)^m$$

۲

اگر $G(x)=\frac{۱}{(۱-x)^۲}$ باشد، ضرایب را در بسط $G(x)=\sum_{n=۰}^{+\infty} a_n x^n$ به دست بیاورید.($|x|<۱$)

پاسخ.
از آن جایی که $|x|<۱$ است، می‌توان گفت که داریم:

$$\frac{۱}{۱-x}=\sum_{n=۰}^{+\infty} x^n$$

بنابراین:

$$G(x)=\frac{۱}{(۱-x)^۲}=(\sum_{n=۰}^{+\infty} x^n)(\sum_{n=۰}^{+\infty} x^n)$$
$$=\sum_{n=۰}^{+\infty}(\sum_{m=۰}^{n} ۱)x^n=\sum_{n=۰}^{+\infty}(n+۱)x^n$$

۳

فرم بسته و ساده شده‌ی تابع مولد دنباله‌ی زیر را بیابید.

$$۲,۰,۲,۰,۲,...$$

پاسخ.
اگر $G(X)$ تابع مولد باشد، داریم:

$$G(x)=۲(۱)+۰(x)+۲(x^۲)+۰(x^۳)+۲(x^۴)+...=$$
$$۲+۲x^۲+۲x^۴+...$$
$$G(x)=\sum_{n=۰}^{+\infty} ۲x^{۲n}=۲\sum_{n=۰}^{+\infty} x^{۲n}$$

با توجه به این که فرم بسته‌ی این تابع $G(x)$ به دست آمده را به راحتی نمی‌توانیم به دست بیاوریم، سعی می‌کنیم با تغییر تابع مولدی که فرم بسته‌ی آن را می‌دانیم به نتیجه برسیم.

$$F(x) = ۱ + x + x^۲ + ... = \frac{۱}{۱-x}$$
$$F(x^۲) = ۱ + x^۲ + x^۴ + ... = \frac{۱}{۱-x^۲}$$
$$G(x) = ۲F(x^۲) = ۲ + ۲x^۲ + ۲x^۴ + ... = \frac{۲}{۱-x^۲}$$

تابع مولد نمایی نسخه‌ای تغییر یافته از تابع مولد است که برای دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(x) = a_۰ + a_۱(\frac{x}{۱!}) + a_۲(\frac{x^۲}{۲!}) + ... = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n(\frac{x^n}{n!})$$

درواقع تفاوت این تابع، با تابع مولد در آن است که در تابع مولد a_k ضریب عبارت x^k بود ولی در تابع مولد نمایی، ضریب عبارت $\frac{x^k}{k!}$ است. این تابع برای استفاده‌های خاصی که در آینده با آن‌ها روبرو خواهید شد، تعریف شده است.

اگر بتوان ارتباط بین دو دنباله‌ی a_n و b_n را به شکل $a_n = \frac{b_n}{n!}$ نوشت، آنگاه تابع مولد نمایی دنباله a_n همان تابع مولد دنباله b_n خواهد بود.

برای نمونه، تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی $۰!, ۱!, ۲!, ..., n!, ...$ به صورت زیر است:

$$G(x) = \sum_{n=۰}^{+\infty}(n!)(\frac{x^n}{n!}) = ۱ + x + x^۲ + ... = \frac{۱}{۱-x}$$

همچنین تابع مولد برای دنباله‌ی $۱, k, k^۲, ..., k^n, ...$ نیز به صورت زیر است:

$$G(x) = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = ۱ + \frac{kx}{۱!} + \frac{(kx)^۲}{۲!} + ... = e^{kx}$$

اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری: اگر $k+۱$ کبوتر بخواهند در k لانه قرار گیرند، دست کم دو کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت.

مطلب بالا را می‌توان به شکل کلی‌تر، تحت عنوان تعمیم اصل لانه کبوتری اینگونه بیان کرد که اگر N شیء را در k جعبه قرار دهیم، آنگاه دست کم یکی از جعبه‌ها دارای $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ شیء خواهد بود.

برای نمونه، بین ۳۶۷ نفر، حداقل دو نفر با ماه و روز یکسان در تاریخ تولد وجود دارد؛ زیرا تنها ۳۶۶ تاریخ تولد متمایز در یک سال وجود دارد. همچنین اگر نمره‌های ممکن برای درس ساختمان گسسته A ، B ، C ، D و E باشد، برای اینکه دست کم ۶ تا از دانشجویان نمره‌ی یکسان بگیرند، این درس باید حداقل ۲۶ دانشجو داشته باشد.

۴

یک دسته‌ی ۵۲تایی از کارت‌ها داریم.

آ. چه تعداد از کارت‌ها را باید انتخاب کنیم تا دست کم ۳ تا از کارت‌ها هم‌خال باشند؟

پاسخ.

برای هر خال یک جعبه در نظر می‌گیریم. بنابراین ۴ جعبه داریم.

هر بار که یک کارت انتخاب می‌کنیم، آن را در جعبه‌ی خال خودش قرار می‌دهیم. اگر N تعداد کارت‌هایی باشد که انتخاب کردیم، طبق اصل لانه‌ی کبوتری برای اینکه دست کم ۳ کارت هم‌خال شوند باید $\lceil \frac{N}{۴} \rceil \geq ۳$ برقرار باشد. بنابراین داریم:

$$N = ۲ \times ۴ + ۱$$

ب. چه تعداد از کارت‌ها را باید انتخاب کنیم تا خال دست کم ۳ تا از کارت‌ها دل باشد؟

پاسخ.
برای حل این قسمت از لانه‌ی کبوتری استفاده نمی‌کنیم. ابتدا تمام خال‌های دیگر را با بیرون کشیدن ۳۹ کارت انتخاب می‌کنیم. پس فقط کارت‌های خال دل باقی می‌مانند که با بیرون کشیدن سه تا از آن‌ها مسئله حل می‌شود. یعنی باید ۴۲ کارت بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم خال سه تا از آن‌ها دل است.

۵

فرض کنید در یک گروه ۶ نفری، هر دو نفر با هم دوست و یا دشمن هستند. ثابت کنید که در این گروه، سه نفر که دوبه‌دو با هم دوست و یا دوبه‌دو با هم دشمن هستند، وجود دارد.

پاسخ.
اگر A یکی از این شش نفر باشد و ۵ نفر باقی‌مانده را به دو گروه دوستان A و دشمنان A تقسیم کنیم، طبق اصل لانه‌ی کبوتری در یکی از این گروه‌ها حداقل ۳ نفر وجود دارد. حال اگر این سه نفر دوستان(یا دشمنان) A باشند، در صورتی که هر جفت از آن‌ها با هم دوست(دشمن) باشند، به همراه A یک گروه سه نفره که در آن همه دوبه‌دو دوست(دشمن) هستند، تشکیل شده و درستی گزاره‌ی مورد نظر اثبات می‌شود. (در صورتی که هیچ جفتی از دوستان A با هم دوست(دشمن) نباشند، خودشان یک گروه سه نفره تشکیل می‌دهند که در آن همه دوبه‌دو دشمن(دوست) هستند.)

۶ قضیه **Erdos-Zekeres**

اگر دنباله‌ای به طول $pq+1$ از اعداد حقیقی متمایز داشته باشیم، ثابت

کنید در این دنباله، زیردنباله‌ای اکیدا صعودی به طول $p+۱$ یا اکیدا نزولی به طول $q+۱$ وجود دارد.

پاسخ.

اگر $۱ \leq m \leq pq+۱$ باشد، می‌توانیم L_m و R_m را تعریف کنیم به طوری که L_m طول بزرگ‌ترین زیردنباله‌ی اکیدا صعودی است که به mامین عضو دنباله ختم می‌شود و R_m طول بزرگ‌ترین زیردنباله‌ی اکیدا نزولی است که از عضو mام دنباله شروع می‌شود. حال اگر k را در نظر بگیریم به طوری که با m مساوی نباشد، حتما یکی از دو رابطه‌ی $R_m \neq R_k$ یا $L_m \neq L_k$ برقرار است. (زیرا اگر $m > k$ ، برحسب اینکه عضو mام دنباله از عضو kام دنباله بزرگ‌تر باشد یا کوچک‌تر، داریم $L_k < L_m$ یا $R_k > R_m$. در حالت $m < k$ نیز اتفاقات مشابهی رخ می‌دهد.) به این ترتیب تمام زوجهای (L_m, R_m) که متفاوت هستند.

برهان خلف: زیر دنباله‌ای اکیدا صعودی به طول $p+۱$ یا زیردنباله‌ای اکیدا نزولی به طول $q+۱$ موجود نباشد.

بنابراین p $۱ \leq L_m \leq$ و q $۱ \leq R_m \leq$ است. پس برای هر m، زوج (L_m, R_m) می‌تواند $p \times q$ حالت داشته باشد و از آن‌جایی که m می‌تواند $pq+۱$ مقدار مختلف داشته باشد، طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل دو تا از زوج‌های (L_m, R_m) با هم برابرند که با متمایز بودن همه‌ی زوج‌های (L_m, R_m) در تناقض است. بنابراین برهان خلف نادرست است و درستی حکم ثابت می‌شود.

اشتباه نکنید

این بخش هنوز آماده نشده است.

مسائل

این بخش هنوز آماده نشده است.

تمرین‌ها

۱. مجموعه‌ای شامل $۲n-۱$ عدد از مجموعه اعداد $\{۱,۲,۳,\ldots,۲^n-۲\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید سه عدد مانند x و y و z در این مجموعه وجود دارند به طوری که:

$$\frac{۱}{۲}\leq\frac{x^۲}{yz}\leq ۲$$

۲. ۱۰۰۰ عدد صحیح مثبت در اختیار داریم. نشان دهید می‌توان تعدادی از آن‌ها را انتخاب کرد، به نحوی که مجموعشان به سه صفر ختم شود.

۳. ۳۳ نفر در یک اتاق حضور دارند. از هر کس دو سوال پرسیده می‌شود:

- چند نفر دیگر در این اتاق هم‌وزن شما هستند؟
- چند نفر دیگر در این اتاق هم‌قد شما هستند؟

تمامی جواب‌ها در بازه‌ی ۰ تا ۱۰ قرار دارد و تمامی اعداد ۰ تا ۱۰ شنیده می‌شوند. ثابت کنید در این اتاق دو نفر هم‌قد و هم‌وزن وجود دارند.

فصل ۲

آنالیز ترکیبی

آنچه در این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت، مبحث شمارش است که به محاسبه‌ی تعداد حالات رخداد یک پدیده، بدون بررسی تک تک حالات می‌پردازد. از کاربردهای این فصل می‌توان به محاسبه‌ی احتمالات پیش‌آمدها، تخمین زمان اجرا و منابع مصرفی برنامه‌ها، برخی از تحلیل‌ها در گراف و ... اشاره کرد.

فهرست مطالب

اصول اولیه شمارش

مطالعه ریاضیات گسسته ترکیبیاتی را با بیان اصول ساده و اولیه‌ی شمارش آغاز می‌کنیم. هرچند این اصول بسیار ساده بنظر می‌رسند اما در علم ترکیبیات، در حکم ستون‌هایی هستند که تمام قضایای پیچیده‌تر بر مبنای آن‌ها بنا شده‌اند.

اصل ضرب

اصل ضرب: اگر بتوان فرایندی را به دو قسمت متوالی تقسیم کرد و n حالت برای انجام قسمت اول و به ازای هر یک از این حالات، m حالت برای انجام قسمت دوم وجود داشته باشد، آنگاه $n \times m$ حالت برای انجام شدن فرایند وجود دارد.

تعمیم اصل ضرب: اگر بتوان فرایندی را به k قسمت متوالی تقسیم کرد و به ازای هر دنباله‌ای از حالت‌های انجام قسمت‌های ۱ تا $i-۱$ام، n_i حالت برای اجام قسمت iام وجود داشته باشد، آنگاه $\prod_{i=۱}^{n} n_i$ حالت برای انجام شدن فرایند وجود دارد.

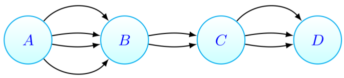
به فرضیات اصل ضرب تعمیم‌یافته توجه کنید:

آ. نه فقط مرحله‌ی $i-۱$ام بلکه کل دنباله‌ی اعمال پیشین تأثیرگذار است به نحوی که اگر عملی در ابتدای دنباله، باعث کم یا زیاد شدن تعداد حالات پیشروی در انتهای دنباله شود، قادر به استفاده از این اصل نیستیم.

ب. نیازی نیست حالات انجام کار در مرحله‌ی iام به ازای تمام دنباله‌های اعمال ۱ تا $i-1$ام یکسان باشد، بلکه تنها کافیست تعداد این حالات برابر باشد.

۱

چهار شهر A, B, C, D را متصور شوید که از A به B چهار مسیر، از B به C دو مسیر و از C به D سه مسیر وجود دارد. چند مسیر متفاوت برای سفر از A به D وجود دارد؟



پاسخ.
سفر از A به D را به سه بخش سفر از A به B، از B به C و از C به D تقسیم می‌کنیم و طبق اصل ضرب، می‌توان نوشت ($N(x, y)$ را تعداد مسیرهای سفر از x به y درنظر بگیرید):

$$N(A, D) = N(A, B) \times N(B, C) \times N(C, D)$$
$$= ۴ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$$

۲

چند پلاک خودرو فارسی با شرایط زیر وجود دارد؟

آ. هر پلاک شامل دو رقم عدد صحیح، یک حرف از حروف الفبا و پس از آن سه رقم عدد صحیح باشد.

پاسخ.
با توجه به شروط گفته شده برای پلاک، ۵ کاراکتر داریم. دو کاراکتر اول عدد هستند، بنابراین برای هر کدام از آن‌ها ۱۰ حالت وجود دارد.

کاراکتر سوم حرف است، بنابراین ۳۲ حالت برای آن نیز موجود است. به ازای هر یک از سه کاراکتر بعدی که عدد هستند نیز ۱۰ حالت داریم. با توجه به این که حالت‌های ممکن برای هر کاراکتر مستقل از سایر کاراکترهاست، از اصل ضرب برای به دست آوردن تعداد کل حالت‌ها استفاده می کنیم که برابر می‌شود با:

$$۱۰^۲ \times ۳۲ \times ۱۰^۳$$

ب. پلاک‌ها مانند قسمت اول هستند با این تفاوت که ارقام تکراری در پلاک‌ها ظاهر نمی‌شوند.

پاسخ.
مانند قسمت قبل، با ضرب کردن تعداد حالت‌های کاراکترها و طبق اصل ضرب، تعداد پلاک‌های ممکن را به دست می‌آید، اما باید توجه شود که به ازای هر رقمی که در گام اول انتخاب شود، ۹ حالت دیگر برای گام دوم وجود دارد (تمام ارقام بجز رقم انتخاب شده در گام اول). همچنین این موضوع برای گام‌های بعدی نیز صادق است پس جواب نهایی برابر می‌شود با:

$$۱۰ \times ۹ \times ۳۲ \times ۸ \times ۷ \times ۶$$

ج. پلاک‌ها مانند قسمت دوم هستند با این تفاوت که حرف فارسی می‌تواند در هر جای پلاک (کاراکتر اول، دوم الی آخر) ظاهر شود.

پاسخ.
می توان مسئله را به ۷ گام تقسیم کرد: ۱- انتخاب جایگاه حرف، ۲- انتخاب حرف، ۳ تا ۷ - انتخاب ارقام. بنابراین، طبق اصل ضرب، تعداد پلاک‌های ممکن برابر است با:

$$۶ \times ۳۲ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶$$

که ۶ تعداد حالت‌های گام اول است.

۳

k جعبه، هر کدام شامل n توپ متمایز داریم (توپ‌ها بین جعبه‌ها نیز متمایزند). اگر بتوان از هر جعبه حد اکثر یک توپ برداشت، چند حالت برای مجموعه توپ‌هایی که در نهایت انتخاب شده‌اند وجود دارد؟

پاسخ. انتخاب توپ از هر جعبه $n+1$ حالت دارد (یک حالت عدم انتخاب درنظر گرفته می‌شود) پس طبق اصل ضرب، تعداد حالات برابر است با:

$$(n+۱)^k$$

۴

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را بیابید.

پاسخ. ساخت یک زیر مجموعه را می‌توان به n گام تقسیم کرد که در گام iام دو حالت وجود یا عدم وجود عضو iام مجموعه در زیرمجموعه موردنظر وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$۲^n$$

اصل جمع

اصل جمع: اگر بتوان فرایندی را از دو مسیر متمایز انجام داد که مسیر اول n حالت برای انجام شدن و مسیر دوم m حالت برای انجام شدن داشته باشد و بین این دو دسته حالات، حالت مشترکی وجود نداشته باشد، آنگاه $n+m$ حالت برای انجام شدن فرایند وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر بتوان فرایندی را از k مسیر متمایز انجام داد که مسیر iام، n_i حالت برای انجام شدن داشته باشد و بین حالات مسیرهای متفاوت، حالت مشترکی وجود نداشته باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} n_i$ حالت برای انجام شدن فرایند وجود دارد.

به الزام استقلال حالات انجام کار از مسیرهای متفاوت توجه کنید. اگر مسیرهای متفاوت دارای حالات انجام مشترک باشند، دیگر مجاز به استفاده از اصل جمع نبوده و باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم.

۵

یارا باید کامل کنه

اصل متمم

اصل متمم: فرض کنید قصد انجام عملی مانند A را داشته باشیم. مجموعه حالات انجام عمل A را A_t می‌نامیم. فرض کنید با تعیین شرایط c، این مجموعه حالات را به زیر مجموعه‌ی A_c محدود می کنیم. آنگاه

داریم:

$$A_c = A_t - A_c$$

که در آن A_c مجموعه حالات انجام عمل A بدون شرایط c (با داشتن شرایط نقیض c) است. به زبان ساده‌تر، حالات انجام عملی با شرایطی، برابر است با کل حالات انجام عمل مگر آن‌هایی که شرایط مذکور را نقض می‌کنند.

۶

یارا باید کامل کنه

۷

تعداد کلمه‌های عبور با هر یک از شرایط زیر را بیابید.

آ. هر کلمه عبور شامل ۶ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ (Capital) باشد.

پاسخ.

طبق اصل ضرب :

$$۳۶^{۶}$$

ب. هر کلمه عبور شامل ۶ تا ۸ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ باشد.

پاسخ.

طبق اصل جمع در ادامه پاسخ قبلی :

$$۳۶^{۶} + ۳۶^{۷} + ۳۶^{۸}$$

ج. هر کلمه عبور شامل ۶ تا ۸ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ باشد. هر کلمه عبور باید حداقل یک حرف داشته باشد.

پاسخ.
طبق اصل متمم در ادامه پاسخ قبلی :

$$(۳۶^۶ + ۳۶^۷ + ۳۶^۸) - (۱۰^۶ + ۱۰^۷ + ۱۰^۸)$$

که عبارت کاسته شده از جواب نشان‌دهنده‌ی تعداد حالات بدون حرف است.

د. هر کلمه عبور شامل ۶ تا ۸ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ باشد. هر کلمه عبور باید حداقل یک حرف و یک رقم داشته باشد.

پاسخ.
طبق اصل جمع در ادامه پاسخ قبلی :

$$(۳۶^۶ + ۳۶^۷ + ۳۶^۸) - ((۱۰^۶ + ۱۰^۷ + ۱۰^۸) + (۲۶^۶ + ۲۶^۷ + ۲۶^۸))$$

ه. هر کلمه عبور شامل ۶ تا ۸ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ باشد. هر کلمه عبور باید حداقل یک حرف و یک رقم داشته باشد مگر آنکه فقط از حروف کاملا متمایز تشکیل شده باشد و شامل ۶ کاراکتر باشد.

پاسخ.
طبق اصل جمع در ادامه پاسخ قبلی :

$$(۳۶^۶ + ۳۶^۷ + ۳۶^۸) - ((۱۰^۶ + ۱۰^۷ + ۱۰^۸) +$$

$$(۲۶^۶ + ۲۶^۷ + ۲۶^۸)) + (۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ \times ۲۳ \times ۲۲ \times ۲۱)$$

و. هر کلمه عبور شامل ۶ تا ۸ رقم یا حرف انگلیسی بزرگ باشد. هر کلمه عبور باید حداقل یک حرف و یک رقم داشته باشد مگر آنکه فقط از حروف کاملا متمایز تشکیل شده باشد.

پاسخ.
برای اضافه کردن کلمات عبور ۷ یا ۸ کاراکتری بدون رقم به پاسخ قبل، می‌توانیم یک کاراکتر «عدم وجود» برای دو کاراکتر آخر متصور شویم. توجه کنید که درصورت عدم وجود کاراکتر هفتم، کاراکتر هشتم ملزم به عدم وجود است. برای اعال این شرط، از اصل جمع بر روی دو حالت وجود یا عدم وجود کاراکتر هفتم استفاده می کنیم:

$$(۳۶^۶ + ۳۶^۷ + ۳۶^۸) - ((۱۰^۶ + ۱۰^۷ + ۱۰^۸)+$$

$$(۲۶^۶+۲۶^۷+۲۶^۸))+(۲۶\times۲۵\times۲۴\times۲۳\times۲۲\times۲۱\times(۲۰\times۲۰+۱))$$

سه مقدار ۲۰، ۲۰ و ۱ به پاسخ اضافه شده است که به ترتیب عبارت‌اند از: ۱. کاراکتر هفتم یکی از حروف باقی‌مانده باشد. ۲. کاراکتر هشتم یکی از حروف باقیمانده یا «عدم وجود» باشد. ۳. کاراکتر هفتم «عدم وجود» باشد.

اصل تقسیم (تقارن)

اصل تقسیم: اگر بتوان تعداد N حالت انجام یک فرایند را شمرد که بین هر k حالت تقارن وجود داشته باشد (نامتمایز باشند)، تعداد حالات متمایز شمرده شده برای انجام فرایند، برابر است با:

$$N/k$$

۸

به چند طریق می‌توان دو مهره‌ی قلعه (Rook) نامتمایز را در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ قرار داد به نحوی که یکدیگر را تهدید نکنند؟ مهره‌ی قلعه تمام مهره‌های هم‌سطر و هم‌ستون خود را تهدید می‌کند مگر آنکه مهره‌ی دیگر در این مسیر قرار گیرد. خانه‌های این صفحه شطرنجی نام‌گذاری نشده‌اند و چرخش ۱۸۰ درجه‌ی صفحه در چینش مهره‌ها تمایز ایجاد نمی‌کند. اما خانه‌های صفحه با رنگ‌های سیاه و سفید رنگ‌آمیزی شده اند و درنتیجه، چرخش ۹۰ درجه تمایز ایجاد می‌کند.

پاسخ.

اگر از تساوی برخی از حالات با چرخش ۱۸۰ درجه صرف‌نظر کنیم و مهره‌های قلعه را متمایز در نظر بگیریم، طبق اصل ضرب، تعداد چینش‌های ممکن برابر است با:

$$T_۱ = ۶۴ \times ۴۹ = ۳۱۳۶$$

که ۶۴ برای انتخاب یک خانه برای رخ اول و ۴۹ برای انتخاب یک خانه خارج از سطر و ستون مربوط به رخ اول، برای رخ دوم است. برای از بین بردن تمایز بین می‌توان طبق اصل تقسیم نوشت:

$$T_۲ = \frac{T_۱}{۲} = \frac{۳۱۳۶}{۲} = ۱۵۶۸$$

برای از بین بردن تمایز بین حالاتی که با چرخش ۱۸۰ درجه به هم تبدیل می‌شوند، با استناد بر این‌که هر چیدمانی که در آن جایگاه دو رخ نسبت به مرکز صفحه متقارن نباشد، توسط چرخش ۱۸۰ درجه به یک چیدمان جدید در پاسخ ما تبدیل می‌شود، طبق اصل تقسیم، تعداد این چیدمان‌ها را به دو تقسیم می‌کنیم. توجه کنید که چیدمان‌هایی که در آن‌ها جایگاه دو رخ نامتمایز نسبت

به مرکز متقارن است، طی چرخش ۱۸۰ درجه به خودشان تبدیل می‌شوند، پس از ابتدا یک بار شمرده شده‌اند. تعداد این چیدمان‌ها برابر است با :

$$T_{۳} = \frac{۶۴ \times ۱}{۲} = ۳۲$$

که در آن ۶۴ برای جایگاه رخ اول، ۱ برای جایگاه رخ دوم که ملزم است در تقارن رخ اول باشد و تقسیم بر دو برای از بین بردن تمایز بین رخ‌ها طبق اصل تقسیم است. طبق اصل متمم، تعداد چیدمان‌هایی که در آن‌ها جایگاه دو رخ متقارن نیست برابر است با :

$$T_{۴} = T_{۲} - T_{۳} = ۱۵۶۸ - ۳۲ = ۱۵۳۶$$

حال طبق اصل تقسیم، تعداد چیدمان‌های نامتقارن متمایز در برابر چرخش ۱۸۰ درجه برابر است با :

$$T_{۵} = \frac{T_{۴}}{۲} = ۱۵۳۶/۲ = ۷۶۸$$

طبق اصل جمع، تعداد چیدمان‌های متمایز در برابر چرخش ۱۸۰ درجه، اعم از متمایز و نامتمایز برابر است با :

$$T_{۶} = T_{۵} + T_{۳} = ۷۶۸ + ۳۲ = ۸۰۰$$

ترتیب و ترکیب

یکی از پرکاربرد ترین اعمال در ترکیبیات، عمل «انتخاب» است. به زبان ساده، برای محاسبه‌ی تعداد انتخاب‌های موجود برای یک موقعیت، از ترتیب و ترکیب استفاده می‌کنیم. «ترتیب» زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در سری انتخاب‌های متوالی ما، ترتیب گزینش‌ها تأثیرگذار باشد و «ترکیب» زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که این ترتیب اهمیتی نداشته باشد.

ترتیب و جایگشت

به هر روش قرار گرفتن چند شیء در کنار یک‌دیگر یک جایگشت از این اشیاء گفته می‌شود.

در مسائل ترکیبیاتی معمولاً «تعداد جایگشت‌ها» مدنظر است و گاهی از مواقع به اشتباه از واژه «جایگشت» بجای «تعداد جایگشت‌ها» استفاده می‌شود.

به هر روش قرار گرفتن چند شیء «به صورت خطی» (در یک صف) در کنار یک‌دیگر، یک جایگشت خطی از این اشیاء گفته می‌شود. معمولاً منظور از جایگشت، جایگشت خطی است مگر آن که نوع متفاوت جایگشت ذکر شود.

طبق اصل ضرب (تعمیم‌یافته)، می‌توان نتیجه گرفت تعداد جایگشت‌های خطی n شیء متمایز برابر $n!$ است؛ چرا که فارغ از انتخاب‌های قبلی، زمان انتخاب عنصری که باید در جایگاه iام قرار گیرد، پیشتر $i-۱$ عنصر انتخاب شده‌اند و برای انتخاب پیش رو، $n-i+۱$ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالات انتخاب این دنباله برابر است

با:

$$\prod_{i=۱}^{n}(n-i+۱)=\prod_{i=۱}^{n} i = n!$$

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره، یک جایگشت دوری از این n شیء گفته می‌شود، اگر یک آرایش از دوران آرایش دیگری به دست آید، آن‌گاه این دو آرایش را هم‌ارز می‌دانیم.

توجه شود که تغییر جهت چرخش به دور دایره موجب تمایز می‌شود. به عنوان مثال ۱۲۳۴۵ و ۳۴۵۱۲ نامتمایز اما ۱۲۳۴۵ و ۵۴۳۲۱ متمایز هستند.

طبق اصل تقارن، می‌توان نتیجه گرفت تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز برابر $(n-۱)!$ است؛ چرا که اگر یک جایگاه از حلقه‌ی جایگشت دوری را نقطه شروع درنظر بگیریم، به تعداد $n!$ جایگشت خطی خواهیم داشت. با توجه به اینکه هر nتا از آن‌ها حاصل دوران یک جایگشت هستند (هر بار یکی از اعضا در نقطه شروع قرار می گیرد و همان دنباله تکرار می‌شود)، طبق اصل تقسیم، تعداد حالات متمایز برابر است با :

$$\frac{n!}{n}=(n-۱)!$$

هر انتخاب با ترتیب r عنصر از یک مجموعه n عضوی (یک جایگشت خطی بر زیرمجموعه‌ای r عضوی از یک مجموعه n عضوی)، یک r-ترتیب از مجموعه n عضوی است. ترتیب r از n به معنای تعداد r-ترتیب‌های ممکن از یک مجموعه n عضوی بوده که آن را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم.

اگر n و r اعدادی حسابی باشند به قسمی که $n \leq r$، داریم:

$$P(n,r) = n(n-۱)(n-۲)...(n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

یک جایگشت خطی از یک مجموعه n عضوی، درواقع یک n-ترتیب از آن مجموعه است.

۹

در یک آزمون ۱۰۰ نفر شرکت کرده‌اند.

آ. به چند روش می‌توان برنده‌های اول، دوم و سوم را اعلام کرد؟

پاسخ.

$$P(۱۰۰,۳) = ۱۰۰ \times ۹۹ \times ۹۸ = ۹۷۰۲۰۰$$

ب. اگر فرض کنیم نفر سوم مشخص شده است، به چند روش می‌توان برنده‌های اول و دوم را اعلام کرد؟

پاسخ.

$$P(۹۹,۲) = ۹۹ \times ۹۸ = ۹۷۰۲$$

ترکیب

هر انتخاب بدون ترتیب r عنصر از یک مجموعه n عضوی (یک زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی)، یک r-ترکیب از مجموعه n عضوی است. ترکیب r از n به معنای تعداد r-ترکیب‌های ممکن از یک مجموعه n عضوی بوده که آن را با نماد $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم.

اگر n و r اعدادی حسابی باشند به قسمی که $r \leq n$، داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-۱)...(n-r+۱)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

رایج است که به جای عبارت «ترکیب r از n» از عبارت «انتخاب r از n» استفاده شود.

دیدیم که یک r-ترکیب از مجموعه A، معادل یک زیر مجموعه r عضوی از این مجموعه است. همچنین یک r-ترتیب از مجموعه A، جایگشتی خطی بر یک زیر مجموعه r عضوی از این مجموعه است. مشخص است که یک r-ترتیب حاصل محاسبه یک جایگشت خطی بر روی یک r-ترکیب است. بنابراین، می‌توان ترتیب را با کمک ترکیب تعریف کرد و طبق اصل ضرب می‌توانیم بنویسیم :

$$P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r)$$

که $P(r,r)$ (مطابق انتظار) تعداد جایگشت‌های خطی را محاسبه می کند.

واضح است که:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

ترکیب تعمیم‌یافته: اگر داشته باشیم

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

آنگاه تعداد حالات افراز یک مجموعه n عضوی به k زیر مجموعه‌ی نام‌دار (متمایز) به نحوی که اندازه مجموعه iام برابر n_i باشد، طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n_k}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!((n-n_1)!-n_2)!} \times \ldots \times \frac{n_k!}{n_k!1!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

برای سادگی، ترکیب تعمیم‌یافته را به شکل زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n_k}{n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_k}$$

و می‌خوانیم «ترکیب n_1 و n_2 و ... و n_k از n».

۱۰

فرض کنید ۹ استاد در دپارتمان ریاضی و ۱۱ استاد در دپارتمان علوم وجود دارد. به چند روش می‌توان کمیته‌ای تشکیل داد که ۳ استاد ریاضی و ۴ استاد علوم داشته باشد؟

پاسخ.
باید توجه شود که انتخاب ۳ استاد ریاضی از بین ۹ استاد با ترکیب ۳تایی از ۹تا برابر است. انتخاب اساتید علوم نیز ترکیب ۴تایی از ۱۱تاست. از طرفی انتخاب اساتید ریاضی مستقل از انتخاب اساتید علوم است، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۹}{۳} \times \binom{۱۱}{۴} = \frac{۹!}{۳!۶!} \times \frac{۱۱!}{۴!۷!} = ۲۷۷۲۰$$

۱۱

فرض کنید ۹ توپ داریم که ۴تای آن قرمز و ۵تای دیگر آبی باشند و توپ‌هایی که رنگ مشابه دارند با اعدادی که بر روی آن‌ها است متمایز شده‌اند. به چند حالت می‌توان ۳ توپ انتخاب کرد؟

پاسخ.
از آن جایی که توپ‌ها شماره‌های متفاوتی دارند، همه‌ی آن‌ها متمایز هستند و رنگ آن‌ها تاثیری در تعداد انتخاب‌ها ندارد. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با انتخاب یک ترکیب ۳تایی از ۹تا که برابر است با:

$$\binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۳!} = ۸۴$$

۱۲

کلاس درسی با $۲n$ دانش‌آموز وجود دارد. می‌خواهیم این دانش‌آموزان را به گروه‌های دو نفره تقسیم کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟

پاسخ.

در ابتدا گروه‌ها را شماره گذاری (متمایز) می‌کنیم. حال طبق ترکیب تعمیم‌یافته، افراز $۲n$ عضو به n زیرمجموعه دو عضوی (که خواسته مسئله است) به $\binom{۲n}{\underbrace{۲, ۲, \ldots, ۲}_{n}}$ طریق ممکن است. حال برای نامتمایز کردن گروه‌ها از هم، طبق اصل تقسیم استفاده می‌کنیم. می‌دانیم شماره گذاری گروه‌ها به نوعی انتخاب یک جایگشت از آن‌هاست. بنابراین هر $n!$ حالت از گروه‌بندی با گروه‌های شماره‌دار، جایگشت‌های متفاوتی از یک گروه‌بندی یکسان با گروه‌های بدون شماره است. بنابراین طبق اصل تقسیم، پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{۲n}{\underbrace{۲, ۲, \ldots, ۲}_{n}} / n!$$

فاکتوریل مقادیر حقیقی و موهومی

شاید برایتان جالب باشد اگر بدانید عملگر فاکتوریل (!) نه فقط برای اعداد حسابی، بلکه برای اعداد حقیقی و حتی موهومی نیز تعریف شده است. قابل توجه است که در مجموعه کل اعداد حقیقی و موهومی، تنها اعداد صحیح منفی هستند که فاکتوریل تعریف نشده دارند. اثبات این موضوع دشوار نیست. برای تعریف این عملگر، می‌دانید:

$$x! = x \times (x - ۱)!$$

پس:

$$(x - ۱)! = \frac{x!}{x}$$

درواقع فاکتوریل مقدار صفر، که گاها از آن به عنوان «استثنا» یا «حالت

خاص» یاد می‌شود، حاصل همین جابجایی ساده است:

$$۰! = \frac{۱!}{۱} = ۱$$

از همین نوشتار برای مقادیر صحیح منفی استفاده می‌کنیم:

$$(-۱)! = \frac{۰!}{۰} = \frac{۱}{۰}$$

که یک مقدار تعریف نشده است. بنابراین مقدار $(-۱)!$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نمی‌شود. با منطقی مشابه می‌توان نشان داد فاکتوریل هیچ یک از اعداد صحیح منفی نیز تعریف نمی‌شود. به عنوان مثال، مقدار -۳ را درنظر بگیرید:

$$(-۳)! = \frac{(-۲)!}{-۲} = \frac{(-۱)!}{-۲ \times -۱} = \frac{۰!}{-۲ \times -۱ \times ۰} = \frac{۱}{۰}$$

درباره نحوه محاسبه مقدار فاکتوریل برای اعداد حقیقی یا موهومی، در مطلبی به نام
Factorials of real negative and imaginary numbers - A new perspective [a]
مباحث جالبی مطرح شده است. همچنین تاریخچه کوتاهی درمورد پیدایش این تفکر پیچیده آورده شده است.

در آن مطلب، برای اعداد حقیقی $x > -۱$ آورده شده است:

$$x! = \prod(x) = \int_۰^۱ (-ln(t))^x dt = \int_۰^\infty t^x e^(-t) dt = \Gamma(x+۱)$$

و با این رابطه، و دانش اینکه

$$\prod(x) = x \times \prod(x-۱)$$

قادر به محاسبه فاکتوریل تمام اعداد حقیقی و موهومی خواهیم بود. جهت مطالعه بیشتر، به مقاله معرفی شده رجوع کنید.[a]

به عنوان یک نمونه پرکاربرد، خوب است اگر بدانید:

$$(-\frac{۱}{۲})! = \sqrt{\pi}$$

دقت کنید که برای محاسبه‌ی فاکتوریل اعداد گویا، تنها نیاز است مقدار فاکتوریل اعداد را در بازه‌ای به طول $[۰, ۱)$ بدانیم، چرا که دیگر مقادیر از طریق آن‌ها، به سادگی قابل محاسبه‌اند. مثال‌های زیر را درنظر بگیرید:

مثال) مقدار عبارات داده شده را بر حسب π بیابید.

آ. $\frac{۱}{۲}!$

پاسخ.

$$\frac{۱}{۲}! = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۱}{۲} - ۱)! = \frac{۱}{۲} \times -\frac{۱}{۲}! = \frac{۱}{۲}\pi$$

ب. $\frac{۷}{۲}!$

پاسخ.

$$\frac{۷}{۲}! = \frac{۷}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۲}! = \frac{۷ \times ۵ \times ۳}{۲^۳} \times \frac{۱}{۲}\pi$$

ج. $-\frac{۵}{۲}!$

پاسخ.

$$-\frac{۵}{۲}! = \frac{-\frac{۱}{۲}!}{-\frac{۵}{۲} \times -\frac{۳}{۲}} = \frac{۴\pi}{۱۵}$$

[a] https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4247832/

ترکیب با مقادیر حقیقی

حال که امکان محاسبه فاکتوریل مقادیر حقیقی را پیدا کردیم، می‌توانیم ترکیب مقادیر حقیقی را نیز محاسبه کنیم. با وجود اینکه ما عملگر ترکیب را با مقادیر حسابی تعریف کردیم و نحوه محاسبه آن را نیز با مقادیر حسابی بدست آوردیم، اما رابطه‌ی یکسانی برای محاسبه ترکیبات مقادیر حقیقی استفاده می‌شود.

مثال) مقدار عبارت زیر را برحسب π محاسبه کنید:

$$\binom{۳}{-\frac{۵}{۲}}$$

پاسخ.

$$\binom{۳}{-\frac{۵}{۲}} = \frac{۳!}{-\frac{۵}{۲}! \times \frac{۱۱}{۲}!} = \frac{۶}{\frac{۴\pi}{۱۵} \times \frac{۱۰۳۹۵\pi}{۶۴}} = ۰/۱۳۸۵\pi^{-۲}$$

همانطور که احتمالا تا الان به آن فکر کرده‌اید، درک مفهوم ترکیب مقادیر حقیقی دشوار و پیچیده است.

یک نکته کاربردی آن است که برای محاسبه ترکیبات مقادیر حسابی از مقادیر حقیقی، نیازی به محاسبه‌ی فاکتوریل مقادیر گویا نداریم. شاید برایتان جالب باشد، با اینکه فاکتوریل مقادیر صحیح منفی تعریف نشده است، اما محاسبه‌ی ترکیب مقادیر حسابی از مقادیر صحیح منفی ممکن است و این عبارات، دارای مقادیر صریح می‌باشند. در این بخش، با چند مثال ساده، نحوه مواجهه با ترکیب مقادیر حسابی از مقادیر حقیقی را نشان خواهیم داد.

مثال) مقادیر صحیح عبارات داده شده را محاسبه کنید:

آ. $\binom{۵/۲}{۲}$

پاسخ.

$$\binom{۵/۲}{۲} = \frac{۵/۲!}{۲!۳/۲!} = \frac{۵/۲ \times ۴/۲ \times ۳/۲!}{۲!۳/۲!} = ۱۰/۹۲$$

ب. $\binom{-۳}{۲}$

پاسخ.

$$\binom{-۳}{۳} = \frac{-۳!}{۳! \times -۶!} = \frac{-۳ \times -۴ \times -۵ \times -۶!}{۳! \times -۶!} = -۱۰$$

ج. $\binom{-۳/۲۱}{۲}$

پاسخ.

$$\binom{-۳/۲۱}{۲} = \frac{-۳/۲۱!}{۲! \times -۵/۲۱!} = \frac{-۳/۲۱ \times -۴/۲۱ \times -۵/۲۱!}{۲! \times -۵/۲۱!}$$
$$= ۱۳/۵۱۴۱$$

د. $\binom{-\frac{۷}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}$

پاسخ.

$$\binom{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۷}{۲}} = \binom{-\frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{-۰/۵!}{۳! \times -۳/۵!} = -۰/۳۱۲۵$$

مثال) ترکیب از مقادیر صحیح منفی را بر حسب ترکیب از مقادیر حسابی و ضرایب صحیح نشان دهید.

پاسخ.

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)...(-n-r+1)}{r!}$$
$$= \frac{(-1)^r(n)(n-1)...(n+r-1)}{r!}$$
$$= \frac{(-1)^r(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

جایگشت خطی با اعضای تکراری

۱۳

فرض کنید A یک جعبه حاوی c_i مهره از نوع t_i باشد و $i \le n, i \in \mathbb{N}$. تعداد جایگشت‌های خطی این اعضا را محاسبه کنید.

پاسخ اول: استفاده از اصل تقسیم.

ابتدا تمام اعضا را متمایز متصور می‌شویم. تعداد کل مهره‌های درون A را m می‌نامیم که:

$$m = \sum_{i=1}^{n} c_i \times t_i$$

می‌دانیم تعداد جایگشت‌های خطی این اعضا (درصورتی که تمام مهره‌ها را از هم متمایز متصور شویم) برابر است با $m!$. حال می‌دانیم که هر $c_i!$

جایگشت در این جایگشت‌ها، حاصل جایگشت‌های مختلف مهره‌های t_i در مکان‌های یکسان است که اگر بخواهیم این مهره‌ها را نامتمایز بدانیم، یکسان خواهند بود. بنابراین اگر مهره‌های از نوع t_i را نامتمایز فرض کنیم، طبق اصل تقسیم، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{m!}{c_i!}$$

طبق استدلال مشابه، اگر تمام مهره‌های هم نوع را نامتمایز متصور شویم، طبق اصل تقسیم، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{m!}{\prod_{i=۱}^{n} c_i!}$$

پاسخ دوم: استفاده از ترکیب تعمیم‌یافته.

نام‌گذاری زیر را درنظر بگیرید:

$$m = \sum_{i=۱}^{n} c_i \times t_i$$

می‌خواهیم تعداد حالات به صف کردن m مهره بعضاً نامتمایز را پیدا کنیم.

نگاه به مسئله را کمی تغییر می‌دهیم. صف نهایی را به شکل تعداد m جایگاه شماره‌گذاری شده (به ترتیب صف) متصور شوید. برای چینش این m مهره در این جایگاه‌ها، نیاز داریم در ابتدا مشخص کنیم کدام جایگاه‌ها، مربوط به کدام نوع مهره خواهند بود. برای اینکار، نیاز داریم مجموعه جایگاه‌ها را به زیرمجموعه‌های $a_i; i \in \mathbb{N}, i \leq n$ افراز کنیم به نحوی که مجموعه a_i دارای c_i عضو باشد و این اعضا، برای مهره‌های از نوع t_i گزینش شده

باشند. پس از این افراز، با توجه به نامتمایز بودن مهره‌های از یک نوع، با یک حالت، مهره‌های هر نوع را در جایگاه‌های همان نوع قرار می‌دهیم. طبق ترکیب تعمیم‌یافته می‌دانیم تعداد راه‌های افراز یک مجموعه m عضوی به زیرمجموعه‌های $n \geq i ,\mathbb{N} \ni i ;c_i$ عضوی، برابر است با:

$$\binom{m}{c_۱, c_۲, \dots, c_n} = \frac{m!}{\prod_{i=۱}^{n} c_i!}$$

در پاسخ دوم مسئله بالا مشاهده کردیم که مسئله جایگشت خطی با اعضای تکراری، درواقع بیانی متفاوت از ترکیب تعمیم‌یافته است.

۱۴

با حروف t،t،a،c،a،t،s چند رشته حرفی متمایز به طول ۷ می‌توان ساخت؟

پاسخ.

$$\frac{۷!}{۳!۲!۱!۱!} = ۴۲۰$$

توزیع اشیا

۱۵ حالات مختلف توزیع اشیا

آ. به چند طریق می‌توان ۷ توپ نامتمایز را در ۴ جعبه نامتمایز بدون محدودیت در ظرفیت آن‌ها، قرار داد؟

! این مسئله ترتیب با اشیا و جعبه‌های نامتمایز است.

پاسخ.
به ۹ روش می‌توان اینکار را انجام داد:

۶

۵, ۱

۴, ۲

۴, ۱, ۱

۳, ۳

۳, ۲, ۱

۳, ۱, ۱, ۱

۲, ۲, ۲

۲, ۲, ۱, ۱

ب. اگر ۱۰ توپ که شماره‌گذاری شده‌اند را بخواهیم در ۳ جعبه شماره‌گذاری شده که هر کدام ۲ تا توپ ظرفیت داشته باشد، قرار دهیم، به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

! این مساله ترتیب با اشیا و جعبه‌های متمایز است.

پاسخ.

جعبه‌ی چهارمی برای توپ‌های باقیمانده درنظر می گیریم. حال طبق تعمیم ترکیب، تعداد روش های این تقسیم‌بندی برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۲, ۲, ۲, ۴} = ۴۲۰$$

ج. به چند روش می‌توان ۱۰ توپ نامتمایز را در ۸ جعبه شماره گذاری شده قرار داد؟

این مساله ترتیب با اشیا نامتمایز و جعبه‌های متمایز است. این مسئله را با نام معادله سیاله نیز می‌شناسند.

پاسخ.

فرض کنید می‌خواهیم ۱۰ توپ و ۷ مداد را به ترتیب بچینیم و درنهایت، توپ‌های میان هر دو مداد، قبل از اولین مداد و یا بعد از آخرین مداد، هر کدام را درون یک جعبه قرار دهیم. ترتیب جعبه‌ها با ترتیب فضای بین مدادها هم‌ارز خواهد بود. بنابراین لازم است تعداد جایگشت‌های ۱۰ توپ نامتمایز و ۷ مداد نامتمایز در کنار هم را بشماریم. طبق آنچه در جایگشت با اعضای تکراری بیان شد، این تعداد برابر است با:

$$\frac{۱۷!}{۱۰!۷!} = ۱۹۴۴۸$$

روش بالا را تحت عنوان یک روش کلی برای حل معادله سیاله در بخش مربوطه خواهید دید.

د. به چند طریق می‌توان ۴ توپ شماره گذاری شده را در ۳ جعبه نامتمایز بدون داشتن محدودیت در ظرفیت جعبه‌ها، قرار داد؟

این مساله ترتیب با اشیا متمایز و جعبه‌های نامتمایز است. پاسخ این مسئله تحت عنوان عدد دوم استرلینگ نیز شناخته می‌شود.

پاسخ.
مسئله را بر روی تعداد جعبه‌های خالی حالت‌بندی می‌کنیم:

(آ) اگر هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، لازم است توپ‌ها را به یک دسته دو تایی و دو دسته‌ی تکی تقسیم کنیم. طبق تعمیم ترکیب، تعداد راه‌های انجام این کار برابر

$$\binom{۴}{۲,۱,۱}/۲! = ۶$$

است. توجه کنید که جعبه‌ها نامتمایزاند پس چون دو جعبه با تعداد اعضای مساوی داریم، لازم است حاصل ترکیب را بر تعداد جایگشت‌های آن‌ها تقسیم کنیم.

(ب) اگر دقیقا یک جعبه خالی بماند، یا توپ‌ها به دو دسته دوتایی تقسیم می‌شوند، یا به یک دسته سه‌تایی و یک دسته تکی. طبق تعمیم ترکیب و اصل جمع، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

$$\binom{۴}{۳,۱} + \binom{۴}{۲,۲}/۲! = ۷$$

(ج) اگر دقیقا دو جعبه خالی باشد، یعنی ناچاریم همه توپ‌ها را درون جعبه آخر قرار دهیم:

$$\binom{۴}{۴} = ۱$$

طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با:

$$۶ + ۷ + ۱ = ۱۴$$

معادله سیاله

معادله سیاله یا معادله‌ی دیوفانتین در ریاضیات، معادله‌ای چند جمله‌ای با متغیرهای صحیح (مجهولات فقط می‌توانند مقادیر صحیح اتخاذ کنند) است، مانند:

$$ax + by = c$$

این معادلات معمولا دارای چند پاسخ هستند. به عنوان مثال معادله زیر را درنظر بگیرید:

$$x + y = ۲$$

این یک معادله سیاله ساده است. واضح است که هر زوج زوج $(a, ۲ - a)$ می‌تواند یک جواب معادله برای زوج (x, y) باشد. بنابراین تعداد پاسخ‌های این معادله بینهایت است. بسیار پیش می‌آید که هدف ما یافتن پاسخ‌های معادله در مجموعه اعداد طبیعی یا حسابی باشد. این شرایط زمانی پیش می‌آید که یک مسئله طبیعی ساده را با معادله سیاله مدل کنیم (مثلا می‌خواهیم از انواع مهره‌ها، تعداد متفاوتی برداریم به طوری که در نهایت ۱۰ مهره داشته باشیم). در این صورت تعداد جواب‌های معادله بسیار محدودتر خواهد شد. همان مثال بالا را اگر درنظر بگیرید؛ این معادله در مجموعه اعداد حسابی تنها ۳ پاسخ خواهد داشت.

۱۶ معادله سیاله با ضرایب واحد در مجموعه اعداد حسابی

معادله سیاله زیر چند جواب دارد

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = X$$

اگر $x_i \in \mathbb{N}$ و:

آ. $x_i \geq ۰; ۱ \leq i \leq n$

پاسخ.

مسئله را به تقسیم X مهره نامتمایز به n جعبه متمایز مدل می‌کنیم.
ادعا می‌کنیم مسئله معادل چینش با ترتیب X مهره و $n-۱$ مداد است.
می‌دانیم $n-۱$ مداد به صف شده، n فضای متمایز تشکیل می‌دهند (بین هر دو مداد و قبل از اولین مداد و بعد از آخرین مداد). بنابراین می‌توانیم هر یک از این فضاها را به یک جعبه نسبت دهیم و مهره‌های قرار گرفته در هر فضا را درون جعبه‌ی متناظر قرار دهیم. پس این دو مسئله یکسان هستند. طبق جایگشت با اعضای تکراری، پاسخ این مسئله برابر است با:

$$\frac{(X+(n-۱))!}{X!(n-۱)!}$$

به صورت کلی، پاسخ معادله سیاله با ضرایب واحد در مجموعه اعداد حسابی، با n متغیر و مقدار ثابت X برابر است با:

$$\frac{(X+(n-۱))!}{X!(n-۱)!}=\binom{X+n-۱}{X}$$

به عبارت بالا دقت کنید. حاصل مسئله برابر است با ترکیب X از $X+n-۱$. می‌توان این مشاهده را این گونه نیز تعبیر کرد که لازم داریم X مهره و $n-۱$ مداد ذکر شده در مدلسازی پاسخ را در $X+n-۱$ جایگاه متمایز، جایگذاری کنیم (بیانی دیگر برای به صف کردن). ابتدا، از بین این $X+n-۱$ جایگاه، X جایگاه را برای مهره‌ها انتخاب کرده و مهره‌ها را درون آن‌ها قرار می‌دهیم. سپس مدادها را در جایگاه‌های باقیمانده قرار می‌دهیم و ادامه مدلسازی را مانند آنچه در بالا آمده دنبال می‌کنیم. بنابراین،

تعداد حالات انجام این کار برابر $\binom{X+n-۱}{X}$ خواهد بود. این ارتباط بین «ترکیب» و «جایگشت خطی با اعضای تکراری» را در بخش «جایگشت خطی با اعضای تکراری» نیز به صورت کلی‌تر مشاهده کردیم.

ب. $x_i \geq t_i; ۱ \leq i \leq n$

پاسخ.

تغییر متغیر زیر را درنظر بگیرید:

$$y_i = x_i - t_i; ۱ \leq i \leq n$$

بنابراین می‌توانیم معادله صورت سوال را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = \sum_{i=۱}^{n} (y_i + t_i) = X$$

$$=> \sum_{i=۱}^{n} y_i = X - \sum_{i=۱}^{n} t_i$$

برای درک بهتر مفهوم تغییر متغیر بالا، مسئله را با یک شبیه‌سازی تعبیر می‌کنیم. شرایط ذکر شده در این مسئله مانند آن است که در مسئله مهره و جعبه که در قسمت قبل ذکر شد، برای هر جعبه، تعداد حداقلی تعیین شود که حتما به آن تعداد مهره در آن جعبه قرار گیرد. راهکار حل این مسئله آن است که در ابتدا به تعداد خواسته شده مهره، درون آن جعبه‌ها قرار گیرد و سپس با مهره‌های باقیمانده، مسئله به یک مسئله معادله سیاله مدل شود. به این صورت تعداد $\sum_{i=۱}^{n} t_i$ مهره از X مهره‌ای که داشتیم کم شده و با تعداد باقیمانده مسئله را ادامه می‌دهیم.

حال مطابق با نتیجه قسمت اول، پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{(X-\sum_{i=۱}^{n} t_i)+(n-۱))!}{(X-\sum_{i=۱}^{n} t_i)!(n-۱)!}$$

۱۷

به چند طریق می‌توان ۱۰ سیب نامتمایز را بین محمد، علی، امیر و احمد تقسیم کرد اگر:

آ. هر کدام بتوانند هر تعداد سیب (صفر یا بیشتر) دریافت کنند.

پاسخ.

محمد، علی، امیر و احمد را به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم. تعداد سیب‌هایی که به شخص iام می‌رسد را با x_i نشان می‌دهیم. مسئله یک معادله سیاله در مجموعه اعداد حسابی به شکل زیر است:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله (پاسخ مسئله) برابر است با:

$$\frac{(۱۰+(۴-۱))!}{۱۰!(۴-۱)!}=\frac{۱۳!}{۱۰!۳!}=۲۸۶$$

ب. هر کدام حداقل یک سیب دریافت کنند.

پاسخ.

در ادامه نام‌گذاری بخش قبل، داریم:

$$x_۱\geq ۱; x_۲\geq ۱; x_۳\geq ۱; x_۴\geq ۱$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\frac{(۱۰-(۱+۱+۱+۱))+(۴-۱))!}{(۱۰-(۱+۱+۱+۱))!(۴-۱)!}$$

$$=\frac{۹!}{۶!۳!}=۸۴$$

ج. محمد حداقل ۳ سیب و احمد حداقل ۱ سیب دریافت کند.

پاسخ.
در ادامه نام‌گذاری بخش اول، داریم:

$$x_۱ \geq ۳; x_۴ \geq ۱$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\frac{(۱۰-(۳+۱))+(۴-۱))!}{(۱۰-(۳+۱))!(۴-۱)!}$$

$$=\frac{۹!}{۶!۳!}=۸۴$$

د. محمد حداکثر ۱ سیب و احمد حداقل ۱ سیب دریافت کند.

پاسخ.
در ادامه نام‌گذاری بخش اول، داریم:

$$x_۱ \leq ۱; x_۴ \geq ۱$$

برای حل این مسئله روی مقدار $x_۱$ حالت‌بندی می‌کنیم:

(آ) $x_1 = 0$

در این صورت معادله سیاله زیر را داریم:

$$x_2 + x_3 + x_4 = 10; x_4 \geq 1$$

که تعداد پاسخ‌های آن برابر است با:

$$= \frac{11!}{9!2!} = 55$$

(ب) $x_1 = 1$

در این صورت معادله سیاله زیر را داریم:

$$1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10; x_4 \geq 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 9; x_4 \geq 1$$

که تعداد پاسخ‌های آن برابر است با:

$$= \frac{10!}{8!2!} = 45$$

طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با:

$$55 + 45 = 100$$

معادله سیاله پیچیده: این بخش هنوز آماده نشده است.

اعداد استرلینگ

این بخش هنوز آماده نشده است.

اتحادها

دوگانه شماری

دوگانه شماری روشی ترکیبیاتی برای اثبات برابری دو عبارت می‌باشد. در این روش، مجموعه‌ای و مسئله‌ای از جنس شمارش بر روی آن تعریف می‌شود. سپس با حل مسئله از دو روش متفاوت، یک‌بار به یک طرف تساوی و بار دیگر به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. با توجه به یکسان بودن مسئله و یکتا بودن پاسخ مسئله‌ی شمارش، می‌توان نتیجه گرفت که دو عبارت به دست آمده برابراند.

۱۸

فرض کنید n, r اعداد صحیح نامنفی باشند و $r \leq n$. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

پاسخ.

از دوگانه شماری استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم یک رشته باینری به طول $n + 1$ حاوی $r + 1$ بیت ۱ بسازیم. تعداد حالات ساختن این رشته را به دو طریق می‌توان شمرد:

آ. تعداد $r + 1$ بیت را از بین $n + 1$ بیت موجود انتخاب کرده و با ۱ و مابقی بیت‌ها را با ۰ مقداردهی می‌کنیم.

$$\binom{n+1}{r+1}$$

ب. ابتدا بیت مربوط به آخرین مقدار ۱ مشاهده شده را انتخاب می‌کنیم. با توجه به اینکه ملزم به داشتن $r + 1$ بیت دارای مقدار ۱ هستیم،

جایگاه آخرین مقدار ۱ می‌تواند $j+1$امین بیت باشد به نحوی که : $r+1 \leq j+1 \leq n+1$. حال بیت‌های اول تا jام را درنظر بگیرید. در این رشته‌ی j بیتی، ملزم به انتخاب r بیت برای ۱ بودن هستیم که به $\binom{j}{r}$ حالت صورت می‌گیرد. حال برای رسیدن به جواب مسئله، طبق اصل جمع، باید تعداد حالات ساختن رشته را به ازای تمام مقادیر ممکن j با هم جمع کنیم. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با :

$$\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

با توجه به یکتا بودن پاسخ مسئله‌ی طرح شده، مقدار بدست آمده از دو روش برابر است، پس داریم :

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

اتحاد پاسکال

اتحاد پاسکال: اگر n, j اعداد صحیح مثبت باشند و $j \leq n$، داریم:

$$\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} = \binom{n}{j}$$

۱۹ اثبات اتحاد پاسکال

اتحاد پاسکال را اثبات کنید.

پاسخ.

برای اثبات این اتحاد از دوگانه شماری استفاده می‌کنیم. فرض کنید جمعیتی n نفری داریم که یکی از آنان رهبر است. قصد داریم یک نمونه j نفری از این جمعیت انتخاب کنیم که حضور یا عدم حضور رهبر در آن بی اهمیت است. هدف یافتن تعداد حالات انتخاب این نمونه است. این مسئله

به دو طریق قابل حل است:

آ. j نفر از بین n نفر انتخاب می کنیم:

$\binom{n}{j}$

ب. دو حالت برای نمونه برداری درنظر می گیریم:

(آ) رهبر عضوی از نمونه باشد که در این صورت انتخاب یک نفر قطعی بوده و باید مابین $n-1$ نفر باقیمانده $j-1$ نفر انتخاب شود:

$\binom{n-1}{j-1}$

(ب) رهبر عضو نمونه نباشد که در این صورت عدم انتخاب یک نفر قطی بوده و باید مابین $n-1$ نفر باقیمانده j نفر انتخاب شود:

$\binom{n-1}{j}$

حال طبق اصل جمع، تعداد حالات این طریق نمونه برداری برابر است با:

$\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}$

با توجه به یکتا بودن پاسخ مسئله، پاسخ هر دو نوع شمارش ما برابر است.

پس:

$$\binom{n-1}{j}+\binom{n-1}{j-1}=\binom{n}{j}$$

اتحاد چوشی چی

فرض کنیم n, r اعداد صحیح نامنفی باشند و $r \leq n$، آنگاه طبق تعمیم اتحاد پاسکال که با نام اتحاد چوشی چی نیز شناخته می‌شود، داریم :

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$$

پیش‌تر این اتحاد را در بخش دوگانه شماری، بدون استفاده از اتحاد پاسکال اثبات کرده بودیم.

مثلث پاسکال

به مثلث زیر، مثلث پاسکال گفته می‌شود :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

فرض کنید $k_{i,j}$ مقدار jام از سمت چپ در سطر iام باشد که شمارنده‌ها از صفر آغاز شوند. برای ساختن این مثلث دو نکته‌ای زیر لازم و کافی است :

آ. به ازای هر i داریم :

$$k_{i,۰} = k_{i,i} = ۱$$

ب. به ازای هر i و هر $۰ < j < i$ داریم :

$$k_{i,j} = k_{i-۱,j-۱} + k_{i-۱,j}$$

نکته جالب درمورد این مثلث آن است که اگر قرار دهیم

$$k_{i,j} = \binom{i}{j}$$

آنگاه می‌دانیم که

$$ki, ۰ = \binom{i}{۰} = ۱$$

$$ki,i = \binom{i}{i} = ۱$$

و طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$k_{i,j} = \binom{i}{j} = \binom{i-۱}{j-۱} + \binom{i-۱}{j} = k_{i-۱,j-۱} + k_{i-۱,j}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت عضو $k_{i,j}$ مقدار jام از سمت چپ در سطر iام وقتی که شمارنده‌ها از صفر آغاز شوند، برابر $\binom{i}{j}$ است.

ضرایب چندجمله‌ای

ضرایب دوجمله‌ای: اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{j=۰}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

۲۰ اثبات قضیه ضرایب دوجمله‌ای

قضیه ضرایب دوجمله‌ای را اثبات کنید.

پاسخ.

برای خوانایی بهتر، می‌نویسیم:

$$(x+y)^n = \prod_{i=۱}^{n} (x+y)_i$$

که در آن، اندیس‌ها هیچ معنایی نداشته و فقط برای آسان‌تر کردن اشاره به عامل‌های مختلف عبارت اضافه شده‌اند. حاصل عبارت بالا برابر با حاصل جمع تعدادی جمله می‌باشد که هر جمله از ضرب یک x یا y از عامل iام ($(x+y)_i$) به ازای $۱ \leq i \leq n$ است. بنابراین جمله‌های به شکل $x^{n-j}y^j$

زمانی مشاهده می‌شوند که از j تعداد عوامل، عبارت y و از $n-j$ تعداد باقی‌مانده، عبارت x انتخاب شود. مشخص است که تعداد تکرار این جمله در حاصل عبارت برابر است با تعداد حالات مختلف انتخاب j عامل از عوامل برای آنکه از آن‌ها عبارت y را در جمله مذکور ضرب کنیم. بنابراین تعداد تکرار جمله $x^{n-j}y^j$ که ضریب این عبارت در خروجی است، برابر است با:
$\binom{n}{j}$
با لحاظ کردن نتیجه به دست آمده، برای تمام جمله‌های ممکن، داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

برای ضرایب چندجمله‌ای نیز داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^n = \sum_{\sum_{i=1}^{k} j_i = n} \left(\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_k} \prod_{i=1}^{k} x_i^{j_i}\right)$$

نحوه اثبات قضیه ضرایب چندجمله‌ای نیز مشابه نحوه اثبات قضیه ضرایب دوجمله‌ای است. همچنین می‌توان این قضیه را با تعمیم قضیه‌ی ضرایب دوجمله‌ای، توسط تکرار آن قضیه به صورت مکرر، به سادگی اثبات کرد.

اگر جملات حاصل از بسط دوجمله‌ای را بر مبنای توان یکی از جملات مرتب کنیم، آنگاه ضرایب دوجمله‌ای یک عبارت درجه k متناظر با مقادیر سطر kام (از صفر) مثلث پاسکال خواهند بود.

۲۱

ضریب عبارت $x^{12}y^{13}$ را در بسط زیر بدست آورید.

آ. $(x+y)^{25}$

پاسخ.
طبق قضیه ضرایب دو جمله‌ای، ضریب عبارت $x^{۱۲}y^{۱۳}$ برابر است با:

$$\binom{۲۵}{۱۳} = \frac{۲۵!}{۱۳!۱۲!} = ۵۲۰۰۳۰۰$$

ب. $(۲x - ۳y)^{۲۵}$

پاسخ.
با توجه به این که ۲۵، عددی صحیح و نامنفی است، می‌توانیم از قضیه ضرایب دو جمله‌ای استفاده کنیم؛ طبق این قضیه داریم:

$$((۲x) + (-۳y))^{۲۵} = \sum_{j=۰}^{۲۵} \binom{۲۵}{j} (۲x)^{۲۵-j} (-۳y)^j$$
$$= \sum_{j=۰}^{۲۵} \binom{۲۵}{j} ۲^{۲۵-j} (-۳)^j (x)^{۲۵-j} (y)^j$$

بنابراین، ضریب عبارت $x^{۱۲}y^{۱۳}$ برابر است با:

$$\binom{۲۵}{۱۳} ۲^{۱۲} (-۳)^{۱۳} = \frac{-۲۵!}{۱۳!۱۲!} ۲^{۱۲} ۳^{۱۳}$$

۲۲

اثبات کنید:

آ. اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد:

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} = ۲^n$$

پاسخ.
با توجه به برقرار بودن شرط قضیه ضرایب دو جمله‌ای، از آن استفاده می‌کنیم:

$$۲^n = (۱ + ۱)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۱^k ۱^{n-k} = \sum_{k=۰}^{n} \binom{k}{n}$$

ب. اگر n عددی صحیح و مثبت باشد:

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}=۰$$

پاسخ.
با توجه به برقرار بودن شرط قضیه ضرایب دو جمله‌ای، از آن استفاده می‌کنیم:

$$۰=۰^n=((-۱)+۱)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(-۱)^k۱^{n-k}=$$
$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(-۱)^k$$

ج. اگر n عددی صحیح و مثبت باشد:

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{۲k}=\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{۲k-۱}$$

پاسخ.
با توجه به برقرار بودن شرط حکم قسمت دوم همین سوال، از آن استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=۰}^{۲n}\binom{۲n}{k}(-۱)^k=۰$$
$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{۲k}(-۱)^k+\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{۲k-۱}(-۱)^k=۰$$
$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{۲k}+\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{۲k-۱}(-۱)=۰$$
$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{۲k}-\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{۲k-۱}=۰$$
$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{۲k}=\sum_{k=۱}^{n}\binom{۲n}{۲k-۱}$$

د. اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد:

$$\sum_{k=۰}^{n}۲^k\binom{n}{k}=۳^n$$

پاسخ.
با توجه به برقرار بودن شرط قضیه ضرایب دو جمله‌ای، از آن استفاده می‌کنیم:

$$۳^n = (۱+۲)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۱^{n-k} ۲^k = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k$$

۲۳

ضریب عبارت $\frac{x^۳ y z^{\frac{۵}{۲}}}{w^۶}$ را در بسط عبارت زیر بیابید :

$$(۲x - y + ۵\sqrt{z} + \frac{۱}{۷w^۲})^{۱۲}$$

پاسخ.
با در نظر گرفتن اینکه ۱۲، عددی صحیح و نامنفی است و شرط قضیه ضرایب چند جمله‌ای برقرار است، داریم :

$$(۲x - y + ۵\sqrt{z} + \frac{۱}{۷w^۲})^{۱۲} = \sum_{i_x+i_y+i_z+i_w=۱۲} \binom{۱۲}{i_x, i_y, i_z, i_w} (۲x)^{i_x} (-y)^{i_y} (۵\sqrt{z})^{i_z} (\frac{۱}{۷w^۲})^{i_w}$$

$$= \sum_{i_x+i_y+i_z+i_w=۱۲} \binom{۱۲}{i_x, i_y, i_z, i_w} ۲^{i_x} (-۱)^{i_y} ۵^{i_z} ۷^{-i_w} x^{i_x} y^{i_y} z^{\frac{i_z}{۲}} w^{-۲i_w}$$

می‌دانیم در ترم $\frac{x^۳ y z^{\frac{۵}{۲}}}{w^۶}$ داریم :

$$x^{i_x} y^{i_y} z^{\frac{i_z}{۲}} w^{-۲i_w} = \frac{x^۳ y z^{\frac{۵}{۲}}}{w^۶}$$

$$\to i_x = ۳, i_y = ۱, i_z = ۵, i_w = ۳$$

بنابراین ضریب این عبارت برابر است با :

$$\binom{۱۲}{۳,۱,۵,۳} ۲^۳ (-۱)^۱ ۵^۵ ۷^{-۳} = \frac{۱۲!}{۳!۱!۵!۳!} \frac{-۲۵۰۰۰}{۳۴۳}$$

۲۴

بسط حاصل از عبارت زیر چند جمله دارد؟

$$(a+b+c+d)^۹$$

پاسخ.
از آن جایی که ۹ عددی صحیح و نامنفی است و شرط قضیه ضرایب چند جمله‌ای برقرار است، داریم :

$$(a+b+c+d)^{9} = \sum_{i_a+i_b+i_c+i_d=9} \binom{9}{i_a,i_b,i_c,i_d} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} d^{i_d}$$

بنابراین تعداد جملات بسط برابر است با تعداد حالات مقدار دهی i_a, i_b, i_c, i_d به نحوی که

$$i_a+i_b+i_c+i_d=9$$
$$(i_a, i_b, i_c, i_d \geq 0)$$

که این معادله یک معادله سیاله می‌باشد. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با :

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!}$$

ضرایب دوجمله‌ای (چندجمله‌ای) تعمیم‌یافته

همانطور که در بیشتر بدانید «ترکیب مقادیر حقیقی» عنوان شد، این ترکیبات نیز قابل محاسبه‌اند. جالب و کاربردی است بدانید که هرچند ما رابطه‌ی ضرایب چندجمله‌ای را با فرض صحیح بودن توان عبارت اثبات کردیم، اما این قضیه برای توان‌های حقیقی نیز به همین شکل برقرار است و می‌توان با محاسبه ترکیب از مقادیر حقیقی، بسط توان‌های حقیقی چندجمله‌ای‌ها را نیز بدست آورد. تعمیم پذیری قضیه ضرایب چندجمله‌ای به توان‌های حقیقی اثبات پذیر است اما اثبات آن در حوزه ریاضیات گسسته قرار نمی‌گیرد. با توجه به کاربردی بودن این قضیه که آن را تحت عنوان ضرایب دو جمله‌ای (چندجمله‌ای) تعمیم یافته نیز می‌شناسند، یک مثال از آن را در زیر مشاهده می‌کنید.

مثال) ضریب عبارت x^{4} را در بسط $(1+x)^{-3}$ بیابید.

پاسخ.

$$(۱+x)^{-n}=\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k=\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k\binom{n+k-۱}{k}x^k$$

بنابراین، پاسخ مسئله برابر است با:

$$(-۱)^۴\binom{۳+۴-۱}{۴}=\binom{۶}{۴}=۱۵$$

اتحاد واندرموند

اتحاد واندرموند: فرض کنیم m,n,r اعداد صحیح نامنفی باشند و $r\leq n$ یا $r\leq m$ باشد، داریم:

$$\binom{n+m}{r}=\sum_{k=۰}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

۲۵ اثبات اتحاد واندرموند

اتحاد واندرموند را اثبات کنید.

پاسخ. برای اثبات این اتحاد از دوگانه شماری استفاده می‌کنیم. دو گروه از افراد داریم. گروه اول با اندازه‌ی m نفر و گروه دوم با اندازه‌ی n نفر است. قصد داریم تعداد حالات انتخاب r نفر از این دو گروه را پیدا کنیم به نحوی که تعداد افراد انتخاب شده از هر گروه فاقد اهمیت باشد. برای این مقصود، دو شمارش زیر ممکن است:

آ. گروه‌بندی را فراموش کرده و از بین $m+n$ نفر، r نفر را انتخاب

می‌کنیم :

$$\binom{m+n}{r}$$

ب. ابتدا تصمیم می‌گیریم چه تعداد از r نفر انتخابی از گروه اول باشند. این تعداد که می‌تواند مقدار صفر تا r بگیرد را k می‌نامیم. بنابراین باید k عضو از بین n عضو گروه اول و $r-k$ عضو باقیمانده را از بین m نفر گروه دوم انتخاب کنیم. طبق اصل ضرب داریم :

$$\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

با توجه به اصل ضرب، برای رسیدن به تعداد حالات کل، باید مقدار بالا را برای تمام مقادیر k با هم جمع کنیم :

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

با توجه به یکتا بودن پاسخ مسئله، مقدار به دست آمده از هر دو روش یکسان می‌باشند :

$$\binom{n+m}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول: اگر بتوان فضای حالات عملی را به دو فضای A_1 و A_2 تقسیم کرد به نحوی که این دو فضا امکان اشتراک در اعضایشان را داشته باشند، آنگاه تعداد اعضای فضای حالت کل برابر است با :

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

همانطور که در توضیحات مربوط به اصل جمع نیز گفته شد، آن اصل فقط زمانی قابل استفاده است که حالات مختلف انجام یک عمل از دو مسیر، اشتراکی نداشته

باشند. این اصل برای رفع این محدودیت ارائه شده است. منطق این اصل بسیار ساده است. اگر حالتی از انجام کار، در دو مسیر مشترک باشد، اگر از اصل جمع استفاده کنیم، این حالت دو بار شمرده می‌شود. برای حل این ضعف، به سادگی، این تعداد را یکبار از نتیجه کل کم می‌کنیم تا به تعداد حالات یکتا برسیم.

تعمیم اصل شمول و عدم شمول را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |\bigcap_{j\in\{i_1,\ldots,i_k\}} A_j| \Big)$$

۲۶

چه تعداد رشته باینری به طول ۸ وجود دارد که یا با ۱ آغاز شود و یا با ۰۰ به پایان برسد؟

پاسخ.
اگر تعداد رشته‌هایی که با ۱ آغاز می‌شوند را با A_1 نشان دهیم، داریم (یک حالت برای بیت اول و ۲ حالت برای هر یک از ۷ بیت دیگر):

$$|A_1| = 1 \times 2^7$$

اگر تعداد رشته‌هایی که با ۰۰ به پایان می‌رسند را با A_0 نشان دهیم، داریم (یک حالت برای دو بیت آخر و ۲ حالت برای هر یک از ۶ بیت دیگر):

$$|A_0| = 1^2 \times 2^6$$

تعداد رشته‌هایی که با ۱ آغاز می‌شوند و با ۰۰ به پایان می‌رسند (یک حالت برای بیت اول و دو بیت آخر و ۲ حالت برای هر یک از ۵ بیت دیگر):

$$|A_1 \cap A_0| = 1^3 \times 2^5$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|A_1 \cup A_0| = |A_1| + |A_0| - |A_1 \cap A_0| = 2^7 + 2^6 - 2^5$$

۲۷

یارا باید کامل کنه.

۲۸

با حروف عبارت mississippi، ساختن چند کلمه متمایز با هر یک از شرایط زیر ممکن است (تمام حروف ملزم به استفاده شدن هستند) ؟

آ. بدون هیچ شرطی.

پاسخ.

توجه کنید که در حروفی که در اختیار داریم، ۴ حرف s، ۴ حرف i، ۲ حرف p و یک حرف m وچود دارد. بنابر جایگشت تکراری، پاسخ مسئله برابر است با :

$$\frac{۱۱!}{۲!۴!۴!} = ۳۴۶۵۰$$

ب. حروف p در مجاورت یکدیگر قرار نگیرند.

پاسخ.

بدون درنظر گرفتن حروف p، تمام کلمات ممکن را مانند حالت اول می‌سازیم. تعداد این حالات برابر است با :

$$\frac{۹!}{۴!۴!} = ۶۳۰$$

حال به ازای هر یک از کلمات ۹ حرفی ساخته شده، باید دو حرف p را اضافه کنیم به نحوی که در مجاورت یکدیگر قرار نگیرند.

$$\_m\_i\_s\_s\_i\_s\_s\_s\_i\_i\_$$

همانطور که در نمونه‌ی بالا می‌بینید، فارغ از جایگشت ۹ حرف اولیه، ۱۰ جایگاه بین این ۹ حرف موجود است که حروف p می‌توانند در این جایگاه‌ها قرار بگیرند. توجه کنید که هر دو حرف p نباید به یک جایگاه تخصیص یابند چرا که در این صورت در مجاورت هم قرار گرفته و شرط مسئله را نقض می‌کند. بنابراین، تعداد حالات چینش حروف p برابر است با انتخاب دو جایگاه از این ۱۰ جایگاه:

$$\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با :

$$\frac{۹!}{۴!۴!}\binom{۱۰}{۲} = ۶۳۰ \times ۴۵ = ۲۸۳۵۰$$

ج. **حداقل دو حرف s در مجاورت یکدیگر باشند.**

پاسخ.

برای بدست آوردن پاسخ این مسئله، از اصل متمم استفاده می‌کنیم.

بنابراین تعداد عبارات ساخته شده که در آن هیچ دو حرف s در مجاورت یکدیگر قرار ندارند را بدست آورده و از تعداد کل عبارات ممکن کم می‌کنیم. تعداد کل عبارات ممکن را در قسمت اول همین سوال بدست آوردیم که این مقدار برابر ۳۴۶۵۰ بود. برای بدست آوردن تعداد عبارات فاقد دو s مجاور از روشی مشابه قسمت دوم استفاده می‌کنیم.

بدون درنظر گرفتن حروف s، تمام کلمات ممکن را می‌سازیم.

تعداد این حالات برابر است با :

$$\frac{۷!}{۴!۲!} = ۱۰۵$$

حال به ازای هر یک از کلمات ۷ حرفی ساخته شده، باید چهار حرف s را اضافه کنیم به نحوی که در مجاورت یکدیگر قرار نگیرند.

$$\_\,i\,\_\,p\,\_\,p\,\_\,i\,\_\,i\,\_\,i\,\_\,m\,\_$$

مشابه قسمت دوم مسئله، تعداد حالات چینش حروف s برابر است با انتخاب چهار جایگاه از ۸ جایگاه:

$$\binom{۸}{۲} = ۷۰$$

طبق اصل ضرب، تعداد عبارات فاقد دو s مجاور برابر است با :

$$\frac{۷!}{۴!۲!}\binom{۸}{۴} = ۱۵۰ \times ۷۰ = ۷۳۵۰$$

طبق اصل متمم، پاسخ مسئله برابر است با :

$$۳۴۶۵۰ - ۷۳۵۰ = ۲۷۳۰۰$$

د. **حداقل دو حرف s در مجاورت یکدیگر یا دو حرف i در مجاورت یکدیگر باشند.**

پاسخ.
از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی I را مجموعه عباراتی که دارای حداقل دو حرف i در مجاورت یکدیگرند و مجموعه‌ی S را مجموعه عباراتی که دارای حداقل دو حرف s در مجاورت یکدیگر هستند درنظر بگیرید. در این صورت داریم :

$$|S \cup I| = |S| + |I| - |S \cap I|$$

اگر A را مجموعه‌ی تمام عبارات ممکن بدون شرط درنظر بگیریم، طبق اصل متمم داریم :

$$|S \cup I| = (|A|-|(A-S)|)+(|A|-|(A-I)|)-(|A|-|(A-S\cap I)|) = |A| - |(A-S)| - |(A-I)| + |(A-(S\cap I))| = |A| - |S'| - |I'| + |SI'|$$

که در آن، S' مجموعه عبارات فاقد دو حرف s در مجاورت یکدیگر، I' مجموعه عبارات فاقد دو حرف i در مجاورت یکدیگر و SI' مجموعه عبارات فاقد دو حرف s یا دو حرف i در مجاورت یکدیگر است. با توجه به تقارن موجود در مسئله برای دو حرف s و i (هر دو چهار بار تکرار شدند)، بنابراین :

$$|S| = |I|, |S'| = |I'|$$

با توجه به قسمت اول و سوم همین سوال، داریم :

$$|S'| = |I'| = ۷۳۵۰, |A| = ۳۴۶۵۰$$

برای بدست آوردن مقدار $|SI'|$ درست مانند قسمت سوم همین سوال عمل می‌کنیم. در ابتدا حروف غیر از s و i را به کار می‌گیریم :

$$\frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$\_m\_p\_p\_$$

سپس حروف i را در جایگاه‌ها قرار می‌دهیم (مانند قبل، هیچ دو حرف i در مجاورت هم و در یک جایگاه قرار نمی‌گیرند) :

$$\binom{۴}{۴} = ۱$$

$$\_m\_i\_i\_i\_p\_p\_i\_$$

سپس حروف s را در جایگاه‌ها قرار می‌دهیم (مانند قبل، هیچ دو حرف

س در مجاورت هم و در یک جایگاه قرار نمی‌گیرند) :

$$\binom{۸}{۴} = ۷۰$$

طبق اصل ضرب :

$$|SI'| = \frac{۳!}{۲!}\binom{۴}{۴}\binom{۸}{۴} = ۳ \times ۱ \times ۷۰ = ۲۱۰$$

پس داریم :

$$|S \cup I| = |A| - |S'| - |I'| + |SI'| =$$
$$۳۴۶۵۰ - ۷۳۵۰ - ۷۳۵۰ - ۲۱۰ = ۱۹۷۴۰$$

۲۹

تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را به ازای مقادیر صحیح نامنفی $x_۱, x_۲, x_۳$ بیابید به شرطی که $x_۱ \leq ۳, x_۲ \leq ۴, x_۳ \leq ۶$:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱$$

پاسخ.

نام‌گذاری زیر را برای زیرمجموعه جواب‌های معادله‌ی

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱$$

به ازای تمام مقادیر صحیح نامنفی $x_۱, x_۲, x_۳$ بدون محدودیت درنظر بگیرید:

آ. مجموعه تمام جواب‌های ممکن: A

ب. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۱ \leq ۳$: $X_۱$

ج. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۱ \geq ۴$: $X'_۱$

د. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۲ \leq ۴$: $X_۲$

ه. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۲ \geq ۵$: $X'_۲$

و. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۳ \leq ۶$: $X_۳$

ز. مجموعه تمام جواب‌های ممکن به ازای $x_۳ \geq ۷$: $X'_۳$

در این صورت، پاسخ مسئله برابر است با: $|X_۱ \cap X_۲ \cap X_۳|$. با توجه به اصل متمم داریم:

$$|X_۱ \cap X_۲ \cap X_۳| = |A| - |A - (X_۱ \cap X_۲ \cap X_۳)|$$
$$= |A| - |X'_۱ \cup X'_۲ \cup X'_۳|$$

طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3| = |X'_1| + |X'_2| + |X'_3| - |X'_1 \cap X'_2| - |X'_1 \cap X'_3| - |X'_2 \cap X'_3| + |X'_1 \cap X'_2 \cap X'_3|$$

برای بدست آوردن مقدار هر یک از ترم‌های سمت راست تساوی بالا و همچنین $|A|$، از روش مشابه پاسخ مثال ۰ـ۰ (مثال معادله سیاله. هنوز نوشته نشده) برای حل معادله سیاله استفاده می‌کنیم. توجه کنید که از ابتدا نمی‌توانستیم از این روش استفاده کنیم چرا که با این روش نمی‌توان شرط سقف مقادیر برای متغیرها را ارضا کرد؛ اما شروط ترم‌های فعلی، شرط حداقل مقادیر هستند که در روش مذکور قابل ارضا می‌باشند:

$$|A| = \binom{11+3-1}{3-1} = 78$$
$$|X'_1| = \binom{11-4+3-1}{3-1} = 36$$
$$|X'_2| = \binom{11-5+3-1}{3-1} = 28$$
$$|X'_3| = \binom{11-7+3-1}{3-1} = 15$$
$$|X'_1 \cap X'_2| = \binom{11-4-5+3-1}{3-1} = 6$$
$$|X'_1 \cap X'_3| = \binom{11-4-7+3-1}{3-1} = 1$$
$$|X'_2 \cap X'_3| = \binom{11-5-7+3-1}{3-1} = 0$$
$$|X'_1 \cap X'_2 \cap X'_3| = \binom{11-4-5-7+3-1}{3-1} = 0$$
$$|X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3| = |X'_1| + |X'_2| + |X'_3| - |X'_1 \cap X'_2| - |X'_1 \cap X'_3| - |X'_2 \cap X'_3| + |X'_1 \cap X'_2 \cap X'_3| = 36 + 28 + 15 - 6 - 1 - 0 + 0 = 72$$
$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = |A| - |X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3| = 78 - 72 = 6$$

۳۰ تعداد توابع پوشا

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عنصری به یک مجموعه n عنصری را بیابید.

پاسخ.

عملگر $P(i)$ را تعداد توابع از مجموعه m عضوی به مجموعه n عضوی تعریف می‌کنیم به نحوی که حداقل i عضو از مجموعه مقصد پوشانده نشوند.

اگر پاسخ مسئله (تعداد توابع پوشا) را N و تعداد کل توابع غیر پوشا از مجموعه m عضوی به مجموعه n عضوی را A بنامیم، طبق اصل متمم داریم:

$$N = P(۰) - A$$

همچنین طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$A = P(۱) - P(۲) + P(۳) - ... + (-۱)^{n-۱}P(n)$$
$$= \sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i-۱}P(i)$$

برای بدست آوردن مقدار $P(i)$ ابتدا i عضو از مجموعه مقصد به عنوان اعضای پوشانده نشده انتخاب و آن‌ها را نادیده می‌گیریم. سپس تعداد کل توابع ممکن از مجموعه m عضوی مبدا به مجموعه $n-i$ عضوی مقصد جدید را محاسبه می‌کنیم. طبق اصل ضرب، $P(i)$ برابر حاصل ضرب تعداد حالات انتخاب i عضو و تعداد توابع بر روی مجموعه مقصد جدید می‌باشد:

$$P(i) = \binom{n}{i}(n-i)^m$$

بنابراین داریم:

$$N = P(۰) - A = P(۰) - \sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i-۱}P(i) = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}P(i)$$
$$= \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^m$$

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^m$$

۳۱

به چند روش می‌توان ۵ کار متفاوت را بین ۴ کارمند تقسیم کرد به

گونه‌ای که هر کارمند دست کم یک کار داشته باشد؟

پاسخ.

به مسئله به چشم تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی کارها به مجموعه ۴ عضوی کارمندها نگاه کرده و از پاسخ مسئله قبل، با $m = ۵, n = ۴$ استفاده می کنیم :

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m = \sum_{i=۰}^{۴}(-۱)^i\binom{۴}{i}(۴-i)^۵ =$$

$$۱\times ۴^۵ - ۴\times ۳^۵ + ۶\times ۲^۵ - ۴\times ۱^۵ + ۱\times ۰^۵ = ۱۰۲۴ - ۹۷۲ + ۱۹۲ - ۴ = ۲۴۰$$

پریش

به هر جایگشتی از اشیا ترتیب دار به نحوی که هیچ یک از اشیا در جایگاه اصلی خود قرار نگیرند پریش گفته می‌شود.

برای نمونه، دنباله حروف $TKSAR$ یک پریش برای دنباله $STARK$ می‌باشد.

۳۲ تعداد پریش‌ها

تعداد پریش‌های یک مجموعه n عضوی را بدست آورید.

پاسخ.

عملگر $P(i)$ را تعداد جایگشت‌هایی از مجموعه موردنظر تعریف می کنیم به نحوی که در این جایگشت‌ها، حداقل i عضو در جایگاه اصلی خود قرار داشته باشند. اگر پاسخ مسئله (تعداد پریش‌ها) را N و تعداد کل جایگشت‌های غیر پریش در این مجموعه را A بنامیم، طبق اصل متمم داریم :

$$N = P(۰) - A$$

همچنین طبق اصل شمول و عدم شمول داریم :

$$A = P(۱) - P(۲) + P(۳) - ... + (-۱)^{n-۱}P(n) = \sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i-۱}P(i)$$

$$\rightarrow N = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}P(i)$$

برای بدست آوردن مقدار $P(i)$ ابتدا i عضو از مجموعه را انتخاب کرده و آن‌ها را در جایگاه اصلی خود قرار می‌دهیم. حال می‌توانیم به مسئله به چشم تعداد جایگشت‌های $n-i$ عضوی باقیمانده نگاه کرد (جایگاه‌های اشغال شده و اشیا قرار داده شده را نادیده می‌گیریم). طبق اصل ضرب، $P(i)$ برابر حاصل ضرب تعداد حالات انتخاب i عضو و تعداد جایگشت‌های مجموعه جدید می‌باشد :

$$P(i) = \binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{(n-i)!i!}(n-i)! = \frac{n!}{i!}$$

بنابراین داریم :

$$N = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}P(i) = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}\frac{n!}{i!} = n!\sum_{i=۰}^{n}\frac{(-۱)^{i}}{i!}$$

تعداد پریش‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$n!\sum_{i=۰}^{n}\frac{(-۱)^{i}}{i!}$$

۳۳

در یک مجلس رسمی، میز گردی وجود دارد که اسامی دعوت شدگان بر روی صندلی‌ها نوشته شده است. به چند طریق ممکن است مهمانان به دور این میز بنشینند به شرطی که تنها یک نفر بر روی صندلی خود بنشیند؟ تعداد مهمانان ۱۲ می‌باشد.

پاسخ.
با توجه به نام‌دار بودن صندلی‌ها، وجود حلقه در مسئله تفاوتی ایجاد نمی‌کند. کافی است در ابتدا یک نفر را انتخاب کرده و پس از آن، تعداد پریش‌های افراد باقیمانده را با توجه به رابطه‌ی بدست آمده در سوال قبل حساب کنیم. طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با حاصل ضرب تعداد انتخاب‌های ممکن برای فردی که بر جای خودش می‌نشیند و تعداد پریش‌های مجموعه باقیمانده:

$$\binom{۱۲}{۱} \times ۱۱! \sum_{i=۰}^{۱۱} \frac{(-۱)^i}{i!} = ۱۲ \times ۱۴۶۸۴۵۷۰ = ۱۷۶۲۱۴۸۴۰$$

شمارش به کمک توابع مولد

مسائل شمارش را می‌توان با یک مدل‌سازی ساده، به کمک توابع مولد حل کرد. این کار همیشه منجر به افزایش سهولت حل نیست اما در برخی از مسائل چاره گشاست. نحوه این استفاده را با چند مثال نشان خواهیم داد.

شمارش بدون ترتیب

۳۴

تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را پیدا کنید.

$$e_۱ + e_۲ + e_۳ = ۱۷$$
$$e_i \in W, ۲ \leq e_۱ \leq ۵, ۳ \leq e_۲ \leq ۶, ۴ \leq e_۳ \leq ۷$$

پاسخ.
تعداد جواب‌های معادله‌ی بالا با محدودیت‌های در نظر گرفته شده، با ضریب $x^{۱۷}$ در بسط زیر برابر است.

$(x^۲+x^۳+x^۴+x^۵)(x^۳+x^۴+x^۵+x^۶)(x^۴+x^۵+x^۶+x^۷)$
زیرا ضریب $x^{۱۷}$ برابر است با تعداد دفعاتی که حاصلضرب $x^{e_۱}$ از عبارت اول و $x^{e_۲}$ از عبارت دوم و $x^{e_۳}$ از عبارت سوم با $x^{۱۷}$ برابر می‌شود. به عبارت دیگر برابر است با تعداد دفعاتی که $e_۱+e_۲+e_۳ = ۱۷$ می‌شود که با تعداد جواب‌های این معادله برابر است.
با ضرب کردن بسط بالا ضریب $x^{۱۷}$ برابر ۳ به دست می‌آید. بنابراین معادله دارای ۳ جواب است.

۳۵

اگر به تعداد کافی سکه‌ی ۱ و ۲ و ۵ دلاری، داشته باشیم، به چند طریق می‌توان یک کالای ۷ دلاری را از دستگاه فروش خرید؟ به طوری که ترتیب انداختن سکه‌ها در دستگاه مهم باشد.

پاسخ.
اگر n ، تعداد کل سکه‌هایی که داخل دستگاه انداخته‌ایم باشد، تعداد حالت‌های انداختن سکه تا رسیدن به ۷ دلار با ضریب $x^۷$ در بسط $(x+x^۲+x^۵)^n$ برابر است. زیرا این بسط دارای n عبارت $(x+x^۲+x^۵)$ است که در هم ضرب شده‌اند و ضریب $x^۷$ برابر است با تعداد حالت‌هایی که حاصل جمع توان جمله‌های x از این عبارت‌ها برابر ۷ شود.
حال با جمع کردن تعداد جواب‌ها در n های مختلف، تعداد کل حالت‌ها به دست می‌آید. به عبارت دیگر تعداد کل حالت‌ها با ضریب $x^۷$ در عبارت زیر برابر می‌شود.
$$۱+(x+x^۲+x^۵)+(x+x^۲+x^۵)^۲+\ldots$$
با توجه به اینکه در توان‌های کمتر از ۲ و بیشتر از ۷، جمله‌ی $x^۷$ را نداریم، از بررسی و محاسبه‌ی آن‌ها در عبارت چندجمله‌ای بالا صرف نظر می‌کنیم.
با محاسبه‌ی عبارت، ضریب $x^۷$ برابر ۲۶ به دست می‌آید.

۳۶

اگر ۱۰ نوع میوه داشته باشیم، به چند روش می‌توان ۱۶ عدد میوه انتخاب کرد به طوری که از هر نوع میوه به تعداد زوج انتخاب کرده باشیم؟

پاسخ.
اگر n تعداد نوع میوه‌هایی باشد که انتخاب کرده‌ایم، ضریب جمله‌ی x^{16} در بسط $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^n$ با تعداد روش‌های انتخاب ۱۶ عدد میوه به طوری که از n نوع میوه انتخاب کرده باشیم، برابر است. به این ترتیب حاصل جمع این عدد در n های مختلف با تعداد کل روش‌ها برابر است. با توجه به این که تعداد نوع میوه‌ها محدود است، داریم: $n \leq 10$. به این ترتیب ضریب x^{16} در عبارت زیر با تعداد کل روش‌های انتخاب ۱۶ عدد میوه از ۱۰ نوع میوه برابر است:
$1+(1+x^2+x^4+\dots)+(1+x^2+x^4+\dots)^2+\dots+(1+x^2+x^4+\dots)^{10}$

شمارش با ترتیب

برای کمک گرفتن از توابع مولد در حل مسائل شمارشی که در آن‌ها ترتیب با اهمیت است، ساده‌تر است اگر از تابع مولد نمایی استفاده شود.

برای درک چرایی این مسئله، به یاد آورید که توانستیم «ترتیب» را به کمک حاصل ضرب «ترکیب» در «جایگشت» تعریف و محاسبه کنیم. همانطور که در بخش قبل دیدید، می‌توان مسائل شمارش بدون ترتیب را که حوزه عملکردی «ترکیب» است، به تابع مولد مدل کرد. همچنین دیدیم که تعداد جایگشت‌های n عضو برابر $n!$ است. بنابراین بنظر می‌رسد اگر بتوانیم $n!$ را در پاسخ تابع مولد ضرب کنیم، آنگاه مسئله را به شکل ترتیب‌دار حل کرده‌ایم. توجه کنید که در حل مسائل شمارش با کمک توابع مولد، ضریب جملات است که برای ما اهمیت دارد. بنابراین اگر در جملات دنباله، مقدار $\frac{1}{n!}$ را ضرب کنیم، آنگاه برای حل

مسئله‌ی یکسان، برای خنثی شدن این اثر، در ضرایب جملات عبارت $n!$ ضرب شده و ما به مقصود خود خواهیم رسید. حال به یاد آورید که در فصل مجموعه‌ها ذکر شد، تابع مولد نمایی دنباله‌ی a_n همان تابع مولد دنباله‌ی $\frac{a_n}{n!}$ است.

همانطور که مشاهده می‌کنید، استفاده از تابع مولد نمایی بجای تابع مولد در حل مسائل شمارش، هم معنا با اعمال تمایز جایگشت‌ها در حالات مسئله است و مسائل بدون ترتیب را به مسائل با ترتیب تبدیل می‌کند.

روش استفاده از این روش را با چند مثال نشان خواهیم داد.

۳۷

چند کلمه‌ی ۴ حرفی با حروف کلمه‌ی $PAPAYA$ می‌توان ساخت؟

پاسخ.
برای هر یک از حروف یک تابع مولد نمایی در نظر می‌گیریم. با توجه به تعداد هر کدام از حروف در این کلمه، تابع مولد آن به دست می‌آید. ($P(x)$ تابع مولد حرف P و $A(x)$ تابع مولد حرف A و $Y(X)$ تابع مولد حرف Y و $G(x)$ تابع مولد نهایی است.)

$$P(x) = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!}$$
$$A(x) = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!}$$
$$Y(x) = ۱ + x$$
$$G(x) = P(x)A(x)Y(x)$$

اگر ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در بسط $G(x)$ با a_n برابر باشد، تعداد کل کلمات ۴ حرفی با $a_۴$ برابر است. با محاسبه‌ی بسط، $a_۴$ برابر ۳۸ به دست می‌آید.

۳۸

تعداد رشته‌های به طول n از حروف a, b, c که در آن‌ها تعداد a و تعداد b فرد باشند را بیابید.

پاسخ.
برای هر حرف یک تابع مولد نمایی در نظر می‌گیریم.

آ. برای حرف c محدودیتی نداریم:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

ب. برای حروف a و b که باید فرد بار آمده باشند:

$$A(x) = B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sinh(x)$$

بنابراین، تابع مولد نهایی برابر است با

$$A(x)B(x)C(x) = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})(\frac{e^x - e^{-x}}{2})e^x = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 e^x = (\frac{e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4})e^x = \frac{e^{3x} - 2e^x + e^{-x}}{4} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3^n - 2 + (-1)^n}{4}) \frac{x^n}{n!}$$

پس پاسخ نهایی برابر خواهد بود با:

$$\frac{3^n - 2 + (-1)^n}{4}$$

۳۹

فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی در مبنای ۳ است؛ اگر تعداد ۰ها فرد و تعداد ۱ها زوج باشد، a_n را بیابید.

پاسخ.
برای هر عدد(۰ و ۱ و ۲) یک تابع مولد نمایی در نظر می‌گیریم:

آ. برای ۰ که باید فرد بار آمده باشد:

$$G_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ب. برای ۱ که باید زوج بار آمده باشند:

$$G_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ج. برای ۲ که محدودیتی ندارد:

$$G_۳(x) = \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)!} = e^x$$

بنابراین، تابع مولد نهایی برابر است با:

$$G_۱(x)G_۲(x)G_۳(x) = (\frac{e^x - e^{-x}}{۲})(\frac{e^x + e^{-x}}{۲})(e^x) =$$

$$\frac{۱}{۴}(e^{۳x} - e^x) = \sum_{n=۰}^{+\infty} (۳^n - (-۱)^n)\frac{x^n}{n!}$$

پس پاسخ نهایی برابر خواهد بود با:

$$a_n = ۳^n - (-۱)^n$$

اشتباه نکنید

۴۰

سه مهره رخ متمایز و صفحه شطرنجی ۸×۸ داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ غلط.

سوال را با اصل متمم حل می‌کنیم:
- کل حالات:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ‌ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها

برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نشمردن همه حالت‌ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ‌ها چنین نتیجه‌ای گرفته شده است.

پاسخ غلط.

- کل حالات:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

$$۶۴ \times ۷ \times ۲۰ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص

چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ.

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ‌ها برابر است با:

$$P(۶۴, ۳) = ۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.
دو حالت داریم:

آ. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

ب. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه‌ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل‌های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۴۹ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - (۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰ + ۶۴ \times ۴۹ \times ۲)$$

۴۱

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۱^۲\binom{n}{۱}+۲^۲\binom{n}{۲}+۳^۲\binom{n}{۳}+\ldots+n^۲\binom{n}{n}=n(n+۱)۲^{n-۲}$$

پاسخ غلط.

فرض کنید $P=\sum_{k=۰}^{n}k^۲\binom{n}{k}$ بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند.
حال این شمارش را به روش دیگری انجام می‌دهیم.
با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P=n\times ۲^{n-۱}+n\times(n-۱)\times ۲^{n-۲}=n\times(n+۱)\times ۲^{n-۲}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مسئله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=۰}^{n}k^۲\binom{n}{k}=n\times(n+۱)\times ۲^{n-۲}$$

عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{۲}$ حالت دارد نه $n\times(n-۱)$.

بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری) ذکر شود.

یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ.

سوال را با دوگانه شماری حل می‌کنیم:
فرض کنید P بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می‌توانند یک نفر باشند. شمارش این راه‌ها به ۲ روش امکان پذیر است.

آ. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times ۲^{n-۱} + n \times (n-۱) \times ۲^{n-۲} = n \times (n+۱) \times ۲^{n-۲}$$

ب. ابتدا این که چه اعضایی کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (k(k-۱)+k) = \sum_{k=۰}^{n} k^{۲} \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مسئله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=۰}^{n} k^{۲} \binom{n}{k} = n \times (n+۱) \times ۲^{n-۲}$$

۴۲

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند.در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس ، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن‌ها یکسان است.

پاسخ غلط.

در نظر می‌گیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است . در این صورت باز می‌توان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند. پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص می‌شود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

بهتر بود اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام می‌برد و نحوه استفاده از آن را مشخص می کرد.

پاسخ کامل نیست. هر اثباتی باید تا گام آخر طی شود. هیچ بخشی از اثبات نباید بدیهی شمرده شود.

پاسخ.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره‌ی مبانی آن‌ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه‌ی سقف $\frac{۶۰}{۱۴}$ یعنی ۵ نمره‌ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم ؛

آ. اگر پنج نمره‌ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو

نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را درنظر گرفته و به مجموعه‌ای ۱۰ عضوی می‌رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره‌ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

ب. اگر پنج نمره‌ی متمایز، هرکدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq ۴$ نمره‌ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه‌ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times ۱۴$ عضو را پوشش می‌دهند. بنابراین حداقل $۶۰ - ۱۴k$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی‌توانند دارای نمره‌ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره‌های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل $k+۱$ می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ی این اعضا را B بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی A و تمام اعضای مجموعه‌ی B به مجموعه‌ای متشکل از $N = ۲k + ۶۰ - ۱۴k = ۶۰ - ۱۲k$ عضو رسید که $k \leq ۴ \Rightarrow N \geq ۱۲$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

۴۳

ضریب عبارت $x^{۱۲}$ در بسط عبارت $(۱ - ۴x)^{-۵}$ را بیابید.

پاسخ غلط.

طبق بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{۱}{(۱ - ۴x)^{۵}} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} ۴^k x^k$$

جمله ۱۲ ام دنباله a_n ضریب $x^{۱۲}$ است.

$$\longrightarrow a_{۱۲} = \binom{۱۶}{۱۲} ۴^{۱۲}$$

بهتر است اصل بسط دوجمله‌ای هم نوشته شود.

قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ.

طبق جدول *Useful Generating Functions* از کتاب *Rosen* که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱-x)^{-n} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{n+k-۱}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱-۴x)^{-۵} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{۵+k-۱}{k} (۴x)^k$$

جمله $x^{۱۲}$ به ازای مقدار $k = ۱۲$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۶}{۱۲} (۴)^{۱۲}$$

۴۴

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ غلط.

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می‌کنیم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_۹| =$$
$$\binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + \ldots + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_۹|$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸}$$
$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸}$$
$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸}$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.
حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می‌کنیم:
-کل حالات:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

$$\longrightarrow a_{۱۲} = \binom{۱۶}{۱۲} ۴^{۱۲}$$

تعریف متغیرهای A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال‌ها به هیچ وجه مشخص نیست.

اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه‌ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ.

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می‌دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$$

$$\forall i \in [۱, ۹] : x_i \leq ۹$$

تعداد جواب‌های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می کنیم:

-کل حالات: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$. این یک معادله سیاله است و تعداد جواب‌های صحیح آن برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

-حالات نامطلوب: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$ به طوری که: $\exists i \in [۱, ۹] : x_i \geq ۱۰$

حال اگر مجموعه حالت‌هایی که در آن $x_i \geq ۱۰$ است را با A_iنشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه‌ها را بیابیم.
طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_۹| =$$

$$\binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + \ldots + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_۹|$$

برای محاسبه مقدار عبارت‌ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq ۱۰$ بود قرار می‌دهیم $x_i = y_i + ۱۰$ و در غیر این صورت قرار میدهیم $x_i = y_i$، حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن‌ها $x_i \geq ۱۰$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{۱}^{۹} y_i = ۳۲ - ۱۰k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{۴۰ - ۱۰k}{۸}$$

حال مقدار عبارت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸} \qquad (k = ۱)$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸} \qquad (k = ۲)$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸} \qquad (k = ۳)$$

برای بقیه جمله‌ها جواب برابر ۰ است.
پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} - \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} + \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

- حالات مطلوب طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

۴۵

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش‌های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد $۱, ۲, ۳, ..., n$ برابر است با انتخاب ۴ از $n - ۳$.

پاسخ غلط.

یک زیرمجموعه از این نوع مثلا ۱و۳و۷و۱۰ را انتخاب و نابرابری‌های اکید

$$۰ < ۱ < ۳ < ۷ < ۱۰ < n + ۱$$

را در نظر می‌گیریم. و بررسی می‌کنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و ۳ و 2 و n-۱۰ را به دست می‌آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین 0 و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و۳ وجود دارد و 3 زیرا اعداد صحیح ۴ و۵ و۶ بین ۳ و۷ وجود دارند و... . مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $0 + 1 + 3 + 2 + n - 10 = n - 4$ است.
پس تابع مولد زیر را داریم.

$$\begin{aligned}
G(x) &= (۱ + x^۲ + x^۳ + ...)^۲(x + x^۲ + x^۳ + ...)^۳ \\
&= (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)^۲(\sum_{k=۰}^{\infty} x^{k+۱})^۳ \\
&= \frac{۱}{(۱-x)^۲} \times (\frac{x}{۱-x})^۳ = \frac{x^۳}{(۱-x)^۵} \\
&= x^۲(۱-x)^{-۵} = x^۳\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}x^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} x^{k+۳} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۱}{k-۳} x^k$$

به دنبال ضریب $x^{n-۴}$ می‌گشتیم پس $k = n - ۴$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$

مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند.

در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد بر چه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله‌ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم.

نیاز هست که کاملا گفته شود چه تغییر متغیری انجام می‌شود. در اینجا تغییر متغیر $k \to k + ۳$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران‌ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه می‌رود. صورت اصلاح شده:

$$\sum_{k=۳}^{\infty} \binom{k+۱}{k-۳} x^k$$

در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه‌ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ غلط.

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (۱ + x + x^۲ + \ldots)(x + x^۲ + x^۳ + \ldots)^۳$$

در مجموع $۴n$- عدد داریم. توان‌های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی $۴n$- هستند را بیابیم:

$$G(x)=\frac{x^{۳}}{(۱-x)^{۴}}=x^{۳}(۱-x)^{-۴}=x^{۳}\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۳}{۳}x^{k}$$

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{x+k}{k}=\frac{۱}{(۱+x)^{k+۱}}$$

$$\longrightarrow k+۳\leq n-۴\rightarrow k\leq n-۷$$

$$\binom{n+۱}{r+۱}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} \qquad (۱)$$

مجموع حالات:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{۳}\xrightarrow{(۱)}\binom{n-۷+۴}{۴}=\binom{n-۳}{۴}$$

به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری‌ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (۱) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از ۰ است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست.

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{k}=\sum_{k=۳}^{k-۴}\binom{k}{k-۳}=\sum_{k=۳}^{n-۴}\binom{k}{۳}$$

$$\xrightarrow[r\rightarrow ۳,n\rightarrow n-۴]{(۱)}\binom{n-۳}{۴}$$

پاسخ.

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را $x_۱$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را $x_۲$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را $x_۳$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را $x_۴$ و عضوهای انتخاب نشده بزرگ‌تر از چهارمین عضو انتخاب شده را $x_۵$ می‌گیریم. کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط

$$x_۱, x_۵ \geq ۰ \quad x_۲ x_۳, x_۴ \geq ۱$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = n - ۴$$

بشماریم که برابر است با ضریب $x^{n-۴}$ در عبارت:

$$(۱ + x + x^۲ + ...) \times (x + x^۲ + x^۳ + ...) \times (x + x^۲ + x^۳ + ...)$$

$$\times (x + x^۲ + x^۳ + ...) \times (۱ + x + x^۲ + ...) = \frac{x^۳}{(۱ - x)^۵}$$

بنابراین کافی است ضریب $x^{n-۷}$ را در بسط $(۱ - x)^{-۵}$ بشماریم.
طبق جدول *Useful Generating Functions* از کتاب *Rosen* که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱ - x)^{-n} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{n + k - ۱}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱ - x)^{-۵} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{۵ + k - ۱}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{۴} x^k$$

$x^{n-۷}$ به ازای $k = n - ۷$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-۳}{۴}$$

۴۶

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+۱}{k+۱}$$

پاسخ غلط.

$$A = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+۱}{k+۱} - \binom{i}{k+۱}$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+۱}{k+۱} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+۱}$$

$$= \binom{n+۱}{k+۱} + \sum_{i=k}^{n-۱} \binom{i+۱}{k+۱} - (۰ + \sum_{i=k+۱}^{n} \binom{i}{k+۱})$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

باید فرمول و اتحادهای مورد استفاده و منبع معتبر آن ذکر شود. به عنوان منبع اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ.

طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

پس طبق این اتحاد می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - (0 + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k+1})$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

مسائل

۴۷

تعدادی کتاب داریم. به چند حالت می‌توانیم این کتاب‌ها را در یک قفسه بچینیم چنانچه:

آ. ۷ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک داشته باشیم و کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؟

ب. همان مجموعه کتاب‌های قسمت قبل را داشته باشیم به طوری که کتاب‌های اول و آخر کتاب‌های ریاضی باشند و هیچ دو کتاب فیزیکی در کنار هم قرار نداشته باشند؟

ج. به مجموعه کتاب‌های قسمت قبل، دو کتاب شیمی اضافه کنیم به طوری که باز هم شروط قسمت دو برقرار باشد.

پاسخ.

آ. سه کتاب فیزیک را یک کتاب واحد در نظر می‌گیریم. $(۷+۱)!$
از طرفی سه کتاب فیزیک به $۳!$ حالت به آن کتاب واحد تبدیل می‌شوند. پس $۳! \times ۸!$ حالت داریم.

ب. حالت قرار گرفتن کتاب‌ها به صورت زیر می‌شود(Mها نشان دهنده‌ی کتاب‌های ریاضی و مربع‌ها نشان دهنده خانه‌های مجاز برای کتاب فیزیک است):

$$M_۱\square M_۲\square M_۳\square M_۴\square M_۵\square M_۶\square M_۷$$

برای قرار دادن کتاب‌های ریاضی $۷!$ حالت داریم. برای قرار دادن کتاب‌های فیزیک نیز باید یک ترتیب ۳تایی از ۶ حالت ممکن به دست بیاوریم. طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با:

$$۷! \times p(۶,۳)$$

ج. حالت قرار گرفتن کتاب‌ها به صورت زیر می‌شود(مربع‌ها نشان دهنده

خانه‌های مجاز برای کتاب فیزیک است و حروف MS به معنی امکان بودن کتاب شیمی یا ریاضی است):

$$M_۱\square MS_۱\square MS_۲\square MS_۳\square MS_۴\square MS_۵\square MS_۶\square MS_۷\square M_۲$$

برای کتاب‌های ریاضی $۷!$ حالت داریم. برای کتاب‌های شیمی نیز ابتدا دو جایگاه پیدا می‌کنیم که به $\binom{۷}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است؛ سپس به $۲!$ حالت می‌توان آن‌ها را در دو جایگاه انتخاب شده قرار داد. برای کتاب‌های فیزیک نیز ابتدا ۳ جایگاه از ۶تا به $\binom{۶}{۳}$ حالت پیدا کرده و سپس به $۳!$ حالت، کتاب‌های فیزیک را در آن جایگاه‌ها قرار می‌دهیم. (برای قرار دادن کتاب‌های شیمی و فیزیک می‌توانستیم از ترتیب استفاده کنیم، همانطور که در پاسخ قسمت قبل برای کتاب‌های فیزیک استفاده کردیم.) جواب نهایی برابر می‌شود با:

$$۷! \times \binom{۷}{۲} \times ۲! \times \binom{۶}{۳} \times ۳!$$

۴۸

تعداد راه‌های نشستن n زوج زن و مرد را دور یک میز بیابید اگر:

آ. مرد و زن‌ها یکی در میان بنشینند.

ب. هر زنی کنار همسر خود نشسته باشد.

پاسخ.

آ. ابتدا n مرد را دور یک میز می‌نشانیم که به $(n-۱)!$ حالت می‌توان این کار را انجام داد. سپس بین هر دو مرد، یک زن می‌نشانیم که تعداد راهای این کار $n!$ می‌شود. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$n!(n-۱)!$$

ب. هر زوج زن و مرد را یک فرد واحد در نظر کی‌گیریم. تعداد راه‌های نشاندن این فرد واحد، $(m-۱)!$ است. حال هر زوج می‌تواند به $۲!$ حالت دور میز بنشینند. پس تعداد نهایی برابر است با:

$$۲^n(m-۱)!$$

۴۹

چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه‌ی pirayesh وجود دارد به طوری که:

آ. حروف اول و آخر آن صدادار باشند؟

ب. فقط حروف اول و آخر آن صدادار باشند؟

ج. حرف p جایی قبل از حرف r آمده باشد؟

پاسخ.

آ. ابتدا برای محل‌های اول و آخر دو حرف صدادار از ۳ حرف صدادار کلمه جایگذاری می‌کنیم. در ادامه به دلیل اینکه از ۸ حرف ۲ حرف انتخاب شده، پس از ۶ حرف باقی مانده، ۴ حرف برای جایگذاری می‌ماند. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$P(۶,۲) \times P(۶,۴)$$

ب. ابتدا برای محل‌های اول و آخر دو حرف صدادار از ۳ حرف صدادار کلمه جایگذاری می‌کنیم. در ادامه به دلیل اینکه از ۸ حرف ۳ حرف حرف صدادار هستند، پس از ۵ حرف باقی مانده، ۴ حرف برای جایگذاری می‌ماند. پس در نهایت خواهیم داشت:

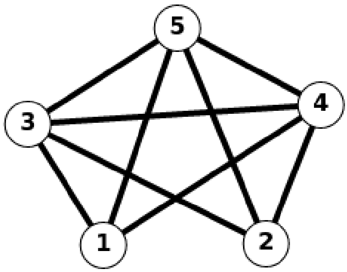
$$P(۶,۲) \times P(۵,۴)$$

ج. ابتدا از ۶ جایگاه ۲ جایگاه را انتخاب می‌کنیم که حروف p و r را در آن‌ها به ترتیب بگذاریم. سپس در ۴ جایگاه باقی‌مانده ۶ حرف را جایگذاری می‌کنیم. پس در نتیجه خواهیم داشت:

$$\binom{۶}{۲} \times P(۶,۴)$$

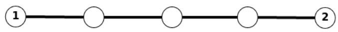
۵۰

در شکل زیر ۵ عدد میخ مشاهده می‌کنیم که با تعدادی کش به هم متصل شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۵ گش انتخاب کرد به نحوی که هر میخ دقیقا به دو کش انتخاب شده وصل باشد؟



پاسخ.

به میخ‌های ۱ و ۲ سه کش و به میخ‌های ۳ و ۴ و ۵، چهار کش متصل است. می‌خواهیم ۵ کش را انتخاب کنیم به طوری که به هر یک از میخ‌ها دقیقا۲ کش انتخاب شده وصل باشد. در این صورت می‌توانیم کش‌های انتخاب نشده را در نظر بگیریم. پس باید هر یک از میخ‌های ۱ و ۲ به یک کش انتخاب نشده و هر یک از میخ‌های ۳ و ۴ و ۵ به دو کش انتخاب شده وصل باشند. شکل حاصل از این میخ‌ها یک مسیر است که میخ ابتدا و انتها۱ و ۲ و سه میخ وسط ۳و ۴ و ۵ هستند که برای چینش آن‌ها $۶ = ۳!$ حالت داریم.



۵۱

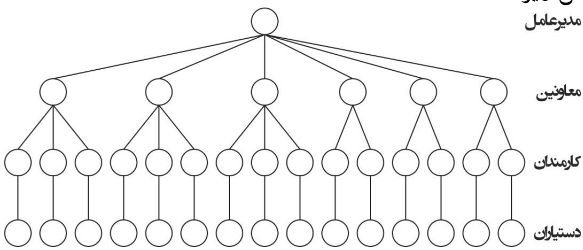
در یک شرکت، ساختار سازمانی به شکل زیر است.

مدیرعامل شرکت ۶ معاون دارد که هر کدام مسئولیت مدیریت بخشی از شرکت را بر عهده دارند. ۳ نفر از این افراد در بخش خود ۳ کارمند دارند که هر کدام از این کارمندان یک دستیار برای خود دارند. ۳ معاون دیگر در بخش خود ۲ کارمند دارند، که هرکدام این کارمندان نیز یک دستیار برای خود دارند.

حال می‌خواهیم یک مهمانی برگزار کنیم و تعدادی از افراد این شرکت را دعوت کنیم، به طریقی که هیچکس هم‌زمان با رئیسش به این مهمانی دعوت نشده‌باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

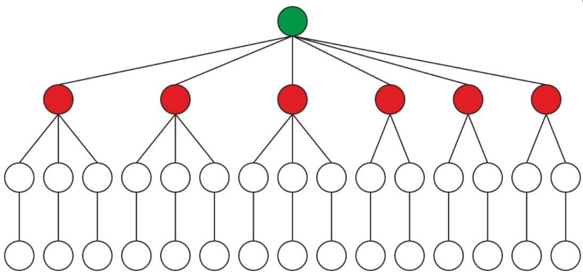
پاسخ.

با کمی تامل در صورت سوال می‌توان به ساختار سازمانی شرکت مورد نظر پی برد(شکل زیر).

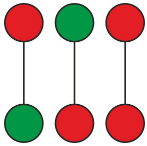


حال روی حضور یا عدم حضور مدیرعامل حالت بندی می‌کنیم.(کسانی که حضور دارند را با رنگ سبز و کسانی که حضور ندارند را با رنگ قرمز نشان می‌دهیم)

مدیرعامل حضور داشته باشد: در این صورت هیچ کدام از معاونین نمی‌توانند در مهمانی حضور داشته باشند و ساختار شکل زیر را خواهیم داشت.

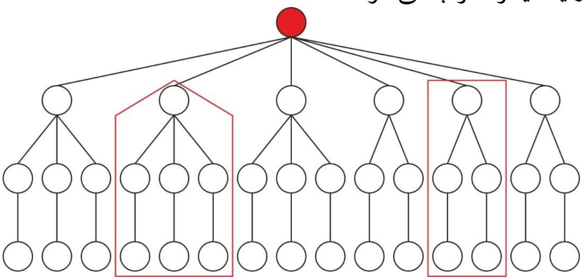


حال باید برای هر کدام از جفت‌های کارمند و دستیار، حالات ممکن را به دست بیاوریم. این حالات در شکل زیر نشان داده شده‌اند:

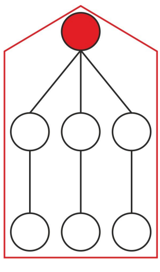


پس برای هر کدام از جفت‌ها که از هم مستقل هستند، سه حالت داریم که به یعنی طبق اصل ضرب $۳^{۱۵}$ حالت می‌توانیم داشته باشیم.

مدیرعامل حضور نداشته باشد: در این صورت ساختاری شبیه شکل زیر خواهیم داشت. از آنجایی که سه بخش از شرکت ۷ نفر و سه بخش دیگر ۵ نفر عضو دارد که از یکدیگر مستقل هستند. پس طبق اصل ضرب تعداد حالات آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شود.

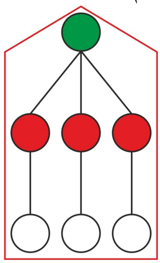


بخش‌های ۷ نفره: روی حضور یا عدم حضور معاون بخش حالت‌بندی می‌کنیم. اگر در مهمانی حاضر نباشد، سه جفت کارمند و دستیار خواهیم داشت که در مجموع همانند قبل $۳^{۳}$ حالت دارند.



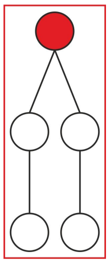
اگر معاون بخش در مهمانی حضور داشته باشد، کارمندان او نباید حضور

داشته باشند. حال ۳ دستیار مستقل داریم که هر کدام دو حالت دارند، پس طبق اصل ضرب $۲^۳$ حالت داریم.

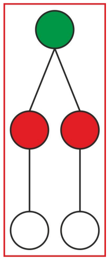


پس طبق اصل جمع برای هر بخش ۷ نفره شرکت می‌توانیم $۳۵ = ۲^۳ + ۳^۳$ حالت داشته باشیم

مجموعه ۵ تایی: روی حضور یا عدم حضور معاون بخش حالت بندی می‌کنیم. اگر در مهمانی حاضر نباشد، دو جفت کارمند و دستیار خواهیم داشت که در مجموع همانند قبل $۳^۲$ حالت دارند.



اگر معاون بخش در مهمانی حضور داشته باشد، کارمندان او نباید حضور داشته باشند. حال ۲ دستیار مستقل داریم که هر کدام دو حالت دارند، پس طبق اصل ضرب $۲^۲$ حالت داریم.



پس طبق اصل جمع برای هر بخش ۵ نفره شرکت می‌توانیم $۳^۲ + ۲^۲ = ۱۳$ حالت داشته باشیم.
و طبق اصل ضرب اگر مدیرعامل شرکت در مهمانی حضور نداشته باشد $۱۳^۳ \times ۳۵^۳$ حالت برای برگزاری مهمانی خواهیم داشت.
حال طبق اصل جمع باید حالات به دست آمده در حضور و عدم حضور مدیرعامل را با یکدیگر جمع کنیم:

$$۱۳^۳ \times ۳۵^۳ + ۳^{۱۵}$$

۵۲

نشان دهید می توان ۱۰۰۰۰ زیرمجموعه ۴ عضوی از مجموعه $\{۱،۲،\ldots،۱۰۰\}$ انتخاب کرد، به نحوی که هر دو زیرمجموعه انتخاب‌شده حداکثر ۲ عضو مشترک داشته‌باشند.

پاسخ.

فرض می‌کنیم n حداکثر تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی‌ای باشد که شرایط مسئله را دارند. مجموعه این زیر مجموعه ها را A می نامیم. می‌توان گفت هر زیرمجموعه که از اعضای A نباشد باید حداقل با یکی از اعضای A دقیقا سه عضو مشترک داشته باشد؛ در غیر اینصورت می‌توانیم بدون از بین بردن شرایط مسئله آن زیرمجموعه را به مجموعه A اضافه کنیم که با حداکثر بودن n در تناقض است. پس به ازای هر زیرمجموعه ۴ عضوی در اعضای A مانند

X، 96×4 مجموعه ۴ عضوی خارج از A وجود دارد که با X دقیقا ۳ عضو مشترک دارند و اجتماع این مجموعه ها تمام مجموعه های ۴ عضوی را تشکیل می‌دهد. پس تعداد کل زیر مجموعه‌های ۴ عضوی کمتر یا مساوی $n \times (1 + 96 \times 4)$ است(ممکن است تعدادی از این زیر مجموعه ها را چند بار شمرده باشیم). از طرفی می‌دانیم تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی $\binom{100}{4}$ است.
پس داریم:

$$385m \geq \binom{100}{4}$$

که با ساده سازی می‌توان نتیجه گرفت:

$$m \geq 10185$$

بنابراین می‌توان ۱۰۰۰۰ زیر مجموعه با خاصیت گفته شده داشت.

۵۳

در چند جایگشت از حروف کلمه management

آ. هر دو عبارت ma و ne وجود دارند؟

ب. عبارت ma وجود دارد و حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

ج. اولین حرف m قبل از اولین حرف n و چسبیده به آن قرار دارد و عبارت na نیز وجود دارد؟

د. هیچ یک از عبارت‌های mg و gn وجود ندارند؟

پاسخ.

آ. تعداد جایگشت‌های حروف غیر از m و n طبق جایگشت حروف با تکرار، برابر $\frac{6!}{2!2!}$ است. (هر یک از حروف a و e دوبار تکرار شده‌اند)
حال جایگاه حروف m و n را تعیین می‌کنیم. برای این کار، چهار حالت داریم:
(آ) حالتی که در آن هر کدام از عبارات ma و ne دوبار تکرار

شوند.بدین منظور، دو جایگاه برای قرار دادن دو حرف m داریم: قبل از حرف a که دو بار در عبارت تکرار شده است.(۱)
هم‌چنین دو جایگاه برای قرار دادن دو حرف n داریم: قبل از حرف e که دو بار در عبارت آمده است. (۲)
بدین ترتیب تعداد حالات ممکن موجود در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۱}\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۲}$$

(ب) حالتی که در آن عبارت ma دو بار و عبارت ne یک بار آمده باشد. در این صورت مانند قسمت آ دو جایگاه برای دو حرف m داریم: قبلا از حرف a که دو بار در عبارت تکرار شده است. (۱)
طبق حالت بیان شده، یکی از حروف n باید قبل از یکی از دو حرف e بیاید. در این حالت دو انتخاب برای قرار دادن یک حرف n داریم.(۲)
و در نهایت شش حالت برای قرار دادن حرف دوم n در عبارت خواهیم داشت. (دقت شود که دو عبارت ma و عبارت ne موجود در حروف در واقع یک کلمه محسوب می‌شود که همراه حروف g و t باقی‌مانده، ۶ انتخاب در اختیار ما خواهند گذاشت. لازم به ذکر است که ما مجاز نیستیم که این حرف n را قبل از حرف e باقی‌مانده در جایگشت حروف قرار دهیم چرا که به حالت آ می‌رسیم که یک بار آن را شمرده‌ایم.) (۳)
پس تعداد جایگشت‌های ممکن در این حالت به این صورت خواهد بود:

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۱}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{۲}\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{۳}$$

(ج) حالت سوم مشابه حالت دوم می‌باشد با این تفاوت که این بار دو بار عبارت ne و یک بار عبارت ma آمده باشد. نحوه‌ی شمارش تعداد حالات ممکن برای قرار دادن حرف n مشابه حالات قرار دادن حرف m در حالت ب است.(۱)
هم‌چنین حالات ممکن برای قرار دادن حرف m مشابه قرار دادن حرف n در حالت ب می‌باشد با این تفاوت که این بار مجاز به قرار دادن هر دو حرف n قبل از حرف e نمی‌باشیم.(۲) (۳)
تعداد نهایی مطابق زیر خواهد بود:

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۱}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{۲}\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{۳}$$

(د) حالت نهایی مختص به زمانی است که هر یک از عبارات ma و ne تنها یک بار آمده باشد. بدین منظور ابتدا یکی از دو حرف e موجود را برای قرار دادن حرف n قبل از آن انتخاب می کنیم.(۱)
سپس یکی از دو حرف a موجود را برای قرار دادن حرف m قبل از آن انتخاب می کنیم.(۲)
برای قرار دادن حرف m باقی‌مانده، ۶ حالت داریم. قبل و بعد همه‌ی عبارات و حروف ma، ne، t، g، e می‌توانیم حرف m راقرار دهیم. دقت شود که قبل از حرف a مجاز به قرار دادن حرف m نیستیم چرا که این حالت قبلا شمرده شده است.(۳)
در نهایت تعداد حالات ممکن برای قرار دادن حرف n را می‌شماریم که ۷ تاست. می‌توانیم قبل و بعد عبارات ma، ne، m، t، g، a حرف n را قرار دهیم. قابل ذکر است که در این حالت نمی‌توان قبل حرف e حرف n را قرار داد چون این حالت قبلا شمرده شده است. (۴)
بدین ترتیب حالت نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{۱}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{۲}\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{۳}\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{۴}$$

پس تعداد نهایی برای قرار دادن حروف m و n به طریق زیر می‌باشد:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۱}}_{ج}+\underbrace{\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۱}}_{ب}+\underbrace{\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۲}}_{آ}$$

$$+\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۷}{۱}}_{د}=۱۹۳$$

در نهایت پاسخ نهایی برابر $۱۹۳ \times \frac{۶!}{۲!۲!}$ است.

ب. ابتدا همه‌ی حروف غیر از دو حرف m را مطابق شرایط سوال می چینیم.
از میان ۸ جایگاه موجود برای ۸ حرف، ۴ جایگاه را برای چیدن حروف صدادار به ترتیب الفبایی می‌چینیم که فقط به یک صورت انجام می‌پذیرد. (۱)
سپس برای چهار حرف صامت باقی‌مانده، یعنی دو حرف n، t و g طبق جایگشت حروف باتکرار در ۴ جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم. (۲)

$$\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{۱}\times\underbrace{\frac{۴!}{۲!}}_{۲}$$

حال به دو صورت می‌توانیم دو حرف m را قرار دهیم به نحوی که حداقل یک عبارت ma تولید شود:

(آ) دو عبارت ma در جایگشت داشته باشیم. بدین ترتیب تنها کافیست در دو جایگاه قبل از حرف a دو حرف m را قرار دهیم. (۱)

(ب) فقط یک عبارت ma داشته‌باشیم. در این صورت ابتدا نیاز است از بین دو جایگاه موجود قبل دو حرف a یکی را برای قرار دادن حرف m انتخاب کنیم. (۲)
سپس از بین جایگاه‌های باقیمانده یک جایگاه را برای قرار دادن دومین m انتخاب کنیم. دقت شود که مجاز به قرار دادن m

قبل از حرف a باقی‌مانده نیستیم چرا که این حالت در قسمت آ شمرده شده است. هم‌چنین عبارت ma یک حرف در نظر گرفته شده و قبل و بعد آن هر کدام یک جایگاه به حساب می‌آید. (۳)

در نهایت تعداد حالات موجود برای قرار دادن حرف m به صورت زیر می‌باشد:

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۱} + \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{۲}\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{۳} = ۱۷$$

در نهایت پاسخ نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\binom{۸}{۴} \times \frac{۴!}{۲!} \times ۱۷$$

ج. ابتدا تعداد جایگشت‌های حروف غیر از a که اولین m قبل از اولین n و چسبیده به آن آمده‌باشد را می‌شماریم. به این منظور عبارت mn را یک عبارت مستقل در نظر می‌گیریم. حال به غیر از دو حرف m و n و عبارت mn، چهار حرف داریم که در آن e دوبار تکرار شده است. از هفت جایگاه موجود برای کلمات، چهار جایگاه آن را برای قرار دادن این حروف انتخاب می‌کنیم(۱)

سپس طبق جایگشت باتکرار، آن‌ها را در جایگاه‌های انتخاب شده می‌چینیم. (۲)

حال در میان سه جایگاه باقیمانده، طبق خواسته‌ی سوال، جایگاه اول متعلق به mn می‌باشد (اولین حرف m قبل از اولین حرف n وچسبیده به آن قرار داشته باشد) و در دو جایگاه باقی‌مانده دو حرف m و n را به دو صورت می‌توانیم قرار دهیم. (۳)

بدین ترتیب حالات قرار دادن حروف به غیر از a به صورت زیر خواهد

بود:

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{۱} \times \underbrace{\frac{۴!}{۲!}}_{۲} \times \underbrace{۲}_{۳}$$

حال باید حرف a را در عبارت قرار دهیم. به این منظور مشابه قسمت قبل، دو حالت داریم:

(آ) هر دو حرف a بعد از دو حرف n قرار داشته باشد. در این صورت کافیست دو حرف a را بعد از دو حرف n موجود در جایگشت قرار دهیم.(۱)

(ب) فقط یک عبارت na در کلمه داشته‌باشیم. در این صورت ابتدا از میان دو جایگاه موجود پس از دو حرف n در کلمه، یکی را انتخاب می‌کنیم و یک حرف a را قرار می‌دهیم. سپس از میان ۷ جایگاه ممکن، یکی را برای حرف n باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم. توجه شود که عبارت mn و na ایجاد شده را یک کلمه در نظر می‌گیریم. هم‌چنین مجاز به قرار دادن حرف a پس از حرف n باقی‌مانده نیستیم چرا که این حالت در قسمت آ شمرده شده است.(۲)

بنابراین تعداد حالات قرار دادن حرف a به صورت زیر می‌باشد:

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۱} + \underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۱}}_{۲} = ۱۵$$

پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$\binom{۷}{۴} \times \frac{۴!}{۲!} \times ۲ \times ۱۵$$

د. تعداد جایگشت حروف غیر از m طبق حروف باتکرار به صورت زیر خواهد بود: (حروف n و e و a هر کدام دوبار تکرار شده‌اند.)

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!}$$

از طرفی تعداد جایگشت‌هایی از میان جایگشت‌های فوق که عبارت gn داشته باشد را محاسبه می‌کنیم. برای این کار کافیست عبارت gn را یک حرف در نظر بگیریم. حال طبق جایگشت حروف باتکرار، دو حرف a و e هرکدام دوبار تکرار شده‌اند. پس تعداد جایگشت‌هایی که این شرایط را داشته‌باشند به صورت زیر است:

$$\frac{۷!}{۲!۲!}$$

حال به جایگذاری دو حرف m باقی‌مانده می‌پردازیم. برای این کار، دو حالت داریم:

(آ) عبارت gn در کلمه‌ی فعلی نباشد:
در این صورت، یا یکی از ۸ جایگاه ممکن را انتخاب می‌کنیم و هر دو حرف m را دقیقا کنار هم می‌گذاریم. (۱)
و یا اینکه از ۸ جایگاه موجود، دو جایگاه را انتخاب کرده و دو حرف m را قرار می‌دهیم. دقت شود که دو حرف یکسان می‌باشد و ترتیب جایگذاری آن اهمیتی ندارد.(۲) قابل ذکر است که طبق خواسته‌ی سوال نباید عبارت mg در جایگشت موجود داشته‌باشیم، به همین دلیل، ۸ انتخاب داریم.(قبل و بعد تمام حروف موجود به جز قبل از حرف g در جایگشت)

$$\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{۱}+\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{۲}$$

(ب) عبارت gn در کلمه‌ی فعلی وجود داشته‌باشد:
در این صورت حتما باید یک حرف m میان دو حرف g و n قرار دهیم تا عبارت gn دیگر وجود نداشته باشد. سپس از ۸ جایگاه باقی‌مانده یک جایگاه را برای قرار دادن حرف دوم m انتخاب می‌کنیم. دقت شود تعداد انتخاب‌های موجود برای قرار دادن حرف m هشت‌تاست چرا که علاوه بر آنکه قبل حرف

g نمی‌توانیم حرف m را قرار دهیم، قرار دادن آن قبل و بعد حرف m موجود در کلمه، یک حالت به شمار می‌آید. پس در نهایت ۸ انتخاب خواهیم داشت.

$$\binom{۸}{۱}$$

بدین ترتیب پاسخ نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$(\frac{۸!}{۲!۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!۲!})(\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲}) + \frac{۷!}{۲!۲!} \times \binom{۸}{۱}$$

۵۴

ثابت کنید تعداد حالت‌های رنگ‌آمیزی یک جدول ۱۰ × ۱۰ به دو رنگ سیاه و سفید، به طوری که هیچ دو خانه سیاهی مجاور ضلعی نباشند بین $۲^{۵۰}$ و $۳^{۵۰}$ است.

پاسخ.

ابتدا جدول را به صورت شطرنجی رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در این صورت هیچ دو خانه‌ی سیاهی مجاور ضلعی نخواهند بود. حال اگر هر کدام از خانه‌های سیاه را سفید کنیم، همچنان هیچ دو خانه‌ی سیاهی مجاور ضلعی نخواهند بود. پس جدول را به حداقل $۲^{۵۰}$ حالت می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. دقت کنید که تعداد حالات‌رنگ آمیزی بیشتر از این است چون برای شطرنجی کردن جدول دو حالت وجود دارد.
حال جدول را به ۵۰ مستطیل ۱×۲ افراز میکنیم. هر یک از این مستطیل‌ها را می‌توان به حداکثر ۳ حالت رنگ‌آمیزی کرد (هر دو خانه نمی‌توانند سیاه باشند جون با هم مجاورند). پس جدول را به حداکثر $۳^{۵۰}$ حالت می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. دقت کنید که تعداد حالات رنگ‌آمیزی کمتر از این است چون رنگ‌آمیزی مستطیل‌ها مستقل از هم نیست و تعداد حالات رنگ‌آمیزی یک مستطیل با توجه با مستطیل‌های اطرافش می‌تواند کمتر از ۳ باشد.

در نتیجه:

$$۲^{۵۰} <$$ تعداد حالات رنگ‌آمیزی مناسب $$< ۳^{۵۰}$$

۵۵

اگر تعداد راه‌های قرار دادن n شی متمایز در k دسته یکسان به طوری که هیچ دسته‌ای خالی نماند، به صورت $\left\{{n \atop k}\right\}$ نشان داده‌شود، رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\left\{{n+۱ \atop k+۱}\right\} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left\{{i \atop k}\right\}$$

پاسخ.

تعداد راه‌های قرار دادن $n+۱$ شی متمایز در $k+۱$ دسته یکسان به صورتی که هیچ دسته‌ای خالی نماند($\left\{{n+۱ \atop k+۱}\right\}$) را به صورت زیر می‌شماریم:
در ابتدا انتخاب می کنیم که کدام اشیا با شی اول در یک دسته قرار دارند، اگر تعداد این اشیا $j, (۰ \leq j \leq n-k)$ باشد، تعداد اشیای باقی‌مانده جهت قرار دادن در سایر دسته‌ها برابر i خواهد بود که به صورت $i = n-j, (k \leq i \leq n)$ تعریف می‌شود و این انتخاب به ازای هر j، $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} = \binom{n}{i}$ حالت دارد.
قرار دادن $n-j$ شی باقی مانده در دسته ها هم $\left\{{n-j \atop k}\right\} = \left\{{i \atop k}\right\}$ حالت خواهد داشت.
در نهایت با جمع زدن همه حالات ممکن برای i به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\left\{{n+۱ \atop k+۱}\right\} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left\{{i \atop k}\right\}$$

۵۶

فرض کنید $a_k (۰ \leq k \leq ۲n)$، ضریب x^k در بسط $(۱ + x + x^۲)^n$ باشد.

آ. به ازای هر $k (۰ \leq k \leq n)$، ثابت کنید $a_{n-k} = a_{n+k}$

ب. ثابت کنید

$$a_۰a_۱ - a_۱a_۲ + a_۲a_۳ - \ldots - a_{۲n-۱}a_{۲n} = ۰$$

ج. از تساوی

$$(۱ + x + x^۲)(۱ - x + x^۲) = ۱ + x^۲ + x^۴$$

استفاده کرده و ثابت کنید

$$a_۰^۲ - a_۱^۲ + a_۲^۲ - \ldots + (-۱)^{n-۱}a_{n-۱}^۲ = \frac{۱}{۲}(a_n + (-۱)^{n+۱}a_n^۲)$$

د. ثابت کنید حاصل عبارت

$$\binom{n}{۰}a_r - \binom{n}{۱}a_{r-۱} + \binom{n}{۲}a_{r-۲} - \ldots + (-۱)^r\binom{n}{r}a_۰$$

وقتی که r مضرب ۳ نیست برابر صفر و وقتی که $r = ۳s$ برابر $(-۱)^s\binom{n}{s}$ است.

پاسخ.

آ. طبق قضیه‌ی چندجمله‌ای برای هر عدد n طبیعی و هر عدد مثبت m فرمول ضرایب چند جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_m)^n =$$

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

حال بر حسب چندجمله‌ای داده‌شده، عبارت فوق را تعریف می‌کنیم. برای ساده‌سازی فرض کنید در این تعریف توان جمله‌ی اول، یعنی n_1 را برابر a ، توان جمله‌ی دوم یعنی n_2 را برابر b و توان جمله‌ی سوم یعنی n_3 را برابر c در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^n &= \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x_1^a x_2^b x_3^c \\ &= \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} 1^a x^b (x^2)^c \\ &= \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^{b+2c}\end{aligned}$$

در نهایت چندجمله‌ای داده شده به فرم بالا ساده می‌شود. حال سه‌تایی (a', b', c') را در نظر می‌گیریم که در شرایط تعریف فوق صدق کند.$(a'+b'+c'=n)$ اگر این سه‌تایی جملهٔ x^{n+k} تولید کند، در این صورت سه‌تایی (c', b', a') جملهٔ x^{n-k} را تولید می‌کند زیرا:

$$b'+2a' = 2(a'+b'+c')-(b'+2c') = 2n-(n+k) = n-k$$

حال در جهت عکس ثابت می‌کنیم که یک سه‌تایی که جمله‌ی x^{n-k} را تولید می‌کند، می‌تواند جمله‌ی x^{n+k} را تولید کند. بدین منظور فرض کنید سه‌تایی (c'', b'', a'') در شرط موجود در عبارت صدق کند $(c''+b''+a''=n)$ و جمله‌ی x^{n-k} را تولید کند. در این صورت سه‌تایی (a'', b'', c'') طبق رابطه‌ی زیر، جمله‌ی x^{n-k} را تولید می‌کند:

$$b''+2c'' = 2(a''+b''+c'')-(b''+2a'') = 2n-(n-k) = n+k$$

در ضمن ضریب جملهٔ متناظر با سه‌تایی (a', b', c') با ضریب جملهٔ سه‌تایی متناظر با (c', b', a') طبق رابطه‌ی بیان شده در ابتدای سوال برابر است و لذا $a_{n+k} = a_{n-k}$.

ب. با توجه به قسمت (الف)

$$a_۰ = a_{۲n}, \quad a_۱ = a_{۲n-۱}, \quad a_۲ = a_{۲n-۲}, \dots, \quad a_{n-۱} = a_{n+۱}$$

و لذا در عبارت داده شده، جملات دو به دو قرینهٔ یکدیگرند.

$$\begin{aligned} ۲A &= a_۰a_۱ - a_۱a_۲ + a_۲a_۳ - \cdots - a_{۲n-۱}a_{۲n} \\ &+ a_{۲n}a_{۲n-۱} - a_{۲n-۱}a_{۲n-۲} + \cdots - a_۱a_۰ \\ &\Rightarrow ۲A = ۰ \Rightarrow A = ۰ \end{aligned}$$

ج. با توجه به راه حل قسمت (الف)، a_k برابر مجموع اعداد به صورت $\frac{n!}{a!b!c!}$ است که در آن:

$$a + b + c = n$$

$$b + ۲c = k$$

حال اگر b_k را ضریب x^k در بسط $(۱ - x + x^۲)^n$ بگیریم، در این صورت b_k برابر مجموع اعداد $\frac{(-۱)^b n!}{a!b!c!}$ است (طبق قضیه‌ی چندجمله‌ای به دست می‌آید) که در آن:

$$a + b + c = n$$

$$b + ۲c = k$$

پس اگر k زوج باشد، b نیز زوج است (طبق قید فوق) و $b_k = a_k$ و اگر k فرد باشد، b نیز فرد است و $b_k = -a_k$.

همچنین چون a_k ضریب x^k در بسط $(1+x+x^2)^n$ است، پس ضریب x^{2k} در بسط $(1+x^2+x^4)^n$ برابر a_k است. زیرا:

$$(1+x^2+x^4)^n = \sum_{a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^{2b+4c}$$

بنابراین ضریب a_{2k} برابر مجموع اعداد $\frac{n!}{a!b!c!}$ است که در آن $a+b+c=n$ و $2b+4c=2k$ که برابر a_k است. حال تساوی

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n = (1+x^2+x^4)^n$$

را در نظر بگیرید. ضریب x^{2n} در سمت راست برابر a_n و در سمت چپ برابر

$$a_0b_{2n} + a_1b_{2n-1} + a_2b_{2n-2} + \cdots + a_{2n}b_0$$

است. با توجه به اینکه

$$b_{2n} = a_{2n} = a_0, \quad b_{2n-1} = -a_{2n-1} = -a_1,$$

$$b_{2n-2} = a_{2n-2} = a_2, \quad \ldots$$

نتیجه می گیریم عبارت فوق برابر است با

$$a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \cdots + a_{2n}^2 =$$

$$2(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}^2) + (-1)^n a_n^2$$

چنانچه عبارت اخیر را برابر a_n قرار دهیم، حکم ثابت می‌شود.

د. تساوی

$$(1+x+x^2)^n(1-x)^n = (1-x^3)^n$$

را در نظر بگیرید. ضریب x^r در سمت چپ این تساوی برابر است با

$$\binom{n}{۰}a_r - \binom{n}{۱}a_{r-۱} + \binom{n}{۲}a_{r-۲} - \cdots + (-۱)^r\binom{n}{r}a.$$

زیرا اگر i تا x را از $(۱+x+x^۲)^n$ انتخاب کنیم، باید $r-i$ تای دیگر از $(۱-x)^n$ انتخاب شوند. ضریب x^r در سمت راست تساوی وقتی r مضرب ۳ نیست برابر صفر و وقتی $r=۳s$ برابر $(-۱)^s\binom{n}{s}$ است.

۵۷

۱۰ مهره‌ی شاه در یک صفحه شطرنجی ۹ × ۹ قرار دارند. ثابت کنید خانه‌ای در این صفحه وجود دارد که توسط حداقل دو تا از این مهره‌ها تهدید می‌شود.

پاسخ.

اگر خانه‌های این صفحه شطرنجی را به ۹ مربع ۳ × ۳ تقسیم کنیم، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو مهره شاه در یک دسته قرار می‌گیرند و اگر دو مهره شاه در یک مربع ۳ × ۳ قرار داشته باشند، خانه‌ای وجود دارد که توسط هر دوی این مهره‌ها تهدید می‌شود. بدین ترتیب حکم مسأله ثابت می‌شود.

۵۸

بهزاد که یک دانشجوی نمونه است؛ این ترم برای خود برنامه‌ریزی کرده است که از شروع ترم، هر هفته ۲۱ ساعت درس بخواند و ۱۵ ساعت بازی کند. بهزاد می‌تواند با تبلت، گوشی و یا لپ‌تاپ خود درس بخواند؛ در حالیکه برای بازی کردن، به لپ‌تاپ و یا کنسولش نیاز دارد. برای صرفه‌جویی در مصرف برق، بهزاد تصمیم گرفته است که این چهار وسیله‌ی الکترونیکی را فقط یک بار در اول هفته شارژ کند.

اگر بدانیم که تبلت و گوشی او ۱۰ ساعت، لپ‌تاپ او فقط ۸ ساعت و کنسولش ۱۲ ساعت شارژ نگه می‌دارد؛ بهزاد به چند طریق می‌تواند وقت خود را بین این

چهار دستگاه تقسیم کند؟(از آنجایی که بهزاد می‌خواهد برنامه‌ریزی‌اش تا جای ممکن ساده باشد، در هر ساعت از روز فقط از یکی از وسایل استفاده می‌کند و نمی‌خواهد بازه‌های استفاده‌ی خود را به دقیقه تقسیم کند.)

پاسخ.

تعداد ساعتی که بهزاد از تبلت، گوشی و لپ‌تاپ برای درس و لپ‌تاپ و کنسول برای بازی استفاده می‌کند را به ترتیب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $y_۳$، $x_۴$ می نامیم. با توجه به صورت مسئله داریم:

$$x_۱, x_۲ \leq ۱۰$$

$$x_۳ + y_۳ \leq ۸, x_۴ \leq ۱۲$$

و با توجه به تعداد ساعتی که بهزاد می‌خواهد بازی کند و درس بخواند داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۱$$

$$y_۳ + x_۴ = ۱۵$$

با کمی تامل می‌توان فهمید که حتی در حالت حداکثری $x_۱$ و $x_۲$ حداقل مقدار $x_۳$ برابر با ۱ است و به همین ترتیب در معادله دوم حداقل مقدار $y_۳$ برابر ۳ است که حداکثر $x_۳$ را طبق $x_۳ + y_۳ \leq ۸$ به مقدار ۵ کاهش می‌دهد. با در نظر داشتن کران‌های جدید و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول روی $x_۳$ حالت‌بندی می‌کنیم:

$$\sum_{x_۳=۱}^{۵} \underbrace{\binom{۲۲ - x_۳}{۱}\binom{۱۶}{۱}}_{\text{کل حالات}} - \underbrace{۲\binom{۱۱ - x_۳}{۱}\binom{۱۶}{۱}}_{x_۱>۱۰ \text{ یا } x_۲>۱۰} -$$

$$\underbrace{\binom{۲۲ - x_۳}{۱}\binom{۷ + x_۳}{۱}}_{y_۳>۸-x_۳} - \underbrace{\binom{۲۲ - x_۳}{۱}\binom{۳}{۱}}_{x_۴>۱۲} +$$

$$\underbrace{2\binom{11-x_3}{1}\binom{7+x_3}{1}}_{x_1>10,y_3>8-x_3 \text{ یا } x_2>10,y_3>8-x_3} + \underbrace{2\binom{11-x_3}{1}\binom{3}{1}}_{x_1>10,x_4>12 \text{ یا } x_2>10,x_4>12}$$

$$= \sum_{x_3=1}^{5}(22-x_3)(16-7-x_3-3) - 2(11-x_3)(16-7-x_3-3)$$

$$= \sum_{x_3=1}^{5}(6-x_3)(22-x_3-2(11-x_3)) = \sum_{x_3=1}^{5}(6-x_3)(x_3) = 35$$

۵۹

$3n$ توپ متمایز در اختیار داریم. روی هریک از توپ‌ها یکی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ نوشته شده به طوری که هر یک از این اعداد دقیقا روی ۳ توپ نوشته شده‌است. می‌خواهیم این $3n$ توپ را به n دسته طوری تقسیم کنیم که در هر دسته، سه توپ قرار گیرد و اعداد نوشته شده روی حداقل دو توپ یکسان نباشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ.

ابتدا به بررسی حالت‌های نامطلوب جهت حذف کردن از تعداد حالات کلی، می‌پردازیم. در این مساله، حالت نامطلوب زمانی اتفاق می‌افتد که حداقل دسته‌ای وجود داشته باشد که اعداد روی هر سه توپ یکسان باشند. بنابراین روی تعداد دسته‌هایی که می‌توانند این ویژگی را داشته باشند حالت بندی می‌کنیم:

آ. اعداد روی هر سه توپ یک دسته، یکسان باشند که تعداد راه‌های

دسته‌بندی به این صورت می‌شود:

$$\underbrace{\binom{n}{۱}}_{۱}\underbrace{(۳n-۳)!}_{۲}\underbrace{\frac{۱}{(۳!)^{n-۱}}}_{۳}\underbrace{\frac{۱}{(n-۱)!}}_{۴}$$

یک عدد را انتخاب می‌کنیم تا در یک دسته قرار بگیرند. (۱)
بقیه اعداد را در یک ردیف می‌چینیم. (۲)
و چون ترتیب اعداد درون دسته‌ها بی‌اهمیت است، باید تقسیم بر $(۳!)^{n-۱}$ کنیم. (۳)
از اول ردیف سه‌تا سه‌تا توپ‌ها را در یک دسته قرار می‌دهیم. در این صورت $n-۱$ دسته (غیر از دستهٔ اولی که جدا کردیم) داریم. ولی جایگشت این دسته‌ها برای ما اهمیتی ندارد بنابراین باید جواب را بر $(n-۱)!$ تقسیم کنیم. (۴)

ب. اعداد روی هر سه توپ دو دسته، یکسان باشند که تعداد راه‌های دسته‌بندی مانند بالا خواهد بود و به این صورت می‌شود:

$$\binom{n}{۲}(۳n-۶)!\frac{۱}{(۳!)^{n-۲}}\frac{۱}{(n-۲)!}$$

ج. اعداد روی هر سه توپ n دسته، یکسان باشند که تعداد راه‌های دسته بندی به این صورت می‌شود:

$$\binom{n}{n}(۳n-۳n)!\frac{۱}{(۳!)^{n-n}}\frac{۱}{(n-n)!}$$

از طرفی تعداد کل حالات به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{۱}{n!}\frac{(۳n)!}{(۳!)^{n}}$$

در واقع برای محاسبه‌ی تعداد حالات کل، به این صورت که $۳n$ توپ را در یک ردیف می‌چینیم و چون جایگشت دسته‌ها اهمیتی ندارد، تقسیم بر $n!$ می‌کنیم.

بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول حالات مطلوب برابر خواهد بود با:

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}\frac{۱}{(n-i)!}\frac{(۳n-۳i)!}{(۳!)^{n-i}}$$

۶۰

به سوالات زیر با توجه به توابع مولد پاسخ دهید:

آ. تابع مولد دنباله‌ی $۱,۱,۱,۱,۱,۰,۰,۰,۱,۱,\dots$ را پیدا کنید.

ب. تابع مولد دنباله‌ی $۱,۱,۱,۴,۳,۵,۶,۲,۱,۱,۱,۱,\dots$ را پیدا کنید.

ج. سینا می‌خواهد تعدادی تیله از بین رنگ‌های آبی، زرشکی، سبز و بنفش انتخاب کند به صورتی که تعداد تیله‌های آبی حتما زوج باشد، تعداد تیله‌های زرشکی مضرب ۱۳ باشند، تعداد تیله‌های سبز بیشتر از ۷ نباشد و تعداد تیله‌های بنفش از ۳ بیشتر باشد. اگر تابع $S(n)$ را تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب n تیله تعریف کنیم، تابع مولد S را بیابید.

پاسخ.

هدف از دو بخش اول این سوال آشنا کردن شما با تابع مولد معروف دنباله‌ی

$$۱,۱,۱,۱,۱,۱,\dots$$

می‌باشد. تابع مولد این دنباله $\frac{۱}{۱-x}$ است. اثبات این رابطه نیز با استفاده از رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$۱=(۱-x)(۱+x+x^۲+x^۳+\dots)\rightarrow\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^۲+x^۳+\dots$$

که عبارت نهایی تابع مولد دنباله‌ی

$$۱,۱,۱,۱,۱,۱,\dots$$

است. حال که این موضوع را می‌دانیم به حل سوال می‌پردازیم.

آ. برای حل این قسمت باید به سادگی ضرایب جمله های ۵ و ۶ و ۷ را از دنباله عادی

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۱, \ldots$$

کم کنیم. داریم:

$$S_۱(n) = \frac{۱}{۱-x} - x^۵ - x^۶ - x^۷$$

ب. برای حل این قسمت هم مانند قسمت الف عمل می کنیم با این تفاوت که در این قسمت جمله‌های ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ با دنباله عادی متفاوت هستند. پس برای اینکه ضرایب را با دنباله مد نظر سوال یکی کنیم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$S_۲(n) = \frac{۱}{۱-x} + ۳x^۳ + ۲x^۴ + ۴x^۵ + ۵x^۶ + x^۷$$

ج. در این قسمت با استفاده از آموخته‌های خود از دو قسمت قبل و هم‌چنین توابع مولد عمل می کنیم. ابتدا برای هر کدام از شروط تابع مولد می‌نویسیم و سپس تابع مولد نهایی ما برابر حاصل‌ضرب تمامی توابع مولد به دست‌آمده خواهد بود. طبق این توضیحات به بررسی هر یک از شروط موجود در صورت سوال می‌پردازیم.

- تیله‌های آبی باید زوج باشند:

$$S'_۱ = ۱ + x^۲ + x^۴ + \ldots = \frac{۱}{۱-x^۲}$$

- تیله‌های زرشکی باید مضرب ۱۳ باشند:

$$S'_۲ = ۱ + x^{۱۳} + x^{۲۶} + \ldots = \frac{۱}{۱-x^{۱۳}}$$

- تیله‌های سبز باید کوچک‌تر مساوی ۷ باشند:

$$S'_۳ = ۱ + x + x^۲ + \ldots + x^۷ = \frac{۱-x^۸}{۱-x}$$

- تیله‌های بنفش از سه بیشتر باشند:

$$\begin{aligned} S'_4 &= x^4 + x^5 + x^6 + \dots \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - (1 + x + x^2 + x^3) \\ &= (\frac{1}{1-x}) - (\frac{1-x^4}{1-x}) = \frac{x^4}{1-x} \end{aligned}$$

همان‌گونه که بیان شد، تابع $S(n)$ حاصل‌ضرب توابع مولد فوق می‌باشد. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$S(n) = \frac{x^4(1-x^8)}{(1-x)^2(1-x^{13})(1-x^2)}$$

۶۱

فرض کنید $m \leq n$. ثابت کنید:

$$\frac{\binom{m}{0}}{\binom{n}{0}} + \frac{\binom{m}{1}}{\binom{n}{1}} + \frac{\binom{m}{2}}{\binom{n}{2}} + \dots + \frac{\binom{m}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{n-m+1}$$

پاسخ.

سمت چپ معادله برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\frac{m!}{k!(m-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}}{\frac{n!}{(n-m)!m!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} \overset{\text{i = m - k}}{=\!=\!=} \frac{\sum_{i=0}^{m} \binom{n-m+i}{i}}{\binom{n}{m}} \overset{\text{چوشی‌چی}}{=\!=\!=} \frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}}$$

$$= \frac{\frac{(n+۱)!}{m!(n-m+۱)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{n+۱}{n-m+۱}$$

۶۲

دو اتحاد زیر را اثبات کنید:

آ.

$$\sum_{i=۰}^{n} ۲^{۲n-۲i}\binom{۲n}{۲n-۲i}\binom{۲i}{i} = \binom{۴n}{۲n}$$

ب.

$$\sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^{۲} = n\binom{۲n-۱}{n-۱}$$

پاسخ.

آ. هر دو طرف تساوی تعداد حالات انتخاب $۲n$ نفر از بین $۲n$ زوج را می‌شمارند.
یک حالت شمارش، انتخاب $۲n$ نفر از بین $۲n$ زوج یا همان $۴n$ نفر است : $\binom{۴n}{۲n}$
اما حالت دیگر، حالت بندی روی تعداد مردانی است که همراه همسرشان انتخاب می‌شوند :

$$\underbrace{\sum_{i=۰}^{n}}_{۱} \underbrace{۲^{۲n-۲i}}_{۳} \underbrace{\binom{۲n}{۲n-۲i}}_{۲} \underbrace{\binom{۲i}{i}}_{۴}$$

در این حالت ابتدا مردانی را در نظر می‌گیریم که یا فقط خودشان یا فقط همسرشان انتخاب می‌شوند و تعداد باقی‌مانده اختصاص به مردانی دارند که همراه همسرشان انتخاب می‌شود.

طبق توضیحات فوق، برای انتخاب $2n$ نفر از بین $2n$ زوج، متغیر i نشان‌دهنده‌ی تعداد مردانی است که همراه همسرشان انتخاب می‌شوند و از 0 تا n متغیر است. (۱)
ابتدا $2n - 2i$ زوج از بین $2n$ زوج بر می‌داریم. (۲)
سپس از هر کدام از $2n - 2i$ زوج برداشته‌شده، زن یا مرد را انتخاب می‌کنیم (هر زوج دو حالت دارد). (۳)
در آخر از $2i$ زوج باقی‌مانده i زوج را انتخاب می‌کنیم (i مرد به همراه همسرانشان). (۴)
بدین ترتیب در نهایت داریم:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{2n-2i}\binom{2n}{2n-2i}\binom{2i}{i} = \binom{4n}{2n}$$

ب. فرض کنید P بیانگر تعداد راه‌های انتخاب یک انجمن علمی n نفره از بین n دانشجوی کامپیوتر و n دانشجوی برق و انتخاب یک دانشجوی کامپیوتر به عنوان مدیر انجمن است. این کار به دو روش امکان‌پذیر است:
ابتدا یکی از دانشجوهای کامپیوتر را به عنوان مدیر انجمن انتخاب می‌کنیم که به n حالت انجام می‌شود.(۱)
سپس $n - 1$ عضو دیگر انجمن را از $2n - 1$ دانشجوی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.(۲)

$$P = \underbrace{n}_{1}\underbrace{\binom{2n-1}{n-1}}_{2}$$

حالت دیگر آن است که ابتدا k عضو انجمن را از دانشجوهای کامپیوتر انتخاب کنیم.(۱)
سپس $n - k$ عضو دیگر را از دانشجوهای برق انتخاب می‌کنیم.(۲)

در نهایت یکی از k دانشجوی کامپیوتر عضو انجمن را به عنوان مدیر انجمن انتخاب خواهیم کرد.(۳)

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{۱}\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{۲}\times\underbrace{k}_{۳}=k\binom{n}{k}^{۲}$$

حال بسته به این که k برابر $۱, ۲, \ldots$ یا n باشد، داریم:

$$\begin{aligned} P &= ۱\binom{n}{۱}^{۲}+۲\binom{n}{۲}^{۲}+\ldots+n\binom{n}{n}^{۲} \\ &= \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^{۲} \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که از آنجاییکه که قرار است یکی از دانشجوهای کامپیوتر به عنوان مدیر انتخاب شود، همواره شرط $۱ \leq k$ برقرار است.
از تساوی دو حالت فوق حکم مسأله ثابت می‌شود:

$$\sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^{۲}=n\binom{۲n-۱}{n-۱}$$

تمرین‌ها

این بخش هنوز آماده نشده است.

فصل ۳

دنباله‌های بازگشتی

این فصل هنوز آماده نشده است.

فهرست مطالب

حل روابط بازگشتی خطی

در بخش های قبل با روابط بازگشتی و برخی روش‌های حل آن‌ها آشنا شدیم، در این بخش به بررسی روابط بازگشتی خطی می‌پردازیم، ویژگی مهم این دسته از روابط بازگشتی این است که می‌توان آن‌ها را به روشی سیستماتیک حل کرد.

حل روابط بازگشتی خطی همگن

رابطه بازگشتی خطی همگن از درجه k رابطه‌ای به فرم

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

است که $\forall i : c_i \in \mathbb{R}$ و $c_k \neq 0$

مثلا رابطه $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ یک رابطه خطی همگن از درجه ۲ است.

اگر رابطه بازگشتی خطی همگن به فرم

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

داشته باشیم، به معادله

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

معادله مشخصه رابطه بازگشتی می گوییم. جواب های این معادله ریشه های مشخصه نامیده می‌شوند.

۱

نشان دهید $a_n = r^n$ جواب رابطه بازگشتی است، اگر و تنها اگر r ریشه معادله مشخصه آن باشد.

پاسخ.
$a_n = r^n$ جواب معادله بازگشتی است اگر و تنها اگر در رابط بازگشتی صدق بکند.

$$a_n = c_۱ a_{n-۱} + c_۲ a_{n-۲} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

$$r^n = c_۱ r^{n-۱} + c_۲ r^{n-۲} + \ldots + c_k r^{n-k}$$

از تقسیم طرفین بر r^{n-k} داریم:

$$r^k = c_۱ r^{k-۱} + c_۲ r^{k-۲} + \ldots + c_k$$

حال ابتدا به بیان روش حل معادله مشخصه درجه دوم می‌پردازیم

قضیه ۱: رابطه بازگشتی درجه دوم $a_n = c_۱ a_{n-۱} + c_۲ a_{n-۲}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید که معادله مشخصه آن دارای دو ریشه حقیقی و متمایز $r_۱$ و $r_۲$ است. در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جواب مسئله است اگر و تنها اگر

$$a_n = \alpha_۱ r_۱^n + \alpha_۲ r_۲^n$$

که $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ اعداد ثابت هستند.

۲

جواب رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$ را در صورتی که $a_. = ۲$ و $a_۱ = ۷$ باشد به دست آورید.

پاسخ.
معادله مشخصه این رابطه $r^۲ - r - ۱ = ۰$ است که ریشه های آن $r_۱ = ۲$ و $r_۲ = -۱$ است. طبق قضیه ۱، جواب $\{a_n\}$ به فرم زیر است:

$$a_n = \alpha_۱ ۲^n + \alpha_۲(-۱)^n$$

که $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ اعداد ثابت هستند. حال از جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$a_۰ = \alpha_۱ + \alpha_۲ = ۲$$

$$a_۱ = ۲\alpha_۱ - \alpha_۲ = ۷$$

$$\to \alpha_۱ = ۳$$

$$\to \alpha_۲ = -۱$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$a_n = ۳ \times ۲^n - (-۱)^n$$

قضیه ۲: رابطه بازگشتی درجه دوم $a_n = c_۱a_{n-۱} + c_۲a_{n-۲}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید که معادله مشخصه آن دارای یک ریشه حقیقی $r_۱$ است. در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جواب مسئله است اگر و تنها اگر

$$a_n = \alpha_۱ r_۱^n + \alpha_۲ n r_۱^n$$

که $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ اعداد ثابت هستند.

۳

جواب رابطه بازگشتی $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ را در صورتی که $a_0 = 1$ و $a_1 = 6$ باشد به دست آورید.

پاسخ.
معادله مشخصه این رابطه $r^2 - 6r + 9 = 0$ است که ریشه آن $r_1 = 3$ است.
طبق قضیه ۲، جواب $\{a_n\}$ به فرم زیر است:

$$a_n = \alpha_1 3^n + n\alpha_2 (3)^n$$

که α_1 و α_2 اعداد ثابت هستند. حال از جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$a_0 = \alpha_1 = 1$$

$$a_1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6$$

$$\rightarrow \alpha_2 = 1$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$a_n = 3^n + n3^n$$

حال می‌توان مطالب مطرح شده را برای رابطه بازگشتی درجه k تعمیم داد

قضیه ۳: رابطه بازگشتی درجه kام

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

را در نظر بگیرید، فرض کنید که معادله مشخصه آن دارای k ریشه حقیقی و متمایز $r_1, r_2, \ldots r_k$ است. در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جواب مسئله

است اگر و تنها اگر

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$$

که $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ اعداد ثابت هستند.

۴

نمونه سوال اضافه شود

قضیه ۴: رابطه بازگشتی درجه امk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

را در نظر بگیرید، فرض کنید که معادله مشخصه آن دارای t ریشه حقیقی و متمایز $r_1, r_2, ...r_t$ است که ریشه امi بار m_i تکرار شده است، $m_i \geq 1$ و $\sum_1^k m_i = k$ در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جواب مسئله است اگر و تنها اگر

$$a_n = (\alpha_{1,0} + n\alpha_{1,1} + ... + n^{m_1-1}\alpha_{1,m_1-1})r_1^n$$

$$+(\alpha_{2,0} + n\alpha_{2,1} + ... + n^{m_2-1}\alpha_{2,m_2-1})r_2^n$$

$$+...$$

$$+(\alpha_{t,0} + n\alpha_{t,1} + ... + n^{m_t-1}\alpha_{t,m_t-1})r_t^n$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{m_i-1} r^i (n^j \alpha_{i,j})$$

که $\alpha_{i,j}$ اعداد ثابت هستند.

۵

نمونه سوال اضافه شود

حل روابط بازگشتی خطی ناهمگن

رابطه بازگشتی خطی ناهمگن از درجه k رابطه‌ای به فرم

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

است که $F(n)$ ثابت صفر نباشد، $\forall i : c_i \in \mathbb{R}$ و $c_k \neq 0$

مثلا رابطه $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 3n + 2^n$ یک رابطه خطی ناهمگن از درجه ۲ است.

قضیه ۵: اگر $\{a_n^{(p)}\}$ جواب خاص رابطه بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

باشد، آنگاه همه جواب‌ها به فرم $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ است که $\{a_n^{(h)}\}$ جواب رابطه بازگشتی خطی همگن

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

است.

۶

تمام جواب‌های رابطه بازگشتی $a_n = ۴a_{n-۱} + ۳n$ را به دست آورید.

پاسخ.
برای حل این رابطه ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_n = ۴a_{n-۱}$ را حل می کنیم:
$a_n^{(h)} = \alpha ۴^n$
حال جواب خاص معادله را به دست می‌آوریم، با توجه به این که $F(n) =$ $۳n$ یک چند جمله‌ای است، حدس می‌زنیم که جواب می‌تواند به فرم $a_n =$ $cn + d$ باشد اگر چنین باشد داریم:

$$cn + d = ۴c(n - ۱) + ۴d + ۳n$$

$$\rightarrow n(-۳ - ۳c) + (-۳d + ۴c) = ۰$$

$$\rightarrow (-۳ - ۳c) = ۰ \rightarrow c = -۱$$

$$\rightarrow (-۳d + ۴c) = ۰ \rightarrow d = -\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow a_n^{(p)} = -n - \frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha ۴^n - n - \frac{۳}{۴}$$

قضیه ۶: اگر معادله بازگشتی خطی همگن به فرم

$$a_n = c_۱ a_{n-۱} + c_۲ a_{n-۲} + ... + c_k a_{n-k} + F(n)$$

داشته باشیم که

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-۱} n^{t-۱} + ... + b_۱ n + b_۰) s^n$$

باشذ آنگاه اگر s ریشه معادله مشخصه نباشد معادله دارای جواب خاصی به فرم

$$(p_t n^t + p_{t-۱} n^{t-۱} + ... + p_۱ n + p_۰) s^n$$

است و اگر s ریشه معادله مشخصه باشد و درجه آن m باشد، معادله دارای جواب خاصی به فرم

$$n^m (p_t n^t + p_{t-۱} n^{t-۱} + ... + p_۱ n + p_۰) s^n$$

است.

۷

نمونه سوال اضافه شود.

فصل ۴

جمع‌بندی

این فصل شامل مسائل و تمارینی ترکیبی از تمام فصل‌های کتاب است.

فهرست مطالب

اشتباه نکنید

این بخش هنوز آماده نشده است.

مسائل

این بخش هنوز آماده نشده است.

تمرین‌ها

۱. ۲۵ مادر و ۲۵ فرزند دور یک میز نشسته‌اند. ثابت کنید می‌توان کسی را پیدا کرد که هر دو فرد مجاورش مادر هستند.