

終対象はいつ有限表示か

Yuto Kawase

2024 年 12 月 5 日

概要

終対象が有限表示になるための条件を調べます。本稿は[圏論 Advent Calendar 2024](#)の5日目の記事です。

目次

Terminology	1
1 はじめに	2
2 終対象の表示可能性: 前層圏の場合	2
3 終対象の表示可能性: 局所表示可能圏の場合	2
付録/Appendix	
A 局所表示可能圏	3

Terminology

Set	小さい集合と写像の圏
$\mathbf{1}$	終圏 (terminal category)
1	1 点集合, 終対象
\mathcal{C}^{op}	圏 \mathcal{C} の反対圏
$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$	圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への関手圏
$\text{Ob}\mathcal{C}$	圏 \mathcal{C} の対象のなすクラス
$C \in \mathcal{C}$	$C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ の意
$\text{Mor}\mathcal{C}$	圏 \mathcal{C} の射のなすクラス
$\mathcal{C}(X, Y)$	圏 \mathcal{C} の Hom クラス
$X \xrightarrow{f} Y \text{ in } \mathcal{C}$	$f \in \mathcal{C}(X, Y)$ の意
id	恒等射
D/F	関手 $\mathbf{1} \xrightarrow{D} \mathcal{D} \xleftarrow{F} \mathcal{C}$ についてのコンマ圏 ($D \Rightarrow F$)
y	米田埋め込み
$\mathcal{A}_{\kappa\text{p}}$	κ -表示可能対象のなす \mathcal{A} の充満部分圏

1 はじめに

Categories in Tokyo 第1回集会で行われた未解決問題セッションにて、次のような問題が提示された:

“代数の圏の終対象はいつ有限表示か?”

本稿ではこの問題を少し一般化し, “代数の圏” として局所 κ -表示可能圏 (特に前層圏) を考え, 終対象が κ -表示可能になるための条件を調べる. また, 本稿では [Kaw24] の用語をいくつか流用している.

2 終対象の表示可能性: 前層圏の場合

\mathbf{Set} において κ -極限と κ -フィルター余極限は可換であり, 更にこの可換性は κ -フィルター余極限を特徴づけることが知られている.*1 次の定理は, 双対的に κ -フィルター余極限との可換性が κ -極限を特徴づけると主張している.

Theorem 2.1. *2 小圏 \mathbf{I} について次は同値.

- (i) 終対象 $1 \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ が κ -表示可能.
- (ii) \mathbf{Set} において \mathbf{I}^{op} 型極限と κ -フィルター (小) 余極限が可換.
- (iii) ある κ -小圏 \mathbf{J} と終関手 $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{I}$ が存在する.

Proof. [(i) \iff (ii)] 終対象が表現する関手 $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}(1, -)$ は, \mathbf{I}^{op} 型極限をとる関手 $\text{Lim}_{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ と自然同型である. よって主張が従う.

$$\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}} \xrightarrow[\text{Lim}_{\mathbf{I}^{\text{op}}}]{{\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}(1, -)}} \mathbf{Set}$$

[(iii) \implies (ii)] 仮定より \mathbf{I}^{op} 型極限は κ -極限へ帰着されるので, \mathbf{Set} において κ -極限と κ -フィルター (小) 余極限が可換であることから従う.

[(i) \implies (iii)] Fact A.7 より, 終対象 $1 \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ は表現可能関手の κ -余極限で書くことができる. すなわち, ある κ -小圏 \mathbf{J} と関手 $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$ が存在して,

$$\text{Colim}(\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}) \cong 1 \quad \text{in } \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}} \quad (1)$$

が成り立つ. 一方で, 各 $I \in \mathbf{I}$ に対し

$$(\text{Colim } y \circ F)(I) \cong \text{Colim}_{J \in \mathbf{J}} \mathbf{I}(I, FJ) \cong \pi_0(I/F) \quad \text{in } \mathbf{Set}$$

と計算できるので, (1) より $\pi_0(I/F) \cong 1$ を得る. したがって F は終関手である. \square

3 終対象の表示可能性: 局所表示可能圏の場合

Lemma 3.1. 局所小圏の間の随伴

$$\mathcal{A} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{B}$$

を考え, G が \mathcal{B} に存在する任意の κ -フィルター (小) 余極限を保つと仮定する. このとき, 任意の $A \in \mathcal{A}_{\kappa\text{p}}$ について $FA \in \mathcal{B}_{\kappa\text{p}}$ が成立する.

*1 このことは, 例えば [Kaw24] で扱われている.

*2 同様の主張が [Par90, Proposition 7] に書かれているが, その証明にギャップがあるため, 本稿では別の証明を付けた.

Proof. 随伴から $\mathcal{B}(FA, -) \cong \mathcal{A}(A, G-)$ であり, これは \mathcal{B} に存在する任意の κ -フィルタ (小) 余極限を保つ. \square

Theorem 3.2. 局所 κ -表示可能圏 \mathcal{A} について, 次は同値.

- (i) 終対象 $1 \in \mathcal{A}$ が κ -表示可能.
- (ii) $\mathcal{A}_{\kappa p}$ が終対象を持つ.
- (iii) ある κ -小圏 \mathbf{J} と終関手 $\mathbf{J} \rightarrow \mathcal{A}_{\kappa p}$ が存在する.
- (iv) **Set** において $\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}$ 型極限と κ -フィルタ (小) 余極限が可換.

Proof. [(i) \implies (ii)] 明らか.

[(ii) \implies (iii)] 終対象 $1 \in \mathcal{A}_{\kappa p}$ を選択する, 終圏からの関手 $\mathbf{1} \xrightarrow{\lceil 1 \rceil} \mathcal{A}_{\kappa p}$ を考える. 任意の $A \in \mathcal{A}_{\kappa p}$ についてコンマ圏 $A/\lceil 1 \rceil \cong \mathbf{1}$ は連結なので, $\mathbf{1} \xrightarrow{\lceil 1 \rceil} \mathcal{A}_{\kappa p}$ は終関手である.

[(iii) \implies (iv)] 仮定より $\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}$ 型極限は κ -極限へ帰着されるので, **Set** において κ -極限と κ -フィルタ (小) 余極限が可換であることから従う.

[(iv) \implies (i)] **Fact A.6** より, 随伴

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{R} \\ \perp \\ \xleftarrow{I} \end{array} \mathcal{A}$$

であって, I が充満忠実かつ κ -フィルタ (小) 余極限を保つものが存在する. 終対象 $1 \in \mathcal{A}$ を考える. $I(1) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}}$ は終対象であり, **Theorem 2.1** より κ -表示可能である. したがって **Lemma 3.1** より, $1 \cong RI(1) \in \mathcal{A}$ も κ -表示可能である. \square

付録/Appendix

A 局所表示可能圏

以下, 正則無限基数 κ を固定する.

Definition A.1. 局所小圏 \mathcal{A} の対象 $A \in \mathcal{A}$ が κ -表示可能 (κ -presentable) であるとは, 関手

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{A}(A, -)} \mathbf{Set}$$

が, \mathcal{A} に存在する任意の κ -フィルタ (小) 余極限を保つことを言う. \blacklozenge

Notation A.2. κ -表示可能対象のなす \mathcal{A} の充満部分圏を $\mathcal{A}_{\kappa p} \subseteq \mathcal{A}$ と書く. \blacklozenge

Definition A.3. 局所小圏 \mathcal{A} が局所 κ -表示可能 (locally κ -presentable) であるとは, 以下を満たすことを言う.

- \mathcal{A} は (小) 余完備.
- 小さい集合 $G \subseteq \mathcal{A}_{\kappa p}$ が存在して, \mathcal{A} の任意の対象が G の対象の κ -フィルタ (小) 余極限で書ける. \blacklozenge

Definition A.4. 圏 \mathcal{C} が κ -小 (κ -small) であるとは, 射のクラス $\text{Mor } \mathcal{C}$ の濃度が κ 未満であることをいう. 図式圏が κ -小な (余) 極限を κ -(余) 極限という. \blacklozenge

Notation A.5. κ -極限を持つ圏 \mathcal{C} に対し, κ -極限を保つ関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ と自然変換のなす圏を $\mathbf{Cts}_{\kappa}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ と書く. \blacklozenge

Fact A.6. 局所 κ -表示可能圏 \mathcal{A} に対し, 以下が成立する.

- (i) \mathcal{A} は (小) 完備.

(ii) $\mathcal{A}_{\kappa p}$ は本質的小, すなわち, ある小圏と圏同値.

(iii) $\mathcal{A}_{\kappa p} \subseteq \mathcal{A}$ は κ -余極限で閉じる.

(iv) 圏同値 $\mathcal{A} \simeq \mathbf{Cts}_{\kappa}(\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ が存在する.

(v) 包含関手 $\mathbf{Cts}_{\kappa}(\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}, \mathbf{Set}) \subseteq \mathbf{Set}^{\mathcal{A}_{\kappa p}^{\text{op}}}$ は左随伴を持ち, さらに κ -フィルター (小) 余極限で閉じている. \blacklozenge

Proof. [AR94] を参照すると良い. 日本語で読める [サクラ 24] も参考になる. \square

Fact A.7. 小圏 \mathbf{I} について前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ は局所 κ -表示可能である. さらに, 前層 $P \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ について次は同値.

(i) $P \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ が κ -表示可能.

(ii) $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\text{op}}}$ において, P が表現可能関手の κ -余極限で書ける. \blacklozenge

Proof. [AR94] が参考になる. \square

References

- [AR94] J. Adámek and J. Rosický. *Locally presentable and accessible categories*. Vol. 189. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. DOI: [10.1017/CBO9780511600579](https://doi.org/10.1017/CBO9780511600579) (cit. on p. 4).
- [Kaw24] Y. Kawase. 極限と余極限の交換. 圏論 Advent Calendar 2024 4 日目. 2024. URL: <https://ykawase5048.github.io/yutokawase/notes/CommLimColim.pdf> (cit. on p. 2).
- [Par90] R. Paré. “Simply connected limits”. In: *Canad. J. Math.* 42.4 (1990), pp. 731–746. DOI: [10.4153/CJM-1990-038-6](https://doi.org/10.4153/CJM-1990-038-6) (cit. on p. 2).
- [サクラ 24] サクラ. 到達可能圏・局所表示可能圏の一と. 圏論 Advent Calendar 2024 1 日目. 2024. URL: https://drive.google.com/file/d/1y9m5x4ssa0Y_iu2NQamUJTjv_bGa21NF (cit. on p. 4).