

# 極限と余極限の交換

Yuto Kawase

2024 年 12 月 4 日

## 概要

圏論では極限と極限, もしくは余極限と余極限の計算順序を自由に交換することができますが, 一方で極限と余極限は一般に交換することができません. ところが, 集合の圏 **Set** で有限極限とフィルター余極限が交換可能であるなど, 特定の条件の下では交換を実行することができます. 本稿では, 特に **Set** における極限と余極限の交換についての一般論を述べます. 本稿は圏論 Advent Calendar 2024 の 4 日目の記事です.

## 目次

Terminology	1
1 反射的コイコライザ/Reflexive coequalizers	2
2 極限と余極限の交換/Commutativity of limits and colimits	3
2.1 弱可換性/Weak commutativity	3
2.2 スィフト余極限/Sifted colimits	5
2.3 フィルター余極限/Filtered colimits	7
2.4 絶対余極限/Absolute colimits	10
2.5 余積/Coproducts	11
表. 極限との可換性と弱可換性	12
付録/Appendix	
A 終関手/Final functors	12

## Terminology

<b>Set</b>	小さい集合と写像の圏
<b>0</b>	空圏 (empty category)
<b>1</b>	終圏 (terminal category)
<b>1</b>	1 点集合
$\mathcal{C}^{\text{op}}$	圏 $\mathcal{C}$ の反対圏
$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$	圏 $\mathcal{A}$ から圏 $\mathcal{B}$ への関手圏
$\text{Nat}(F, G)$	関手 $F$ から $G$ への自然変換のなすクラス
$\text{Ob}\mathcal{C}$	圏 $\mathcal{C}$ の対象のなすクラス
$C \in \mathcal{C}$	$C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ の意
$\text{Mor}\mathcal{C}$	圏 $\mathcal{C}$ の射のなすクラス
$\mathcal{C}(X, Y)$	圏 $\mathcal{C}$ の Hom クラス

$X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$	$f \in \mathcal{C}(X, Y)$ の意
id	恒等射
$\mathcal{C}/C$	圏 $\mathcal{C}$ の $C \in \mathcal{C}$ によるスライス圏
$C/\mathcal{C}$	圏 $\mathcal{C}$ の $C \in \mathcal{C}$ による余スライス圏
$F/D$	関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{D} \mathbf{1}$ についてのコンマ圏 ( $F \Rightarrow D$ )
$D/F$	関手 $\mathbf{1} \xrightarrow{D} \mathcal{D} \xleftarrow{F} \mathcal{C}$ についてのコンマ圏 ( $D \Rightarrow F$ )

## 1 反射的コイコライザ/Reflexive coequalizers

FP-スケッチにあまり馴染みがない読者には、次の考察を飛ばし、[Definition 1.2](#) から読み始めることを推奨する。

**Observation 1.1.** FP-スケッチ  $\mathcal{S}$  に対し、そのモデルの圏  $\mathbf{Mod} \mathcal{S} \subseteq [\mathcal{S}, \mathbf{Set}]$  は反映的充満部分圏になるのであった [[Kaw24](#), Lemma 3.9]. 反映的充満部分圏の一般論<sup>\*1</sup>により、 $\mathbf{Mod} \mathcal{S}$  はすべての (小) 極限と (小) 余極限を持っていることがわかり、しかも極限については関手圏  $[\mathcal{S}, \mathbf{Set}]$  と全く同じ構成で与えられる。関手圏の極限/余極限が各点計算されることを思い出すと、 $\mathbf{Mod} \mathcal{S}$  の極限はすべて各点的ということになる。一方で、 $\mathbf{Mod} \mathcal{S}$  の余極限は関手圏  $[\mathcal{S}, \mathbf{Set}]$  のものと一致するとは限らない。すなわち、 $\mathbf{Mod} \mathcal{S}$  はすべての (小) 余極限を持っているが、それが各点的とは限らないのである。このことを実際に計算して確かめてみよう。図式  $\mathbf{I} \xrightarrow{M_\bullet} [\mathcal{S}, \mathbf{Set}]$  が与えられたとして、任意の  $I \in \mathbf{I}$  に対しその値  $M_I$  は  $\mathcal{S}$  のモデルであるとしよう。このとき、関手圏における余極限  $M := \text{Colim } M_\bullet$  は  $\mathcal{S}$  のモデルになるだろうか?  $L_{\mathcal{S}}$  に属する有限離散錐 ( $c \xrightarrow{p_i} c_i$ ) について

$$Mc \cong \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} M_I c \cong \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \prod_i M_I c_i \quad \text{in } \mathbf{Set} \quad (1)$$

$$\prod_i M c_i \cong \prod_i \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} M_I c_i \quad \text{in } \mathbf{Set} \quad (2)$$

と計算できるが、(1) と (2) が一致する保障はどこにもないので、 $M = \text{Colim } M_\bullet$  は一般には  $\mathcal{S}$  のモデルにならないことが確かめられる。一方で、(1) と (2) が一致しさえすれば  $M = \text{Colim } M_\bullet$  は  $\mathcal{S}$  のモデルになる、と言い換えることもできる。すなわち、有限積  $\prod_i$  と  $\mathbf{I}$  型余極限  $\text{Colim}_{I \in \mathbf{I}}$  が  $\mathbf{Set}$  において“交換可能”ならば、 $\mathbf{Mod} \mathcal{S}$  における  $\mathbf{I}$  型余極限は各点計算されるのである。◆

極限と余極限の“交換可能性”は、厳密には以下のように定義される。

**Definition 1.2.**  $\mathbf{J} \times \mathbf{I} \xrightarrow{D} \mathcal{C}$  を関手とし、(3) に表れるすべての極限・余極限が存在すると仮定する。このとき、関手  $D$  について **J 型極限と I 型余極限が可換**であるとは、以下を可換にするカノニカルな射  $\kappa$  が同型になることを言う：

$$\begin{array}{ccc} \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} D(J, I) & \xrightarrow{\kappa} & \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} D(J, I) \\ \uparrow \text{入射}_I & & \downarrow \text{射影}_J \\ \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} D(J, I) & \xrightarrow{\text{射影}_J} D(J, I) \xrightarrow{\text{入射}_I} & \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} D(J, I) \end{array} \quad \text{in } \mathcal{C}. \quad (3)$$

$D$  として任意の関手が取れるときは、 $\mathcal{C}$  において **J 型極限と I 型余極限が可換**であるという。◆

**Observation 1.3.**  $\mathbf{Set}$  における 2 項積とコイコライザの交換を考えてみよう。ここでは簡単のために集合  $X, Y$  上

<sup>\*1</sup> 例えば [[Rie16](#), Proposition 4.5.15] などが参考になる。

の 2 項関係  $R, S$  がそれぞれ与えられているとして、特殊なコイコライザ

$$\begin{array}{ccc} R & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{射影}} \\ \xrightarrow{\text{射影}} \end{array} & X \longrightarrow X/\langle R \rangle \\ S & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{射影}} \\ \xrightarrow{\text{射影}} \end{array} & Y \longrightarrow Y/\langle S \rangle \end{array} \quad \text{in Set} \quad (4)$$

について考えることにする。ここで  $X/\langle R \rangle, Y/\langle S \rangle$  は、それぞれ  $R, S$  から生成される同値関係  $\langle R \rangle, \langle S \rangle$  によって  $X, Y$  を割った集合である。(4) で 2 項積をとると

$$R \times S \longrightarrow X \times Y \longrightarrow X/\langle R \rangle \times Y/\langle S \rangle \quad \text{in Set} \quad (5)$$

が得られるが、これがコイコライザになるかどうか、すなわち  $X/\langle R \rangle \times Y/\langle S \rangle \cong (X \times Y)/\langle R \times S \rangle$  が成り立つかどうかを議論したい。これは  $X \times Y$  上の同値関係  $\langle R \rangle \times \langle S \rangle$  と  $\langle R \times S \rangle$  が一致するかという間に言い換えられる。ところが、一般には片方の包含  $\langle R \rangle \times \langle S \rangle \supseteq \langle R \times S \rangle$  しか成り立たない。実際、 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  が  $\langle R \rangle \times \langle S \rangle$  関係で結ばれるというのは、 $R$  関係によるジグザグ

$$x \xrightarrow{R} \xleftarrow{R} \dots \xrightarrow{R} x' \quad (6)$$

と  $S$  関係によるジグザグ

$$y \xrightarrow{S} \xleftarrow{S} \dots \xrightarrow{S} y' \quad (7)$$

の存在と同値である。一方で、 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  が  $\langle R \times S \rangle$  関係で結ばれるというのは、“同じ長さ”のジグザグ (6)(7) が取れることを言っており、これは  $\langle R \rangle \times \langle S \rangle$  よりも真に厳しい条件である。

逆に、ジグザグ (6)(7) の長さを自由に調整できるような状況では、上記で述べた不都合は解消される。具体的には、 $R$  と  $S$  が反射律を満たしさえすれば、ジグザグ (6)(7) の長さをいくらでも伸ばすことができるため、 $\langle R \rangle \times \langle S \rangle = \langle R \times S \rangle$  が成立する。すなわち、反射的關係によるコイコライザは 2 項積で保たれるのである。◆

**Definition 1.4.** 生成元と関係式によって以下のように定義される小圏  $\mathbf{R}$  を考える：

$$\mathbf{R} := \left( 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{t} \end{array} 0 \right), \quad si = \text{id} = ti.$$

$\mathbf{R}$  型余極限のことを、**反射的コイコライザ** (reflexive coequalizer) という。◆

**Remark 1.5.**  $\mathbf{R}$  型の図式上の余錐は、コフォークと一致する。したがって反射的コイコライザの普遍性は、コイコライザと同じである。◆

Observation 1.3 から次を得る。

**Corollary 1.6.** **Set** において 2 項積と反射的コイコライザは可換である。

次節以降では、**Set** における極限と余極限の可換について、より一般的に考察する。

## 2 極限と余極限の交換/Commutativity of limits and colimits

### 2.1 弱可換性/Weak commutativity

**Notation 2.1.** 関手  $\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$  に対して、 $F$  上の余錐の成す圏を  $\mathbf{Cocone}(F)$  と書く。ここで、余錐の間の射  $(FD \xrightarrow{\alpha_D} A)_D \rightarrow (FD \xrightarrow{\beta_D} B)_D$  とは、 $\mathcal{A}$  の射  $A \xrightarrow{f} B$  であって任意の  $D \in \mathcal{D}$  について  $f \circ \alpha_D = \beta_D$  をみたすもののことである。◆

**Notation 2.2.** 対象  $A, B \in \mathcal{A}$  が与えられたとき, 2 点からなる離散圏からの対応する関手  $\mathbf{1} + \mathbf{1} \xrightarrow{(A, B)} \mathcal{A}$  を考え, この関手上の余錐の成す圏を  $\mathbf{Cospa}(A, B) := \mathbf{Cocone}((A, B))$  と書く. ◆

**Notation 2.3.** 関手  $\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$  と  $A \in \mathcal{A}$  に対し,  $A$  を頂点とする  $F$  上の余錐全体のクラスを  $\mathbf{Cocone}(F; A)$  と書く. ◆

**Definition 2.4.**  $\mathcal{C}$  を圏とする. 対象  $X, Y \in \mathcal{C}$  について, 射  $X \rightarrow Y$  が存在するかという命題は, 対象のクラス  $\mathbf{Ob}\mathcal{C}$  上の 2 項関係である. この 2 項関係が生成する同値関係を  $\sim_{\text{zig}}$  と書くことにする.  $X \sim_{\text{zig}} Y$  が成り立つときに,  $X$  と  $Y$  は互いに連結であるといい,  $\sim_{\text{zig}}$  に関する同値類のことを連結成分 (connected component) という. 対象のクラス  $\mathbf{Ob}\mathcal{C}$  を  $\sim_{\text{zig}}$  で割って得られるクラスのことを  $\pi_0(\mathcal{C})$  と書く.  $\pi_0(\mathcal{C})$  が 1 点集合となるとき, 圏  $\mathcal{C}$  は連結 (connected) であるという. ◆

**Example 2.5.** 任意の (余) スライス圏  $\mathcal{C}/C, C/\mathcal{C}$  は連結. ◆

**Lemma 2.6.**  $\mathbf{J}$  を小圏とし,  $\mathbf{I}$  を局所小圏とする. このとき, 関手  $\mathbf{J}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  に対して次は同値である.

(i) 以下の関手  $F_*$  について  $\mathbf{J}$  型極限と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{I} &\xrightarrow{F_*} \mathbf{Set} \\ (J, I) &\mapsto \mathbf{I}(FJ, I) \end{aligned}$$

(ii) 余錐の (小) 圏  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結.

*Proof.*  $\mathbf{Set}$  における極限/余極限の具体的な構成を用いると,

$$\begin{aligned} \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} \mathbf{I}(FJ, I) &\cong \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \{ I \text{ を頂点とする } F \text{ 上の余錐} \} && \text{in } \mathbf{Set}. \\ &\cong \pi_0(\mathbf{Cocone}(F)) \\ \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} \text{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \mathbf{I}(FJ, I) &\cong \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} \pi_0(FJ/\mathbf{I}) \\ &\cong \text{Lim}_{J \in \mathbf{J}} 1 && \text{in } \mathbf{Set}. \\ &\cong 1 \end{aligned}$$

したがって, (i)  $\Leftrightarrow \pi_0(\mathbf{Cocone}(F)) \cong 1 \Leftrightarrow$  (ii). □

**Theorem 2.7.**  $\mathbf{J}$  を小圏とし,  $\mathbf{I}$  を局所小圏とする. このとき, 次は同値である.

- (i)  $\mathbf{J}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  を用いて  $\mathbf{J} \times \mathbf{I} \xrightarrow{F_*} \mathbf{Set}$  と書ける任意の関手について,  $\mathbf{J}$  型極限と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.
- (ii) 任意の関手  $\mathbf{J}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結.
- (iii) 関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{I}^{\text{J}^{\text{op}}}$  が終的. ここで,  $\Delta$  は  $I \in \mathbf{I}$  を定数関手  $\mathbf{J}^{\text{op}} \xrightarrow{\Delta I} \mathbf{I}$  へ移す関手.

以上の同値な条件を満たすとき,  $\mathbf{Set}$  において  $\mathbf{J}$  型極限と  $\mathbf{I}$  型余極限が弱可換であるという.

*Proof.* [(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)] Lemma 2.6 より従う.

[(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)] 終関手の特徴付け (Theorem A.5) より従う. □

**Remark 2.8.**  $\mathbf{Set}$  において  $\mathbf{J}$  型極限と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換なら, 特に弱可換性が従う. 弱可換性から通常の可換性は一般には従わないが, 後で見る通り, いくつかの特殊な例については弱可換性と可換性が同値になる. 一般に極限の型 (の族)  $\mathbb{D}$  について,  $\mathbb{D}$ -極限との弱可換性が可換性と同値になるとき,  $\mathbb{D}$  は健全 (sound) であるという. [Adá+02] では健全な極限の型  $\mathbb{D}$  について, 局所表示可能圏の類似として, 局所  $\mathbb{D}$ -表示可能圏の理論を展開している. どのような  $\mathbb{D}$  が健全であるかを調べ Section 2.5 を埋めるのが, 本稿の隠れた目標である. ◆

## 2.2 スィフト余極限/Sifted colimits

**Theorem 2.9.** 小圏  $\mathbf{I}$  に対し, 次は同値.

- (i)  $\mathbf{Set}$  において終対象と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.
- (ii)  $\mathbf{I}$  が連結. (弱可換性)

*Proof.* 関手  $\mathbf{0} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}$  は一意であり, それは唯一の関手  $\mathbf{0} \xrightarrow{!} \mathbf{I}$  を用いて  $!_*$  と表される. したがって, 終対象と  $\mathbf{I}$  型余極限の可換性は弱可換性と同値であり, それは  $\mathbf{Cocone}(!) \cong \mathbf{I}$  の連結性を言っている.  $\square$

**Theorem 2.10.** 小圏  $\mathbf{I}$  に対し, 次は同値.

- (i)  $\mathbf{Set}$  において 2 項積と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.
- (ii) 任意の対象  $I, J \in \mathbf{I}$  に対して,  $\mathbf{Cospan}(I, J)$  が連結. (弱可換性)
- (iii) 対角関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{I} \times \mathbf{I}$  が終的. (弱可換性)

*Proof.*  $\mathbf{Set}$  において 2 項積と  $\mathbf{I}$  型余極限が弱可換であると仮定する. 関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{X_\bullet} \mathbf{Set}, \mathbf{I} \xrightarrow{Y_\bullet} \mathbf{Set}$  に対し, 以下が成立する.

$$\mathrm{Colim}_{I \in \mathbf{I}} (X_I \times Y_I) \cong \mathrm{Colim}_{(I, J) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}} (X_I \times Y_J) \quad (8)$$

$$\cong \mathrm{Colim}_{I \in \mathbf{I}} \mathrm{Colim}_{J \in \mathbf{I}} (X_I \times Y_J) \quad (9)$$

$$\cong \mathrm{Colim}_{I \in \mathbf{I}} (X_I \times \mathrm{Colim}_{J \in \mathbf{I}} Y_J) \quad (10)$$

$$\cong (\mathrm{Colim}_{I \in \mathbf{I}} X_I) \times (\mathrm{Colim}_{J \in \mathbf{I}} Y_J) \quad (11)$$

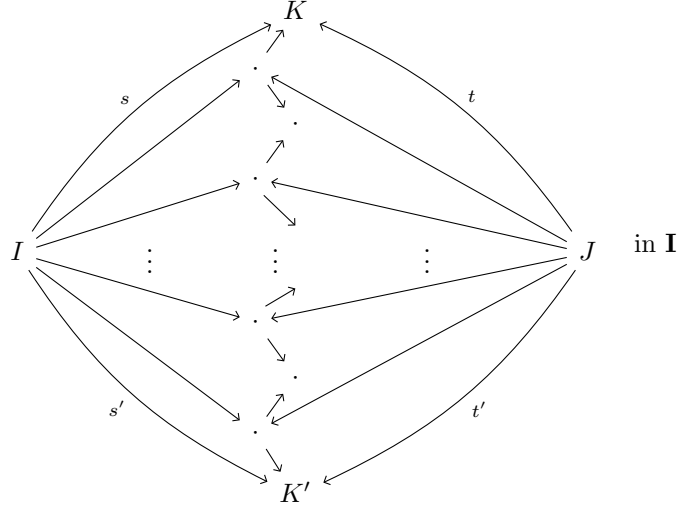
ここで, (8) の同型は対角関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{I} \times \mathbf{I}$  が終的であることから, (9) の同型は余極限の一般論から, (10) と (11) の同型は  $\mathbf{Set}$  がカルテシアン閉であることから従う. したがって,  $\mathbf{Set}$  において 2 項積と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換であることが示された.  $\square$

**Theorem 2.9** と **Theorem 2.10** により, 有限積と可換な余極限の特徴づけを得たことになる. 加えて, 有限積についても可換性と弱可換性は同値である.

**Definition 2.11.** 圏  $\mathbf{I}$  がスィフト的 (sifted) であるとは, 以下を満たすことをいう:

- $\mathbf{I}$  は空でない;
- 任意の  $I, J \in \mathbf{I}$  に対し, ある余錐  $\begin{array}{ccc} & \cdot & \\ I & \nearrow & \nwarrow \\ & J & \end{array}$  in  $\mathbf{I}$  が存在する;
- 任意の余錐  $\begin{array}{ccc} & K & \\ s \nearrow & & \nwarrow t \\ I & & J \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K' & \\ s' \nearrow & & \nwarrow t' \\ I & & J \end{array}$  in  $\mathbf{I}$  は互いに連結である, すなわち, 次のような可換図式が存在

する.



図式圏がスフト的であるような余極限は、**スフト余極限** (sifted colimit) と呼ばれる. ◆

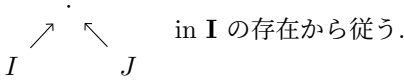
**Theorem 2.12.** 小圏  $\mathbf{I}$  に対し、次は同値.

- (i) **Set** において有限積と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.
- (ii)  $\mathbf{I}$  が連結かつ、任意の  $I, J \in \mathbf{I}$  に対し  $\mathbf{Cospan}(I, J)$  が連結. (弱可換性)
- (iii)  $\mathbf{I}$  がスフト的. (弱可換性)

*Proof.* [(i)  $\iff$  (ii)] [Theorem 2.9](#) と [Theorem 2.10](#) より従う.

[(ii)  $\implies$  (iii)] 連結性の定義から直ちに従う.

[(iii)  $\implies$  (ii)]  $\mathbf{I}$  の連結性、特に任意の 2 つの対象  $I, J \in \mathbf{I}$  が互いに連結であることのみが非自明だが、これは余錐



**Proposition 2.13.** **Set** において積と反射的コイコライザは弱可換である.

*Proof.* 反射的コイコライザの図式圏  $\mathbf{R}$  を考える ([Definition 1.4](#)).  $\mathbf{R}$  の対象の族  $d = (d_i)_i$  が与えられたとして、 $d$  上の余錐の圏の連結性を示せば良い. まず、以下のような  $d$  上の余錐  $\alpha$  が存在する:

$$\alpha := (d_i \xrightarrow{\alpha_i} 0)_i, \quad \alpha_i := \begin{cases} \text{id} & \text{if } d_i = 0 \\ s & \text{if } d_i = 1 \end{cases}$$

以下で、 $d$  上の任意の余錐が  $\alpha$  と互いに連結であることを示そう. 射  $s$  もしくは  $t$  の存在から、少なくとも任意の余錐は、頂点が  $0$  であるものと連結である. さて、頂点が  $0$  の  $d$  上の余錐  $\beta$  を任意にとる. ここで  $\beta_i$  は、以下の 3 つの射のうちいずれかと一致する.

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow s & \nwarrow t & \\ 0 & & 1 & & 1 \end{array} \quad (12)$$

見た目の上で  $\beta$  と (12) を同一視することにして、以下のような余錐の射を考える:

$$\beta = \left( \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow s & \nwarrow t & \\ 0 & & 1 & & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{t} \left( \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & i \nearrow & \uparrow is & \nwarrow \text{id} & \\ 0 & & 1 & & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{s} \left( \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \text{id} \nearrow & \uparrow s & \nwarrow s & \\ 0 & & 1 & & 1 \end{array} \right) = \alpha$$

これは  $\beta$  と  $\alpha$  が互いに連結であることを言っている. したがって、 $d$  上の任意の余錐は  $\alpha$  と互いに連結である. □

**Corollary 2.14.** 反射的イコライザはスフト余極限であり, **Set** において有限積と反射的イコライザは可換である.

一方で, 反射的イコライザは無限積と可換になるとは限らない:

**Example 2.15.** 自然数  $n$  に対し集合  $X_n := \{0, 1, \dots, n\}$  を考え,  $X_n$  上の反射的 2 項関係  $R_n$  を

$$(i, j) \in R_n \iff |i - j| \leq 1$$

と定義する.  $R_n$  が生成する同値関係  $\langle R_n \rangle$  を考えると, 商集合は  $X_n / \langle R_n \rangle \cong 1$  となっていて, 特に  $\prod_n X_n / \langle \prod_n R_n \rangle \cong 1$  である. 一方で, 商集合  $(\prod_n X_n) / \langle \prod_n R_n \rangle$  は 1 点集合にならない. 実際, 定数列  $(0, 0, 0, \dots) \in \prod_n X_n$  の  $\langle \prod_n R_n \rangle$  についての同値類は有界な点列全体となるため, 特に狭義単調増加列  $(0, 1, 2, \dots) \in \prod_n X_n$  はこれに含まれない. したがって  $\prod_n X_n / \langle R_n \rangle \not\cong (\prod_n X_n) / \langle \prod_n R_n \rangle$  であり, 特に **Set** において可算積と反射的イコライザは可換でない.  $\blacklozenge$

## 2.3 フィルター余極限/Filtered colimits

**Definition 2.16.**

- (i) 圏  $\mathcal{C}$  が**有限** (finite) であるとは, 射のクラス  $\text{Mor } \mathcal{C}$  が有限であることを言う.
- (ii) 圏  $\mathcal{C}$  が**有限生成** (finitely generated) であるとは, 以下を満たすことを言う:
  - 対象のクラス  $\text{Ob } \mathcal{C}$  が有限;
  - 射の有限集合  $M \subseteq \text{Mor } \mathcal{C}$  が存在して,  $\mathcal{C}$  の任意の射が  $M$  の射の合成<sup>\*2</sup>で書ける.

図式圏が有限 (生成) であるような極限を, **有限 (生成) 極限**と呼ぶ.  $\blacklozenge$

**Example 2.17.** 自己射で生成される圏

$$\mathbf{L} := (\cdot \rhd l)$$

を考える.  $\mathbf{L}$  は可算個の射  $\text{id}, l, l \circ l, l \circ l \circ l, \dots$  を持つため, 有限生成圏だが有限圏ではない.  $\blacklozenge$

**Fact 2.18.** 圏が有限生成極限を持つことは, 有限積とイコライザを持つことと同値である.  $\blacklozenge$

ここまでで, 終対象や 2 項積との可換性が弱可換性と同値であることをみた. 一方で, イコライザとの可換性は弱可換性と同値にならない.

**Example 2.19.** 小圏

$$\mathbf{I} := \left( \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ b & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array} \right)$$

を考え, イコライザと  $\mathbf{I}$  型余極限の可換性について調べてみよう.

**Claim 1.** **Set** においてイコライザと  $\mathbf{I}$  型余極限は弱可換である.

$\therefore \mathbf{J} := (\cdot \rightrightarrows \cdot)$  についての **Theorem 2.7(ii)** の条件は,  $\mathbf{I}$  の任意の平行な射について, それを等化する射 (コフォーク) の圏が連結になることを言っている. ところが  $\mathbf{I}$  は非自明な平行射を持たないため, この条件は勝手に満たされる.  $\diamond$

<sup>\*2</sup> 恒等射は 0 回合成で得られるとみなす.

一方で, **Set** においてイコライザと **I** 型余極限は可換ではない. このことを示すために, 次の図式を考えよう.

$$X := \begin{pmatrix} \emptyset & \longrightarrow & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ \emptyset & \longrightarrow & 1 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 1 & \xrightarrow{\lceil 0 \rceil} & 2 \\ & \searrow & \nearrow \\ \lceil 1 \rceil & \xrightarrow{\lceil 1 \rceil} & 1 \end{pmatrix} \in [\mathbf{I}, \mathbf{Set}]$$

$$X \xrightarrow[u]{u} Y \quad \text{in } [\mathbf{I}, \mathbf{Set}]$$

ただし  $2 := \{0, 1\}$  で,  $\lceil 0 \rceil$  と  $\lceil 1 \rceil$  はそれぞれ  $0, 1$  に値をとる写像であり,  $u$  と  $v$  はそれぞれ  $u_0 := \lceil 0 \rceil, v_0 := \lceil 1 \rceil$  により定まる自然変換である.\*<sup>3</sup> さて,  $u$  と  $v$  の (各点) イコライザ  $E$  は, 次のように計算できる.

$$E := \begin{pmatrix} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ & \searrow & \nearrow \\ \emptyset & \longrightarrow & 1 \end{pmatrix} \in [\mathbf{I}, \mathbf{Set}]$$

$E, X, Y$  それぞれの (**I** 型) 余極限は, 次のように計算できる.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Colim } E & \longrightarrow & \text{Colim } X & \xrightarrow[\text{Colim } v]{\text{Colim } u} & \text{Colim } Y \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array} \quad \text{in } \mathbf{Set}$$

これは **Set** のイコライザにはなっていない. 正しいイコライザは 2 点集合のはずである. したがって, これは **Set** において, イコライザと **I** 型余極限が可換とは限らないということを言っている. ◆

イコライザとの可換性が弱可換性と同値でないにも関わらず, 有限 (生成) 極限との可換性は弱可換性と同値になる. 有限 (生成) 極限がイコライザと有限積から構成できること (Fact 2.18) を踏まえると, このことは驚くべき事実と言える.

**Definition 2.20.** 圏 **I** がフィルター的 (filtered) であるとは, 以下を満たすことをいう:

- **I** は空でない;
- 任意の  $I, J \in \mathbf{I}$  に対し, ある余錐  $\begin{array}{ccc} & \nearrow & \nwarrow \\ & I & J \end{array}$  in **I** が存在する;
- 任意の射  $I \xrightarrow[s]{s} J$  in **I** に対し, コフォーク\*<sup>4</sup>  $I \xrightarrow[s]{s} J \xrightarrow{u} \cdot$  in **I** が存在する.

図式圏がフィルター的であるような余極限は, **フィルター余極限** (filtered colimit) と呼ばれる. ◆

**Theorem 2.21.** 小圏 **I** に対し, 次は同値.

- Set** において有限生成極限と **I** 型余極限が可換.
- Set** において有限極限と **I** 型余極限が可換.
- 任意の有限生成圏 **J** と任意の関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結. (弱可換性)
- 任意の有限圏 **J** と任意の関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結. (弱可換性)
- I** がフィルター的. (弱可換性)

*Proof.* (i)  $\implies$  (ii) と (iii)  $\implies$  (iv)  $\implies$  (v) は自明であり, Theorem 2.7 より (ii)  $\implies$  (iv) が分かっている.

[(v)  $\implies$  (iii)] **I** がフィルター的であるとする. まず次の主張を示す.

\*<sup>3</sup>  $a, b, 1 \in \mathbf{I}$  についての成分は 1 通りしかあり得ないことに注意せよ.

\*<sup>4</sup>  $us = ut$  を満たすということ.



**Claim 1.** 任意の有限生成圏  $\mathbf{J}$  と関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について、 $F$  上の余錐が存在する。

$\because \mathbf{J}$  が空のときは [Definition 2.20](#) の 1 つ目の条件から主張が従うので、以下  $\mathbf{J}$  は空でないとする。 $\mathbf{J}$  の対象が高々有限であることから、[Definition 2.20](#) の 2 つ目の条件を繰り返し用いることで、ある対象  $I_0 \in \mathbf{I}$  と、各  $J \in \mathbf{J}$  についての射  $FJ \xrightarrow{p_J} I_0$  in  $\mathbf{I}$  を取ることができる。有限生成圏の定義から有限個の射

$$J_1 \xrightarrow{f_1} J'_1, \dots, J_n \xrightarrow{f_n} J'_n \text{ in } \mathbf{J}$$

が存在し、これらの合成で  $\mathbf{J}$  の任意の射を書くことができる。対象  $I_1, \dots, I_n \in \mathbf{I}$  と射  $I_{k-1} \xrightarrow{g_k} I_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) in  $\mathbf{I}$  を、以下の手順で再帰的に定義する。

- $g_1, \dots, g_{k-1}$  が定義されているとする。このとき、[Definition 2.20](#) の 3 つ目の条件から次を等化する射  $I_{k-1} \rightarrow \cdot$  が存在するので、それを  $I_{k-1} \xrightarrow{g_k} I_k$  とする。

$$\begin{array}{c} FJ_k \xrightarrow{p_{J_k}} I_0 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{k-1}} I_{k-1} \xrightarrow{g_k} I_k \\ Ff_k \downarrow \quad \nearrow p_{J'_k} \\ FJ'_k \end{array}$$

上で定義した  $g_1, \dots, g_n$  を用いて各  $J \in \mathbf{J}$  について  $q_J := g_n \circ \dots \circ g_1 \circ p_J$  と定義すると、 $(FJ \xrightarrow{q_J} I_n)_J$  が  $F$  上の余錐となることが分かる。  $\diamond$

有限生成圏  $\mathbf{J}$  と関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  を任意にとり、 $\mathbf{Cocone}(F)$  の連結性を示したい。 $\mathbf{Cocone}(F)$  が空でないことが [Claim 1](#) より分かっているので、 $\alpha, \beta \in \mathbf{Cocone}(F)$  が互いに連結であることを示せばよい。ここで、以下の手順で得られる小圏  $\mathbf{K}$  を考える：

- $\mathbf{J}$  に、2 つの異なる対象  $0, 1$  を新たに追加する。
- 各  $J \in \mathbf{J}$  ごとに、射  $J \xrightarrow{p_J} 0$  と  $J \xrightarrow{q_J} 1$  を新たに追加する。
- 任意の  $J \in \mathbf{J}$  について  $\mathbf{K}(J, 0)$  と  $\mathbf{K}(J, 1)$  が 1 点集合となるように射を割る。

すると、 $F$  と  $\alpha$  と  $\beta$  によって、自然に関手  $\mathbf{K} \xrightarrow{G} \mathbf{I}$  を得る。ここで、 $G$  は  $\mathbf{J}$  の対象と射を  $F$  で送り、 $(p_J)_J$  を  $\alpha$  へ、 $(q_J)_J$  を  $\beta$  へ送る関手である。 $\mathbf{K}$  が有限生成であることに注意すれば、[Claim 1](#) より  $G$  上の余錐が存在する。これは余錐  $\begin{array}{c} \cdot \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \alpha \quad \beta \end{array}$  in  $\mathbf{Cocone}(F)$  を得たと言い換えることができるので、 $\alpha$  と  $\beta$  は互いに連結である。

**[(v)  $\implies$  (i)]** 有限生成極限が有限積とイコライザから構成できること ([Fact 2.18](#)) を認め、フィルター余極限が有限積やイコライザと可換であることを示そう。

**Claim 2.** 圏について、フィルター的なならばスィフト的である。

$\because$  圏  $\mathbf{I}$  がフィルター的であるとする。余錐  $\begin{array}{c} K \\ \nearrow s \quad \nwarrow t \\ I \quad J \end{array} \quad \begin{array}{c} K' \\ \nearrow s' \quad \nwarrow t' \\ I \quad J \end{array}$  in  $\mathbf{I}$  を任意にとり、これらが互いに連結

であることを示せばよい。 $\mathbf{I}$  はフィルター的なので、余錐  $\begin{array}{c} L \\ \nearrow u \quad \nwarrow u' \\ K \quad K' \end{array}$  in  $\mathbf{I}$  がとれる。 $\mathbf{I}$  はフィルター的な

ので、更に射  $L \xrightarrow{v} M$  が存在して  $vus = vu's'$  を満たす。同様に、射  $M \xrightarrow{w} N$  が存在して  $wvut = wvu't'$  を満たす。よって

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & s \nearrow & \downarrow wvu & \nwarrow t & \\ I & & N & & J \text{ in } \mathbf{I} \\ & s' \searrow & \uparrow wvu' & \swarrow t' & \\ & & K' & & \end{array}$$

は可換である. ◇

したがって Theorem 2.12 より, **Set** において有限積とフィルタ余極限は可換である. **イコライザとフィルタ余極限の可換性は, 読者に委ねることにする.** □

有限性を以下のように一般化することを考えよう.

**Definition 2.22.**  $\kappa$  を正則無限基数とする. 圏  $\mathcal{C}$  が  $\kappa$ -小 ( $\kappa$ -small) であるとは, 射のクラス  $\text{Mor } \mathcal{C}$  の濃度が  $\kappa$  未満であることをいう. 図式圏が  $\kappa$ -小な極限を  $\kappa$ -極限といい, 図式圏が  $\kappa$ -小かつ離散な極限を  $\kappa$ -積という. ◆

**Definition 2.23.**  $\kappa$  を正則無限基数とする. 圏  $\mathbf{I}$  が  $\kappa$ -フィルターの ( $\kappa$ -filtered) であるとは, 以下を満たすことをいう:

- $\mathbf{I}$  は空でない;
- 任意の対象の族  $I_\alpha \in \mathbf{I}$  ( $\alpha < \kappa$ ) に対し, ある余錐  $(I_\alpha \longrightarrow \cdot)_{\alpha < \kappa}$  が存在する;
- 任意の射の族  $I \xrightarrow{s_\alpha} J$  in  $\mathbf{I}$  ( $\alpha < \kappa$ ) に対し,  $us_\alpha = us_\beta$  ( $\forall \alpha, \beta < \kappa$ ) を満たす射  $J \xrightarrow{u} \cdot$  in  $\mathbf{I}$  が存在する.

図式圏が  $\kappa$ -フィルターのであるような余極限は,  $\kappa$ -フィルター余極限 ( $\kappa$ -filtered colimit) と呼ばれる. ◆

詳細は省くが, 有限の場合 (Theorem 2.21) とほとんど同様にして, 次を示すことができる.

**Theorem 2.24.** 小圏  $\mathbf{I}$  に対し, 次は同値.

- (i) **Set** において  $\kappa$ -極限と  $\mathbf{I}$  型余極限が可換.
- (ii) 任意の  $\kappa$ -小圏  $\mathbf{J}$  と任意の関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\text{Cocone}(F)$  が連結. (弱可換性)
- (iii)  $\mathbf{I}$  が  $\kappa$ -フィルターの. (弱可換性)

## 2.4 絶対余極限/Absolute colimits

**Definition 2.25.** 生成元と関係式によって以下のように定義される小圏を **Idm** と書く.

$$\mathbf{Idm} := (\cdot \rhd e), \quad ee = e. \quad \text{◆}$$

**Remark 2.26.** 圏  $\mathcal{C}$  における **Idm** 型図式は, 自己射  $X \rhd e$  in  $\mathcal{C}$  であって  $ee = e$  を満たすもの (冪等射) である. この図式上の余錐は, 射  $X \xrightarrow{f} \cdot$  であって  $fe = f$  を満たすものに一致するので, **Idm** 型余極限はコイコライザ

$$X \xrightleftharpoons[\text{id}]{e} X \xrightarrow{r} A \quad \text{in } \mathcal{C} \quad (13)$$

と一致することになる. コイコライザ (13) の普遍性から, 次を可換にする射  $s$  が (一意に) 存在することが分かる:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & X \\ r \searrow & & \nearrow s \\ & A & \xlongequal{\quad} A \end{array} \quad \text{in } \mathcal{C} \quad (14)$$

逆に, (14) を可換にする射  $r, s$  が与えられると, (13) がコイコライザになることを示すことができる. したがって, **Idm** 型余極限は (14) を可換にする射の組  $(r, s)$  と対応する. このような組  $(r, s)$  は, 冪等射  $e$  の分裂 (split) と呼ばれる. ◆

**Definition 2.27.** 任意の関手によって保たれる余極限のことを絶対余極限 (absolute colimit) という. ◆

**Corollary 2.28.** **Idm** 型余極限は絶対余極限である.

*Proof.* Remark 2.26 によると, **Idm** 型余極限とは単に冪等射  $e$  の分裂  $(r, s)$  のことであり, これは任意の関手によって保たれることが分かる. すなわち任意の関手  $F$  について,  $(Fr, Fs)$  は明らかに冪等射  $Fe$  の分裂になる.  $\square$

次の主張によると, 絶対余極限は本質的には全て **Idm** 型余極限である.

**Theorem 2.29.** 小圏 **I** に対し, 次は同値.

- (i) **I** 型余極限は絶対余極限である.
- (ii) **Set** において (小) 極限と **I** 型余極限が可換.
- (iii) 任意の小圏 **J** と任意の関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結. (弱可換性)
- (iv) 終関手  $\mathbf{Idm} \longrightarrow \mathbf{I}$  が存在する.

*Proof.* [(i)  $\implies$  (ii)] **J** を小圏とし, **J** 型極限をとる関手  $[\mathbf{J}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{\text{Lim}_{\mathbf{J}}} \mathbf{Set}$  を考える. 仮定から **I** 型余極限はこの関手  $\text{Lim}_{\mathbf{J}}$  で保たれるが, これは **Set** において **J** 型極限と **I** 型余極限が可換であることを意味する.

[(ii)  $\implies$  (iii)] Theorem 2.7 より従う.

[(iii)  $\implies$  (iv)] 仮定から, 恒等関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{I}}} \mathbf{I}$  について  $\mathbf{Cocone}(\text{id}_{\mathbf{I}})$  は連結であり, 特に余錐  $\alpha \in \mathbf{Cocone}(\text{id}_{\mathbf{I}})$  が存在する.  $\alpha$  の頂点を  $I_v$  と書くことにすると, 余錐  $\alpha$  の自然性から次が可換である:

$$\begin{array}{ccc} I_v & \xrightarrow{\alpha_{I_v}} & I_v \\ & \searrow \alpha_{I_v} & \swarrow \alpha_{I_v} \\ & I_v & \end{array} \quad \text{in } \mathbf{I}$$

特に  $\alpha_{I_v}$  は冪等射であり, 対応する関手  $\mathbf{Idm} \xrightarrow{\lceil \alpha_{I_v} \rceil} \mathbf{I}$  が得られる. 終関手の特徴づけ Theorem A.5 を用いて, 関手  $\lceil \alpha_{I_v} \rceil$  が終的であることを示そう. 対象  $I \in \mathbf{I}$  を固定して圏  $I/\lceil \alpha_{I_v} \rceil$  の連結性を示せば良いが, この圏の対象, すなわち射  $I \xrightarrow{f} I_v$  であって  $\alpha_{I_v} f = f$  を満たすもの, に対して射

$$f \xrightarrow{\alpha_{I_v}} \alpha_I \quad \text{in } I/\lceil \alpha_{I_v} \rceil$$

が存在することから, 連結性が示される.

[(iv)  $\implies$  (i)] Proposition A.2 より **I** 型余極限が **Idm** 型余極限に帰着されるので, Corollary 2.28 より主張が従う.  $\square$

## 2.5 余積/Coproducts

**Definition 2.30.** 図式圏が連結であるような極限のことを連結極限 (connected limit) という.  $\blacklozenge$

**Lemma 2.31.** 終関手の族  $(\mathcal{A}_i \xrightarrow{F_i} \mathcal{B}_i)_i$  に対して, その余積  $\coprod_i \mathcal{A}_i \xrightarrow{\coprod_i F_i} \coprod_i \mathcal{B}_i$  も終関手.

*Proof.* 任意の対象  $(i; B) \in \coprod_i \mathcal{B}_i$  ( $B \in \mathcal{B}_i$ ) に対して  $(i; B)/\coprod_i F_i \cong B/F_i$  であることから, 終関手の特徴づけ (Theorem A.5) より従う.  $\square$

次の主張は, 連結極限との可換性が, ほとんど余積を特徴づけるということを言っている.

**Theorem 2.32.** 小圏 **I** に対し, 次は同値.

- (i) **Set** において連結 (小) 極限と **I** 型余極限が可換.
- (ii) 任意の連結小圏 **J** と任意の関手  $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$  について,  $\mathbf{Cocone}(F)$  が連結. (弱可換性)
- (iii) (小さい) 集合  $S$  と終関手  $\coprod_S \mathbf{Idm} \longrightarrow \mathbf{I}$  が存在する.

*Proof.* [(i)  $\implies$  (ii)] [Theorem 2.7](#) より従う.

[(ii)  $\implies$  (iii)]  $\mathbf{I}$  の連結成分による分割  $\mathbf{I} = \coprod_{c \in \pi_0 \mathbf{I}} \mathbf{I}_c$  を考える. ここで, 各  $\mathbf{I}_c$  は  $\mathbf{I}$  の極大な連結充満部分圏 (連結成分) である. 包含関手を  $\mathbf{I}_c \hookrightarrow \mathbf{I}$  と書くことにすると, 仮定より  $\mathbf{Cocone}(\iota_c)$  が連結なので, 特に  $\iota_c$  上の余錐  $\alpha_c$  が存在する. すると [Theorem 2.29\(iii\)](#)  $\implies$  (iv) の証明と同様の議論から, 終関手  $\mathbf{Idm} \xrightarrow{F_c} \mathbf{I}_c$  が存在する. したがって [Lemma 2.31](#) より, 終関手  $\coprod_c \mathbf{Idm} \xrightarrow{\coprod_c F_c} \coprod_c \mathbf{I}_c = \mathbf{I}$  を得る.

[(iii)  $\implies$  (i)] [Proposition A.2](#) より,  $\mathbf{I}$  型余極限は絶対余極限と余積へ帰着される.  $\mathbf{Set}$  において余積は連結 (小) 極限と可換\*<sup>5</sup>なので, 主張が従う.  $\square$

極限	$\mathbf{Set}$ で可換な余極限		$\mathbf{Set}$ で弱可換な余極限	
終対象	連結余極限	=	連結余極限	<a href="#">Theorem 2.9</a>
2 項積	コスパンが連結な図式の余極限	=	コスパンが連結な図式の余極限	<a href="#">Theorem 2.10</a>
有限積	スィフト余極限	=	スィフト余極限	<a href="#">Theorem 2.12</a>
$\kappa$ -積	?	$\supsetneq$	$\kappa$ -多重コスパンが連結な図式の余極限	<a href="#">Example 2.15</a>
積	?	$\supsetneq$	多重コスパンが連結な図式の余極限	<a href="#">Example 2.15</a>
イコライザ	?	$\supsetneq$	コフォークが連結な図式の余極限	<a href="#">Example 2.19</a>
有限極限	フィルター余極限	=	フィルター余極限	<a href="#">Theorem 2.21</a>
$\kappa$ -極限	$\kappa$ -フィルター余極限	=	$\kappa$ -フィルター余極限	<a href="#">Theorem 2.24</a>
任意の極限	冪等射の分裂	=	冪等射の分裂	<a href="#">Theorem 2.29</a>
連結極限	冪等射の分裂, 余積	=	冪等射の分裂, 余積	<a href="#">Theorem 2.32</a>

表. 極限との可換性と弱可換性

## 付録/Appendix

### A 終関手/Final functors

**Definition A.1.** 関手  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  が**終的** (final) であるとは, 任意の関手  $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$  と対象  $A \in \mathcal{A}$  に対して, 写像

$$\begin{aligned} \mathbf{Cocone}(G; A) &\longrightarrow \mathbf{Cocone}(GF; A) \\ \alpha &\mapsto \alpha F \end{aligned} \tag{15}$$

が全単射であることをいう. 終的な関手のことを**終関手** (final functor) と呼ぶ.  $\blacklozenge$

次の主張より, 終関手  $\mathbf{I} \xrightarrow{F} \mathbf{J}$  があるときには,  $\mathbf{J}$  型余極限の計算は  $\mathbf{I}$  型余極限の計算へ帰着される.

**Proposition A.2.**  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  を終関手とする. このとき, 全単射 [\(15\)](#) について

$$\alpha \text{ が余極限錐} \iff \alpha F \text{ が余極限錐}$$

が成り立つ.

**Definition A.3.** 関手  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  が**余充満忠実** (co-fully faithful) であるとは, 任意の関手  $\mathcal{D} \xrightarrow[G_1]{G_0} \mathcal{A}$  に対して, 写像

$$\begin{aligned} \mathbf{Nat}(G_0, G_1) &\longrightarrow \mathbf{Nat}(G_0 F, G_1 F) \\ \alpha &\mapsto \alpha F \end{aligned} \tag{16}$$

\*<sup>5</sup> このことは, 例えば圏論アドベントカレンダー 2022 の記事 [\[くろの 22\]](#) で触れられている.

が全単射であることをいう. ◆

**Lemma A.4.** 圏  $\mathcal{C}$  について, 以下は同値.

- (i) 関手  $\mathcal{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$  が終的.
- (ii) 関手  $\mathcal{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$  が余充満忠実.
- (iii) 圏  $\mathcal{C}$  が連結.

*Proof.* [(i)  $\iff$  (ii)] 定義より直ちに従う.

[(ii)  $\iff$  (iii)] 読者に委ねる. □

以下で示す通り, 連結性は終関手を特徴づける.

**Theorem A.5.** 局所小圏の間の関手  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  について, 以下は同値.

- (i)  $F$  が終的.
- (ii) 
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xleftarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow \text{id} & \downarrow ! \\ & & \mathbf{1} \end{array}$$
 が絶対右 Kan 拡張.
- (iii) 任意の  $D \in \mathcal{D}$  に対し, 圏  $D/F$  が連結.

*Proof.* [(i)  $\iff$  (ii)] 定義より直ちに従う.

[(i)  $\implies$  (iii)]  $D \in \mathcal{D}$  を任意にとり, 表現可能関手  $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{D}(D, -)} \mathbf{Set}$  を考える. 集合  $X \in \mathbf{Set}$  に対し,  $F$  が終的であることの定義から, 全単射

$$\text{Cocone}(\mathcal{D}(D, -); X) \cong \text{Cocone}(\mathcal{D}(D, F-); X) \quad (17)$$

がある. 米田の補題より, (17) の左辺は  $\text{Cocone}(\mathcal{D}(D, -); X) \cong X$  と計算できる. (17) の右辺については,

$$\text{余錐 } (\mathcal{D}(D, FC) \xrightarrow{\alpha_C} X)_{C \in \mathcal{C}}$$

---

対象  $C \in \mathcal{C}$  と射  $D \xrightarrow{p} FC$  の組  $(C, p)$  に対する  $X$  の元の割り当て  $(C, p) \mapsto \alpha_{C,p}$  であって,

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p} & FC \\ & \searrow p' & \downarrow Ff \\ & & FC' \end{array}$$

を可換にする  $f$  が存在するときに  $\alpha_{C,p} = \alpha_{C',p'}$  が成り立つもの.

---

$$\text{写像 } \pi_0(D/F) \longrightarrow X$$

という 1 対 1 対応があることから,  $\text{Cocone}(\mathcal{D}(D, F-); X) \cong X^{\pi_0(D/F)}$  と計算できる. したがって全単射

$$X \cong X^{\pi_0(D/F)}$$

を得るが,  $X$  として 2 つ以上の要素をもつ有限集合 (例えば 2 点集合) を持つてくることで,  $\pi_0(D/F)$  が 1 点集合であることがわかる.

[(iii)  $\implies$  (ii)] 任意の関手  $\mathbf{1} \xrightarrow{A} \mathcal{A}$  について,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xleftarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow \text{id} & \downarrow ! \\ & & \mathbf{1} \\ & & \downarrow A \\ & & \mathcal{A} \end{array} \quad (18)$$

が右 Kan 拡張であることを示したい. 任意の  $D \in \mathcal{D}$  に対し

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xleftarrow{!} & D/F \\
 D \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\
 \mathcal{D} & \xleftarrow[F]{\text{id}} & \mathcal{C} \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow ! \\
 & & \mathbf{1}
 \end{array} \tag{19}$$

を考えると, Lemma A.4 より  $\mathbf{1} \xleftarrow{!} D/F$  は終的であるから, (19) は絶対右 Kan 拡張である. これは特に  $\mathbf{1} \xrightarrow{A} \mathcal{A}$  で保たれるので, (18) は各点右 Kan 拡張である.  $\square$

## References

- [ARV11] J. Adámek, J. Rosický, and E. M. Vitale. *Algebraic theories*. Vol. 184. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. DOI: [10.1017/CB09780511760754](https://doi.org/10.1017/CB09780511760754).
- [Adá+02] J. Adámek et al. “A classification of accessible categories”. In: *J. Pure Appl. Algebra* 175.1-3 (2002), pp. 7–30. DOI: [10.1016/S0022-4049\(02\)00126-3](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(02)00126-3) (cit. on p. 4).
- [KS06] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and sheaves*. Vol. 332. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2006. DOI: [10.1007/3-540-27950-4](https://doi.org/10.1007/3-540-27950-4).
- [Kaw24] Y. Kawase. 圏論的普遍代数学入門. 2024. URL: <https://ykawase5048.github.io/yutokawase/notes/IntroCatUnivalg.pdf> (cit. on p. 2).
- [Rie16] E. Riehl. *Category theory in context*. Aurora Dover Modern Math Originals. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. URL: <https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf> (cit. on p. 2).
- [くろの 22] くろの. 極限と余積の交換—Mathlog. 2022. URL: <https://mathlog.info/articles/3692> (cit. on p. 12).