# 圏論的普遍代数学入門

Yuto Kawase

2024 年 11 月 24 日 [*]

**概要**

普遍代数学は, 等式理論というものについて考えることで, 代数概念を統一的に扱ってきた. 本稿では、代数を圏論的に扱う方法として Lawvere 理論とモナドの 2 つを紹介し, それらが等式理論と等価であることを見る. 詳細な証明等は省き, 主にアイデアの部分に注目する.

## 目次



## Terminology

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 非負整数全体の集合 |
| $S^{<\omega}$ | 集合 $S$ の元からなる有限長さの語全体の集合 |

[*] 本稿は Categories in Tokyo 第 1 回集会にて行った入門講義の資料である. このような機会を与えてくれた Ryuya Hora 氏に, 改めて感謝の意を表したい.

| | |
|---|---|
| $()$ | 空語 (長さ 0 の語) |
| **Set** | 小さい集合と写像の圏 |
| $\mathbf{Set}^S$ | 集合 $S$ で添え字付けられた集合族 ($S$-**ソート集合** ($S$-sorted set)) と写像族の圏 |
| **Grp** | (小さい) 群と群準同型の圏 |
| $\mathbb{0}$ | 空圏 (empty category) |
| $\mathbb{1}$ | 終圏 (terminal category) |
| $1$ | 1 点集合 |
| $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ | 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手圏 |
| $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ | 圏 $\mathscr{C}$ の対象のなすクラス |
| $C \in \mathscr{C}$ | $C \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ の意 |
| $\mathrm{Mor}\mathscr{C}$ | 圏 $\mathscr{C}$ の射のなすクラス |
| $\mathscr{C}(X, Y)$ | 圏 $\mathscr{C}$ の Hom クラス |
| $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathscr{C}$ | $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ の意 |
| $\mathsf{id}$ | 恒等射 |
| $\mathscr{C}/C$ | 圏 $\mathscr{C}$ の $C \in \mathscr{C}$ によるスライス圏 |
| $C/\mathscr{C}$ | 圏 $\mathscr{C}$ の $C \in \mathscr{C}$ による余スライス圏 |

# 1 導入/Introduction

ほとんどの数学的対象は, “構造”(structure)” と “性質”(property) によって定義される. 実際, 数学の定義は “$\cdots$ とは S であって P を満たすもの” という形をとり, この場合 S が “構造” であり, P が “性質” である. いわゆる “代数” と呼ばれる概念も例外ではない. “代数” の典型例として, 群の定義を思い出そう.

**Definition 1.1.** **群** (group) とは, 集合 $G$ と次のデータ

- 写像 $G \times G \xrightarrow{\cdot} G$;
- 元 $e \in G$;
- 写像 $G \xrightarrow{()^{-1}} G$

からなる組 $(G, \cdot, e, ()^{-1})$ であって, 以下を満たすもの.

- 任意の $x, y, z \in G$ に対し, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- 任意の $x \in G$ に対し, $x \cdot e = x = e \cdot x$;
- 任意の $x \in G$ に対し, $x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$. ♦

群は集合上のいくつかの**演算** $(\cdot, e, ()^{-1})$ と, いくつかの**等式**によって定義されると言え, この場合は演算が “構造” であり, 等式が “性質” に当てはまる. ところが, 次のような群の別定義を見てみると, 何が “構造” で, 何が “性質” であるかはいささか曖昧であることが分かる:

**Definition 1.2.** **群** (group) とは, 集合 $G$ と次のデータ

- 写像 $G \times G \xrightarrow{\cdot} G$

の組 $(G, \cdot)$ であって, 以下を満たすもの.

- 任意の $x, y, z \in G$ に対し, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- ある元 $e \in G$ であって $x \cdot e = x = e \cdot x$ を満たすものが存在する;

- 任意の $x \in G$ に対し, ある元 $x^{-1} \in G$ であって $x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$ を満たすものが存在する. ♦

Definition 1.1 では 2 項演算 $\cdot$, 0 項演算 $e$, 1 項演算 $()^{-1}$ の 3 つが演算 (=構造) として登場した一方, Definition 1.2 では 2 項演算 $\cdot$ のみが表れており, 残る 2 つの演算は, 等式 (=性質) の中に組み込まれている. このような 2 通りの群の定義は, 互いに同値であることが知られている. 実際, 一方の意味の群が与えられれば他方の意味の群が得られるし, その逆対応も得られる.

しかしながら, それだけでは両者が群という**同じ**数学的対象を定義しているとは言えない. 数学的対象の間の射は "構造" を保つもののことである, と信じている人からすると, 代数の "射" とは演算を保つ写像ということになり, Definition 1.1 の立場からすれば, 群準同型とは写像であって 3 つの演算 $(\cdot, e, ()^{-1})$ を保つもののことだと言えるし, Definition 1.2 の立場からすれば, 群準同型とは写像であって演算 $\cdot$ を保つもののことだと言えるだろう. すると今度は, この 2 つの群準同型の概念が一致しているかどうかが問題となる. 実際にはこの 2 つは一致するため特に問題にはならないのだが, 群以外の他の概念ではそうとも限らない. 例えば, **束**という概念には, 同値な 2 通りの定義がある:

**Definition 1.3.** **束** (lattice) とは, 集合 $L$ と次のデータ

- 写像 $L \times L \xrightarrow{\wedge} L$;
- 写像 $L \times L \xrightarrow{\vee} L$

からなる組 $(L, \wedge, \vee)$ であって, 以下を満たすもの.

- 任意の $x, y, z \in L$ に対し, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ かつ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
- 任意の $x, y \in L$ に対し, $x \wedge y = y \wedge x$ かつ $x \vee y = y \vee x$;
- 任意の $x, y \in L$ に対し, $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$. ♦

**Definition 1.4.** **束** (lattice) とは, 集合 $L$ と次のデータ

- 部分集合 $\leq \subseteq L \times L$

からなる組 $(L, \leq)$ であって, 以下を満たすもの.

- $\leq$ は $L$ 上の半順序である;
- 任意の $x, y \in L$ に対し, 下限 $x \wedge y$ と上限 $x \vee y$ が存在する. ♦

この 2 つの定義は, それぞれ異なる "射" の概念を与えている. Definition 1.3 の立場に立てば束準同型とは $\wedge, \vee$ を保つ写像のことだと言えるが, Definition 1.4 の立場からすれば, "束準同型" とは半順序 $\leq$ を保つ写像ということになり, それが上限 $\vee$ や下限 $\wedge$ を保つという保障はどこにもない.

まとめると, 群には少なくとも 2 つの定義があり, 同じ対象を定義していると言える. 一方で, 束にも 2 つの定義があるが, 射の概念まで考えるなら別の対象を定義していると言える. このような現象を正確にとらえるために, 概念の "定義" に相当する部分と実際の数学的対象に相当する部分とを分離して考えたい. 群の場合に当てはめて言うと, "群の定義そのもの" と "群 1 つ 1 つ" を分けて考えるのである. 前者は群の**理論** (theory) と呼ばれ, 実際の群 1 つ 1 つは群の理論の**モデル** (model) と呼ばれる. この理論とモデルという考え方は, 本来は数学概念一般に適用できるものであるが, 本稿では特に "代数" という範囲に限定して話を進めることにする.

群の**理論** $\cdots$ 群の定義そのもの
群の理論の**モデル** $\cdots$ 群 1 つ 1 つ

さて, 各代数概念の "理論" や "モデル" を実際にどのように定義するか, というのが本稿の主題である. 本稿では, これに対する 3 つのアプローチを紹介する. 1 つ (Section 2) は素朴で古典的なものであり, 残る 2 つ (Sections 3 and 4) は圏論的だ.

| | 理論 (theory) | モデル (model) |
|---|---|---|
| 古典的アプローチ (Section 2) | **等式理論** $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 |
| 関手的アプローチ (Section 3) | *Lawvere* **理論** $\mathscr{T}$ | 有限積を保つ関手 $\mathscr{T} \to \mathbf{Set}$ |
| モナディックアプローチ (Section 4) | 有限的**モナド** $T$ | $T$-代数 |

表 1　代数概念への 3 つのアプローチ

これら 3 つのアプローチを紹介したのち, 本稿の最後では, それらがある意味等価であることを見る (Section 5). 少々大げさであるが, 本稿ではこのような**等式理論**–*Lawvere* **理論**–**モナド**の等価性を**三位一体**と呼ぶことにする.

# 2　古典的アプローチ/Classical approach

## 2.1　多ソート等式理論/Many-sorted equational theories

**Definition 2.1** (シグネチャ)**.** $S$ を集合とする. $S$-**シグネチャ** (signature) とは,

- 集合 $\Omega$,
- 写像 $\mathsf{ar}\colon \Omega \to S^{<\omega}$,
- 写像 $\mathsf{t}\colon \Omega \to S$

からなる組 $(\Omega, \mathsf{ar}, \mathsf{t})$ のこと. $S$ の元は**ソート** (sort) と呼ばれる. $\Omega$ の元のことを**関数記号** (function symbol) と呼ぶ. 各関数記号 $\omega \in \Omega$ について, ソートの語 $\mathsf{ar}(\omega) = (s_1, \dots, s_n)$ はその**アリティ** (arity) と呼ばれ, ソート $\mathsf{t}(\omega) = s$ は**型** (type) と呼ばれる.

以下では単に $\Omega$ と書いてシグネチャを表し, 各関数記号 $\omega \in \Omega$ のアリティと型はしばしば

$$\omega\colon \mathsf{ar}(\omega) \to \mathsf{t}(\omega)$$

と書かれる. ♦

以下では, ソート $s \in S$ ごとに可算無限集合 $\mathsf{Var}_s$ を非交和に取り固定する. $\mathsf{Var}_s$ の元は型 $s$ の**変数** (variable) と呼ばれ, $x_1, x_2, y, z, \dots$ などの文字で書かれる. $x{:}s$ と書いて, $x$ が型 $s$ の変数であることを表す. 変数 $x$ の型を $\mathsf{t}(x)$ と書くこともある.

**Definition 2.2** (文脈)**.** **文脈** (context) とは, 相異なる有限個の変数からなる語 $(x_1, \dots, x_n)$ のこと. $\vec{x}$ とも書き, さらに $n = 0$ の時は $()$ と書く. しばしば $(x_1{:}s_1, \dots, x_n{:}s_n)$ や $\vec{x}{:}\vec{s}$ と書いて, 変数の型を明示する. ♦

**Definition 2.3** (項)**.** $\Omega$ を $S$-シグネチャとし, $\vec{x}{:}\vec{s} = (x_1{:}s_1, \dots, x_n{:}s_n)$ を文脈とする. 文脈 $\vec{x}$ における $\Omega$-**項** ($\Omega$-term) は, 以下の規則によって再帰的に定義される. 同時に, $\Omega$-項に対し**型**と呼ばれるソートが割り当てられ, $\tau{:}s$ と書いて $\Omega$-項 $\tau$ の型が $s \in S$ であることを表す:

- 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $x_i$ は文脈 $\vec{x}$ における型 $s_i$ の $\Omega$-項である.
- 関数記号 $\omega\colon (s'_1, \dots, s'_m) \to s' \in \Omega$ と文脈 $\vec{x}$ における $\Omega$-項 $\tau_1{:}s'_1, \dots, \tau_m{:}s'_m$ が与えられたとき, 文字列 $\omega(\tau_1, \dots, \tau_m)$ は文脈 $\vec{x}$ における型 $s'$ の $\Omega$-項である.

文脈 $\vec{x}$ における $\Omega$-項は, $\vec{x}.\tau$ や $\tau(x_1, \dots, x_n)$ などと書かれる. $\Omega$-項 $\vec{x}.\tau$ の型は $\mathsf{t}(\vec{x}.\tau)$ や $\mathsf{t}(\tau)$ などとも書かれる. $\mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_s$ と書いて, 文脈 $\vec{x}$ における型 $s$ の $\Omega$-項全体の集合を表す. ♦

**Definition 2.4** (等式)**.** $\Omega$ を $S$-シグネチャとする. $\Omega$-**等式** ($\Omega$-equation) とは, 同一文脈における 2 つの $\Omega$-項 $\vec{x}.\tau, \vec{x}.\tau'$ の組であって, 型が一致するもののこと. $\vec{x}.(\tau = \tau')$ や $\tau \overset{\vec{x}}{=} \tau'$, $\tau(x_1, \dots, x_n) = \tau'(x_1, \dots, x_n)$ などと書かれる. ♦

**Definition 2.5** (等式理論). $S$ を集合とする. $S$-**ソート等式理論** ($S$-sorted equational theory) とは, $S$-シグネチャ $\Omega$ と, $\Omega$-等式からなる集合 $E$ の組 $(\Omega, E)$ のこと. $S$ が一点集合のとき, $S$-ソート等式理論は**単ソート等式理論** (single-sorted equational theory) とも呼ばれる. ◆

**Example 2.6** (群). 群の単ソート等式理論 $(\Omega_{\mathsf{grp}}, E_{\mathsf{grp}})$ が、以下のように定義される.

$$S := \{*\}$$

$$\Omega_{\mathsf{grp}} := \{e, i, m\}, \quad e\colon () \to *, \quad i\colon * \to *, \quad m\colon (*, *) \to *$$

$$E_{\mathsf{grp}} := \left\{ \begin{aligned} &m(m(x,y),z) \overset{x,y,z}{=\!=} m(x, m(y,z)); \\ &m(e,x) \overset{x}{=\!=} x, \quad m(x,e) \overset{x}{=\!=} x; \\ &m(i(x),x) \overset{x}{=\!=} e, \quad m(x,i(x)) \overset{x}{=\!=} e \end{aligned} \right\}$$

ここで, $m$ は群の 2 項演算, $e$ は単位元, $i$ は逆元をとる 1 項演算を表現している. ◆

**Example 2.7** (スーパー環). スーパー環の $S := \{\mathsf{even}, \mathsf{odd}\}$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ が、以下のように定義される.

$$\Omega := \left\{ \begin{gathered} 0_{\mathsf{e}}\colon () \to \mathsf{even}, \quad -_{\mathsf{e}}\colon \mathsf{even} \to \mathsf{even}, \quad +_{\mathsf{e}}\colon (\mathsf{even}, \mathsf{even}) \to \mathsf{even}; \\ 0_{\mathsf{o}}\colon () \to \mathsf{odd}, \quad -_{\mathsf{o}}\colon \mathsf{odd} \to \mathsf{odd}, \quad +_{\mathsf{o}}\colon (\mathsf{odd}, \mathsf{odd}) \to \mathsf{odd}; \\ 1\colon () \to \mathsf{even}; \\ \cdot_{\mathsf{ee}}\colon (\mathsf{even}, \mathsf{even}) \to \mathsf{even}, \quad \cdot_{\mathsf{eo}}\colon (\mathsf{even}, \mathsf{odd}) \to \mathsf{odd}; \\ \cdot_{\mathsf{oe}}\colon (\mathsf{odd}, \mathsf{even}) \to \mathsf{odd}, \quad \cdot_{\mathsf{oo}}\colon (\mathsf{odd}, \mathsf{odd}) \to \mathsf{even} \end{gathered} \right\}$$

$$E := (\text{省略})$$ ◆

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | ??? | ??? |
| ??? (Section 3) | ??? | ??? | ??? |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

## 2.2 バラエティ/Varieties

**Definition 2.8** (構造). $\Omega$ を $S$-シグネチャとする. $\Omega$-**構造** (structure) $\mathbb{A}$ とは, 次のデータ

- $S$ で添え字付けられた集合族 $(A_s)_{s \in S}$;
- 各関数記号 $\omega\colon (s_1, \ldots, s_n) \to s \in \Omega$ に対する, 写像 $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \xrightarrow{[\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}} A_s$ の割り当て.

からなる組 $\mathbb{A} = ((A_s)_s, [\![\cdot]\!]_{\mathbb{A}})$ のこと. $\Omega$-構造 $\mathbb{A} = ((A_s)_s, [\![\cdot]\!]_{\mathbb{A}})$ に対し, $A_s$ はソート $s$ の**台集合**と呼ばれる. ◆

**Definition 2.9.** $\mathbb{A}$ を $\Omega$-構造とする. 割り当て $\omega \mapsto [\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}$ は, 一般の $\Omega$-項に対する割り当てへと拡張される. 実際, $\vec{x}{:}\vec{s} = (x_1{:}s_1, \ldots, x_n{:}s_n)$ を文脈としたとき, 以下の規則によって, 各 $\Omega$-項 $\vec{x}.\tau$ に対し写像 $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \xrightarrow{[\![\vec{x}.\tau]\!]_{\mathbb{A}}} A_{\mathsf{t}(\tau)}$ を割り当てることができる:

- 各 $1 \le i \le n$ に対し, 写像 $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \xrightarrow{[\![\vec{x}.x_i]\!]_{\mathbb{A}}} A_{s_i}$ を $i$ 番目の射影と定める;

- 関数記号 $\omega\colon (s'_1,\ldots,s'_m) \to \mathsf{t}(\omega) \in \Omega$ と文脈 $\vec{x}$ における $\Omega$-項 $\tau_1{:}s'_1,\ldots,\tau_m{:}s'_m$ が与えられたとき, 写像 $A_{s_1}\times\cdots\times A_{s_n} \xrightarrow{[\![\vec{x}.\omega(\tau_1,\ldots,\tau_m)]\!]_{\mathbb{A}}} A_{\mathsf{t}(\omega)}$ を

$$\vec{a} \quad\mapsto\quad [\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}\left(\, [\![\vec{x}.\tau_1]\!]_{\mathbb{A}}(\vec{a}),\ldots,[\![\vec{x}.\tau_n]\!]_{\mathbb{A}}(\vec{a}) \,\right)$$

により定める. ♦

**Definition 2.10.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする.

(i) $\Omega$-構造 $\mathbb{A}$ が $\Omega$-等式 $\tau(x_1,\ldots,x_n) = \tau'(x_1,\ldots,x_n)$ **を満たす**とは, $[\![\vec{x}.\tau]\!]_{\mathbb{A}}$ と $[\![\vec{x}.\tau']\!]_{\mathbb{A}}$ が同じ写像であることを言う. このことを, $\mathbb{A} \vDash \tau(x_1,\ldots,x_n) = \tau'(x_1,\ldots,x_n)$ と書き表す.

(ii) $(\Omega, E)$-**代数** (algebra) とは, $\Omega$-構造 $\mathbb{A}$ であって $E$ に属す全ての $\Omega$-等式を満たすもののことである. ♦

**Definition 2.11** (準同型)**.** $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ に対し, **準同型** (homomorphism) $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$ とは, 台集合の間の写像の族 $(A_s \xrightarrow{f_s} B_s)_{s\in S}$ であって任意の $\omega\colon (s_1,\ldots,s_n) \to \mathsf{t}(\omega) \in \Omega$ について以下を可換にするものである:

$$\begin{tikzcd}
A_{s_1}\times\cdots\times A_{s_n} \arrow[r, "{[\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}}"] \arrow[d, "f_{s_1}\times\cdots\times f_{s_n}"'] & A_{\mathsf{t}(\omega)} \arrow[d, "f"] \\
B_{s_1}\times\cdots\times B_{s_n} \arrow[r, "{[\![\omega]\!]_{\mathbb{B}}}"'] & B_{\mathsf{t}(\omega)}
\end{tikzcd}$$

♦

**Notation 2.12.** $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ に対し, $(\Omega, E)$-代数と準同型の成す圏を $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$ と書く. このような形で書ける圏のことを $S$-**ソートバラエティ** ($S$-sorted variety) と呼ぶ. $S$ が 1 点集合のときは**単ソートバラエティ** (single-sorted variety) とも呼ばれる. $E = \varnothing$ のときは $\mathbf{Alg}\,\Omega$ という記法も用いる. ♦

**Example 2.13.** 群のバラエティは群の圏と一致する. 実際, $(\Omega_{\mathsf{grp}}, E_{\mathsf{grp}})$ を群の等式理論 (Example 2.6) としたとき, 圏同型 $\mathbf{Alg}(\Omega_{\mathsf{grp}}, E_{\mathsf{grp}}) \cong \mathbf{Grp}$ が存在する. ♦

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | ??? |
| ??? (Section 3) | ??? | ??? | ??? |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

## 2.3 合同関係/Congruence

**Definition 2.14** (合同関係)**.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする. $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ 上の**合同関係** (congruence) とは, 圏 $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$ における $\mathbb{A}$ 上の内部同値関係 (internal equivalence relation) のことである. 明示的には, 各台集合 $A_s$ 上の同値関係 $\sim_s$ の族 $\sim := (\sim_s)_{s\in S}$ であって, 任意に $\omega\colon (s_1,\ldots,s_n) \to \mathsf{t}(\omega) \in \Omega$ が与えられたとき, $A_{s_1}\times\cdots\times A_{s_n}$ の元 $\vec{a}, \vec{b}$ が $a_i \sim_{s_i} b_i \ \ (1 \le i \le n)$ をみたすなら

$$[\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}(\vec{a}) \sim_{\mathsf{t}(\omega)} [\![\omega]\!]_{\mathbb{A}}(\vec{b})$$

が成立するようなものである. ♦

**Remark 2.15.** $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}$ 上の合同関係 $\sim$ が与えられると, 各台集合 $A_s$ を $\sim_s$ で割ることで新たな $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}/{\sim}$ を作ることができる. ♦

**Remark 2.16.** 群 $G$ 上の合同関係は $G$ の正規部分群と 1 対 1 に対応し, 環 $R$ 上の合同関係は $R$ の両側イデアルと 1 対 1 に対応する. ♦

## 2.4 自由–忘却随伴/Free–forgetful adjunction

**Definition 2.17** (忘却関手)**.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする. 各 $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}$ に対しその台集合族 $(A_s)_{s\in S}$ を割り当てる関手 $U_{\Omega,E}\colon \mathbf{Alg}(\Omega, E) \to \mathbf{Set}^S$ が定義できる. この関手はしばしば**忘却関手** (forgetful functor) などと呼ばれる. ♦

**Construction 2.18** (項代数)**.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とし, $\vec{x}$ を文脈とする. 文脈 $\vec{x}$ における $\Omega$-項全体の集合族 $(\mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_s)_{s\in S}$ は, 以下の割り当てによって $\Omega$-構造 $\mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})$ へ拡張する:

- 関数記号 $\omega\colon (s'_1, \ldots, s'_m) \to \mathsf{t}(\omega) \in \Omega$ に対し, 次の写像を割り当てる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_{s'_1} \times \cdots \times \mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_{s'_m} & \xrightarrow{[\![\omega]\!]_{\mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})}} & \mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_{\mathsf{t}(\omega)} \\ (\tau_1, \ldots, \tau_m) & \mapsto & \omega(\tau_1, \ldots, \tau_m) \end{array}$$

t $\mathrm{Term}_\Omega(\vec{x})_s$ 上の同値関係 $\approx_{E,s}$ を以下のように定義する:

$$\vec{x}.\tau \approx_{E,s} \vec{x}.\tau' \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \text{任意の } (\Omega, E)\text{-代数 } \mathbb{A} \text{ に対して, 写像として } [\![\vec{x}.\tau]\!]_{\mathbb{A}} = [\![\vec{x}.\tau']\!]_{\mathbb{A}} \text{ が成り立つ.}$$

すると $\approx_E := (\approx_{E,s})_{s\in S}$ は $\mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})$ 上の合同関係となり, $\Omega$-構造 $\mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})/{\approx_E}$ が得られる. この $\Omega$-構造 $\mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})/{\approx_E}$ は $(\Omega, E)$-代数となっている. ♦

**Definition 2.19.** $S$ を集合とする. $S$-ソート集合 $X = (X_s)_{s\in S}$ が**有限**であるとは, 非交和 $\coprod_{s\in S} X_s$ が有限集合であることを言う. ♦

**Definition 2.20.** 圏 $\mathbf{I}$ が**フィルター的** (filtered) であるとは, 以下を満たすことをいう:

- $\mathbf{I}$ は空でない;
- 任意の $i, j \in \mathbf{I}$ に対し, ある余錐 $\begin{array}{ccc} & \cdot & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ i & & j \end{array}$ in $\mathbf{I}$ が存在する;
- 任意の射 $i \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} j$ in $\mathbf{I}$ に対し, コフォーク[*1] $i \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{u} \cdot$ in $\mathbf{I}$ が存在する.

図式圏がフィルター的であるような余極限は, **フィルター余極限** (filtered colimit) と呼ばれる. ♦

**Lemma 2.21.** $S$ を集合とする. 任意の $S$-ソート集合は, 有限 $S$-ソート集合のフィルター余極限で書ける. ◊

*Proof.* $A = (A_s)_{s\in S}$ を $S$-ソート集合とする. $A$ の部分対象, すなわち各ソート $s$ ごとの部分集合 $B_s \subseteq A_s$ から構成される $S$-ソート集合 $B = (B_s)_s$ を考える. このような $B$ のうち有限なもの全体は, 包含関係によってフィルター的な図式を成し, その余極限は $A$ に一致する. □

**Construction 2.22** (自由関手)**.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする. $X = (X_s)_{s\in S}$ を有限 $S$-ソート集合とする. 各要素 $x \in X_s$ を変数 $x{:}s$ とみなすことで, 有限性により $X$ を文脈 $\vec{x}$ と思うことができる. そこで

[*1] $us = ut$ を満たすということ.

$\mathbb{F}_{\Omega,E}(X) := \mathbb{T}\mathrm{erm}_\Omega(\vec{x})/{\approx_E}$ とおくと, 任意の $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}$ に対して, 次のような自然な 1 対 1 対応が得られる:

$$\mathbf{Set}^S(X, U_{\Omega,E}(\mathbb{A})) \cong \mathbf{Alg}(\Omega, E)(\mathbb{F}_{\Omega,E}(X), \mathbb{A}).$$

有限とは限らない一般の $S$-ソート集合 $Y$ についても, Lemma 2.21 のフィルター余極限による表示を用いて $\mathbb{F}_{\Omega,E}(Y) := \operatorname*{Colim}_{\text{有限 } X \subseteq Y} \mathbb{F}_{\Omega,E}(X)$ と定義すれば, 同様の 1 対 1 対応が得られる. したがって, 随伴

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left=1.5, "\mathbb{F}_{\Omega,E}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Alg}(\Omega, E) \arrow[l, shift left=1.5, "U_{\Omega,E}"] \end{tikzcd}$$

を得る. 関手 $\mathbb{F}_{\Omega,E}$ はしばしば**自由関手** (free functor) などと呼ばれる. ♦

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | $\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left=1.5, "\mathbb{F}_{\Omega,E}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Alg}(\Omega, E) \arrow[l, shift left=1.5, "U_{\Omega,E}"] \end{tikzcd}$ |
| ??? (Section 3) | ??? | ??? | ??? |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

# 3 関手的アプローチ/Functorial approach

## 3.1 FP-スケッチ/FP-sketches

**Observation 3.1.** 群 $G$ に対し, 単位元 $e \in G$, 逆元をとる演算 $i$, 2 項演算 $m$ は, $\mathbf{Set}$ の図式

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] & G \arrow[loop below, "i"] & 1 \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

と思うことができる. (ここで 1 は 1 点集合) 更に, 群の公理は $\mathbf{Set}$ における可換図式として次のように書くことができる.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "e\times 1"] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "1\times e"'] \arrow[dl, equal] \\ & G & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(i,1)}"] \arrow[d, "!"] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "{(1,i)}"'] \arrow[d, "!"] \\ 1 \arrow[r, "e"] & G & 1 \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & G \times G \times G \arrow[dl, "m\times 1"'] \arrow[dr, "1\times m"] & \\ G \times G \arrow[dr, "m"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{2}$$

逆に群を (1) であって (2) を可換にするものと定義することもでき, これが**スケッチ** (sketch) という概念の基本的なアイデアである. ♦

**Definition 3.2** (FP-スケッチ)**.** FP(finite product)-**スケッチ** (sketch) とは, 次のデータからなる組 $(\mathscr{S}, L_{\mathscr{S}})$ のこと:

- 小圏 $\mathscr{S}$;
- $\mathscr{S}$ における有限離散錐 (finite discrete cone) の集合 $L_{\mathscr{S}}$.

ここで有限離散錐とは, **頂点**と呼ばれる対象 $c \in \mathscr{S}$ と有限個の射 $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_i$ の組のこと. 以下では, FP-スケッチ $(\mathscr{S}, L_{\mathscr{S}})$ のことを単に $\mathscr{S}$ と書く. ♦

**Definition 3.3.** $\mathscr{S}$ を FP-スケッチとする. $\mathscr{S}$ の**モデル** (model) とは, 関手 $\mathscr{S} \xrightarrow{M} \mathbf{Set}$ であって, 任意の錐 $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_i \in L_{\mathscr{S}}$ を極限錐へ移すもののこと. ♦

**Notation 3.4.** FP-スケッチ $\mathscr{S}$ に対し，そのモデルと自然変換の成す圏を $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ と書く．つまり，$\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ は関手圏 $[\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ の充満部分圏である． ♦

**Example 3.5** (群のスケッチ)**.** 有向グラフ

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, bend left=45, "\pi_0"] \arrow[r, bend left=15, "m_0"] \arrow[r, bend right=15, "m_1"] \arrow[r, bend right=45, "\pi_1"'] & 2 \arrow[r, bend left=70, "l"] \arrow[r, "m"] \arrow[r, bend right=70, "r"'] & 1 \arrow[l, bend right=45, "e_0"'] \arrow[l, bend right=20, "i_0"'] \arrow[l, bend left=20, "i_1"] \arrow[l, bend left=45, "e_1"] \arrow[r, bend left, "!"] \arrow[loop below, "i"] & 0 \arrow[l, bend left, "e"]
\end{tikzcd}$$

と関係式

$$\begin{aligned} le_0 = e!,\quad re_0 = 1 \\ le_1 = 1,\quad re_1 = e! \\ me_0 = 1 = me_1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} li_0 = i,\quad ri_0 = 1 \\ li_1 = 1,\quad ri_1 = i \\ mi_0 = e! = mi_1 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} r\pi_0 = l\pi_1 \\ lm_0 = m\pi_0,\quad rm_0 = r\pi_1 \\ lm_1 = l\pi_0,\quad rm_1 = m\pi_1 \\ mm_0 = mm_1 \end{aligned} \tag{5}$$

で生成される小圏を $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ とし，$L_{\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}}$ の元として

$$\begin{tikzcd}
& 3 \arrow[dl, "l\pi_0"'] \arrow[d, "r\pi_0 = l\pi_1"] \arrow[dr, "r\pi_1"] & \\
1 & 1 & 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "r"] & \\
1 & & 1
\end{tikzcd}
\qquad
0$$

の 3 つを選択しよう．この FP-スケッチ $(\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}, L_{\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}})$ のモデルは群と (up to iso で) 一致する．実際 (3) が単位律を，(4) が逆元律を，(5) が結合律を表していて，圏同値 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}_{\mathsf{grp}} \simeq \mathbf{Grp}$ が成立することが分かる． ♦

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | $\mathbf{Set}^S \underset{U_{\Omega,E}}{\overset{\mathbb{F}_{\Omega,E}}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ |
| 関手的 (Section 3) | FP-スケッチ $\mathscr{S}$ | $\mathscr{S}$ のモデル $\mathscr{S} \to \mathbf{Set}$ | ??? |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

**Observation 3.6.** ここまでで，FP-スケッチ $\mathscr{S}$ とそのモデルの概念，そしてモデル全体の圏 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ を定義してきた．では等式理論のときと同様に，スケッチについても "忘却関手" を定義できるだろうか? $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \to \mathbf{Set}^S$ という形の関手を得るためには，少なくともソート全体の集合 $S$ を付加的に与える必要があるだろう．最初に思いつく安

易な方法は, $S := \mathrm{Ob}\mathscr{S}$ と置き, スケッチ $\mathscr{S}$ のすべての対象をソートと見なすものである. 実際このように定義すると, 離散圏 $S$ から $\mathscr{S}$ への自明な関手 $S \xrightarrow{\iota} \mathscr{S}$ を考えることで, 望みの関手を得ることができる:

$$\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \xrightarrow{\text{包含}} [\mathscr{S}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{-\circ\iota} [S, \mathbf{Set}] = \mathbf{Set}^S. \tag{6}$$

ところが, この方法には問題がある. Example 3.5 の群のスケッチ $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ について (6) で得られる関手を考えると, この関手は群 $G$ を 1 点集合 1, 台集合 $G$, 直積集合 $G \times G$ と $G \times G \times G$ の 4 つ組 $(1, G, G \times G, G \times G \times G)$ へ送ることになる. 群の理論を単ソートとして扱うことができていないのである.

より正しいソートの概念を得るためには, 群のスケッチ $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ においては $1 \in \mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ が明らかに特別な対象であり, 他の対象 $3, 2, 0 \in \mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ はある意味 $1 \in \mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ から "生成" されているのだ, という考察が重要となる. ♦

**Definition 3.7.** $S$ を集合とする. $S$-**ソート付き** *FP*-**スケッチ** ($S$-sorted FP-sketch) とは, 次のデータ

- FP-スケッチ $(\mathscr{S}, L_{\mathscr{S}})$;
- 写像 $S \xrightarrow{|\cdot|_{\mathscr{S}}} \mathrm{Ob}\mathscr{S}$

から成り, 以下を満たす任意の部分集合 $C \subseteq \mathrm{Ob}\mathscr{S}$ に対して $C = \mathrm{Ob}\mathscr{S}$ が成立するものである.

- 任意の $s \in S$ に対し, $|s|_{\mathscr{S}} \in C$;
- $c_i \in C$ $(\forall i)$ を満たす任意の $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_i \in L_{\mathscr{S}}$ に対し, $c \in C$. ♦

**Definition 3.8** (忘却関手)**.** $\mathscr{S}$ を $S$-ソート付き FP-スケッチとする. 以下で定義される関手 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \xrightarrow{U_{\mathscr{S}}} \mathbf{Set}^S$ を**忘却関手** (forgetful functor) と呼ぶ:

$$U_{\mathscr{S}}\colon \mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \xrightarrow{\text{包含}} [\mathscr{S}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{-\circ|\cdot|_{\mathscr{S}}} [S, \mathbf{Set}] = \mathbf{Set}^S.$$

ここで, $|\cdot|_{\mathscr{S}}$ を離散圏からの関手 $S \to \mathscr{S}$ と見なした. ♦

自由関手, すなわち $U_{\mathscr{S}}$ の左随伴を構成するために, 次の補題が必要となる.

**Lemma 3.9** (Ehresmann–Kennison)**.** FP-スケッチ $\mathscr{S}$ に対して, 充満部分圏 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \subseteq [\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ は反映的. ♢

*Proof.* ここでは Fact A.5 を認め, $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ が小直交クラスであることのみを示す. $\mathscr{S}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{Z} [\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ を米田埋め込みとする. 各離散錐 $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_i \in L_{\mathscr{S}}$ に対して, 余積の普遍性で得られる以下のような自然変換を考える:

$$\coprod_i Zc_i \xrightarrow{(Zp_i)_i} Zc \quad \text{in } [\mathscr{S}, \mathbf{Set}] \tag{7}$$

すると, 任意の関手 $M \in [\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ に対し次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathscr{S}, \mathbf{Set}](Zc, M)} \arrow[r, "-\circ(Zp_i)_i"] \arrow[dd, "\cong"'] & {[\mathscr{S}, \mathbf{Set}](\coprod_i Zc_i, M)} \arrow[d, "\cong"] \\
& {\prod_i [\mathscr{S}, \mathbf{Set}](Zc_i, M)} \arrow[d, "\cong"] \\
Mc \arrow[r, "(Mp_i)_i"'] & \prod_i Mc_i
\end{tikzcd} \quad \text{in } \mathbf{Set}.$$

したがって, $M$ が射 (7) と直交することと $M$ が離散錐 $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_i$ を極限錐へ移すことは同値である. そこで $\Lambda$ を $L_{\mathscr{S}}$ に属す離散錐から得られる射 (7) 全体とすれば, $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} = \Lambda^{\perp}$ が成立し, $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \subseteq [\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ は小直交クラスである. □

**Notation 3.10.** 包含関手 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \hookrightarrow [\mathscr{S}, \mathbf{Set}]$ の左随伴を $[\mathscr{S}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{r_{\mathscr{S}}} \mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ と書くことにする. ♦

**Theorem 3.11.** $\mathscr{S}$ を $S$-ソート付き FP-スケッチとする. このとき, Definition 3.8 の忘却関手 $U_{\mathscr{S}}$ は左随伴 $F_{\mathscr{S}}$ を持つ.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "F_{\mathscr{S}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \arrow[l, shift left, "U_{\mathscr{S}}"] \end{tikzcd}$$ ♢

*Proof.* 離散圏からの関手 $S \xrightarrow{|\cdot|_{\mathscr{S}}} \mathscr{S}$ に沿った左 Kan 拡張を考えることで, 以下の随伴を得る.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "\mathrm{Lan}_{|\cdot|_{\mathscr{S}}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend left, dotted, "F_{\mathscr{S}}"] & {[\mathscr{S}, \mathbf{Set}]} \arrow[l, shift left, "- \circ |\cdot|_{\mathscr{S}}"] \arrow[r, shift left, "r_{\mathscr{S}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \arrow[l, shift left, hook, "包含"] \arrow[ll, bend left, "U_{\mathscr{S}}"] \end{tikzcd}$$

□

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | $\mathbf{Set}^S \underset{U_{\Omega,E}}{\overset{\mathbb{F}_{\Omega,E}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ ($\perp$) |
| 関手的 (Section 3) | $S$-ソート付き FP-スケッチ $\mathscr{S}$ | $\mathscr{S}$ のモデル $\mathscr{S} \to \mathbf{Set}$ | $\mathbf{Set}^S \underset{U_{\mathscr{S}}}{\overset{F_{\mathscr{S}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ ($\perp$) |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

## 3.2 Lawvere 理論/Lawvere theories

実は, FP-スケッチの概念はより特殊な場合に帰着することができる. 具体的には, FP-スケッチ $(\mathscr{S}, L_{\mathscr{S}})$ に次のような制約を考える.

- $L_{\mathscr{S}}$ に属す錐は, $\mathscr{S}$ において既に極限錐, すなわち有限積である;
- $L_{\mathscr{S}}$ には, $\mathscr{S}$ に存在する全ての有限積が属している;
- 小圏 $\mathscr{S}$ には, 任意の有限積が存在する.

この条件は少々強すぎるように思われるかもしれないが, 実際には一般の FP-スケッチとほとんど等価な議論を展開することができる. 上記の条件をみたす特殊な FP-スケッチは *Lawvere* **理論**と呼ばれ, そのより簡潔な定義は以下のとおりである:

**Definition 3.12.**

(i) *Lawvere* **理論** (Lawvere theory) とは, 有限積を持つ小圏 $\mathscr{T}$ のこと.
(ii) Lawvere 理論 $\mathscr{T}$ の**モデル**とは, 有限積を保つ関手 $\mathscr{T} \to \mathbf{Set}$ のこと.

$L_{\mathscr{T}}$ を $\mathscr{T}$ における有限積全体と定めることで, Lawvere 理論 $\mathscr{T}$ は特別な FP-スケッチと見なすことができる. ♦

**Remark 3.13.** Lawvere 理論 $\mathscr{T}$ を特別な FP-スケッチと見なすことで, $S$-**ソート付き** *Lawvere* **理論**の定義が得られるが, 本稿におけるこのような Lawvere 理論のソートの概念は, 慣習的なものとは少々異なっている. $S$-ソート付き Lawvere 理論 $\mathscr{T}$ には特別な対象 $(|s| \in \mathscr{T})_{s \in S}$ が選択されており, ソートの定義により, $\mathscr{T}$ の任意の対象は $(|s|)_s$ の有限直積で表示することができる. 留意すべきは, ここで $\mathscr{T}$ の対象を $(|s|)_s$ の有限直積で表示する方法は一意とは

限らないという点である．慣習的には一意性が従うような定義が用いられるが，そのように定義を変更してもモデルの表現能力は等価であるため，本稿ではスケッチのソート概念との都合上，別の定義を用いた． ♦

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | $\mathbf{Set}^S \underset{U_{\Omega,E}}{\overset{\mathbb{F}_{\Omega,E}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ ($\perp$) |
| 関手的 (Section 3) | $S$-ソート付き FP-スケッチ $\mathscr{S}$ ($S$-ソート付き Lawvere 理論 $\mathscr{T}$) | $\mathscr{S}$ のモデル $\mathscr{S} \to \mathbf{Set}$ (有限積を保つ関手 $\mathscr{T} \to \mathbf{Set}$) | $\mathbf{Set}^S \underset{U_{\mathscr{S}}}{\overset{F_{\mathscr{S}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$ ($\perp$) $\left(\mathbf{Set}^S \underset{U_{\mathscr{T}}}{\overset{F_{\mathscr{T}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mod}\,\mathscr{T}\right)$ ($\perp$) |
| ??? (Section 4) | ??? | ??? | ??? |

## 4 モナディックアプローチ/Monadic approach

**Observation 4.1.** 次なるアプローチへたどり着くためには，等式理論における "項" の概念を捉えなおすことが鍵となる．等式理論 $(\Omega, E)$ についての $\Omega$-項は，変数から出発して $\Omega$ の演算を繰り返し適用することで得られるものであった．演算と項とをあまり区別せずに考えると，以下の 2 点が "項" という概念の本質を突いているように思われる:

**変数**: "変数" と呼ばれる特別な項が与えられている．

**代入**: 項 1 つに複数の項を "代入" し，新たな項を作ることができる．

実は自由関手 $\mathbf{Set}^S \xrightarrow{\mathbb{F}_{\Omega,E}} \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ を使うことで，この "変数" と "代入" という二大特徴をある程度抽象的なレベルで再現することができる．

Construction 2.22 によると自由関手 $\mathbb{F}_{\Omega,E}$ は項代数によって与えられ，Construction 2.18 によれば項代数とは，$\Omega$-項全体を，$E$ から導かれるすべての等式で割ったものであった．そこで随伴 $\mathbb{F}_{\Omega,E} \dashv U_{\Omega,E}$ の単位 (unit) の $X \in \mathbf{Set}^S$ 成分

$$X \longrightarrow U_{\Omega,E}\mathbb{F}_{\Omega,E}(X) = \mathrm{Term}_\Omega(X)/{\approx_E} \quad \text{in } \mathbf{Set}^S \tag{8}$$

を考えると，これは $X$ の要素を変数という特別な項に移す写像 (族) であり，"変数" 概念そのものを上手く捉えているように思える．"代入" についても考えてみよう．自由–忘却随伴により，$S$-ソート集合 $X \in \mathbf{Set}^S$ と $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}$ について次の 1 対 1 対応がある:

$$\frac{\mathbb{F}_{\Omega,E}(X) \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{A} \quad \text{in } \mathbf{Alg}(\Omega, E)}{X \xrightarrow{f} U_{\Omega,E}(\mathbb{A}) \quad \text{in } \mathbf{Set}^S} \tag{9}$$

ここで写像族 $f$ を $\mathbb{A}$ のいくつかの要素の選択と考えると，対応する 代数の射 $\hat{f}$ は，文脈 "$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$" における $\Omega$-項 $\tau$[*2]に対し，$f$ が選択している $\mathbb{A}$ の要素を代入し，その結果を割り当てるものとなっている:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_{\Omega,E}(X) & \xrightarrow{\quad \hat{f} \quad} & \mathbb{A} \\ \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ の同値類} & \mapsto & [\![\tau]\!]_{\mathbb{A}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \end{array}$$

[*2] 正確には，その同値類

すなわち, 随伴の対応 (9) は, “Ω-項に $\mathbb{A}$ の要素を代入する” 操作を表している. 更に言えば, 対応 (9) において全ての写像族 $f$ を考える必要はなく, 恒等写像族 $U_{\Omega,E}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\mathsf{id}} U_{\Omega,E}$ のみを考えれば十分だ:

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_{\Omega,E}U_{\Omega,E}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\hat{\mathsf{id}}} \mathbb{A} \quad \text{in } \mathbf{Alg}(\Omega,E) \\ \hline\hline U_{\Omega,E}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\mathsf{id}} U_{\Omega,E}(\mathbb{A}) \quad \text{in } \mathbf{Set}^S \end{array} \tag{10}$$

ここで得られた代数の射 $\hat{\mathsf{id}}$ は, ちょうど随伴 $\mathbb{F}_{\Omega,E} \dashv U_{\Omega,E}$ の余単位である. つまり, 余単位の $\mathbb{A}$ 成分は, “Ω-項に $\mathbb{A}$ の要素を代入する” 操作そのものである.

さて, 我々は “項に項を代入する” 操作を再現したいのであったから, $(\Omega, E)$-代数 $\mathbb{A}$ として, Ω-項の成す項代数 $\mathbb{F}_{\Omega,E}(X)$ を持ち出せばよい. まとめると, “項” のもつ “変数” という特徴は随伴の単位の $X \in \mathbf{Set}^S$ 成分 (8) で再現でき, 他方で “代入” という特徴は随伴の余単位の $\mathbb{F}_{\Omega,E}(X) \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ 成分

$$\mathbb{F}_{\Omega,E}U_{\Omega,E}\mathbb{F}_{\Omega,E}(X) \xrightarrow{\hat{\mathsf{id}}} \mathbb{F}_{\Omega,E}(X) \quad \text{in } \mathbf{Alg}(\Omega,E)$$

によって再現される. 以上で述べた方針で “項” の概念を圏論的に抽象化したものが**モナド** (monad) であり, それ自体が “理論” の役割を果たすことになる. ♦

**Definition 4.2** (モナド)**.** 圏 $\mathscr{C}$ 上の**モナド** (monad) とは,

- 関手 $\mathscr{C} \xrightarrow{T} \mathscr{C}$;
- 自然変換 $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, equal, ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "T"', ""{name=D, above}] & \mathscr{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\eta"] \end{tikzcd}$ ;
- 自然変換 $\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "T"'] & {} & \mathscr{C} \end{tikzcd}$

からなる組 $(T, \eta, \mu)$ であって, 以下を満たすもの:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[dr, "T"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, bend left=50, equal] \arrow[ur, bend right=20, "T"'] \arrow[rr, "T"'] \arrow[ur, phantom, bend left=15, "\Downarrow\eta"] & \Downarrow\mu & \mathscr{C} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, bend right=50, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathsf{id}"] & \mathscr{C} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[dr, bend right=50, equal] \arrow[dr, bend left=20, "T"] \arrow[dr, phantom, bend right=15, "\eta\Downarrow"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "T"'] & \mu\Downarrow & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[r, "T"] & \mathscr{C} \arrow[dr, "T"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "T"] \arrow[urr, bend right=15, "T"'] \arrow[rrr, "T"'] & \Downarrow\mu & \Downarrow\mu & \mathscr{C} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathscr{C} \arrow[r, "T"] \arrow[drr, bend right=15, "T"'] & \mathscr{C} \arrow[dr, "T"] & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "T"] \arrow[rrr, "T"'] & \Downarrow\mu & \mu\Downarrow & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

モナド $(T, \eta, \mu)$ のことを単に $T$ と書くこともある. ♦

**Definition 4.3** ($T$-代数)**.** $T$ を圏 $\mathscr{C}$ 上のモナドとする.

(i) $T$-**代数** ($T$-algebra) とは,

- 対象 $C \in \mathscr{C}$;
- 射 $TC \xrightarrow{\xi} C$ in $\mathscr{C}$

の組 $(C, \xi)$ であって, $\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, equal] & TC \arrow[d, "\xi"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTC \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "T\xi"'] & TC \arrow[d, "\xi"] \\ TC \arrow[r, "\xi"'] & C \end{tikzcd}$ in $\mathscr{C}$ を可換にするもの.

(ii) $T$-代数の**射** $(C, \xi) \to (D, \zeta)$ とは, $\mathscr{C}$ の射 $C \xrightarrow{f} D$ であって $\begin{tikzcd} TC \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\xi"'] & TD \arrow[d, "\zeta"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$ in $\mathscr{C}$ を可換にするもの. ♦

**Notation 4.4.** 圏 $\mathscr{C}$ 上のモナド $T$ に対し, $T$-代数と $T$-代数の射の成す圏を $\mathbf{EM}(T)$ と書く. この圏はしばしば *Eilenberg–Moore* 圏と呼ばれる. ♦

**Definition 4.5** (忘却関手)**.** $T$ を圏 $\mathscr{C}$ 上のモナドとする. 各 $T$-代数 $(C, \xi)$ に対して $C \in \mathscr{C}$ を割り当てる関手 $U^T\colon \mathbf{EM}(T) \to \mathscr{C}$ が定義できる. ♦

**Proposition 4.6.** $T$ を圏 $\mathscr{C}$ 上のモナドとする. 対象 $C \in \mathscr{C}$ に対し, $TC \in \mathscr{C}$ と $TTC \xrightarrow{\mu_C} TC$ の組 $(TC, \mu_C)$ は $T$-代数になる. この割り当て $C \mapsto (TC, \mu_C)$ は忘却関手 $U^T$ の左随伴 $F^T$ を与えている:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left, "F^T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{EM}(T) \arrow[l, shift left, "U^T"] \end{tikzcd}$$ ♢

次の主張は, モナドの具体例を与えるのに便利である:

**Proposition 4.7.** 任意の随伴 $\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{A} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$ に対し, $(UF, \eta, U\varepsilon F)$ は $\mathscr{C}$ 上のモナドになる. ここで, $\eta$ と $\varepsilon$ はそれぞれ随伴の単位/余単位である. ♢

**Example 4.8.** $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ に対し, 自由–忘却随伴が誘導する $\mathbf{Set}^S$ 上のモナド

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[loop right, "U_{\Omega,E}\mathbb{F}_{\Omega,E}"] \end{tikzcd}$$

がある. これを $T_{\Omega,E}$ と書くことにする. ♦

**Observation 4.9.** Construction 2.22 を思い出すと, 自由関手 $\mathbb{F}_{\Omega,E}$ は, フィルター余極限を用い定義域を拡張することで得られたのであった. 言い換えると, モナド $U_{\Omega,E}\mathbb{F}_{\Omega,E}$ は, 有限 $S$-ソート集合についての情報だけから全体を復元できるはずである. 次の定義は, そのような特徴を上手く捉えている. ♦

**Definition 4.10.** モナド (もしくは自己関手) $T$ が**有限的** (finitary) であるとは, 関手 $\mathscr{C} \xrightarrow{T} \mathscr{C}$ がフィルター余極限を保つことを言う. ♦

**Proposition 4.11.** $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ から得られるモナド $T_{\Omega,E}$ は有限的. [*3] [*4] ♢

| | 理論 | モデル | 自由–忘却随伴 |
|---|---|---|---|
| 古典的 (Section 2) | $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ | $(\Omega, E)$-代数 | $\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "\mathbb{F}_{\Omega,E}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Alg}(\Omega, E) \arrow[l, shift left, "U_{\Omega,E}"] \end{tikzcd}$ |
| 関手的 (Section 3) | $S$-ソート付き FP-スケッチ $\mathscr{S}$ ($S$-ソート付き Lawvere 理論 $\mathscr{T}$) | $\mathscr{S}$ のモデル $\mathscr{S} \to \mathbf{Set}$ (有限積を保つ関手 $\mathscr{T} \to \mathbf{Set}$) | $\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "F_{\mathscr{S}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \arrow[l, shift left, "U_{\mathscr{S}}"] \end{tikzcd}$ $\left(\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "F_{\mathscr{T}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mod}\,\mathscr{T} \arrow[l, shift left, "U_{\mathscr{T}}"] \end{tikzcd}\right)$ |
| モナディック (Section 4) | $\mathbf{Set}^S$ 上の有限的モナド $T$ | $T$-代数 | $\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left, "F^T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{EM}(T) \arrow[l, shift left, "U^T"] \end{tikzcd}$ |

[*3] より強く, **シフト余極限** (sifted colimit) を保つことまで言える.
[*4] 実は $\mathbf{Set}^S$ 上の自己関手について, フィルター余極限を保つこととシフト余極限を保つことは同値である.

## 5 圏論的普遍代数の三位一体/Trinity of categorical universal algebra

### 5.1 FP-スケッチと等式理論/FP-sketches and equational theories

**Theorem 5.1.** $S$-ソート等式理論 $(\Omega, E)$ に対し, ある $S$-ソート付き FP-スケッチ $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ と, 次を可換にする圏同値 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}_{\Omega,E} \simeq \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}\,\mathscr{S}_{\Omega,E} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "U_{\mathscr{S}_{\Omega,E}}"'] & & \mathbf{Alg}(\Omega, E) \arrow[dl, "U_{\Omega,E}"] \\ & \mathbf{Set}^S & \end{tikzcd} \tag{11}$$

$\Diamond$

*sketch of proof.* [*5] 以下の手順で FP-スケッチ $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ を作る:

- 各ソート $s \in S$ ごとに対象 $|s| \in \mathscr{S}_{\Omega,E}$ を用意する;
- $\Omega$ の各演算 $\omega\colon (s_1, \dots, s_n) \to t$ に対して, 対象 $|\mathsf{ar}(\omega)| \in \mathscr{S}_{\Omega,E}$, 射 $|\mathsf{ar}(\omega)| \xrightarrow{|\omega|} |t|$, $|\mathsf{ar}(\omega)| \xrightarrow{\pi_i^\omega} |s_i|$ in $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ $(1 \leq i \leq n)$ を追加し, 更に離散錐 $(\pi_i^\omega)_i$ を $L_{\mathscr{S}_{\Omega,E}}$ に追加する;
- $E$ の等式に使われている文脈 $\vec{x} = (x_i{:}s_i)_i$ ごとに, 対象 $|\vec{x}| \in \mathscr{S}_{\Omega,E}$ と射 $|\vec{x}| \xrightarrow{|\vec{x}.x_i|} |s_i|$ in $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ を追加し, 離散錐 $(|\vec{x}.x_i|)_i$ を $L_{\mathscr{S}_{\Omega,E}}$ に加える;
- $E$ の等式に現れるすべての “部分” 項 $\vec{x}.\omega(\vec{\sigma})$ に対し, 射 $|\vec{x}| \xrightarrow{|\vec{x}.\vec{\sigma}|} |\mathsf{ar}(\omega)|$ in $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ を追加する. 合成射

  $$|\vec{x}| \xrightarrow{|\vec{x}.\vec{\sigma}|} |\mathsf{ar}(\omega)| \xrightarrow{|\omega|} |\mathsf{t}(\omega)| \quad \text{in } \mathscr{S}_{\Omega,E}$$

  を $|\vec{x}.\omega(\vec{\sigma})|$ と書くことにして, 次が可換になるように $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ の射を割る;

  $$\begin{tikzcd} |\vec{x}| \arrow[r, "|\vec{x}.\vec{\sigma}|"] \arrow[dr, "|\vec{x}.\sigma_j|"'] & |\mathsf{ar}(\omega)| \arrow[d, "\pi_j^\omega"] \\ & |\mathsf{t}(\sigma_j)| \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathscr{S}_{\Omega,E} \quad (\forall j)$$

- $E$ の等式 $\tau \overset{\vec{x}}{=\!=} \tau'$ に対して, 次の 2 つの射が一致するように $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ の射を割る.

  $$\begin{tikzcd} |\vec{x}| \arrow[r, shift left, "|\vec{x}.\tau|"] \arrow[r, shift right, "|\vec{x}.\tau'|"'] & |\mathsf{t}(\tau)| \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathscr{S}_{\Omega,E}$$

割り当て $S \ni s \mapsto |s| \in \mathscr{S}_{\Omega,E}$ により, 望みの $S$-ソート付き FP スケッチ $\mathscr{S}_{\Omega,E}$ が得られる. $\square$

**Theorem 5.2.** $S$-ソート付き FP-スケッチ $\mathscr{S}$ に対し, ある $S$-ソート等式理論 $(\Omega_{\mathscr{S}}, E_{\mathscr{S}})$ と, 忘却関手と可換な圏同値 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \simeq \mathbf{Alg}(\Omega_{\mathscr{S}}, E_{\mathscr{S}})$ が存在する. $\Diamond$

*sketch of proof.* 次を満たす最小の関係 $\mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}} \subseteq \mathrm{Ob}\mathscr{S} \times S^{<\omega}$ を考える:

- $c = |s|_{\mathscr{S}}$ ならば $(c, s) \in \mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}}$;
- 錐 $(c \xrightarrow{p_i} c_i)_{1 \leq i \leq n} \in L_{\mathscr{S}}$ について, $(c_1, \vec{s}^1), \dots, (c_n, \vec{s}^n) \in \mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}}$ ならば $(c, \vec{s}^1 \cdots \vec{s}^n) \in \mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}}$.

[*5] 決して proof の FP-スケッチのことではない.

この関係 $(c, \vec{s}) \in \mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}}$ が成り立つときに "$c$ のソートは $\vec{s}$ である" と解釈することにして, 演算の集合 $\Omega_{\mathscr{S}}$ を次のように定義しよう:

$$\frac{\mathscr{S} \text{ の射 } c \xrightarrow{\omega} d \text{ であって}, (c, \vec{s}), (d, t) \in \mathsf{ofSort}_{\mathscr{S}} \text{を満たすもの.}}{\Omega_{\mathscr{S}} \text{ の演算 } \omega \colon \vec{s} \to t}$$

等式の集合 $E_{\mathscr{S}}$ を定義するためには, $\Omega$-項の概念を $\mathscr{S}$ と結びつける必要がある. 詳細な定義は省くが, "$\mathscr{S}$ の射 $f$ は $\Omega$-項 $\vec{x}.\tau$ である" と解釈されるときに $(f, \vec{x}.\tau) \in \mathsf{isTerm}_{\mathscr{S}}$ となるような関係 $\mathsf{isTerm}_{\mathscr{S}}$ を用意すれば, 等式の集合 $E_{\mathscr{S}}$ を

$$\tau \stackrel{\vec{x}}{=\!=} \tau' \quad \in E_{\mathscr{S}} \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \text{ある } \mathscr{S} \text{ の射 } f \text{ が存在して}, (f, \vec{x}.\tau), (f, \vec{x}.\tau') \in \mathsf{isTerm}_{\mathscr{S}}$$

と定義することができる. このようにして, 望みの $S$-ソート等式理論 $(\Omega_{\mathscr{S}}, E_{\mathscr{S}})$ が得られる. □

**Remark 5.3.** Theorem 5.2 と Theorem 5.1 における圏同値 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S} \simeq \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ は, 一般には圏**同型**に取り換えることはできない. 実際, Example 3.5 で群のスケッチ $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ について得た圏同値 $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}_{\mathsf{grp}} \simeq \mathbf{Grp}$ は, 圏同型にはなっていない. モデル $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}} \xrightarrow{M} \mathbf{Set}$ によって, $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ の対象 3 は直積 $M(1) \times M(1) \times M(1)$ へ移される. ところが, 直積 $M(1) \times M(1) \times M(1)$ は同型を除いてしか定まっておらず, $M(3)$ の値にはその分の自由度がある. したがって $\mathscr{S}_{\mathsf{grp}}$ のモデルは, 同型を除いたレベルでのみ実際の群と対応する. ◆

## 5.2 有限的モナドと等式理論/Finitary monads and equational theories

### 5.2.1 等式理論から有限的モナドへ/From equational theories to finitary monads

**Theorem 5.4.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする. Example 4.8 の有限的モナド $T_{\Omega,E}$ について, 次を可換にする圏同型 $\mathbf{Alg}(\Omega, E) \cong \mathbf{EM}(T_{\Omega,E})$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\Omega, E) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "U_{\Omega,E}"'] & & \mathbf{EM}(T_{\Omega,E}) \arrow[dl, "U^{T_{\Omega,E}}"] \\ & \mathbf{Set}^S & \end{tikzcd}$$

◊

**Remark 5.5.** Proposition 4.7 で, 任意の随伴 $\mathscr{C} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{A}$ から $\mathscr{C}$ 上のモナド $(T, \eta, \mu) := (UF, \eta, U\varepsilon F)$ が得られることを見た. このとき次を可換にするような関手 $K$ の存在が知られており, **比較関手** (comparison functor) と呼ばれている:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[rr, dotted, "K"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{EM}(T) \arrow[dl, "U^T"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd}$$

"この関手 $K$ が圏同値 (圏同型) になるのはいつか?" という問いの回答として, Beck による判定法 (*Beck* **のモナド性定理**/Beck's monadicity theorem) が知られており, Theorem 5.4 の証明に用いることができる. 詳細は [BW05] や [Rie16] を見るとよい. ◆

Theorem 5.4 の逆対応, すなわち与えられた有限的モナドから等式理論を作ることを考えたい. そのために, まずはシグネチャが自己関手によって捉えられることをみよう.

### 5.2.2 有限的自己関手/Finitary endofunctors

**Definition 5.6** ($H$-代数)**.** $\mathscr{C} \xrightarrow{H} \mathscr{C}$ を自己関手とする.

(i) $H$-**代数**とは,

- 対象 $C \in \mathscr{C}$;
- 射 $HC \xrightarrow{c} C \quad \text{in } \mathscr{C}$

からなる組 $(C, c)$ のこと.

(ii) $H$-代数の**射** $(C, c) \to (D, d)$ とは, 射 $C \xrightarrow{f} D \quad \text{in } \mathscr{C}$ であって $\begin{array}{ccc} HC & \xrightarrow{Hf} & HD \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ C & \xrightarrow[f]{} & D \end{array}$ in $\mathscr{C}$ を可換にするもの. ♦

**Notation 5.7.** 自己関手 $\mathscr{C} \xrightarrow{H} \mathscr{C}$ に対し, $H$-代数と $H$-代数の射のなす圏を $\mathbf{Alg}\, H$ と書くことにする. ♦

**Notation 5.8** (忘却関手)**.** 自己関手 $\mathscr{C} \xrightarrow{H} \mathscr{C}$ に対し, 対応 $(C, c) \mapsto C$ によって得られる関手を $\mathbf{Alg}\, H \xrightarrow{U^H} \mathscr{C}$ と書く. ♦

**Remark 5.9.** モナド $T$ についての $T$-代数は, $T$ を自己関手と見た時の $T$-代数とは異なる. モナド $T$ に対して, $\mathbf{EM}(T) \subseteq \mathbf{Alg}\, T$ は充満部分圏となっている. ♦

#### 5.2.3 シグネチャは自己関手である/Signatures are endofunctors

**Notation 5.10.** 集合 $S$ の語 $\vec{s} = (s_i)_i \in S^{<\omega}$ に対して, 次で与えられる $S$-ソート集合を $\langle \vec{s} \rangle \in \mathbf{Set}^S$ と書くことにする:

$$\langle \vec{s} \rangle_t := \{ i \mid s_i = t \} \quad (t \in S).$$ ♦

次に示す通り, $\langle \vec{s} \rangle$ はアリティ $\vec{s}$ の入力を表現する:

**Lemma 5.11.** 語 $\vec{s} = (s_i)_i \in S^{<\omega}$ と $S$-ソート集合 $A = (A_s)_{s \in S}$ に対し, 次の自然な同型がある:

$$\mathbf{Set}^S(\langle \vec{s} \rangle, A) \cong \prod_i A_{s_i} \quad \text{in } \mathbf{Set}.$$ ♢

**Notation 5.12** (余べき)**.** 集合 $X \in \mathbf{Set}$ と圏の対象 $C \in \mathscr{C}$ に対して, $C$ の $X$-項余積のことを $X \bullet C \in \mathscr{C}$ と書く. これを $X$ による $C$ の**余べき** (copower) と呼ぶ:

$$X \bullet C := \coprod_X C \quad \in \mathscr{C}.$$

余べきは次の普遍性をみたす:

$$\mathscr{C}(X \bullet C, D) \cong \mathbf{Set}(X, \mathscr{C}(C, D)) \qquad (\forall D \in \mathscr{C}).$$ ♦

$\Omega$-構造は, 有限的自己関手によってあらわすことができる:

**Lemma 5.13.** $\Omega$ を $S$-シグネチャとする. このとき, 有限的自己関手 $\mathbf{Set}^S \xrightarrow{H_\Omega} \mathbf{Set}^S$ と, 次を可換にする圏**同型** $\mathbf{Alg}\, H_\Omega \cong \mathbf{Alg}(\Omega, \varnothing)$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}\, H_\Omega & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Alg}(\Omega, \varnothing) \\ & {\scriptstyle U^{H_\Omega}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle U_{\Omega, \varnothing}} & \\ & \mathbf{Set}^S & \end{array}$$ ♢

*sketch of proof.* $A \in \mathbf{Set}^S$ 上の $\Omega$-構造を, 以下の手順で翻訳していく:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathbf{Set}^S \text{ 上の } \Omega\text{-構造}}{\text{各 } \omega \in \Omega \text{ に対する, 写像 } \coprod_{s \in \mathsf{ar}\omega} A_s \to A_{\mathsf{t}\omega} \text{ の割り当て}}}{\text{各 } \omega \in \Omega \text{ に対する, 写像 } \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega \rangle, A) \to \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{t}\omega \rangle, A) \text{ の割り当て}}}{\text{各 } \omega \in \Omega \text{ に対する, 射 } \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega \rangle, A) \bullet \langle \mathsf{t}\omega \rangle \to A \quad \text{in } \mathbf{Set}^S \text{ の割り当て}}}{\text{射 } \coprod_{\omega \in \Omega} \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega \rangle, A) \bullet \langle \mathsf{t}\omega \rangle \to A \quad \text{in } \mathbf{Set}^S}$$

したがって関手 $\mathbf{Set}^S \xrightarrow{H_\Omega} \mathbf{Set}^S$ を

$$H_\Omega(A) := \coprod_{\omega \in \Omega} \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega \rangle, A) \bullet \langle \mathsf{t}\omega \rangle \quad \in \mathbf{Set}^S$$

により定義すれば, $\Omega$-構造と $H_\Omega$-代数が 1 対 1 に対応し,[*6] 望みの圏同型 $\mathbf{Alg}\, H_\Omega \cong \mathbf{Alg}(\Omega, \varnothing)$ が得られる. しかも, 各演算のアリティ $\mathsf{ar}\omega$ の "有限性" から, $H_\Omega$ は有限的な自己関手となる. □

#### 5.2.4 有限的モナドから等式理論へ/From finitary monads to equational theories

**Observation 5.14.** Lemma 5.13 では, $S$-シグネチャから適切な有限的自己関手を構成した. では, 逆に有限的自己関手 $\mathbf{Set}^S \xrightarrow{K} \mathbf{Set}^S$ が与えられたときに, $S$-シグネチャ $\Omega_K$ を適切に定義して $\mathbf{Alg}\, K \cong \mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ とできるだろうか? 等式理論から作られるモナド (Example 4.8) についての観察から, $K\langle \vec{s} \rangle$ はアリティ $\vec{s}$ の演算 (項) 全体だという直感がある. そこで, $S$-シグネチャ $\Omega_K$ を以下のように定義しよう:

$$\frac{\omega \colon \vec{s} \to t \quad \in \Omega_K}{\omega \in (K\langle \vec{s} \rangle)_t}$$

すると, 以下の手順で関手 $\mathbf{Alg}\, K \longrightarrow \mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ を作ることができる:

- Lemma 5.13 より, $\mathbf{Alg}\, H_{\Omega_K} \cong \mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ である.
- 一般に自己関手の間に自然変換 $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow\theta}} \mathscr{C}$ があると, 対応

$$\begin{array}{c} GC \\ {\scriptstyle c}\downarrow \\ C \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} FC \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_C} \\ GC \\ \downarrow{\scriptstyle c} \\ C \end{array}$$

  によって, 忘却関手と可換な関手 $\mathbf{Alg}\, G \xrightarrow{\mathbf{Alg}\,\theta} \mathbf{Alg}\, F$ が誘導される.

[*6] このことは直接確認することもできるが, 実は $H_\Omega$ が各点 Kan 拡張によって与えられていることに気が付くと, その普遍性により示すこともできる. 詳細は読者に委ねる.

- 自然変換 $\begin{tikzcd}\mathbf{Set}^S \arrow[r, bend left, "H_{\Omega_K}"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_K"] & \mathbf{Set}^S\end{tikzcd}$ が次のようにして得られる:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{H_{\Omega_K}(A) \xrightarrow{\alpha_{K,A}} KA \quad \text{in } \mathbf{Set}^S}{\coprod_{\omega\in\Omega_K} \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega\rangle, A)\bullet\langle \mathsf{t}\omega\rangle \xrightarrow{\alpha_{K,A}} KA \quad \text{in } \mathbf{Set}^S}}{\text{各 } \omega\in\Omega_K \text{ に対する, 写像 } \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{ar}\omega\rangle, A) \longrightarrow \mathbf{Set}^S(\langle \mathsf{t}\omega\rangle, KA) \text{ の割り当て}}}{\text{各 } \langle t\rangle \xrightarrow{\omega} K\langle\vec{s}\rangle \quad \text{in } \mathbf{Set}^S \text{ に対する, 写像 } \begin{pmatrix} \mathbf{Set}^S(\langle\vec{s}\rangle, A) \longrightarrow \mathbf{Set}^S(\langle t\rangle, KA) \\ f \quad\mapsto\quad (Kf)\circ\omega \end{pmatrix} \text{ の割り当て}}$$

- 合成関手 $\mathbf{Alg}\,K \xrightarrow{\mathbf{Alg}\,\alpha_K} \mathbf{Alg}\,H_{\Omega_K} \cong \mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ を得る.

ここで得られた関手 $\mathbf{Alg}\,K \longrightarrow \mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ は, 当初の期待とは異なり, 一般に圏同値にすらならない. しかし, この関手は忠実充満にはなっている. この事実には $K$ が有限的であることが効いている. 詳細は省くが,

$$K \text{ が有限的} \quad \Rightarrow \quad \alpha_K \text{ の各成分が, 任意のソートについて全射} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Alg}\,\alpha_K \text{ が忠実充満}$$

のような方針で示すことができる. もっと言うと, $\mathbf{Alg}\,\alpha_K$ は対象について単射であり, しかもその像が同型で閉じていることまで分かる. 特に, $\mathbf{Alg}\,K$ は $\mathbf{Alg}(\Omega_K, \varnothing)$ の同型で閉じた充満部分圏と圏**同型**である. ♦

有限的モナドを自己関手とみなすことで, 特に以下を得る:

**Corollary 5.15.** 有限的モナド $T$ に対し, ある $S$-シグネチャ $\Omega_T$ があり, 圏同型の差を無視すれば次の包含関手が存在する:

$$\mathbf{EM}(T) \subseteq \mathbf{Alg}\,T \subseteq \mathbf{Alg}(\Omega_T, \varnothing). \tag{12}$$

しかも, これらは全て同型で閉じていて, さらに忘却関手と可換である. ◊

ここまでで, 有限的モナド $T$ についての $T$-代数の圏は, $\Omega_T$-構造の圏の同型で閉じた充満部分圏であることが分かった. 最後に考えるべきは, "包含 $\mathbf{EM}(T) \subseteq \mathbf{Alg}(\Omega_T, \varnothing)$ を特徴づける等式は存在するか?" という問題である. この種の問いについては, Birkhoff による等式クラスの特徴づけが効果的である:

**Fact 5.16** ($S$-ソート等式理論の Birkhoff の定理)**.** $(\Omega, E)$ を $S$-ソート等式理論とする. 同型で閉じた充満部分圏 $\mathscr{E} \subseteq \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ について, 次は同値である:

(i) $\Omega$-等式の集合 $E'$ が存在して, $\mathscr{E} = \mathbf{Alg}(\Omega, E \cup E')$.

(ii) $\mathscr{E} \subseteq \mathbf{Alg}(\Omega, E)$ が直積, 部分代数, 商代数, フィルター余極限をとる操作で閉じている. ◊

*Proof.* [ARV12] や [ARV11] が参考になる. □

**Theorem 5.17.** $\mathbf{Set}^S$ 上の有限的モナド $T$ に対し, ある $S$-ソート等式理論 $(\Omega_T, E_T)$ と, 次を可換にする圏**同型** $\mathbf{EM}(T) \cong \mathbf{Alg}(\Omega_T, E_T)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{EM}(T) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "U^T"'] & & \mathbf{Alg}(\Omega_T, E_T) \arrow[dl, "U_{\Omega_T, E_T}"] \\ & \mathbf{Set}^S & \end{tikzcd}$$

◊

*sketch of proof.* Corollary 5.15 の 2 つの包含 (12) が直積, 部分代数, 商代数, フィルター余極限をとる操作で閉じていることが容易に確かめられる．したがって Birkhoff の定理 (Fact 5.16) より, 望みの $\Omega_T$-等式の集合 $E_T$ が存在する． □

# 付録/Appendix

## A　直交クラス/orthogonality classes

**Definition A.1.** $\mathscr{C}$ を圏とする．

(i) 対象 $X \in \mathscr{C}$ が射 $A \xrightarrow{k} B$ in $\mathscr{C}$ に**直交する**とは, 任意の射 $A \xrightarrow{f} X$ に対し, 次を可換にする射 $B \xrightarrow{g} X$ が一意に存在することを言う:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & X \\ B \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathscr{C}.$$

(ii) 対象 $X \in \mathscr{C}$ が $\mathscr{C}$ の射の集合 $\Lambda$ に**直行する**とは, $\Lambda$ に属す任意の射に直交することを言う． ◆

**Notation A.2** (直交クラス)**.** 圏 $\mathscr{C}$ の射の集合 $\Lambda$ が与えられたとき, $\Lambda$ に直交する全ての対象の成す $\mathscr{C}$ の充満部分圏を $\Lambda^{\perp}$ と書く．このような形で表される充満部分圏のことを, **小直交クラス** (small orthogonality class) という．また, $\Lambda$ が集合であるとは限らない場合には, 単に**直交クラス** (orthogonality class) と呼ばれる． ◆

**Definition A.3.** 同型で閉じた充満部分圏 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ が**反映的** (reflective) であるとは, 包含関手 $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{C}$ が左随伴を持つことを言う．このときの左随伴関手は**反映手** (reflector) と呼ばれる． ◆

**Proposition A.4.** 任意の反映的充満部分圏[*7]は直交クラスである． ◊

*Sketch of proof.* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ を反映的充満部分圏とし, $\mathscr{C} \xrightarrow{r} \mathscr{A}$ を反映手とする．随伴の単位の $X \in \mathscr{C}$ 成分を $X \xrightarrow{\eta_X} rX$ と書くことにして $\Lambda := \{\eta_X\}_{X \in \mathscr{C}}$ とおくと, $\mathscr{A} = \Lambda^{\perp}$ となることが確かめられる． □

上の命題の逆にあたる, “(小) 直交クラスは反映的か?” という問いは**直交部分圏問題** (orthogonal subcategory problem) と呼ばれ重要である．これは一般には偽である．反例として, 例えばフレーム (frame) とフレーム準同型の成す圏の完備 Boole 代数の成す充満部分圏などが知られている [RT88, 4.4. Example]．一方で, “良い” 性質を満たす圏については直交部分圏問題は真である:

**Fact A.5. 局所表示可能圏** (locally presentable category) の**小**直交クラスは反映的． ◊

*Proof.* [AR94] や [Bor94a] が参考になる． □

本稿では局所表示可能圏の定義は割愛し, 具体例を挙げるに留めておく:

**Example A.6.** 以下は局所表示可能圏である:

- $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}^S$;
- 等式理論, FP-スケッチ, $\mathbf{Set}^S$ 上の有限的モナドのモデルの圏 $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$, $\mathbf{Mod}\,\mathscr{S}$, $\mathbf{EM}(T)$;
- 小圏 $\mathscr{C}$ の前層圏 $[\mathscr{C}, \mathbf{Set}]$, $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$;
- 小圏の圏 $\mathbf{Cat}$;
- 半順序集合の圏 $\mathbf{Pos}$. ◆

[*7] ここでは同型で閉じることを課している．

**Remark A.7.** Definition A.1 では射と対象の直交性を定義したが，これを一般化して “射と射の直交性” を定義することができる．互いに直交する 2 つの射のクラスは，より良い条件を満たすときに**直交分解系** (orthogonal factorization system) と呼ばれ，適切な圏においては直交分解系と直交クラスは 1 対 1 に対応する [CHK85; Bor94a]. したがって，Fact A.5 は与えられた射の集合から直交分解系を構成していると言い換えることができ，このような構成の一般化が “small object argument” として知られている． ♦

## References


[ARV11] J. Adámek, J. Rosický, and E. M. Vitale. *Algebraic theories.* Vol. 184. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. DOI: 10.1017/CBO9780511760754 (cit. on p. 19).

[AR94] J. Adámek and J. Rosický. *Locally presentable and accessible categories.* Vol. 189. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. DOI: 10.1017/CBO9780511600579 (cit. on p. 20).

[ARV12] J. Adámek, J. Rosický, and E. M. Vitale. “Birkhoff’s variety theorem in many sorts”. In: *Algebra Universalis* 68.1-2 (2012), pp. 39–42. DOI: 10.1007/s00012-012-0185-0 (cit. on p. 19).

[Adá+02] J. Adámek et al. “A classification of accessible categories”. In: *J. Pure Appl. Algebra* 175.1-3 (2002), pp. 7–30. DOI: 10.1016/S0022-4049(02)00126-3.

[Bar99] M. Barr. *Notes on sketches.* 1999. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/Barr-NotesOnSketches.pdf.

[BW05] M. Barr and C. Wells. “Toposes, triples and theories”. In: *Repr. Theory Appl. Categ.* 12 (2005). URL: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/12/tr12abs.html (cit. on p. 16).

[Bor94a] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1.* Vol. 50. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. DOI: 10.1017/CBO9780511525858 (cit. on pp. 20, 21).

[Bor94b] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2.* Vol. 51. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. DOI: 10.1017/CBO9780511525865.

[CHK85] C. Cassidy, M. Hébert, and G. M. Kelly. “Reflective subcategories, localizations and factorization systems”. In: *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 38.3 (1985), pp. 287–329. DOI: 10.1017/S1446788700023624 (cit. on p. 21).

[Rie16] E. Riehl. *Category theory in context.* Aurora Dover Modern Math Originals. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf (cit. on p. 16).

[RT88] J. Rosický and W. Tholen. “Orthogonal and prereflective subcategories”. In: *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* 29.3 (1988), pp. 203–215. URL: http://www.numdam.org/item/CTGDC_1988__29_3_203_0/ (cit. on p. 20).