コイコライザを持つとは限らない正則圏

Yuto Kawase

2023年12月6日

概要

本稿は圏論 Advent Calendar 2023 の 6 日目の記事です.一般のコイコライザを持つとは限らない正則圏の例を与えます.

目次

 Terminology

 1
 正則圏

 2
 自由 Abel 群の圏

 2
 2

Terminology

Ab Abel 群と準同型の圏

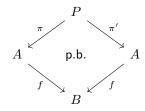
 $\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$ 自由 Abel 群の成す, **Ab** の充満部分圏

──» 正則エピ射 ⊂─→ モノ射

1 正則圏

まずは正則圏 (regular category) の定義を思い出そう.

Definition 1.1. 射 $A \xrightarrow{f} B$ について, pullback



が与えられたとする. このとき, 平行射 $P \xrightarrow[\pi]{\pi'} A$ のことを, f の $kernel\ pair\$ と呼ぶ. P を $Ker\ f$ と書くこともある. 単に $kernel\ pair\$ と言ったときは, ある射の $kernel\$ pair となっている平行射のことを指す.

Definition 1.2. 圏 \mathscr{C} が正則とは、以下の条件を満たすことを言う.

(R1) 任意の有限極限を持つ.

- (R2) 任意の kernel pair がコイコライザを持つ.
- (R3) 正則エピが pullback で保たれる.

Example 1.3. Ab は正則圏である. より一般に, Set 上モナディックな圏は正則圏である. *1

正則圏の定義 (R2) は、任意の平行射について言及している訳ではない。実際、正則圏であって、次の条件 $(R2^*)$ 任意の平行射がコイコライザを持つ。

を満たさない例が存在する. 本稿では、そのような例を構成することを目標にする.

Lemma 1.4. $\mathscr C$ を正則圏とし、充満部分圏 $\mathscr A\subseteq\mathscr C$ が有限積と部分対象で閉じているとする. このとき、以下が成り立つ.

- (i) $\mathscr A$ の射 f について、 $\mathscr A$ の正則エピであることと $\mathscr C$ の正則エピであることは同値.
- (ii) A は正則圏である.

Proof.

(i) \mathscr{A} の射 $A \xrightarrow{f} B$ をとる. 仮定より $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は有限極限で閉じているので, \mathscr{A} における f の kernel pair

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\underline{u}} A \xrightarrow{f} B \text{ in } \mathscr{A}$$

は、 \mathscr{C} においても kernel pair である. よって u,v の \mathscr{C} におけるコイコライザ

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{u} A \xrightarrow{p} X \quad \text{in } \mathscr{C} \tag{1}$$

 $A \xrightarrow{p} X$ をとることができる. その普遍性から, f は次のような一意的な分解 *2 を持つ.

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{in } \mathscr{C}$$

i はモノになるので X は B の部分対象であり、仮定より $X \in \mathscr{A}$ が従う. (1) は \mathscr{C} におけるコイコライザであるが、 $X \in \mathscr{A}$ より、 \mathscr{A} においてもコイコライザである.したがって

$$f$$
 が \mathscr{C} で正則エピ \Leftrightarrow i が同型 \Leftrightarrow f が \mathscr{A} で正則エピ

となり, 主張が示された.

(ii) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は有限極限で閉じているので、(R1) が従う。(i) の証明より $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は kernel pair のコイコライザで 閉じており、(R2) が従う。(R3) も、既に示した (i) から自動的に従う。

2 **自由** Abel **群の**圏

Corollary 2.1. Free(\mathbb{Z}) は正則圏である.

Proof. $\mathbf{Free}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{Ab}$ が有限積 (=有限直和) で閉じることはすぐに分かる. さらに, 自由 Abel 群の任意の部分群が 再び自由であるという有名事実から, $\mathbf{Free}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{Ab}$ は部分対象でも閉じている. よって Lemma 1.4 より従う. \square

 $^{^{*1}}$ 正則圏よりも強く, Barr-exact 圏であることまで言える. [Bor94, Theorem 4.3.5]

^{*2} 正則エピ-モノ分解

次の主張は有名事実である. 証明は難しいので省略するが, [Sch] 等が参考になる.

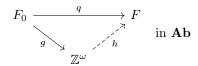
Lemma 2.2. Ab における可算直積 $\mathbb{Z}^{\omega*3}$ は、自由 Abel 群ではない.

Theorem 2.3. Free(\mathbb{Z}) は ($\mathbb{R}2^*$) を満たさない正則圏である.

Proof. **Free**(\mathbb{Z}) が cokernel を持たないことを示せばよい. まず, **Ab** における適当な右完全列

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^{\omega} \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathbf{Ab}$$
 (2)

であって, F_1, F_0 が自由 Abel 群であるものを取ることができる. f の $\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$ における cokernel $F_0 \xrightarrow{q} F$ が存在 したと仮定して, 矛盾を導こう. (2) の普遍性から



を可換にする一意的な射 h がとれる. 一方, 各射影 $\mathbb{Z}^{\omega} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}$ について, $\stackrel{q}{\longrightarrow} F$ の普遍性から

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{q} F$$

$$\downarrow_{k_n} \text{ in } \mathbf{Free}(\mathbb{Z})$$

を可換にする k_n が一意に取れる. すると, g がエピであることから, 各 n について次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
F_0 & \xrightarrow{q} & F \\
\downarrow g & & \downarrow k_n & \text{in } \mathbf{Ab} \\
\mathbb{Z}^{\omega} & \xrightarrow{\pi_n} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

すると, 可換図式

$$F$$

$$\downarrow_{(k_n)_{n<\omega}} \text{ in } \mathbf{Ab}$$

が得られるので, \mathbb{Z}^ω は F の直和因子である. ところが F は自由 Abel 群なので, これは Lemma 2.2 と矛盾する. $\ \square$

References

- [Bor94] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. 2.* Vol. 51. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Categories and structures. Cambridge University Press, Cambridge, 1994 (cit. on p. 2).
- [Ric] J. Rickard. Cokernels in the category of free abelian groups. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/765749.
- [Sch] S. Schröer. Baer's result: the infinite product of the integers has no basis. URL: https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~schroeer/publications_pdf/infinite_product-1.pdf (cit. on p. 3).

^{*3} Baer-Specker 群として知られている.