

Cat の対称モノイダル閉構造

Yuto Kawase

2022 年 12 月 22 日

概要

Cat がカルテシアン閉圏である, すなわち直積によって対称モノイダル閉圏になるというのは有名な話であるが, 一方で Cat は直積とは異なるもう 1 つの対称モノイダル閉構造を持つ (section 1.2). 実は, Cat の対称モノイダル閉構造はこの 2 種類以外に存在しない (Thm 3.13). 本稿ではこれを示すことを目標とする.

目次

はじめに	1
Terminology	2
1 Cat の対称モノイダル閉構造	2
1.1 直積	2
1.2 Funny テンソル積	2
2 Limit sketches	3
2.1 limit sketches	3
2.2 generic models	5
2.3 sketch のテンソル積	9
3 Cat に入る対称モノイダル閉構造の分類	11
3.1 Cat^{op} -internal double category	11
3.2 \mathcal{I} の絞り込み	13
3.3 \mathcal{D}_{\otimes} の絞り込み	14

はじめに

本稿は圏論 Advent Calendar 2022 の 22 日目の記事です. 初歩的 (?) な圏論と対称モノイダル閉圏の定義が分かれば読めると思いますが, section 2 では [alga] や [algb] で扱われているような Kan 拡張についての基礎事項を仮定しました.

section 3 の内容は, [FLK80] に書かれている証明に加えて, 同書で "simple exercise" とされている箇所の詳細を書いたものになっています.

Terminology

Set	小さい集合と写像の圏
Cat	小圏と関手の圏
Mon	モノイドの圏
Grp	群の圏
Ab	Abel 群の圏
$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$	関手圏
$\text{Cts}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$	continuous functor のなす, $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ の充満部分圏
$\text{Cocts}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$	cocontinuous functor のなす, $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ の充満部分圏
$\mathbf{0}$	空圏
$\mathbf{1}$	1 点離散圏
y	米田埋め込み
$\text{Lan}_F G$	G の F に沿った左 Kan 拡張

1 Cat の対称モノイダル閉構造

この節では, Cat の対称モノイダル閉構造を 2 種類紹介する.

1.1 直積

2 項積 \times をモノイダル積とし, 1 点圏 $\mathbf{1}$ をモノイダル unit とすることで, $(\text{Cat}, \times, \mathbf{1})$ は対称モノイダル閉圏になる. すなわち Cat はカルテシアン閉圏である.

自然な同型 $\text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \text{Cat}(\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}])$ があるので, 関手圏 $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ が internal hom となっている.

1.2 Funny テンソル積

Def 1.1. 圏 \mathcal{C} に対し, 対象のクラス $\text{ob } \mathcal{C}$ を離散圏と思ったものを \mathcal{C}^{dis} と書くことにする. このとき, 自然な関手 $\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{dis}} \rightarrow \mathcal{C}$ がある.

Def 1.2. 1. 圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} に対し, Cat における次のような pushout によって圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ を定義する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}^{\text{dis}} \times \mathcal{D}^{\text{dis}} & & \\
 \iota_{\mathcal{C}} \times 1 \swarrow & & \downarrow & \searrow 1 \times \iota_{\mathcal{D}} & \\
 \mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\text{dis}} & & \text{P.O.} & & \mathcal{C}^{\text{dis}} \times \mathcal{D} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} & &
 \end{array}$$

$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ のことを, \mathcal{C} と \mathcal{D} の *funny tensor product* という.

2. 関手 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し, F から G への *unnatural transformation* θ とは, \mathcal{D} の射の族 $\{F(C) \xrightarrow{\theta_C} G(C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ のことを言う. \mathcal{C} から \mathcal{D} への関手を対象とし, *unnatural transformation* を射とする圏を, $[[\mathcal{C}, \mathcal{D}]]$ と書く.

$\mathbb{1}$ を monoidal unit とすることで, funny tensor product は Cat 上のもう 1 つの対称モノイダル閉構造となる. すなわち, $(\text{Cat}, \boxtimes, \mathbb{1})$ は対称モノイダル閉圏になる. このときの internal hom は $[-, -]$ で与えられる.

2 Limit sketches

この節では, section 3 で中心的な道具となる *sketch* という概念を導入する.

2.1 limit sketches

Def 2.1. (*Limit sketch*) とは, 小圏 \mathbb{S} と \mathbb{S} における cone の族 $L^{\mathbb{S}}$ との組 $\langle \mathbb{S}, L^{\mathbb{S}} \rangle$ のことを言う. $L^{\mathbb{S}}$ に属す全ての cone が有限図式上の cone になっているとき, \mathbb{S} を *finite limit sketch*^{*1} と言う.

Def 2.2. \mathbb{S} を limit sketch, \mathcal{C} を locally small かつ complete な圏とする.

1. \mathcal{C} における \mathbb{S} -model とは, 関手 $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{C}$ であって, $L^{\mathbb{S}}$ に属す任意の cone を limit cone へ移すものこと.
2. \mathbb{S} -model 全体の成す, 関手圏 $[\mathbb{S}, \mathcal{C}]$ の充満部分圏のことを, $\text{Mod}(\mathbb{S}, \mathcal{C})$ と書く. $\text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Set})$ のことを $\text{Mod}(\mathbb{S})$ と略記する.

Eg 2.3 (群の sketch). 群 G に対し, 単位元 $e \in G$, 逆元をとる演算 i , 2 項演算 m は, Set の図式

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \xleftarrow{e} 1 \\ & \uparrow i & \end{array} \quad (1)$$

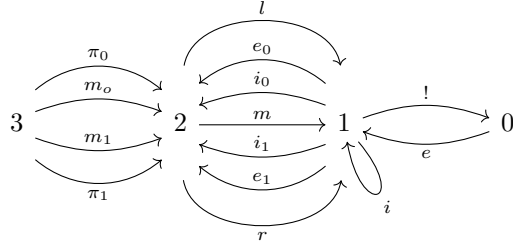
とすることができる. (ここで 1 は singleton) 更に, 群の公理は Set における可換図式として次のように書くことができる.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{e \times 1} & G \times G & \xleftarrow{1 \times e} & G \\ & \searrow m & \downarrow m & \swarrow m & \\ & & G & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(i,1)} & G \times G & \xleftarrow{(1,i)} & G \\ \downarrow ! & & \downarrow m & & \downarrow ! \\ 1 & \xrightarrow{e} & G & \xleftarrow{e} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & G \times G \times G & & \\ & \swarrow m \times 1 & & \searrow 1 \times m & \\ G \times G & & & & G \times G \\ & \searrow m & & \swarrow m & \\ & & G & & \end{array} \quad (2)$$

逆に群を (1) であって (2) を可換にするものと定義することもでき, sketch を使うとこのような現象を正確に捉えることができる.

^{*1} *essentially algebraic theory* とも言う

実際, quiver



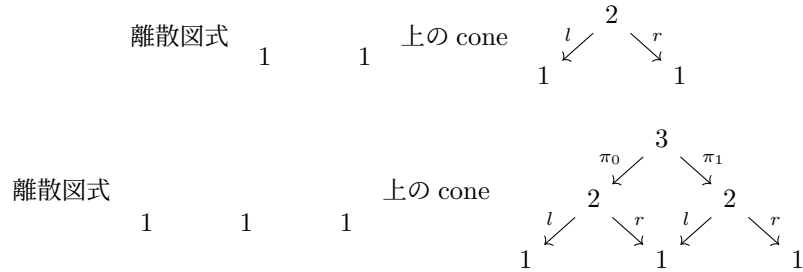
と関係式

$$\begin{aligned} le_0 &= e!, & re_0 &= 1 \\ le_1 &= 1, & re_1 &= e! \\ me_0 &= 1 = me_1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} li_0 &= i, & ri_0 &= 1 \\ li_1 &= 1, & ri_1 &= i \\ mi_0 &= e! = mi_1 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} r\pi_0 &= l\pi_1 \\ lm_0 &= m\pi_0, & rm_0 &= r\pi_1 \\ lm_1 &= l\pi_0, & rm_1 &= m\pi_1 \\ mm_0 &= mm_1 \end{aligned} \tag{5}$$

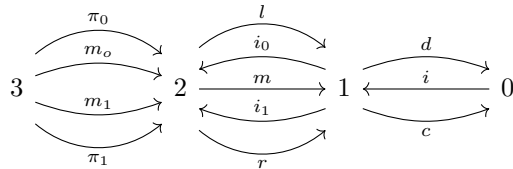
で生成される小圏を \mathbb{S} とし, $L^{\mathbb{S}}$ の元として



の 2 つを選択すれば, (3) が単位律を, (4) が逆元律を, (5) が結合律を表していて, $\text{Mod}(\mathbb{S}) \simeq \text{Grp}$ が成立することが分かる. したがって, この \mathbb{S} は”群の sketch”と呼ぶべきものである. 一般に, 圏 \mathcal{C} における \mathbb{S} -model のことを \mathcal{C} -internal group と呼ぶ.

Eg 2.4 (小圏の sketch). 群と同様, 小圏の sketch も次のように定義することができる.

小圏 \mathbb{S} は, quiver



と関係式

$$di = 1 = ci \quad (6)$$

$$dl = cr \quad (7)$$

$$dm = dr, \quad cm = cl \quad (8)$$

$$li_0 = ic, \quad ri_0 = 1$$

$$li_1 = 1, \quad ri_1 = id \quad (9)$$

$$mi_0 = 1 = mi_1$$

$$r\pi_0 = l\pi_1$$

$$lm_0 = m\pi_0, \quad rm_0 = r\pi_1$$

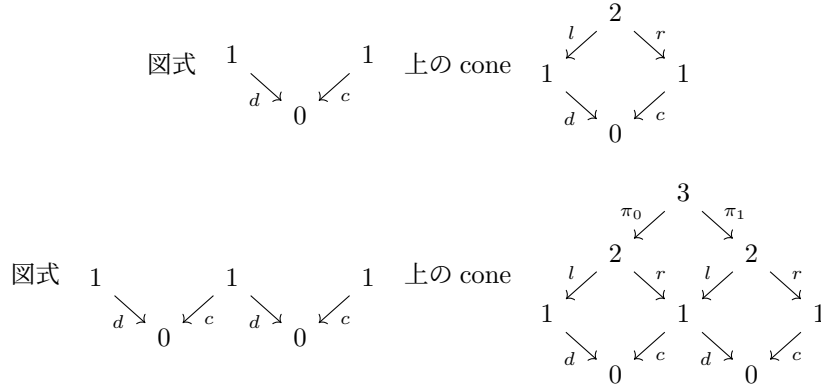
$$lm_1 = l\pi_0, \quad rm_1 = m\pi_1$$

$$mm_0 = mm_1$$

$$(10)$$

で生成される圏とする.

$L^{\mathbb{S}}$ は,



の 2 つからなるものとする.

0 が対象の集合, 1 が射の集合, 2 が合成可能な射の 2 つ組の集合, 3 が合成可能な射の 3 つ組の集合を表していて, i が恒等射関数, d が domain 関数, c が codomain 関数, m が射の合成を表している. 加えて (9) が恒等射についての単位律を表していて, (10) が射の合成についての結合律を表していることに注意すれば, $\text{Mod}(\mathbb{S}) \simeq \text{Cat}$ となっていることが分かる. 一般に, 圏 \mathcal{C} における \mathbb{S} -model のことを \mathcal{C} -internal category と呼ぶ.

2.2 generic models

Thm 2.5 (Ehresmann-Kennison Theorem). limit sketch \mathbb{S} に対し, 包含関手 $\text{Mod}(\mathbb{S}) \subset [\mathbb{S}, \text{Set}]$ は左随伴 $r_{\mathbb{S}}$ をもつ. すなわち $\text{Mod}(\mathbb{S}) \subset [\mathbb{S}, \text{Set}]$ は reflective full subcategory であり, 特に $\text{Mod}(\mathbb{S}) \subset [\mathbb{S}, \text{Set}]$ は極限で閉じていて, $\text{Mod}(\mathbb{S})$ は cocomplete である.

Proof. 省略する. GAFT (General Adjoint Functor Theorem) を用いた証明が [BW02] の Thm 2.1 に書かれている. また, [Bor94] の Thm 5.4.7 を用いて示すこともできる. \square

Def 2.6. 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が *dense* であるとは, $\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ \uparrow F & \Downarrow \text{id} & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \end{array}$ が各点左 Kan 拡張となっていることを言う.

Lem 2.7. limit sketch \mathbb{S} に対し, 関手 $K_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}^{\text{op}} \xrightarrow{y} [\mathbb{S}, \text{Set}] \xrightarrow{r_{\mathbb{S}}} \text{Mod}(\mathbb{S})$ を考える. このとき次が成り立つ.

1. $K_{\mathbb{S}}$ は dense.
2. $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} : \mathbb{S} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}}$ は \mathbb{S} -model.

Proof. 1. 包含関手 $\text{Mod}(\mathbb{S}) \subset [\mathbb{S}, \text{Set}]$ を ι とおき, 随伴 $r_{\mathbb{S}} \dashv \iota$ の unit, counit をそれぞれ η, ε とおく. ι が忠実充満であることから ε は同型なので, 随伴の Kan 拡張による特徴付けから次の図式は左 Kan 拡張となっている.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathbb{S}) & & \\ \uparrow r_{\mathbb{S}} & \searrow \iota & \nearrow \varepsilon \cong \\ [\mathbb{S}, \text{Set}] & \xrightarrow{\quad} & [\mathbb{S}, \text{Set}] \xrightarrow{r_{\mathbb{S}}} \text{Mod}(\mathbb{S}) \end{array} \quad (11)$$

随伴の三角恒等式より, (11) の 2-cell は id になっている.

一方で, 米田埋め込み y が dense であることと, 左 Kan 拡張が左随伴関手で保たれることから, 次の図式も左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}, \text{Set}] & & \\ \uparrow y & \searrow \text{id} & \\ \mathbb{S}^{\text{op}} & \xrightarrow{y} & [\mathbb{S}, \text{Set}] \xrightarrow{r_{\mathbb{S}}} \text{Mod}(\mathbb{S}) \end{array} \quad (12)$$

したがって, (11) と (12) を合成することで次の左 Kan 拡張を得る.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathbb{S}) & & \\ \uparrow r_{\mathbb{S}} & \searrow \text{id} & \\ [\mathbb{S}, \text{Set}] & \xrightarrow{\quad} & [\mathbb{S}, \text{Set}] \xrightarrow{r_{\mathbb{S}}} \text{Mod}(\mathbb{S}) \\ \uparrow y & \searrow \text{id} & \\ \mathbb{S}^{\text{op}} & \xrightarrow{y} & [\mathbb{S}, \text{Set}] \end{array} \quad (13)$$

\mathbb{S} が small で $\text{Mod}(\mathbb{S})$ が locally small かつ cocomplete なので, 左 Kan 拡張 (13) は各点的である.

2. $L^{\mathbb{S}}$ に属す $\text{cone}\{L \rightarrow S_I\}_{I \in \mathbb{I}}$ を任意にとる. このとき任意の $M \in \text{Mod}(\mathbb{S})$ について次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathbb{S})(K_{\mathbb{S}}(L), M) &= \text{Mod}(\mathbb{S})(r_{\mathbb{S}}y(L), M) \\ &\cong [\mathbb{S}, \text{Set}](y(L), M) \\ &\cong M(L) \\ &\cong \lim_{I \in \mathbb{I}} M(S_I) \\ &\cong \lim_{I \in \mathbb{I}} [\mathbb{S}, \text{Set}](y(S_I), M) \\ &\cong \lim_{I \in \mathbb{I}} \text{Mod}(\mathbb{S})(r_{\mathbb{S}}y(S_I), M) \\ &= \lim_{I \in \mathbb{I}} \text{Mod}(\mathbb{S})(K_{\mathbb{S}}(S_I), M) \end{aligned}$$

したがって $K_{\mathbb{S}}(L) \cong \text{Colim}_{I \in \mathbb{I}} K_{\mathbb{S}}(S_I)$ が $\text{Mod}(\mathbb{S})$ において成り立ち, これは $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} : \mathbb{S} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}}$ が \mathbb{S} -model であることを意味する.

□

Def 2.8. Lem 2.7 の $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} \in \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}})$ のことを, limit sketch \mathbb{S} の *generic model* という.

Rem 2.9 (generic model の計算). 任意の $S \in \mathbb{S}$ と $M \in \text{Mod}(\mathbb{S})$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathbb{S})(K_{\mathbb{S}}(S), M) &= \text{Mod}(\mathbb{S})(r_{\mathbb{S}y}(S), M) \\ &\cong [\mathbb{S}, \text{Set}](y(S), M) \\ &\cong M(S) \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つので, $K_{\mathbb{S}}(S) \in \text{Mod}(\mathbb{S})$ は関手 $\text{ev}_S : M \mapsto M(S)$ を表現する対象である. 更に (14) の同型は S に関して自然なので, 次は (up to iso で) 可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{\text{ev.}} & [\text{Mod}(\mathbb{S}), \text{Set}] \\ & \searrow K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} & \nearrow y \\ & \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}} & \end{array} \quad (15)$$

ここで, ev. は各 $S \in \mathbb{S}$ に対し $\text{ev}_S : M \mapsto M(S)$ を対応させる関手である. 米田埋め込み y の忠実充満性から, (15) は $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}$ を (up to iso で) 特徴付けている. これを用いて generic model $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}$ を計算することができる.

実際, Abel 群の sketch \mathbb{S} を Eg 2.3 と同様の方法で定義したとき, $\mathbb{Z} \in \text{Ab}$ が $\text{Ab} \ni M \mapsto M \in \text{Set}$ を表現することから $K_{\mathbb{S}}(1) \cong \mathbb{Z}$ が分かり, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \in \text{Ab}$ が $\text{Ab} \ni M \mapsto M \times M \in \text{Set}$ を表現することから $K_{\mathbb{S}}(2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が分かる. このようにして計算を続けることで, Abel 群の generic model が Eg 2.10 のように与えられることが分かる.

Eg 2.10 (Abel 群の generic model). Abel 群の generic model は, Ab^{op} -internal abelian group として次のように表される.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \curvearrowleft & & & \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & - & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} O \\ & \curvearrowright & & \uparrow & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & -1 & \end{array} \end{array} \quad \text{in Ab}$$

ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は余積であり, 対角射 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ が 2 項演算, -1 倍する射 -1 が逆元をとる演算, ゼロ射 0 が単位元に相当している.

Eg 2.11 (小圏の generic model). 小圏の generic model は, Cat^{op} -internal category として次のように表される.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \\ & \curvearrowleft & & & \\ 3 & \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & \\ & 0 \end{pmatrix} & - & 2 & \xrightarrow{\ulcorner 0 \urcorner} 1 \\ & \curvearrowright & & \uparrow & \\ & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \ulcorner 1 \urcorner & \end{array} \end{array} \quad \text{in Cat}$$

ここで $\mathbb{1}$ は 1 点圏であり, $2, 3$ は

$$2 := \{0 \rightarrow 1\}, \quad 3 := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2\}$$

で表される圏 (poset) である. $\lceil 0 \rceil, \lceil 1 \rceil$ はそれぞれ対象 $0, 1 \in 2$ を選択する関手, $\binom{b}{a}$ ($0 \leq a < b \leq 2$) は 3 における a から b への一意な射を選択する関手である.

$$\begin{array}{ccc} \binom{2}{1} & \xrightarrow{\quad} & \binom{3}{1} \\ \lceil 0 \rceil \swarrow & & \searrow \lceil 1 \rceil \\ 2 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ \lceil 0 \rceil \swarrow & \lceil 1 \rceil \nearrow & \mathbb{1} \end{array} \quad \text{は pushout であり, } \binom{2}{0} \text{ が射の合成, } ! \text{ が恒等射関数, } \lceil 0 \rceil \text{ が domain 関数, } \lceil 1 \rceil \text{ が codomain 関数に相当している.}$$

Thm 2.12. limit sketch \mathbb{S} と locally small かつ complete な圏 \mathcal{C} に対して, generic model の pre-composition $[\text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}}, \mathcal{C}] \xrightarrow{- \circ K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}} [\mathbb{S}, \mathcal{C}]$ は次の圏同値を誘導する.

$$\text{Cts}(\text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}}, \mathcal{C}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{S}, \mathcal{C})$$

Proof. op を取った $\text{Cocts}(\text{Mod}(\mathbb{S}), \mathcal{C}^{\text{op}}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{S}, \mathcal{C})^{\text{op}}$ を代わりに示すことにする.

cocontinuous functor $L : \text{Mod}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ が与えられると, Lem 2.7 より $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}$ は \mathbb{S} -model なので, \mathbb{S} -model $\mathbb{S} \xrightarrow{K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}} \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}} \xrightarrow{L^{\text{op}}} \mathcal{C}$ が得られる.

逆に \mathbb{S} -model $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{C}$ が与えられると, 米田埋め込みに沿った左 Kan 拡張から得られる随伴^{*2}

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}, \text{Set}] & & \\ \uparrow y & \swarrow \text{Lan}_y F^{\text{op}} & \\ \mathbb{S}^{\text{op}} & \xrightarrow{R} & \mathcal{C}^{\text{op}} \\ & \searrow F^{\text{op}} & \end{array}$$

を考えれば, $\text{Lan}_y F^{\text{op}}$ の制限により cocontinuous functor $\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})} : \text{Mod}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ が得られる. 実際, $R(C) = \mathcal{C}(C, F-) : \mathbb{S} \rightarrow \text{Set}$ ($\forall C \in \mathcal{C}$), すなわち各 $C \in \mathcal{C}$ について

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \xrightarrow{R(C)} & \text{Set} \\ & \searrow F & \nearrow \mathcal{C}(C, -) \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

は可換であり, F が \mathbb{S} -model で $\mathcal{C}(C, -)$ が continuous であることから $R(C)$ は \mathbb{S} -model である. すると R は $\text{Mod}(\mathbb{S})$ を経由することになり, 随伴

$$\begin{array}{ccc} & \text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})} & \\ \text{Mod}(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}^{\text{op}} \\ & \searrow R & \end{array} \quad \perp$$

があるので, $\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}$ が cocontinuous であることが分かる. このとき, 実は次のことが言える.

^{*2} いわゆる 普遍随伴.

Claim. $\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})} \cong \text{Lan}_{K_{\mathbb{S}}} F^{\text{op}}$ が成り立つ.

Proof. 随伴 $r_{\mathbb{S}} \dashv \iota$ の unit を η とおくと, 随伴が絶対 Kan 拡張であることから, 次は左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathbb{S}) & & \\ \uparrow r_{\mathbb{S}} & \searrow \eta & \\ [\mathbb{S}, \text{Set}] & \xlongequal{\quad} & [\mathbb{S}, \text{Set}] \xrightarrow{\text{Lan}_y F^{\text{op}}} \mathcal{C}^{\text{op}} \end{array}$$

したがって $\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})} = (\text{Lan}_y F^{\text{op}}) \circ \iota \cong \text{Lan}_{r_{\mathbb{S}}} \text{Lan}_y F^{\text{op}} \cong \text{Lan}_{K_{\mathbb{S}}} F^{\text{op}}$. □

Claim. より, ここで得られた対応 $L \mapsto (L \circ K_{\mathbb{S}})^{\text{op}}$, $F \mapsto \text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}$ は, $L \mapsto (L \circ K_{\mathbb{S}})^{\text{op}}$, $F \mapsto \text{Lan}_{K_{\mathbb{S}}} F^{\text{op}}$ と書き直せる.

さて, 以上の対応が互いに (up to iso で) 逆となっていることを見よう. まず cocontinuous functor $L : \text{Mod}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ が与えられたときは, Lem 2.7 より $K_{\mathbb{S}}$ は dense であり,

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathbb{S}) & & \\ \uparrow K_{\mathbb{S}} & \searrow \text{id} & \\ \mathbb{S}^{\text{op}} & \xrightarrow{K_{\mathbb{S}}} & \text{Mod}(\mathbb{S}) \xrightarrow{L} \mathcal{C}^{\text{op}} \end{array}$$

が (各点) 左 Kan 拡張となるので良い.

次に, \mathbb{S} -model $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{C}$ が与えられたときは, 2 つの随伴

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}, \text{Set}] & \xrightarrow{r_{\mathbb{S}}} & \text{Mod}(\mathbb{S}) \\ \downarrow \iota & \lrcorner & \downarrow R \\ & & \mathcal{C}^{\text{op}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}} & \\ & \lrcorner & \\ & & \mathcal{C}^{\text{op}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [\mathbb{S}, \text{Set}] & \xrightarrow{\text{Lan}_y F^{\text{op}}} & \mathcal{C}^{\text{op}} \\ \downarrow \iota & \lrcorner & \downarrow R \\ & & \mathcal{C}^{\text{op}} \end{array}$$

の右随伴が一致していることから $\text{Lan}_y F^{\text{op}} \cong (\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}) \circ r_{\mathbb{S}}$ が分かり, $(\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}) \circ K_{\mathbb{S}} = (\text{Lan}_y F^{\text{op}}|_{\text{Mod}(\mathbb{S})}) \circ r_{\mathbb{S}} \circ y \cong (\text{Lan}_y F^{\text{op}}) \circ y \cong F^{\text{op}}$ となるので良い. □

Rem 2.13. CplCAT を locally small かつ complete な圏と continuous functor のなす 2-圏とし, CAT を圏と関手のなす 2-圏とする. このとき, limit sketch \mathbb{S} の model の圏をとる 2-functor $\text{Mod}(\mathbb{S}, \cdot) : \text{CplCAT} \rightarrow \text{CAT}$ は Thm 2.12 より (up to equivalence で) 表現可能であり, generic model $K_{\mathbb{S}}^{\text{op}}$ が表現の普遍元となっている.

2.3 sketch のテンソル積

Def 2.14. limit sketch \mathbb{S}, \mathbb{T} に対し, 直積圏 $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ における cone の族 $L^{\mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} L^{\mathbb{S} \times \mathbb{T}} := & \{ (\langle A, B \rangle \rightarrow \langle A_I, B \rangle)_I \mid (A \rightarrow A_I)_I \in L^{\mathbb{S}}, B \in \mathbb{T} \} \\ & \cup \{ (\langle A, B \rangle \rightarrow \langle A, B_J \rangle)_J \mid A \in \mathbb{S}, (B \rightarrow B_J)_J \in L^{\mathbb{T}} \} \end{aligned}$$

このとき得られる limit sketch $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ のことを, sketch \mathbb{S} と \mathbb{T} のテンソル積という.

Prop 2.15. limit sketch \mathbb{S}, \mathbb{T} と locally small かつ complete な圏 \mathcal{C} に対し, 次の自然な圏同型がある.

$$\text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{C}) \cong \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Mod}(\mathbb{T}, \mathcal{C})) \cong \text{Mod}(\mathbb{T}, \text{Mod}(\mathbb{S}, \mathcal{C}))$$

Proof. 圏同型 $[\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{C}] \cong [\mathbb{S}, [\mathbb{T}, \mathcal{C}]]$ が題意の圏同型を誘導することが, $L^{\mathbb{S} \times \mathbb{T}}$ の定め方から確かめられる. \square

Eg 2.16. \mathbb{S} をモノイドの sketch, \mathbb{T} を小圏の sketch とすると,

$$\text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \cong \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Mod}(\mathbb{T})) = \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Cat}) = (\text{strict monoidal (small) category の圏})$$

なので, $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ は strict monoidal (small) category の sketch である. 一方,

$$\text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \cong \text{Mod}(\mathbb{T}, \text{Mod}(\mathbb{S})) = \text{Mod}(\mathbb{T}, \text{Mon}) = (\text{Mon-internal category の圏})$$

でもあるので, strict monoidal (small) category は Mon-internal category と一致する.

Eg 2.17. \mathbb{S} を小圏の sketch とすると,

$$\text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cong \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Mod}(\mathbb{S})) = \text{Mod}(\mathbb{S}, \text{Cat}) = (\text{Cat-internal category の圏}) = (\text{double category の圏})$$

よって, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は double category の sketch である.

Def 2.18. 関手 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ が *bi-(co)continuous* であるとは, 任意の $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ に対し $\mathcal{B} \xrightarrow{F(A, -)} \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \xrightarrow{F(-, B)} \mathcal{C}$ が (co)continuous であることをいう.

bi-continuous functor のなす $[\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}]$ の充満部分圏を $\text{Bicts}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C})$ と書き, bi-cocontinuous functor のなす $[\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}]$ の充満部分圏を $\text{Bicocts}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C})$ と書く.

Rem 2.19. 圏同型 $[\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}] \cong [\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}]]$ は次の圏同型を誘導する.

$$\text{Bicts}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}) \cong \text{Cts}(\mathcal{A}, \text{Cts}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \cong \text{Cts}(\mathcal{B}, \text{Cts}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$$

Lem 2.20. \mathbb{S}, \mathbb{T} を limit sketch とする.

1. locally small かつ complete な圏 \mathcal{C} に対し, 次のような圏同値が存在する.

$$\text{Bicts}(\text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}}, \text{Mod}(\mathbb{T})^{\text{op}}; \mathcal{C}) \xrightarrow[-\circ(K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} \times K_{\mathbb{T}}^{\text{op}})]{\simeq} \text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{C})$$

2. 次を (up to iso で) 可換にするような bi-cocontinuous functor $P_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}$ が (up to iso で) 一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{\text{op}} \times \mathbb{T}^{\text{op}} & \xrightarrow{K_{\mathbb{S}} \times K_{\mathbb{T}}} & \text{Mod}(\mathbb{S}) \times \text{Mod}(\mathbb{T}) \\ & \searrow K_{\mathbb{S} \times \mathbb{T}} & \downarrow P_{\mathbb{S}, \mathbb{T}} \\ & & \text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}) \end{array}$$

Proof. 1. $F \in [\mathbb{S} \times \text{Mod}(\mathbb{T})^{\text{op}}, \mathcal{C}]$ であって, 任意の $S \in \mathbb{S}$ について $F(S, -)$ が continuous かつ任意の $B \in \text{Mod}(\mathbb{T})^{\text{op}}$ について $F(-, B)$ が \mathbb{S} -model となっているもののなす圏を, $\text{Bimod}(\mathbb{S}, \text{Mod}(\mathbb{T})^{\text{op}}; \mathcal{C})$ と書くことにする.

Thm 2.12, Prop 2.15, Rem 2.19 より次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{-\circ(K_S \times K_T)^{\text{op}}} & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
\text{Bicts}(\text{Mod}(S)^{\text{op}}, \text{Mod}(T)^{\text{op}}; \mathcal{C}) & \xrightarrow[-\circ(K_S^{\text{op}} \times 1)]{\simeq} & \text{Bimod}(S, \text{Mod}(T)^{\text{op}}; \mathcal{C}) & \xrightarrow[-\circ(1 \times K_T^{\text{op}})]{\simeq} & \text{Mod}(S \times T, \mathcal{C}) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\text{Cts}(\text{Mod}(S)^{\text{op}}, \text{Cts}(\text{Mod}(T)^{\text{op}}, \mathcal{C})) & \xrightarrow[-\circ K_S^{\text{op}}]{\simeq} & \text{Mod}(S, \text{Cts}(\text{Mod}(T)^{\text{op}}, \mathcal{C})) & \xrightarrow[-\circ K_T^{\text{op}}]{\simeq} & \text{Mod}(S, \text{Mod}(T, \mathcal{C}))
\end{array}$$

よって主張が従う.

2. 1 で $\mathcal{C} := \text{Mod}(S \times T)^{\text{op}}$ とおき, $S \times T$ の generic model $K_{S \times T}^{\text{op}} \in \text{Mod}(S \times T, \mathcal{C})$ と圏同値で対応するものを $P_{S, T}$ とすればよい.

□

Thm 2.21. limit sketch S, T と locally small かつ complete な圏 \mathcal{C} に対し, 次の図式は (up to iso で) 可換であり, 全ての射が圏同値である.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cts}(\text{Mod}(S \times T)^{\text{op}}, \mathcal{C}) & \xrightarrow[-\circ K_{S \times T}^{\text{op}}]{\simeq} & \text{Mod}(S \times T, \mathcal{C}) \\
\searrow [-\circ P_{S, T}^{\text{op}}] \simeq & & \nearrow [-\circ (K_S^{\text{op}} \times K_T^{\text{op}})] \simeq \\
& \text{Bicts}(\text{Mod}(S)^{\text{op}}, \text{Mod}(T)^{\text{op}}; \mathcal{C}) &
\end{array}$$

Proof. Lem 2.20 より次は (up to iso で) 可換.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cts}(\text{Mod}(S \times T)^{\text{op}}, \mathcal{C}) & \xrightarrow[-\circ K_{S \times T}^{\text{op}}]{\simeq} & \text{Mod}(S \times T, \mathcal{C}) \\
\searrow [-\circ P_{S, T}^{\text{op}}] \simeq & & \nearrow [-\circ (K_S^{\text{op}} \times K_T^{\text{op}})] \simeq \\
& \text{Bicts}(\text{Mod}(S)^{\text{op}}, \text{Mod}(T)^{\text{op}}; \mathcal{C}) &
\end{array}$$

Thm 2.12 と Lem 2.20 より $-\circ K_{S \times T}^{\text{op}}$ と $-\circ (K_S^{\text{op}} \times K_T^{\text{op}})$ は圏同値なので, $-\circ P_{S, T}^{\text{op}}$ も圏同値である.

□

3 Cat に入る対称モノイダル閉構造の分類

この節では, Cat が直積と Funny テンソル積以外の対称モノイダル閉構造を持たないこと (Thm 3.13) を示す.

3.1 Cat^{op} -internal double category

Lem 3.1. \mathcal{A} を locally small かつ cocomplete な圏, \mathcal{E} を locally small な圏とし, \mathbb{I} を小圏, $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{A}$ を dense functor とする. このとき, 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ について, cocontinuous であることと右随伴をもつことは同値である.

Proof. cocontinuous functor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ が右随伴を持つことを示せばよい. 仮定より各点左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ F \uparrow & \nearrow G & \\ \mathcal{A} & \nearrow \rho & \\ \varphi \uparrow & & \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A} \end{array}$$

が存在する. $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{A}$ が dense なので, Kan 拡張の普遍性から次を満たす自然変換 η が一意にとれる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \mathcal{E} \\ F \uparrow & \nearrow G & F \uparrow \nearrow G \\ \mathcal{A} & \nearrow \rho & \mathcal{A} \nearrow \eta \\ \varphi \uparrow & & \varphi \uparrow \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{I} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A} \\ & & \text{id} \nearrow \end{array} = \quad (16)$$

(16) において, ρ と id は各点左 Kan 拡張なので, 共に F で保たれる左 Kan 拡張である. したがって η も F で保たれる左 Kan 拡張であり, 随伴の Kan 拡張による特徴付けから $F \dashv G$ となる. \square

Cor 3.2. \mathbb{S} を limit sketch, \mathcal{E} を locally small な圏とする. このとき, 関手 $F : \text{Mod}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{E}$ について, cocontinuous であることと右随伴をもつことは同値である.

Proof. Lem 2.7 より $K_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{S})$ は dense. よって Lem 3.1 より従う. \square

Thm 3.3. \mathbb{S}, \mathbb{T} を limit sketch, \mathcal{E} を locally small かつ cocomplete な圏とする. このとき, 次のデータの間に (up to iso で) 1 対 1 の対応がある.

1. 関手 $F : \text{Mod}(\mathbb{S}) \times \text{Mod}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{E}$ であって, 任意の $A \in \text{Mod}(\mathbb{S}), B \in \text{Mod}(\mathbb{T})$ について $F(A, -), F(-, B)$ がそれぞれ右随伴を持つもの.
2. bi-cocontinuous functor $F : \text{Mod}(\mathbb{S}) \times \text{Mod}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{E}$
3. \mathcal{E}^{op} における $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ -model $M \in \text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{T}, \mathcal{E}^{\text{op}})$

この対応で, F と M は次を (up to iso で) 可換にするような関係にある.

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathbb{S})^{\text{op}} \times \text{Mod}(\mathbb{T})^{\text{op}} & \xrightarrow{F^{\text{op}}} & \mathcal{E}^{\text{op}} \\ K_{\mathbb{S}}^{\text{op}} \times K_{\mathbb{T}}^{\text{op}} \uparrow & \nearrow M & \\ \mathbb{S} \times \mathbb{T} & & \end{array}$$

Proof. Cor 3.2 より 1 と 2 は等価. Thm 2.21 より 2 と 3 は等価. \square

Cat の対称モノイダル閉構造 $(\text{Cat}, \otimes, \mathcal{I})$ が与えられたとする. 任意の $\mathcal{C} \in \text{Cat}$ に対し $(- \otimes \mathcal{C}) \cong (\mathcal{C} \otimes -) : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ は右随伴 $[\mathcal{C}, -]$ を持つので, \mathbb{S} を小圏の sketch とすると, $\text{Cat} \times \text{Cat} \xrightarrow{\otimes} \text{Cat}$ は Thm 3.3 によりある $M \in \text{Mod}(\mathbb{S} \times \mathbb{S}, \text{Cat}^{\text{op}})$ と 1 対 1 に対応する. すなわち, \otimes はある Cat^{op} -internal double category $\mathfrak{D}_{\otimes} (:= M)$ と対応している.

小圏の generic model が Eg 2.11 で与えられることと Thm 3.3 の対応を思い出すと, \mathfrak{D}_\otimes は次のように表されることが分かる.

$$\begin{array}{ccccc}
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 0 \urcorner} & \\
3 \otimes 3 & \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} & 3 \otimes 2 & \xrightarrow{1 \otimes !} & 3 \otimes 1 \\
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 1 \urcorner} & \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1 \uparrow & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \uparrow & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1 \uparrow & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \uparrow & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1 \uparrow \\
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 0 \urcorner} & \\
2 \otimes 3 & \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} & 2 \otimes 2 & \xrightarrow{1 \otimes !} & 2 \otimes 1 \\
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 1 \urcorner} & \\
\ulcorner 0 \urcorner \otimes 1 \uparrow & \ulcorner 1 \urcorner \otimes 1 \uparrow & \ulcorner 1 \urcorner \otimes 1 \uparrow & \ulcorner 1 \urcorner \otimes 1 \uparrow & \ulcorner 1 \urcorner \otimes 1 \uparrow \\
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 0 \urcorner} & \\
1 \otimes 3 & \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} & 1 \otimes 2 & \xrightarrow{1 \otimes !} & 1 \otimes 1 \\
& \xleftarrow{1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{1 \otimes \ulcorner 1 \urcorner} &
\end{array} \quad \text{in Cat} \tag{17}$$

以下で, \mathcal{I} と \mathfrak{D}_\otimes を絞り込むことを考える.

3.2 \mathcal{I} の絞り込み

Lem 3.4. モノイダル圏 $(\mathcal{M}, \otimes, I)$ に対し, 次を可換にするようなモノイド準同型 s, r が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
\text{End}(\text{Id}_{\mathcal{M}}) & \xrightarrow{r} & \text{End}(I) \\
& \nwarrow s & \nearrow \\
& \text{End}(I) &
\end{array}$$

ただし, $\text{End}(\text{Id}_{\mathcal{M}})$ は自然変換 $\text{Id}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{M}}$ の成すモノイド.

Proof. 自然変換の $I \in \mathcal{M}$ 成分を取り出す操作 $\theta \mapsto \theta_I$ を r とすると, これはモノイド準同型になっている. 射 $f : I \rightarrow I$ in \mathcal{M} が与えられると, $X \cong X \otimes I \xrightarrow{1 \otimes f} X \otimes I \cong X$ を $X \in \mathcal{M}$ 成分とする自然変換 $s(f) : \text{Id}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{M}}$ が得られる. すると s はモノイド準同型になっていて, $rs = 1$ を満たしている. \square

Lem 3.5. Id_{Cat} から Id_{Cat} への自然変換は, 恒等自然変換のみである. 特に, $\text{End}(\text{Id}_{\text{Cat}}) \cong 1$.

Proof. $\theta : \text{Id}_{\text{Cat}} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Cat}}$ を自然変換とする. $\theta_1 : 1 \rightarrow 1$ は恒等関手になるしかない. すると任意の $\mathcal{C} \in \text{Cat}$ とその対象 $C \in \mathcal{C}$ に対して, θ の自然性より

$$\begin{array}{ccc}
1 & \xrightarrow{\ulcorner C \urcorner} & \mathcal{C} \\
\theta_1 \parallel & & \downarrow \theta_{\mathcal{C}} \\
1 & \xrightarrow{\ulcorner C \urcorner} & \mathcal{C}
\end{array}$$

は可換である. つまり $\theta_{\mathcal{C}}(C) = C$ なので, 関手 $\theta_{\mathcal{C}}$ は対象について恒等的である.

特に $\theta_2 : 2 \rightarrow 2$ が対象について恒等的なので, $\theta_2 = \text{Id}_2$ となるしかない. すると任意の $\mathcal{C} \in \text{Cat}$ とその射

f in Cat に対して, θ の自然性より

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{\lceil f \rceil} & \mathcal{C} \\ \theta_2 \parallel & & \downarrow \theta_{\mathcal{C}} \\ 2 & \xrightarrow{\lceil f \rceil} & \mathcal{C} \end{array}$$

は可換. ここで $\lceil f \rceil$ は射 f を選択する関手である. すると $\theta_{\mathcal{C}}(f) = f$ であるから, 関手 $\theta_{\mathcal{C}}$ は射について恒等的となり, したがって $\theta_{\mathcal{C}}$ は恒等関手である. \square

Cor 3.6. $\mathcal{I} \cong 1$.

Proof. Lem 3.4 と Lem 3.5 より, Mon における次のような可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{r} & \text{End}(\mathcal{I}) \\ & \swarrow s & \parallel \\ & & \text{End}(\mathcal{I}) \end{array}$$

$1 \in \text{Mon}$ が終対象であることから r と s は互いに逆射であり, $\text{End}(\mathcal{I}) \cong 1$ となる. つまり, \mathcal{I} は非自明な自己関手を持たないような圏であるが, そのような圏は 1 か空圏 0 に限られる.

ところが, $- \otimes \mathcal{C} : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ は右随伴 $[\mathcal{C}, -]$ を持つことから始対象を保つので, $0 \otimes \mathcal{C} \cong 0$ が任意の $\mathcal{C} \in \text{Cat}$ について成り立つ. よって 0 は monoidal unit になり得ないので, $\mathcal{I} \cong 1$ が分かった. \square

3.3 \mathfrak{D}_{\otimes} の絞り込み

Cor 3.6 より, \mathfrak{D}_{\otimes} を表す図式 (17) は次のように書き直すことができる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\quad} & \bar{\mathcal{D}} & \xleftarrow{\quad} & 3 \\ \uparrow \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \uparrow \\ & & \bar{l} \quad \bar{m} \quad \bar{r} & & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{D} & \xleftarrow{l} & \mathcal{C} & \xleftarrow{d} & 2 \\ \uparrow \uparrow \uparrow & \xleftarrow{m} & \uparrow \uparrow \uparrow & \xleftarrow{i} & \uparrow \uparrow \uparrow \\ \alpha & & \bar{d} \quad \bar{i} \quad \bar{c} & & \lceil 0 \rceil \quad ! \quad \lceil 1 \rceil \\ & \xleftarrow{r} & & \xleftarrow{c} & \\ 3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} & 2 & \xleftarrow{\lceil 0 \rceil} & 1 \\ & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{!} & \\ & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & & \xleftarrow{\lceil 1 \rceil} & \end{array} \quad \text{in Cat} \quad (18)$$

sketch のテンソル積の定義より, (18) の各行と列は Cat^{op} -internal category になっている. 特に \mathcal{D} は pushout

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ l \nearrow & & \nwarrow r \\ \mathcal{C} & & \mathcal{C} \\ d \nwarrow & 2 & \nearrow c \end{array} \quad (19)$$

で得られる圏である.

具体的には, 各 $C \in \mathcal{C}$ ごとに対象 $\langle C, k \rangle$ ($k = 0, 1$) を, 各 \mathcal{C} の射 f ごとに射 $\langle f, k \rangle$ ($k = 0, 1$) を用意することで \mathcal{C} を 2 つに複製し, ここから $\langle X, 0 \rangle \xrightarrow{\langle f, 0 \rangle} \langle Y, 0 \rangle$ と $\langle X', 1 \rangle \xrightarrow{\langle f', 1 \rangle} \langle Y', 1 \rangle$ を同一視することで得られる圏が \mathcal{D} である. $\langle C, k \rangle$ の同値類を $[C, k]$ と書くことにすると, l, r は次のように表示される.

$$l : X \mapsto [X, 0], \quad r : X \mapsto [X, 1]$$

同様に $\bar{\mathcal{D}}$ や \mathcal{E} も pushout で得られる圏である. よって, (18) について未知なデータは $\mathcal{C}, d, i, c, m, \bar{d}, \bar{i}, \bar{c}, \bar{m}$ のみであり, 他のデータは普遍性により決まる. 以下でこれらの未知なデータを絞り込む.

Lem 3.7. \mathcal{A} を圏とする. 次のデータの間には 1 対 1 の対応がある.

1. 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow 2$.
2. 充満部分圏 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ であって, $\text{dom} f \in \mathcal{B}$ なる任意の \mathcal{A} の射 f について $\text{cod} f \in \mathcal{B}$ となっているもの.

Proof. F に対して $\mathcal{B} := \{X \in \mathcal{A} \mid F(X) = 1\}$ が対応することが確かめられる. □

Lem 3.7 で i と対応する \mathcal{C} の充満部分圏を $\mathcal{A} := i^{-1}(1)$ とおき, \bar{i} と対応する \mathcal{C} 充満部分圏を $\mathcal{B} := \bar{i}^{-1}(1)$ とおく. d, c, \bar{d}, \bar{c} は \mathcal{C} の射の選択に等しいので, d と対応する射を $X \xrightarrow{f} Y$, c と対応する射を $X' \xrightarrow{f'} Y'$ とおき, 同様に \bar{d} と対応する射を $Z \xrightarrow{g} W$, \bar{c} と対応する射を $Z' \xrightarrow{g'} W'$ とおいておく.

(18) の右下の正方形についての可換性条件を考えると, 次のようになる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{i} & 2 \\
\bar{d} \uparrow & & \uparrow \ulcorner 0 \urcorner \\
2 & \xrightarrow{!} & 1 \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{i} & 2 \\
\bar{c} \uparrow & & \uparrow \ulcorner 1 \urcorner \\
2 & \xrightarrow{!} & 1
\end{array} \quad \text{が可換.} \quad \Leftrightarrow \quad Z, W \notin \mathcal{A}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{i} & 2 \\
\bar{c} \uparrow & & \uparrow \ulcorner 1 \urcorner \\
2 & \xrightarrow{!} & 1
\end{array} \quad \text{が可換.} \quad \Leftrightarrow \quad Z', W' \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xleftarrow{d} & 2 \\
\bar{i} \downarrow & & \downarrow ! \\
2 & \xleftarrow{\ulcorner 0 \urcorner} & 1
\end{array} \quad \text{が可換.} \quad \Leftrightarrow \quad X, Y \notin \mathcal{B}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xleftarrow{c} & 2 \\
\bar{i} \downarrow & & \downarrow ! \\
2 & \xleftarrow{\ulcorner 1 \urcorner} & 1
\end{array} \quad \text{が可換.} \quad \Leftrightarrow \quad X', Y' \in \mathcal{B}.$$
(20)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} \xleftarrow{d} 2 & & \\
\bar{d} \uparrow & \uparrow \ulcorner 0 \urcorner & \text{が可換.} \Leftrightarrow X = Z. \\
2 \xleftarrow{\ulcorner 0 \urcorner} 1 & & \\
\mathcal{C} \xleftarrow{d} 2 & & \\
\bar{e} \uparrow & \uparrow \ulcorner 1 \urcorner & \text{が可換.} \Leftrightarrow Y = Z'. \\
2 \xleftarrow{\ulcorner 0 \urcorner} 1 & & \\
\mathcal{C} \xleftarrow{c} 2 & & \\
\bar{d} \uparrow & \uparrow \ulcorner 0 \urcorner & \text{が可換.} \Leftrightarrow X' = W. \\
2 \xleftarrow{\ulcorner 1 \urcorner} 1 & & \\
\mathcal{C} \xleftarrow{c} 2 & & \\
\bar{e} \uparrow & \uparrow \ulcorner 1 \urcorner & \text{が可換.} \Leftrightarrow Y' = W'. \\
2 \xleftarrow{\ulcorner 1 \urcorner} 1 & &
\end{array} \tag{21}$$

(21) より, f, f', g, g' は

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow g & & \downarrow g' \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y'
\end{array} \text{ in } \mathcal{C} \tag{22}$$

という関係にある. ただし, これが可換とは限らないことに注意.

さて,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \xleftarrow{l} & \mathcal{C} \xleftarrow{d} 2 \\
& \xleftarrow{m} & \xleftarrow{i} \\
& \xleftarrow{r} & \xleftarrow{c}
\end{array} \tag{23}$$

は Cat^{op} -internal category となっているので, 特に単位律を満たしているはずである. 実際に単位律を計算しよう. まず, 次のように push out の普遍性から定まる \mathcal{C} の射 i_0, i_1 を考える.

$$\begin{array}{ccc}
2 \xrightarrow{c} \mathcal{C} & & \mathcal{C} \xleftarrow{d} 2 \\
\uparrow i & \uparrow i_0 & \uparrow i_1 \\
\mathcal{C} \xrightarrow{l} \mathcal{D} \xleftarrow{r} \mathcal{C} & & \mathcal{C} \xrightarrow{l} \mathcal{D} \xleftarrow{r} \mathcal{C}
\end{array} \tag{24}$$

すると, (23) の単位律は次の可換図式で表される.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{C} & \\
& \downarrow m & \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{i_0} \mathcal{D} \xrightarrow{i_1} & \mathcal{C}
\end{array} \tag{25}$$

Lem 3.8. \mathcal{C} の対象は X, X', Y, Y' の 4 つのみであり, これらは互いに異なる.

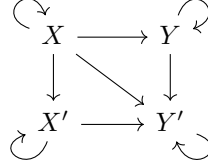
Proof. (20) and (21) より, $X \notin \mathcal{A}, X \notin \mathcal{B}, Y \in \mathcal{A}, Y \notin \mathcal{B}, X' \notin \mathcal{A}, X' \in \mathcal{B}, Y' \in \mathcal{A}, Y' \in \mathcal{B}$ が成り立つので, 特に X, X', Y, Y' は互いに異なる.

$S \in \mathcal{C}$ を任意にとる. ある $T \in \mathcal{C}$ と $0 \leq k \leq 1$ を用いて $m(S) = [T, k]$ と書けるが, (25) より, $k = 0$ のときは $S = i_0 m(S) = i_0 l(T) = ci(T) = X' \text{ or } Y'$, $k = 1$ のときは $S = i_1 m(S) = i_1 r(T) = di(T) = X \text{ or } Y$ となる. \square

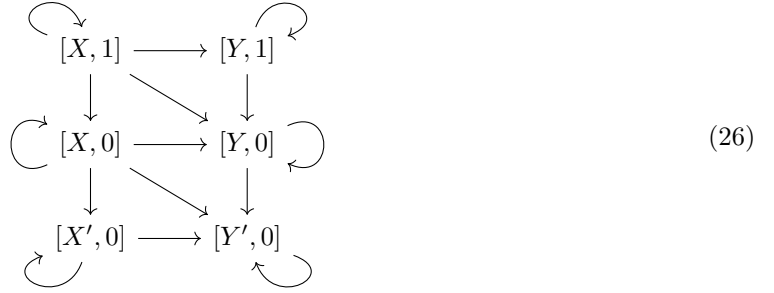
Cor 3.9. $\mathcal{A} = \{Y, Y'\}$, $\mathcal{B} = \{X', Y'\}$.

Proof. Lem 3.8 and (20) より従う. \square

Lem 3.10. 1. \mathcal{C} の任意の射は, 以下で図示されるような domain, codomain をもつ射の, 有限個の合成で書ける.



2. \mathcal{D} の対象は $[X, 1]$, $[Y, 1]$, $[X, 0](= [X', 1])$, $[Y, 0](= [Y', 1])$, $[X', 0]$, $[Y', 0]$ の 6 つのみであり, これらは互いに異なる.
3. \mathcal{D} の任意の射は, 以下で図示されるような domain, codomain をもつ射の, 有限個の合成で書ける.



- Proof.* 1. Lem 3.7 より, \mathcal{A} の元を domain にもつような射は \mathcal{A} の元を codomain に持たねばならず, \mathcal{B} についても同様のことがいえる. よって Cor 3.9 より従う.
2. 対象の集合をとる関手 $\text{Cat} \rightarrow \text{Set}$ は, 集合を groupoid とみなす関手を右随伴に持つので, 特に push out を保つ. よって圏の push out (19) は, 対象について集合の push out となっている. ゆえに主張が従う.
 3. 1 より従う.

\square

Lem 3.11.

$$\begin{aligned}
 m(f) &= [f, 1] \\
 m(f') &= [f', 0] \\
 m(g) &= [g, 0] \circ [g, 1] \\
 m(g') &= [g', 0] \circ [g', 1]
 \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, $m: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は \mathcal{C} の図式 (22) を以下の図式に移す.

$$\begin{array}{ccc}
[X, 1] & \xrightarrow{[f, 1]} & [Y, 1] \\
\downarrow [g, 1] & & \downarrow [g', 1] \\
[X', 1] & & [Y', 1] \\
\parallel & & \parallel \\
[X, 0] & & [Y, 0] \\
\downarrow [g, 0] & & \downarrow [g', 0] \\
[X', 0] & \xrightarrow{[f', 0]} & [Y', 0]
\end{array} \quad \text{in } \mathcal{D}$$

Proof. (23) は Cat^{op} -internal category なので, 合成射の domain, codomain についての条件から, 特に

$$md = rd \quad (27)$$

$$mc = lc \quad (28)$$

が成り立っている. (27) より $m(f) = [f, 1]$ が分かり, (28) より $m(f') = [f', 0]$ が分かる.

(18) における α, β は, 次を可換にする一意な関手である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{r} \mathcal{D} & \xleftarrow{l} \mathcal{C} \\
\bar{d} \uparrow & \alpha \uparrow & \uparrow \bar{d} \\
2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} 3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} 2
\end{array} \quad \begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{r} \mathcal{D} & \xleftarrow{l} \mathcal{C} \\
\bar{e} \uparrow & \beta \uparrow & \uparrow \bar{e} \\
2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} 3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} 2
\end{array} \quad (29)$$

(18) の左下の正方形に注目すると, 次は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \xleftarrow{m} \mathcal{C} \\
\alpha \uparrow & \uparrow \bar{d} \\
3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} 2
\end{array} \quad \begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \xleftarrow{m} \mathcal{C} \\
\beta \uparrow & \uparrow \bar{e} \\
3 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} 2
\end{array} \quad (30)$$

(29) and (30) より $m(g) = [g, 0] \circ [g, 1]$ と $m(g) = [g', 0] \circ [g', 1]$ が分かる. \square

- Lem 3.12.** 1. \mathcal{C} は非自明な loop を持たない. すなわち, $\mathcal{C}(X, X) = \{1_X\}$, $\mathcal{C}(Y, Y) = \{1_Y\}$, $\mathcal{C}(X', X') = \{1_{X'}\}$, $\mathcal{C}(Y', Y') = \{1_{Y'}\}$ が成り立つ.
2. $\mathcal{C}(X, Y) = \{f\}$, $\mathcal{C}(X', Y') = \{f'\}$ が成り立つ.
3. $\mathcal{C}(X, X') = \{g\}$, $\mathcal{C}(Y, Y') = \{g'\}$ が成り立つ.
4. $\mathcal{C}(X, Y') = \{g'f, f'g\}$ が成り立つ.

Proof. 1. $\mathcal{C}(X, X) = \{1_X\}$ のみ示す. $h: X \rightarrow X$ を \mathcal{C} の射とすると, Lem 3.11 より $m(h)$ は $[X, 1]$ から $[X, 1]$ への射なので, Lem 3.10 3 よりある \mathcal{C} の射 $k: X \rightarrow X$ を用いて $m(h) = [k, 1] = r(k)$ と書ける. すると

$$\begin{aligned}
h &= i_1 m(h) && \text{by (25)} \\
&= i_1 r(k) \\
&= di(k) && \text{by (24)} \\
&= d(1_0) && \text{by } X \notin \mathcal{A} \\
&= 1_X
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{C}(X, Y) = \{f\}$ のみ示す. $h : X \rightarrow Y$ を \mathcal{C} の射とすると, Lem 3.11 より $m(h)$ は $[X, 1]$ から $[Y, 1]$ への射なので, Lem 3.10 3 よりある \mathcal{C} の射 $k : X \rightarrow Y$ を用いて $m(h) = [k, 1] = r(k)$ と書ける. すると

$$\begin{aligned}
 h &= i_1 m(h) && \text{by (25)} \\
 &= i_1 r(k) \\
 &= di(k) && \text{by (24)} \\
 &= d(0 \rightarrow 1) && \text{by } X \notin \mathcal{A}, Y \in \mathcal{A} \\
 &= f
 \end{aligned}$$

3. ここまでと同じ議論を $\mathcal{C} \xrightarrow{\bar{m}} \bar{\mathcal{D}}$ で行うことで分かる.

4. 1, 2, 3 と Lem 3.10 3 より, \mathcal{D} の任意の射は以下で表される射の有限個の合成で書くことができる.

$$\begin{array}{ccc}
 [X, 1] & \xrightarrow{[f, 1]} & [Y, 1] \\
 \downarrow [g, 1] & \searrow \varphi & \downarrow [g', 1] \\
 ([X', 1] =) [X, 0] & \xrightarrow{[f, 0] (= [f', 1])} & [Y, 0] (= [Y', 1]) \\
 \downarrow [g, 0] & \searrow \psi & \downarrow [g', 0] \\
 [X', 0] & \xrightarrow{[f', 0]} & [Y', 0]
 \end{array} \tag{31}$$

ただし, φ は \mathcal{C} のある射 $p : X \rightarrow Y'$ によって $\varphi = [p, 1]$ と表される射であり, ψ は \mathcal{C} のある射 $q : X \rightarrow Y'$ によって $\psi = [q, 0]$ と表される射である.

$h : X \rightarrow Y'$ を \mathcal{C} の射としよう. Lem 3.11 より $m(h)$ は $[X, 1]$ から $[Y', 0]$ への射なので, $m(h)$ を (31) の射の合成で書いたとき, 少なくとも $[X, 0]$ か $[Y, 0]$ を経由しているはずである.

$m(h)$ が $[X, 0]$ を経由するときは, 必ずある \mathcal{C} の射 $k : X \rightarrow Y'$ を用いて $m(h) = [k, 0] \circ [g, 1] = l(k) \circ r(g)$ と書け, 次の計算により $h = f' \circ g$ が分かる.

$$\begin{aligned}
 h &= i_0 m(h) && \text{by (25)} \\
 &= i_0 l(k) \circ i_0 r(g) \\
 &= ci(k) \circ g && \text{by (24)} \\
 &= c(0 \rightarrow 1) \circ g && \text{by } X \notin \mathcal{A}, Y' \in \mathcal{A} \\
 &= f' \circ g
 \end{aligned}$$

$m(h)$ が $[Y, 0]$ を経由するときも, 必ずある \mathcal{C} の射 $k : X \rightarrow Y'$ を用いて $m(h) = [g', 0] \circ [k, 1] = l(g') \circ r(k)$ と書け, 次の同様の計算により $h = g' \circ f$ が分かる.

$$\begin{aligned}
 h &= i_1 m(h) && \text{by (25)} \\
 &= i_1 l(g') \circ i_1 r(k) \\
 &= g' \circ di(k) && \text{by (24)} \\
 &= g' \circ d(0 \rightarrow 1) && \text{by } X \notin \mathcal{A}, Y' \in \mathcal{A} \\
 &= g' \circ f
 \end{aligned}$$

□

Lem 3.12 より, 図式 (22) が圏 \mathcal{C} のすべてのデータを尽くしていることが分かった. すると Lem 3.11 は m を一意に特定していることになるので, 結果的に \mathfrak{D}_{\otimes} は (22) が可換な場合と非可換な場合の 2 通り^{*3} に絞られたことになる. よって次の定理を得た.

Thm 3.13. Cat の対称モノイダル閉構造は, 直積で与えられるものと Funny テンソル積で与えられるものの 2 つだけである.

References

- [FLK80] F. Foltz, C. Lair, and G.M. Kelly. “Algebraic categories with few monoidal biclosed structures or none”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 17.2 (1980), pp. 171–177. ISSN: 0022-4049. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(80\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0022-4049(80)90082-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404980900821> (cit. on p. 1).
- [Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra*. Vol. 1. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994. DOI: [10.1017/CB09780511525858](https://doi.org/10.1017/CB09780511525858) (cit. on p. 5).
- [BW02] Michael Barr and Charles Wells. *Toposes, Triples and Theories*. 2002 (cit. on p. 5).
- [alga] alg-d. *Kan 拡張*. URL: http://alg-d.com/math/kan_extension/kan_extension.pdf (visited on 12/12/2022) (cit. on p. 1).
- [algb] alg-d. *随伴関手定理*. URL: http://alg-d.com/math/kan_extension/aft.pdf (visited on 12/12/2022) (cit. on p. 1).

^{*3} 可換な場合が直積に対応していて, 非可換な場合が Funny テンソル積に対応している.