Eilenberg–MacLane による圏の定義

Yuto Kawase

2025 年 12 月 11 日

概要

圏という概念は, [EM45] において初めて明示的に定義されました.[*1] 興味深いことに, そこで与えられた定義は, 現在広く知られているものとは異なる見た目をしています. 本稿では, [EM45] における圏の定義を紹介し, それが現代的な定義と等価であることを示します. 注意として, 集合のサイズの議論は本稿の趣旨から外れるので, ここでは小圏, すなわち対象全体と射全体が集合を成すもののみを扱うことにします. 本稿は圏論 Advent Calendar 2025 の 11 日目の記事です.

目次

1 現代における圏の定義

Definition 1.1. [*2] **圏** $\mathscr{C}$ とは, 次のデータ

- 集合 $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ (**対象 *(object)*** の集合)
- 集合 $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ (**射 *(morphism)*** の集合)
- 写像 $\mathrm{dom}\colon \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ $(f \mapsto \mathrm{dom}\,f)$
- 写像 $\mathrm{cod}\colon \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ $(f \mapsto \mathrm{cod}\,f)$
- 写像 $\circ\colon \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \times_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ $((g,f) \mapsto g \circ f)$. ただし,
$$\mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \times_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \coloneqq \{(g,f) \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \mid \mathrm{dom}\,g = \mathrm{cod}\,f\}.$$
- 写像 $\mathrm{id}\colon \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ $(A \mapsto \mathrm{id}_A)$

からなる組 $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, \mathrm{id})$ であって, 以下を満たすもののこと.

(A1) 任意の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_A) = A = \mathrm{cod}(\mathrm{id}_A)$.
(A2) 任意の $(g,f) \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \times_{\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}\,f, \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}\,g$.
(A3) 任意の $f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ に対し, $f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}\,f} = f = \mathrm{id}_{\mathrm{cod}\,f} \circ f$.
(A4) $\mathrm{dom}\,h = \mathrm{cod}\,g, \mathrm{dom}\,g = \mathrm{cod}\,f$ を満たす任意の $h,g,f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ に対し, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ♦

*1 圏, 関手, 自然変換そのものは, 同著者らによる [EM42] で既に現われていたようである. (cf. [Mac98, p. 29])

*2 Eilenberg–MacLane による定義との比較が簡潔になるという都合で本稿ではこの流儀を採用したが, 別の流儀として, 射の集合 $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ を考える代わりに各対象 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ について ***Hom* 集合** $\mathscr{C}(A,B)$ を考えるというものがある.

2 Eilenberg–MacLane による圏の定義

Definition 2.1. 集合 X から Y への**部分写像** ***(partial map)*** $f\colon X \rightharpoonup Y$ とは, 部分集合 $D_f \subseteq X$ と写像 $f\colon D_f \to Y$ の組のこと. ♦

Definition 2.2 ([EM45])**.** $m\colon X \times X \rightharpoonup X$ $((x_2, x_1) \mapsto x_2x_1)$ を部分写像とする. 元 $z \in X$ が ***identity*** であるとは, 以下を満たすことを言う.

- $(z, x) \in D_m$ を満たす $x \in X$ に対して, $zx = x$ が成り立つ.
- $(x, z) \in D_m$ を満たす $x \in X$ に対して, $xz = x$ が成り立つ. ♦

Definition 1.1 の意味での圏と区別するために, 以下では圏*という造語を用いる.

Definition 2.3 ([EM45])**. 圏*** $\mathfrak{A}$ とは, 次のデータ

- 集合 $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ (***object*** の集合)
- 集合 $\mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ (***mapping*** の集合)
- 部分写像 $m\colon \mathrm{Map}\,\mathfrak{A} \times \mathrm{Map}\,\mathfrak{A} \rightharpoonup \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ $((\alpha_2, \alpha_1) \mapsto \alpha_2\alpha_1)$.[*3]
- 写像 $e\colon \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ $(A \mapsto e_A)$

からなる組 $\mathfrak{A} = (\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}, m, e)$ であって, 以下を満たすもののこと.

(C1) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ に対し, 次が同値.
 (i) $(\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$ かつ $(\alpha_3, \alpha_2\alpha_1) \in D_m$.
 (ii) $(\alpha_3, \alpha_2) \in D_m$ かつ $(\alpha_3\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$.
 さらに, 上記の同値な条件が成立するとき, $\alpha_3(\alpha_2\alpha_1) = (\alpha_3\alpha_2)\alpha_1$ が成り立つ. (以下ではこの mapping を $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ と書き,)

(C2) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ に対し, 次が同値.
 (i) 条件 (C1)(i) (または (ii)).
 (ii) $(\alpha_3, \alpha_2) \in D_m$ かつ $(\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$.

(C3) 任意の $\alpha \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ に対して, $(\alpha, e_1) \in D_m$ を満たす identity $e_1 \in \mathfrak{A}$ が存在し, さらに $(e_2, \alpha) \in D_m$ を満たす identity $e_2 \in \mathfrak{A}$ が存在する.

(C4) 任意の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ に対し, e_A は identity である.

(C5) 任意の identity $e \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ に対し, $e_A = e$ を満たす $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ が一意に存在する. ♦

Definition 1.1 の意味での圏が上記の公理 (C1) から (C5) を満たすことは明らかである.

Theorem 2.4. 圏 $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, \mathrm{id})$ に対し, 組 $(\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}, \circ, \mathrm{id})$ は圏*を与える.

以下では, 逆に圏*が圏を与えることを示す.

Lemma 2.5 ([EM45, Lemma 1.1])**.** $\mathfrak{A} = (\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}, m, e)$ を圏*とし, $\alpha \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ を mapping とする. このとき, $(\alpha, e_{A_1}) \in D_m$ を満たす object $A_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ が一意に存在する. 同様に, $(e_{A_2}, \alpha) \in D_m$ を満たす object $A_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ が一意に存在する.

Proof. A_1 の存在は, 公理 (C3) と (C5) から直ちに従う. 一意性を示すために, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ が $(\alpha, e_A), (\alpha, e_B) \in D_m$ を満たすとする. 公理 (C4) より e_A は identity であるから, $\alpha e_A = \alpha$ が成り立つ. すると, 3 つ組 (α, e_A, e_B) が条

[*3] [EM45] では, 値 $\alpha_2\alpha_1$ のことを α_2 と α_1 の ***product*** と呼んでいる.

件 (C1)(ii) を満たすことが分かるが, これは公理 (C1) によって条件 (C1)(i) と同値なので, 特に $(e_A, e_B) \in D_m$ を得る. 再び公理 (C4) より e_A と e_B はどちらも identity なので, $e_A = e_A e_B = e_B$ が分かる. すると, 公理 (C5) により $A = B$ を得る. 対称性から, A_2 の一意存在も同様に従う. □

Notation 2.6. Lemma 2.5 の一意な A_1 のことを $\mathrm{d}(\alpha)$ と書き, A_2 のことを $\mathrm{r}(\alpha)$ と書く.[*4] ♦

Lemma 2.7 ([EM45, Lemma 1.2])**.** $\mathfrak{A} = (\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}, m, e)$ を圏*とする. $\alpha_2, \alpha_1 \in \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ に対し, 次は同値.

(i) $(\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$.

(ii) $\mathrm{d}(\alpha_2) = \mathrm{r}(\alpha_1)$.

Proof. [(i) $\Longrightarrow$ (ii)] $(\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$ とする. $\mathrm{r}(\alpha_1)$ の定義から $(e_{\mathrm{r}(\alpha_1)}, \alpha_1) \in D_m$ なので, 公理 (C4) により $e_{\mathrm{r}(\alpha_1)}\alpha_1 = \alpha_1$ である. よって 3 つ組 $(\alpha_2, e_{\mathrm{r}(\alpha_1)}, \alpha_1)$ は条件 (C1)(i) を満たす. 公理 (C1) によるとこれは条件 (C1)(ii) と同値であり, 特に $(\alpha_2, e_{\mathrm{r}(\alpha_1)}) \in D_m$ を得る. ゆえに $\mathrm{d}(\alpha_2) = \mathrm{r}(\alpha_1)$ である.

[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] $A \coloneqq \mathrm{d}(\alpha_2) = \mathrm{r}(\alpha_1)$ とする. $\mathrm{d}(\alpha_2)$ と $\mathrm{r}(\alpha_1)$ の定義から $(\alpha_2, e_A), (e_A, \alpha_1) \in D_m$ なので, 公理 (C2) から条件 (C1)(i), 特に $(\alpha_2, e_A\alpha_1) \in D_m$ が成り立つ. 公理 (C4) より $e_A\alpha_1 = \alpha_1$ なので, これは $(\alpha_2, \alpha_1) \in D_m$ を意味する. □

Theorem 2.8. 圏* $\mathfrak{A} = (\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}, m, e)$ に対し, 組 $(\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}, \mathrm{d}, \mathrm{r}, m, e)$ は圏を与える.

Proof. Lemma 2.7 によって m が写像 $\mathrm{Map}\,\mathfrak{A} \times_{\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}} \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}\ (= D_m) \to \mathrm{Map}\,\mathfrak{A}$ を定めていることを注意しておく.

公理 (A1) を示すために, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ を任意にとる. $\mathrm{r}(e_A)$ の定義より $(e_{\mathrm{r}(e_A)}, e_A) \in D_m$ である. すると公理 (C4) より $e_{\mathrm{r}(e_A)} = e_{\mathrm{r}(e_A)} e_A = e_A$ なので, 公理 (C5) から $\mathrm{r}(e_A) = A$ を得る. 対称性から, $\mathrm{d}(e_A) = A$ も同様に従う.

公理 (A2) を示すために, $(\beta, \alpha) \in D_m$ を任意にとる. $\mathrm{d}(\alpha)$ の定義から $(\alpha, e_{\mathrm{d}(\alpha)}) \in D_m$ であり, さらに公理 (C4) から $\alpha e_{\mathrm{d}(\alpha)} = \alpha$ である. したがって 3 つ組 $(\beta, \alpha, e_{\mathrm{d}(\alpha)})$ は条件 (C1)(i) を満たすので, 公理 (C1) から条件 (C1)(ii), 特に $(\beta\alpha, e_{\mathrm{d}(\alpha)}) \in D_m$ を得る. ゆえに $\mathrm{d}(\beta\alpha) = \mathrm{d}(\alpha)$ である. 対称性から, $\mathrm{r}(\beta\alpha) = \mathrm{r}(\beta)$ も同様に従う.

残りの公理 (A3) と (A4) は, それぞれ公理 (C4) と (C1) から直ちに従う. □

References

[EM42] S. Eilenberg and S. MacLane. "Group extensions and homology". In: *Ann. of Math. (2)* 43 (1942), pp. 757–831. DOI: 10.2307/1968966 (cit. on p. 1).

[EM45] S. Eilenberg and S. MacLane. "General theory of natural equivalences". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 58 (1945), pp. 231–294. DOI: 10.2307/1990284 (cit. on pp. 1–3).

[Mac98] S. MacLane. *Categories for the working mathematician.* Second. Vol. 5. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8 (cit. on p. 1).

*4 [EM45] では $\mathrm{d}(\alpha)$ のことを α の ***domain***, $\mathrm{r}(\alpha)$ のことを α の ***range*** と呼んでいる.