

پاسخنامه تمرین سری دوم درس بهینه‌سازی خطی

استاد: دکتر فرناز هوشمند

ترم بهار ۱۴۰۴

تهیه و تنظیم: نگین صادقی

سوال اول

یک نانوايي سه نوع نان توليد مي‌کند: نان درجه ۱، نان درجه ۲ و نان درجه ۳ که کيفيت هر يك از اين نان‌ها وابسته به نوع آرد مصرفي است. براي توليد اين نان‌ها، نانوايي از سه نوع آرد مختلف شامل آرد مرغوب، آرد متوسط و آرد ارزان استفاده مي‌کند. هر قرص نان بايد با ۲۵۰ گرم آرد (مجموع همه آردها که در نان استفاده مي‌شود) تهيه شود و هر نوع نان بر اساس ترکيب مشخصي از اين سه نوع آرد توليد مي‌شود به اين صورت که نان درجه ۱ از ۷۰٪ آرد مرغوب، ۲۰٪ آرد متوسط و ۱۰٪ آرد ارزان، نان درجه ۲ از ۳۰٪ آرد مرغوب، ۵۰٪ آرد متوسط و ۲۰٪ آرد ارزان و نان درجه ۳ از ۱۰٪ آرد مرغوب، ۳۰٪ آرد متوسط و ۶۰٪ آرد ارزان تهيه مي‌شود. تقاضاي نان درجه ۱، درجه ۲ و درجه ۳ در چهار روز آينده به شرح زير است:

روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴	
۲۰۰	۵۰	۳۰۰	۱۰۰	نان درجه ۱
۱۰۰	۵۰۰	۲۰۰	۴۰۰	نان درجه ۲
۳۰۰	۴۰۰	۱۰۰	۵۰۰	نان درجه ۳

الزامي به برآورده کردن تقاضا نيست. به عبارت ديگر، جدول فوق صرفاً برآورد نانوايي از ميزان فروش را نشان مي‌دهد که از هر نوع نان چه تعداد را مي‌تواند در يك روز مشخص بفروشد. همچنين، تقاضاي تأمين نشده در يك روز را نمي‌توان به روز بعد موکول کرد. با توجه به محدود بودن تعداد نانواها، در هر روز حداکثر ۸۰۰ قرص نان (همه انواع نان در مجموع) مي‌توان توليد کرد. خريد آرد، صرفاً در روز اول امکانپذير است و امکان خريد آرد در روزهاي ۲ و ۳ و ۴ وجود ندارد و از انواع آرد در مجموع، ۸۰۰ کيلوگرم مي‌توان خريد. قيمت خريد هر کيلوگرم از آرد درجه ۱، درجه ۲ و درجه ۳ به ترتيب ۲۰۰۰۰ تومان، ۱۵۰۰۰ تومان و ۱۰۰۰۰ تومان است. اين نانوايي، آردی را که در روز اول می‌خرد می‌تواند برای استفاده در روزهای بعدی در انبار نگهداری کند و در اين خصوص، محدوديتی از نظر ظرفيت انبار وجود ندارد. امکان ذخيره نان‌های اضافه در هر روز در انبار فراهم است. البته یک قرص نان که در روز t دارای درجه ۱ است، در صورت نگهداری در انبار، در روز $t+1$ درجه ۲ خواهد داشت و یک قرص نان که در روز t دارای درجه ۲ است، در روز $t+1$ درجه ۳ خواهد داشت اما یک قرص نان که در روز t دارای درجه ۳ است، در صورت نگهداری در انبار، در روز $t+1$ فاسد می‌شود و عملاً قابل استفاده نيست. بابت انبارداري، هزینه‌ای وجود ندارد و نیز محدوديتی روی ظرفيت انبار نداريم. قيمت نان درجه i در روز t را با پارامتر $p_{i,t}$ نشان دهيد (برای اين پارامتر، خودتان، مقدار مناسب در نظر بگيريد). یک مدل بهينه‌سازی ارائه کنيد که نانوايي را در تصميم‌گيري برای خريد انواع آرد و توليد، فروش و انبارداري انواع نان کمک کند به طوري که سود او در مدت ۴ روز ماکزيمم شود.

پاسخ سوال اول

ابتدا به تعریف متغیرهای تصمیم مسئله می‌پردازیم. در این سوال علاوه بر خرید آرد از هر نوع کیفیتی، امکان ذخیره آن نیز وجود دارد که البته هزینه‌ای برای آن در نظر نگرفته شده است. همچنین علاوه بر تولید هر نوع نان، امکان ذخیره و انبار نان‌ها نیز وجود دارد که البته در طول زمان از درجه کیفیت نان‌ها کاسته می‌شود. همچنین امکان فروش نان درجه سه‌ای که در انبار نگهداری می‌شود نیست چرا که در دوره بعدی فاسد می‌شود و غیرقابل فروش است (با این حال امکان انبار نان درجه سه وجود دارد)

اندیس‌ها و مجموعه‌ها:

$$\begin{aligned} I &= \{1,2,3\} \\ J &= \{1,2,3\} \\ T &= \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

مجموعه درجه نان‌ها با اندیس i
مجموعه درجه آردها با اندیس j
مجموعه روزها با اندیس t

پارامترهای مسئله:

$$\begin{aligned} d_{i,t} \\ f_j \end{aligned}$$

میزان تقاضا هر قرص نان درجه i در روز t
قیمت خرید هر کیلوگرم آرد درجه j

قیمت خرید هر کیلوگرم آرد درجه ۱	قیمت خرید هر کیلوگرم آرد درجه ۲	قیمت خرید هر کیلوگرم آرد درجه ۳
۲۰۰۰	۱۵۰۰	۱۰۰۰

$$p_{i,t}$$

قیمت فروش هر قرص نان درجه i در روز t

که جدول زیر قیمت فروش هر نوع قرص نان را در روزهای مختلف نشان می‌دهد:

روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴	
۱۰۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۸۰۰	نان درجه ۱
۶۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۹۰۰	نان درجه ۲
۷۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۶۰۰	نان درجه ۳

متغیرهای تصمیم:

$$\begin{aligned} x_{i,t} \\ x'_{i,t} \\ x''_{i,t} \\ y_j \\ w_{j,t} \end{aligned}$$

میزان تولید نان درجه i در روز t
میزان فروش نان درجه i در روز t
میزان انبار نان درجه i در پایان روز t
میزان خرید آرد درجه j در اولین روز بر حسب کیلوگرم
میزان انبار آرد درجه j در پایان روز t بر حسب کیلوگرم

تعریف قیود:

قید زیر تضمین می‌کند که حداکثر میزان آرد خریداری شده باید ۸۰۰ کیلوگرم باشد:

$$\sum_{j=1}^3 y_j \leq 800$$

قید زیر تضمین می‌کند که حداکثر میزان تولید نان در هر روز باید ۸۰۰ قرص نان باشد:

$$\sum_{i=1}^3 x_{i,t} \leq 800 \quad \forall t \in \{1,2,3,4\}$$

قیود بعدی میزان مصرف هر نوع آرد در هر روز را نشان می‌دهد.

برای مثال قید زیر میزان مصرف آرد نوع ۱ (نوع مرغوب) برای روز اول را نشان می‌دهد که میزانی از آرد نوع ۱ از مقدار ۲۵۰ گرمی (معادل ۰.۲۵ کیلوگرم) که هر نوع نان استفاده شده است و مقداری که در پایان روز اول در انبار ذخیره می‌شود باید با میزان آرد خریداری شده نوع ۱ برابر باشد:

برای آرد نوع ۱:

میزان مصرف آرد نوع ۱ برای روز اول:

$$\frac{70}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,1} + \frac{30}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,1} + \frac{10}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,1} + w_{1,1} = y_1$$

حال برای سایر روزها باید مقدار مصرف آرد نوع ۱ در روز t که برای تولید نان‌ها استفاده می‌شود به همراه میزان ذخیره آرد نوع ۱ در انبار در آن دوره t باید با میزان آردی که در روز پیش یعنی $t - 1$ در انبار داشتیم برابر باشد:

$$\frac{70}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,t} + \frac{30}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,t} + \frac{10}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,t} + w_{1,t} = w_{1,t-1} \quad \forall t \in \{2,3,4\}$$

حال میزان مصرف آرد نوع ۲ را در هر نان برای روز اول و سایر روزها می‌نویسیم:

روز اول:

$$\frac{20}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,1} + \frac{50}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,1} + \frac{30}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,1} + w_{2,1} = y_2$$

سایر روزها:

$$\frac{20}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,t} + \frac{50}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,t} + \frac{30}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,t} + w_{2,t} = w_{2,t-1} \quad \forall t \in \{2,3,4\}$$

حال میزان مصرف آرد نوع ۳ را در هر نان برای روز اول و سایر روزها می‌نویسیم:

روز اول:

$$\frac{10}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,1} + \frac{20}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,1} + \frac{60}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,1} + w_{3,1} = y_3$$

سایر روزها:

$$\frac{10}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{1,t} + \frac{20}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{2,t} + \frac{60}{100} \times \frac{250}{1000} \times x_{3,t} + w_{3,t} = w_{3,t-1} \quad \forall t \in \{2,3,4\}$$

قیود زیر تضمین می کنند که در روز اول، مقدار تولید هر نوع نان باید با مقدار فروش و ذخیره آن برابر باشد:

$$x_{1,1} = x'_{1,1} + x''_{1,1}$$

$$x_{2,1} = x'_{2,1} + x''_{2,1}$$

$$x_{3,1} = x'_{3,1} + x''_{3,1}$$

قیود زیر تضمین می کنند برای سایر روزها (به جز روز اول)، برای نان درجه دوم علاوه بر مقداری که در هر روز تولید می شود، می توان ذخیره انبار نان درجه ۱ که در روز قبل تولید شده بود و در انبار ذخیره شده و حالا دارای درجه ۲ می باشد نیز استفاده کرد پس برای نان درجه ۲ به ازای هر روز (به جز روز اول) داریم:

$$x_{2,t} + x''_{1,t-1} = x'_{2,t} + x''_{2,t}$$

$$\forall t \in \{2,3,4\}$$

مشابهاً برای نان درجه سوم داریم:

$$x_{3,t} + x''_{2,t-1} = x'_{3,t} + x''_{3,t}$$

$$\forall t \in \{2,3,4\}$$

با توجه به اینکه الزامی برای تأمین تقاضا برای هر نوع نان در هر روز وجود ندارد، قید تأمین تقاضا را می توان به شکل زیر نوشت:

$$x'_{i,t} \leq d_{i,t}$$

$$\forall t \in \{1,2,3,4\}, \forall i \in \{1,2,3\}$$

محدودیت علامت:

از آنجا که برخی متغیرهای تصمیمی که تعریف کردیم، بیانگر تعداد بودند، بنابراین باید اعداد صحیح نامنفی باشند لذا داریم:

$$x_{i,t}, x'_{i,t}, x''_{i,t} \geq 0, Integer \quad \forall t \in \{1,2,3,4\}, \forall i \in \{1,2,3\}$$

$$y_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\}$$

$$w_{j,t} \geq 0, \forall t \in \{1,2,3,4\}, \forall j \in \{1,2,3\}$$

تعریف تابع هدف:

هدف ما ماکسیم سازی سود می باشد لذا سود حاصل از فروش نان ها برابر میزان درآمد حاصل از فروش نان ها است که هزینه خرید آردها (بر حسب کیلوگرم) نیز باید کسر شود لذا داریم:

$$\max z = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} x'_{i,t} p_{i,t} - \sum_{j \in J} y_j f_j$$

تحلیل پاسخ سوال اول

با در نظر گرفتن پارامتر قیمت فروش نان مشابه جدولی که پیش تر تعریف کردیم پاسخ زیر حاصل می شود:

مقدار تابع هدف که همان میزان سود حاصل از فروش نان ها می باشد همچنین تعداد انواع نان های تولید شده، نان های انبار شده و نان های فروخته شده در روزهای مختلف به صورت زیر است:

سود حاصل از فروش نان ها: 10993750.0	مقدار نان فروخته شده نوع 1 در روز 1: 200.0	مقدار نان انبار شده نوع 1 در روز 1: 150.0
مقدار نان تولید شده نوع 1 در روز 1: 350.0	مقدار نان فروخته شده نوع 1 در روز 2: 50.0	مقدار نان انبار شده نوع 1 در روز 2: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 1 در روز 2: 50.0	مقدار نان فروخته شده نوع 1 در روز 3: 300.0	مقدار نان انبار شده نوع 1 در روز 3: 200.0
مقدار نان تولید شده نوع 1 در روز 3: 500.0	مقدار نان فروخته شده نوع 1 در روز 4: 100.0	مقدار نان انبار شده نوع 1 در روز 4: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 1 در روز 4: 100.0	مقدار نان فروخته شده نوع 2 در روز 1: 100.0	مقدار نان انبار شده نوع 2 در روز 1: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 2 در روز 1: 100.0	مقدار نان فروخته شده نوع 2 در روز 2: 500.0	مقدار نان انبار شده نوع 2 در روز 2: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 2 در روز 2: 350.0	مقدار نان فروخته شده نوع 2 در روز 3: 200.0	مقدار نان انبار شده نوع 2 در روز 3: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 2 در روز 3: 200.0	مقدار نان فروخته شده نوع 2 در روز 4: 400.0	مقدار نان انبار شده نوع 2 در روز 4: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 2 در روز 4: 200.0	مقدار نان فروخته شده نوع 3 در روز 1: 300.0	مقدار نان انبار شده نوع 3 در روز 1: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 3 در روز 1: 300.0	مقدار نان فروخته شده نوع 3 در روز 2: 400.0	مقدار نان انبار شده نوع 3 در روز 2: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 3 در روز 2: 400.0	مقدار نان فروخته شده نوع 3 در روز 3: 100.0	مقدار نان انبار شده نوع 3 در روز 3: 0.0
مقدار نان تولید شده نوع 3 در روز 3: 100.0	مقدار نان فروخته شده نوع 3 در روز 4: 500.0	مقدار نان انبار شده نوع 3 در روز 4: 0.0

همچنین مقدار خریداری شده و انبار شده از هر نوع آرد نیز به شرح زیر است:

مقدار آرد خریداری شده نوع 1 در روز 1: 195.0	مقدار آرد انبار شده نوع 1 در روز 1: 150.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 1 در روز 2: 150.0	مقدار آرد انبار شده نوع 1 در روز 2: 45.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 1 در روز 3: 45.0	مقدار آرد انبار شده نوع 1 در روز 4: 0.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 1 در روز 4: 0.0	مقدار آرد انبار شده نوع 2 در روز 1: 201.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 2 در روز 1: 125.0	مقدار آرد انبار شده نوع 2 در روز 2: 68.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 2 در روز 2: 68.0	مقدار آرد انبار شده نوع 2 در روز 3: 0.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 2 در روز 3: 0.0	مقدار آرد انبار شده نوع 2 در روز 4: 204.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 3 در روز 1: 125.0	مقدار آرد انبار شده نوع 3 در روز 1: 88.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 3 در روز 2: 88.0	مقدار آرد انبار شده نوع 3 در روز 3: 0.0
مقدار آرد خریداری شده نوع 3 در روز 3: 0.0	مقدار آرد انبار شده نوع 3 در روز 4: 0.0

همان طور که مشاهده می شود تقاضا برای نان ها در روزهای مختلف برآورده شده و در اکثر روزها به میزان نیاز تولید شده و تنها در دو روز مقدار نان اضافی تولید شده در انبار نگهداری شده است.

سوال دوم

فرض کنید در صرافی امکان معامله ۵ نوع ارز (تومان-دلار-یورو-درهم-پوند) وجود دارد. هر واحد از ارز i را می‌توان با r_{ij} واحد از ارز j طبق جدول زیر معامله کرد. به عنوان مثال، می‌توان هر یورو را با 1.05 دلار تعویض کرد. در حال حاضر ۵۰ پوند در اختیار داریم و قصد داریم تمام آن را به تومان تبدیل کنیم. می‌خواهیم دنباله معاملات را به گونه‌ای انجام دهیم که مبلغی که در نهایت بر حسب تومان خواهیم داشت، ماکزیمم شود.

به عنوان مثال، اگر ۵۰ پوند را مستقیماً به تومان تبدیل کنیم، مبلغی که بر حسب تومان خواهیم داشت برابر است با:

$$50 \times 115000 = 5750000$$

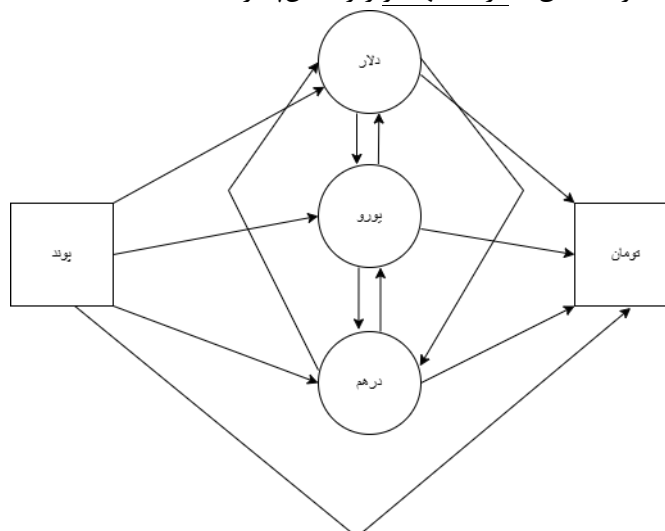
اما اگر ابتدا پوند را به درهم و سپس، درهم را به تومان تبدیل کنیم، مبلغی که بر حسب تومان خواهیم داشت، برابر است با:

$$50 \times 4.63 \times 25000 = 5787500$$

پوند	درهم	یورو	دلار	تومان	
0.000008	0.00004	0.0000104	0.0000109	1	۱ تومان
0.79	3.67	0.95	1	91000	۱ دلار
0.83	3.85	1	1.05	96000	۱ یورو
0.22	1	0.26	0.27	25000	۱ درهم
1	4.63	1.20	1.26	115000	۱ پوند

الف) یک مدل بهینه‌سازی خطی ارائه کنید که شیوه تبدیل ارز را به گونه‌ای تعیین کند که در نهایت مبلغی که بر حسب تومان خواهیم داشت، ماکزیمم گردد. مفروضات زیر را در نظر بگیرید:

- تبدیل مجدد سایر ارزها به پوند مجاز نیست.
- وقتی ارزی به تومان تبدیل شد، تبدیل مجدد تومان به سایر ارزها مجاز نیست.
- به عبارت بهتر، تبدیلهای صرفاً مطابق با گراف جهت‌دار زیر امکان‌پذیر است:



مدل را با Pyomo حل و وضعیت جواب را ارزیابی کنید. برای سهولت در مدلسازی، اندیس متناظر با تومان، دلار، یورو، درهم و پوند را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در نظر بگیرید.

ب) توضیح دهید که چرا مدل قسمت الف، جواب بهین بیکران دارد؟ بدین منظور، برای اینکه از بیکران شدن مسأله جلوگیری کنید، روی همه متغیرها، یک کران بالای بزرگ (مثلاً 10^5) قرار دهید و مدل را دوباره حل کنید تا متوجه شوید که کدام متغیرها تمایل به حرکت به سمت بی‌نهایت را دارند و بر این اساس جواب را تحلیل کنید.

پاسخ سوال دوم

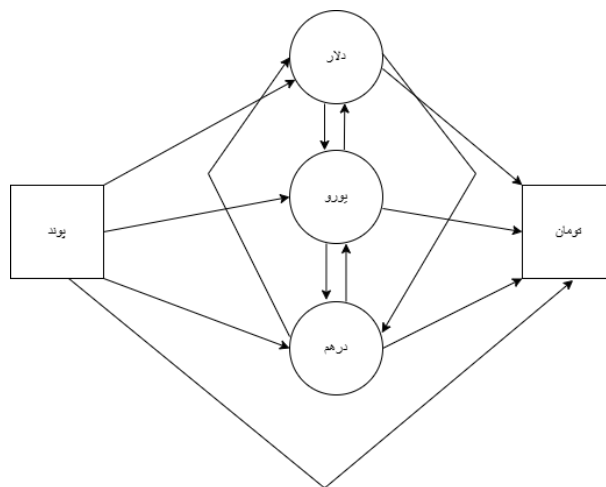
قسمت الف)

اندیس i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
نوع ارز	تومان	دلار	یورو	درهم	پوند

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

میزان مبلغ از ارز پوند که به ارز j تبدیل می‌شود. $j = \{1, 2, 3, 4\}$
 $x_{5,j}$
 میزان مبلغ از ارز i که به ارز تومان تبدیل می‌شود. $i = \{2, 3, 4, 5\}$
 $x_{i,1}$
 میزان مبلغ از ارز i که به ارز j تبدیل می‌شود. $i, j = \{2, 3, 4\}$ و $i \neq j$
 $x_{i,j}$

توجه: متغیر تصمیم فقط به ازای کمان‌های گراف جهت دار زیر تعریف می‌شود (برای مثال متغیر تصمیم به صورت $x_{1,5}$ تعریف نشده است).



مقدار ارز اولیه که در اختیار داریم ۵۰ پوند می‌باشد، بنابراین میزانی از این ارز که می‌تواند به دلار، درهم، یورو یا مستقیماً به تومان تبدیل شود برابر ۵۰ می‌باشد. همان‌طور که در گراف بالا نیز قابل مشاهده است، ما ارزی را نمی‌توانیم به پوند تبدیل کنیم. همچنین نمی‌توانیم ارز تومان را به ارز دیگری تبدیل کنیم. اما برای مثال دلار به یورو و یا یورو به دلار قابل تبدیل می‌باشد. همچنین میزان مبلغی که از یک ارز به سایر ارزها تبدیل می‌شود باید با میزان مبلغی که از سایر ارزها به آن ارز تبدیل می‌شود، برابر باشد به عبارت بهتر شرط تعادل باید برای ارزها رعایت شود.

مقداری که از پوند به سایر ارزها تبدیل می‌شود برابر ۵۰ است:

$$\sum_{j=1}^4 x_{5,j} = 50$$

شرط تعادل برای دلار:

$$1.26x_{5,2} + 1.05x_{3,2} + 0.27x_{4,2} = x_{2,1} + x_{2,3} + x_{2,4}$$

شرط تعادل برای یورو:

$$0.95x_{2,3} + 0.26x_{4,3} + 1.2x_{5,3} = x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,4}$$

شرط تعادل برای درهم:

$$4.63x_{5,4} + 3.85x_{3,4} + 3.67x_{2,4} = x_{4,1} + x_{4,3} + x_{4,2}$$

تعریف تابع هدف:

هدف ما ماکسیمم‌سازی مبلغی است که به تومان تبدیل می‌شود، لذا باید تمامی کمان‌هایی که به ارز تومان وارد می‌شوند را شناسایی کنیم و در ضرایب تبدیل مناسب هریک ضرب کنیم. در نتیجه داریم:

$$\max z = 1000(91x_{2,1} + 96x_{3,1} + 25x_{4,1} + 115x_{5,1})$$

خروجی حاصل:

همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی ما مقدار بی‌نهایت گرفته است که در قسمت بعد، علت آنرا بررسی می‌کنیم.

```
ok
other

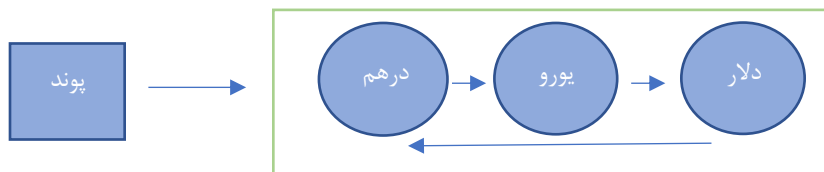
Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: -inf
  Upper bound: inf
Number of objectives: 1
Number of constraints: 4
Number of variables: 14
Number of nonzeros: 23
Sense: maximize
Solver:
- Status: ok
  Termination condition: other
Statistics:
  Branch and bound:
    Number of bounded subproblems: 0
    Number of created subproblems: 0
Error rc: 0
Time: 0.04086446762084961
```


قسمت ب)

با حل مدل بالا، جواب مسأله بی کران می شود که هدف ما این است که علل بیکرانی را بررسی کرده و مسیری که مدل طی کرده که موجب تحقق سود چشمگیر و بدون ریسک از تبدیل ارزها شده است را تحلیل کنیم. به منظور ارزیابی مسیر طی شده، کران بالایی را برای تمامی این متغیرها در نظر می گیریم. پس از اعمال کران، قصد داریم بررسی کنیم که کدامیک از متغیرها به آن کران و سقف تعیین شده رسیده اند و باعث بی کرانی تابع هدف و مدل ما شده اند. جواب بهین مسأله بعد از در نظر گرفتن کران بالای 10^5 برای هر متغیر به صورت زیر است:

$Z^* = 10562500$	$x_{5,4} = 50$	$x_{5,3} = 0$	$x_{5,2} = 0$	$x_{5,1} = 0$	$x_{4,3} = 10^5$	$x_{4,2} = 0$
$x_{4,1} = 422.5$	$x_{3,4} = 0$	$x_{3,2} = 26000$	$x_{3,1} = 0$	$x_{2,4} = 27300$	$x_{2,3} = 0$	$x_{2,1} = 0$

با تحلیل این جواب نتیجه می شود که ابتدا ۵۰ پوند را به درهم تبدیل کرده است ($x_{5,4} = 50$). سپس درهم به دست آمده را به یورو تبدیل کرده ($x_{4,3}$) و سپس یورو حاصل را به دلار تبدیل کرده است ($x_{3,2}$) و دوباره دلار حاصل را به درهم تبدیل کرده است ($x_{2,4}$) و چرخه درهم-یورو-دلار-درهم تا زمانی که هنوز به کران بالا نرسیده است، تکرار شده است و سرانجام درهم به دست آمده به تومان تبدیل شده است. برای آنکه روشن شود که چرا تبدیل ارز به طور مکرر روی چرخه درهم-یورو-دلار-درهم انجام می شود، فرض کنید ما یک درهم داریم و آن را به یورو تبدیل می کنیم. پس به میزان $1 \times 0.26 = 0.26$ یورو به دست می آید. سپس یورو به دست آمده را به دلار تبدیل می کنیم و $1.05 \times 0.26 = 0.273$ دلار به دست می آید. حال اگر دلار به دست آمده را به درهم تبدیل کنیم، به میزان $0.273 \times 3.67 = 1.00191$ درهم خواهیم داشت. پس با یک بار حرکت روی چرخه درهم-یورو-دلار-درهم توانستیم یک درهم را به 1.00191 درهم افزایش دهیم.



اگر این حلقه و این عملیات به طور مداوم و تکراری ادامه یابد، هر بار مقدار ارز ما بزرگتر و بزرگتر می شود. در واقع، یک مسیر کسب سود بدون ریسک وجود داشته که از طریق تبدیل مداوم ارزها به یکدیگر، به طور پیوسته ارزش پول را افزایش داده ایم و زمانی که به آن سقف و کران می رسیم، درهم حاصل را به تومان تبدیل می کنیم ($x_{4,1} = 422.5$). عددی که در نهایت به دست می آید، همان مقدار تابع هدف ما، در واقع همان مقدار تومان است که در انتها در اختیار داریم که مقدار آن ۱۰۵۶۲۵۰۰ تومان (ده میلیون و پانصد و شصت و دو هزار و پانصد تومان) می باشد.

```

objective function : 10562500.0
decision variables :
x[5,4]: 50.0
x[5,3]: 0.0
x[5,2]: 0.0
x[5,1]: 0.0
x[4,3]: 100000.0
x[4,2]: 0.0
x[4,1]: 422.5
x[3,4]: 0.0
x[3,2]: 26000.0
x[3,1]: 0.0
x[2,4]: 27300.0
x[2,3]: 0.0
x[2,1]: 0.0

Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 10562500.0
  Upper bound: 10562500.0
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 14
  Number of variables: 14
  Number of nonzeros: 33
  Sense: maximize
...
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0

```

حال اگر کران بالایی که تعریف کردیم را افزایش دهیم (برای مثال 10^6) چه اتفاقی می‌افتد؟ در واقع به مدل اجازه دادیم این چرخه که پیش‌تر توضیح دادیم را بیشتر تکرار کند و همچنان، مجدد به سقف و کران تعیین شده برای متغیر تصمیم تبدیل درهم به یورو می‌رسیم و در نهایت نیز مقدار تابع هدف ما ۵۳۵۳۷۵۰۰ می‌شود.

سوال سوم

(الف) مسأله بهینه‌سازی خطی زیر را با روش ترسیمی حل کنید.

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

s. t.

$$-x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \text{ free } x_2 \geq 0$$

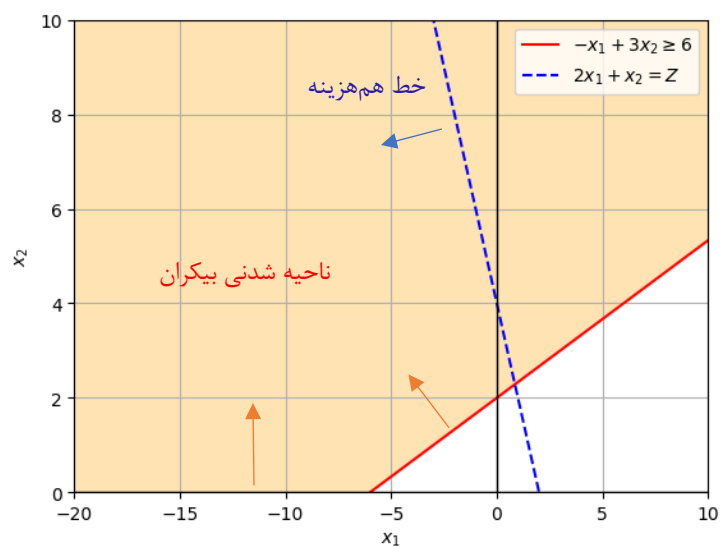
(ب) مدل قسمت الف را در Pyomo پیاده‌سازی کنید و درستی جوابی که در قسمت الف به دست آوردید را تحقیق کنید.

(ج) قیدی به مسأله قسمت الف اضافه کنید به طوری که مسأله جواب بهین دگرین پیدا کند (سایر بخش‌های مدل را تغییر ندهید).

پاسخ سوال سوم

قسمت الف)

ناحیه شدنی با رنگ زرد مشخص شده است و به صورت زیر است:



قسمت ب)

در قسمت الف مسأله را با روش ترسیمی حل کردیم و همان‌طور که مشاهده شد، مسأله جواب بهین بیکران دارد. با پیاده‌سازی این مدل در pyomo نیز این نتایج بی‌کرانی مشاهده می‌شود ((str(result) را بررسی کنید)

```

Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: -inf
  Upper bound: inf
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 1
  Number of variables: 2
  Number of nonzeros: 2
  Sense: minimize
Solver:
- Status: ok
  Termination condition: unbounded
Statistics:
  Branch and bound:
    Number of bounded subproblems: 0
    Number of created subproblems: 0
  Error rc: 0
  Time: 0.0171658992767334

```

قسمت ج)

قید $2x_1 + x_2 \geq -12$ را به مدل اضافه می‌کنیم. در این صورت، جواب دگرین خواهیم داشت. نقطه گوشه‌ای $(-6, 0)$ جواب بهین مسأله است و مقدار بهین تابع هدف برابر با -12 می‌باشد. مجموعه جواب‌های بهین به صورت $(x_1^*, -12 - 2x_1^*)$ است به طوری که $x_1^* \leq -6$.

