بسمه‌تعالی

پاسخنامه تمرین سری سوم درس بهینه‌سازی خطی

استاد: دکتر فرناز هوشمند

تهیه و تنظیم: نگین صادقی

ترم بهار ۱۴۰۴

سوال اول

سوال اول: شرکتی مدیریت یک جنگل را به عهده دارد. در این جنگل، درخت‌هایی با سِن‌های مختلف وجود دارند که از نظر سنی به رده‌های ۱ تا ۴ دسته‌بندی می‌شوند. هر رده متناظر با حدوداً ۲۵ سال رشد است که رده ۱ درختان جوان و رده ۴ درختانی تنومند را تشکیل می‌دهند. در حال حاضر، ۸۰۰۰ هکتار به رده ۱، ۱۰۰۰۰ هکتار به رده ۲، ۲۰۰۰۰ هکتار به رده ۳ و ۶۰۰۰۰ هکتار به رده ۴ اختصاص دارد. افق برنامه‌ریزی شرکت ۱۰۰ ساله است و شرکت می‌خواهد درباره شیوه قطع درختان در هریک از چهار دوره آتی (هر دوره ۲۵ سال است) تصمیم بگیرد به طوری که بازده ماکزیمم شود. آنها پیش‌بینی می‌کنند که فعالیت شرکت بعد از صد سال همچنان ادامه داشته باشد، لذا این شرط را قرار می‌دهند که در پایان افق برنامه‌ریزی ۱۰۰ ساله، رده ۴، ۴۰۰۰۰ هکتار و رده ۳، ۱۰۰۰۰ هکتار داشته باشد.

بازده ناشی از قطع درخت‌های رده‌های مختلف، متفاوت است. رده ۱ اصلاً بازدهی ندارد. بازده ناشی از قطع درختان رده ۲، ۳ و ۴ به ازای هر هکتار، به ترتیب، ۲۵۰، ۵۱۰ و ۷۰۰ واحد چوب است. تعداد هکتارهای رده i در یک دوره برابر است با تعداد هکتارهای رده $i-1$ از دوره قبل منهای هکتارهای قطع شده از رده $i-1$ در دوره قبل ($i=2,3$). تعداد هکتارهای رده ۱ در هر دوره، برابر با کل هکتارهای قطع شده در دوره قبل است. تعداد هکتارهای رده ۴ در هر دوره، شامل زمین‌های رده ۳ از دوره قبل به اضافه همه زمین‌های باقی‌مانده از رده ۴ می‌باشد.

یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید که تعیین کند چگونه باید درباره قطع درختان در هریک از چهار دوره آتی (توجه کنید که هر دوره ۲۵ سال است) تصمیم‌گیری شود به طوری که بازده ماکزیمم شود؟ شرح متغیرها را به طور کامل بیان نمایید و توضیح دهید که هر قید چه چیزی را تضمین می‌کند. تصویر پاسخ‌نامه شامل شرح متغیرها و قیود و تحلیل جواب بهین را در قالب یک فایل PDF ارسال کنید و علاوه بر پاسخ‌نامه، فایل Notebook مربوط به کد Pyomo را نیز ارسال نمایید.

پاسخ سوال اول

ابتدا به تعریف متغیرهای تصمیم مسأله می‌پردازیم. جنگلی که در صورت سوال مطرح شده است، شامل درختانی از رده‌های مختلف که قابل قطع کردن هستند. همچنین باید توجه داشت که پس از گذشت یک دوره، رده سنی درختان نیز افزایش می‌یابد. برای مثال درختان رده اول، پس از گذشت یک دوره به درختان رده دوم تبدیل شده بنابراین دارای بازدهی هستند. لذا برای اینکه بدانیم در هر دوره چه میزان هکتار از درختان رده‌های مختلف موجود و همچنین چه میزان قطع شده است، متغیرهای تصمیم زیر را در ادامه تعریف می‌کنیم:

اندیس‌ها و مجموعه‌ها:

مجموعه رده درختان با اندیس i $\quad \mathbb{I} = \{1,2,3,4\}$

مجموعه دوره‌های زمانی با اندیس t $\quad \mathbb{T} = \{1,2,3,4\}$

پارامترهای مسأله:

میزان هکتار موجود برای درختان رده i در ابتدای افق برنامه‌ریزی $\quad d_i$

میزان هکتار موجود برای درختان رده ۱ در ابتدای افق برنامه‌ریزی	میزان هکتار موجود برای درختان رده ۲ در ابتدای افق برنامه‌ریزی	میزان هکتار موجود برای درختان رده ۳ در ابتدای افق برنامه‌ریزی	میزان هکتار موجود برای درختان رده ۴ در ابتدای افق برنامه‌ریزی
۸۰۰۰	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۶۰۰۰۰

بازده چوب ناشی از قطع درختان رده i به ازای هر هکتار $\quad f_i$

بازدهی ناشی از قطع درختان رده ۱	بازدهی ناشی از قطع درختان رده ۲	بازدهی ناشی از قطع درختان رده ۳	بازدهی ناشی از قطع درختان رده ۴
۰	۲۵۰	۵۱۰	۷۰۰

متغیرهای تصمیم:

میزان هکتار قطع‌شده از درخت‌های رده i در دوره t $\quad x_{i,t}$

میزان هکتار موجود از درخت‌های رده i در پایان دوره t $\quad w_{i,t}$

تعریف قیود:

در دوره اول:

از میزان هکتار موجود برای درختان رده i که در ابتدای افق برنامه‌ریزی داشتیم، تعدادی از آنها در پایان این دوره قطع شده‌اند لذا میزان هکتار موجود از درخت‌های رده i در پایان این دوره به صورت زیر است:

$$w_{i,1} = d_i - x_{i,1} \qquad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

در دوره دوم:

با توجه به اینکه تعداد هکتارهای رده ۱ در دوره دوم، برابر با کل هکتارهای قطع شده در دوره قبل است $(x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1})$ لذا داریم:

$$w_{1,2}=(x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1})-x_{1,2}$$

برای درختان رده ۲ و۳ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند میزان هکتار موجود برای درختان رده $i-1$ ($i=2,3$) که در ابتدای دوره دوم داشتیم که تعدادی از آنها در پایان این دوره قطع شده‌اند با میزان هکتار موجود از درخت‌های رده i در پایان دوره دوم برابر است (در واقع دارد بیان می‌کند درخت‌های موجود از دوره پیش که رده $i-1$ را داشتند و الان در دوره دوم رده i را گرفتند، مقداری از آنها به عنوان درخت درجه i قطع می‌شوند):

$$w_{i,2}=w_{i-1,1}-x_{i,2} \qquad \forall i\in\{2,3\}$$

برای درختان رده ۴ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند که میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره دوم برابر است با مجموع میزان هکتار موجود از درختان رده ۳ در پایان دوره اول که قطع نشدند و میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره اول (تعداد هکتارهای رده ۴ در هر دوره، شامل زمین‌های رده ۳ از دوره قبل به اضافه همه زمین‌های باقی‌مانده از رده ۴ می‌باشد) که مقداری از درختان رده ۴ در پایان دوره دوم قطع شدند و از آن کسر می‌شود:

$$w_{4,2}=(w_{3,1}+w_{4,1})-x_{4,2}$$

در دوره سوم:

با توجه به اینکه تعداد هکتارهای رده ۱ در دوره سوم، برابر با کل هکتارهای قطع شده در دوره قبل است $(x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}+x_{4,2})$ لذا داریم:

$$w_{1,3}=(x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}+x_{4,2})-x_{1,3}$$

برای درختان رده ۲ و۳ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند میزان هکتار موجود برای درختان رده $i-1$ ($i=2,3$) که در ابتدای دوره سوم داشتیم که تعدادی از آنها در پایان این دوره قطع شده‌اند با میزان هکتار موجود از درخت‌های رده i در پایان دوره سوم برابر است (در واقع دارد بیان می‌کند درخت‌های موجود از دوره پیش که رده $i-1$ را داشتند و الان در دوره سوم رده i را گرفتند، مقداری از آنها به عنوان درخت درجه i قطع می‌شوند):

$$w_{i,3}=w_{i-1,2}-x_{i,3} \qquad \forall i\in\{2,3\}$$

برای درختان رده ۴ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند که میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره سوم برابر است با مجموع میزان هکتار موجود از درختان رده ۳ در پایان دوره دوم که قطع نشدند و میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره دوم (تعداد هکتارهای رده ۴ در هر دوره، شامل زمین‌های رده ۳ از دوره قبل به اضافه همه زمین‌های باقی‌مانده از رده ۴ می‌باشد) که مقداری از درختان رده ۴ در پایان دوره سوم قطع شدند و از آن کسر می‌شود:

$$w_{4,3}=(w_{3,2}+w_{4,2})-x_{4,3}$$

در دوره چهارم:

با توجه به اینکه تعداد هکتارهای رده ۱ در دوره چهارم، برابر با کل هکتارهای قطع شده در دوره قبل است $(x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}+x_{4,3})$ لذا داریم:

$$w_{1,4}=(x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}+x_{4,3})-x_{1,4}$$

برای درختان رده ۲ و۳ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند میزان هکتار موجود برای درختان رده $i-1$ ($i=2,3$) که در ابتدای دوره چهارم داشتیم که تعدادی از آنها در پایان این دوره قطع شده‌اند با میزان هکتار موجود از درخت‌های رده i در پایان دوره چهارم برابر است (در واقع

دارد بیان می‌کند درخت‌های موجود از دوره پیش که رده $i-1$ را داشتند و الان در دوره چهارم رده i را گرفتند، مقداری از آنها به عنوان درخت درجه i قطع می‌شوند):

$$w_{i,4} = w_{i-1,3} - x_{i,4} \qquad \forall i \in \{2,3\}$$

برای درختان رده ۴ قید زیر را داریم که تضمین می‌کند که میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره چهارم برابر است با مجموع میزان هکتار موجود از درختان رده ۳ در پایان دوره سوم که قطع نشدند و میزان هکتار موجود از درختان رده ۴ در پایان دوره سوم (تعداد هکتارهای رده ۴ در هر دوره، شامل زمین‌های رده ۳ از دوره قبل به اضافه همه زمین‌های باقی‌مانده از رده ۴ می‌باشد) که مقداری از درختان رده ۴ در پایان دوره چهارم قطع شدند و از آن کسر می‌شود:

$$w_{4,4} = (w_{3,3} + w_{4,3}) - x_{4,4}$$

همچنین قیود زیر تضمین می‌کنند که در پایان افق برنامه‌ریزی ۱۰۰ ساله (پایان دوره چهارم)، رده ۴، ۴۰۰۰۰ هکتار و رده ۳، ۱۰۰۰۰ هکتار داشته باشیم:

$$w_{3,4} \geq 10000$$

$$w_{4,4} \geq 40000$$

تعریف تابع هدف:

همان‌طور که مشاهده می‌شود درختان با رده بالاتر بازدهی بیشتری دارند، هدف ما ماکسیمم سازی بازده می‌باشد لذا با توجه به بازده ناشی از قطع درختان هر رده داریم:

$$\max z = f_2 \sum_{t\in\mathbb{T}} x_{2,t} + f_3 \sum_{t\in\mathbb{T}} x_{3,t} + f_4 \sum_{t\in\mathbb{T}} x_{4,t}$$

تحلیل پاسخ سوال اول

مقدار تابع هدف که همان میزان بازدهی حاصل از قطع درختان می‌باشد، همچنین میزان هکتار موجود و میزان هکتار قطع‌شده از درختان هر رده در هر دوره به صورت زیر است:

میزان بازدهی حاصل از قطع درختان
65080000

میزان هکتار موجود از درختان در پایان هر دوره				
	رده ۱	رده ۲	رده ۳	رده ۴
دوره ۱	8000	10000	20000	2000
دوره ۲	58000	8000	10000	22000
دوره ۳	0	58000	8000	32000
دوره ۴	0	0	10000	40000

میزان هکتار قطع‌شده از درختان در پایان هر دوره				
	رده ۱	رده ۲	رده ۳	رده ۴
دوره ۱	0	0	0	58000
دوره ۲	0	0	0	0
دوره ۳	0	0	0	0
دوره ۴	0	0	48000	0

با توجه به پاسخ به دست آمده از حل مدل، مشاهده می‌شود که درختان رده ۳ و ۴ قطع شده‌اند چراکه درختان رده ۳ و ۴ دارای بازدهی بیشتری هستند و رده ۴ نیز بیشترین بازدهی و بنابراین بیشترین میزان قطع را دارد پس مقدار بهین تابع هدف که میزان بازدهی حاصل از قطع درختان است ناشی از قطع همین رده‌ها می‌باشد. برای جدول میزان هکتار نیز برای مثال می‌خواهیم میزان هکتار موجود از درختان رده ۱ را در پایان دوره ۲ بررسی کنیم. لذا داریم: $w_{1,2} = (x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}) - x_{1,2} = (0 + 0 + 0 + 58000) - 0 = 58000$

سوال دوم

سوال دوم: مسأله بهینه‌سازی زیر را با روش سیمپلکس حل کنید و مجموعه همه جواب‌های بهین (در صورت وجود) را گزارش نمایید.

$$\begin{aligned}
&\max z = -4x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 \le 10 \\
&-2x_1 + x_2 \le 20 \\
&x_1\ free,\ \ x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

پاسخ سوال دوم

با توجه به اینکه علامت متغیر x_1 آزاد است بنابراین ابتدا باید مسأله را به فرم استاندارد بنویسیم، لذا به جای متغیر x_1، $x_1 = x_1' - x_1''$ را قرار می‌دهیم که $x_1', x_1'' \ge 0$ همچنین نیاز داریم متغیرهای کمبود را به قیود اضافه کنیم تا قیود به صورت تساوی نوشته شود لذا مسأله زیر نتیجه می‌شود که در ادامه آنرا با روش سیمپلکس حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max z = -4(x_1' - x_1'') + 3x_2 \\
&s.t. \\
&x_1' - x_1'' + x_2 + s_1 = 10 \\
&-2(x_1' - x_1'') + x_2 + s_2 = 20 \\
&x_2, x_1', x_1'', s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}$$

نمایش سطر صفر تابع هدف:

$$z + 4(x_1' - x_1'') - 3x_2 = 0$$

جواب شدنی پایه اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$BV=\{s_1,s_2\}, NBV=\{x_2,x_1',x_1''\}$$

$$s_1=10\,, s_2=20, \qquad x_2,x_1',x_1''=0$$

جدول سیمپلکس متناظر با جواب شدنی پایه‌ای اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

BV	**z**	x_1'	x_1''	x_2	S_1	S_2	**RHS**
z	1	4	-4	-3	0	0	0
S_1	0	1	-1	1	1	0	10
S_2	0	-2	2	1	0	1	20

از آنجا که مسأله ما ماکسیمم‌سازی می‌باشد پس باید در سطر صفر به دنبال منفی‌ترین (کوچک‌ترین) ضریب باشیم چراکه باید متغیری که باعث بیشترین افزایش در تابع هدف را دارد شناسایی کنیم. پس ستون مربوط به x_1'' را نگاه می‌کنیم و آزمون نسبت را انجام می‌دهیم. پس از انجام آزمون نسبت ($\min\{\frac{20}{2}\}$)، همان‌طور که مشاهده می‌شود s_2 از پایه خارج و x_1'' در پایه قرار می‌گیرد و جدول را به‌روزرسانی می‌کنیم:

BV	**z**	x_1'	x_1''	x_2	S_1	S_2	**RHS**
z	1	0	0	-1	0	2	40
S_1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	20
x_1''	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	10

همان‌طور که مشاهده شد متغیر x_2 را با ضریب منفی در سطر صفر داریم. سپس با انجام آزمون نسبت برای ستون متناظر با آن ($\min\{\frac{10}{1/2},\frac{20}{3/2}\}$)، همان‌طور که مشاهده می‌شود s_1 از پایه خارج و x_2 در پایه قرار می‌گیرد با به‌روزرسانی مجدد جدول و ضرایب متغیرها، به جدول نهایی زیر می‌رسیم:

BV	**z**	x_1'	x_1''	x_2	S_1	S_2	**RHS**
z	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{160}{3}$
x_2	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$
x_1''	0	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در سطر صفر دیگر متغیری با ضریب منفی برای وارد شدن به پایه نداریم. این به این معناست که به جدول بهین رسیدیم و داریم:

مقدار بهین تابع هدف: $z^*=\frac{160}{3}$ مقدار بهین متغیرها: $\begin{pmatrix} x_1'^* \\ x_1''^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

اما با توجه به سطر صفر نتیجه می‌شود که اگر متغیر x_1' که ضریب صفر دارد را وارد کنیم تغییری در تابع هدف ایجاد نمی‌کند و از طرفی با نگاه به ستون متناظر آن، ضریب اکیدا مثبتی برای آزمون نسبت نداریم. این به این معنی است که شعاع دگرین داریم. حال برای یافتن جواب دگرین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های بهین به دو نقطه نیاز داریم. نقطه اول با استفاده از جدول بهین به صورت به دست می‌آید. برای پیدا کردن نقطه دوم ابتدا x_1' را با توجه به اینکه می‌تواند هر مقدار دلخواه مثبتی بگیرد برابر با λ قرار می‌دهیم که $\lambda \geq 0$ سپس، طبق ردیف متناظر با x_2 در جدول فوق داریم (توجه کنید که s_1 و s_2 چون متغیرهای غیرپایه‌ای هستند پس مقدار صفر می‌گیرند):

$$x_2 = \frac{40}{3}$$

و طبق ردیف متناظر با x_1'' در جدول فوق داریم (توجه کنید که s_1 و s_2 چون متغیرهای غیرپایه‌ای هستند پس مقدار صفر می‌گیرند):

$$-x_1' + x_1'' = \frac{10}{3}$$

بنابراین داریم: $x_1'' = \lambda + \frac{10}{3}$. بنابراین، دومین نقطه به صورت $\begin{pmatrix} {x_1'}^* \\ {x_1''}^* \\ x_2^* \\ s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ می‌باشد. بدین ترتیب، جهت شعاع دگرین به صورت $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ به دست می‌آید. لذا، مجموعه همه جوابهای بهین به صورت زیر است:

$$\text{مجموعه جواب‌های بهین:} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \ s.t.\ \lambda \geq 0 \right\}$$

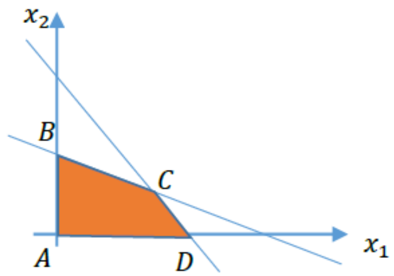
اما دقت کنید که مسأله اصلی (قبل از استانداردسازی) جواب دگرین ندارد و جواب دگرین مسأله استاندارد به دلیل بازنویسی متغیر x_1 به صورت $x_1 = x_1' - x_1''$ است. مسأله اصلی (قبل از استانداردسازی) دارای جواب بهین منحصر به فرد به صورت زیر است:

$$x_1^* = -\frac{10}{3}, \ \ x_2^* = \frac{40}{3}, \qquad z^* = \frac{160}{3}$$

در واقع دلیل آن که مسأله استاندارد جواب دگرین پیدا می‌کند آن است که $x_1^* = -\frac{10}{3}$ را به شیوه‌های مختلفی می‌توان به صورت تفاضل دو متغیر نامنفی نوشت.

سوال سوم

سوال سوم: الف) ناحیه شدنی یک LP به صورت زیر است:



فرض کنید همه‌ی قیود به صورت ≥ و متغیرهای x_1 و x_2 نامنفی باشند. همچنین فرض کنید s_1 و s_2 به‌ترتیب متغیرهای کمکی متناظر با قیودی باشند که با خطوط BC و CD نشان داده شده‌اند. متناظر با هر کدام از نقاط گوشه‌ای ناحیه شدنی، مجموعه متغیرهای پایه‌ای و غیر پایه‌ای را تعیین کنید.

ب) مسأله LP زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید جواب بهین متناهی داشته باشد.

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \le b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2,j} x_j \le b_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{3,j} x_j \ge b_3$$

$$x_j \ge 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

به سوالات زیر پاسخ دهید (هر بخش مستقل از بخش دیگر است):

- اگر سمت راست قید سوم را از b_3 به $b_3 - 1$ تغییر دهیم، با ذکر دلیل بگویید ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف چه تغییری می‌کنند (بزرگتر، کوچکتر یا بدون تغییر)؟
- اگر قیود اول و دوم را حذف و آنها را با قید زیر جایگزین کنیم، با ذکر دلیل بگویید ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف چه تغییری می‌کنند (بزرگتر، کوچکتر یا بدون تغییر)؟

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{1,j} + a_{2,j}) x_j \le b_1 + b_2$$

- اگر قید $x_1 = 0$ را به مسأله اضافه کنیم، با ذکر دلیل بگویید ناحیه شدنی و مقدار بهین تابع هدف چه تغییری می‌کنند (بزرگتر، کوچکتر یا بدون تغییر)؟

پاسخ سوال سوم

قسمت الف:

همان‌طور که مشاهده می‌شود ما ۴ متغیر و ۲ قید داریم (۲ متغیر کمکی داریم). از آنجا که همه قیود به‌صورت $\leq$ هستند، برای تبدیل آن‌ها به معادلات، از متغیرهای کمکی یا اسلک s_1 و s_2 استفاده می‌کنیم.متغیرها را به صورت مجموعه $\{s_1, s_2, x_1, x_2\}$ نمایش می‌دهیم و نقاط گوشه‌ای ما به صورت $\{A, B, C, D\}$ می‌باشد. حال متناظر با هر نقطه گوشه‌ای شدنی می‌خواهیم مجموعه متغیرهای پایه‌ای و غیر پایه‌ای را تعیین کنیم:

نقطه *A*:	$\boldsymbol{NBV} = \{x_1, x_2\}$	$\boldsymbol{BV} = \{s_1, s_2\}$
نقطه *B*:	$\boldsymbol{NBV} = \{x_1, s_1\}$	$\boldsymbol{BV} = \{x_2, s_2\}$
نقطه *C*:	$\boldsymbol{NBV} = \{s_1, s_2\}$	$\boldsymbol{BV} = \{x_1, x_2\}$
نقطه *D*:	$\boldsymbol{NBV} = \{x_2, s_2\}$	$\boldsymbol{BV} = \{x_1, s_1\}$

برای درک بهتر به توضیحات زیر توجه کنید:

در نقطه A که در مبدأ قرار دارد، هر دو متغیر تصمیم، یعنی x_1, x_2 ، برابر صفر هستند. بنابراین، متغیرهای کمکی s_1, s_2 غیرصفر بوده و پایه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، در حالی که x_1, x_2 به‌عنوان متغیرهای غیرپایه‌ای انتخاب می‌شوند. نقطه B که روی محور x_2 قرار دارد، به این معناست که x_1 همچنان صفر است اما x_2 مقدار مثبتی دارد. همچنین، نقطه B روی خط CD قرار ندارد، به همین دلیل، s_2 اکیدا مثبت است. پس x_2, s_2 متغیرهای پایه‌ای خواهند بود و در مقابل، x_1, s_1 غیرپایه‌ای محسوب می‌شوند. نقطه C که محل برخورد دو ابرصفحه (دو قید) مطابق شکل می‌باشد بنابراین در قیود مربوطه به صورت تساوی صدق می‌کنند و متغیرهای s_1, s_2 مقدار صفر اختیار می‌کنند و متغیرهای x_1, x_2 در نقطه C مقدار اکیداً مثبت دارند پس x_1, x_2 به عنوان متغیرهای پایه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. در نهایت، در نقطه D متغیر x_1 مقدار اکیدا مثبت دارد و نیز این نقطه روی خط BC قرار ندارد پس s_1 نیز مقدار اکیداً مثبت دارد. بنابراین، x_1 و s_1 متغیرهای پایه‌ای در این نقطه خواهند بود و در مقابل، x_2, s_2 متغیرهای غیرپایه‌ای محسوب می‌شوند.

قسمت ب:

- اگر سمت راست قید سوم را از b_3 به $b_3 - 1$ تغییر دهیم:

همان‌طور که مشاهده می‌شود قید سوم به صورت $\geq$ می‌باشد بنابراین با تغییر b_3 به $b_3 - 1$ ناحیه شدنی را می‌تواند بزرگتر کند و از آنجا که مسأله ماکسیمم‌سازی می‌باشد مقدار بهین تابع هدف می‌تواند بهبود یابد و بزرگتر شود. البته چنانچه این قید سوم، قید زائد باشد بنابرین با تغییر سمت راست آن همچنان قید زائد است و ناحیه شدنی تغییر نمی‌کند و مقدار بهین تابع هدف نیز تغییر نمی‌کند. پس ناحیه شدنی یا بزرگتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند و مقدار بهین تابع هدف هم یا بزرگتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند.

- اگر قیود اول و دوم را حذف و آنها را با قید $\sum_{j=1}^{n}(a_{1,j} + a_{2,j})x_j \leq b_1 + b_2$ جایگزین کنیم:

هر جواب شدنی برای مسأله اصلی در قید جدید نیز صدق می‌کند، بنابراین ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود اما ممکن است مجموعه نقاطی در قید جدید صدق کند که در قیود اول و دوم قبلی به تنهایی صدق نمی‌کرده، بنابراین ناحیه شدنی ممکن است بزرگتر شود.

بنابراین ناحیه شدنی یا بزرگتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند و در نتیجه، مقدار بهین تابع هدف یا بزرگتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند.

- اگر قید $x_1 = 0$ را به مسأله اضافه کنیم:

با اضافه کردن این محدودیت به مسأله مجموعه جواب را به $x_1^* = 0$ محدود کردیم و در واقع ناحیه شدنی مسأله را کوچکتر و محدودتر کردیم که منجر به کوچکتر شدن مقدار بهین تابع هدف می‌شود. البته اگر مقدار بهین از قبل $x_1^* = 0$ باشد بنابراین با اضافه کردن این قید تغییری در مقدار بهین تابع هدف مشاهده نمی‌شود. پس ناحیه شدنی یا کوچکتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند و مقدار بهین تابع هدف یا کوچکتر می‌شود یا بدون تغییر می‌ماند.