بسمه‌تعالی

پاسخنامه تمرین سری اول درس بهینه‌سازی خطی

استاد: دکتر فرناز هوشمند

تهیه و تنظیم: نگین صادقی

ترم بهار ۱۴۰۴

سوال اول

یک فرودگاه باید پروازهای مربوط به دو شرکت هواپیمایی A و B را برای یک روز مشخص زمان‌بندی کند. هر پرواز برای انجام، به تعداد مشخصی گیت نیاز دارد. تعداد کل گیت‌های فرودگاه ۱۰ عدد می‌باشد. در هر پرواز مربوط به شرکتA ، دو گیت اشغال می‌شود و در هر پرواز مربوط به شرکت B ، یک گیت اشغال می‌شود. ساعات عملیاتی فرودگاه به صورت زیر می‌باشد:

بازه اول: از 00.00 تا 02:00	بازه هفتم: از 12.00 تا 14:00
بازه دوم: از 02.00 تا 04:00	بازه هشتم: از 14.00 تا 16:00
بازه سوم: از 04.00 تا 06:00	بازه نهم: از 16.00 تا 18:00
بازه چهارم: از 06.00 تا 08:00	بازه دهم: از 18.00 تا 20:00
بازه پنجم: از 08.00 تا 10:00	بازه یازدهم: از 20.00 تا 22:00
بازه ششم: از 10.00 تا 12:00	بازه دوازدهم: از 22.00 تا 24:00

در مجموع، حداقل ۳۰ ٪ از کل پروازهای فرودگاه باید به شرکت B اختصاص یابد. به ازای هر پرواز شرکت i که در بازه زمانی j انجام می‌شود، سودی معادل $c_{i,j}$ دلار به فرودگاه تعلق می‌گیرد ($i \in \{A,B\}, j \in \{1,2,\dots,12\}$) باید تصمیم بگیریم که فرودگاه در هر بازه زمانی، چه تعداد پرواز به هر شرکت اختصاص دهد به طوریکه سودش ماکزیمم شود. در این خصوص، یک مدل بهینه‌سازی بنویسید.

پاسخ سوال اول

برای اینکه ببینیم در هر بازه زمانی برای هر شرکت چه تعداد پرواز انجام می‌شود متغیرهای تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$x_{i,j} :=$ تعداد پروازهایی که توسط شرکت i در بازه زمانی j انجام می‌شود $\quad i \in \{A,B\}, j \in \{1,2,\dots,12\}$

تعریف تابع هدف:

هدف ما این است که سود فرودگاه ماکسیمم شود. از آنجا که به ازای هر پرواز شرکت i که در بازه زمانی j انجام می‌شود،سودی معادل $c_{i,j}$ دلار به فرودگاه تعلق می‌گیرد لذا به ازای تمام پروازهای انجام‌شده در روز داریم:

$$\max z = \sum_{i\in\{A,B\}} \sum_{j=1}^{12} c_{i,j} x_{i,j}$$

پاسخ سوال اول

تعریف قیود:

قید اول این را تضمین می‌کند که تعداد گیت‌هایی که به کل پروازهای دو شرکت اختصاص می‌یابد از تعداد کل گیت‌های فرودگاه بیشتر نشود:

$$2x_{A,j} + x_{B,j} \leq 10 \quad \forall j = 1, \dots ,12$$

قید بعدی بیانگر این است که در مجموع، حداقل ۳۰ ٪ از کل پروازهای فرودگاه باید به شرکت B اختصاص یابد. کلیه پروازهایی که انجام می‌شود با $\sum_{i\in\{A,B\}}\sum_{j=1}^{12} x_{i,j}$ نمایش داده می‌شود و کلیه پروازهایی که به شرکت B اختصاص دارد با $\sum_{j=1}^{12} x_{B,j}$ نمایش داده می‌شود. حال با این مفروضات داریم:

$$0.3 \sum_{i\in\{A,B\}} \sum_{j=1}^{12} x_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{12} x_{B,j}$$

محدودیت علامت:

از آنجا که متغیرهای تصمیمی که تعریف کردیم همه بیانگر **تعداد** بودند، بنابراین باید اعداد صحیح نامنفی باشند لذا داریم:

$$all\ variables \geq 0\ , Integer$$

سوال دوم

در مسأله زمانبندی کار که در اسلایدهای کلاس به آن پرداختیم، فرض کنید نیاز روزانه به نیروی کار مطابق با همان جدولی باشد که در اسلایدها بیان شد اما این بار فرض کنید شرکت می‌خواهد دو نوع نیرو استخدام کند: نیروی کار تمام‌وقت معمولی و نیروی کار تمام‌وقت ویژه. هر نیروی تمام‌وقت معمولی، باید ۵ روز متوالی کار کند و دو روز تعطیل باشد. هر نیروی تمام وقت ویژه، باید ۶ روز کار کند و یک روز تعطیل باشد. دستمزد ماهانه نیروی تمام‌وقت معمولی c_1 دلار و دستمزد روزانه نیروی تمام وقت ویژه، c_2 دلار است. همچنین، حداکثر ۷۵ درصد کل نیروی کار می‌تواند، نیروی کار تمام‌وقت معمولی باشد.

الف) یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید که ضمن تأمین نیاز روزانه، حقوق پرداختی ماهیانه مینیمم شود.

ب) فرض کنید شرکت هدف دیگری را به عنوان هدف دوم مطرح کرده است. او می‌خواهد از بین همه جواب‌های بهین مسأله قسمت الف، جوابی را انتخاب کند که تعداد کارکنانی که تعطیلی‌شان روز جمعه است، ماکزیمم باشد. برای دستیابی به این هدف، چه مدل بهینه‌سازی باید حل شود؟

پاسخ سوال دوم

نیاز روزانه به نیروی کار مطابق با جدول زیر می‌باشد:

روز	شنبه (روز ۱)	یکشنبه (روز ۲)	دوشنبه (روز ۳)	سه‌شنبه (روز ۴)	چهارشنبه (روز ۵)	پنچشنبه (روز ۶)	جمعه (روز ۷)
تعداد کارکنان تمام‌وقت مورد نیاز	۱۷	۱۳	۱۵	۱۹	۱۴	۱۶	۱۱

متغیرهای تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$x_i :=$ تعداد نیروی کار معمولی که کار خود را از روز i ام شروع می‌کنند $\forall\, i \in \{1,2,\dots,7\}$

$y_i :=$ تعداد نیروی کار ویژه که کار خود را از روز i ام شروع می‌کنند $\forall\, i \in \{1,2,\dots,7\}$

قسمت الف)

تعریف تابع هدف:

هدف ما این است که حقوق پرداختی ماهیانه مینیمم شود. نکته‌ای که باید برای دستمزد نیروی کار رعایت شود این است که کارمندان معمولی حقوق‌شان را به صورت ماهیانه و c_1 دلار دریافت می‌کنند در حالی که کارمندان ویژه به صورت روزانه و c_2 دلار دریافت می‌کنند بنابراین نیاز دارد که به صورت ماهیانه تبدیل شود برای اینکار باید حقوق دریافتی به ازای یک روز را در تعداد روزهایی که در هفته کار می‌کنند (۶ روز) و همچنین در تعداد هفته‌های هر ماه (۴ هفته) ضرب کنیم. لذا به تابع هدف نهایی زیر می‌رسیم:

$$\min z = c_1 \sum_{i=1}^{7} x_i + 6 \times 4 \times c_2 \sum_{i=1}^{7} y_i$$

پاسخ سوال دوم

تعریف قیود:

مطابق با صورت سوال هر نیروی تمام‌وقت معمولی، باید ۵ روز متوالی کار کند و دو روز تعطیل باشد. هر نیروی تمام وقت ویژه، باید ۶ روز کار کند و یک روز تعطیل باشد، بنابراین به ازای هر روز هفته، ۷ قید زیر را داریم که برای مثال قید اول بیانگر تعداد کل کارمندانی (ویژه و معمولی) است که در روز شنبه مشغول کار هستند:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_1 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 17$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 13$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 + y_7 \geq 19$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_7 \geq 14$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \geq 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 11$$

قید بعدی تضمین می‌کند که **حداکثر** ۷۵ درصد کل نیروی کار می‌تواند، نیروی کار تمام‌وقت معمولی باشد. تعداد کل نیروهای کار به صورت $\sum_{i=1}^{7}(x_i + y_i)$ محاسبه می‌شود لذا داریم:

$$\frac{75}{100} \times \sum_{i=1}^{7}(x_i + y_i) \geq \sum_{i=1}^{7} x_i$$

محدودیت علامت:

از آنجا که متغیرهای تصمیمی که تعریف کردیم همه بیانگر **تعداد** بودند، بنابراین باید اعداد صحیح نامنفی باشند لذا داریم:

$$all\ variables \geq 0\ , Integer$$

پاسخ سوال دوم

قسمت ب)

تعریف تابع هدف:

هدف در این قسمت ماکسیمم کردن تعداد کارکنانی است که تعطیلی‌شان روز جمعه می‌باشد، لذا باید از میان کارمندان ببینیم چه کسانی تعطیلی‌شان در روز جمعه می‌باشد:

کارمندان معمولی: x_1 و x_2 — کارمندان ویژه: y_1

لذا داریم:

$$\max z = x_1 + x_2 + y_1$$

تعریف قیود:

فرض کنید مقدار بهین تابع هدف مدل قسمت الف را با Z^* نمایش دهیم. در این صورت لازم است قید زیر را نیز به مدل اضافه کنیم:

$$c_1 \sum_{i=1}^{7} x_i + 6 \times 4 \times c_2 \sum_{i=1}^{7} y_i = Z^*$$

دقت کنید همه قیودی که در قسمت الف داشتیم، در مدل جدید نیز وجود خواهند داشت فقط تابع هدف تغییر می‌کند و قید فوق نیز به مجموعه قیود اضافه می‌شود.

*توجه کنید که c_1 و c_2 پارامترهای مدل می‌باشند و اعداد ثابت هستند و نیازی نیست توسط مدل انتخاب شوند.

سوال سوم

در مسأله برش که در اسلایدهای کلاس به آن پرداختیم، فرض کنید الوار اصلی ۵۰ متری است و فرآیند برش به این صورت است که الوارهای ۵۰ متری ابتدا با الگوهای زیر در قالب الوارهای ۱۵ و ۱۷ متری برش داده می‌شوند:

- دو الوار ۱۵ فوتی و یک الوار ۱۷ فوتی و یک قطعه ۳ فوتی
- ۳ الوار ۱۵ فوتی و یک قطعه ۵ فوتی
- یک الوار ۱۵ فوتی، دو الوار ۱۷ فوتی و یک تکه ضایعات یک فوتی

سپس، الوارهای ۱۵ و ۱۷ متری به قطعات چوب ۳، ۵ و ۹ متری برش داده می‌شوند (برش دو مرحله‌ای). تقاضا برای قطعات چوب ۳، ۵ و ۹ متری به ترتیب ۲۵، ۲۰ و ۱۵ است. هر قطعه برش‌یافته‌ای که باقی بماند (فارغ از اندازه)، از نظر شرکت، ضایعات محسوب می‌شود. یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید که ضمن تامین تقاضا ضایعات مینیمم شود.

پاسخ سوال سوم

حالاتی که قطعه الوار اصلی ۵۰ فوتی به قطعات ۱۷، ۱۵، ۵ و ۳ فوتی برش داده می‌شود را در جدول زیر نمایش می‌دهیم:

ضایعات	تعداد قطعات ۳ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۱۵ فوتی	تعداد قطعات ۱۷ فوتی	الگو برش
۰	۱	۰	۲	۱	۱
۰	۰	۱	۳	۰	۲
۱	۰	۰	۱	۲	۳

همان‌طور که در جدول نیز مشاهده می‌شود، ما نیاز داریم که بدانیم که چه تعداد الوار ۵۰ فوتی از هر یک از ۳ الگو برش مطرح‌شده در سوال برش داده می‌شود. بدین منظور ما متغیرهای تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$w_i :=$ تعداد الوارهای ۵۰ فوتی که با الگوی i برش داده می‌شود $\forall\ i\ \in \{1,2,3\}$

حال تمام حالات برای برش قطعات ۱۵ و ۱۷ فوتی را پیدا کرده و اندیس‌گذاری می‌کنیم. حالاتی که قطعه چوب ۱۷ فوتی می‌تواند برش بخورد به صورت زیر است:

ضایعات	تعداد قطعات ۹ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۳ فوتی	الگو برش
۲	۰	۰	۵	۱
۰	۰	۱	۴	۲
۱	۰	۲	۲	۳
۲	۱	۰	۲	۴
۰	۱	۱	۱	۵
۲	۰	۳	۰	۶

حال باید بدانیم که چه تعداد قطعات چوب ۱۷ فوتی با هر یک از ۶ روش برش بالا، برش رده می‌شود. پس متغیرهای تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$x_j :=$ تعداد قطعات ۱۷ فوتی که با الگوی j برش داده می‌شود $\forall\ j \in \{1,2,\dots,6\}$

پاسخ سوال سوم

حالاتی که قطعه چوب ۱۵ فوتی می‌تواند برش بخورد به صورت زیر است:

ضایعات	تعداد قطعات ۹ فوتی	تعداد قطعات ۵ فوتی	تعداد قطعات ۳ فوتی	الگو برش
۰	۰	۰	۵	۱
۰	۰	۳	۰	۲
۰	۱	۰	۲	۳
۱	۱	۱	۰	۴
۲	۰	۲	۱	۵
۱	۰	۱	۳	۶

حال باید بدانیم که چه تعداد قطعات چوب ۱۵ فوتی با هر یک از ۶ روش بالا، برش رده می‌شود. پس متغیرهای تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$y_k :=$ تعداد قطعات ۱۵ فوتی که با الگوی k برش داده می‌شود $\forall\ k \in \{1,2,\dots,6\}$

تعریف قیود:

همان‌طور که در صورت سوال نیز به آن اشاره شده است، این یک مساله برش دو مرحله‌ای است به این منظور که در مرحله اول الوار ۵۰ فوتی به قطعات ۱۷، ۱۵، ۵ و ۳ تبدیل می‌شوند که یا می‌توانند به صورت مستقیم تقاضا برای قطعات ۳ و ۵ فوتی را برآورده کنند یا اینکه با برش مجدد قطعات ۱۷ و ۱۵ فوتی مطابق با جداول که دیدیم تقاضا را برطرف کنند. در ادامه قیود تأمین تقاضا را داریم که تضمین می‌کنند که **حداقل** میزان تقاضا برای قطعات ۳، ۵ و ۹ فوتی برآورده شود، بنابراین با کمک جداول اطلاعات برش قطعات به قیود زیر می‌رسیم:

برای قطعات ۳ فوتی:

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 5y_1 + 2y_3 + 1y_5 + 3y_6 + w_1 \geq 25$$

برای قطعات ۵ فوتی:

$$x_2 + 2x_3 + 1x_5 + 3x_6 + 3y_2 + 1y_4 + 2y_5 + y_6 + w_2 \geq 20$$

برای قطعات ۹ فوتی:

$$1x_4 + 1x_5 + y_3 + 1y_4 \geq 15$$

قید زیر تضمین می‌کند که تعداد قطعات ۱۷ فوتی که در مرحله دوم برش داده می‌شوند، از تعداد قطعات ۱۷ فوتی تولید شده در مرحله اول بیشتر نشود. یعنی، نمی‌توانیم بیشتر از آنچه تولید کرده‌ایم، مصرف کنیم.

$$1w_1 + 2w_3 \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

قید زیر تضمین می‌کند که تعداد قطعات ۱۵ فوتی که در مرحله دوم برش داده می‌شوند، از تعداد قطعات ۱۵ فوتی تولید شده در مرحله اول بیشتر نشود.

$$2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

پاسخ سوال سوم

محدودیت علامت:

از آنجا که متغیرهای تصمیمی که تعریف کردیم همه بیانگر **تعداد** قطعات بودند، بنابراین باید اعداد صحیح نامنفی باشند لذا داریم:

$$all\ variables \geq 0\ , Integer$$

تعریف تابع هدف:

طبق صورت سوال، میزان الوار ۵۰ فوتی مصرفی منهای تقاضا، بیانگر میزان چوبی است که بلااستفاده مانده است و عملاً ضایعات است پس تابع هدف را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\min z = 50\sum_{i=1}^{3} w_i - (25 \times 3 + 20 \times 5 + 15 \times 9)$$

نکته: تابع هدف را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

همان‌طور که در صورت سوال نیز به آن اشاره شده است هر قطعه برش‌یافته‌ای که باقی بماند به عنوان ضایعات در نظر گرفته می‌شود، پس باید قطعات برش‌خورده ۱۷، ۱۵، ۵ و ۳ فوتی که پس از تامین تقاضا باقی‌مانده‌اند را ضایعات فرض کنیم. همچنین قطعات زیر ۳ فوت که قابل استفاده نیستند نیز ضایعات محسوب می‌شوند. با این تعریف داریم:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 17\left(w_1 + 2w_3 - \left(\sum_{j=1}^{6} x_j\right)\right) + 15\left(2w_1 + 3w_2 + w_3 - \left(\sum_{k=1}^{6} y_k\right)\right) \\
& + 3(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 5y_1 + 2y_3 + 1y_5 + 3y_6 + w_1 - 25) \\
& + 5\left(x_2 + 2x_3 + 1x_5 + 3x_6 + 3y_2 + 1y_4 + 2y_5 + y_6 + w_2 - 20\right) \\
& + 9(1x_4 + 1x_5 + y_3 + 1y_4 - 15) \\
& + [2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 + y_4 + 2y_5 + y_6 + w_3]
\end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با ساده‌سازی روابط فوق به نمایش اول تابع هدف می‌رسیم.