コイルガンロケットに関する諸計算

Y.KUNIEDA

2022 年 3 月 8 日

概 要

この論文は，冷静になれる時に改めて本論文の内容を検証し，修正したものである。

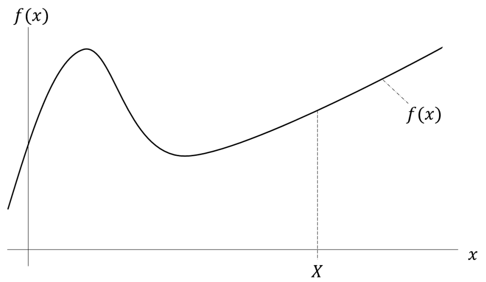
1 用いる式

今回用いる変数は，共通とする。

1.1 宇宙に行くまでに必要なエネルギーに関する式

1.1.1 変化する力に対するエネルギー

このセクションで論ずる”エネルギー”とは，ある範囲における力と距離の積を意味する。つまり，横軸を力 $f(x)$ とし，縦軸を距離 x とした時の，0 からある地点 X における積分がエネルギーとなる。



ここで，エネルギーについて，$f(x)$ の原関数を $F(x)$ とした時，以下の式が導ける。

$$\int_0^X f(x)dx = F(X) \tag{1}$$

1.1.2 抗力の関数

抗力は，以下の式を用いる。[1] ただし，$\log x$ は自然対数を表すとする。

$$D = \frac{1}{2}\rho v^2 SC_D \tag{2}$$

ただし，D を抗力，ρ を流体の密度，v を流体に対する相対速度，S を代表面積，C_D を抗力係数とする。

ここで，v_0 を初速，a を加速度，x を変位と定義する。この時，v について以下の事が言える。

$$v^2 = 2ax + v_0^2 \tag{3}$$

(3) の式を (2) に代入することで，以下の式が導ける。

$$D = \frac{1}{2}\rho SC_D \cdot (2ax + v_0^2) \tag{4}$$

この式の a に注目する。加速度 a は運動方程式より，$\frac{F}{m}$ で表される。この時の F は $mg + D$ となる。これらの事を考慮すると，抗力 D について，以下の等式が導ける。

$$D = \frac{1}{2}\rho SC_D \cdot (2x - \frac{mg + D}{m} + v_0^2) \tag{5}$$

この等式を整理すると，D は以下の通りになる。

$$\begin{aligned} D &= -\rho SC_D xg - \frac{1}{m}\rho SC_D xD + \frac{1}{2}\rho SC_D v_0^2 \\ (1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x)D &= \frac{1}{2}\rho SC_D v_0^2 - \rho SC_D xg \\ \therefore D &= \frac{\rho SC_D(-xg + \frac{1}{2}v_0^2)}{1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x} \end{aligned} \tag{6}$$

1.1.3　抗力の積分

ある流体中を直線上に移動する時について考える。移動する範囲が原点から X までの範囲とした時，その抗力 D_s について，(6) と (1) の式より以下の事が言える。

$$D_s = \int_0^X \frac{\rho SC_D(-xg + \frac{1}{2}v_0^2)}{1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x} dx \tag{7}$$

この積分をしていく。式を変形して以下のようにする。

$$\begin{aligned} D_s &= \rho SC_D \left(\int_0^X \frac{\frac{1}{2}v_0^2 - xg}{1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x} dx \right) \\ &= \rho SC_D \left(\frac{1}{2}v_0^2 \int_0^X \frac{1}{1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x}\ dx \right. \\ &\quad \left. -g \int_0^X \frac{x}{1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x} dx \right) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，t を以下のように定める。

$$t = 1 + \frac{1}{m}\rho SC_D x \tag{9}$$

また，これに付随して，dx を以下のように定める。

$$dx = \frac{m}{\rho SC_D} dt \tag{10}$$

ゆえに，(8) の式において，x を t に置換することで，以下の解を導ける。

$$\begin{aligned} D_s &= \rho SC_D \left\{ \frac{1}{2}v_0^2 \int_1^{1+\frac{1}{m}\rho SC_D X} \frac{1}{t} \cdot \frac{m}{\rho SC_D} dt \right. \\ &\quad - \frac{mg}{\rho SC_D} \left(\int_1^{1+\frac{1}{m}\rho SC_D X} \frac{m}{\rho SC_D} dt \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_1^{1+\frac{1}{m}\rho SC_D X} \frac{1}{t} \cdot \frac{m}{\rho SC_D} dt \right) \right\} \\ &= \rho SC_D \left\{ \frac{1}{2}v_0^2 \frac{m}{\rho SC_D} \log \left(1 + \frac{1}{m}\rho SC_D X \right) \right. \\ &\quad - \frac{mg}{\rho SC_D} \left(X \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m}{\rho SC_D} \log \left(1 + \frac{1}{m}\rho SC_D X \right) \right) \right\} \\ &= m \left\{ \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{mg}{\rho SC_D} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(log \left(1 + \frac{1}{m}\rho SC_D X \right) \right) - gX \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

1.1.4　必要な初速度

宇宙までの高さを h，打ち上げる物質の質量を m，重力加速度を g とする。今回は抗力エネルギー (11) と位置エネルギーの和が運動エネルギーと等しいものとする。この時，以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgh \\ &\quad + m \left\{ \left(\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{mg}{\rho SC_D} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\log \left(1 + \frac{1}{m}\rho SC_D h \right) \right) - gh \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

この式を v_0^2 について解くと，以下のようになる。

$$\frac{1}{2}v_0^2\left(1-\log\left(\frac{1}{m}\rho SC_Dh\right)\right)$$
$$=gh+\frac{mg}{\rho SC_D}\log\left(1+\frac{1}{m}\rho SC_Dh\right)-gh$$
$$\therefore v_0$$
$$=\sqrt{\frac{2mg\log\left(1+\frac{1}{m}\rho SC_Dh\right)}{\rho SC_D\left(1-\log\left(1+\frac{1}{m}\rho SC_Dh\right)\right)}} \tag{13}$$

1.2 円形電流が及ぼす力

1.2.1 微小点に対し加わる力

ビオ・サバールの法則により、原点より z だけ離れたある微小点に対する円形電流が及ぼす磁場 $H(z)$ は以下の通りになる。

$$H(z)=\frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}[\mathrm{N/Wb}] \tag{14}$$

故に，原点より z だけ離れたある微小点に働く力 F_z[N] は，中に通す物質の代表面積を S[m^2]，微小点の透磁率を μ とした時，以下のようになる。

$$F_z=\mu\cdot H(z)^2\cdot S \tag{15}$$

※何故このようになるか，という事についての補足だけ行う。まず，透磁率 μ と磁場 H，磁束密度 B に関する関係は，$B=\mu H$ のように表される。ここで，B の単位は，[Wb/m^2] となる。したがって，面積を S とした時，磁束 n[Wb] は，μHS となる。ここで，磁場の単位は，[N/Wb] である事を思い出すと，ある透磁率と磁場，面積において生み出される力 m[N] は，μH^2S で表される。

この時における，z の 0 から X までに対する微小点へのエネルギーを計算するため，以下の積分をする。なお，何故積分範囲の下限が 0 である理由は，この円形電流が制御可能であり，負のエネルギーを生み出さないように制御する前提があるからである。

$$\int_0^X \mu H(z)^2 S dz \tag{16}$$

この積分は，以下のように書き換えられる。

$$\int_0^X \mu S\left(\frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 dz$$
$$=\int_0^X \mu S\frac{I^2a^4}{4(a^2+z^2)^3}dz \tag{17}$$
$$=\frac{1}{4}\mu SI^2a^4\int_0^X\frac{1}{(a^2+z^2)^3}dz$$

ここで，$z=a\tan\theta$ と置く。すると，置換した後の積分は以下のように解ける。

$$\frac{1}{4}\mu SI^2a^4\int_0^{\arctan\left(\frac{X}{a}\right)}\frac{1}{\{a^2(1+\tan^2\theta)\}^3}$$
$$\cdot\frac{1}{a\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{4a^3}\mu SI^2\int_0^{\arctan\left(\frac{X}{a}\right)}\cos^4\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{a^3}\mu SI^2\left\{\frac{3}{32}\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right. \tag{18}$$
$$+\frac{1}{16}\sin\left(2\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right)$$
$$\left.+\frac{1}{128}\sin\left(4\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right)\right\}$$

これが，円形電流により生じる，任意の範囲における，微小点に対するエネルギーである。ここで，今回は $S=\pi a^2$ となるので，以下のようになる。

$$\frac{1}{a}\mu\pi I^2\left\{\frac{3}{32}\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{16}\sin\left(2\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right) \tag{19}$$
$$\left.+\frac{1}{128}\sin\left(4\arctan\left(\frac{X}{a}\right)\right)\right\}$$

この結果 (18) を F とする。

本題から反れるが，コイル全体がある微小点に生み出す力は，コイルの巻数を M とした時，MF で表される。

1.2.2 弾全体に加わる力

あとは，適当に弾をN分割して，計算すれば，一つの円形電流が生み出す弾全体へのエネルギー F_s が分かる。この計算に際し，計算式は以下のものとする。なお，この式が一般化されていないことに留意すべきである。

$$F_s = X\left\{\sum_{k_1=1}^{92} 0.4242197F \right. \\ \left. \sum_{k_2=1}^{8}(0.3675 - 0.0459365\cdot k_2)F\right\} \tag{20}$$

1.3 コイル一本の半径

ここで，$MF_s = mv_0^2$ となる。ここで，M に関連して，一つの円形電流が線で出来ているとして，その太さを考える。この事を考える際に，以下の公式を用いる。

$$\begin{aligned} Q &= mc\Delta T \\ R &= \rho_r \frac{L}{S} \\ Q &= RI^2t \end{aligned} \tag{21}$$

なお，Q を熱量，m を質量，c を比熱，ρ_r を抵抗率，L を長さ，S を断面積，I を電流，R を抵抗，t を時間とする。

これらの式を，適当な所に代入し，以下の式を得る。

$$LSdc\Delta T = \rho_r \frac{L}{S} I^2 t \tag{22}$$

この時，物質の密度を d とする。ここで，面積 S について考える。今回の場合は，材質が円柱状である事を考えると，その半径を r とした時，$S = \pi r^2$ となる。

それを踏まえて，以下の式とする。

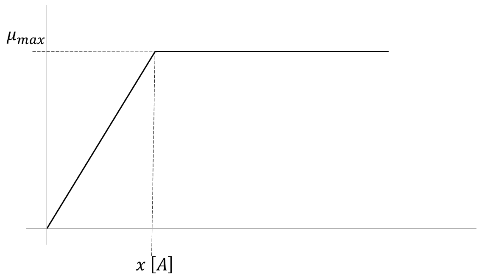
$$L\pi r^2 dc\Delta T = \rho_r \frac{L}{\pi r^2} I^2 t \tag{23}$$

移行して，以下のようになる。

$$\begin{aligned} \pi^2 r^4 dc\Delta T &= \rho_r I^2 t \\ r^4 &= \frac{\rho_r I^2 t}{\pi^2 dc\Delta T} \\ r &= \sqrt[4]{\frac{\rho_r I^2 t}{\pi^2 dc\Delta T}} \end{aligned} \tag{24}$$

1.4 最適な電流

結果に入る前に，コイルに流す電流の値を決定する。これは透磁率を元に，下記の図のような関数をつくることで示される。



理科年表を開くと，透磁率は，" 初期透磁率"μ_i と" 最大透磁率"μ_{max} の二種類ある事が分かる。そこから，流す電流を i，最適な電流を i_b として，透磁率 $\mu(i)$ に関する以下の式のような関数を定義する。[2]

$$\mu(i) = \begin{cases} \mu_i i & (i \leqq i_b) \\ \mu_{max} & (i > i_b) \end{cases} \tag{25}$$

この関数における i_b を，今回流す電流とする。この i_b 自体は，$\mu_{max} = \mu_i i_b$ という式より，

$$i_b = \frac{\mu_{max}}{\mu_i} \tag{26}$$

となる。

2 結果

変数を代入して，結果を見る。なお，変数の値の有効数字は，全て4桁とした。

2.1　コイル一本の半径

まず半径を決定するために，変数を以下のように定める。[表 1] 表には，可読性向上のため，参考程度に各変数の意味も載せておく。なお，”素材”はコイルに使用する素材の事を指す。また，参考時間は温度変化を考える時間を指す。流す電流については，(25) の式を元に理科年表における透磁率一純鉄の項目 [4] を元に算出した。

表 1 を元に，Excel を用いて計算した所，半径

表 1: 変数の記号とその値・意味

変数	値	単位	意味
ΔT	+20.00	K	許容温度変化
c	380.0	$\mathrm{J/kg \cdot K}$	素材の比熱
d	8960	$\mathrm{kg/m^3}$	素材の密度
t	30.00	s	参考時間
I	28.00	A	流す電流
ρ_r	1.550	$\Omega \cdot \mathrm{m}$	素材の抵抗率

r は 0.086[m] となった。なお Excel の円周率は 15 桁である [3]。

2.2　宇宙へ行くために必要な初速度

宇宙へ行くために必要なエネルギーを算出するために，(13) の式を用いて初速度を求める。変数は以下の表 2 において定めるものとする。なお，抗力係数，重力加速度は定数とした。　表

表 2: 変数の記号とその値・意味 (2)

変数	値	単位	意味
m	$1.842 \cdot 10^4$	kg	射出体の質量
g	9.807	$\mathrm{m/s^2}$	重力加速度
h	$1.000 \cdot 10^5$	m	宇宙までの高さ
ρ	1.209	$\mathrm{kg/m^3}$	空気の密度
S	0.424	$\mathrm{m^2}$	代表面積
C_D	0.340	–	抗力係数

2 を元に Excel を用いて初速度を計算した結果，初速度は 2033m/s となった。

2.3　宇宙へ行くために必要なエネルギーの値

(11) の式と，mgh という式へ変数を代入し，その和を必要なエネルギーの値とする。変数は表 2 の通りに定義する。

その結果，$3.804 \cdot 10^{10}$J となった。

2.4　一つの円形電流が全体に及ぼすエネルギー

2.4.1　ある微小点に対して

全体のエネルギーを計算する前に，ある微小点に対するエネルギーを，(19) の式を用いて計算する。変数は表 3 の通りに定める。　なお

表 3: 変数の記号とその値・意味 (3)

変数	値	単位	意味
a	0.368	m	コイルの半径
μ	7000	–	射出物の透磁率
X	10.00	m	考える距離

流す電流については，表 1 を参照する。

Excel を用いて計算した結果，$6.255 \cdot 10^6$J となった。

2.4.2　全体に対して

(20) の式を用いて計算する。その結果，一つの円形電流が全体に及ぼすエネルギーは $2.469 \cdot 10^8$J

2.5 必要なコイルの長さ

宇宙に行くために必要なエネルギーを一つの円形電流が全体に及ぼすエネルギーで割り，円形電流の数を求める。その数に，コイル一本の半径 ·2 を掛ける事で，コイルの長さを算出できる。その結果，コイルの長さは 26.46m である事が分かった。

3 考察

例えば，コイル間を 3s で移動するとした時，その加速度は，677s/m^2 となる。

参考文献

[1] 抗力 ーWikipedia (https://ja.wikipedia.org/wiki/抗力)

[2] (著者注：透磁率の近似について，参考にした) コイルガンの動作原理を解説 (https://www.sciencebeanz.com/entry/2019/08/17/194015/)

[3] PI 関数 (https://support.microsoft.com/ja-jp/office/pi-関数-264199d0-a3ba-46b8-975a-c4a04608989b)

[4] 理科年表 2021 丸善出版 国立天文台 編