

## 1.2 向量与分块矩阵

代万基  
数学科学学院  
大连理工大学



## 1.2.1 向量

现在可看成是从向量的坐标出发来讲向量，并做了进一步的推广。

**定义1-7**  $n$ 个有次序的数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的数组称为 **$n$ 元向量**，这 $n$ 个数称为该向量的 **$n$ 个分量**，第 $i$ 个数称为第 $i$ 个分量。

分量全为实数的向量称为**实向量**；分量为复数的向量称为**复向量**。

本课程主要讨论实向量，若不加说明，均指实向量。

分量全为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{0}_n$ 。

# 行向量与列向量

(1) 向量可以写成一行的形式，也可写成一列的形式，分别称为行向量和列向量。

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$  称为行向量，也就是行矩阵。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  称为列向量，也就是列矩阵。

(2) 注意：分量相同的行向量与列向量要看作不同的向量。

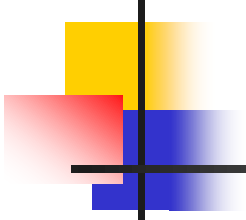
(3) 行向量和列向量均按矩阵的运算方式进行运算。

(4) 一般用黑体小写字母  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  等表示列向量。

用  $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T$  等表示行向量。

(5) 讲到向量时，若不加说明，均指列向量。

(6) 所有  $n$  元实向量的集合记作  $\mathbf{R}^n$ 。



专用 $e_i \in \mathbf{R}^n$ 表示第 $i$ 个分量为1，其余分量都为0的 $n$ 元列向量.

例如，若设 $e_3 \in \mathbf{R}^4$ ，则  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  .

**注：** $e_i$ 可看作单位矩阵 $E$ 的第 $i$ 列.

分量个数相同的一组行向量称为一个行向量组.

分量个数相同的一组列向量称为一个列向量组.



## 向量与矩阵的关系:

向量是特殊的矩阵，一个向量组可组成一个矩阵。

反过来，一个矩阵又可看做是由它的行向量组或列向量组所组成的。

矩阵与向量组之间存在着一一对应的关系。

可将矩阵与向量组的问题进行相互转换。

## 1.2.2 分块矩阵

把矩阵进行分块是处理矩阵的有效方法。熟练掌握矩阵分块的方法，可以给某些计算和证明带来方便。

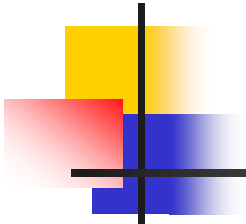
**定义1-8** 用若干条纵贯整个矩阵的横线和竖线把矩阵  $A$  分成许多小块（即子矩阵），以这些小块为元素的形式上的矩阵称为  $A$  的**分块矩阵**。

例如，设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，

则  $A = \begin{pmatrix} E & B \\ O & 2E \end{pmatrix}$  是上面矩阵的分块矩阵。

# 几种常用的分块方法

- (1) 把 $m \times n$ 型矩阵 $A$ 整个作为一块, 此时 $A$ 是一个 $1 \times 1$ 型分块矩阵。
- (2) 把 $m \times n$ 型矩阵 $A$ 按列分块为 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是矩阵 $A$ 的 $n$ 个列向量。
- (3) 把 $m \times n$ 型矩阵 $A$ 按行分块为 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ , 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是矩阵 $A$ 的 $m$ 个行向量。
- (4) 把 $m \times n$ 型矩阵 $A$ 分块为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ , 其中 $A_{11}$ 是矩阵 $A$ 的左上角子方阵。
- (5)  $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 也可看作 $m \times n$ 型分块矩阵。



$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵





# 分块的基本要求

(1) 计算 $A+B$ 时，对 $A$ 和 $B$ 的分块方法应完全相同。

(2) 计算 $AB$ 时，对 $A$ 的列的分法应与对 $B$ 的行的分法相同。

注意：对一个矩阵在什么地方加竖线，加几条竖线，决定了这个矩阵的列的分法。

对一个矩阵在什么地方加横线，加几条横线，决定了这个矩阵的行的分法。

至于 $A$ 的行和 $B$ 的列怎样分，没有要求。

满足上面的分块要求以后，分块矩阵的运算方法与普通矩阵基本相同。

# 分块矩阵的计算中需注意的地方

(1) 设  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  为分块矩阵, 则  $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$

(2) 设  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  为按列分块矩阵, 则  $A^T = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

由于矩阵的乘法不满足交换律, 子矩阵对应相乘时, 一定要注意它们的位置。



设  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  为按列分块矩阵,

$$A(b_1, b_2, \dots, b_n) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n)$$

例如:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix},$

记  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Ab_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A(b_1, b_2) = (Ab_1, Ab_2)$$

一般地,  $(b_1, b_2, \dots, b_n)A \neq (b_1A, b_2A, \dots, b_nA)$

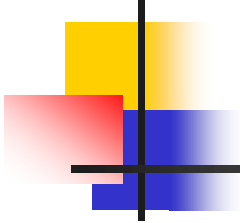
设  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$  是按行分块矩阵,  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{A} \\ \alpha_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \alpha_m \mathbf{A} \end{pmatrix}$

例如:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix},$

记  $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (3, 4), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

$\alpha_1 \mathbf{A} = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3, 4), \quad \alpha_2 \mathbf{A} = (3, 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (7, 10)$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{A} \\ \alpha_2 \mathbf{A} \end{pmatrix}$



---

一般地,

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A\alpha_1 \\ A\alpha_2 \\ \vdots \\ A\alpha_m \end{pmatrix}$$

## 例1-7

设  $A_{n \times n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $E_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$A = AE_n = A(e_1, e_2, \dots, e_n) = (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)$$

$$a_j = Ae_j (j = 1, 2, \dots, n).$$

于是可用  $Ae_j$  表示  $A$  的第  $j$  列.

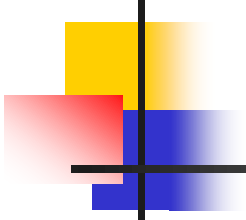
$$e_i^T A = \left[ (e_i^T A)^T \right]^T = (A^T e_i)^T (i = 1, 2, \dots, n).$$

$A^T e_i = A^T$  的第  $i$  列 =  $A$  的第  $i$  行的转置

$A^T e_i$  转置正是  $A$  的第  $i$  行

用  $e_i^T A$  表示  $A$  的第  $i$  行.

$$e_i^T A e_j = a_{ij}$$



---

例  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{表示}\mathbf{A}\text{的第3列}$$

$$\mathbf{e}_2^T \mathbf{A} = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \quad \text{表示}\mathbf{A}\text{的第2行}$$

$$\mathbf{e}_2^T \mathbf{A} \mathbf{e}_3 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \mathbf{e}_3 = a_{23} \quad \text{表示}\mathbf{A}\text{的}(2,3)\text{元}$$

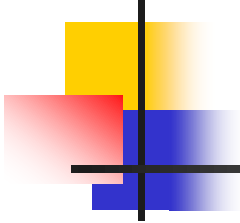


## 习题4-2

2. 设 $\mathbf{a}$ 是 $n$ 元列向量,  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = k$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{a}^T$ , 证明:  $\mathbf{A}^{m+1} = k^m \mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned}\text{证: } \mathbf{A}^{m+1} &= (\mathbf{a} \mathbf{a}^T)(\mathbf{a} \mathbf{a}^T) \cdots (\mathbf{a} \mathbf{a}^T) \\ &= \mathbf{a} (\mathbf{a}^T \mathbf{a})(\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \cdots (\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \mathbf{a}^T \\ &= \mathbf{a} k^m \mathbf{a}^T = k^m \mathbf{A}\end{aligned}$$

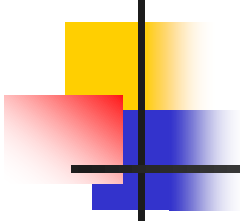




3. 设  $a, b \in R^3$ ,  $ab^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 求  $ba^T$ ,  $b^T a$ .

方法1  $ab^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 2, 3] = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 2, 3] \frac{1}{k}$

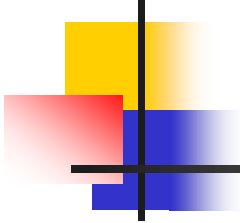
可不妨设  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $b^T = [1, 2, 3]$



---

3. 设  $a, b \in R^3$ ,  $ab^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 求  $ba^T$ ,  $b^T a$ .

方法2  $ba^T = (ab^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$

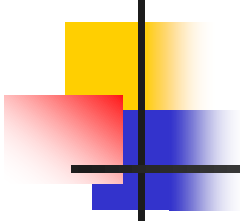


3. 设  $a, b \in R^3$ ,  $ab^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , 求  $ba^T$ ,  $b^T a$ .

$$(ab^T)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^2,$$

$$(ab^T)^2 = (ab^T)(ab^T) = a(b^T a)b^T = (b^T a)(ab^T)$$

$$(b^T a)(ab^T) = 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b^T a = 6$$


$$\text{设 } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } \mathbf{ab}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix},$$

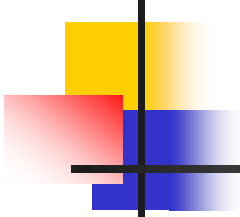
$$\mathbf{b}^T \mathbf{a} = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{ab}^T \text{的对角元之和}$$



4. 设  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $k = a^T a \neq 0$ ,  $A = E - aa^T$ ,  $B = E + 3aa^T$ ,  $AB = E$ , 求  $k$ .

提示:  $AB = (E - aa^T)(E + 3aa^T)$

$$= E + 3aa^T - aa^T - 3(aa^T)(aa^T)$$
$$= E + 3aa^T - aa^T - 3a(a^T a)a^T$$



5. 设方阵 $A$ 的按列分块矩阵为 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ , 求 $AA^T$ 和 $A^T A$ .

提示:  $AA^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$



## 思考题1-1

---

设 $A, B, C$ 和 $E$ 都是 $n$ 阶方阵，下列结论是否成立？为什么？

1.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

不成立

2.  $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$

成立，原因： $AE = EA$

3.  $(A + E)(A - E) = (A - E)(A + E)$

成立，原因： $AE = EA$

## 思考题1-1

4.  $(AB)^2 = A^2B^2 \Leftrightarrow AB = BA$

( $\Leftarrow$ )正确.

当 $AB = BA$ 时,  $(AB)^2 = (A\textcolor{red}{B})(\textcolor{red}{A}B) = A\textcolor{red}{A}B\textcolor{red}{B} = A^2B^2$

( $\Rightarrow$ )不正确.

$$(AB)^2 = A^2B^2 \Rightarrow A\textcolor{red}{B}A\textcolor{red}{B} = A\textcolor{red}{A}B\textcolor{red}{B}$$

再往下, 得不出 $BA = AB$

反例 让 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$(AB)^2 = A^2B^2, \text{ 但是 } AB \neq BA$$



## 思考题1-1

5. 若 $A^2 = O$ , 则 $A = O$ .

不成立. 反例 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ , 则 $A^2 = O$ , 但 $A \neq O$ .

6. 若 $A^2 = A$ , 则 $A = O$ 或 $A = E$ .

不成立.  $A^2 = A \Rightarrow A(A - E) = O$ ,  
 $A$ 和 $A - E$ 可以都不为 $O$

反例  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 = A$ , 但是 $A \neq O$ ,  $A \neq E$ .

## 思考题1-1

7. 若 $A^2 = E$ , 则 $A = E$ 或 $A = -E$ .

不成立.  $A^2 = E \Rightarrow (A+E)(A-E) = O$ ,  
 $A+E$ 和 $A-E$ 可以都不为 $O$

反例  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 = E$ , 但是 $A \neq E$ ,  $A \neq -E$ .

8. 若 $A$ 为对称矩阵, 则 $A^k$ 也为对称矩阵 ( $k$ 为正整数).

成立. 因为 $(A^k)^T = (A^T)^k = A^k$

9. 若 $A$ 为反称矩阵, 则 $A^k$ 也为反称矩阵 ( $k$ 为正整数).

不成立. 因为 $(A^k)^T = (A^T)^k = (-A)^k$   
不一定等于 $-A^k$ .



## 思考题1-1

---

10. 对称矩阵的第 $i$ 行与第 $i$ 列的对应元素相等.

正确

## 思考题1-2

1. 若 $a$ 和 $b$ 都是 $n$ 元列向量, 则 $a^T b = b^T a$ 是否正确?

正确

2. 若 $a$ 和 $b$ 都是 $n$ 元列向量, 则 $ab^T = ba^T$ 是否正确?

不正确

$$\text{设 } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ 则 } ab^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4, 5, 6) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix},$$

$$ba^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

## 思考题1-2

3. 对任意的 $n$ 元列向量 $u$ , 是否都有 $(uu^T)(uu^T) = (u^T u)(uu^T)$ ?

正确

$$(uu^T)(uu^T) = u(u^T u)u^T = (u^T u)(uu^T)$$

$u^T u$ 为数

4. 用分块的方法计算 $AB$ 时, 对 $A$ 的行的分法及 $B$ 的列的分法是否有特殊要求?

答: 对 $A$ 的行的分法及 $B$ 的列的分法没有要求.

要求 $A$ 的列的分法与 $B$ 的行的分法相同.



## 思考题1-2

---

5.  $AB$ 的第 $j$ 列与 $B$ 的第 $j$ 列有什么关系?

$AB$ 的第 $i$ 行与 $B$ 的第 $i$ 行有什么关系?

$$AB \text{ 的第 } j \text{ 列} = (AB)e_j = A(Be_j) = Ab_j$$

$$AB \text{ 的第 } i \text{ 行} = e_i^T (AB) = (e_i^T A)B = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})B$$

## 提高题1-1

1. 证明:  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

证法1: 数学归纳法

证法2: 记  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}^3 = \mathbf{O}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n = \lambda^n \mathbf{E} + C_n^1 \lambda^{n-1} \mathbf{B} + C_n^2 \lambda^{n-2} \mathbf{B}^2$$

## 提高题1-1

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ , 求  $A^k$ .

提示:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1, 2, 3]$

记  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , 则  $A = ab^T$





## 提高题1-2

---

1. 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵, 且对任一 $n$ 元列向量 $x$ 都有 $Ax = 0$ ,  
证明:  $A = O$ .

证: 因为对任一 $n$ 元列向量 $x$ 都有 $Ax = 0$ ,

所以 $Ae_j = 0$ , 即 $a_j = 0$

这说明 $A$ 的每一列都是零向量, 所以 $A = O$

## 提高题1-2

2. 设 $A$ 是实的 $n$ 阶对称矩阵, 且 $A^2 = O$ , 证明:  $A = O$ .

证:  $A$ 是对称矩阵  $\Rightarrow A^T = A$ .

$$A^2 = O \Rightarrow A^T A = O$$

$$A^T A \text{ 的第一个对角元为 } a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{11} = 0, a_{21} = 0, \cdots, a_{n1} = 0$$

通过考察 $A^T A$ 的其它对角元, 可以证明 $A$ 的每列都是零向量, 所以 $A = O$ .