7.3　全微分

7.3.1 全微分的概念

定义: 如果函数 $z = f(x, y)$在定义域 D 的内点(x, y)处**全增量** $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$可表示成

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于$\Delta x, \Delta y$，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x, y)$ 在点(x, y) **可微**，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

若函数在区域 D 内各点都可微，则称此函数在D 内**可微**.

7.3.2 连续、可偏导及可微的关系

由微分定义：

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得 $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

即 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微 $\Longrightarrow$ 函数在该点连续

下面两个定理给出了多元函数可微与偏导数的关系：

(1) 函数可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微

定理 (可微的必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微，则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 令 $\Delta y=0$, 得到对 x 的**偏增量**

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, 因此有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

注意： 定理的逆定理不成立，即：

$\boxed{\text{偏导数存在，函数不一定可微}}$

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此，函数在点 $(0,0)$ 不可微 .

定理 **(可微的充分条件)** 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微.

类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例. 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$$

$$\therefore\quad \left.\mathrm{d}z\right|_{(2,1)}=e^2\,\mathrm{d}x+2e^2\,\mathrm{d}y=e^2(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$$

例. 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)\mathrm{d}y+ye^{yz}\mathrm{d}z$

7.7.3 全微分在数值计算中的应用

近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$及 $|\Delta y|$ 较小时，有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x(x,y)=\ y\,x^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ \ y=2,\ \ \Delta x=0.04,\ \ \Delta y=0.02$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x,\delta_y,\delta_z$ 分别表示 x , y , z 的绝对误差限，则

z 的绝对误差限约为

$$\delta_z = \left|f_x(x,y)\right|\delta_x + \left|f_y(x,y)\right|\delta_y$$

z 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

内容小结

1. 全微分定义：$(z=f(x,y))$

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系：