7.7 偏导数在几何中的应用

一、空间曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

平面曲线的切线与法线

已知平面光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 有

切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

若平面光滑曲线方程为 $F(x,y)=0$, 因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

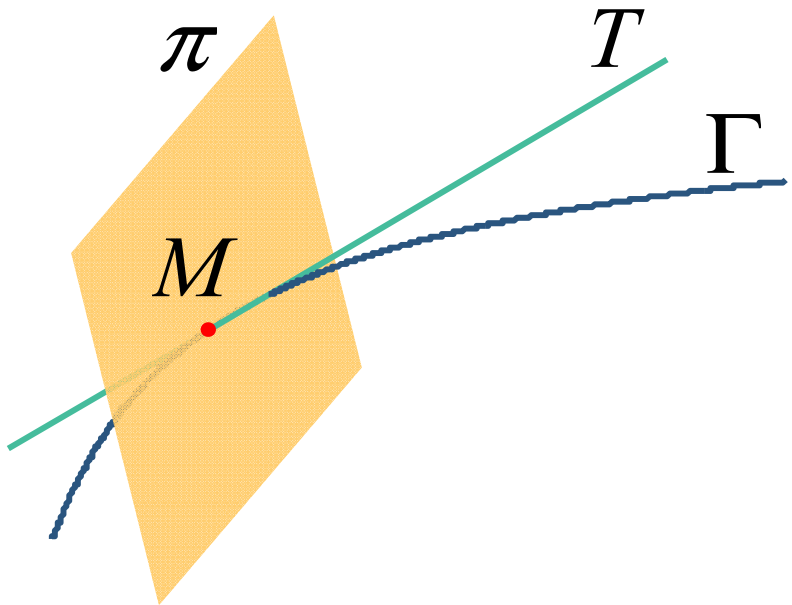
故在点 (x_0, y_0) 有

切线方程 $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

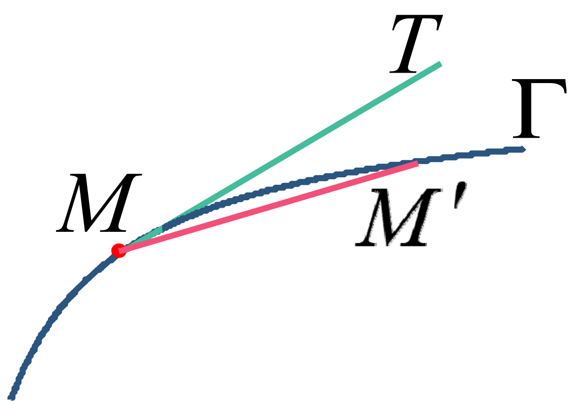
法线方程 $F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

7.7.1 空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.



1. 曲线方程为参数方程的情况



$$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

设 $t=t_0$ 对应 $M(x_0, y_0, z_0)$

$t=t_0+\Delta t$ 对应 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

割线 MM' 的方程：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

上述方程之分母同除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$，得

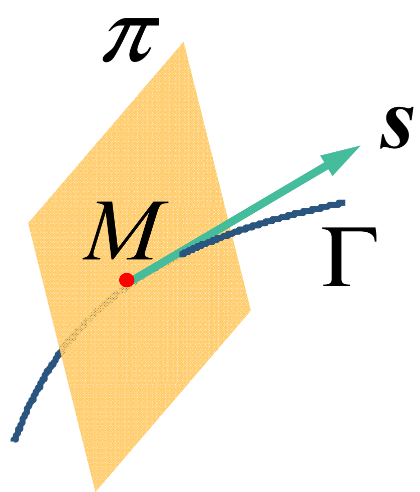
切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

此处要求$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0，如个别为0, 则理解为分子为 0 .

切线的方向向量:

$$s=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

称为曲线的**切向量** .



s 也是法平面的法向量, 因此得

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x' = -R\sin\varphi,\ y' = R\cos\varphi,\ z' = k,$ 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\boldsymbol{s} = (-R, 0, k)$, 故

切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$

2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时, Γ 可表示为 $\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$$

例. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\boldsymbol{s}=\left(1,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\boldsymbol{s}=(1,0,-1)$$

切线方程
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即
$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程
$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

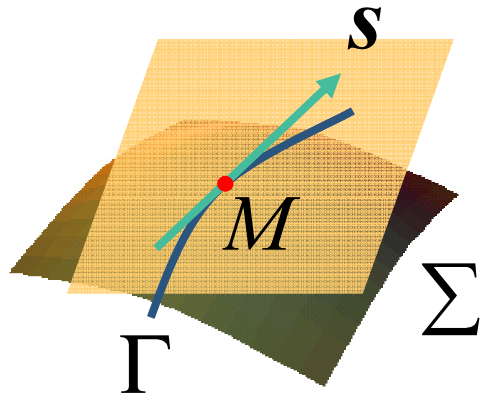
即
$$x-z=0$$

7.7.2 曲面的切平面与法线

设有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$,设 $t=t_0$ 对应点 M, 且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不全为0. 则 Γ 在点 M 的**切向量**为

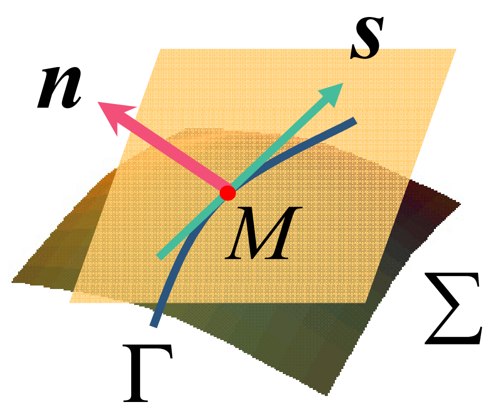


$$\boldsymbol{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明: Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上. 此平面称为 Σ 在该点的**切平面**.

$\because \Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$ 在 Σ 上,



$\therefore \quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \equiv 0$

两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得
$$\boxed{\begin{aligned} F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0) \\ +F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0 \end{aligned}}$$

令 $\boldsymbol{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$

由于曲线 Γ 的任意性，表明这些切线都在以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面上，从而切平面存在.

曲面 Σ 在点 M 的**法向量**

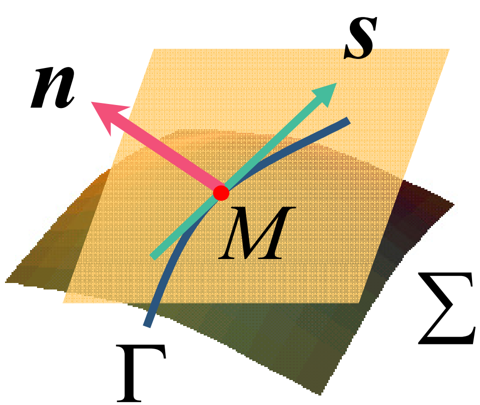
$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



特别, 当光滑曲面Σ的方程为显式 $z=f(x,y)$时，令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点(x_0,y_0,z_0)，$F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$

故当函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时，曲面

Σ在点(x_0,y_0,z_0)有

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

若假定法向量方向向上，则

法向量 $\boldsymbol{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 分别记为 f_x,f_y，则

法向量的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}$$

例. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点(1 , 2 , 3) 处的切平面及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\boldsymbol{n}=(2x,4y,6z)$

$$\boldsymbol{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$$

所以椭球面在点 (1 , 2 , 3) 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

例. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 两曲面在 M 点的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(y_0z_0,\,x_0z_0,\,x_0y_0),\qquad \boldsymbol{n}_2=(x_0,\,y_0,\,z_0)$$

两曲面在点 M 相切, 需 $\boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$, 因此有

$$\frac{y_0z_0}{x_0}=\frac{x_0z_0}{y_0}=\frac{x_0y_0}{z_0}$$

$$\therefore \qquad x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\qquad \sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\boldsymbol{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$时, Γ 可表示为 $\begin{cases}x=x\\y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的**法向量**

$$\boldsymbol{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\boldsymbol{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$

假定 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向夹角为锐角

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$