9.4 Gauss公式、Stokes公式

一、Gauss 公式

二、Stokes 公式

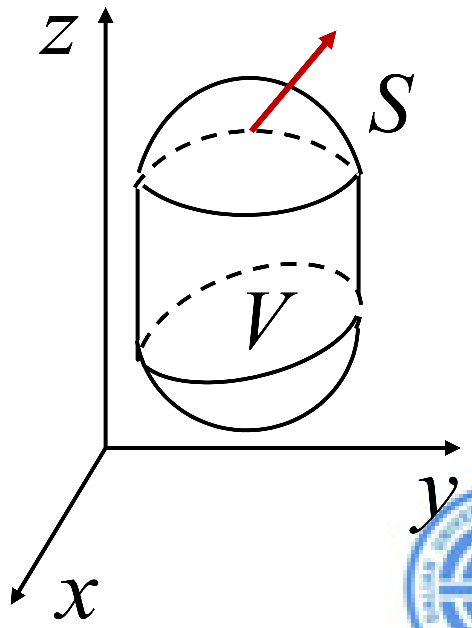
三、空间曲线积分与路径无关的条件

9.4.1 Gauss 公式

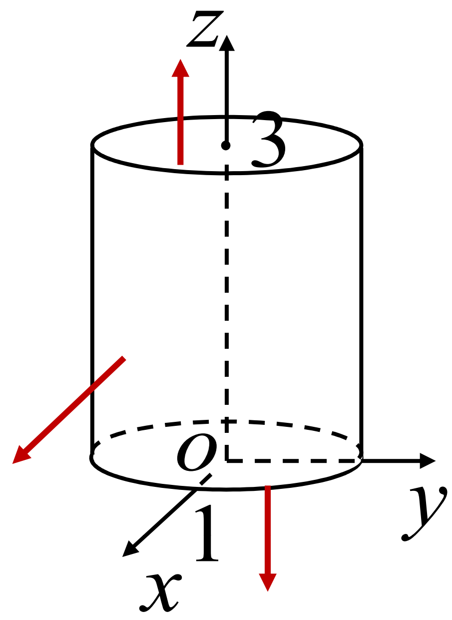
定理. 设空间闭区域 V 由分片光滑的闭曲面 S 所围成，S 的方向取外侧，函数 P, Q, R 在 V 上有一阶连续偏导数，则有

Gauss 公式

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}V = \oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



例. 计算 $\oiint\limits_S (y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭区域 V 的边界曲面的外侧.



解: $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$原式=\iiint\limits_V (y-z)\,\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V$$

$$=-\iiint\limits_{V_{r\theta z}} zr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^3 zr\,\mathrm{d}z$$

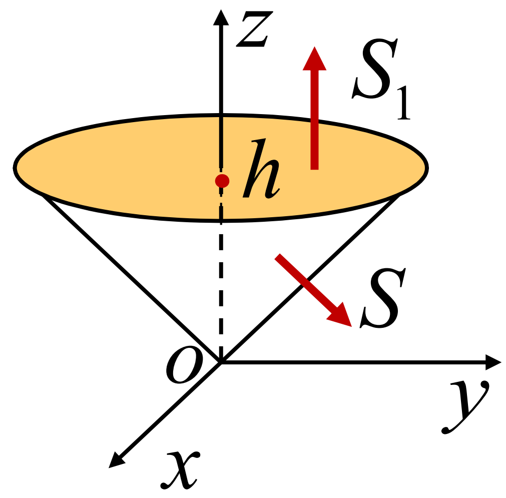
$$=-\frac{9\pi}{2}$$

例. 计算积分

$$I = \iint_{S} x^2\, \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于 $z = 0$ 及

$z = h$ 之间部分的下侧.



解: 作辅助面

$S_1: z = h, (x, y) \in D_{xy}$, $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le h^2\}$, 取上侧

记 S, S_1 所围区域为 V, 则

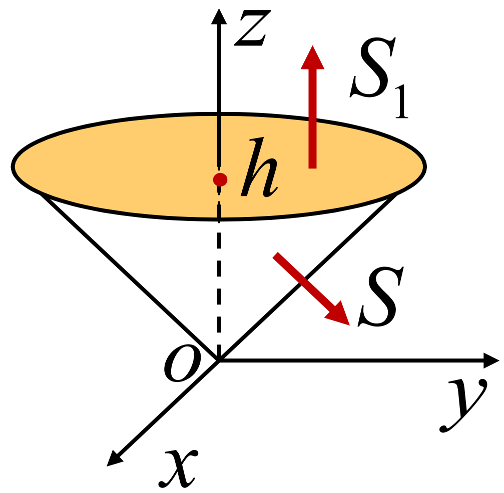
$$I + \iint_{S_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iiint_{V} (x + y + z)\,\mathrm{d}V$$

计算 $2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\,\mathrm{d}V$，利用对称性知，

$$2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\,\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V}z\,\mathrm{d}V=2\int_{0}^{h}z\cdot\pi z^{2}\mathrm{d}z=\frac{\pi h^{4}}{2}$$

而 $\iint\limits_{S_1}x^{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^{2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

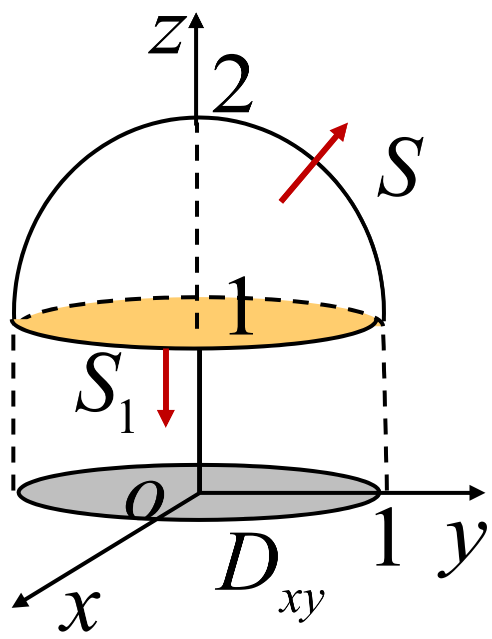
$$=\iint\limits_{S_1}z^{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}h^{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi h^{4}$$



$$\therefore I=\frac{\pi h^{4}}{2}-\pi h^{4}=-\frac{\pi h^{4}}{2}$$

例. 设S为曲面 $z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_S (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



解: 作辅助面 $S_1: z=1,\ (x,y)\in D_{xy}$,

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\},$$ 取下侧

记S, S_1所围区域为V, 则

$$I+\iint_{S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(3x^2z+1-x^2z-2x^2z\right)\mathrm{d}V=\iiint_V\mathrm{d}V$$

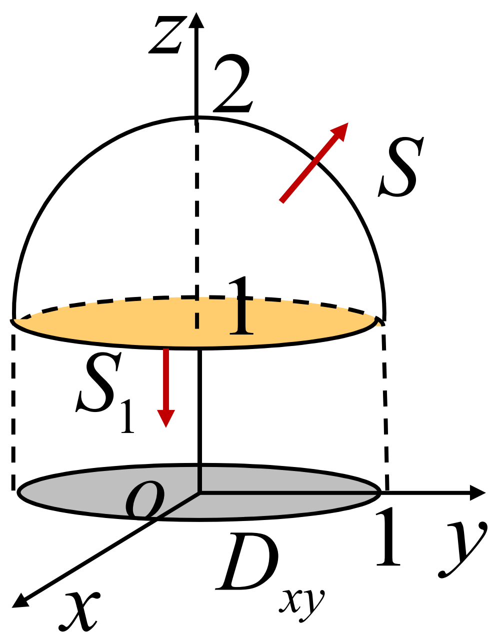
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}r\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$

而

$$\iint_{S_1} (x^3 z + x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2 yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2 z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{S_1} -x^2 z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} (-x^2 \cdot 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2 \cos^2\theta \cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$



$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$