1.2 向量与分块矩阵

代万基
数学科学学院
大连理工大学

1.2.1 向量

现在可看成是从向量的坐标出发来讲向量，并做了进一步的推广。

定义1-7 n个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$所组成的数组称为n元向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数称为第i个分量.

分量全为实数的向量称为实向量；分量为复数的向量称为复向量.

本课程主要讨论实向量，若不加说明，均指实向量.

分量全为零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$或$\mathbf{0}_n$.

行向量与列向量

（1）向量可以写成一行的形式，也可写成一列的形式，分别称为行向量和列向量.

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为行向量，也就是行矩阵.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列向量，也就是列矩阵.

（2）注意：分量相同的行向量与列向量要看作不同的向量.

（3）行向量和列向量均按矩阵的运算方式进行运算.

（4）一般用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等表示列向量.

用 $\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T$ 等表示行向量.

（5）讲到向量时，若不加说明，均指列向量.

（6）所有n元实向量的集合记作 R^n.

专用$e_i \in \mathrm{R}^n$表示第 i 个分量为1，其余分量都为0的 n 元列向量.

例如，若设$e_3 \in \mathrm{R}^4$，则 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

注： $\boldsymbol{e}_i$可看作单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第i列.

分量个数相同的一组行向量称为一个行向量组.

分量个数相同的一组列向量称为一个列向量组.

向量与矩阵的关系:

向量是特殊的矩阵，一个向量组可组成一个矩阵。

反过来，一个矩阵又可看做是由它的行向量组或列向量组所组成的.

矩阵与向量组之间存在着一一对应的关系.

可将矩阵与向量组的问题进行相互转换.

1.2.2 分块矩阵

把矩阵进行分块是处理矩阵的有效方法。熟练掌握矩阵分块的方法，可以给某些计算和证明带来方便。

定义1-8 用若干条纵贯整个矩阵的横线和竖线把矩阵A分成许多小块（即子矩阵），以这些小块为元素的形式上的矩阵称为A的分块矩阵.

例如，设 $$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

则$A=\begin{pmatrix} E & B \\ O & 2E \end{pmatrix}$是上面矩阵的分块矩阵.

几种常用的分块方法

（1）把$m\times n$型矩阵A整个作为一块，此时A是一个1×1型分块矩阵。

（2）把$m\times n$型矩阵A按列分块为$A=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，其中$a_1,a_2,\cdots a_n$是矩阵A的n个列向量。

（3）把$m\times n$型矩阵A按行分块为 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$是矩阵$A$的$m$个行向量。

（4）把$m\times n$型矩阵A分块为$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，其中$A_{11}$是矩阵$A$的左上角子方阵。

(5) $m\times n$型矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$也可看作$m\times n$型分块矩阵.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块上三角矩阵

分块下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵

分块的基本要求

（1）计算$A+B$时，对A和B的分块方法应完全相同。

（2）计算AB时，对A的列的分法应与对B的行的分法相同。

注意：对一个矩阵在什么地方加竖线，加几条竖线，

决定了这个矩阵的列的分法。

对一个矩阵在什么地方加横线，加几条横线，

决定了这个矩阵的行的分法。

至于A的行和B的列怎样分，没有要求。

满足上面的分块要求以后，分块矩阵的运算方法与普通矩阵基本相同。

分块矩阵的计算中需注意的地方

（1）设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$为分块矩阵，则$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$

（2）设$A=(a_1,a_2,\cdots a_n)$为按列分块矩阵，则$A^T=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

由于矩阵的乘法不满足交换律，子矩阵对应相乘时，一定要注意它们的位置。

设 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ 为按列分块矩阵，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n)$$

例如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$,

记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2)$$

一般地，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{A} \neq (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{A}, \cdots, \boldsymbol{b}_n\boldsymbol{A})$

设 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ 是按行分块矩阵，$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{A} \\ \alpha_2 \boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \alpha_m \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$

例如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$,

记 $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (3, 4)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\alpha_1 \boldsymbol{A} = (1,2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3,4), \quad \alpha_2 \boldsymbol{A} = (3,4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (7,10)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{A} \\ \alpha_2 \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

一般地，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\alpha_1\\ \boldsymbol{A}\alpha_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}\alpha_m\end{pmatrix}$

例1-7

设 $A_{n\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $E_n=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$

$$A=AE_n=A(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n)$$

$$a_j=Ae_j(j=1,2,\cdots n).$$

于是可用 Ae_j 表示 A 的第 j 列.

$$e_i^{\mathrm{T}}A=\left[\left(e_i^{\mathrm{T}}A\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}=\left(A^{\mathrm{T}}e_i\right)^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots n).$$

$A^{\mathrm{T}}e_i$ $=A^{\mathrm{T}}$的第 i 列 $=A$的第i行的转置

A^Te_i转置正是A的第i行

用 $e_i^{\mathrm{T}}A$ 表示A的第i行.

$$e_i^{\mathrm{T}}Ae_j=a_{ij}$$

例 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$ 表示$\boldsymbol{A}$的第3列

$$\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(0,1,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=(a_{21},a_{22},a_{23})$$ 表示$\boldsymbol{A}$的第2行

$$\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3=(a_{21},a_{22},)\boldsymbol{e}_3=a_{23}$$ 表示$\boldsymbol{A}$的(2,3)元

习题4-2

2. 设$\boldsymbol{a}$是n元列向量，$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=k$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$, 证明：$\boldsymbol{A}^{m+1}=k^m\boldsymbol{A}$.

证：$\boldsymbol{A}^{m+1}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)\cdots(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)$

$$=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\cdots(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^T$$

$$=\boldsymbol{a}k^m\boldsymbol{a}^T=k^m\boldsymbol{A}$$

3. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^3,\boldsymbol{ab}^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$,求$\boldsymbol{ba}^T$,$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.

方法1 $\quad \boldsymbol{ab}^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1,2,3]=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1,2,3]\frac{1}{k}$

可不妨设$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}^T=[1,2,3]$

3. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^3,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$,求$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T$,$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.

方法2 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

3. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^3,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$,求$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T\ ,\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)^2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}^2,$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)^2=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}^T=(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)$$

$$(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T)=6\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}=6$$

设$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,

则$\boldsymbol{ab}^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\boldsymbol{ab}^T\text{的对角元之和}$$

4.设$\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^n, k=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\neq 0, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，求$k$.

提示：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)(\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)$

$$=\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-3(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)$$

$$=\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-3\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^T$$

5.设方阵$\boldsymbol{A}$的按列分块矩阵为$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$，求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$和$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

提示：$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right)\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right)$$

思考题1−1

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{E}$都是$n$阶方阵，下列结论是否成立？为什么？

1. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

不成立

2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$

成立，原因：$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}$

3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

成立，原因：$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}$

思考题1−1

4. $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

$(\Leftarrow)$正确.

当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$时，$(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{AABB}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

$(\Rightarrow)$不正确.

$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 \Rightarrow \boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{AABB}$

再往下，得不出$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$

反例 让$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$

$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$，但是$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

思考题1−1

5. 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

不成立.　　反例　设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,但$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

6. 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,　则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

不成立.　　$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,

$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可以都不为$\boldsymbol{O}$

反例　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,　但是$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,　$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$.

思考题1−1

7. 若$A^2=E$，则$A=E$或$A=-E$.

不成立. $A^2=E\Rightarrow(A+E)(A-E)=O$,

$A+E$和$A-E$可以都不为O

反例 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $A^2=E$，但是$A\neq E$，$A\neq -E$.

8. 若A为对称矩阵，则A^k也为对称矩阵（k为正整数).

成立. 因为$(A^k)^T=(A^T)^k=A^k$

9. 若A为反称矩阵，则A^k也为反称矩阵（k为正整数).

不成立. 因为$(A^k)^T=(A^T)^k=(-A)^k$

不一定等于$-A^k$.

思考题1-1

10. 对称矩阵的第i行与第i列的对应元素相等.

正确

思考题1－2

1. 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$都是n元列向量，则$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$是否正确?.

正确

2. 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$都是n元列向量，则$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T$是否正确?

不正确

$$\text{设}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ \text{则}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(4,5,6)=\begin{pmatrix}4&5&6\\8&10&12\\12&15&18\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}4&8&12\\5&10&15\\6&12&18\end{pmatrix}$$

思考题1－2

3. 对任意的n元列向量$\boldsymbol{u}$，是否都有$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)=(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)$?

正确

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^T=(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)$$

$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$为数

4. 用分块的方法计算$\boldsymbol{AB}$时，对$\boldsymbol{A}$的行的分法及$\boldsymbol{B}$的列的分法是否有特殊要求?

答：对$\boldsymbol{A}$的行的分法及$\boldsymbol{B}$的列的分法没有要求.

要求$\boldsymbol{A}$的列的分法与$\boldsymbol{B}$的行的分法相同.

思考题1－2

5. $\boldsymbol{AB}$的第j列与$\boldsymbol{B}$的第j列有什么关系？

$\boldsymbol{AB}$的第i行与$\boldsymbol{B}$的第i行有什么关系？

$$\boldsymbol{AB}\text{的第}j\text{列} = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j$$

$$\boldsymbol{AB}\text{的第}i\text{行} = \boldsymbol{e}_i^T(\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}\right)\boldsymbol{B}$$

提高题1−1

1. 证明: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

证法1: 数学归纳法

证法2:记$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{O}$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^n = \lambda^n\boldsymbol{E} + \mathrm{C}_n^1\lambda^{n-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_n^2\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2$$

提高题1－1

2. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^k$.

提示：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}[1,2,3]$

记$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$

提高题1－2

1. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，且对任一n元列向量$\boldsymbol{x}$都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证：因为对任一n元列向量$\boldsymbol{x}$都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，

所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=0$，即$\boldsymbol{a}_j=0$

这说明$\boldsymbol{A}$的每一列都是零向量，所以$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

提高题1－2

2. 设$\boldsymbol{A}$是实的n阶对称矩阵,且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证：$\boldsymbol{A}$是对称矩阵$\Rightarrow \boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$的第一个对角元为$a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2=0$

$$\Rightarrow a_{11}=0, a_{21}=0, \cdots, a_{n1}=0$$

通过考察$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$的其它对角元，可以证明$\boldsymbol{A}$的每列都是零向量，所以$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.