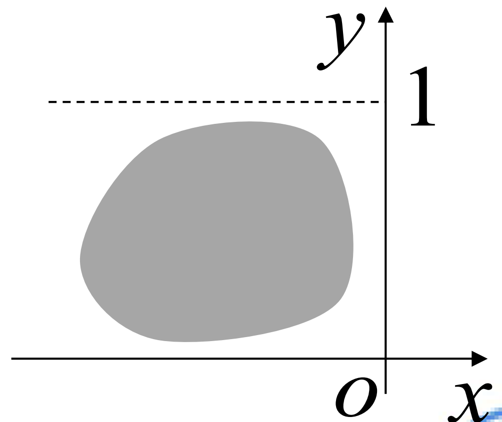
设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$，则

$$I_1=\iint\limits_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为（ D ）

(A) $I_1\le I_2\le I_3$；　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$；

(C) $I_3\le I_2\le I_1$；　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$.

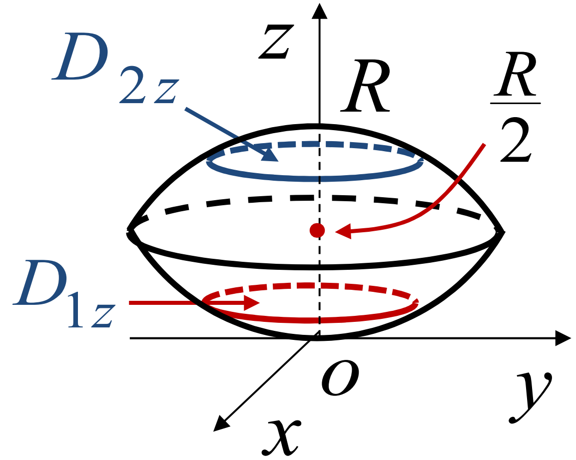


因 $0<y<1$，故 $y^2\le y\le y^{1/2}$；

又因 $x^3<0$，故在D上有

$$y^{1/2}x^3\le yx^3\le y^2x^3$$

计算积分 $\iiint\limits_V z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ $(R>0)$ 的公共部分.



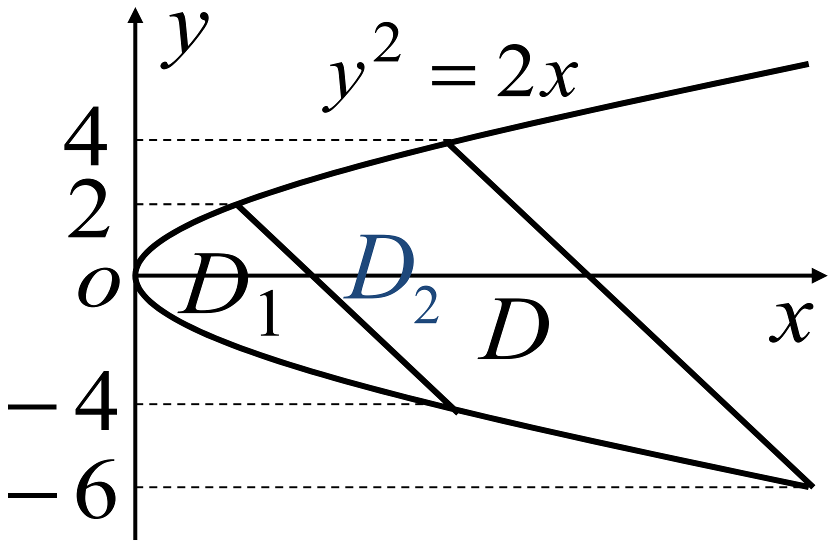
利用“先二后一”计算

$$\text{原式}=\int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{1z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{2z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

计算积分 $\iint_D (x+y)d\sigma$，其中D 由 $y^2=2x$，$x+y=4$，$x+y=12$ 所围成．



$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\,\mathrm{d}x-\int_{-4}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}(x+y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=543\frac{11}{15}$$

计算二重积分 $I=\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中:

(1) D为圆域 $x^2+y^2\le 1$;

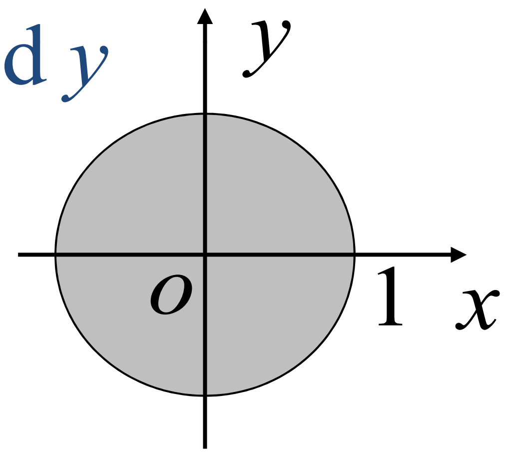
(2) D由直线 $y=x$, $y=-1$, $x=1$ 围成.

(1) 利用对称性.

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



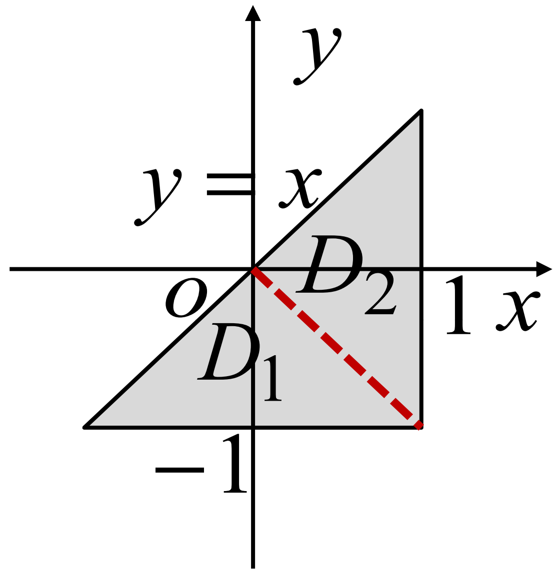
(2) 积分区域如图. 添加辅助线 $y=-x$, 将D 分为 D_1, D_2, 利用对称性, 得

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0$$

$$=\frac{2}{3}$$



计算二重积分 $\iint_D (5x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由曲线 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 所围成的平面区域.

$$I = 5\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 3\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分区域 $(x+1)^2+(y-2)^2 \le 3^2$

其质心坐标为: $\overline{x}=-1, \overline{y}=2$

$$= [5\cdot(-1)+3\cdot 2]S = 9\pi$$

设 $f(u)\in C$, $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$,

其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

在球坐标系下

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\int_0^t f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

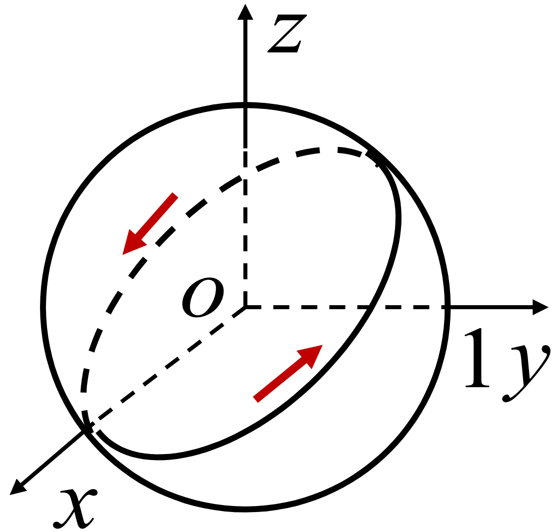
$$F(0)=0$$

利用L'Hospital 法则与导数定义, 得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

计算 $\int_L xyz\mathrm{d}z$，其中L由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$所得，从 z 轴正向看沿逆时针方向.

因在 L上有 $x^2+2y^2=1$，故



$$L:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \quad (t:0\to 2\pi)$$

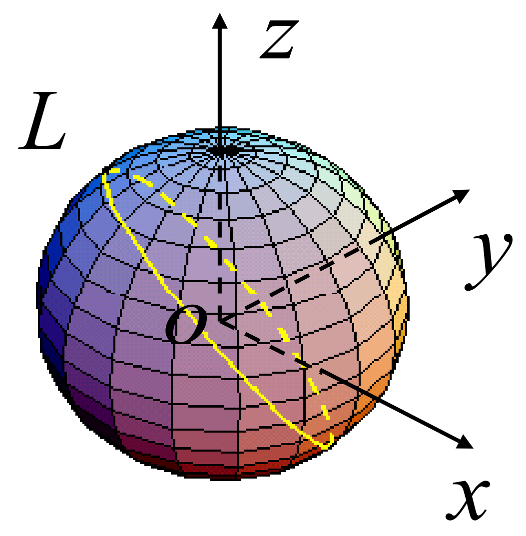
$$\text{原式}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

计算 $I=\int_L (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$



利用轮换对称性，有

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s=\int_L y^2\,\mathrm{d}s=\int_L z^2\,\mathrm{d}s$$

利用质心公式知 $\int_L y\,\mathrm{d}s=\bar{y}\int_L \mathrm{d}s=0$ (L的质心在原点)

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

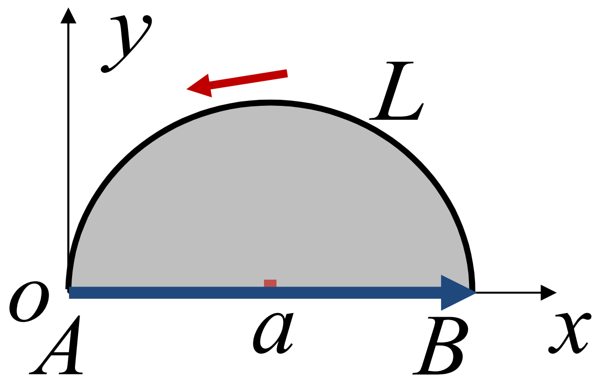
$$=\frac{2}{3}a^2\int_L \mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi a^3$$

计算 $I=\int_L (e^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-2)\mathrm{d}y$,

其中L为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0$,沿逆时针方向.

$$I=\int_L e^x\sin y\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-2)\mathrm{d}y\ -2\int_L y\mathrm{d}x$$

$$L:\begin{cases}x=a(1+\cos t)\\ y=a\sin t\end{cases}\quad (t:0\to\pi)$$



$$=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_0^{2a}0\,\mathrm{d}x+2a^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi a^2$$

计算曲面积分 $I=\oint\!\!\oint_S [(x+y)^2+z^2+2yz]\,\mathrm{d}S$，其中$S$是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

$$I=\oint\!\!\oint_S [(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz]\,\mathrm{d}S$$

$$=\underbrace{\oint\!\!\oint_S (2x+2z)\,\mathrm{d}S}_{\text{质心公式}}+\underbrace{2\oint\!\!\oint_S (x+z)y\,\mathrm{d}S}_{\text{对称性}}$$

$$=2(\bar{x}+\bar{z})\oint\!\!\oint_\Sigma \mathrm{d}S+0$$

$$=32\pi$$

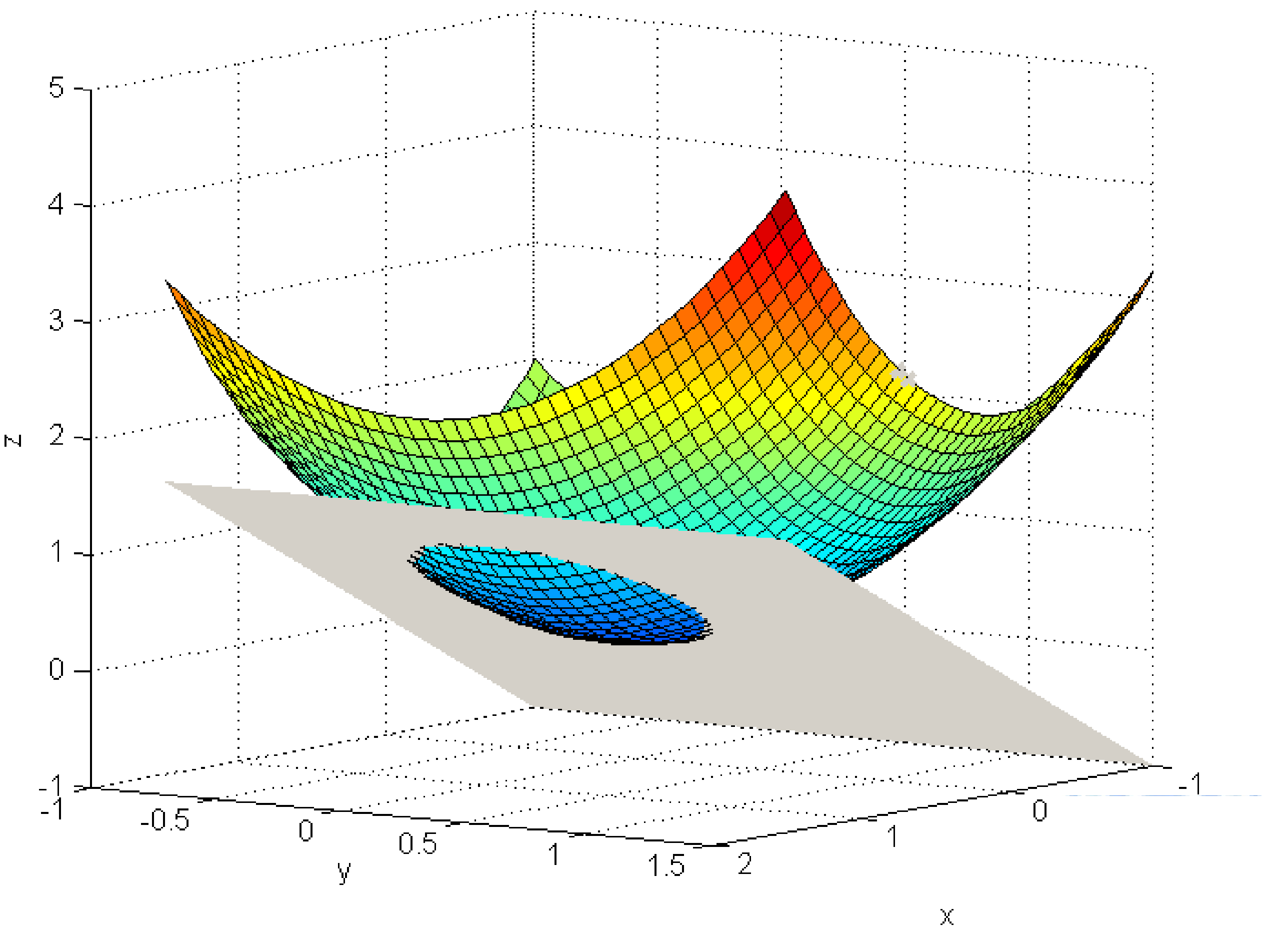
求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = x$ 所截下的有限部分，取下侧.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = x \end{cases}$$

消去 x，得

Σ 在 yOz 面的投影域

$$D_{yz}: y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



$$\iint_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = +\iint_{D_{yz}} \left(z - y^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} \left(r\sin\theta - r^2\cos^2\theta\right) r\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\sin^4\theta - \frac{1}{4}\sin^4\theta\cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{7}{64}\pi$$

<u>方法 2</u>（高斯公式）取平面 $z=x$ 被所截下曲面 $z=x^2+y^2$ 的有限部分 S，取上侧.

$$\oiint_{\Sigma+S} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V 2x\,\mathrm{d}V \qquad \text{（3 分）}$$

$$=\iint_{D_{xy}} 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{x}\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}} 2x\left(x-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta\left(r\cos\theta-r^2\right)r\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos^6\theta-\frac{1}{5}\cos^6\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{32}\pi. \qquad \text{（6 分）}$$

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint_{D_{yz}} z^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} r^2\sin^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{5}{64}\pi. \qquad \text{（9 分）}$$

原积分 $=\frac{1}{32}\pi+\frac{5}{64}\pi=\frac{7}{64}\pi.$ （10 分）