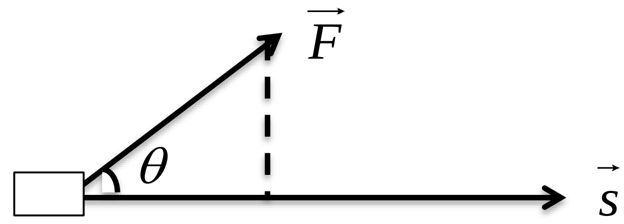
# 第4章 空间的平面与直线

## 4.2 数量积、向量积和混合积

## 4.2.1　数量积

1. 如右图所示，力$\vec{F}$ 对物体所做的功为$w=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$




将计算功的公式加以抽象，可给出数量积的定义。

2. **定义4-4**　两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的**数量积**(也叫**点乘积**)是一个数，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$.　规定 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

其中$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

3. 利用数量积的定义，上面功的表达式可写成$w=\vec{F}\cdot\vec{s}$

4. 数量积与投影的关系 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{b}|(\vec{a})_{\vec{b}} & \text{当}\vec{b}\neq\vec{0}\text{时;}\\ |\vec{a}|(\vec{b})_{\vec{a}} & \text{当}\vec{a}\neq\vec{0}\text{时.}\end{cases}$$

5. 数量积具有下列性质：

$$(1)\ \vec{a}\cdot\vec{a}\ge 0,\ \vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$$

$$(2)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$ 交换律

$$(3)\ (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(4)\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$ 分配律

前三个结论可通过数量积的定义直接证明，第4个结论的证明要用到数量积与投影的关系。

证明(4)：当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时，结论显然成立。

当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|(\vec{a}+\vec{b})_{\vec{c}}=|\vec{c}|\left[(\vec{a})_{\vec{c}}+(\vec{b})_{\vec{c}}\right]$$

$$=|\vec{c}|(\vec{a})_{\vec{c}}+|\vec{c}|(\vec{b})_{\vec{c}}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

大连理工大学

## 6.数量积的坐标表达式(注:是这一部分的重点)

首先注意： $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

注：一般都是利用上式来计算数量积，要好好记住。

7. 当$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$时，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 可得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

注意：一般都是通过上面公式来讨论夹角问题。

要好好记住!

这一部分的学习重点是:

数量积的定义、数量积的性质、数量积的坐标表达式、求角度的公式

**例4-2** 设$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$, 求$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ,$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta$，以及向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影和投影向量.

解：

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times1+(-2)\times0=3$

2. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$,同理$|\vec{b}|=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{3\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

3. $(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

4. $\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为 $(\vec{a})_{\vec{b}}\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{3}{2}\vec{i}+\dfrac{3}{2}\vec{j}$.

大连理工大学

## 4.2.2 向量积

1. **定义4-5** 两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**(也叫**叉乘积**)是一个向量，记作$\vec{a}\times\vec{b}$ . **规定:**

(1)它的**长度**为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, $\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

(2)它的**方向**与$\vec{a}$和$\vec{b}$都垂直，且按$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$的次序符合**右手法则**.

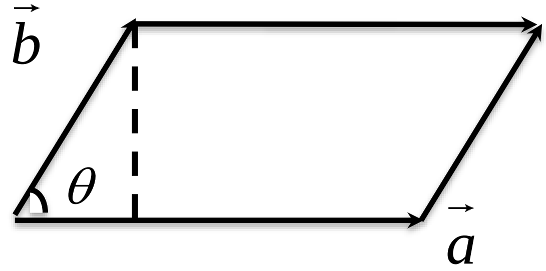
**注意:**

（1） $\vec{a}\times\vec{b}\neq|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

（2） 经常通过$\vec{a}\times\vec{b}$来求一个与$\vec{a},\vec{b}$都垂直的向量。通过$\vec{a}\times\vec{b}$来求一个垂直于$\vec{a},\vec{b}$所在平面的向量。这是向量积的一个最重要的作用。

## 2. 向量积的几何意义

当$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行时，$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积




平行四边形的面积$S=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

## 3.向量积的性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 反交换律

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ 分配律

## 4.向量积的坐标表达式(注:是这一部分的重点)

首先注意: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$　　$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$　　$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$　　$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$　　$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)$$

$$+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)$$

$$+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

为便于记忆

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

注：一般都是通过上面的三阶行列式来计算向量积，要好好记住。

**例4-3** 设向量$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, 求$\vec{a}\times\vec{b}$及以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积$S$.

解:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}.$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}.$$

## 4.2.3 混合积

1. **定义4-6** 三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的**混合积**是一个数，记作$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. 规定 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$

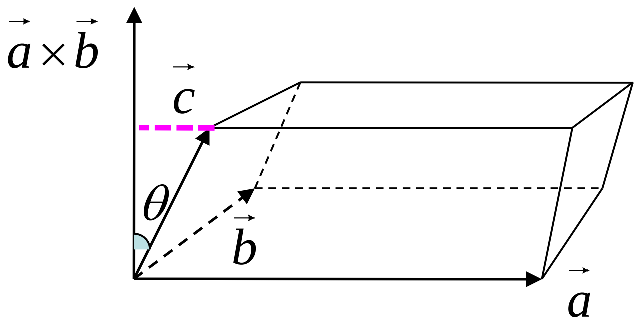
之所以称为混合积是因为乘积里边既有叉乘又有点乘，但要注意一定是先做叉乘后做点乘。原因是：如果先做点乘，得到的是数，就做不了叉乘了。

**注意：** 要把混合积$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$与按列分块矩阵$(a,b,c)$加以区分.

## 2. 混合积的几何意义

混合积的绝对值表示**平行六面体的体积**

$$V = \left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$




$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合右手法则，

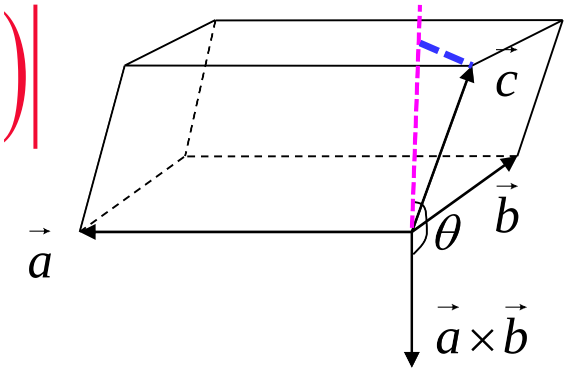
$\theta$ 为$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$的夹角，

底面积为$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，

高为 $\left|\vec{c}\right|\cos\theta$，

体积$V = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$




$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合左手法则，

$\theta$ 为$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$的夹角，

底面积为$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，

高为 $-\left|\vec{c}\right|\cos\theta$，

体积$V = -\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

## 3. 混合积的坐标表达式

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}=|a,b,c|$$

4. **混合积的性质**

$$(1)\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)$$

$$(2)\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$$

$$(3)\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)$$

$$(4)\left(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

(5)若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 中有两个相等或有一个为零向量，

则 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

**例4-4** 设向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{k}-\vec{i}$, 它们的始点同为原点$O$,求以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积$V$.

解:因为

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=|a,b,c|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=-2.$$

所以$V=2$.

## 4.2.4 向量间的关系

1. 注意：这一部分的内容将直接用于求平面方程和直线方程，请同学们重视.

当$\vec{a},\vec{b}$中有$\vec{0}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$既平行又垂直；

当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有$\vec{0}$时，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$一定共面.

注意:我们所讲的向量都是自由向量，是可以平移的.

零向量就和一个点一样.

下面对$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都不是零向量的情况进行讨论.

2. **定理4-1** 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都是非零向量，$\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，则

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　该结论可用于求平面的点法式方程

(2) $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$　该结论可用于求平面的方程

证明：(1)根据$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$及$|\vec{a}||\vec{b}|\neq0$，可得

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

(2)根据$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$及$|\vec{a}||\vec{b}|\neq0$，可得

$$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\theta=0(\text{或}\pi)\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

(3)**必要性**　若$\vec{a}//\vec{b}$, 则$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0.$

若$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，因为$\vec{a}\times\vec{b}$垂直于$\vec{a},\vec{b}$所在平面，并且$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，所以$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

**充分性**　由$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$可得，$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}.$

若$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, 则$\vec{a}//\vec{b}$，平移后$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，因而$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

若$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$，由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都与$\vec{a}\times\vec{b}$垂直可知，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

注：由叉乘的定义可知$\vec{a},\vec{b}$都与$\vec{a}\times\vec{b}$垂直.

$$(3)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{共面}\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$$

3. **定理4-2** $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow$ 存在实数$\lambda$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$或$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

**注：求直线的参数式方程时，要用到这个结论**

证明：由数与向量的乘法的定义可知，充分性成立。

必要性

- 当$\vec{a}$和$\vec{b}$至少有一个是$\vec{0}$时，取$\lambda=0$ .结论成立。

- 当$\vec{a}$和$\vec{b}$都不是$\vec{0}$时，由$\vec{a}//\vec{b}$ 可知，

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \qquad \vec{a}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

取 $\lambda=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ ，则有 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$

4. **推论4-1** 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,则

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

注1：当$\vec{a}//\vec{b}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$一定成倍数，$\vec{a}$与$\vec{b}$的坐标也成倍数.

**注2：求直线的点向式方程时，要用到这个结论**

**知识扩展：** 在小学数学中我们是这样定义除法的，

若数$b\neq 0, bc=a$,则称$c$是$a\div b$的商，可记作$\dfrac{a}{b}=c$.

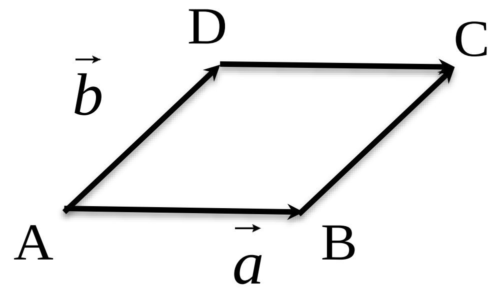
对于任意的数$c$,都有$0\cdot c=0$，因而可认为$\dfrac{0}{0}=c$.

也就是说，可认为$\dfrac{0}{0}=$任意数.

例 设$\vec{a}=\vec{i}-3\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-6\vec{k}$，则$\vec{a}//\vec{b}$,坐标比为$\dfrac{1}{2}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{-3}{-6}$

## 例4-5

证明：平行四边形$ABCD$为菱形$\Leftrightarrow$对角线$AC\perp DB$.




**证：** 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$,

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2.$$

$ABCD$为菱形$\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$

$\Leftrightarrow$线段$AC\perp DB$.

**例4-6** 当 $k$ 为何值时，四个点 $P(2,0,1), A(1,2,3), B(2,3,1)$ 和 $C(3,1,k)$ 共面？

**解**：四点 $P,A,B,C$ 共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)=0$$

$$\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix}=-3(k+1)=0$$

当 $k=-1$ 时，四点 $P,A,B,C$ 共面.