

2.3 行列式的计算

代万基
数学科学学院
大连理工大学





学习指导

关于行列式的计算,首先要掌握一些常规的计算方法,然后再通过学习去掌握一些具有特殊结构的行列式的特殊计算方法及其公式.

计算行列式时,首先要观察所给行列式结构上具有什么特点,然后利用这些特点对行列式进行化简、计算.

2.3.1 按行(列)展开法

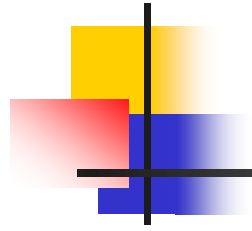
当行列式的某些行(或列)中零元素较多时, 可以通过按行(或按列)展开的方法来计算。

例2-2 证明:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明 用数学归纳法

当 $n = 2$ 时,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}, \text{ 结论成立.}$$

假设结论对 $n-1$ 阶的情况成立, 下面证明结论对 n 阶的情况也成立。



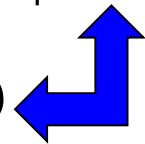
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

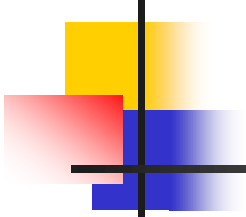
$$= a_{11} (a_{22} \cdots a_{nn})$$



根据归纳法假设

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

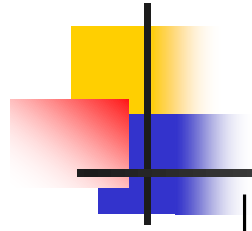
所以结论正确.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{转置}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

上面的结论可推广到下三角行列式和对角行列式，结果也都等于其对角元的乘积。

下面我们来研究按副对角线来看的上三角、下三角及对角行列式的公式。

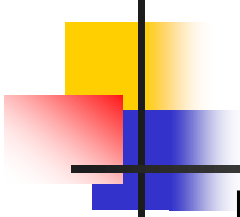


$$\begin{vmatrix} & & & n \\ & & \ddots & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

注：通过上面的做法，将副对角线换到了主对角线，将行列式进行了上下翻转。



$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

例2-3 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 将该行列式按第1列展开，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a(-1)^{1+1}a^{n-1} + b(-1)^{n+1}b^{n-1} \\ &= a^n + (-1)^{n+1}b^n \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
 a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\
 b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a
 \end{vmatrix}$$

转置 \rightarrow

$$\begin{vmatrix}
 a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\
 b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a
 \end{vmatrix}$$

上下翻转 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$



$$\begin{vmatrix}
 b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\
 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 a & b & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix}$$

转置 \rightarrow

上下翻转 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$



$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \\
 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b
 \end{vmatrix}$$



2.3.2 化为三角行列式

因为上（下）三角行列式等于其对角元的乘积，所以可通过初等变换将所给的行列式化成上（下）三角行列式的形式进行计算。

例2-4

$$\begin{array}{l}
\text{2-4} \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right| \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{array} \right| \\
\begin{array}{l} r_3 - 2r_1 \\ = \\ r_4 + r_1 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 + 11r_2 \\ = \\ r_4 + r_2 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right| \\
\begin{array}{l} r_4 - \frac{1}{8}r_3 \\ = \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right| = -40
\end{array}$$



注意：

- (1) 计算行列式时，行变换、列变换都可使用。
- (2) 对行列式化简时，要用等号表示。
- (3) 做对调变换时，行列式前面要添加负号，需记住。
- (4) 主要的化简思路是：依次将每一列的对角元下方全化为0，在化简其中一列时，要先考虑是否需要将该列的对角元进行调整，若需调整，可通过对调变换或倍加变换进行调整。



2.3.3 先化简再展开

该方法的做法是:选取行列式的一行(或一列),利用倍加变换将该行(或列)化为只剩下一个数不为零的情形,再按该行(或列)展开.

选取行(或列)的基本原则是:所选的行(或列)尽可能多地含有0,数之间的倍数要好.

例2-5

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -11 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{按第2列展开} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -11 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -6 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{按第3行展开} \\ &= -1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -40 \end{aligned}$$

2.3.4 范德蒙德行列式

例2-6 n 阶方阵 $V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

叫做范德蒙德矩阵， $\det(V_n)$ 称为范德蒙德行列式。

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \\ \vdots \\ (x_n - x_{n-1})$$

练习：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-1)(2-1)(3-1)(2+1)(3+1)(3-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

注：这是按列看的
范德蒙德行列式

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

用数学归纳法证明：

$$n=2 \text{ 时, } \det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$$

假设n-1阶范德蒙德行列式成立，下面证明对n成立。

$$\begin{aligned} \det(V_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

2.3.5 各行（列）元素之和相等的行列式

例2-7 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

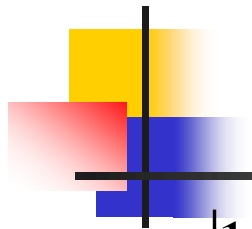
$$\xrightarrow{\text{下面行都减第一行}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}$$



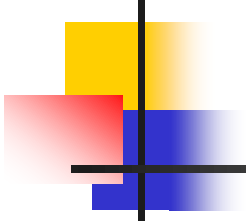
练习：计算下面的n阶行列式

$$(1) \begin{vmatrix} b & \cdots & b & a \\ b & \cdots & a & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$



$$(2) \begin{vmatrix} 1+k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+k & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+k & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k + \frac{n(n+1)}{2} & k + \frac{n(n+1)}{2} & k + \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & k + \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 & 2+k & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+k & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+k \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} k + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & k \end{vmatrix}$$

$$= \left[k + \frac{n(n+1)}{2} \right] k^{n-1}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 0 & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(-a) & b+0 & b+0 & b+0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)(a-b)^3 + (-a) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

2.3.6 箭形行列式 例2-8

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

注意：箭形行列式
总共有四种形式。

$(a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$

将第2列的 $-\frac{d_1}{a_1}$ 倍,
第3列的 $-\frac{d_2}{a_2}$ 倍, \cdots ,
第 n 列的 $-\frac{d_n}{a_n}$ 倍都加到第1列

$$= \begin{vmatrix} x - \sum_{i=1}^n \frac{b_i d_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(x - \sum_{i=1}^n \frac{b_i d_i}{a_i} \right) a_1 \cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

将第2行的 $-\frac{b_1}{a_1}$ 倍,

第3行的 $-\frac{b_2}{a_2}$ 倍, \cdots ,

第 n 行的 $-\frac{b_n}{a_n}$ 倍都加到第1行

$$= \begin{vmatrix} x - \sum_{i=1}^n \frac{b_i d_i}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(x - \sum_{i=1}^n \frac{b_i d_i}{a_i} \right) a_1 \cdots a_n$$

练习：

$$\begin{vmatrix} 1+k & k & k & k \\ k & 2+k & k & k \\ k & k & 1+k & k \\ k & k & k & 2+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k & k & k & k \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+3k & k & k & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1+3k)$$

$$\begin{vmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 2k_1 & 1+2k_2 & 2k_3 & 2k_4 \\ 3k_1 & 3k_2 & 1+3k_3 & 3k_4 \\ 4k_1 & 4k_2 & 4k_3 & 1+4k_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+k_1+2k_2+3k_3+4k_4 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1+k_1+2k_2+3k_3+4k_4$$

2.3.7 递推法及三对角行列式

例2-9 $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

解：按第一行展开，得

$$D_n = 5D_{n-1} + 3 \cdot (-1)^{1+2}$$

$$= 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

设 $D_n - mD_{n-1} = k(D_{n-1} - mD_{n-2})$, 则 $D_n = (m+k)D_{n-1} - mkD_{n-2}$,

$$\begin{cases} m+k=5 \\ mk=6 \end{cases}, \quad \begin{cases} k=5-m \\ m^2-5m+6=0 \end{cases}, \quad \text{求得} \begin{cases} m=2 \\ k=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=3 \\ k=2 \end{cases}$$

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19, \quad D_1 = 5$$

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n$$

类似地可得 $D_n - 3D_{n-1} = 2^n$,

$$\text{从上面两个式子消去 } D_{n-1} \text{ , 求得 } D_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3-2}$$

补充例

$$D_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

解：按第一行展开，得

$$D_n = 6D_{n-1} + 9 \cdot (-1)^{1+2}$$

$$= 6D_{n-1} - 9D_{n-2}$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{6} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cdots & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

设 $D_n - mD_{n-1} = k(D_{n-1} - mD_{n-2})$, 则 $D_n = (m+k)D_{n-1} - mkD_{n-2}$,

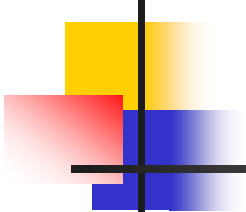
$$\begin{cases} m+k=6 \\ mk=9 \end{cases}, \quad \begin{cases} k=6-m \\ m^2-6m+9=0 \end{cases}, \quad \text{求得} \quad \begin{cases} m=3 \\ k=3 \end{cases}$$

$$D_n - 3D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = \dots = 3^{n-2}(D_2 - 3D_1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad D_1 = 6$$

$$D_n - 3D_{n-1} = 3^n$$

$$\begin{aligned} D_n &= 3D_{n-1} + 3^n = 3^2D_{n-2} + 2 \cdot 3^n = \dots = 3^{n-1}D_1 + (n-1) \cdot 3^n \\ &= (n+1) \cdot 3^n \end{aligned}$$



$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)x_1^n & (x_1 = x_2) \\ \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$$

其中 x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的根。



内容总结

本次课程先讲授了行列式的三种常规计算方法：
按行（列）展开法、三角化法及先化简再展开的方法。

后面又讲授了四种特殊类型的行列式：范德蒙
德行列式、各行（列）元素之和相等的行列式、
箭形行列式、三对角行列式。