作业：大工-超星平台提交，请拍照上传

第7周作业，第9周（4月24日）前上传

作业请抄题

P.183 习题7.8（A） 3； 5； 6；

P.184 习题7.8（A） 9； 11；

13 (1) (3) (6) ；

P.193 习题8.1 (A) 2 (2) (3)

7.8 多元函数的极值

一、无条件极值

二、多元函数的最值

三、条件极值

7.8.1 无条件极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某去心邻域内有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) > f(x_0, y_0))$$

则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如: $z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.

定理 (二元函数极值的必要条件)

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且在该点取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0\,,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，故

$z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极值

$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为**驻点**.

但驻点不一定是极值点.

例如, $z=xy$ 有驻点$(0,0)$, 但在该点不取极值.

定理 (二元函数极值的充分条件)

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0\,,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)\,,B=f_{xy}(x_0,y_0)\,,C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则:

1) 当 $AC-B^2>0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

例. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\quad A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$ 为极小值;

在点(1,2)处 $A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0, \therefore f(1,2)\text{不是极值;}$$

在点(–3,0)处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0, \therefore f(-3,0)\text{不是极值;}$$

在点(–3,2)处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值.}$$

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

例. 讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点，并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点去心邻域内的取值

可能为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ 0 \end{cases}$ ，因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, $z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$ 为极小值.

7.8.2 多元函数的最值

依据

函数 f 在有界闭区域 D 上连续

↓

函数 f 在 D 上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases} D\text{内部可能的极值点(驻点和偏导数不存在的点)} \\ \text{边界上的最值点} \end{cases}$

特别, 当区域 D 内部最值存在, 且**只有一个**极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小 (大) 值 ⟶ $f(P)$ 为最小 (大) 值

例. 要做一个体积为2 m^3 的长方体, 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}$ m,

则所用材料的面积为

$$S = 2(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}) = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}) \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} S_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ S_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

7.8.3 条件极值

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值：对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外，还有其它条件限制} \end{cases}$

条件极值:

例如，在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下，求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

$z=f(x,y)$ 称为目标函数，$\varphi(x,y)=0$ 称为约束条件.

方法：Lagrange乘数法

例如，在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下，求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$，则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题，故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$， 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$

则极值点满足: $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

辅助函数 L 称为Lagrange 函数. 参数 λ 为 Lagrange 乘子.

利用Lagrange函数求极值的方法称为Lagrange乘数法.

推广　Lagrange 乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如，求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$，$\psi(x,y,z)=0$下的极值.

设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\,\varphi(x,y,z)+\mu\,\psi(x,y,z)$

解方程组 $$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda\,\varphi_x+\mu\,\psi_x=0 \\ L_y=f_y+\lambda\,\varphi_y+\mu\,\psi_y=0 \\ L_z=f_z+\lambda\,\varphi_z+\mu\,\psi_z=0 \\ L_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \\ L_\mu=\psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

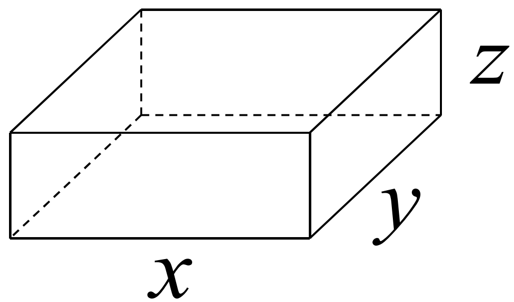
可得到条件极值的所有**可能极值点**.

例. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 $x\,,y\,,z$ 分别表示长、宽、高, 则问题为求$x\,,y\,,$ z 使在条件 $xyz=V_0$ 下水箱表面积 $S=2(xz+yz)+xy$ 最小.

令 $L(x,y,z,\lambda)=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V_0)$

解方程组 $$\begin{cases} L_x=2z+y+\lambda yz=0 \\ L_y=2z+x+\lambda xz=0 \\ L_z=2(x+y)+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-V_0=0 \end{cases}$$



得唯一驻点 $x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda=\frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由实际问题可知用料最省的设计是存在的，因此，当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$，长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步　利用**必要条件**在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步　利用**充分条件**判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

用Lagrange乘数法

如求二元函数 $z = f(x, y)$在条件 $\varphi(x, y) = 0$下的极值,

设 Langrage 函数 $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ 得所有**可能极值点**.

3. 函数的最值问题

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值