第7章　向量空间及向量的正交性

7.2　向量的正交性

在空间解析几何中，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,$ $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$ $\theta=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

下面我们把数量积、长度和夹角的公式推广到实向量空间$\mathbf{R}^n$中，对应地给出$\mathbf{R}^n$中向量的内积、长度和夹角的定义，并进一步讨论向量的正交性。

7.2.1 向量的内积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

定义7-5 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是两个实向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，规定

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

也可用矩阵运算表示内积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$

内积具有下列性质（也称为内积公理）：

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

(2) $(k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, k 是数　　　$(\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$　　　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$

(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0$, 且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=0$

定义7-6

定义了内积的向量空间称为欧氏空间。也称为内积空间.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

定义 7-7

实向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 的**长度**(也叫范数)定义为

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

当 $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ 时，$\boldsymbol{a}$ 叫做**单位向量**；

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，称 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位化向量**.

注意：$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$，　$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

向量的长度具有下列性质：

(1) 非负性 $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$, 且 $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$

(2) 齐次性 $\|k\boldsymbol{a}\| = |k|\|\boldsymbol{a}\|$

(3) 三角不等式 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

(4) 柯西-施瓦茨不等式

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

$$\left|a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right| \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\ \sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$

当$\boldsymbol{a}=0$时，　$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|=0$,　$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|=0$,　　结论成立

当$\boldsymbol{a}\ne 0$时，　对任意实数x，有$(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ge 0$

$$(x\boldsymbol{a},x\boldsymbol{a})+(x\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},x\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\ge 0$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})x^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})x+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\ge 0$$

$$\|\boldsymbol{a}\|^2x^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})x+\|\boldsymbol{b}\|^2\ge 0$$

$$4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2-4\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\le 0$$

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|\le\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|$$

(3)的证明：$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$$

$$=\|\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$\leq\|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

$$=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$$

开方，得 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

定义7-8

当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时， 把$\theta=\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$

叫做向量$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

当 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ ，即 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交**.

注意：根据柯西-施瓦茨不等式$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$可得

$$\left|\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right|\leq 1$$

这保证了定义7-8中的反三角余弦一定是有意义的，
这可看成柯西-施瓦茨不等式的一个作用。

大连理工大学

7.2.2 正交向量组与施密特正交化方法

定义7-9

由两两正交的非零向量组成的向量组称为正交向量组

由单位向量组成的正交向量组称为**标准**正交向量组

定义7-10

当欧氏空间V的一个基为正交向量组时,则称这个基为V的正交基

当V的基为标准正交向量组时,则称这个基为V的标准正交基

定理7-3 正交向量组一定线性无关.

证明 设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是正交向量组，并且

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$$

用$\boldsymbol{a}_1^T$乘上式两边，得

$$k_1\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_m=0$$

由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是正交向量组，得

$$\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1=\|\boldsymbol{a}_1\|^2\neq 0,\qquad \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_j=0\ (j=2,\cdots,m)$$

于是，有$k_1\|\boldsymbol{a}_1\|^2=0$，故$k_1=0$.

同理可证$k_2=\cdots=k_m=0$，

所以$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关.

大连理工大学

施密特正交化公式

设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是一个线性无关的向量组，若令

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{a}_j-\sum_{i=1}^{j-1}\dfrac{\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j}{\|\boldsymbol{b}_i\|^2}\boldsymbol{b}_i \end{cases} \quad (j=2,3,\cdots,m)$$

则$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 是与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 等价的正交向量组.

将 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$单位化后，可得到一个与$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 等价的标准正交向量组。

大连理工大学

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_j}{\|\boldsymbol{b}_i\|^2} \boldsymbol{b}_i \end{cases} \qquad (j = 2, 3, \cdots, m)$$

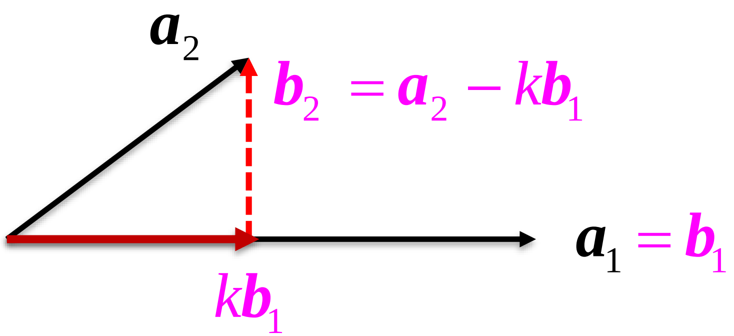
$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \dfrac{\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} \boldsymbol{b}_1 - \dfrac{\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2} \boldsymbol{b}_2 \end{cases}$$

大连理工大学

上面的公式是借助于几何观察，然后经过计算得出来的.

设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性无关，

令$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$，下面通过$\boldsymbol{b}_1$和$\boldsymbol{a}_2$来构造$\boldsymbol{b}_2$，使$\boldsymbol{b}_2$与$\boldsymbol{b}_1$正交.



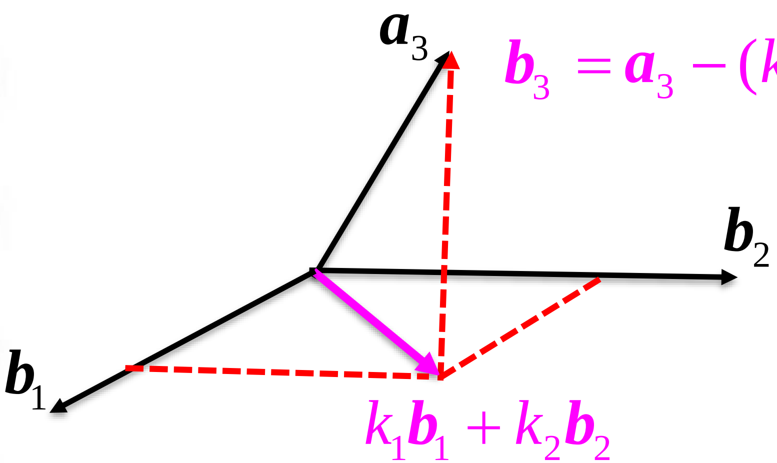
下面通过$\boldsymbol{b}_1$与$\boldsymbol{b}_2$正交来求k，由$\boldsymbol{b}_1$与$\boldsymbol{b}_2$正交可得$\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2=0$.

$$0=\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_1^T(\boldsymbol{a}_2-k\boldsymbol{b}_1)=\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_2-k\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_2-k\left\|\boldsymbol{b}_1\right\|^2$$

$$k=\frac{\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_2}{\left\|\boldsymbol{b}_1\right\|^2},\qquad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_2}{\left\|\boldsymbol{b}_1\right\|^2}\boldsymbol{b}_1$$

大连理工大学

现在假设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性无关，并且已经构造出$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$是正交的，下面通过$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$和$\boldsymbol{a}_3$来构造$\boldsymbol{b}_3$，使$\boldsymbol{b}_3$与$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$都正交.



$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-(k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2)$$

下面通过$\boldsymbol{b}_3$与$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$都正交来求$k_1,k_2$

$$0=\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1^T(\boldsymbol{a}_3-k_1\boldsymbol{b}_1-k_2\boldsymbol{b}_2)$$
$$=\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_3-k_1\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_1-k_2\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2$$

因为$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$正交，所以$\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2=0$. $\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_3-k_1\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_1=0$, $\quad k_1=\dfrac{\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}$.

$$0=\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_2^T(\boldsymbol{a}_3-k_1\boldsymbol{b}_1-k_2\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{a}_3-k_1\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{b}_1-k_2\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{b}_2$$

因为$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$正交，所以$\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{b}_1=0$. $\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{a}_3-k_2\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{b}_2=0$, $\quad k_2=\dfrac{\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}$.

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1-\frac{\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2$$

大连理工大学

7.2.3 正交矩阵

定义7-11 若实方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵.

注意：当$\boldsymbol{A}$为方阵时，$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{E}$

正交矩阵具有下列性质：

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶正交矩阵，则

(1) $\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为正交矩阵，即$\boldsymbol{A}^{-1}$为正交矩阵

(3) $\boldsymbol{AB}$为正交矩阵

(4) $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$

大连理工大学

定理 7-4

实方阵A为正交阵 $\Longleftrightarrow$ A 的**列向量组**为标准正交向量组

A 的**行向量组**为标准正交向量组

证明 $$A^T A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix}$$

实方阵A为正交阵$\Leftrightarrow A^T A=E \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T a_i=1 \Leftrightarrow \|a_i\|^2=1 \\ a_i^T a_j=0 \Leftrightarrow a_i \text{ 与 } a_j \text{ 正交} \end{cases}$

例7-8 设$\boldsymbol{\alpha}$是n元单位列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是正交矩阵，求 k

解： 由$\boldsymbol{\alpha}$是单位列向量，得 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=1$

$$\boldsymbol{A}^T=\left(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^T=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-k(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}&=\left(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\\&=\boldsymbol{E}-2k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-2k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

注：$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$

$$\begin{aligned}&=\boldsymbol{E}-2k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}+(k^2-2k)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

$k^2-2k=0$ $\qquad$ $k=0$或2

大连理工大学

例7-9 已知$A=a\begin{pmatrix} b & 8 & 4 \\ 8 & b & 4 \\ 4 & 4 & c \end{pmatrix}$为正交阵，求$a,b,c.$

各列正交，内积为0

$$\begin{cases} 8b+8b+16=0 \\ 4b+4c+32=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-1 \\ c=-7 \end{cases}$$

列向量的长度为1

$$\left((-1)^2+8^2+4^2\right)a^2=1 \qquad a=\pm\frac{1}{9}$$