作业：大工-超星平台提交，请拍照上传

第4周作业，第6周（4月3日）前上传

作业请抄题

P.70 习题5.5 (A) 1 (4)； 2 (2)； 3 (1) (2)；

P.71 (A) 5 (1) (2)；

P.71 (B) 1； 3 (2)； 4； 6

5.5 Fourier级数

5.5.1 三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$

（A为振幅，ω为角频率，φ为初相）

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underline{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos \underline{n\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t}$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega t = x$

得函数项级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

组成三角级数的函数系（函数序列）

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0 .

证： $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x=0\ (k\neq n)$$

同理 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不等于 0， 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2},\quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

5.5.2 以2π为周期的函数的Fourier级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证： 对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\pi$$ (利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 $\sin kx$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \quad ②$$

由公式②确定的 a_n, b_n 称为函数 $f(x)$ 的**Fourier系数**，以 $f(x)$ 的**Fourier系数**为系数的三角级数①称为 $f(x)$ 的**Fourier级数**.

定理 (Dirichlet 收敛定理) 设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数, 并满足:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个单调区间,

则 $f(x)$ 的Fourier级数收敛, 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

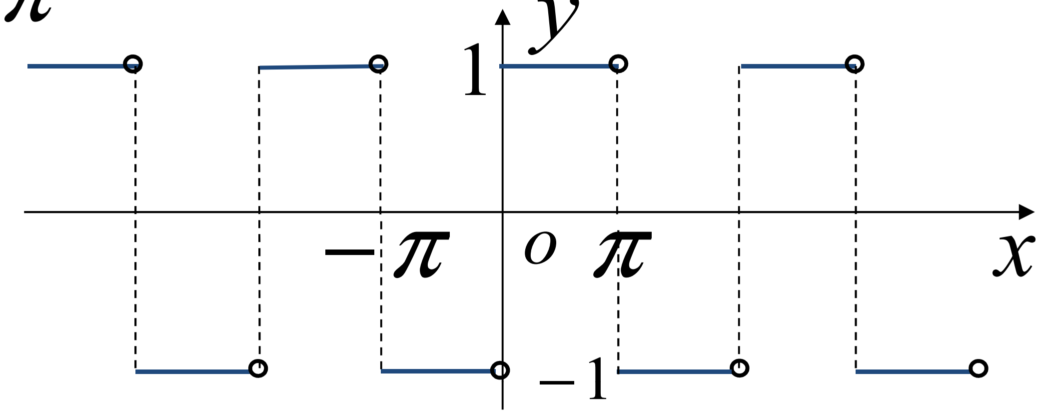
其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的Fourier系数 .

函数展成 Fourier 级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

例. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成Fourier级数.



解: 先求Fourier系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

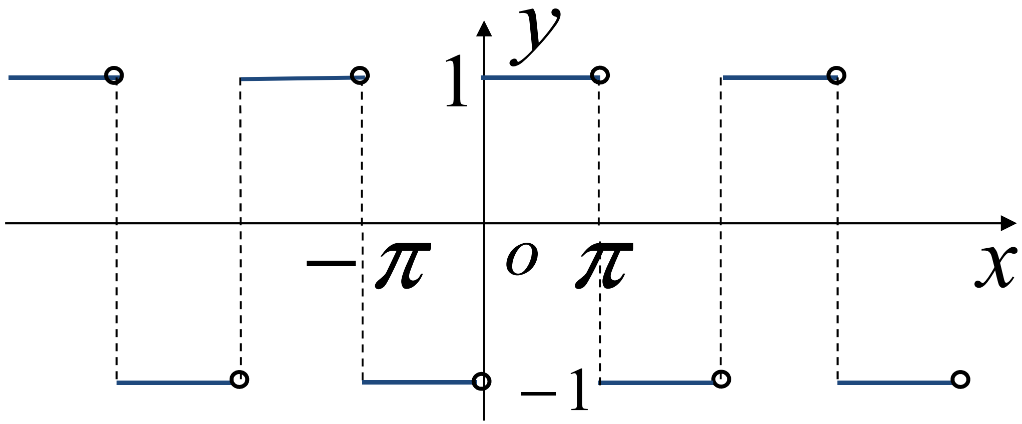
$$= \frac{2}{n\pi}[\,1-(-1)^n\,] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\,\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty\,,\ x \neq 0\,, \pm\pi\,, \pm 2\pi\,, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

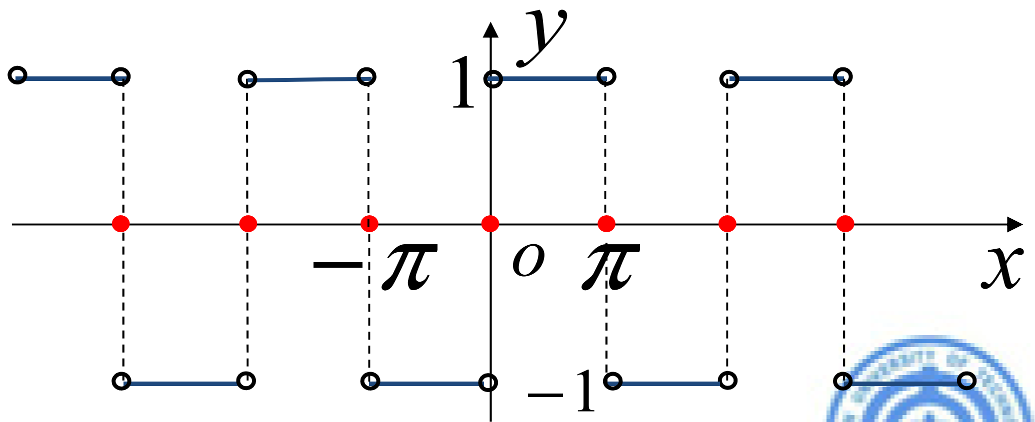


说明:

1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

时, 级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$

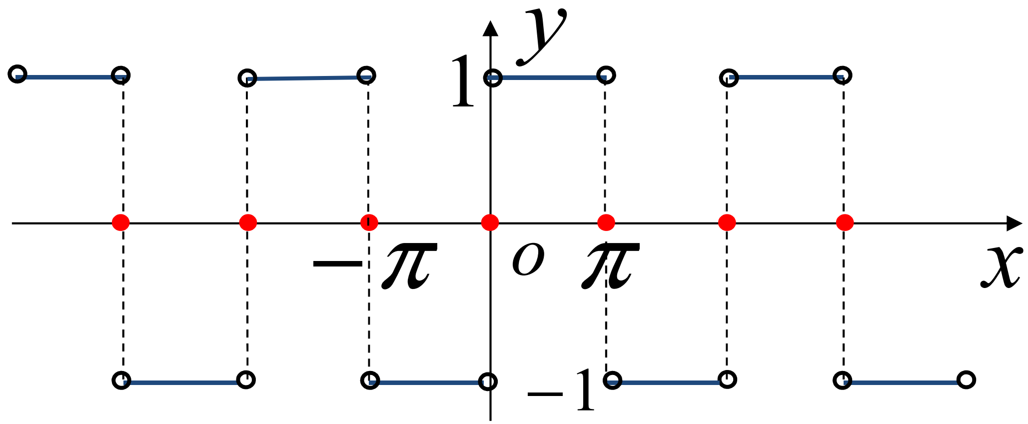


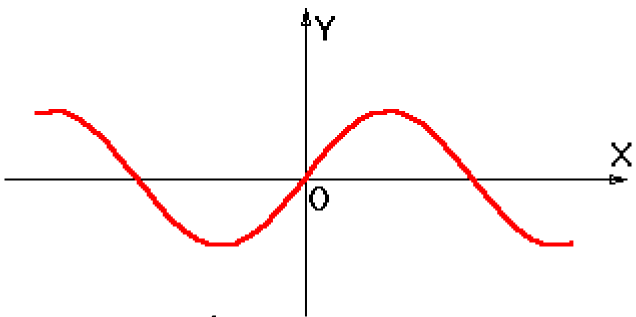
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$

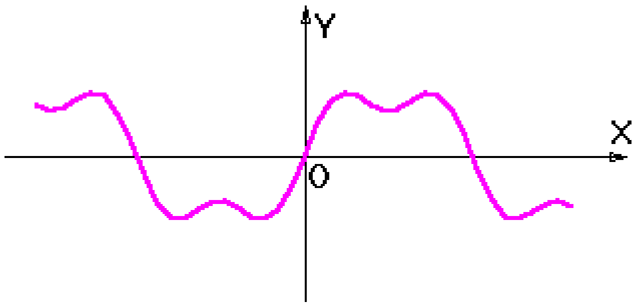
说明:

2) Fourier级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况.

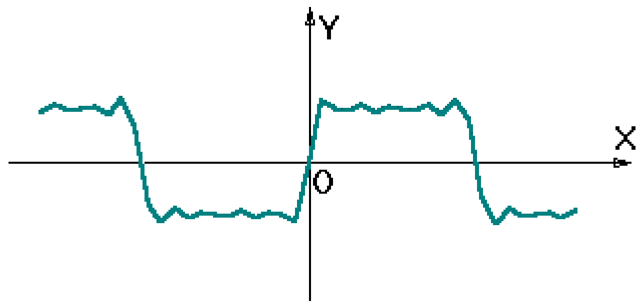




$\frac{4}{\pi}\sin x$



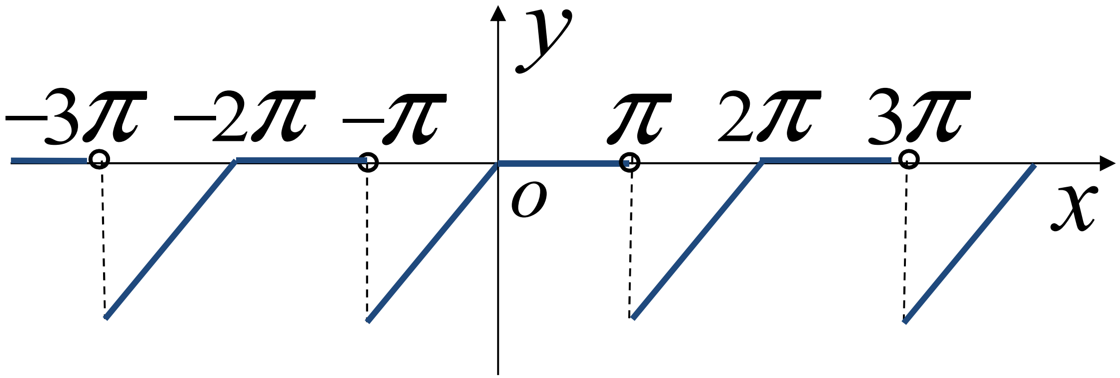
$\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3})$



$\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9})$

例. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成Fourier级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

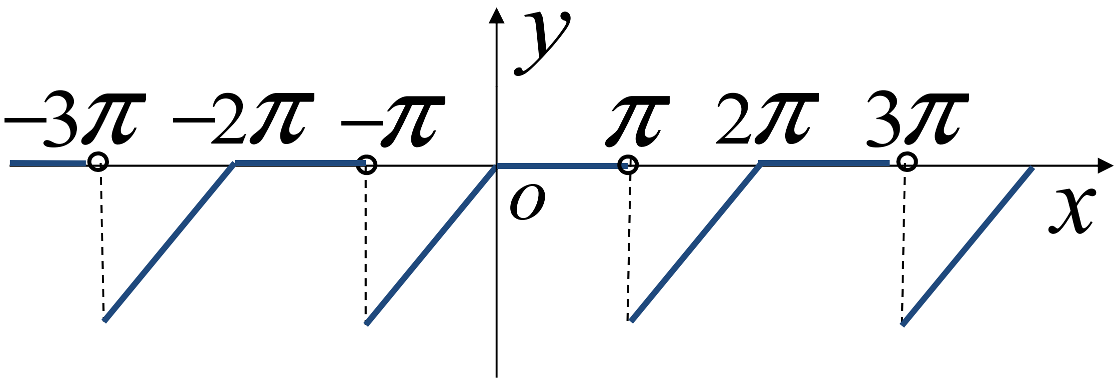
说明: 当 $x=(2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{0+(-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

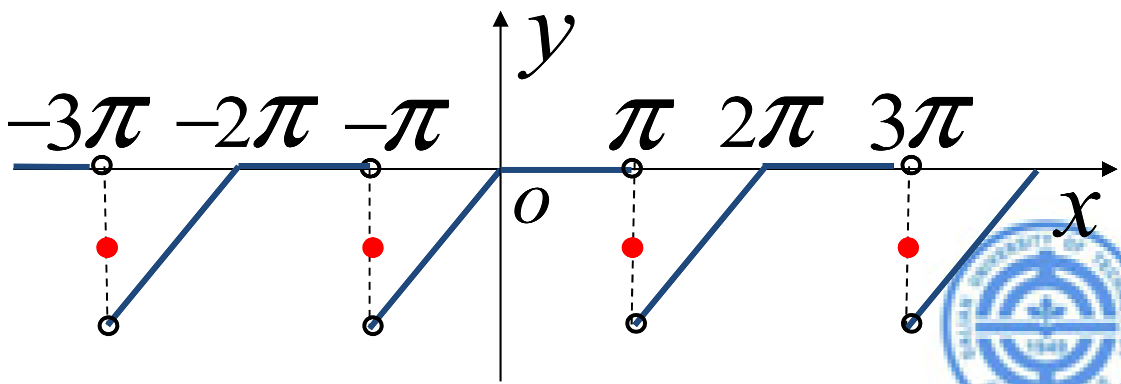
$$f(x)=\frac{-\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)-\frac{1}{4}\sin 4x+$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k-1)\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$





正弦级数和余弦级数

周期为2π 的奇、偶函数的Fourier级数

对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其Fourier级数为正弦级数,
它的Fourier系数为

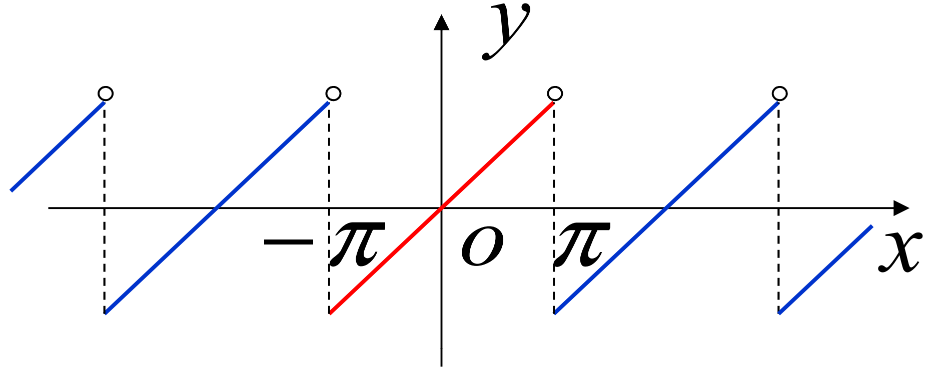
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其Fourier级数为余弦级数 ,
它的Fourier系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$，将 $f(x)$ 展成Fourier级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

$$(-\infty < x < +\infty\,,\ x \neq (2k+1)\pi\,,\ k = 0, \pm 1\,, \cdots)$$