1. 二阶行列式的定义

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式，

规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

注：（1）在一个行列式中，从左上角到右下角的那条对角线称为主对角线，从左下角到右上角的那条对角线称为副对角线。

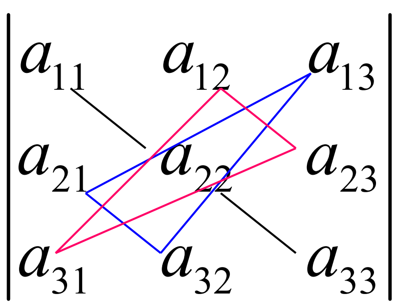
（2）二阶行列式等于主对角线上的两个数的乘积减去副对角线上的两个数的乘积。

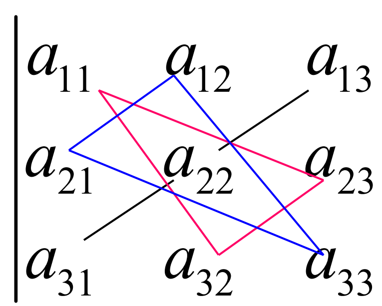
2. 三阶行列式的定义

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

注意 三阶行列式中共有6项，3项为加的项，3项为减的项.加的3项是由主对角线带出的两个三角形构成的，两个三角形的底边与主对角线平行，见下面左图，**主对角线**上的三个数的乘积、三角形顶点处的三个数的乘积构成**加的三个项**；减的3项是由副对角线带出的两个三角形构成的,两个三角形的底边与副对角线平行,见下面右图，**副对角线**上的三个数的乘积、三角形顶点处的三个数的乘积构成**减的三个项**.





3. 代数余子式的定义

定义 从 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列

所余下的数构成的行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 D_{ij} .

注意：a_{ij} 代表行列式中的任一元素.

把 $(-1)^{i+j}D_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的**代数余子式**，**记作** A_{ij}，

即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$.

例如,对于三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ，7的余子式为 $D_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$,

7的代数余子式为 $A_{31}=(-1)^{3+1}D_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-3.$

4. 行列式可按其任一行（或任一列）展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

上面这三个式子都对，还有三种情况同学们自己思考一下。

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \vec{j}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

5. 行列式的几个简单性质

(1)将行列式的行和列的位置互换，行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(2)若行列式中有一行（或一列）全为0，则行列式的值为0。

(3)若行列式的某一行（或某一列）有公因数k，则可把公因数k提到行列式的外面。

例如：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(4)对换行列式的两行（或两列），行列式变号。

例如：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

(5)将行列式的某一行乘以数 k加到另一行（或将行列式的某一列乘以数k加到另一列），行列式的值不变。

例如：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}$$

(6)若行列式的某一行（或某一列）中的元素都是两数之和的形式，则可按下面方式拆分成两个行列式相加的形式。例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

注记:

若设 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$， 则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$