

高等数学 2016 级下学期期末试卷

A 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分) 1、 $(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0$ 或 $x+2y+z=6$,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}; \quad 2、(2,3,1),-\frac{2}{3};$$

$$3、f_1' \bullet e^x \bullet \sin y, \quad f_1' \bullet e^x \bullet \cos y + e^x \bullet \sin y (f_{11}'' \bullet e^x \bullet \cos y + f_{12}'');$$

$$4、S(1)=\frac{3}{2}, \quad S(100)=1; \quad 5、2, \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi。$$

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分) 1、B; 2、D; 3、C; 4、B; 5、A。

三、(工科) 求微分方程 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$ 的通解。

解: 特征方程 $r^2-r-2=0$, 特征根 $r_1=-1, r_2=2$ 。

$$\text{齐次方程通解 } Y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{特解形式 } y^*(x)=x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{将 } y^*(x) \text{ 代入原方程并整理得: } -2ax+a-2b=1-2x, \begin{cases} -2a=-2 \\ a-2b=1 \end{cases}, a=1, b=0,$$

$$\text{所以 } y^*(x)=xe^x, \therefore \text{通解 } y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+xe^{2x}. \quad (10 \text{ 分})$$

三、(高数) 求过 Z 轴且与平面 $2x+y+3z=0$ 垂直的平面方程。

解: 由题意, 所求平面过原点 $O(0,0,0)$, 且法向量 \vec{n} 垂直于向量 $(0,0,1)$, 同理法

向量 \vec{n} 垂直于向量 $(2,1,3)$, 故:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ 0, 0, 1 \\ 2, 1, 3 \end{vmatrix}=(-1, 2, 0) \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{故点法式平面方程: } x-2y=0. \quad (10 \text{ 分})$$

三、(微积分) 求二重积分 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 由 $x=1, y=1$ 和

$x^2+y^2=1(x, y \geq 0)$ 围成的区域。

$$\text{解: 设 } D_1=\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D+D_1} (x^2 + y^2) dx dy - \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

(8 分)

(10 分)

四、用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求函数 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值和最小值。

解：令 $L(x, y, \lambda) = x^2 + 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2x + 4y + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 4x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 得}$$

(5 分)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 3, \text{ 最大值;}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1, \text{ 最小值。}$$

(10 分)

五、将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数，并求收敛域。

$$\text{解： } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, -1 < x < 1$$

(2 分)

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(8 分)

左端点 $x = -1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ ，由莱布尼兹判别法收敛。

收敛域 $[-1, 1)$ 。

由于 $f(0) = \frac{\pi}{4}$ ，所以：

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad [-1, 1) \quad . \quad (10 \text{ 分})$$

六、求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz \, dydz + (x^2 + y^3) \, dxdy$ ，其中 $\Sigma : z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ ，取

下侧。

解：补有向曲面 $\Sigma_1 : z = z(x, y) = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$ ，取上侧。 (2 分)

由高斯公式， $I + \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} z \, dV$ ， (5 分)

$$\text{其中 } \iiint_{\Omega} z \, dV = \int_0^1 z \, dz \iint_{D_z: x^2+y^2 \leq (\sqrt{z})^2} dxdy = \int_0^1 \pi z^2 \, dz = \pi \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} xz \, dydz + (x^2 + y^3) \, dxdy = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^3) \, dxdy = \iint_{D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^3) \, dxdy,$$

$$\text{由对称性，得 } \iint_{D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1} y^3 \, dxdy = 0,$$

$$\text{由轮换对称性，得 } \iint_{D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1} x^2 \, dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{故 } I = \frac{\pi}{12}. \quad (10 \text{ 分})$$

七、计算曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ，其中 L 为从点 $A(1, 1)$ 沿直线到点 $B(-1, 0)$ ，再沿

曲线 $y = x^2 - 1$ 到点 $C(1, 0)$ 。

$$\text{解： } P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (2 \text{ 分})$$

积分与路径无关，自选路径。令点 $D(-1, 1)$ ，选从点 $A(1, 1)$ 沿水平线到点 $D(-1, 1)$ 后，

沿铅直线到点 $B(-1, 0)$ ，再沿下半单位圆到点 $C(1, 0)$ 。 (4 分)

$$\text{其中： } \int_{AE} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{y=1 \\ x=x}}^{-1} = -\arctan x \Big|_1^{-1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{EB} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=y}}^0 = -\arctan y \Big|_1^0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{BC} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \int_{-\pi}^0 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \pi。$$

$$\text{所以, } \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}。 \quad (10 \text{ 分})$$

B 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、 $f_1' \bullet e^x \bullet \sin y$, $f_1' \bullet e^x \bullet \cos y + e^x \bullet \sin y (f_{11}'' \bullet e^x \bullet \cos y + f_{12}'')$;

2、 $(x-1) + 2(y-2) + (z-1) = 0$ 或 $x + 2y + z = 6$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$;

3、 $(2, 3, 1), -\frac{2}{3}$; 4、 $2, \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$; 5、 $S(1) = \frac{3}{2}$, $S(100) = 1$ 。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分) 1、 C ; 2、 B; 3、 D; 4、 A; 5、 B。

三、(工科) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = (2x+1)e^{-x}$ 的通解。

解: 特征方程 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根 $r_1 = 1, r_2 = -2$ 。

齐次方程通解 $Y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, (4 分)

特解形式 $y^*(x) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x} = (ax+b)e^x$ 。 (7 分)

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得: $-2ax - a - 2b = 2x + 1, \begin{cases} -2a = 2 \\ -a - 2b = 1 \end{cases}, a = -1, b = 0,$

所以 $y^*(x) = -xe^x$, \therefore 通解 $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - xe^x$ 。 (10 分)

三、(高数) 求过 X 轴且与平面 $2x + y + 3z = 0$ 垂直的平面方程。

解: 由题意, 所求平面过原点 $O(0,0,0)$, 且法向量 \vec{n} 垂直于向量 $(1,0,0)$, 同理法

向量 \vec{n} 垂直于向量 $(2,1,3)$, 故:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ 1, 0, 0 \\ 2, 1, 3 \end{vmatrix} = (0, -3, 1) \quad (7 \text{ 分})$$

故点法式平面方程: $3y - z = 0$ 。 (10 分)

三、(微积分) 求二重积分 $\iint_D (y^2 + x^2) dx dy$, 其中 D 由 $x=1, y=1$ 和

$x^2 + y^2 = 1 (x, y \geq 0)$ 围成的区域。

解: 设 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$, (2 分)

$$\begin{aligned} \iint_D (y^2 + x^2) dx dy &= \iint_{D+D_1} (y^2 + x^2) dx dy - \iint_{D_1} (y^2 + x^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (y^2 + x^2) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (8 \text{ 分}) \\ (10 \text{ 分}) \end{array}$$

四、用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法求函数 $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$ 在单位圆

$x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值和最小值。

解: 令 $L(x, y, \lambda) = x^2 - 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2x - 4y + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -4x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1, \text{ 最小值;}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 3, \text{ 最大值。} \quad (10 \text{ 分})$$

五、同 A 卷。

六、求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz dy dz + (x^3 + y^2) dx dy$, 其中 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 取

下侧。

解: 补有向曲面 $\Sigma_1: z = z(x, y) = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧。 (2 分)

$$\text{由高斯公式, } I + \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} z dV, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{其中 } \iiint_{\Omega} z dV = \int_0^1 z dz \iint_{D_z: x^2 + y^2 \leq (\sqrt{z})^2} dx dy = \int_0^1 \pi z^2 dz = \pi \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} xz dy dz + (x^3 + y^2) dx dy = \iint_{\Sigma_1} (x^3 + y^2) dx dy = \iint_{D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1} (x^3 + y^2) dx dy,$$

$$\text{由对称性, 得 } \iint_{D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1} x^3 dx dy = 0,$$

$$\text{由轮换对称性, 得 } \iint_{D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1} y^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{故 } I = \frac{\pi}{12}.$$

(10 分)

七、同 A 卷。