第 5 章　向量组的线性相关性与矩阵的秩

本章研究向量组的线性相关性、向量组的秩、向量组的极大无关组以及矩阵的秩，它们是线性代数中非常重要的基本概念，也是研究线性方程组等问题的理论基础.

学习本章要掌握好向量组与矩阵的关系：一方面是用向量组的线性相关性及其秩的基本知识来研究矩阵的秩；另一方面是将向量组写成矩阵形式，通过矩阵来研究向量组的问题。

5.1　向量组的线性相关性和秩

线性代数中很多重要的概念产生于对线性方程组研究的需要，例如，矩阵、行列式及初等变换的概念都是由于研究线性方程组的需要而产生的. 本章要介绍的一些主要概念也都与线性方程组的研究有着密切的联系.

对于一般的线性方程组，我们需要解决这样一些问题：何时有解？有解时是有唯一解还是有无穷多个解？当有无穷多个解时，怎样求出和表达方程组的全部解？为此，我们先介绍线性方程组的向量形式.

$m\times n$ 型线性方程组的矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ，将 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$,由

$$\mathbf{Ax}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n$$

可知，线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 又可以写成向量形式：

$$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b}\ .$$

由方程组的向量形式可知，方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解的充要条件是存在 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ ，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}\ .$$

定义 5-1　对于向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ ，若存在 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n\,,$$

则称向量 $\mathbf{b}$ 是向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的**线性组合**，或称向量 $\mathbf{b}$ 能由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ **线性表示**.

由定义 5-1 及上面的讨论可得下面的定理.

定理 5-1　设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是 $m\times n$ 型线性方程组.

（1）方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示.

（2）方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示且表达式唯一.

由定理 5-1 可知，方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是否有解，就在于向量 $\mathbf{b}$ 能否由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示，因而我们需要对向量之间的线性关系进行深入的研究。

5.1.1 向量组的线性相关性

我们现在对齐次线性方程组有非零解的条件加以分析引出向量组线性相关的概念. 从前面的分析可知：

$m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

针对上面结论,我们给出下面的定义.

定义 5-2 对于向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$，

(1)若存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0},$$

则称该向量组**线性相关**.

（2）若仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为零时，才使

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

成立，则称该向量组**线性无关**.

注意 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是线性相关还是线性无关，取决于线性表达式 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 成立时，其系数的取值情况：可以不全为零还是必须全为零。

一个向量组是否线性相关，是向量组的一种重要性质，这种性质称为向量组的线性相关性.

由上面的讨论及定理 3-5 可得定理 5-2.

定理 5-2 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$.

（1）向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 有非零解（只有零解）.

（2）当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ $|\mathbf{A}|=0\,(|\mathbf{A}|\neq 0)$.

(3)可逆矩阵的列向量组一定线性无关.

例 5-1 证明：单个向量$\mathbf{a}$线性相关（无关）$\Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{0}\ (\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$.

证明 我们仅对线性相关的情况加以证明.
充分性 由$\mathbf{a}=\mathbf{0}$知，存在不为零的数 1，使得$1\,\mathbf{a}=\mathbf{0}$，所以$\mathbf{a}$线性相关.

必要性 由$\mathbf{a}$线性相关知，存在不为零的数k，使得$k\,\mathbf{a}=\mathbf{0}$.因为$k\neq 0$, 所以$\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

例 5-2 证明：含有零向量的向量组一定线性相关.

证明 不妨设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$中有一个向量$\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$,则有

$$1\mathbf{a}_1+0\mathbf{a}_2+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

因为上式中的系数不全为零，所以该向量组线性相关.

例 5-3 当k为何值时，向量组$\mathbf{a}_1=[1,1,1]^T,\mathbf{a}_2=[0,2,5]^T,\mathbf{a}_3=[1,k,6]^T$线性相关？

解 由

$$|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&k\\1&5&6\end{vmatrix}=15-5k=0$$

得k=3. 所以，当k=3 时向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性相关.

对于能组成方阵的向量组，可通过其对应的行列式来讨论其线性相关性. 对于不能组成方阵的向量组，可通过秩来讨论，该方法将在 5.3 节中介绍.

定理 5-3 向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n (n\geq 2)$线性相关的充要条件是该向量组中至少有一个向量可由其余的$n-1$个向量线性表示.

证明 充分性 不妨设$\mathbf{a}_n$可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}$线性表示，并设

$$\mathbf{a}_n=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1},$$

则有

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}+(-1)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

因为上式成立时系数不全为零，所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性相关.

必要性 因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性相关，所以存在不全为零的数$l_1,l_2,\cdots,l_n$使得

$$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

不妨设$l_1\neq 0$,则有 $\mathbf{a}_1=(-\dfrac{l_2}{l_1})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\dfrac{l_n}{l_1})\mathbf{a}_n$,

$\mathbf{a}_1$可由其余$n-1$个向量线性表示.证毕.

用反证法可证明：向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关的充要条件是该向量组中任何一个向量都不能由其余$n-1$个向量线性表示.

定理 5-3 揭示了线性相关与线性表示之间的关系，从上面讨论中可以看到，线性相关的向量之间有线性表示关系，线性无关的向量之间没有线性表示关系，这正反映了线性相关的含义.

由定理 5-3 可知，两个向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性相关$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$之间成倍数关系.

在使用定理 5-3 证明问题时要注意：当一个向量组线性相关时，其中一定有一个向量能由其余向量线性表示，但到底是哪一个向量有时并不容易确定，这时一般要用“不妨设”的方式来进行假设.下面介绍一种可以确定的情况.

定理 5-4　若向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，而向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$线性相关，则向量$\mathbf{b}$可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示且表达式唯一.

证明　由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ 线性相关可知，存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n,k$，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n+k\mathbf{b}=\mathbf{0}.$$

我们用反证法来证明 $k\neq0$.

设 k=0, 则$k_1,k_2,\cdots,k_n$不全为零，且

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0},$$

这与向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关矛盾，故 $k\neq0$.于是

$$\mathbf{b}=(-\frac{k_1}{k})\mathbf{a}_1+(-\frac{k_2}{k})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\frac{k_n}{k})\mathbf{a}_n,$$

即向量$\mathbf{b}$可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示.

下面证明表达式唯一.　设

$$\mathbf{b}=l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{b}=s_1\mathbf{a}_1+s_2\mathbf{a}_2+\cdots+s_n\mathbf{a}_n,$$

两式相减，得

$$(l_1-s_1)\mathbf{a}_1+(l_2-s_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(l_n-s_n)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

由于向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，因此

$$l_i-s_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)，即\ l_i=s_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

故向量$\mathbf{b}$可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$唯一地线性表示.

当两个向量组之间有某种联系时，其线性相关性也有一定的联系.

定理 5-5 设向量组 I 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$，向量组 II 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_{r+1},\cdots,\mathbf{a}_n$.

（1） 若向量组 I 线性相关，则向量组 II 也线性相关;

（2） 若向量组 II 线性无关，则向量组 I 也线性无关。

证明 [(2)是(1)的逆否命题，只需证(1).]

由向量组 I 线性相关可知，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_r\mathbf{a}_r=\mathbf{0}.$$

进一步，可得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_r\mathbf{a}_r+0\mathbf{a}_{r+1}+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}\text{。}$$

由于上式中的系数仍然不全为零，所以向量组 II 也线性相关.证毕.

向量组 I 可看成向量组 II 的一部分，因此上面的结论也可叙述为“部分相关整体也相关，整体无关部分也无关”.

定理 5-6 设 r 元向量组 I 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$；$s$ 元向量组 II 为 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$；$r+s$ 元向量组III为 $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots,\mathbf{c}_m$，其中,

$$\mathbf{c}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i\\ \mathbf{b}_i\end{bmatrix}\ (i=1,2,\cdots,m).$$

（1）若向量组 I 和 II 中有一个线性无关，则向量组III也线性无关.

（2）若向量组III线性相关，则向量组 I 和 II 都线性相关.

证明 [(2)是(1)的逆否命题，故只需证(1).]

不妨设向量组 I 线性无关,另设

$$x_1\mathbf{c}_1+x_2\mathbf{c}_2+\cdots+x_m\mathbf{c}_m=\mathbf{0}_{r+s}, \tag{5.1}$$

即

$$x_1\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}\mathbf{a}_2\\ \mathbf{b}_2\end{bmatrix}+\cdots+x_m\begin{bmatrix}\mathbf{a}_m\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_r\\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix},$$

由上式可得

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0}_r.$$

由于向量组 I 线性无关，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 必须全为零. 这说明只有 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 全为零时式(5.1)才成立，由线性无关的定义可知，向量组III线性无关.证毕.

为了方便记忆，定理 5-6 可概述为“线性无关的向量组在相同位置添加分量后仍线性无关，线性相关的向量组在相同位置删去分量后仍线性相关”.

5.1.2 向量组的秩和极大无关组

方程组与其增广矩阵是一一对应的，增广矩阵的每个行向量对应于方程组中的一个方

程，我们可以将向量组的线性表示、线性相关和线性无关的概念推广到方程组上. 当增广矩阵的行向量组线性相关时，其中至少有一个行向量可由其余的行向量线性表示，这意味着方程组中至少有一个方程可由其余的方程线性表示，通过消元法可将这个方程消掉，即这个方程是“多余”的. 我们研究方程组时，希望去掉“多余”的方程，只保留“最大个数”的线性无关的那些方程，对于增广矩阵就是要保留“最大个数”的线性无关的行向量.

定义 5-3　在向量组V中，若有含r个向量的子向量组线性无关，并且V中任何含$r+1$个向量的子向量组（当V中的向量多于r个时）都线性相关，则把r叫做**向量组V的秩**.

若向量组V的秩为r，则V中含r个向量的线性无关的子向量组叫做V的**极大线性无关组**（简称极大无关组，或称最大无关组）.

注意　向量组 V 的秩反映的是向量组V中所含线性无关向量的最大个数.

由定义 5-3 可知，向量组V线性无关（相关）$\Leftrightarrow$向量组V的秩等于（小于）其所含向量的个数. 根据这一结论，求出向量组的秩即可知道其线性相关性.

只含零向量的向量组的秩规定为零，它没有极大无关组.

对于非零的向量组，它的秩存在且唯一，它的极大无关组存在，但一般不唯一.

由定义 5-3 及定理 5-4 可得下面的定理.

定理 5-7　向量组V中的每个向量都可由其极大无关组唯一地线性表示.

根据定理 5-7，当一个方程组有无穷多个解时，找到该方程组的所有解向量所构成集合的一个极大无关组，就可用它将该方程组的所有解表示出来，这样我们就找到了表达方程组的解的方法.

向量组的线性相关、线性无关、秩和极大无关组的概念对于行向量组和列向量组都适合，可重点掌握列向量组的情况，对于行向量组可仿照列向量组的情况进行讨论，也可通过转置化为列向量组来讨论.

例 5-4　分别求列向量组Ⅰ:$\mathbf{a}_1=[1,1,3]^T,\mathbf{a}_2=[1,0,2]^T,\mathbf{a}_3=[0,1,1]^T,\mathbf{a}_4=[2,1,5]^T$和行向量组Ⅱ：$\mathbf{b}_1^T=[1,1,0,2],\mathbf{b}_2^T=[1,0,1,1],\mathbf{b}_3^T=[3,2,1,5]$的秩和一个极大无关组.

解　（1）显然，向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关. 由

$$\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_4=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$$

及定理 5-3 可知向量组Ⅰ中任何含 3 个向量的子向量组都线性相关，所以它的秩为 2；$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$为它的一个极大无关组.

另外，因为向量组Ⅰ中任何两个向量都线性无关，所以任何两个向量都可作为向量组Ⅰ的一个极大无关组.

（2）显然，$\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$线性无关. 由$\mathbf{b}_3^T=2\mathbf{b}_1^T+\mathbf{b}_2^T$及定理 5-3 可知，$\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T,\mathbf{b}_3^T$线性相关，所以向量组Ⅱ的秩为 2; $\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$为它的一个极大无关组.

一般来说，根据定义 5-3 来求向量组的秩和极大无关组都是比较麻烦的，我们将在 5.3 节中给出一种简便的求法.

思考题 5-1

1.分别写出向量$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{0}$由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示的表达式.

2.若向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 中任何两个向量都线性无关，是否一定有 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关？

3.若 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性相关，则 $\mathbf{a}_1$ 能否由 $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性表示？

4.若 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 和 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 这两个向量组都线性相关，则 $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2$ 是否也线性相关？

5. 若向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关，向量 $\mathbf{a}_{n+1}$ 不能由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示，则向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_{n+1}$ 是线性相关还是线性无关？

习题 5-1

1.判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\mathbf{a}_1=[1,-1,0]^T,\mathbf{a}_2=[2,1,0]^T,\mathbf{a}_3=[3,1,2]^T$；

（2）$\mathbf{b}_1^T=[1,-1,1,2],\mathbf{b}_2^T=[-1,1,1,-1],\mathbf{b}_3^T=[2,-2,0,3],\mathbf{b}_4^T=[1,0,1,3]$.

2.当 k 满足什么条件时，向量组 $\mathbf{a}_1=[1,0,0,k]^T,\mathbf{a}_2=[1,k,0,0]^T$，$\mathbf{a}_3=[0,1,1,0]^T$，$\mathbf{a}_4=[0,0,k,1]^T$ 线性无关？

3.证明：$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 线性无关，并且任意向量 $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^n$ 都能由 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 线性表示.

4.设 n 阶可逆阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$，证明：对于任意 n 元向量 $\mathbf{b}$，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ 都线性相关.

5.设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{B}=\mathbf{PA}$，证明：

（1）若 $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关，则 $\mathbf{B}$ 的列向量组也线性相关；

（2）若 $\mathbf{P}$ 可逆，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组具有相同的线性相关性.

6. 设将 n 阶可逆阵 $\mathbf{A}$ 增加两行后得到的$(n+2)\times n$ 矩阵为 $\mathbf{B}$，证明 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

7.设向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关，向量组 $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 线性相关，证明：

（1）$\mathbf{a}_4$ 能由 $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性表示；

（2）$\mathbf{a}_1$ 不能由 $\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 线性表示.

8.设向量 $\mathbf{b}$ 能由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性表示，但不能由其中任何两个向量线性表示，证明：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关.

9.设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元列向量，k 为正整数，$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 而 $\mathbf{A}^{k}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 证明：$\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

提高题 5-1

1.设 $s < n$，$\mathbf{a}_1 = \left[1, k_1, k_1^2, \cdots, k_1^{n-1}\right]^T, \mathbf{a}_2 = \left[1, k_2, k_2^2, \cdots, k_2^{n-1}\right]^T, \cdots, \mathbf{a}_s = \left[1, k_s, k_s^2, \cdots, k_s^{n-1}\right]^T$，$i \neq j$ 时，$k_i \neq k_j$,证明：向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_s$ 线性无关.

2. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是三元列向量，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$。证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。