2.4 分块三角行列式及方阵乘积的行列式

代万基

数学科学学院

大连理工大学

定理2-1 设A和B分别为m阶和n阶方阵，C为$m\times n$型矩阵，则$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$

证： 根据21页定理1-1及35页性质2-5可得

$A \xrightarrow{\text{倍加行变换}} S$ 上三角阵， $|A| = |S| = s_{11}\cdots s_{mm}$

$B \xrightarrow{\text{倍加行变换}} T$ 上三角阵， $|B| = |T| = t_{11}\cdots t_{nn}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{倍加行变换}} \begin{pmatrix} S & H \\ O & T \end{pmatrix}$ 上三角阵

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & H \\ O & T \end{vmatrix} = s_{11}\cdots s_{mm}t_{11}\cdots t_{nn} = |S|\cdot|T| = |A|\cdot|B|$$

定理2-1的结论可推广到分块下三角行列式和分块对角行列式的情况:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \qquad \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

注意：一般 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$

例：设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

则有$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

但是 $|\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}| = 1$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$$

知识拓展： 下面讨论按副对角线看的分块对角行列式、分块下三角行列式、分块上三角行列式。

例：设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，

证明：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

证：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3n} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

将上面例题的结论加以推广可得下面的定理。

定理 设A为m阶方阵，B为n阶方阵，则$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

类似的还有

$$\begin{vmatrix} O & B \\ A & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$$

$$\begin{vmatrix} D & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$$

下面来讨论方阵乘积的行列式。

定理2-2 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是n阶方阵，则$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$

证明： (1) 由21页定理1-1可知,只用倍加行变换或只用倍加列变换都能把一个方阵化成上三角矩阵。

存在倍加矩阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$和倍加矩阵$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_l$，使得

$\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}$ (做倍加行变换将$\boldsymbol{A}$化成上三角矩阵$\boldsymbol{S}$)

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_l=\boldsymbol{T}$ (做倍加列变换将$\boldsymbol{B}$化成上三角矩阵$\boldsymbol{T}$)

(2) 由性质2-5(倍加变换不改变行列式的值)及例2-2(上三角行列式等于其对角元的乘积)可得

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{S}|=s_{11}\cdots s_{nn}, \qquad |\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{T}|=t_{11}\cdots t_{nn}$$

(3) $$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_l|=|(\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_l)|$$

$$=|\boldsymbol{ST}|=(s_{11}t_{11})\cdots(s_{nn}t_{nn})=s_{11}\cdots s_{nn}t_{11}\cdots t_{nn}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

注： 由第一章例1-4可知，上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵

由定理2-2可得

推论2-5 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，k为正整数，则

$$\left|\boldsymbol{A}^k\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^k.$$

注1：若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵，则$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

证：因为$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|$

所以$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

注2：若A,B不是同阶方阵，则$|AB|$不一定等于$|BA|$

例：设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，

则$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，

$$BA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$|AB|\neq|BA|$$