第9章 二次型与二次曲面

9.1 二次型的概念及标准形

9.1.1 二次型的概念及矩阵形式

定义9-1

关于n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为n元二次型.

系数全为实数的二次型称为实二次型.

我们只讨论实二次型，讲到二次型时均指实二次型.

只含平方项的二次型

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

称为标准二次型.

形如$h(z_1,z_2,\cdots,z_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2$

的二次型称为规范二次型.

例 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2-4x_n^2$,

这是一个标准二次型.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\sqrt{2}x_1)^2+(\sqrt{3}x_2)^2-(2x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=\sqrt{2}x_1 \\ y_2=\sqrt{3}x_2 \\ y_3=2x_3 \end{cases}$,

可化为规范二次型

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

当 $j>i$ 时，令 $a_{ji}=a_{ij}$ ，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

$$\begin{aligned}
&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right) \\
&+x_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right) \\
&+\cdots \\
&+x_n\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}_{\text{为}x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{记为}A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{记为}x}$$

二次型的矩阵形式为

$$\boldsymbol{f\left(x\right)=x^TAx}$$

二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^T Ax$

其中，A 为对称阵，叫做二次型 $f(x)$ 的矩阵.

A 的对角元 a_{ii} 为二次型中 x_i^2 的整个系数，

A 的非对角元 a_{ij} 为二次型中 $x_i x_j$ 的系数的一半。

注意:标准二次型和规范二次型的矩阵都是对角阵.

做下面的规定：以后讲到二次型的矩阵形式时，都假定 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 中的 A 是对称矩阵。

二次型与对称矩阵之间是一一对应的。

二次型的问题与对称矩阵的问题可相互转换。

定义 对称阵A的秩叫做二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$的**秩**.

例9-1 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2-4x_2x_3$的

矩阵形式为 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,

其中, $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

显然,$r(A)=2$. 因此,该二次型的秩为2.

例 设$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,

二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&4\\3&1&3\\-2&3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

9.1.2 线性变换与合同变换

定义9-2

设A和 x 分别是 $m\times n$ 型矩阵和 n 元列向量，把 $y=Ax$ 叫做从 n 元向量x 到 m 元向量 y 的**线性变换**.

当 A 为可逆阵时， $y=Ax$ 叫做**可逆变换**.

当 A 为正交阵时， $y=Ax$ 叫做**正交变换**.

性质9-1

设Q为n阶正交阵，$x_1, x_2 \in R^n$，$y_1 = Qx_1$，$y_2 = Qx_2$，x_1与x_2的夹角为θ，y_1与y_2的夹角为φ，则

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2), \quad \|y_1\| = \|x_1\|, \quad \varphi = \theta.$$

证明： 由Q为正交阵，可得$Q^{\mathrm{T}}Q = E$.

$$(y_1, y_2) = y_1^{\mathrm{T}} y_2 = (Qx_1)^{\mathrm{T}}(Qx_2) = x_1^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q x_2 = x_1^{\mathrm{T}} x_2 = (x_1, x_2),$$

$$\|y_1\| = (y_1, y_1)^{\frac{1}{2}} = (x_1, x_1)^{\frac{1}{2}} = \|x_1\|,$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(y_1, y_2)}{\|y_1\|\|y_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|\|x_2\|}\right) = \theta.$$

正交变换保持向量的内积、长度和夹角不变，因而正交变换保持几何图形不变.

对二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 进行可逆变换 $x=Py$,

$$f(x)=f(Py)=(Py)^{\mathrm{T}}A(Py)=y^{\mathrm{T}}\left(P^{\mathrm{T}}AP\right)y=y^{\mathrm{T}}By$$

得到一个新的二次型 $g(y)=y^{\mathrm{T}}By$，其中 $B=P^{T}AP$.

根据 A 与 B 之间的关系，我们给出下面的定义.

定义9-3 对于 n 阶方阵 A 和 B，若存在可逆阵 P，使 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 则称 A 与 B 合同(也称 A 与 B 相合);
变换 $P^{\mathrm{T}}AP$ 叫做对 A 进行合同变换(也叫做相合变换).

注意： 若 $MAM^{\mathrm{T}}=B$, M 可逆，则 A 与 B 仍然合同。

当 A 为对称阵, $P^{T}AP=B$ 时,

$$B^{\mathrm{T}}=\left(P^{\mathrm{T}}AP\right)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}AP=B$$

B 也是对称阵.

相合变换保持对称性不变

当Q为正交阵时，$Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$

当Q为正交阵时，$Q^{-1}AQ=B \Leftrightarrow Q^{\mathrm{T}}AQ=B$

若Q为正交阵，且$Q^{-1}AQ=B$，则有$Q^{\mathrm{T}}AQ=B$.

这说明若A和B是正交相似的，则A和B也是合同的.

$$
\begin{tikzcd}
f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax \arrow[r, "x=Py"] \arrow[d, leftrightarrow] & g(y)=y^{\mathrm{T}}By \arrow[d, leftrightarrow] \\
A \arrow[r, "P^{\mathrm{T}}AP=B"] & B
\end{tikzcd}
$$

$$(Py)^{\mathrm{T}}A(Py) = y^{\mathrm{T}}By$$

$$P^{T}AP = B$$

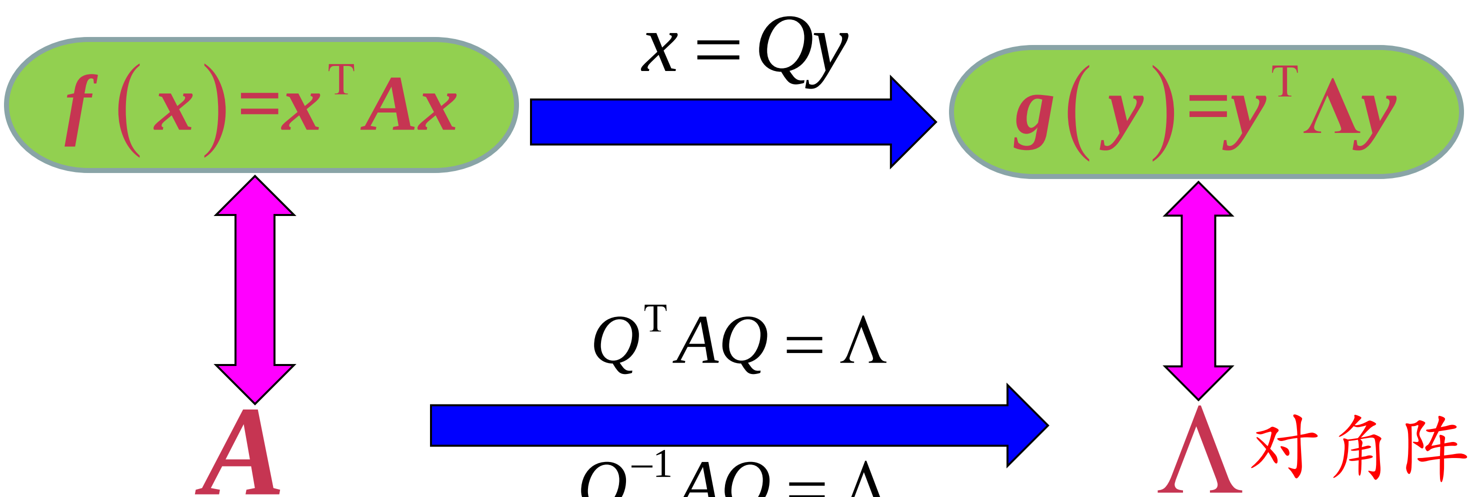
9.1.3 用正交变换化二次型为标准形

目的：寻找正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 化成标准二次型（也称为标准形）.

当 Λ 为对角阵时，二次型 $g(y) = y^{\mathrm{T}}\Lambda y$ 为标准形.

根据定理8-8，对于对称阵 A，一定存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$（即 $Q^{T}AQ = \Lambda$）为对角阵。

这样，正交变换 $x = Qy$ 可将二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 化成标准形 $g(y) = y^{\mathrm{T}}\Lambda y$.



定理 9-1

对于任给的n元二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，总有正交变换$x=Qy$，把$f(x)$化为标准形

$$g(y)=f(Qy)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值.

注意：

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$在标准形中的排列次序与它们对应的特征向量在正交阵$Q$中的排列次序是一一对应的.

例9-2

求一正交变换 $x=Qy$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形.

解：①二次型的矩阵形式为$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

②按例8-9的方法，可求得正交阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使$Q^{-1}AQ=diag(1,1,-2)$

即$Q^{\mathrm{T}}AQ=diag(1,1,-2)$

③ 正交变换$x=Qy$ 将该二次型化为标准形

$$g(y)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$

下面再做一下说明:

$$Q^{-1}AQ = diag(1,1,-2)$$

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = diag(1,1,-2)$$

做正交变换 $x = Qy$,

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax = (Qy)^{\mathrm{T}}A(Qy) = y^{T}(Q^{\mathrm{T}}AQ)y$$

$$= (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2.$$

9.1.4 用配方法化二次型为标准形

注意： 配方法所用的变换不是正交变换，是普通的可逆变换，不能保持几何图形不变。

如果要求用正交变换化二次型为标准形，是不能用配方法的。

例9-3 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$，求一可逆变换，将该二次型化为标准形.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\left(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3\right)+2x_2^2+3x_3^2+8x_2x_3\\&=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+3x_3^2+8x_2x_3\\&=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+6x_2x_3+2x_3^2\\&=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+3x_3\right)^2-7x_3^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=\qquad x_2+3x_3,\\y_3=\qquad\qquad\quad x_3\end{cases}$

则把所给二次型化为标准形

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-7y_3^2.$$

二次型中不含有平方项

例9-4 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,

求一可逆变换，将该二次型化为标准形.

解：令
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

可得含有平方项的二次型

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2y_2^2+4y_2y_3,$$
$$=2y_1^2-2(y_2-y_3)^2+2y_3^2.$$

9.1.5 惯性定理

对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

例9-2，用正交变换法化为标准形：

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$

例9-4，用配方法化为标准形：

$$h(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$$

不同方法得到的标准形一般是不一样的。

但是，标准形中平方项的项数相同，正平方项、负平方项的个数也对应相同。

若可逆变换 $x = Py$ 将二次型 $f(x) = x^T Ax$ 化成标准形 $g(y) = y^T By$，则 $P^T AP = B$，B 为对角阵，且 P 为可逆阵.

$$
\begin{aligned}
&\text{标准形 } g(y) \text{ 中平方项的个数} \\
&= B \text{ 中非零对角元的个数} \\
&= r(B) \\
&= r(A)
\end{aligned}
$$

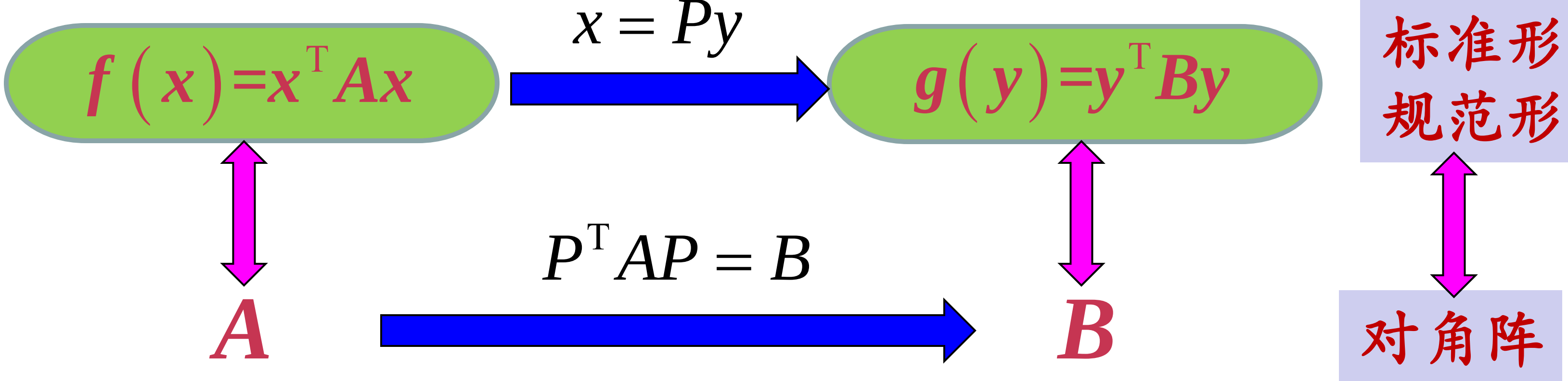
注：由 $P^T AP = B$ 及 P 可逆，可知 $r(B) = r(A)$.

定理9-2（惯性定理） 用任何可逆变换$x=Py$将n元二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 所化成的标准形的正、负平方项的项数都对应相等.

用任何可逆变换将一个给定的二次型所化成的标准形的正、负平方项的项数都是固定不变的。

定义9-4 一个二次型的标准形的正、负平方项的项数分别叫做该二次型的正、负惯性指数.

推论9-1 若二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$的正、负惯性指数分别为p和q，则存在可逆变换$x=Py$，将该二次型化为规范形$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$.



定理9-2′（实对称阵的惯性定理） 用任何相合变换将实对称阵A所化为的对角阵的正、负对角元的个数都对应相等.

定义9-4′ 与实对称阵A相合的对角阵的正、负对角元的个数分别叫做A的**正、负惯性指数**.

推论9-1′ 若实对称阵A的正、负惯性指数分别为p和q，则A相合于对角阵$diag\left(E_p,-E_q,O\right)$，即存在可逆阵$P$，使 $P^{\mathrm{T}}AP=diag\left(E_p,-E_q,O\right)$，$diag\left(E_p,-E_q,O\right)$称为实对称阵$A$的**相合标准形**.

注意 二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$的正、负惯性指数与实对称阵A的正、负惯性指数对应相等。

正、负惯性指数的求法:

方法1 用配方法将二次型化成标准形，正、负平方项的个数就是正、负惯性指数.

方法2 用特征值做。对称阵A的正、负特征值的个数就是正、负惯性指数.

例 设三阶实对称阵A的特征值为$2, -3, 0$.

证明：存在可逆矩阵P,使$P^T AP = diag(1,-1,0)$.

证明 由A实对称阵可知，存在正交阵Q，使

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \; Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，则有 $D^T Q^T AQD = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

再令$P = QD$，则有$P^T AP = diag(1,-1,0)$.

例 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，求$A$的相合标准形.

解 $$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

特征值为 $\lambda_1=4$, $\lambda_2=\lambda_3=-2$.

A的相合标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

定理 两个同阶实对称阵 A 与 B 相合的充要条件是 A 与 B 的正、负惯性指数对应相等。

证明：必要性. 设 $P^{\mathrm{T}}AP = B$，$Q^{\mathrm{T}}BQ = diag\left(E_p, -E_q, O\right)$，$P$ 和 Q 都可逆。则有 $\left(PQ\right)^{\mathrm{T}} A\left(PQ\right) = diag\left(E_p, -E_q, O\right)$

所以 A 和 B 的正、负惯性指数对应相等.

充分性. 设 A 与 B 的正、负惯指数对应相等，为 p 和 q.

根据推论9-1′，存在可逆阵 P_1 和 P_2，使

$$P_1^{\mathrm{T}}AP_1 = diag\left(E_p, -E_q, O\right) = P_2^{\mathrm{T}}BP_2$$

$$(P_2^{-1})^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 P_2^{-1} = B, \quad (P_1P_2^{-1})^{\mathrm{T}} A (P_1P_2^{-1}) = B$$

所以 A 与 B 相合.

定理 相合变换保持实对称阵的正、负惯性指数不变。