第五章　无穷级数

一、常数项级数的收敛判别法

二、求幂级数收敛域的方法

三、幂级数和函数的求法

四、函数的幂级数与 Fourier 级数展开法

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}} S(x) \quad \text{(在收敛域内进行)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \begin{cases} \text{当 } x = x_0 \text{ 时为数项级数;} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n x^n \text{ 时为幂级数;} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{cases}$$

$(a_n, b_n$ 为Fourier系数) 时, 为Fourier级数.

基本问题: 判别敛散性; 求收敛域;

求和函数; 级数展开.

一、常数项级数的收敛判别法

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数收敛判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ —不满足→ 发 散

↓ 满足

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ → 其他方法：
- 比较判别法
- 积分判别法
- 部分和极限

$\rho < 1$ → 收 敛

$\rho > 1$ → 发 散

3. 任意项级数收敛判别法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$
\begin{cases}
\text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{收敛，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\
\text{若} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{发散，称} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛}
\end{cases}
$$

Leibniz判别法：

$$
\left.\begin{array}{l}
u_n \geq u_{n+1} > 0 \\
\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0
\end{array}\right\} \longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{收敛}
$$

1. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2};\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n};\qquad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}\ (a>0,\ s>0).$$

---

(1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时, 有

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{n(1+\varepsilon)}$$

因调和级数发散, 据比较判别法, 原级数发散 .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$: 利用比值判别法, 可知原级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$: 用比值法, 可判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛,

再由比较法可知原级数收敛.

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}$: 因 n 充分大时 $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln^{10} n}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

∴原级数发散.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ $(a>0, s>0)$: 用根值判别法可知:

$a<1$ 时收敛; $a>1$ 时发散.

$a=1$ 时, 与 p 级数比较可知 $\begin{cases} s>1 \text{ 时收敛;} \\ s\le 1 \text{ 时发散.} \end{cases}$

2. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^{p}}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\frac{n+1}{n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

---

(1) $p>1$ 时, 绝对收敛; $0<p\le 1$ 时, 条件收敛;

$p\le 0$ 时, 发散.

(2) 因各项取绝对值后, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n+1}}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$

因 $u_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(1+\frac{1}{n})$ 单调递减，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由Leibniz判别法知级数收敛；

但 $$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$$

所以原级数仅条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

因 $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\dfrac{(n+2)!}{(n+2)^{n+2}}}{\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}}$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$$

所以原级数绝对收敛 .

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

$\because 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n \quad (n=1,2,\cdots)$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛 $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n - a_n) + a_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛 .

因 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$, ∴存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时

$$u_n^2 < u_n\ ,\quad v_n^2 < v_n$$

又因

$$(u_n+v_n)^2 \le 2(u_n{}^2+v_n{}^2) < 2(u_n+v_n) \quad (n>N)$$

利用收敛级数的性质及比较判敛法知结论正确.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

对正项级数,由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,但对任意项级数却不一定收敛．例如,取

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

二、求幂级数收敛域的方法

- 标准形式幂级数: 先求收敛半径 R，再讨论 $x = \pm R$ 处的敛散性 .

- 非标准形式幂级数 $\begin{cases} \text{通过换元转化为标准形式} \\ \text{直接用比值法} \end{cases}$

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x|^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n}|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2}$

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛;

当 $x=\pm\sqrt{2}$时，一般项 $|u_n|=n$ 不趋于0，级数发散;

故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

根据Abel 定理可知, 级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散．故收敛半径为 $R = |x_0|$.

三、幂级数和函数的求法

- 求部分和式极限
- 初等变换: 分解、套用公式
- 逐项求导、逐项积分（在收敛区间内）

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[rr, "\text{逐项求导或求积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n \arrow[d, "\text{求和}"] \\
S(x) & & S^*(x) \arrow[ll, "\text{对和式积分或求导}"]
\end{tikzcd}$$

- 常数项级数求和 $\begin{cases} \text{直接求和: 直接变换, 求部分和等} \\ \text{间接求和: 转化成幂级数求和, 再代值} \end{cases}$

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$ 的和函数.

易求出级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}t^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}t^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}x\sin x$$

$$\therefore\quad S(x) = \left(\frac{1}{2}x\sin x\right)' = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

2. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

(1) 易求出级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{2(n-1)}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2(n-1)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}\qquad\left(0<\frac{x^2}{2}<1\right)$$

$$\therefore\ S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$ 显然 $x=0$ 时该式也成立.

故和函数为 $S(x)=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 易求出级数的收敛域为 $[-1,1]$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=S_1(x)-\frac{1}{x}S_2(x),\qquad x\neq 0$$

$$S_1'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\qquad x\in(-1,1)$$

$$\therefore\ S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)\qquad \therefore S_1(x)=-\ln(1-x)$$

$$S_2'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\qquad x\in(-1,1)$$

$$\therefore S_2(x)-S_2(0)=\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=-x-\ln(1-x),\ S_2(x)=-x-\ln(1-x)$$

$$\therefore S(x)=S_1(x)-\frac{1}{x}S_2(x)=-\ln(1-x)+1+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x),\qquad 0<|x|<1$$

于是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = 1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)$，$x\in[-1,0)\cup(0,1)$

显然 $S(0)=0$, $\displaystyle S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

故

$$S(x)=\begin{cases} 1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

3. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和 .

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[(2n+1)+1]}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}}+\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 1+\sin 1]$$

四、函数的幂级数和 Fourier 级数展开法

函数的幂级数展开法

- 直接展开法 —— 利用Taylor 公式
- 间接展开法 —— 利用已知展式的函数及幂级数性质

1. 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$$

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{(2-t)^2}\mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{\mathrm{d}(2-t)}{(2-t)^2}=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad x\in(-2\,,2)$$

$$\therefore f(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}},\quad x\in(-2\,,2)$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，将$f(x)$展开成 x 的幂级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

$$\therefore \arctan x-\arctan 0=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

$$\therefore\quad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1,1]$$

于是当 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ 时,

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}}$$

$$=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$\therefore\ f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] x^{2n}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, \qquad x \in [-1,1]$$

$$\because\ f(1) = \frac{1+1}{1} \arctan 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2},$$

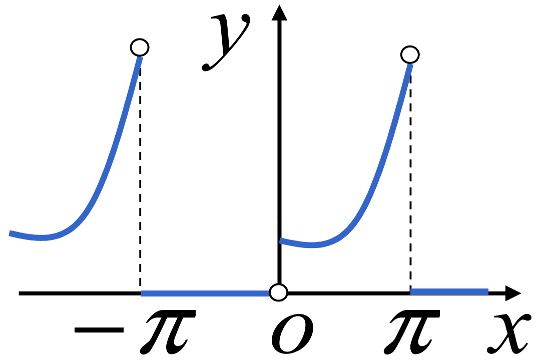
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

函数的Fourier级数展开法

系数公式；收敛定理；延拓方法

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ e^x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$

将其展为Fourier 级数 .



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi}\frac{1-e^{\pi}(-1)^n}{1+n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

$$(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

如何求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}$ 的和?

根据收敛定理，当 $x = 0$ 时，有

$$\frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1}{2}$$