

## 第 8 章练习题

### 一、单选题（共 9 题，27.1 分）

1、

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是矩阵 $A$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2$ ,  
则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是( )

- A、  $\lambda_1 \neq 0$
- B、  $\lambda_1 = 0$
- C、  $\lambda_2 \neq 0$
- D、  $\lambda_2 = 0$

正确答案: C

解析:

2、

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是矩阵 $A$ 的两个不同的特征值,  
对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 是 $A$ 的特征向量的充分必要条件是( )

- A、  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$
- B、  $k_1 \neq 0, k_2 = 0$
- C、  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$
- D、  $k_1, k_2$ 有且只有一个不为零

正确答案: D

3、 设  $A$  为 3 阶方阵, 已知  $|A - E| = 0, |A - 2E| = 0, |A - 3E| = 0$ , 那么  $|A - 4E| =$

- A、  $\frac{1}{6}$
- B、  $-\frac{1}{6}$
- C、  $-6$
- D、  $6$

正确答案: C

4、 设  $A$  为 3 阶方阵,  $p_1, p_2, p_3$  线性无关,  $Ap_1 = p_1, Ap_2 = p_2, Ap_3 = -p_3$ , 若  $P^{-1}AP = \text{diag}(-1, 1, 1)$ , 那么相似变换矩阵  $P$  可取为

- A、  $(p_1, p_2, p_3)$
- B、  $(p_3, p_2 + p_3, p_1)$
- C、  $(-p_3, p_2 - 3p_1, p_1 + 2p_2)$
- D、  $(p_1 + p_3, p_2, p_1 + 2p_2)$

正确答案： C

5、设 3 阶方阵 A 的特征值是 0, 1, -1, 则 ( ) 不正确

A、 A 不可逆

B、  $\text{tr}(A)=0$

C、  $Ax=0$  的基础解系只含一个向量

D、 三个特征值的特征向量是正交的

正确答案： D

解析：

6、设 3 阶方阵 A 有一个特征值为 2, 并且  $r(A + 2E) = 1$ , 那么  $\det(A) =$

A、 8

B、 -8

C、 4

D、 -4

正确答案： A

7、设方阵 A 与  $B=\text{diag}(1, 4, 3)$  相似, 那么  $\det(A-2E)=$

A、 2

B、 -2

C、 3

D、 -3

正确答案： B

8、设 A 是三阶矩阵, x 是三元列向量,  $x, Ax, A^2x$  线性无关,  $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ , 则属于 -3 的特征向量是

A、  $x$

B、  $Ax + 2x$

C、  $A^2x - Ax$

D、  $A^2x + 2Ax - 3x$

正确答案： C

9、设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = 0$ , 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

A、  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

B、  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C、 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

D、 $\begin{pmatrix} & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

正确答案： D

## 二、填空题（共 3 题，8.1 分）

1、若三阶方阵 A 有一个二重特征值-2，并且  $r(A+E)=2$ ，那么  $|A| =$  \_\_\_\_\_，  $tr(A) =$  \_\_\_\_\_

正确答案：

第 1 空：

-4； 负 4； 负四

第 2 空：

-5； 负 5； 负五

已知  $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  与矩阵  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  相似，

2、 求  $x =$  \_\_\_\_\_，  $y =$  \_\_\_\_\_

正确答案：

第 1 空：

4； 四

第 2 空：

1， 一

3、 设 A 是 8 阶实对称阵，1 是单特征值，2 是 3 重特征值，-2 是 4 重特征值，那么  $r(A-E) =$  \_\_\_\_\_；

$r(2E+A) =$  \_\_\_\_\_；

$r(4E-A^2) =$  \_\_\_\_\_；  $r(2E-A^2) =$  \_\_\_\_\_

正确答案：

第 1 空：

7

第 2 空:

4

第 3 空:

1

第 4 空:

8

### 三、判断题（共 24 题，64.8 分）

1、方阵 A 的两个不同的特征值可以有相同的特征向量。

正确答案： 错误

2、方阵 A 经过初等变换得到方阵 B，A 和 B 的秩与特征值都相同。

正确答案： 错误

3、若 A 和 B 是同阶方阵，则 A 和 B 的所有特征值的和等于 A+B 的所有特征值的和。

正确答案： 正确

4、若 A 只有零特征值，那么 A 是零矩阵。

正确答案： 错误

5、 $2n$  阶分块对角阵  $C = \text{diag}(A, B)$  的特征值是  $n$  阶方阵 A 和 B 的全部特征值。

正确答案： 正确

6、 $\lambda$  和  $\mu$  分别是方阵 A 和 B 的特征值，那么  $\lambda + \mu$  是 A+B 的特征值。

正确答案： 错误

7、若  $\alpha$  和  $\beta$  是 A 的两个不同特征值所对应的特征向量，那么  $\alpha + \beta$  也是 A 的特征向量。

正确答案： 错误

8、若  $p_1$  和  $p_2$  是 A 的特征值  $\mu$  对应的特征向量，那么对任意实数  $k_1$  和  $k_2$ ， $k_1 p_1 + k_2 p_2$  仍是  $\mu$  对应的特征向量。

正确答案： 错误

9、若  $|E - A^2| = 0$ ，那么 A 的特征值只能是  $\pm 1$ 。

正确答案： 错误

10、若  $A^2 + A + E = O$ ，则 A 没有实特征值。

正确答案： 正确

11、若方阵 A 可以相似对角化，那么相似标准形是唯一的。

正确答案： 错误

12、若方阵 A 可相似对角化，相似变换矩阵 P 是不唯一的。

正确答案： 正确

13、如果 A 和 B 中有一个是可逆阵，那么 AB 与 BA 相似。

正确答案： 正确

14、相似的矩阵特征值相同，所以特征值相同的矩阵也一定相似。

正确答案： 错误

15、方阵 A 的秩等于其非零特征值的个数。

正确答案： 错误

16、对角元互异的上三角阵是可相似对角化矩阵。

正确答案： 正确

17、
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$
 相似

正确答案： 正确

18、
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 相似

正确答案： 错误

19、
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 相似

正确答案： 正确

20、
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
 相似

正确答案： 错误

21、实对称阵 A 的非零特征值的个数是  $r(A)$ 。

正确答案： 正确

22、若 A 不是实对称阵，也能用正交相似变换化为对角阵。

正确答案： 错误

23、将实对称阵 A 的 k 重特征值  $\lambda$  的 k 个线性无关的特征向量正交化，得到的 k 个正交向量仍然是  $\lambda$  对应的特征向量。

正确答案： 正确

24、两个实对称阵相似的充要条件是特征值相同。

正确答案： 正确