第 4 章　　　　空间的平面与直线

解析几何学是用代数的方法研究几何问题的科学，它的内容非常丰富，在自然科学和应用科学中有着广泛的应用。

本书只介绍空间解析几何的一些基本知识，为学习多元微积分和物理等后续课程以及培养形象思维能力打下基础。

与平面解析几何类似，空间解析几何通过空间直角坐标系将空间的点与坐标一一对应，把空间的图形与代数方程相对应，从而可以用代数的方法来研究几何问题，当然也可以用几何的方法来研究代数问题。

本书对空间解析几何的内容分两部分介绍。在第 9 章研究空间的曲面与曲线。本章以向量为工具研究空间的平面与直线。首先介绍向量的基本概念、线性运算、数量积、向量积和混合积等向量代数知识，然后用它们来建立空间的平面和直线的方程，并讨论平面和直线相互间的位置（包括夹角和距离）关系。

4.1 向量与空间直角坐标系

在高中大家都学过向量，本节主要介绍向量的基本概念、向量的线性运算、空间直角坐标系、向量的坐标及点的坐标。

4.1.1 向量的基本概念

定义 4-1　一个既有大小又有方向的量叫做**向量（也称为矢量）**，用一个上面加箭头的字母表示，例如$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{n}$，$\vec{s}$，$\vec{F}$等。

由于向量具有大小和方向两个要素，通常用几何中的有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，以 A 为始点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$.

实际问题中的向量，有些与始点有关，有些与始点无关，与始点无关的向量叫做**自由向量**，后面我们只研究自由向量.

若向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的大小相等且方向相同，则称向量$\vec{a}$和$\vec{b}$**相等**，记作$\vec{a}=\vec{b}$．也就是说，经过平移后能完全重合的两个向量称为相等的向量. 若向量$\vec{b}$的大小与$\vec{a}$的大小相同，但方向相反，则$\vec{b}$叫做$\vec{a}$的**反向量**，记作$\vec{a}=-\vec{b}$。

向量的大小叫做**向量的长度**（也称为**模**）．向量$\vec{a}$的长度用$|\vec{a}|$表示.

长度为 1 的向量叫做**单位向量**.

长度为零的向量叫做**零向量**，记作$\vec{0}$．由于零向量是一个始点与终点重合的特殊向量，因此它的方向可看作是任意的，使用时可随意选取.

对于向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，将它们平移使始点重合。把$\vec{a}$和$\vec{b}$的正向之间不大于π的角叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**夹角**.

向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**平行和垂直**分别用$\vec{a} \parallel \vec{b}$和$\vec{a} \perp \vec{b}$表示.

由于零向量的方向可以随意选取，因此零向量与任何向量都平行，也与任何向量都垂直.

因为将两个平行的向量平移到始点重合时，这两个向量在一条直线上，所以也把平行的向量称为**共线向量**.

如果三个向量都平行于同一个平面，那么将它们平移使之始点重合后，这三个向量就在一个平面上。因此，把平行于同一个平面的向量叫做共面向量。

请注意，上述向量的“共线”和“共面”是符合实际需要的数学概念，与直观上的共线（即在一条直线上）和共面（即在一个平面上）有所差异，其原因就在于所研究的向量是自由向量.

4.1.2 向量的线性运算及投影

定义 4-2　向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和记作$\vec{a}+\vec{b}$. 规定$\vec{a}+\vec{b}$是按“三角形法则”或“平行四边形法则”所确定的向量，即

（1）三角形法则：作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，　$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$（见图 4.1)。

（2）平行四边形法则：设$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，　$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 *OACB*，则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$（见图 4.2）。

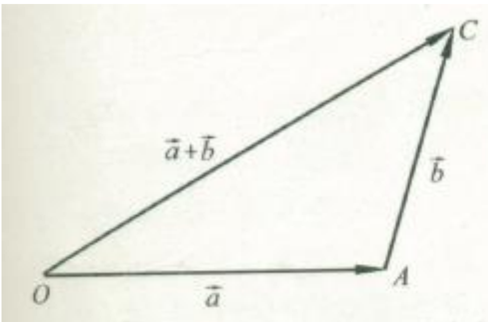

图 4.1

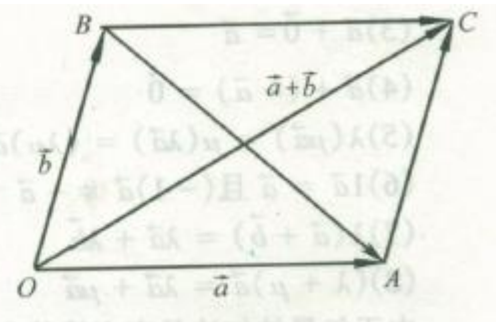

图 4.2

规定$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，它是一个以$\vec{b}$的终点为始点，$\vec{a}$的终点为终点的向量（见图 4.2 中的$\overrightarrow{BA}$）.

定义 4-3　数λ与向量$\vec{a}$的乘积记作$\lambda\vec{a}$，规定$\lambda\vec{a}$是一个向量，它的长度为

$$\left|\lambda\vec{a}\right|=\left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|.$$

它的方向当λ>0 时与$\vec{a}$相同；当λ<0 时与$\vec{a}$相反；当λ=0 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，其方向任意。

向量的加法和向量与数的乘法这两种运算统称为**向量的线性运算。**

设λ和μ是实数，$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$是任意三个向量。由定义容易验证向量的线性运算具有下

列 8 条性质：

（1）$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

（2）（$\vec{a}+\vec{b}$）$+\vec{c}=\vec{a}+$（$\vec{b}+\vec{c}$）；

（3）$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

（4）$\vec{a}+$（$-\vec{a}$）$=\vec{0}$；

（5）λ（$\mu\vec{a}$）$=\mu$（$\lambda\vec{a}$）$=$（$\lambda\mu$）$\vec{a}$；

（6）$1\vec{a}=\vec{a}$ 且（-1）$\vec{a}=-\vec{a}$；

（7）$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；

（8）$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

由于向量的加法具有交换律和结合律，因此三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的和可简记为$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. 先作出向量$\vec{a}$，然后以$\vec{a}$的终点为始点作出向量$\vec{b}$，再以$\vec{b}$的终点为始点作出向量$\vec{c}$，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$是一个以$\vec{a}$的始点为始点，以$\vec{c}$的终点为终点的向量．推广到一般情况，n 个向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$（$n\geq 2$）之和为$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$，它是一个以$\vec{a}_1$的始点为始点、以$\vec{a}_n$的终点为终点的向量.

当$\vec{b}\neq\vec{0}$时，与$\vec{b}$同方向的单位向量为$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

设向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为θ且$\vec{b}\neq\vec{0}$，把$|\vec{a}|\cos\theta$叫做**向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影**，记作$(\vec{a})_{\vec{b}}$或$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$，即

$$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta.$$

把$(\vec{a})_{\vec{b}}\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$叫做向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量（见图 4.3).

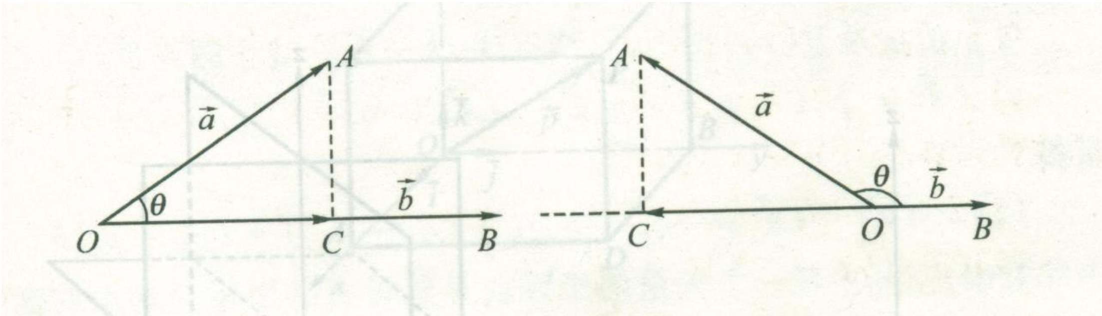

图 4.3

设$\vec{c}\neq\vec{0}$，可以验证，向量的投影具有下列性质：

（1）若$\vec{a}=\vec{b}$，则$\left(\vec{a}\right)_{\vec{c}}=\left(\vec{b}\right)_{\vec{c}}$；

（2）$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，都有$\left(\lambda\vec{a}\right)_{\vec{c}}=\lambda\left(\vec{a}\right)_{\vec{c}}$；

（3）$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_{\vec{c}}=\left(\vec{a}\right)_{\vec{c}}+\left(\vec{b}\right)_{\vec{c}}$.

4.1.3 空间直角坐标系

在平面解析几何中，通过建立的平面直角坐标系，将平面上的点与坐标一一对应，就能用代数的方法来讨论平面上几何图形的性质.我们将上述思想推广,先建立空间直角坐标系。

在空间选定一点 O 作为原点，过 O 点作三个两两垂直的数轴．这三个数轴统称为**坐标轴**，分别用 x 轴、y 轴和 z 轴表示，它们的正方向按照 x 轴、y 轴和 z 轴的次序符合右手法则（**右手法则**指的是，将右手的四指从 x 轴的正向以小于 π 的角度朝 y 轴的正向转动握拳，大拇指所指方向定为 z 轴的正向）．由原点 O 和这三个坐标轴所组成的系统叫做**空间直角坐标系**，简称“$Oxyz$ 坐标系”（图 4.4).

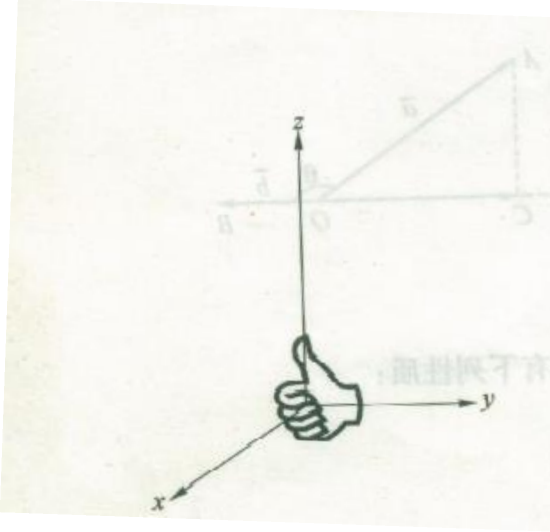

图 4.4

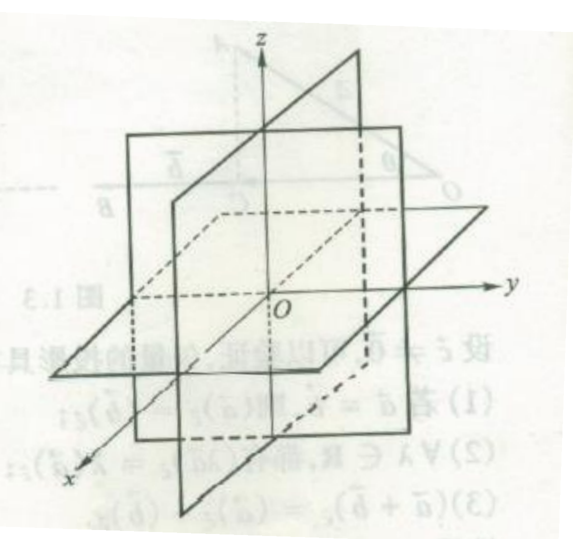

图 4.5

在空间直角坐标系中，每两个坐标轴都决定一个平面，分别称为 Oxy 面、Oyz 面和 Ozx

面，统称为**坐标面**。

如图 4.5 所示，三个坐标面把整个空间分成八个部分，每一个部分称为一个卦限. 在 Oxy 面的上方有四个卦限，把含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其它三个卦限按逆时针依次称为第二、三、四卦限．在 Oxy 面的下方也有四个卦限，在第一卦限下方的卦限称为第五卦限，其它按逆时针依次称为第六、七、八卦限。

4.1.4 向量的坐标与点的坐标

在 $Oxyz$ 坐标系中，分别与 x 轴、y 轴和 z 轴同向的单位向量叫做这个**坐标系的基本向量**，专用 $\vec{i},\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示.

设 $\vec{p}$ 为空间中任一给定的向量，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，过 P 点作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴，它们与这三个坐标轴的交点依次记为 A,B 和 C（见图 4.6）.

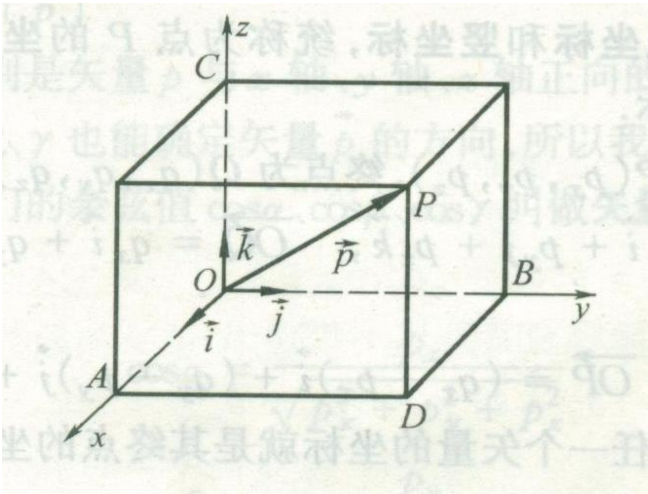

图 4.6

设向量 $\overrightarrow{OP}$ 在三个坐标轴上的投影依次为 p_x、 p_y、 p_z，由 $PA\perp x$ 轴、$PB\perp y$ 轴、$PC\perp z$ 轴可知，$\overrightarrow{OP}$ 在这三个坐标轴上的投影向量依次为

$$\overrightarrow{OA}=p_x\vec{i},\qquad \overrightarrow{OB}=p_y\vec{j},\qquad \overrightarrow{OC}=p_z\vec{k}$$

由于 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OC}$，因此

$$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}.$$

不难看出，在 $Oxyz$ 坐标系中，向量 $\vec{p}$ 与有序数组 p_x、 p_y、 p_z 一一对应.

把 p_x、 p_y、 p_z 叫做向量 $\vec{p}$ 分别在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的**坐标**.

把$\mathbf{p}=\left[p_x, p_y, p_z\right]^T$叫做$\vec{p}$ **的坐标向量**,也称为**代数向量**。把$\vec{p}$叫做**几何向量。$\mathbf{p}$**是$\vec{p}$的代数表示,而$\vec{p}$是$\mathbf{p}$的几何表示，在一个给定的坐标系下，二者一一对应．鉴于此,我们把二者同称为向量.

在后面根据问题的需要，我们将用$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$和$\mathbf{p}=\left[p_x, p_y, p_z\right]^T$中的一个来表示向量。

下面我们用向量的坐标来表示向量的长度.

设非零向量$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ (见图 4.6). 利用勾股定理不难得出

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2.$$

于是，$\vec{p}$的长度为

$$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_Z^2}\,.$$

对于上面的向量$\vec{p}$, 它的方向可用与其同向的单位向量来表示, 即

$$\frac{\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|}=\frac{p_x}{\left|\vec{p}\right|}\vec{i}+\frac{p_y}{\left|\vec{p}\right|}\vec{j}+\frac{p_z}{\left|\vec{p}\right|}\vec{k}\,.$$

由向量的投影的定义可得

$$\frac{\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|}=(\cos\alpha)\vec{i}+(\cos\beta)\vec{j}+(\cos\gamma)\vec{k}\,,$$

其中α、β、γ分别是向量$\vec{p}$与x轴、y轴和z轴正向的夹角.

因为用α、β、γ也能确定向量$\vec{p}$的方向，所以我们把它们叫做**向量$\vec{p}$的方向角**，它们的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫做**向量$\vec{p}$的方向余弦**，其中

$$\cos\alpha=\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_Z^2}}\,,$$

$$\cos\beta=\frac{p_y}{\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_Z^2}}\,,$$

$$\cos\gamma=\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_Z^2}}\,.$$

显然,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\,.$$

这表明非零向量的三个方向角(或方向余弦)不是独立的, 它们必须满足上述关系式.

下面我们来研究空间中点的坐标及两点之间的距离。

对于空间中任一给定点 P ,由于点 P 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应，把向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 p_x 、 p_y 、 p_z 依次称为点 P 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**,并用 $P(p_x, p_y, p_z)$ 表示。

对于始点为 $P(p_x, p_y, p_z)$ 、终点为 $Q(q_x, q_y, q_z)$ 的向量 $\overrightarrow{PQ}$ ，由

$$\overrightarrow{OP} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}, \qquad \overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k},$$

可得

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (q_x - p_x)\vec{i} + (q_y - p_y)\vec{j} + (q_z - p_z)\vec{k}.$$

由此看出,空间中任一向量的坐标就是其终点的坐标与始点的坐标之差.

把两点 $P(p_x, p_y, p_z)$ 和 $Q(q_x, q_y, q_z)$ 的**距离**记作 $d(P,Q)$. 显然

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2}.$$

对于特殊的点, 其坐标也有相应的特点.

不难得出,点 P 在坐标轴或坐标面上 $\Leftrightarrow$ 点 P 的三个坐标中至少有一个为零. 具体情况有 7 种, 只列 3 种, 其余 4 种可类似得出.

（1）点 P 为坐标原点 $\Leftrightarrow$ P 的三个坐标均为零.

（2）点 P 在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ P 的纵坐标和竖坐标均为零.

（3）点 P 在 Oxy 面上 $\Leftrightarrow$ P 的竖坐标为零.

例 4−1 求点 $P(1,2,0)$ 和点 $Q(2,1,\sqrt{2})$ 的距离 $d(P,Q)$, 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的长度、方向余弦、方向角, 以及与其同向的单位向量.

解 $$\overrightarrow{PQ} = (2-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (\sqrt{2}-0)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 2,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = -\frac{1}{2},\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{2\pi}{3},\ \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

与 $\overrightarrow{PQ}$ 同向的单位向量为

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$$

思考题 4-1

1. 以下结论对不对？为什么？

(1) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 在一条直线上；

(2) 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面,则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 在一个平面上；

(3) 若 $\left(\vec{a}\right)_{\vec{c}}=\left(\vec{b}\right)_{\vec{c}}$（其中 $\vec{c}\neq\vec{0}$），则 $\vec{a}=\vec{b}$.

2．一个向量的方向可用几种方法表示？

习题 4-1

1. 判断下列等式何时成立：

（1）$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;

（2）$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

（3）$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$;

（4）$\vec{a}/\left|\vec{a}\right|=\vec{b}/\left|\vec{b}\right|$.

2．设 M 是线段 AB 的中点, O 是空间任一点，证明：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

3．设两个不共线的向量为 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，求 $\angle AOB$ 角平分线上的一个单位向量.

4．在同一个空间直角坐标系下,标出以下各点：

$$A(2,4,-1),\ B(-2,4,1),\ C(0,1,2),\ D(0,0,-5),$$

并求点 A 关于 Oxy 面的对称点的坐标，点 B 关于 y 轴的对称点的坐标.

5．在空间直角坐标系下，指出下列点所在的卦限.

$$A(-1,2,3),\ B(2,3,-4),\ C(2,-3,-4),\ D(-2,-3,1).$$

6．设 $abc\neq 0$，求点 (a,b,c) 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点 O 的对称点的坐标.

7．设 $abc\neq 0$，从点 (a,b,c) 分别作各坐标轴或各坐标面的垂线，写出各垂足的坐标.

8．已知向量 $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$， $\vec{b}=-6\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$， $\vec{c}=-3\vec{j}-4\vec{k}$，求 $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$.

9．已知点 $A(3,5,7)$ 和点 $B(0,1,-1)$，求点 A 关于点 B 的对称点 C 的坐标.

10．在 Oyz 面上，求一点 M，使它到 $A(3,1,2), B(4,-2,-2), C(0,5,1).$ 的距离相等.

11．求向量 $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ 的长度和方向余弦.

4.2 数量积、向量积和混合积

在本节将介绍向量的数量积、向量积以及混合积这三种运算，研究它们的几何意义、性质和在空间直角坐标系中的坐标表达式，并由此研究向量间的关系.

4.2.1 数量积

在物理中，物体在与水平线成 θ 角的力 $\vec{F}$ 的作用下，若产生水平位移 $\vec{s}$，则力 $\vec{F}$ 对物体所做的功为

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta.$$

我们将这个求功的运算抽象成如下的概念：

定义 4-4　两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**（也称为**点乘积**）是一个数，记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$. 规定

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

根据定义 4-4，可知

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

这是数量积的物理定义.

数量积与向量的投影有着下面的联系:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{b}|(\vec{a})_{\vec{b}}, & \text{当}\vec{b}\neq\vec{0}\text{时};\\ |\vec{a}|(\vec{b})_{\vec{a}}, & \text{当}\vec{a}\neq\vec{0}\text{时}.\end{cases}$$

数量积具有下列性质：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0, \vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$；

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

（3）$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

由数量积的定义容易验证（1）、（2）和（3）成立. 下面证明（4）也成立.

证 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时,（4）显然成立.当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时，由向量的投影的性质得出

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=\left|\vec{c}\right|(\vec{a}+\vec{b})_{\vec{c}}=\left|\vec{c}\right|\left[(\vec{a})_{\vec{c}}+(\vec{b})_{\vec{c}}\right]\\&=\left|\vec{c}\right|(\vec{a})_{\vec{c}}+\left|\vec{c}\right|(\vec{b})_{\vec{c}}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

因此（4）成立.

下面我们利用数量积的性质，导出数量积在空间直角坐标系中的坐标表达式.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，由

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1，$$

可得

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ ,\end{aligned}$$

即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

设上面的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，当 $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\neq 0$ 时，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ 可得，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

上式是求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的重要公式。

例 4-2 设 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j},$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ，以及向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影和投影向量.

解 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times1+(-2)\times0=3;$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3,\text{同理}\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2};$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{3}{3\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\theta=\frac{\pi}{4};$$

$$(\vec{a})_{\vec{b}}=\left|\vec{a}\right|\cos\theta=\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为

$$(\vec{a})_{\vec{b}}\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}.$$

4.2.2 向量积

定义 4-5 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**（也叫**叉乘积**）是一个向量，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$. 规定

（1）它的长度为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（其中$\theta$为$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角）；

（2） 它的方向与$\vec{a}$和$\vec{b}$都垂直，且按$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$的次序符合右手法则。

向量积的几何意义是：当$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行时，$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积。

向量积具有下列性质：

（1）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$；

（2）$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$；

（3）$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$；

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

根据定义 4-5 不难证明前三个性质，性质（4）的证明较繁（略）.

下面推导向量积在空间直角坐标系中的坐标表达式.

由向量积的定义可得

$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j},\quad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，由向量积的运算性质可得，

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})\\&\quad+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})\\&\quad+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.\end{aligned}$$

为了便于记忆，可将上式写成三阶行列式形式

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 4-3 设向量$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, 求$\vec{a}\times\vec{b}$及以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积$S$.

解

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k},$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}.$$

4.2.3 混合积

定义 4-6　三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的**混合积**是一个数，记作$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$，规定

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

混合积的几何意义如下：

以三个非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱作一个平行六面体，其底面积为$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，高为$\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right|$（其中$\theta$是$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$的夹角）。于是，该平行六面体的体积为

$$V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

由此可见，三个向量的混合积的绝对值表示以这三个向量为棱的平行六面体的体积.

不难看出，若三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$依该次序符合右手法则，则$V=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$（图 4.7(1)）；否则，$V=-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$（图 4.7(2)）.

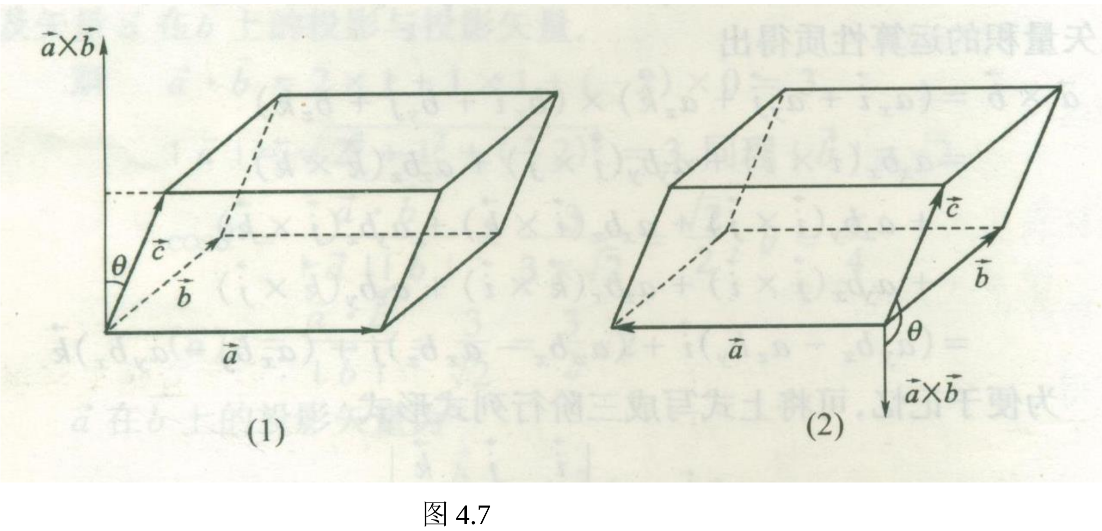

图 4.7

下面在空间直角坐标系中建立混合积的坐标表达式.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，由

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k},$$

得出

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$
$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$
$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = |\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|.$$

由行列式的性质可知，混合积具有下列性质：

（1）$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$；

（2）$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$；

（3）$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$；

（4）$(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$；

（5）若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有两个相等或有一个为零向量，则$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$=0.

例 4-4　设$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k},\ \vec{c}=-\vec{k}-\vec{i},$ 它们的始点同为原点 O，求以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体积 V

解　因为

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2,$$

所以 V=2.

4.2.4 向量间的关系

下面利用向量代数研究向量间的关系，从而为在空间直角坐标系中建立平面方程和直线方程，研究平面与直线相互间的关系奠定基础。

当向量$\vec{a}$与$\vec{b}$中有一个为零向量时，$\vec{a}$与$\vec{b}$既平行又垂直；当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有一个为零向量时，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$一定共面。下面对$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都不是零向量的情况加以研究。

定理 4-1　设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都是非零向量，θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，则

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0;$

（2）$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0};$

（3）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0.$

证 （1）根据$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$及$|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$，可得

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

（2）根据$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$及$|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$，可得

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\theta=0(\text{或}\pi)\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

下面证（3）.

先证必要性.若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. 于是$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$=0。

若$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，因为$\vec{a}\times\vec{b}$垂直于$\vec{a}$, $\vec{b}$所在的平面，且$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面， 所以$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$=0，即

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0.$$

再证充分性. 由 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$=0可知，$\vec{c}\perp\vec{a}\times\vec{b}$.

若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，则$\vec{a}\parallel\vec{b}$.平移后$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，因而$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面。

若$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$,由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都与$\vec{a}\times\vec{b}$垂直可知，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$也共面.

综上所述，该定理的结论成立.

定理 4-2 $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow$存在实数$\lambda$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$或$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证 根据数与向量的乘法可知，充分性成立。

下面证明必要性。.

当$\vec{a}$和$\vec{b}$至少有一个是$\vec{0}$时，取$\lambda=0$.结论显然成立.

当$\vec{a}$和$\vec{b}$都不是$\vec{0}$时，由$\vec{a}\parallel\vec{b}$可知，

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

选取λ等于$|\vec{a}|/|\vec{b}|$和$-|\vec{a}|/|\vec{b}|$中的一个，可保证结论成立。

推论 4-1 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

例 4-5 证明:平行四边形 *ABCD* 为菱形$\Leftrightarrow$对角线 $\mathrm{AC}\perp\mathrm{DB}$.

证 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 于是$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. 因为

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$$

所以，$ABCD$ 为菱形 $\Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{AC}\perp\overline{DB}$（即线段 $\mathrm{AC}\perp\mathrm{DB}$）.

例 4-6 当 k 为何值时,四个点 $P(2,1,0)$ 、 $A(1,2,3)$ 、 $B(2,3,1)$ 和 $C(3,1,k)$ 共面?

解 令 $\vec{a}=\overline{PA}$，$\vec{b}=\overline{PB}$，$\vec{c}=\overline{PC}$,则它们的坐标向量分别为

$$\mathbf{a}=\left[-1,2,2\right]^T,\qquad \mathbf{b}=\left[0,3,0\right]^T,\qquad \mathbf{c}=\left[1,1,k-1\right]^T,$$

由

$$\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 0 & k-1\end{vmatrix}=-3(k+1),$$

及 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|$ 可知,当 $k=-1$ 时，$\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|=0$.于是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，即所给四点共面.

思考题 4-2

1．设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，下列结论成立吗?

（1）若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$；

（2）若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$；

（3）若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$,则 $\vec{b}=\vec{c}$；

（4）$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$；

（5）$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$；

（6）$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共面.

2．已知三点 $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 、$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 、$C\left(x_3,y_3,z_3\right)$，怎样求出 $\triangle ABC$ 的面积?

3．已知四点 $A_i\left(x_i,y_i,z_i\right)\left(i=1,2,3,4\right)$，怎样求出四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积?

4．已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行,当 λ 取何值时，$\lambda\vec{a}+9\vec{b}$ 与 $4\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 平行?

习题 4-2

1． 已给下列条件,求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积.

（1）$\left|\vec{a}\right|=8,\ \left|\vec{b}\right|=5,$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=2\pi/3$;

（2）$\vec{a} \perp \vec{b}$；

（3）$\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 6,\ \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；

（4）$\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向.

2．若 $\vec{a}\,,\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 是相互垂直的三个非零向量，求 $\vec{\gamma} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ 的长度.

3．在空间直角坐标系下，计算下列各式.

（1）$\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；

（2）$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$，求 $\left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|, \vec{b}$ 的方向余弦和 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.

4．化简下列各向量的表达式.

（1）$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$;

（2）$\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$;

（3）$\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} - \vec{b}\right)$.

5．已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b},\ \overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$，其中 $\left|\vec{a}\right| = 5,\ \left|\vec{b}\right| = 3,\ a$ 与 b 的夹角为 $\pi/6$，求平行四边形 $ABCD$ 的面积.

6．在空间直角坐标系下，$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j},\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j},\ \vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$，求 $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{c},\ \vec{a}\times\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ 和 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

7．求一个单位向量 $\vec{u}$，使之同时垂直于 $\vec{i} + \vec{j}$ 和 $\vec{j} + \vec{k}$.

8．设向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ 和 $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ 垂直，而与 $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ 的数量积为 -10，求 $\vec{x}$.

9．设 $\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\quad \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\pi/3$，当 λ 为何值时，向量 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b}$ 垂直？

10. 设 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$，当 λ 与 μ 为何关系时，才使 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 与 z 轴垂直？

11．设 $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 2$，求 $\left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\times\left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{c} + \vec{a}\right)$.

12．设 $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j},\ \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$，求 $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

13．判断 A、B、C 三点是否共线.

（1）$A(1,2,3)$,　　$B(0,3,7)$,　$C(3,5,11)$;

（2）$A(0,1,2)$,　　$B(1,3,1)$,　$C(3,7,-1)$.

14.利用混合积证明下面四点共面.

$A(1,0,1)$,　　$B(2,4,6)$,　　$C(3,-1,2)$,　　$D(6,2,8)$

15.设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$S$ 为以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的面积.证明:

$$S^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2.$$

16．设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 在空间直角坐标系下的坐标向量分别为 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，证明

$$\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|^2\le\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2.$$

17．若 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，证明 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

18．若 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$，证明 $\vec{a},\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 共面.

19．若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，证明 $\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线.

4.3 空间中的平面及其方程

本节以向量为工具，在空间直角坐标系中根据确定平面的条件建立相应的平面方程。

4.3.1 平面的点法式方程

与平面垂直的非零向量叫做该**平面的法向量**.显然，平面上任一向量都与其法向量垂直.

由中学几何可知，一个平面由其上一点和它的法向量唯一确定. 下面我们在此条件下来建立平面的方程。

设 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是平面 π 上一点，$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ 为平面 π 的法向量. 不难得出，点 $P\left(x,y,z\right)$ 在平面 π 上（如图 4.8）$\Leftrightarrow\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$，即

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\quad,\tag{4.1}$$

称这个方程为**平面的点法式方程**.

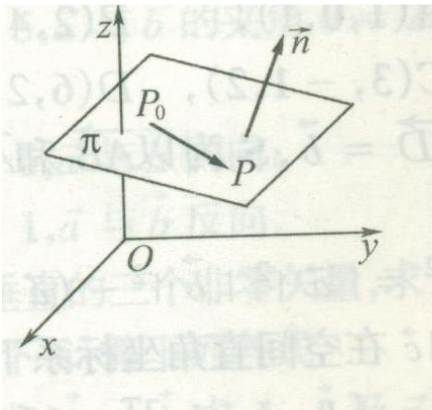

图 4.8

例 4-7 已知平面过点 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 且平行于两个不共线的向量

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \quad \text{和} \quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

求此平面的方程.

解法 1 因为所求平面平行于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，所以平面的法向量同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$. 从而平面的法向量 $\vec{n}$ 可取为 $\vec{a}\times\vec{b}$，即

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

由平面的点法式方程得出所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\left(x-x_0\right)-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\left(y-y_0\right)+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\left(z-z_0\right)=0.$$

写成便于记忆的行列式形式，则为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \left(y-y_0\right) & \left(z-z_0\right) \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

解法 2 设 $P(x,y,z)$ 为该平面上的任一点，则向量 $\overrightarrow{P_0P},\vec{a},\vec{b}$ 共面。于是，

$$\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{a},\vec{b}\right)=0.$$

代入向量 $\overrightarrow{P_0P},\vec{a},\vec{b}$ 的坐标，可得该平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \left(y-y_0\right) & \left(z-z_0\right) \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

4.3.2 平面的一般式方程

将平面的点法式方程（4.1）整理，得

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \tag{4.2}$$

其中$D = -\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0\right)$．把这个方程称为**平面的一般式方程**.

可见，任何一个平面都可用一个三元一次方程来表示．反之，任给一个三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{（其中 } A,B,C \text{ 不全为} 0\text{）}$$

总表示一个平面．理由如下：

不失一般性，设$C \neq 0$，则该方程可化为

$$A\left(x-0\right)+B\left(y-0\right)+C\left[z-\left(-\frac{D}{C}\right)\right]=0 ,$$

这是一个过点$(0,0,-\dfrac{D}{C})$以$\mathbf{n}=\left[A_1,B_2,C_3\right]^T$为法向量的平面．因此，一个三元一次方程表示一个平面.

从上面分析可知，平面与三元一次方程相对应，且方程中变量的系数组成的向量$\mathbf{n}=\left[A_1,B_2,C_3\right]^T$是平面的法向量.

下面给出特殊的三元一次方程对应的平面的特点：

（1）当$D=0$时，式(4.2)表示一个过原点的平面.

（2）当$D \neq 0$且A,B,C中只有一个为零时，则平面平行于某个坐标轴.

例如，当只有$A=0$时，平面的法向量为$\mathbf{n}=\left[0,B,C\right]^T$。由$\vec{n}\cdot\vec{i}=0$知，平面的法向量$\vec{n}$与$x$轴垂直，因此平面平行于$x$轴.

（3）当$D \neq 0$且A,B,C中有两个为零时，则平面平行于某个坐标面.

例如，当$A=0,B=0$时，则平面既平行于x轴，又平行于y轴，因此平面平行于Oxy面.

例 4-8　求过两点$P\left(1,0,0\right)$和$Q\left(0,0,1\right)$且平行于y轴的平面方程.

解　由于平面平行于y轴，因此平面的方程可设为

$$Ax + Cz + D = 0.$$

因为平面过P和Q两点，将其坐标代人方程，得

$$\begin{cases} A+D=0 \\ C+D=0 \end{cases}.$$

于是，$A=C=-D$，故所求的平面方程为$x+z-1=0.$

4.3.3 平面的截距式方程

一个不过原点的平面与 x 轴的交点的横坐标叫做该平面在 x 轴上的**截距**．类似地，可给出平面在 y 轴和 z 轴上的截距的定义。

当 $abc \neq 0$ 时，平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a、b、c．这种形式的平面方程称为**平面的截距式方程**.

通过截距式方程可比较容易地画出平面的图形．例如，将平面方程

$$10x+5y+4z-20=0$$

化成截距式方程

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1,$$

按照三个坐标轴上的截距就可画出平面的图形（图 4.9).

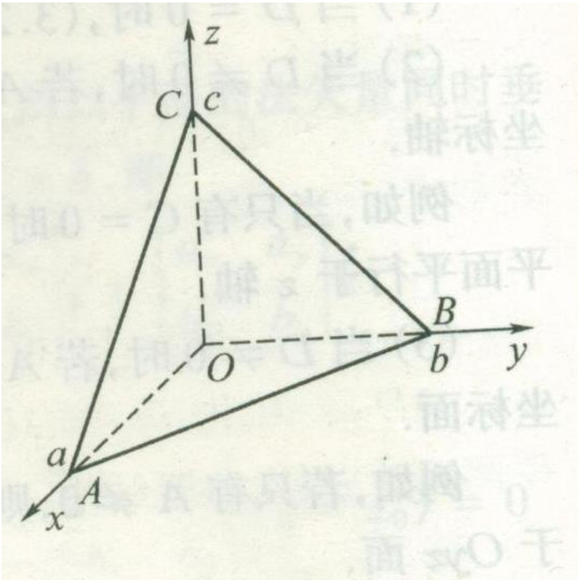

图 4.9

4.3.4 平面的三点式方程

由中学几何可知，空间中不共线的三点可唯一地确定一个平面．下面我们来建立过不共线三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$、$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面方程.

设 $P(x,y,z)$ 为平面上的任一点，则向量 $\overrightarrow{P_1P}$，$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_1P_3}$ 的坐标分别为 $[x-x_1,y-y_1,z-z_1]^T$，$[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]^T$ 和 $[x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1]^T$.

因为这三个向量共面，所以它们的混合积为零．于是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

这就是由三点 P_1，P_2 和 P_3 所确定的平面方程，称为**平面的三点式方程**.

4.3.5 同轴平面束

经过同一条直线的所有平面的集合叫做**同轴平面束**.

当平面$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与平面$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$相交时，它们交于一条直线，记为$l$.

设λ_1与λ_2是两个不同时为零的实参数，建立含有λ_1与λ_2的三元一次方程

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\lambda_2\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \quad . \qquad (4.3)$$

当$\lambda_1=0$时，它是平面π_2；当$\lambda_2=0$时，它是平面π_1.

对于给定的λ_1和λ_2，式（4.3）是关于x, y, z的三元一次方程，它表示一个平面。由于直线l上的任一点的坐标都满足平面π_1和π_2的方程，当然也满足方程（4.3），因此方程（4.3）表示的平面经过直线l。再由λ_1和λ_2为实参数得出，方程（4.3）是以直线l为轴的平面束方程.

用平面束方程处理某些问题有时会很方便.

例 4-9　求过点$P(-1,0,1)$并且经过两个平面$x+3y-z=0$和$x-y+z+1=0$的交线的平面的方程.

解　由于所求平面与两个已知平面均为同轴平面束中的平面，因此可设所求平面为

$$\lambda_1\left(x+3y-z\right)+\lambda_2\left(x-y+z+1\right)=0 .$$

将$P(-1,0,1)$代入方程，得出$\lambda_2=2\lambda_1$. 将$\lambda_2=2\lambda_1$代入上式并消去λ_1，得到所求的平面方程为

$$3x+y+z+2=0 .$$

注：平面$x+3y-z=0$和$x-y+z+1=0$的交线的方程可记为$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$，称为直线的一般式方程（将在下一节中介绍）。

思考题 4-3

1. 平面方程的四个表达形式中，哪些形式唯一，哪些形式不唯一？
2. 例 4-9 还有其它解法吗？
3. 将空间解析几何中的平面方程与平面解析几何中的直线方程相比较能得到什么启示？
4. 过x轴的平面和垂直于z轴的平面，其方程分别有什么特点？

习题 4-3

1. 求下列平面的一个法向量.

（1）$3x-2y+5z-1=0;$

（2）$x-y=0;$

（3）$y=0.$

2. 求过点 $M_0\left(2,9,-6\right)$ 且与连接坐标原点 O 及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

3．求过三点 $(1,1,-1)$ 、$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 的平面方程.

4．求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

5．求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 和 $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ 的平面方程.

6．画出下列平面的图形.

（1）$3y-1=0;$

（2）$2x-3y-6=0;$

（3）$6x+5y-z=0.$

7．求过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴的平面方程.

8．求过点 $(1,2,1)$ 及 z 轴的平面方程.

9．求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于平面

$$x-y+z=7 \quad \text{和} \quad 3x+2y-12z+5=0$$

的平面方程.

10．证明：不在同一条直线上的三点 (x_1,y_1,z_1) 、(x_2,y_2,z_2) 和 (x_3,y_3,z_3) 所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

4.4 空间中的直线及其方程

本节仍以向量为工具，在空间直角坐标系中根据确定直线的条件建立相应的直线方程.

4.4.1 直线的点向式方程与参数式方程

与直线平行的非零向量叫做该**直线的方向向量**，它的三个坐标称为该**直线的方向数**. 显然，直线上的任一个向量都与其方向向量平行.

由中学几何可知，一条直线由其上一点和它的方向向量唯一确定. 下面我们在此条件下来建立直线的方程.

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线 l 上一点，$\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ 为 l 的方向向量，即方向数为 m,n，p.

点 $P(x,y,z)$ 在直线 l 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{s}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (4.4)$$

这种由一点和方向向量所确定的直线方程叫做**直线的点向式方程**. 由于方程的结构对称，因此也叫做**直线的对称式方程**.

因为式（4.4)的分母表示的是直线的方向向量的坐标，所以当方向数 m,n,p 中有的为零时，在形式上仍可用式（4.4)来表示直线. 例如

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-3} \qquad (4.5)$$

表示一条过点 $(1,2,3)$，且以 $\left[2,0,-3\right]^T$ 为方向向量的直线.

对于上面的直线 l，我们现在来建立它的参数式方程。

点 $P(x,y,z)$ 在直线 l 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow$ 存在数 t，使得 $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{s}$，即

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix},$$

也即

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}, \qquad (4.6)$$

这个方程叫做**直线的参数式方程**，其中 t 为参数。

注意，令式 (4.4) 等于参数 t，可将直线的对称式方程化为参数式方程；反过来，从式 (4.6) 的三个式子分别求出 t，可将直线的参数式方程化为对称式方程。

例 4-10 求过两个相异点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的直线方程.

解 所求直线是过点 P_0 且以 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 为方向向量的直线.

由 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的坐标向量为$\left[x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\right]^T$可直接写出该直线的方程

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

这种由两点确定的直线方程叫做**直线的两点式方程**.

例 4-11　　求式（4.5)表示的直线与平面$2x-y+z=4$的交点P.

解　交点P的三个坐标是直线方程和平面方程的公共解．将式（4.5)写成参数式方程

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=3-3t \end{cases},$$

代人平面方程$2x-y+z=4$，求得$t=1$．因此所求的交点为$P(3,2,0)$。

4.4.2 直线的一般式方程

当平面$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与平面$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$相交时，它们的交线$l$上的点的坐标同时满足$\pi_1$与$\pi_2$的方程，即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

反过来，坐标满足该方程组的点同时在平面π_1与π_2上，即在交线l上。因此，可用该方程组表示直线l，称为直线l的**一般式方程**.

给定两个相交的平面，它们所交的直线就唯一确定．反之，给定一条直线，由于经过该直线的平面有无穷多个，将其中任何两个平面方程联立得到的方程组都可表示这条直线．因此，直线的一般式方程不唯一。

上述几种形式的直线方程，对于处理不同的问题各有其长处，应熟悉它们相互间的转化.

对于方程（4.4），当m,n,p中有的数为零时，将对称式方程转化为一般式方程的做法如下：

当m,n,p中只有一个为零，例如$m=0$时，式(4.4)可化成一般式方程

$$\begin{cases} x=x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}.$$

当m,n,p中有两个为零，例如$n=0, p=0$时，式(4.4)可化成一般式方程

$$\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}.$$

当m,n,p都不为零时，将直线的对称式方程化为一般式方程的做法请大家自己考虑。

下面我们来介绍将直线的一般式方程化为对称式方程的做法。

例 4-12　将直线的一般式方程$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$化为对称式方程.

解法 1　先求直线上一点. 在该直线方程中，令$z=0$，得

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases},$$

求得$x=y=1$. 因此，点$(1,1,0)$是该直线上的一个点.

再求该直线的方向向量$\vec{s}$. 由于这条直线是法向量分别为

$$\mathbf{n}_1=[1,-1,1]^T \text{ 和 } \mathbf{n}_2=[1,1,-2]^T$$

的两个平面的交线，因此$\vec{s}\perp\overrightarrow{n_1}$且$\vec{s}\perp\overrightarrow{n_2}$. 取

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},$$

于是，该直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

解法 2　令$z=0$，求得该直线上的一点$(1,1,0)$；再令$y=0$，又求得该直线上的一点

$\left(\frac{2}{3},0,-\frac{2}{3}\right)$.

根据两点式方程可得该直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-\frac{2}{3}},$$

即

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

解法 3　在$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$中，令$z=t$, 求出$x$和$y$，可得该直线的参数式方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t+1 \\ y=\frac{3}{2}t+1 \\ z=t \end{cases},$$

再将其化为对称式方程，得

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

习题 4-4

1．求下列直线的参数式方程和对称式方程.

（1）经过点 $P(1,0,-2)$，且平行于 $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$；

（2）经过点 $P(-2,-3,1)$ 且平行于 x 轴；

（3）经过点 $A(1,0,-1)$ 和点 $B(1,1,3)$；

（4）经过点 $A(2,3,-5)$ 且与直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ 平行；

（5）经过点 $P_0(1,0,1)$ 且垂直于直线

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases} \quad 和 \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-1};$$

（6）经过点 $P_0(1,2,3)$ 且平行于平面

$$x+y+z+3=0 \quad 和 \quad y-z+1=0$$

（7）经过点 $P_0(3,1,2)$ 且与直线

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=\ \ 2t \end{cases}$$

垂直相交；

（8）经过点 $(0,1,2)$, 平行于平面 $x+y+z=2$ 且垂直于直线

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t. \\ z=\ \ 2t \end{cases}$$

2．把下面的直线方程化为对称式方程.

（1）$\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$；

（2）$\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 4y+3z+1=0 \end{cases}$.

3．求下列平面的方程.

（1）过直线$\begin{cases} x=2+3t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$ 和点$(1,2,-1)$;

（2）过点$(1,1,1)$且与直线$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$垂直;

（3）过点$(1,1,1)$且与直线l_1和l_2都平行，其中

$$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},$$
$$l_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1};$$

（4）过直线$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$且与平面$x+2z=1$垂直.

4.5　位置关系、夹角与距离

本节研究平面与平面、直线与平面及直线与直线间的关系，并介绍各种夹角和距离的计算方法。

4.5.1 两平面间的关系

两个平面之间有重合、平行和相交这三种关系，下面给出其判别方法.

设有两个平面

$$\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

它们的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1=[A_1,B_1,C_1]^T \quad 和 \quad \mathbf{n}_2=[A_2,B_2,C_2]^T.$$

当$\vec{n}_1 // \vec{n}_2$，即$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$时，平面$\pi_1$与$\pi_2$或者重合，或者平行。因此，有下面结论：

（1）平面π_1与π_2重合$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$;

（2）平面π_1与π_2平行$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

（3）平面π_1与π_2相交$\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$.

4.5.2 直线与平面间的关系

下面讨论一条直线 l 与一个平面 π 之间的关系．设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$
$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

它们的方向向量和法向量分别为

$$\mathbf{s}=\left[m,n,p\right]^T$$

和

$$\mathbf{n}=\left[A,B,C\right]^T.$$

（1） l 在 π 上 $\Leftrightarrow$ $\vec{s}\perp\vec{n}$ （即 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$ ）且点 (x_0,y_0,z_0) 满足 π 的方程 $\Leftrightarrow mA+nB+pC=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

（2） l 与 π 平行 $\Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$ 且点 (x_0,y_0,z_0) 不满足 π 的方程 $\Leftrightarrow mA+nB+pC=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$.

（3）l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直 $\Leftrightarrow mA+nB+pC\neq 0$.

（4）l 与 π 垂直 $\Leftrightarrow \vec{s}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

4.5.3 两直线间的关系

设有两条空间直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

l_1 过点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且方向向量为 $\mathbf{s}_1=\left[m_1,n_1,p_1\right]^T$, l_2 过点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 且方向向量为 $\mathbf{s}_2=\left[m_2,n_2,p_2\right]^T$,向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标向量为

$$\mathbf{p}=\left[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right]^T$$

我们首先研究直线 l_1 与 l_2 共面的判别方法。

直线 l_1 与 l_2 共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\vec{s_1}$ 、 $\vec{s_2}$ 、 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共面 $\Leftrightarrow$（ $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ ）$=0\Leftrightarrow\left|\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{p}\right|=0$,即

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & x_2-x_1 \\ n_1 & n_2 & y_2-y_1 \\ p_1 & p_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.7}$$

当l_1与l_2共面时，它们之间有重合、平行和相交三种情况。其判别如下：

（1）l_1与l_2重合$\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 /\!/ \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow$

$$m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

（2）l_1与l_2平行$\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2$且不平行于$\overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow$

$$m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

（3）l_1与l_2交于一点$\Leftrightarrow \vec{s}_1$、$\vec{s}_2$、$\overrightarrow{P_1P_2}$共面且$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$不平行$\Leftrightarrow$式（4.7）成立并且

$m_1:n_1:p_1\neq m_2:n_2:p_2$.

若式（4.7）不成立，则直线l_1与l_2异面.

例 4-13　设两条直线分别为

$$l_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1},$$
$$l_2:\frac{x-r}{2}=\frac{y-2}{t}=\frac{z+1}{-2}.$$

对r和t加以讨论，分析l_1与l_2的相对位置.

解　l_1过点$P_1(1,-2,1)$且方向向量为$\mathbf{s}_1=[-1,2,1]^T$，　l_2过点$P_2(r,2,-1)$且方向向量为$\mathbf{s}_2=[2,t,-2]^T$，　$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标向量为$\mathbf{p}=[r-1,4,-2]^T$. 由

$$|\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{p}|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & r-1 \\ 2 & t & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-(r-3)(t+4),$$

得出：

（1）当$r\neq3$且$t\neq-4$时，$|\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{p}|\neq0$，$l_1$与$l_2$异面.

（2）当$t=-4$时，对$\forall r\in\mathbf{R}$，都有

$$(-1):2:1=2:(-4):(-2)\neq(r-1):4:(-2),$$

因此l_1与l_2平行.

（3）当 $t \neq -4$ 且 $r = 3$ 时，由 $|\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}| = 0$ 且 $(-1):2:1 \neq 2:t:(-2)$，得出 l_1 与 l_2 相交.

（4）由 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ 得，当 $t = 2$ 时 l_1 与 l_2 垂直（当 $r = 3$ 时为共面垂直相交；当 $r \neq 3$ 时为异面垂直）.

4.5.4 直线和平面相互间的夹角

现在我们通过向量的夹角来求直线与直线、平面与平面以及直线与平面的夹角.

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1$ 和 $\vec{s}_2$，平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$.

1. 设 $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 的夹角为 θ，则**直线 l_1 与 l_2 的夹角**为 $\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$，

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

2. 设 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 的夹角为 θ，则**平面 π_1 和 π_2 的夹角**为 $\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$，

$$\cos\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

3. 设 $\vec{s}_1$ 和 $\vec{n}_1$ 的夹角为 θ，则直线 l_1 **和平面 π_1 的夹角**为 $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \min\{\theta, \pi - \theta\}$（见图 4.10），

$$\sin\varphi = \cos(\min\{\theta, \pi - \theta\}) = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{s}_1||\vec{n}_1|}.$$

注意，上述三种夹角都不大于 $\dfrac{\pi}{2}$，这与向量的夹角有所不同.

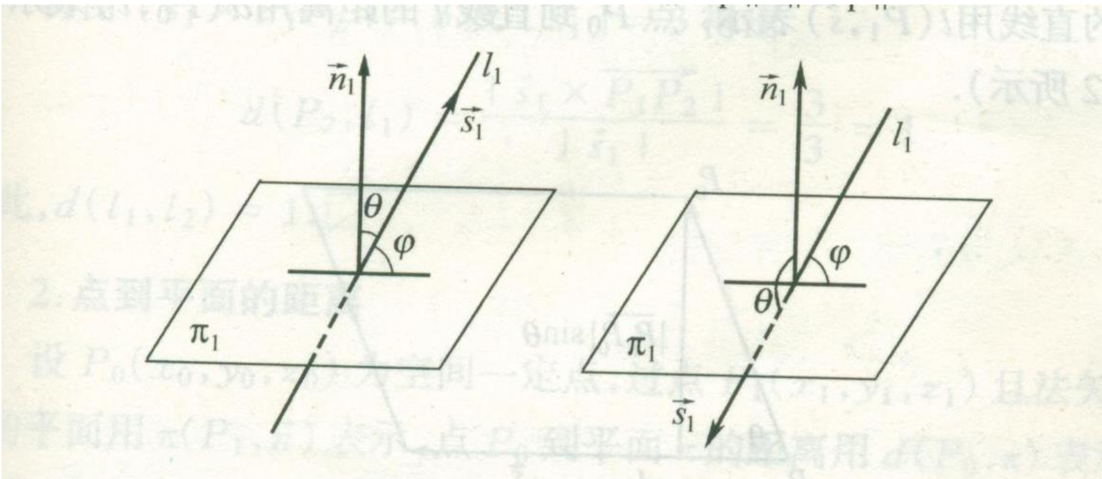

图 4.10

例4-13　求直线 $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ 和平面 $\pi: x + y + 2z = 3$ 的夹角 φ.

解　　直线 l 的方向向量为 $s = [-1, 2, 1]^T$，平面 π 的法向量为 $n = [1, 1, 2]^T$.

由

$$\vec{s}\cdot\vec{n}=(-1)\times 1+2\times 1+1\times 2=3,$$
$$\left|\vec{s}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6},$$
$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6},$$

得

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{1}{2},$$

因此$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

4.5.5 距离

下面我们仍以向量为工具研究点到直线、点到平面以及两条异面直线之间的距离. 由前两种距离还可求出两条平行直线、两个平行平面以及直线与平行于该直线的平面之间的距离.

1．点到直线的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为空间一点，l为过点$P_1(x_1,y_1,z_1)$且方向向量为$\vec{s}$的直线（如图 4.11 所示），点P_0到直线l的距离用$d(P_0,l)$表示.

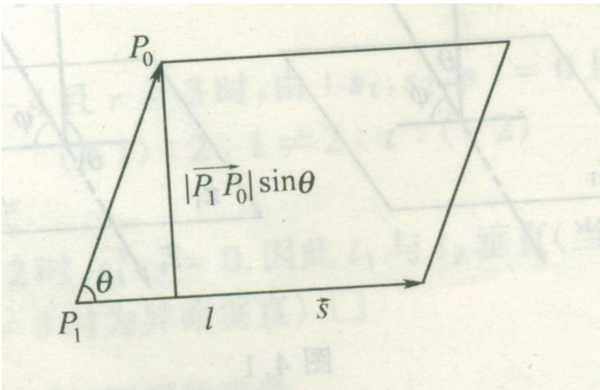

图 4.11

显然，$d(P_0,l)=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\sin\theta$（其中$\theta$为$\vec{s}$与$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角）. 由

$$\left|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\vec{s}\right|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\sin\theta,$$

可得

$$d\left(P_0,l\right)=\frac{\left|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{\left|\vec{s}\right|}.$$

不难得出，两条平行直线的距离就是其中一条直线上的一点到另一条直线的距离。

例 4-14　求两条平行直线l_1和l_2的距离$d(l_1,l_2)$，其中

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2},$$
$$l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}.$$

解　直线l_1过点$P_1(0,2,1)$，方向向量记为$\vec{s}_1$，直线l_2过点$P_2(1,2,2)$。由$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{i} + \vec{k}$，得

$$\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$

再由$\left|\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}\right| = 3$及$\left|\vec{s}_1\right| = 3$，得

$$d(P_2, l_1) = \frac{\left|\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\vec{s}_1\right|} = \frac{3}{3} = 1$$

因此直线l_1和l_2的距离为1.

2.点到平面的距离

设平面π的方程为$Ax + By + Cz + D = 0$，$P_1(x_1, y_1, z_1)$为平面π上的一点，则平面π的法向量为$\mathbf{n} = \left[A, B, C\right]^T$.另设$P_0(x_0, y_0, z_0)$为平面$\pi$外的一点，过$P_0$作平面$\pi$的垂线与$\pi$交于点$Q_0$（图 4.12）.

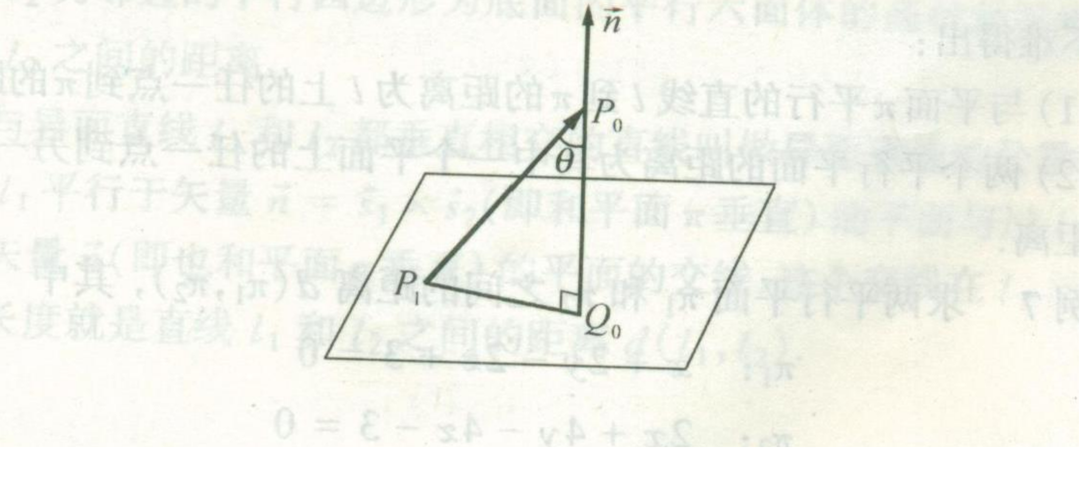

图 4.12

用$d(P_0, \pi)$表示点P_0到平面π的距离，则

$$d(P_0,\pi)=\left|\overrightarrow{Q_0P_0}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\left|\cos\theta\right|$$（其中θ为$\vec{n}$与$\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|$的夹角）.

由$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\left|\cos\theta\right|$，得

$$\begin{aligned}d(P_0,\pi)&=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}\\&=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

由P_1在平面π上可知，

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

即

$$-Ax_1-By_1-Cz_1=D.$$

因此，点P_0到平面π的距离为

$$d(P_0,\pi)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

不难得出：

（1）与平面π平行的直线l到π的距离为l上的任一点到π的距离.

（2）两个平行平面的距离为其中一个平面上的任一点到另一个平面的距离.

例 4-15 求两个平行平面π_1和π_2之间的距离$d(\pi_1,\pi_2)$，其中

$$\begin{aligned}&\pi_1:\ \ x+2y-2z+3=0,\\&\pi_2:2x+4y-4z-3=0.\end{aligned}$$

解 在π_1上取一点$P(-3,0,0)$，则

$$d(\pi_1,\pi_2)=\frac{\left|2\times(-3)+4\times0-4\times0-3\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{3}{2}.$$

***3. 两条异面直线的距离**

设直线l_1和l_2为异面直线，$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$分别为它们的方向向量。记$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2$，用$d(l_1,l_2)$表示直线$l_1$和$l_2$的距离。

设P_1为直线l_1上的一点，过点P_1做一个法向量为$\vec{n}$的平面π，显然π与l_2平行。于是，直线l_1和l_2的距离就是直线l_2到平面π的距离，亦即l_2上的一点点P_2到π的距离。因此

$$
\begin{aligned}
d(l_1,l_2) &= d(l_2,\pi) = d(P_2,\pi) \\
&= \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|} \\
&= \frac{\left|(\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{P_1P_2})\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|}.
\end{aligned}
$$

因为$\left|(\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{P_1P_2})\right|$表示以$\vec{s_1},\vec{s_2}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$为相邻棱的平行六面体的体积，$\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|$表示该平行六面体的底面积，所以异面直线$l_1$和$l_2$的距离等于该平行六面体的高。

与异面直线l_1和l_2都垂直相交的直线叫做**异面直线的公垂线**，它是过l_1且平行于向量$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2$的平面与过$l_2$也平行于向量$\vec{n}$的平面的交线，这个交线在$l_1$与$l_2$之间的长度就是直线$l_1$和$l_2$之间的距离$d(l_1,l_2)$.

思考题 4-5

1. 平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$垂直的条件是什么？

2. 设$\vec{s}$和$\vec{n}$分别为直线l和平面π的方向向量和法向量，它们的夹角为θ，l与π的夹角为φ．下列二式成立否？为什么？

$$\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|,\quad \cos\varphi=\frac{\left|\vec{s}\times\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\vec{n}\right|}$$

3．还能用什么方法求出点到直线的距离、点到平面的距离？

习题 4-5

1.已知两个平面$x-2y+3z+D=0$和$-2x+4y+Cz+5=0$，问：当C和D为何值时，（1）这两个平面平行，（2）这两个平面重合？

2.判断直线与平面的位置关系，若有交点就求出交点坐标.

（1）$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 和$x+2y-5z-11=0$；

（2）$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z}{3}$ 和$2x-y-2z+1=0$；

（3）$\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ 和$x+2y-4z+1=0$.

3．已知直线$\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+D=0\end{cases}$与 z 轴相交，求$D$的值.

4．证明直线$l_1:\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$和$l_2:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=5+4t\end{cases}$共面，并求它们所在平面的方程。

5. 求两平面$x+y+2z=3$和$2x-y+z+2=0$的夹角。

6．求平面$2x-2y+z+5=0$与各坐标面的夹角。

7．求直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角。

8．求直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$与直线$\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+2t\end{cases}$的夹角.

9．求点（1,2,1)到平面$x+2y+2z=10$的距离.

10．求平行平面$\pi_1:x-2y-2z=12$和$\pi_2:x-2y-2z=6$间的距离.

11．求平行于平面$x+2y-2z=1$且与其距离为 2 的平面方程.

12．证明两平行平面$ax+by+cz=d_1$和$ax+by+cz=d_2$的距离为

$$d=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

13．求下列异面直线间距离.

（1）$l_1:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$，　　$l_2:\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$；

（2）$l_1:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$，　　$l_2:\begin{cases}x=6t+9\\y=-2t\\z=-t+2\end{cases}$；

（3）$l_1:\begin{cases}3x-2y+z=0\\x-3y+5=0\end{cases}$，　　$l_2:\begin{cases}x-3z+2=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$.

14．求点$M(4,-3,1)$在平面$x+2y-z-3=0$上的投影点.

15. 求经过点$M(2,-3,-1)$向直线$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$所作垂线的方程。

16. 求异面直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$与$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$的公垂线的方程。