

第 7 章练习题

一、单选题（共 13 题，32.5 分）

1、 下列向量集合可以构成实向量空间的是（ ）

- A、 \mathbb{R}^n 中，分量满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的所有向量
- B、 \mathbb{R}^n 中，分量是整数的所有向量
- C、 \mathbb{R}^n 中，分量满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的所有向量
- D、 \mathbb{R}^n 中，分量满足 $x_1 = 1, x_2, \dots, x_n$ 可取任意实数的所有向量

正确答案： A

2、 下列集合为 \mathbb{R}^3 的子空间的是（ ）.

- A、 $\{(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$
- B、 $\{(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0\}$
- C、 $\{(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$
- D、 $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (\mathbb{Q} 为有理数集合)

正确答案： A

3、

在 \mathbb{R}^n 中，由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 C ，则 $C =$ （ ）.

- A、 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)^{-1}$
- B、 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)^{-1}(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)$
- C、 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)^{-1}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$
- D、 $(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)^{-1}$

正确答案： B

4、

向量空间 $V = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ ，则 $\dim V =$ （ ）

- A、 1

B、 2

C、 n

D、 n-1

正确答案： D

5、

下面()是将向量 $(1, -1, 0, 0)^T$ 扩充为向量空间 $\{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 0\}$ 的基.

A、 $(1, -1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T, (0, 0, 1, -1)^T, (-1, 0, 0, 1)^T$

B、 $(-1, 0, 0, 1)^T, (0, -1, 0, 1)^T, (0, 0, -1, 1)^T$

C、 $(1, -1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T, (0, 0, 1, -1)^T$

D、 $(1, -1, 0, 0)^T, (0, 1, -1, 0)^T, (0, 0, -1, 1)^T, (0, 0, 0, 1)^T$

正确答案： C

6、 向量 α 的长度为 ()

A、 $\alpha\alpha^T$

B、 $\alpha^T\alpha$

C、 (α, α)

D、 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$

正确答案： D

7、 向量 $\alpha = (\sqrt{3}, 1, 0)^T$ 与 $\beta = (0, 1, 0)^T$ 的夹角为 ()

A、 30°

B、 60°

C、 120°

D、 90°

正确答案： B

8、 设 A 为正交矩阵, 且 $|A| = -1$, 则 $A^* = ()$

- A、 A^T
- B、 $-A^T$
- C、 A
- D、 $-A$

正确答案： B

9、 下列矩阵中不一定可逆的是（ ）

- A、 单位矩阵
- B、 伴随矩阵
- C、 初等矩阵
- D、 正交矩阵

正确答案： B

10、 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，下列结论只有（ ）不对

- A、 若 A 和 B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵
- B、 若 AB 可逆，则 A 和 B 都可逆
- C、 若 A 和 B 都是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵
- D、 $|AB| = |BA|$

正确答案： C

11、 设 A 为正交矩阵， a_j 是 A 的第 j 列，则 a_j 与 a_j 的内积为（ ）

- A、 0
- B、 1
- C、 2
- D、 3

正确答案： B

12、 设 A 和 B 是 n 阶方阵。若 AB 正交矩阵，则（ ）

- A、 A 和 B 都是奇异阵
- B、 A 和 B 的行向量组线性无关

C、 A 和 B 都是降秩阵

D、 $AX=0$ 和 $BX=0$ 都有非零解

正确答案： B

13、 下面哪种情况可使 $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & n & 0 \\ 1 & n & 0 \\ 0 & k & m \end{bmatrix}$ 成为正交矩阵_____.

A、 $m=1, n=0, k=1$

B、 $m=-\sqrt{2}, n=1, k=0$

C、 $m=0, n=-\sqrt{2}, k=0$

D、 $m=1, n=\sqrt{2}, k=1$

正确答案： B

二、填空题（共 16 题， 42.5 分）

设 R^4 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 令

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_4,$$

1、 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 生成向量空间的维数为_____, 一组基为_____

正确答案:

第 1 空:

3

第 2 空:

$\beta_1, \beta_2, \beta_3.$

2、 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ 解空间的一组基为_____

正确答案:

第 1 空:

$$\eta_1 = (-3, 0, 1, 0)^T, \eta_2 = (2, -1, 0, 1)^T$$

3、

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ 则齐次线性方程组 } Ax=0 \text{ 解空间的维数是}$$

解空间一组基是

正确答案:

第 1 空:

2

第 2 空:

$$\eta_1 = (-3, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = (1, 0, -2, 1)^T$$

$$\text{4、 从 } \mathbb{R}^2 \text{ 的基 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 到基 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 的过渡矩阵为}$$

正确答案:

第 1 空:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5、

设 \mathbb{R}^3 的两组基为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 1, 2)^T$, $\beta_3 = (1, 2, 1)^T$, 则基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

正确答案:

第 1 空:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6、

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间的一组基，则从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 的过渡矩阵为_____

正确答案:

第 1 空:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7、

已知三维向量空间的一组基是 $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, -1, 0), \alpha_3 = (2, 1, 1)$ ，则向量 $\beta = (3, 2, 1)$ 在这组基下的坐标向量是_____

正确答案:

第 1 空:

$$(-1, 0, 2)$$

8、

在 \mathbb{R}^3 中，向量 $v = [5, 0, 7]^T$ 在基 $a_1 = [1, -1, 0]^T, a_2 = [2, 1, 3]^T, a_3 = [3, 1, 2]^T$ 下的坐标向量为_____

正确答案:

第 1 空:

$$(2, 3, -1)^T$$

9、

齐次线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$
 解空间的维数为_____, 一组基为_____

正确答案:

第 1 空:

2

第 2 空:

$$\alpha_1 = (-\frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0)^T, \alpha_2 = (\frac{2}{9}, -\frac{7}{3}, 0, 1)^T$$

向量 $b_1 = [1, 1, 1]^T$ 在 R^3 的基 $a_1 = [1, -1, 0]^T$, $a_2 = [2, 1, 3]^T$, $a_3 = [3, 1, 2]^T$

10、 下的坐标向量为_____

正确答案:

第 1 空:

$$\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$$

11、 写出与 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 1)^T$ 等价正交的向量组_____

正确答案:

第 1 空:

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 2, 0)^T$$

12、

若 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ b & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 且 $\det(A) = -1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

正确答案:

第 1 空:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

第 2 空:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 kA 是正交阵，则 k 等于_____

13、

正确答案:

第 1 空:

$$\pm \frac{1}{3}$$

14、 已知 A 是奇数阶正交矩阵，且 $\det(A) = 1$ ，则 $\det(A - E) =$ _____

正确答案:

第 1 空:

0; 零; 为零

解析:

15、 设 α 是单位列向量， $A = E - k\alpha\alpha^T$ 是正交矩阵，则 k 满足_____

15、

正确答案:

第 1 空:

$k=0$ 或 2 ; 0 或 2; 0, 2; 零或 2; k 为 0 或 2.

解析:

16、

设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶正交矩阵，且 $a_{12} = 1$ ， $b = (1, 0, 0)^T$ ，则方程组 $Ax = b$ 的解为_____

正确答案:

第 1 空:

$$(0, 1, 0)^T$$

三、判断题（共 10 题，25 分）

1、 $\{(a,b,c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a=b\}$ 是向量空间

正确答案： 正确

2、 $\{(a,b,c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid ab=0\}$ 是向量空间

正确答案： 错误

3、 设 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$, 且 $k_1k_3 \neq 0$, α, β 和 β, γ 生成的向量空间分别为 V_1, V_2 , 则 $V_1 = V_2$

正确答案： 正确

解析：

4、 由两两正交的向量组成的向量组是正交向量组.

正确答案： 错误

5、 方阵 A 的列向量组是正交向量组，则 A 是可逆矩阵.

正确答案： 正确

6、 $a_1 = (1, 0, 0)^T, a_2 = (0, 1, 1)^T, a_3 = (0, 1, -1)^T$ 是 \mathbb{R}^3 的正交基

正确答案： 正确

7、

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是向量空间 V 的一组基，若 $\beta \in V$ 且 $(\beta, \alpha_1) = (\beta, \alpha_2) = \dots = (\beta, \alpha_n) = 0$,

则 $\beta = 0$

正确答案： 正确

8、 正交矩阵的行向量组是标准正交向量组

正确答案： 正确

9、 方阵 A 的列向量组是正交向量组，则 A 是正交矩阵

正确答案： 错误

若 A, B 是正交矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 是正交矩阵

10、

正确答案： 正确