思考题5－1

2. 若向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$中任何两个向量都线性无关，

是否一定有$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关？

答案：不一定。

例如，对于向量组$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，

它们中的任两个向量都线性无关，

但是$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是线性相关的。

4. 若$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$和$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$这两个向量组都线性相关，
则$\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2$是否也线性相关？

答案：不一定。

例如，对于向量组$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$和向量组$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$，

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$和$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$这两个向量组都线性相关，

但是$\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2$是线性无关的。

5. 若向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，向量$\mathbf{a}_{n+1}$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示，则向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_{n+1}$是线性相关还是线性无关？

答案是：向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_{n+1}$线性无关.

（记住该题的结论）

**证：（反证法）**

假设向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_{n+1}$线性相关，

因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，

根据定理5－4可知，　$\mathbf{a}_{n+1}$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示，

这与已知条件$\mathbf{a}_{n+1}$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示矛盾。

**提高题 5-1**

1. 设$\mathbf{a}_1=\left[1,k_1,k_1^2,\cdots,k_1^{n-1}\right]^T,\mathbf{a}_2=\left[1,k_2,k_2^2,\cdots,k_2^{n-1}\right]^T,\cdots,$

$\mathbf{a}_s=\left[1,k_s,k_s^2,\cdots,k_s^{n-1}\right]^T$，$s<n,i\neq j$ 时，$k_i\neq k_j$,

证明：向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_s$线性无关.

证：令$\mathbf{b}_1=\left[1,k_1,k_1^2,\cdots,k_1^{s-1}\right]^T,\mathbf{b}_2=\left[1,k_2,k_2^2,\cdots,k_2^{s-1}\right]^T,\cdots,$

$\mathbf{b}_s=\left[1,k_s,k_s^2,\cdots,k_s^{s-1}\right]^T$,

$$\left|\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s\right|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_s\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_s^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ k_1^{s-1} & k_2^{s-1} & \cdots & k_s^{s-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le s}(k_j-k_i)$$

因为$i\neq j$时，$k_i\neq k_j$，所以$\left|\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s\right|\neq 0$,$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s$线性无关

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_s$可看成是在$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_s$的基础上添加分量以后得到的，

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_s$线性无关。

2. 设$\mathbf{A}$为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是三元列向量，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$，

$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

证：由$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，得

$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},(\mathbf{A}-\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,(\mathbf{A}-\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2$

设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0,\qquad(1)$

用$\mathbf{A}-\mathbf{E}$乘（1）式，得$2k_2\boldsymbol{\alpha}_1+3k_3\boldsymbol{\alpha}_2=0\qquad(2)$

再用$\mathbf{A}-\mathbf{E}$乘（2）式，得$6k_3\boldsymbol{\alpha}_1=0$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$,所以$k_3=0$.

由（2）式可得，$k_2=0$,

再由$(1)$式可得，$k_1=0$.

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

## 思考题 5-2

1（1）若$r(\mathbf{A})=r$,则$\mathbf{A}$中所有$r$阶子阵都要求是非奇异的吗？

答：$\mathbf{A}$中有一个$r$阶非奇异子阵就行，不要求所有$r$阶子阵都是非奇异的.

（3）当$\mathbf{A}$为方阵时，$\mathbf{A}$的行向量组和列向量组的线性相关性相同吗？

答：相同。

因为$\mathbf{A}$的行秩与列秩相等。

当A为方阵时，A的行数和A的列数也相等。

若$\mathbf{A}$的行向量组线性相关，则$\mathbf{A}$的行秩$<\mathbf{A}$的行数。

这时，$\mathbf{A}$的列秩$<\mathbf{A}$的列数，$\mathbf{A}$的列向量组也线性相关。

若$\mathbf{A}$的行向量组线性无关，则$\mathbf{A}$的行秩$=\mathbf{A}$的行数。

这时，$\mathbf{A}$的列秩$=\mathbf{A}$的列数，$\mathbf{A}$的列向量组也线性无关。

可见，$\mathbf{A}$的行向量组与$\mathbf{A}$的列向量组要么都相关，要么都无关，所以$\mathbf{A}$的行向量组和$\mathbf{A}$的列向量组的线性相关性相同.

注意：当$\mathbf{A}$不是方阵时，

$\mathbf{A}$的行向量组和$\mathbf{A}$的列向量组的线性相关性不一定相同。

当$\mathbf{A}$不是方阵时，

$\mathbf{A}$的行向量组和$\mathbf{A}$的列向量组中一定有一个线性相关。

**习题 5-2**

4.设$r(\mathbf{A})=1$，证明：存在列向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{ab}^T$. (记住结论)

证：由$r(\mathbf{A})=1$及性质$5-4$可知，存在可逆矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}[1,0,\cdots,0]\mathbf{Q}^{-1},$$

$$令\mathbf{a}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\mathbf{b}=([1,0,\cdots,0]\mathbf{Q}^{-1})^T,$$

则$\mathbf{A}=\mathbf{ab}^T$.

10. 设$\mathbf{A}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$矩阵，且$m>n$，证明:$|\mathbf{AB}|=0$.

证 由已知可知，$\mathbf{AB}$为$m$阶方阵。.

由性质$5-6$，可得$r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})\le n<m$，

所以$\mathbf{AB}$为降秩矩阵,$|\mathbf{AB}|=0$.

**提高题 5-2**

$$4.求\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{bmatrix}的秩。$$

解：设$\mathbf{A}$为$n$ 阶方阵。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

当$a \neq b$且$a \neq -(n-1)b$时，$r(\mathbf{A}) = n$.

当$a = b = 0$时，$r(\mathbf{A}) = 0$.

当$a = b \neq 0$时，$r(\mathbf{A}) = 1$.

当$a = -(n-1)b \neq 0$时， $|\boldsymbol{A}|=0$，$r(\boldsymbol{A}) < n$.

由于$\mathbf{A}$的左上角$n-1$阶子式为$[a+(n-2)b](a-b)^{n-2} \neq 0$

所以$r(\boldsymbol{A}) < n$.

**思考题 5-3**

5.设向量组Ⅰ：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$和Ⅱ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$都是n 元列向量组，

且向量组Ⅰ线性无关，则向量组Ⅱ线性无关的充要条件是（　　）.

（A）向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示

（B）向量组Ⅱ可由向量组Ⅰ线性表示

（C）向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价

（D）矩阵$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$与矩阵$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$等价. （

答案选D.

先举例说明选项A、B、C都是错的。

设向量组I为：$a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$；向量组II为：$b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

这两个向量组都是线性无关的，

向量组I不能由向量组II线性表示，向量组II也不能由向量组I线性表示。

再来说明为什么选项D正确。

必要性. 因为这两个向量组都是线性无关的，所以它们的秩都是$m$

矩阵$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$与矩阵$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m)$同型，且秩相等。

根据习题5－2第3题可知，

矩阵$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$与矩阵$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m)$等价。

**充分性.**

因为矩阵$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$与矩阵$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m)$等价，所以它们的秩相等。

由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性无关可知，

矩阵$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$的秩为$m$,

因而矩阵$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m)$的秩也为$m$,

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$线性无关。

6. 若向量组Ⅰ与Ⅱ等价，则（　　）

(A) 当Ⅰ线性无关时，Ⅱ也线性无关

(B) 当Ⅰ线性相关时，Ⅱ也线性相关

(C) Ⅰ与Ⅱ的极大无关组相同

(D) Ⅰ与Ⅱ的极大无关组等价

答案选D.

注：等价的向量组所含向量的个数可以不同，

可以一个相关而另一个无关。

例如：向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$与向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$等价，

前一个向量组线性无关，后一个向量组线性相关，

这两个向量组的极大无关组也不相同

所以选项A、B、C都不对。

下面来证明D选项正确。证明过程用到极大无关组的定义和定理5 –7.

证：设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组I的极大无关组，

$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$是向量组II的极大无关组。

则$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$与向量组I等价，　$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$与向量组Ⅱ等价，

因为向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价,利用向量组等价的传递性可知，

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$与$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$等价，

所以选项D正确。

7.设向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组(II)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则(　　　)

(A) $r < s$时, 向量组(II)线性相关

(B) $r > s$时, 向量组(II)线性相关

(C) $r < s$时, 向量组(I)线性相关

(D) $r > s$时, 向量组(I)线性相关

答案为选项D

向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示

$\Rightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \le r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \le s$ ，

若$r > s$, 则$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) < r$,

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关。

选项A错　(A) $r < s$时, 向量组(II)线性相关。

例如，设向量组I为：$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r = 2;$

向量组Ⅱ为：$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s = 3$；

向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示,$r < s$,但向量组Ⅱ线性无关。

选项B错　(B) $r > s$时, 向量组(II)线性相关

例如，设向量组I为：$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r = 3;$

向量组Ⅱ为：$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s = 2$

向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示,$r > s$,但向量组Ⅱ线性无关。

选项C错。 (C) $r<s$时，向量组(I)线性相关

例如，设向量组I为：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},r=2;$

向量组II为：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},s=3;$

向量组I能由向量组II线性表示,$r<s$,但向量组I线性无关。

8. 设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$线性无关，则下列向量组线性无关的是（ ）

(A) $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$

(B) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1$

(C) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$

(D) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$

**答案选 D .**

对于选项(A) $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$

方法1：因为 $1\cdot(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)+1\cdot(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3)+1\cdot(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4)+1\cdot(\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1)=0,$

所以根据线性相关的定义可知，选项A中的向量组线性相关。

方法2：设$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4,\mathbf{b}_4=\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$, 则有

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4]=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4]\mathbf{P},\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

因为$|\mathbf{P}|=0$，所以$r(\mathbf{P})<4$.

$r([\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4])=r([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4]\mathbf{P})\le r(\mathbf{P})<4$，

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4$线性相关，即选项A中的向量组线性相关。

对于其它选项可类似地进行讨论。

**习题 5-3**

5. 设$m \geq 2$，向量组$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$线性无关，

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{b}_{m-1} = \mathbf{a}_{m-1} + \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_1$，

试讨论向量组$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$的线性相关性。

解：设$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m]$，则$\mathbf{B} = \mathbf{AP}$，其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{P}| = 1 + (-1)^{1+m}$$

当$m$为奇数时，$|\mathbf{P}|=2$，$\mathbf{P}$可逆，$r(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$,

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$线性无关。

当$m$为偶数时，$|\mathbf{P}|=0$, $r(\mathbf{P})<m$，$r(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AP}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{P})<m$,

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$线性相关。

**课外题选讲**

1. 设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_1$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，$\mathbf{b}_2$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，证明：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关。

证法1：因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_2$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关。

因为$\mathbf{b}_1$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，所以可设$\mathbf{b}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3$ .

$$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2\right]\right)=r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\lambda_1\mathbf{a}_1+k\lambda_2\mathbf{a}_2+k\lambda_3\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_2\right]\right)$$

$$\overset{c_4-(k\lambda_1)c_1-(k\lambda_2)c_2-(k\lambda_3)c_3}{=}r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2\right]\right)=4$$

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关。

证法2：因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_2$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关。

因为$\mathbf{b}_1$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，所以可设$\mathbf{b}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3$

为了证明$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关，

设$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+l_3\mathbf{a}_3+l_4(k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=0,$.

则有$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+l_3\mathbf{a}_3+l_4(k\lambda_1\mathbf{a}_1+k\lambda_2\mathbf{a}_2+k\lambda_3\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_2)=0$

即（$l_1+l_4k\lambda_1)\mathbf{a}_1+(l_2+l_4k\lambda_2)\mathbf{a}_2+(l_3+l_4k\lambda_3)\mathbf{a}_3+l_4\mathbf{b}_2=0$

因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关，

所以$\begin{cases} l_1+l_4k\lambda_1=0 \\ l_2+l_4k\lambda_2=0 \\ l_3+l_4k\lambda_3=0 \\ l_4=0 \end{cases}$，　　解得$\begin{cases} l_1=0 \\ l_2=0 \\ l_3=0 \\ l_4=0 \end{cases}$

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关。

2. 设$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，

其中$c_1,c_2,c_3,c_4$是任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$　　　　（B）$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$

（C）$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$　　　　（D）$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$

答案选（C）

解法1 因为这四个向量组构成的矩阵都是方阵，所以可用行列式做。

行列式等于0 的向量组线性相关，行列式不等于0 的向量组线性无关。

解法2 通过观察可以发现，$\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$ 与$\mathbf{a}_1$成倍数关系，

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$线性相关。

3. 设$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\k_1\\k_1^2\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\k_2\\k_2^2\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}1\\k_3\\k_3^2\end{bmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}1\\k_4\\k_4^2\end{bmatrix},k_1,k_2,k_3,k_4$ 互不相等，

求该向量组的秩和一个极大无关组。

解 根据书上例5-6的结论可知，四个三元向量一定线性相关。

由$\left|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\k_1&k_2&k_3\\k_1^2&k_2^2&k_3^2\end{vmatrix}=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)\neq 0$ 可知，

向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关。

该向量组的秩为3，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是一个极大无关组。

注：其中的任三个向量都是该向量组的一个极大无关组。、

4. 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$等价，则$k=$ ____

注：两个矩阵等价的充要条件是它们同型且秩相等。

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\mathbf{B})=2$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+kr_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & k \\ 0 & k+1 & -k-1 \\ 0 & -k-1 & k^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & k \\ 0 & k+1 & -k-1 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 \end{pmatrix}$$

当$k \neq -1$且$k \neq 2$时$,r(\mathbf{A})=3$

当$k=-1$时，$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ r(\mathbf{A})=1$

当$k=2$时，$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ r(\mathbf{A})=2$

当$k=2$时$,r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=2,\ \mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价。

5. 设$\boldsymbol{a}=(1,1,0)^T,\boldsymbol{b}=(1,2,3)^T,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T,r(\boldsymbol{B}_{3\times3})=2$，求$r(\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B})$.

解　$r(\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B})=r((\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=2$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,2,3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&2&3\\1&0&3\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=4\neq0$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$可逆

6. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是5阶方阵，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{B})=2$，求$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B})$.

解　$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B})=r((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=2$

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆

7. 设$\boldsymbol{A}$为4阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=0,\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,求$r(\boldsymbol{A})$.

解　$|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow r(\boldsymbol{A})<4$，　$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=3$或$4$

注：$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases}n & r(\mathbf{A})=n\\1 & r(\mathbf{A})=n-1\\0 & r(\mathbf{A})\leq n-2\end{cases}$

所以$r(\boldsymbol{A})=3$

8. 设$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$为三阶非零矩阵，$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$, 则（　）

(A) $r(\boldsymbol{P})=3$　　(B) $t\neq6$时,$\boldsymbol{P}$的秩必为1

(C) $t=6$时,$\boldsymbol{P}$的秩必为2　　(D) $t=6$时,$\boldsymbol{P}$的秩必为1

解　$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leq3\Rightarrow r(\boldsymbol{P})\leq3-r(\boldsymbol{Q})$

$\boldsymbol{P}$为三阶非零矩阵$\Rightarrow r(\boldsymbol{P})\geq1$

将上面的两个结论结合起来，可得$1\leq r(\boldsymbol{P})\leq3-r(\boldsymbol{Q})$

当t=6时，$r(\boldsymbol{Q})$=1，可得$1\le r(\boldsymbol{P})\le 2$.

当t$\ne$6时，$r(\boldsymbol{Q})$=2，可得$1\le r(\boldsymbol{P})\le 1$，$r(\boldsymbol{P})=1$

答案选（B）

9. 设$\mathbf{a}$为10元列向量，$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=2, \mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{a}^T$, 求$r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})$.

解 因为$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=2$,

所以$\mathbf{A}^2=(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)=\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T=2(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)=2\mathbf{A}$,

$\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}=\mathbf{O},\quad \mathbf{A}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=\mathbf{O},\quad r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\le 10,$

又因为$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=r(\mathbf{A})+r(2\mathbf{E}-\mathbf{A})\ge r(\mathbf{A}+(2\mathbf{E}-\mathbf{A}))$

$=r(2\mathbf{E})=10,$

所以$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=10.$

由$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=2$可知, $\mathbf{a}\ne 0,\quad \mathbf{A}=\mathbf{a}\mathbf{a}^T\ne\mathbf{O},\ r(\mathbf{A})\ge 1.$

又因为$r(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\le r(\mathbf{a})=1$, 所以$r(\mathbf{A})=1.$

$r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=9.$

10. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\1&-1&k\end{pmatrix}$，三元列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，

而向量组$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，求$k$.

解 $\left[A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3\right]=A\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]$ $\left|A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3\right|=|A|\cdot\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|$

因为向量组$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，所以$\left|A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3\right|=0.$

$|A|\cdot\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=0$

由三元列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，可得$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|\ne 0$. 所以$|A|=0$，

$k-2=0,\ k=2.$