思考题 8-1

1. 不能。因为如果 $\mathbf{p}$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 对应的特征向量，则 $\mathbf{Ap}$ 是一个固定的向量，满足 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 的 λ 一定是唯一的。

2. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 的特征值是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值合并在一起。若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值，则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $\mathbf{C}$ 的特征值。

因为 $\left|\lambda\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{C}\right|=\begin{vmatrix}\lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{B}\end{vmatrix}=\left|\lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{A}\right|\left|\lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{B}\right|$, $\left|\lambda\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{C}\right|=0$ 的根是 $\left|\lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{A}\right|=0$ 的根与 $\left|\lambda\mathbf{E}_n-\mathbf{B}\right|=0$ 的根的合并在一起。

3. 一般不相同。

例 1 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{A}\xrightarrow{c_2+2c_1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{c_1-\frac{2}{3}c_2}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{3} & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ 的特征值为 $1,-1$, 而 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $-\dfrac{1}{3},3$.

例 2 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ 的特征值为 $i,-i$，而 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $1,-1$.

4. 一般不是。例如，设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$， $\mathbf{A}$ 的特征值为 $-1,1$， $\mathbf{B}$ 的特征值为 $-1,1$. 而 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的特征值为 $-i,i$. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的特征值不是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值之和。

这个结论不成立的原因是 λ 和 μ 作为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值所对应的特征向量一般不相同。

5. 由 $r(\mathbf{A}+\mathbf{E})=2$, 得 $\left|\mathbf{A}+\mathbf{E}\right|=0$, $\lambda_2=-1$， $\mathbf{A}$ 的特征值为 $-2,-2,-1$.

$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=(-2)+(-2)+(-1)=-5$ ， $\left|\mathbf{A}\right|=(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)=-4.$

6. 由已知可得 $\mathbf{Ap}_1=\lambda\mathbf{p}_1, \mathbf{Ap}_2=\lambda\mathbf{p}_2$, 进一步可得 $\mathbf{A}(k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2)=\lambda(k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2)$,

当 k_1 和 k_2 不全为 0 时， $k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$ 也是 λ 对应的特征向量。

习题 8-1

1. (2) $\mathbf{A}$ 的特征值为 0 (单）, 1 (二重);对应的全部特征向量依次为 $k_1[1,1,1]^T$ $(k_1 \neq 0)$;

$k_2[1,2,0]^T + k_3[0,-2,1]^T$ （k_2 和 k_3 不全为 0）.

(4) $\mathbf{A}$ 的特征值为 2 (三重);对应的全部特征向量为 $k[1,0,0]^T$ （$k \neq 0$）

（5） $\mathbf{A}$ 的特征值为 $k+n-1$ (单）, $k-1$ ($n-1$ 重);对应的全部特征向量依次为 $k_1[1,1,\cdots,1]^T$ $(k_1 \neq 0)$; $k_2[-1,1,0\cdots,0]^T + k_3[-1,0,1,\cdots,0]^T + \cdots + k_n[-1,0,\cdots,0,1]^T$

（$k_2, k_3, \cdots, k_n$ 不全为 0）.

4. **解**：$2\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^* = 2\mathbf{A}^{-1} + |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = 6\mathbf{A}^{-1}$, 将 $6\mathbf{A}^{-1}$ 中的 $\mathbf{A}$ 换为 2 得到 3，故 $2\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^*$ 有一个特征值为 3.

7. **证**：因为 $\mathbf{A}$ 的每一列元素之和都为常数 k，而对称矩阵的第 i 行的数与第 i 列的数相同，所以

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

故 k 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，且 $[1,1,\cdots,1]^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的对应于特征值 k 的特征向量.

8. **证**：设 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$，$\lambda = 2$.故 $\mathbf{A}$ 的特征值只为 2，$\mathbf{A} + k\mathbf{E}$ 的特征值只为 $k+2$.于是，

$\mathbf{A} + k\mathbf{E}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} + k\mathbf{E}$ 的特征值都不为零 $\Leftrightarrow k \neq -2$.

提高题 8-1

1. **解**：设 $\mathbf{u} = k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3$, 解得 $k_1 = 2, k_2 = 9, k_3 = 1$, 故 $\mathbf{u} = 2\mathbf{p}_1 + 9\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$.

因为 $\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \mathbf{A}^n \mathbf{p}_i = \lambda_i^n \mathbf{p}_i$, 所以

$$\mathbf{A}^n \mathbf{u} = 2\lambda_1^n \mathbf{p}_1 + 9\lambda_2^n \mathbf{p}_2 + \lambda_3^n \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_1 + 9(-1)^n \mathbf{p}_2 + 2^n \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -4 + 9(-1)^n + 2^n \\ 2 - 2^{n+1} \\ 9(-1)^n + 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}.$$

2. **证**：若 $\lambda = 0$，则 $|0\mathbf{E} - \mathbf{AB}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{AB}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{BA}| = 0$，进一步可得 $|0\mathbf{E} - \mathbf{BA}| = 0$，$0$ 也是 $\mathbf{BA}$ 的特征值.

设 $\lambda \neq 0, \mathbf{p}$ 是 $\mathbf{AB}$ 的特征值 λ 对应的特征向量，则 $(\mathbf{AB})\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$.

用$\mathbf{B}$同时乘以上式两边，得

$$\mathbf{B}(\mathbf{AB})\mathbf{p}=\lambda\mathbf{Bp}, \text{即} (\mathbf{BA})(\mathbf{Bp})=\lambda(\mathbf{Bp}).$$

若$\mathbf{Bp}=\mathbf{0}$，则$(\mathbf{AB})\mathbf{p}=\mathbf{0}$，而$\lambda\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$,这与$(\mathbf{AB})\mathbf{p}=\lambda\mathbf{P}$矛盾，所以$\mathbf{Bp}\neq\mathbf{0}$.

注意：$\mathbf{Bp}$是个n元列向量.

于是，由$(\mathbf{BA})(\mathbf{Bp})=\lambda(\mathbf{Bp})$可知，$\lambda$也是$\mathbf{BA}$的特征值.

3.（1）**证：**由$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$正交，得$\mathbf{b}^T\mathbf{a}=0$. 于是，$\mathbf{A}^2=(\mathbf{ab}^T)(\mathbf{ab}^T)=\mathbf{a}(\mathbf{b}^T\mathbf{a})\mathbf{b}^T=\mathbf{O}$.

设λ是$\mathbf{A}$的特征值，则$\lambda^2=0,\lambda=0$.故$\mathbf{A}$只有零特征值.

（2）**解：**为了求$\mathbf{A}$的全部特征向量，需解方程组$(0\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即解方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$.

不妨设$a_1\neq 0, b_1\neq 0$，下面算出$\mathbf{A}$并用初等行变换对$\mathbf{A}$进行化简。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$化简后成为

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0,$$

$\mathbf{A}$的全部特征向量为

$$k_1\begin{bmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -b_3 \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{bmatrix} -b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$不全为零。

4.**证：**由$\mathbf{A}$为降秩矩阵可知，$\mathbf{A}^*$的秩为0或1.

若$\mathbf{A}^*$的秩为0，则$\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$，$\mathbf{A}^*$的特征值全为零。

若$\mathbf{A}^*$的秩为1，则$\mathbf{A}^*\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系含$n-1$个向量，根据第8章第2节定理8-4可知，0至少是$\mathbf{A}^*$的$n$-1重特征值。这说明要么$\mathbf{A}^*$的特征值全为零，要么0是$\mathbf{A}^*$的$n$-1重特征值。若0是$\mathbf{A}^*$的$n$-1重特征值，则$\mathbf{A}^*$还应该有一个非零特征值。因为$\mathbf{A}^*$的特征值之和

等于 $\mathbf{A}^*$ 的对角元之和，所以 $\mathbf{A}^*$ 的那个非零特征值为 $\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

5. 证：$\because r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\right) \le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})<n, \therefore \begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解。设 $\mathbf{u}\ne\mathbf{0}$ 是其非零解，则 $\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0}$. 由此可得，$\mathbf{Au}=\mathbf{0},\mathbf{Bu}=\mathbf{0}$. 可见，$\mathbf{u}$ 既是 $\mathbf{A}$ 的特征向量，也是 $\mathbf{B}$ 的特征向量，对应的特征值是 0.

思考题 8-2

1. 不唯一。因为 $\mathbf{A}$ 的相似标准形是一个对角矩阵，其对角元为 $\mathbf{A}$ 的特征值，特征值的排列次序可以变化，所以 $\mathbf{A}$ 的相似标准形不唯一。

2. 不唯一。因为 $\mathbf{P}$ 是以 $\mathbf{A}$ 的线性无关的特征向量作为列构成的矩阵，$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是 λ_i 对应的线性无关的特征向量，而 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是不唯一的，所以 $\mathbf{P}$ 不唯一。

3. 不妨设 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A}=\mathbf{BA}$. 可见，如果方阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 中有一个可逆，则 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 一定相似，

4. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似。因为 $\mathbf{PAP}^{-1}=\mathbf{B}$ 可以写成 $(\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{AP}^{-1}=\mathbf{B}$ ，满足相似的定义。

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值相同，但不相似.

6.能。因为上三角形矩阵的特征值为其对角元，对角元互异的上三角形矩阵的特征值都是单特征值，所以能与对角矩阵相似。

7. 不成立。需加条件：可相似对角化。

当 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化时，设 $\mathbf{A}$ 的非零特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ ，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ ，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$ ，$\mathbf{A}$ 的秩等于对角矩阵 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$ 的秩，即非零特征值的个数。

下面给出一个该结论不成立的例子。$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的秩为 2，但一个非零特征值都没有。

习题 8-2

3.（1）解：$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -5\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -5\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -5\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2),$$

$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-2.$

由于 $\mathbf{A}$ 的特征值都是单特征值，所以 $\mathbf{A}$ 可相似对角化。

(2)解：$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$

$\lambda_1=1$（3 重）.

由于 $\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$r(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})=2$，$\lambda_1$ 只能对应出一个线性无关的特征向量，所以 $\mathbf{A}$ 不可相似对角化。

(3)$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -2 & \lambda & -1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -\lambda+1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

$\lambda_1=1,\lambda_2=2$（2 重）.

由于 $\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$r(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})=2$，$\lambda_2$ 只能对应出一个线性无关的特征向量，所以 $\mathbf{A}$ 不可相似对角化。

5. 证：由 $\mathbf{E}-2\mathbf{A},\mathbf{E}+2\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{E}-3\mathbf{A}$ 的秩都小于 3，

可得 $\left|\mathbf{E}-2\mathbf{A}\right|=0,\left|\mathbf{E}+2\mathbf{A}\right|=0$，$\left|\mathbf{E}-3\mathbf{A}\right|=0$

进一步可得 $\left|\frac{1}{2}\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=0,\left|-\frac{1}{2}\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=0$，$\left|\frac{1}{3}\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=0$

由上面的三个式子可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为$\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

因为$\mathbf{A}$ 的特征值都不为零，所以$\mathbf{A}$ 可逆。

注意：若λ是$\mathbf{A}$ 的特征值，则$1+6\lambda$是$\mathbf{E}+6\mathbf{A}$ 的特征值。

根据$\mathbf{A}$ 的特征值可求出$\mathbf{E}+6\mathbf{A}$ 的特征值，为$4,-2,3$，

$|\mathbf{E}+6\mathbf{A}|=4\times(-2)\times 3=-24.$

注意：若λ是$\mathbf{A}$ 的特征值，则$2+\lambda^{-1}$是$2\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}$的特征值。

根据$\mathbf{A}$ 的特征值可求出$2\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}$的特征值，为$4,0,5$，$|2\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}|=0$.

8. **证**：设$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}, f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$,对于$k=1,2,\cdots,m$，有

$$\mathbf{B}^k=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}\text{，}$$

$$f(\mathbf{B})=a_m\mathbf{B}^m+\cdots+a_1\mathbf{B}+a_0\mathbf{E}=a_m\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{P}+\cdots+a_1\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}+a_0\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}$$

$$=\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P},$$

故$f(\mathbf{A})$与$f(\mathbf{B})$相似。

9. **证**：由已知，得$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mu\mathbf{u}$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u})=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u})=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{P}^{-1}\mu\mathbf{u}=\mu(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}),$$

所以$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}$是$\mathbf{B}$的特征值$\mu$对应的特征向量.

10. **证**：因为$\mathbf{A}$可相似对角化，所以存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$为对角矩阵。

将上式转置，得$\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T=\mathbf{\Lambda}^T$，即$\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T=\mathbf{\Lambda}.$

由$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$和$\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T=\mathbf{\Lambda}$可得，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T$,

即$\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)=(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)\mathbf{A}^T$.

取$\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{P}^T$，则$\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^T=\mathbf{O}$.

提高题 8-2

1. **证**：设$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$，两边取逆，得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{B}^{-1}$，故$\mathbf{A}^{-1}$与$\mathbf{B}^{-1}$相似。

由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，得 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$.

用 $|\mathbf{A}|$（即 $|\mathbf{B}|$）乘以 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{B}^{-1}$ 的两边，得

$\mathbf{P}^{-1}|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}=|\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}$，即 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{P}=\mathbf{B}^{*}$, 故 $\mathbf{A}^{*}$ 与 $\mathbf{B}^{*}$ 相似.

2. **解法 1**：令 $\mathbf{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2],\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{AP}=\mathbf{PB},\quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$.

注：由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的二元列向量，可知 $\mathbf{P}$ 可逆。

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)$，得 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $3,-1$.

因为 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同，故 $\mathbf{A}$ 的特征值也为 $3,-1$.

解法 2：设 $\mathbf{A}(k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，则

$$k\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda(k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$$

$$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2).$$

$$(k+4-\lambda k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k+4-\lambda k=0\\k+1-\lambda=0\end{cases}$.

解得 $\begin{cases}k=2\\\lambda=3\end{cases},\begin{cases}k=-2\\\lambda=-1\end{cases}$，故 $\mathbf{A}$ 的特征值也为 $3,-1$.

3.**解法 1**：设 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}[2,0,0]\mathbf{P}$.

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=[2,0,0]\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=[2,0,0]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=2..$$

解法 2：设 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}$，两边平方，得 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^2=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}4&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}$.

因为 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^2=(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)$，$\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}4&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}=2\cdot\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}$，而

$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\mathbf{P}$，所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=2.$

解法 3：设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=[b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

可见，$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 的对角元之和，所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=tr(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 相似于 $\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$，所以迹相等，$tr(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=2,\ \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=2.$

4. **证**：设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵。

由 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，得 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{O}, r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\le n.$

又因为 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\ge r[(\mathbf{A}+2\mathbf{E})-(\mathbf{A}-\mathbf{E})]=r(3\mathbf{E})=n$，所以

$$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n.$$

若 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=0,$ 则 $\mathbf{A}=-2\mathbf{E}$，$\mathbf{A}$ 可相似对角化，其相似标准形是它自己。

若 $r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=0,$ 则 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$，$\mathbf{A}$ 可相似对角化，其相似标准形是它自己。

下面设 $0<r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})<n, 0<r(\mathbf{A}-\mathbf{E})<n.$

由 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{O}$，可知 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 的非零列向量是 -2 对应的特征向量，有 $r(\mathbf{A}-\mathbf{E})$ 个线性无关的特征向量。

由 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，还可得 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=\mathbf{O}$, $\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 的非零列向量是 1 对应的特征向量，有 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})$ 个线性无关的特征向量。

因为$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n,$ 并且相异特征值对应的无关特征向量合起来还是无关的，所以$\mathbf{A}$有n个线性无关的特征向量，故$\mathbf{A}$可相似对角化。

因为$\mathbf{A}$恰好有n个特征值，而每个特征值的重数大于或等于其所对应的无关特征向量的个数，所以$\mathbf{A}$的相似标准形为$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}$，其中1的个数为$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})$，$-2$的个数为$r(\mathbf{A}-\mathbf{E})$.

思考题 8-3

1.实对称矩阵$\mathbf{A}$的非零特征值的个数等于$r(\mathbf{A})$.因为实对称矩阵都可相似对角化，设$\mathbf{A}$的非零特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，则存在正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$，$\mathbf{A}$的秩等于对角矩阵$diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$的秩，即非零特征值的个数。

。

2.不能。因为若$\mathbf{Q}$为正交矩阵，$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}$为对角矩阵，则$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$，可以验证$\mathbf{A}$为对称矩阵，这说明只有对称矩阵才能通过正交相似变换将其化为对角矩阵。

3.是。因为正交化所得向量组与原向量组等价，根据性质 8-3 可以验证。

习题 8-3

1.(2)**解：** $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3+2r_1}{=}} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2\lambda+2 & \lambda-1 & 0 \\ 2\lambda-2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

$\lambda_1=1$（2 重），$\lambda_2=10$（单）.

对于λ_1，解方程组$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $x_1+2x_2-2x_3=0,$

方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix};$

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 正交化，取

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2-\frac{\mathbf{u}_1^T\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\frac{4}{5}\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 5\end{bmatrix}.$$

再将 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 单位化，得

$$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 5\end{bmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=10$，

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2-2r_3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 4\\ 0 & 9 & 9\end{bmatrix},$$

方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $\begin{cases}-2x_1+5x_2+4x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=[1,2,-2]^T\ .$$

将 $\mathbf{p}_3$ 单位化，得 $\mathbf{q}_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}.$

令 $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$,

则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10)$.

(3)**解**：由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-1)$ ，

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=4$ ，$\lambda_2=3$ ，$\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=4$ ，由

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_1=[0,0,1]^T .$$

对于 $\lambda_2=3$ ，由

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_2=[1,1,0]^T .$$

对于 $\lambda_3=1$ ，由

$$\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=[-1,1,0]^T .$$

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 单位化，得

$$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{Q}=\left[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix},$$

则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(4,3,1).$$

3. **解**：设 $\mathbf{p}_3=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T$ 是 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量，根据定理 8-7 可知，$\mathbf{p}_3$ 与 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 均正交。于是，有

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3=0\end{cases},$$

求得该方程组的基础解系为 $\mathbf{p}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.

令 $\mathbf{P}=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\right]=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$.

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\cdot(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&-2\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&-2\\-1&-1&0\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

4. **证**：由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可知，$\mathbf{A}$ 的特征值都是实数。因为 $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 等于 $\mathbf{A}$ 的特征值之和，且 $\mathrm{tr}(\mathbf{A})<0$，所以 $\mathbf{A}$ 一定有一个负特征值。

设 $\mu<0$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 μ 对应的实特征向量，则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha}$,

$\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\mu\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\|^2<0$。

6. **证**：设λ是$\mathbf{A}$的特征值，则$(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$，$\lambda=1$或$\lambda=\pm i$.

因为$\mathbf{A}$为实对称矩阵，$\mathbf{A}$的特征值都是实数，所以$\mathbf{A}$的特征值只为1.

由$\mathbf{A}$为实对称矩阵可知，存在正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{E}, \mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{E}.$

提高题 8-3

1.**解**：设λ是$\mathbf{A}$的特征值，则$\lambda^2=\lambda$，$\lambda=1$或$\lambda=0$.

因为$\mathbf{A}$是实对称矩阵，非零特征值的个数等于它的秩，而$r(\mathbf{A})=r$，所以1是$\mathbf{A}$的r重特征值，0是$\mathbf{A}$的$n-r$重特征值.

又因为实对称矩阵都可相似对角化，所以$\mathbf{A}$相似于$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$.

2. **证**：设λ是正交矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}$是λ对应的特征向量，则$\mathbf{A}\mathbf{p}=\lambda\mathbf{p}.$

因为$\mathbf{A}$为正交矩阵，所以$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}.$ 注：正交矩阵都是实矩阵，$\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}.$

$\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{p}=(\overline{\mathbf{A}\mathbf{p}})^T(\mathbf{A}\mathbf{p})=(\overline{\lambda}\overline{\mathbf{p}}^T)(\lambda\mathbf{p})=|\lambda|^2\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}$，即$(1-|\lambda|^2)\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=0.$

由$\mathbf{p}\neq\mathbf{0},$得$\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}\neq 0.$所以$1-|\lambda|^2=0, |\lambda|=1.$

3. **证**：设λ是实的反称矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}$是λ对应的特征向量，则$\mathbf{A}\mathbf{p}=\lambda\mathbf{p}.$

$\lambda\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T(\mathbf{A}\mathbf{p})=-\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{p}=-(\overline{\mathbf{A}\mathbf{p}})^T\mathbf{p}=-\overline{\lambda}\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}$，即$(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=0.$

由$\mathbf{p}\neq\mathbf{0},$得$\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}\neq 0.$所以$\lambda+\overline{\lambda}=0, \overline{\lambda}=-\lambda,$ λ为零或纯虚数。