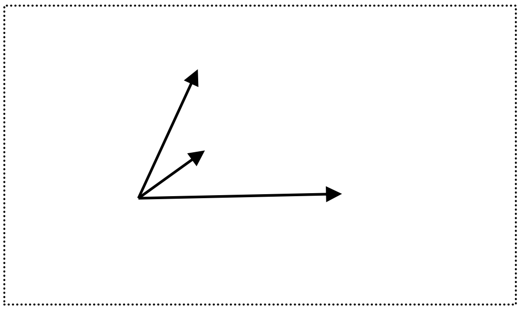
第 4 章习题答案

思考题 4-1

1.（1）不对。我们现在遇到的向量都是自由向量，可以平行移动。$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的意思是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 一开始并不一定在一条直线上。

（2）不对。我们现在遇到的向量都是自由向量，可以平行移动。$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面的意思是它们平行于同一个平面，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 一开始并不一定在一个平面上;

（3）不对。参考下图，水平方向的向量为 $\vec{c}$.



2．一个向量的方向可用它的单位向量、方向角、方向余弦表示。

习题 4-1

2.**证：**因为 M 是线段 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，即

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}.$$

因而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

4．图略。点 A 关于 Oxy 面的对称点的坐标为 $(2,4,1)$，点 B 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(2,4,-1)$.

5．A 在第 II 卦限，B 在第 V 卦限，C 在第 VIII 卦限，D 在第 III 卦限。

8．$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=-12\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}.$

10．$M(0,1,-2)$

思考题 4-2

1.（1）不成立.

（2）不成立.

（3）成立.

（4）不成立.例如，$\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)=\vec{0},\ \left(\vec{i}\times\vec{j}\right)\times\vec{j}\neq\vec{i}\times\left(\vec{j}\times\vec{j}\right).$

（5）不成立.$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$；

（6）成立.因为$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c},\vec{a},\vec{b}$的混合积为$0$.

2．$\triangle ABC$的面积等于$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

3．四面体$A_1A_2A_3A_4$的体积等于$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|$

4．$\lambda=\pm 6.$

习题 4-2

1.（1）**解：** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=8\times 5\times\cos\frac{2\pi}{3}=-20$；

（2）**解：** $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

（3）**解：** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=3\times 6\times\cos 0=18$；

（4）**解：** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=3\times 1\times\cos\pi=-3$.

2.**解：**因为$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$互相垂直,所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

$$\left|\vec{\gamma}\right|=(\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma})^{\frac{1}{2}}=[(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})]^{\frac{1}{2}}=(\alpha^2\left|\vec{a}\right|^2+\beta^2\left|\vec{b}\right|^2+\gamma^2\left|\vec{c}\right|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3.

（2）**解：** $\left|\vec{a}\right|=3\sqrt{6},\left|\vec{b}\right|=3.$

$\vec{b}$的方向余弦为$\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{1}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}.$

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为$(\vec{a})_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{18}{3}=6..$

4.（1）$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-3(\vec{a}\times\vec{b});$

（2）$\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=-2\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{c}$；

（3）$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=-5(\vec{a}\times\vec{b}).$

6.**解**：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=-\vec{k},$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}.$$

9.**解**：$\vec{c}\cdot\vec{d}=(\lambda\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\lambda\left|\vec{a}\right|^2+(2-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2$

$$=8\lambda+(2-\lambda)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}-25=8\lambda+(2-\lambda)\cdot5-25=3\lambda-15$$

所以当$\lambda=5$时，$\vec{c}$与$\vec{d}$垂直。

10．**解**：$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=(3\lambda+2\mu)\vec{i}+(5\lambda+\mu)\vec{j}+(-2\lambda+4\mu)\vec{k},$

因为$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与$z$轴垂直，所以$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{k}=0$，即$-2\lambda+4\mu=0$.

$\lambda=2\mu.$

11 **解**：$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=2\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=4$$

13．**解**：（1）$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k},\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

因为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$不成倍数，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$不平行，这三点不共线.

（2）$\overrightarrow{AB}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

因为$\overrightarrow{BC}$是$\overrightarrow{AB}$的2倍，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$平行，这三点共线.

16．**证**:设$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为θ_1，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ_2.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta_2\le\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

$$\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|^2=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2=[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]^2=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2\cos^2\theta_1\le\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2\le\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2.$$

17．**证**：由 $\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0},$ 得 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$

由 $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{0}=\vec{0},$ 得 $-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}.$

所以 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$

18．**证**：由于 $\vec{b}\times\vec{c}$ 和 $\vec{c}\times\vec{a}$ 都与 $\vec{c}$ 垂直，所以 $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}=0,(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0.$

由 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0},$ 得 $(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0.$ 整理，得 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

所以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

思考题 4-3

1. 平面的截距式方程的形式是唯一的，平面的点法式方程、一般式方程、三点式方程的形式不是唯一的。

2. 有。找出交线上的两点通过三点式方程来求也很简便。

3. 都是线性方程，变量的个数与其所在空间的维数有关。空间解析几何中的平面方程是三元一次方程，平面解析几何中的直线方程是二元一次方程。

4. 过 x 轴的平面的方程的特点是 x 的系数和常数项都为 0；垂直于 z 轴的平面就是平行于 oxy 面的平面，其方程的特点是 x 和 y 的系数都为 0.

习题 4-3

1.（1）$\boldsymbol{n}=\left[3,-2,5\right]^T$.

（2）$\boldsymbol{n}=\left[1,-1,0\right]^T$.

（2）$\boldsymbol{n}=\left[0,1,0\right]^T$.

3．**解**：利用三点式方程来求。

所求方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-(-1) \\ -2-1 & -2-1 & 2-(-1) \\ 1-1 & -1-1 & 2-(-1) \end{vmatrix}=0,$$

即 $x-3y-2z=0.$

4．**解**：所求平面方程为 $3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$，

即 $3x-7y+5z=4$.

6．略

8．**解**：设所求平面方程为 $Ax+By=0$，代入所过点的坐标，得

$$A+2B=0,\ A=-2B.$$

所求平面方程为 $-2x+y=0.$

10．**证**：不在同一条直线上的三点 (x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2) 和 (x_3,y_3,z_3) 所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

将 $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$ 中行列式的 1,3,4 行分别减去第二行，再按第一列展开，得到的就是上式。

习题 4-4

1．（1）**解**：该直线的参数式方程和对称式方程分别为

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=-2+2t \end{cases} \quad 和 \frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}.$$

（2）**解**：该直线的参数式方程和对称式方程分别为

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases} \quad 和 \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{0}.$$

（3）**解**：该直线的方向向量为 $\overrightarrow{AB}$，它的坐标向量为 $[0,1,4]^T$，其参数式方程和对称式方程分别为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-1+4t \end{cases} \quad 和 \frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

（6）**解**：两已知平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=[1,1,1]^T$ 和 $\boldsymbol{n}_2=[0,1,-1]^T$.先通过叉乘积来

求该直线的方向向量。该直线的方向向量为

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

该直线的参数式方程和对称式方程分别为

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=2+t\\ z=3+t\end{cases}\quad 和\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}.$$

（8）**解：**已知平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\left[1,1,1\right]^T$,已知直线的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=\left[1,-1,2\right]^T$.先通过叉乘积来求该直线的方向向量。该直线的方向向量为

$$\vec{s}=\vec{n}\times\vec{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$$

该直线的参数式方程和对称式方程分别为

$$\begin{cases}x=3t\\ y=1-t\\ z=2-2t\end{cases}\quad 和\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}.$$

2.（1）$\frac{x+8}{-4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$；

（2）$\frac{x+\frac{2}{3}}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+\frac{1}{3}}{-4}$.

3.

（3）提示：该平面的法向量为直线l_1和l_2的方向向量的叉乘积。

该平面的方程为$x-2y+z=0$.

（4）提示：通过同轴平面束来做。

该平面的方程为$4x+8y-2z+1=0$.

习题 4-5

1.（1）当$C=-6$且$D\neq-\frac{5}{2}$时，这两个平面平行.

（2）当$C=-6$且$D=-\frac{5}{2}$时，这两个平面重合.

2.（1）相交，交点为$\left(3,-1,-2\right)$.

（2）相交，交点为$\left(-\frac{7}{3},\frac{37}{3},-8\right)$.

（3）直线在平面上.

5．**解：**$\boldsymbol{n}_1=[1,1,2]^T,\boldsymbol{n}_2=[2,-1,1]^T$

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

这两个平面的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

6．**解：**$\boldsymbol{n}=[2,-2,1]^T,\boldsymbol{i}=[1,0,0]^T,\boldsymbol{j}=[0,1,0]^T,\boldsymbol{k}=[0,0,1]^T$

设平面$2x-2y+z+5=0$与oxy面$,oyz$面$,ozx$面 的夹角分别为$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

$$\cos\varphi_1=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{k}\right|}=\frac{1}{3},\ \varphi_1=\arccos\frac{1}{3}.$$

$$\cos\varphi_2=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{i}\right|}=\frac{2}{3},\ \varphi_2=\arccos\frac{2}{3}.$$

$$\cos\varphi_3=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{j}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{j}\right|}=\frac{2}{3},\ \varphi_3=\arccos\frac{2}{3}.$$

7．**解：**直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$的方向向量为$\vec{s}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.平面$x-y-z+1=0$的法向量为$\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

设直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角为$\varphi$，则

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\vec{n}\right|}=0,\ \varphi=0.$$

10．**解：**因为这两个平面平行，所以它们之间的距离等于平面π_1上的一点到平面π_2的距离．在平面π_1上取一点$(12,0,0)$，所求距离为

$$d=\frac{\left|12-2\times0-2\times0-6\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=2.$$

11．**解：**设所求平面的方程为$x+2y-2z=D$，在已知平面上取一点$(1,0,0)$，则

$$\frac{|1+2\times0-2\times0-D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2,\quad 即\frac{|1-D|}{3}=2.$$

$D=-5$ 或 $D=7.$

所求平面为 $x+2y-2z=-5$ 或 $x+2y-2z=7.$

12．**证：**不妨设 $a\neq0,$ 在第一个平面上取一点 $(\frac{d_1}{a},0,0)$ 则平面 $ax+by+cz=d_1$ 和 $ax+by+cz=d_2$ 的距离为

$$d=\frac{\left|a\times\frac{d_1}{a}+b\times0+c\times0-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}..$$

13.（1）13；　（2）7；　（3）$\dfrac{40}{\sqrt{170}}$.

14．**解：**过点 $M(4,-3,1)$ 且与平面 $x+2y-z-3=0$ 垂直的直线的参数式方程为

$$\begin{cases}x=4+t\\y=-3+2t\\z=1-t\end{cases}$$

将上式代入 $x+2y-z-3=0$ 中，得

$$(4+t)+2(-3+2t)-(1-t)-3=0$$

解得 $t=1.$

点 $M(4,-3,1)$ 在平面 $x+2y-z-3=0$ 上的投影点为 $(5,-1,0)$

15. **解：**设过点 $M(2,-3,-1)$ 向直线 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 所作垂线的垂足为 $Q(1-2t,-1-t,t)$，则 $\overrightarrow{MQ}$ 与已知直线的方向向量垂直，它们的数量积等于 0.

$$(-1-2t)\cdot(-2)+(2-t)\cdot(-1)+(t+1)\cdot1=0$$

解得 $t=-\dfrac{1}{6}.$

Q 点的坐标为 $(\dfrac{4}{3},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{6})$，该直线的参数式方程和对称式方程分别为

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{13}=\frac{z+1}{5}.$$

16. **解：**设异面直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 的公垂线在这两条直线上的垂

足分别为 $P\left(k,2k,3k\right)$ 和 $Q\left(1+t,-1+t,2+t\right)$，则 $\overrightarrow{PQ}$ 与这两条直线的方向向量都垂直，数量积均为 0 .于是，有

$$\begin{cases}(1+t-k)\cdot 1+(-1+t-2k)\cdot 2+(2+t-3k)\cdot 3=0\\(1+t-k)\cdot 1+(-1+t-2k)\cdot 1+(2+t-3k)\cdot 1=0\end{cases}.$$

解得 $k=\frac{1}{2},t=\frac{1}{3}.$

P,Q 的坐标分别为 $P(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}),\ Q(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{7}{3}).$ 根据直线的两点式方程，求得公垂线的方程为 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{1}$.