作业：大工-超星平台提交，请拍照上传

第11周作业，第13周（5月22日）前上传

作业请抄题

P.252	习题9.1 (A)　5；　6；
	习题9.1 (B)　1 (2)；
P.253	习题9.1 (B)　2 (3)；　4；
P.265	习题9.2 (A)　3；　4；　7；
P.266	习题9.2 (B)　1；　2

第九章

向量值函数的曲线积分与曲面积分

积分	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间	平面区域	空间区域	曲线	曲面

9.1 向量值函数在有向曲线上的积分

一、第二型曲线积分的概念及性质

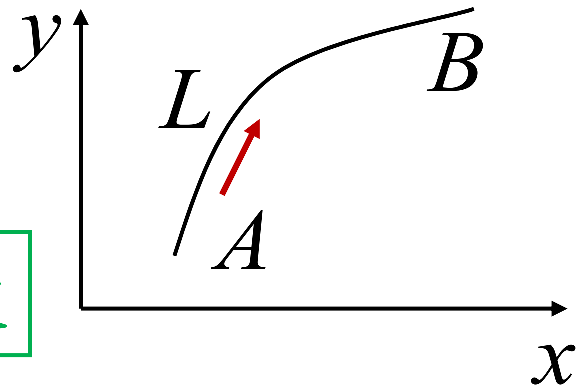
二、第二型曲线积分的计算

9.1.1 第二型曲线积分的概念及性质

引例: 变力沿曲线所作的功.

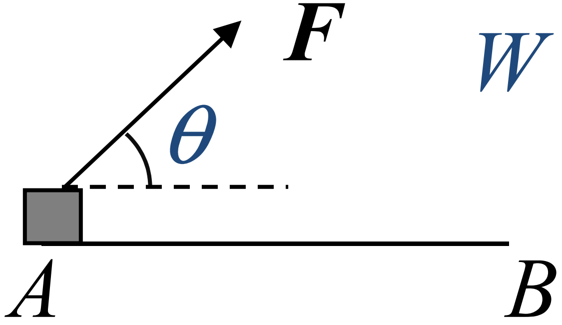
设一质点受变力作用

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$ 向量值函数



在 Oxy 平面内从点 A 沿光滑曲线 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功 W.

力沿直线所作的功



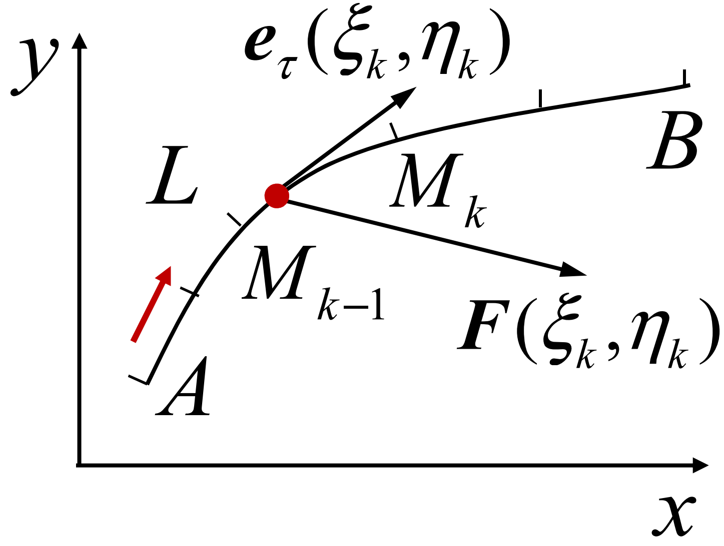
$$W=F\left|AB\right|\cos\theta$$
$$=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解决方法:

“分划, 近似, 求和, 取极限”

1) 分划

把 L 分成 n 个小弧段，沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k .



2) 近似

$\boldsymbol{e}_\tau(x,y)$ 表示 L 上点 (x,y) 处的单位切向量，方向与 L 从 A 到 B 的方向一致. Δs_k 表示 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 的弧长. 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k,η_k)，则有

$$\Delta W_k \approx \boldsymbol{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\boldsymbol{e}_\tau(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

3) 求和

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \boldsymbol{e}_\tau(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

4) 取极限

$$W = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \boldsymbol{e}_\tau(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

$$= \int_L \boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{e}_\tau(x, y)\, \mathrm{d}s$$

(其中d为 n 个小弧段的最大长度)

定义. 设 L 为 Oxy 平面内从 A 到 B 的一条**有向**光滑曲线, $\boldsymbol{e}_\tau(x,y)$ 表示 L 上点 (x,y) 处的单位切向量, 方向与 L 从 A 到 B 的方向一致. 在 L 上定义了一个向量值函数

$$\boldsymbol{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

(或写作 $\boldsymbol{A}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$).

若数量值函数 $\boldsymbol{A}(x,y)\cdot\boldsymbol{e}_\tau(x,y)$ 在 L 上的第一型曲线积分存在, 则称此积分值为向量值函数 $\boldsymbol{A}(x,y)$ 在有向曲线 L 上的**第二型曲线积分** (**对坐标的曲线积分**), 记作

$$\int_L \boldsymbol{A}(x,y)\cdot\boldsymbol{e}_\tau(x,y)\,\mathrm{d}s\,,\quad \int_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\,\mathrm{d}s\,,\quad \int_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 称为**有向弧微分**.

$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$ 称为对 x 的曲线积分;

$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$ 称为对 y 的曲线积分.

类似地, 若 L 为空间有向曲线 ,

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)).$$

则

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,.$$

性质

(1) **线性性.**

(2) **(可加性)** 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线 $L_i\,(i=1,\cdots,k)$，则

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

(3) **(有向性)** 用 L^- 表示 L 的反向曲线段，则

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{L^-} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

第二型曲线积分必须注意积分曲线的**方向**.

9.1.2 第二型曲线积分的计算

定理. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑曲线段 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t:\alpha\to\beta)$, 则曲线积分存在, 且有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)]\,\mathrm{d}t$$

如果 L 的方程为 $y=y(x)\ (x:a\to b)$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}\ (t:\alpha\to\beta)$, 类似有

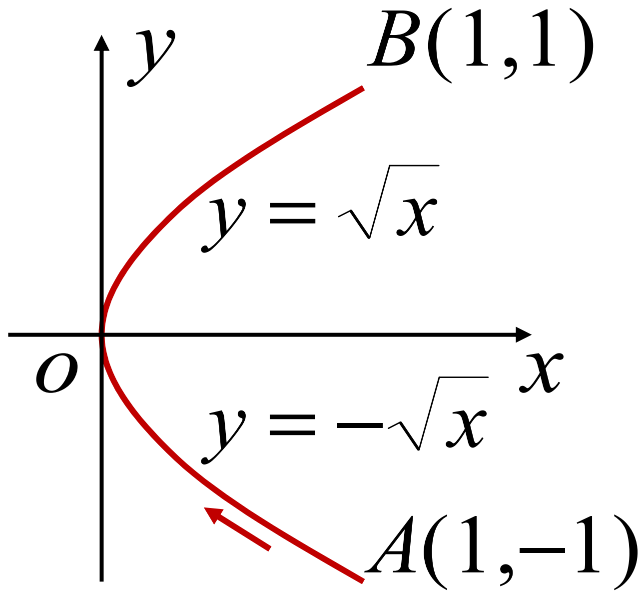
$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\varphi'(t)$$

$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\psi'(t)$$

$$+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\omega'(t)]\,\mathrm{d}t$$

例. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L为沿抛物线 $y^2=x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.



解1 取 x 为参数, 则 $L:\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}:\ y=-\sqrt{x}\ (x:1\to 0)$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y=\sqrt{x}\quad (x:0\to 1)$$

$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x=\int_{\overset{\frown}{AO}} xy\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{OB}} xy\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

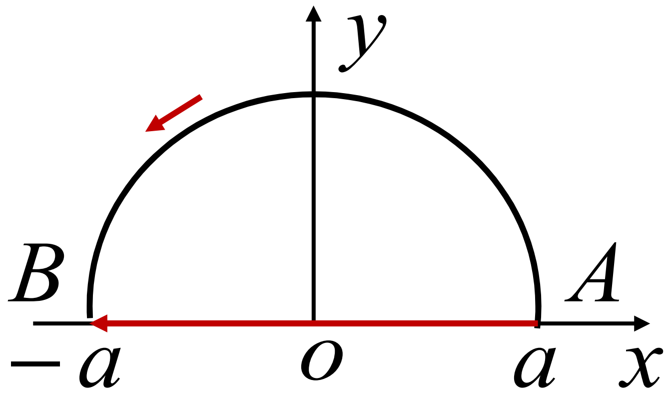
解2 取 y 为参数, 则 $L:x=y^2\ \ (y:-1\to 1)$

$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^2 y(y^2)'\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$

例. 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.



解: (1) 取L的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t\ (t: 0 \to \pi)$

则

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t \cdot (-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y = 0\ (x: a \to -a)$, 则

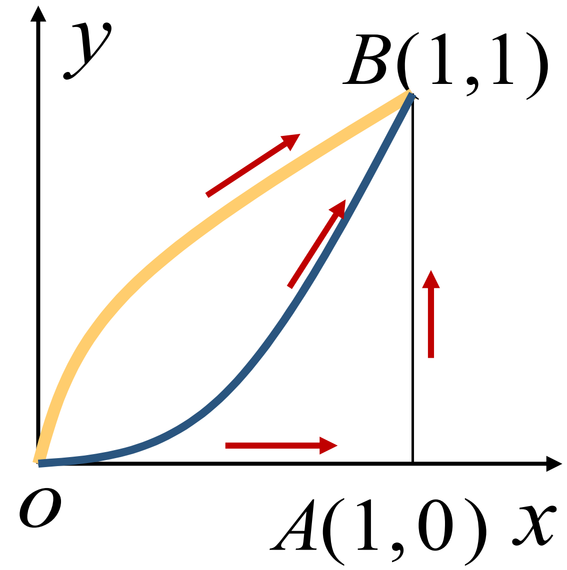
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

例. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2, x: 0 \to 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2, y: 0 \to 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\,\mathrm{d}y = 1$$

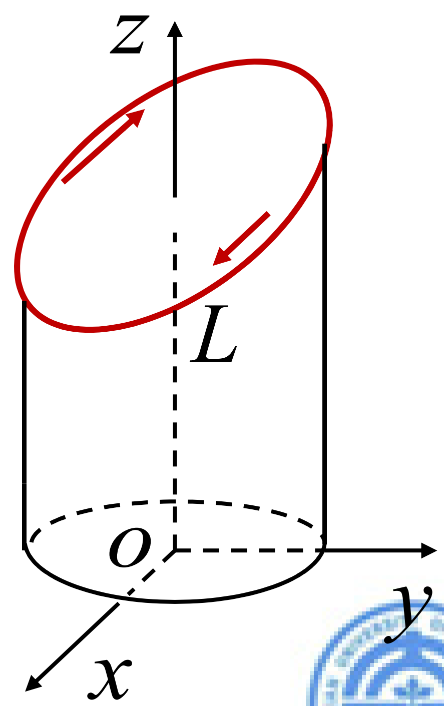
例. 求 $I=\oint_L (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中

$L:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 L 的参数方程

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t \quad (t:2\pi\to 0)$$

$$\therefore\quad I=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)$$
$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$
$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-2\pi$$



内容小结

- 对有向光滑曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t:\alpha\to\beta)$,

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)]\,\mathrm{d}t$$

- 对有向光滑曲线 $L:\ y=y(x)\ (x:a\to b)$,

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b [P(x,y(x))\ +Q(x,y(x))\,y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

- 对空间有向光滑曲线 L： $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (t : \alpha \to \beta),$

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\,\omega'(t)]\,\mathrm{d}t$$

第二型曲线积分必须注意积分曲线的**方向**.