第8章 方阵的特征值与相似对角化

8.3 实对称矩阵的相似对角化

8.3.1 共轭矩阵

复习

复数的几个结论：

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z\text{为实数} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

定义 8-4

设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$为复矩阵，把$\bar{A}=\left(\bar{a}_{ij}\right)_{m\times n}$叫做$A$的**共轭矩阵**。

A为实矩阵$\Leftrightarrow \bar{A}=A$

共轭矩阵的性质

$(1)\ \overline{\overline{A}} = A$　　$(2)\ \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

$(3)\ \overline{kA} = \overline{k}\,\overline{A}$　　$(4)\ \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$　　$(5)\ \overline{A^{\mathrm{T}}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$

对于任一复向量$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$

$$\overline{x}^T x = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \cdots + \overline{x_n}x_n$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \geq 0$$

当$x \neq 0$时，$\overline{x}^T x > 0$

8.3.2 实对称矩阵的性质

定理8-6 实对称阵A的特征值都是实数.

证： 由A为实对称阵，可得$\overline{A}=A, A^{\mathrm{T}}=A$，故$\overline{A}^{\mathrm{T}}=A$.

设λ是A的任一特征值，p为对应的特征向量，

则有 $Ap=\lambda p$ 且 $p\neq 0$.

$$\overline{\lambda}\,\overline{p}^{\mathrm{T}}p=\left(\overline{\lambda p}\right)^{\mathrm{T}}p=\left(\overline{Ap}\right)^{\mathrm{T}}p=\left(\overline{A}\,\overline{p}\right)^{\mathrm{T}}p=\overline{p}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}p$$

$$=\overline{p}^{\mathrm{T}}Ap=\overline{p}^{\mathrm{T}}\left(Ap\right)=\lambda\overline{p}^{\mathrm{T}}p$$

$$(\overline{\lambda}-\lambda)\overline{p}^{\mathrm{T}}p=0$$

由$p\neq 0$可知，$\overline{p}^{\mathrm{T}}p>0$，所以$\overline{\lambda}=\lambda$，$\lambda$为实数.

注意 若λ_i是实对称阵A的特征值，则λ_i为实数，$\lambda_i E-A$为实矩阵，$(\lambda_i E-A)x=0$的基础解系可取为实向量，故λ_i对应的特征向量可取为实向量.

如无特别注明，下面所讲的实对称阵的特征向量均为实向量

定理8-7 实对称阵A的相异特征值λ和μ分别对应的特征向量p和q一定正交.

证明： 由题意，得

$$A^{\mathrm{T}}=A,\ Ap=\lambda p,\ Aq=\mu q,\ \lambda\neq\mu.$$

注意：p与q正交$\Leftrightarrow p^{T}q=0$

$$\lambda p^{\mathrm{T}}q=(\lambda p)^{\mathrm{T}}q=(Ap)^{\mathrm{T}}q=p^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}q=p^{\mathrm{T}}(Aq)=\mu p^{\mathrm{T}}q$$

$$(\lambda-\mu)p^{\mathrm{T}}q=0$$

因为$\lambda\neq\mu$，所以$p^{\mathrm{T}}q=0$，即p与q正交.

定理 8-8

对于任意n阶实对称阵A，都存在正交阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的特征值.

推论 8-4

实对称阵的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

补充

例 若存在正交阵Q，使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$为对角阵，则A一定是对称阵。

证明： 由Q为正交阵，得 $Q^{-1}=Q^T$

由$Q^{-1}AQ=\Lambda$，得 $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$

$$A^T=(Q\Lambda Q^T)^T=(Q^T)^T\Lambda^T Q^T=Q\Lambda Q^T=A$$

所以A是对称阵。

注意 普通方阵不能用正交相似变换化为对角阵。

原因 普通方阵的相异特征值对应的特征向量不一定正交。

补充

普通方阵与实对称阵的对比:

（1）普通方阵的特征值不一定为实数，相异特征值对应的特征向量是无关的（注：不一定正交），不一定可相似对角化。

即使可相似对角化，也只能用普通的可逆矩阵做相似变换来化为对角矩阵。

（2）实对称阵的特征值一定为实数，相异特征值对应的特征向量是正交的，一定可相似对角化，并且可用正交相似变换来化为对角矩阵。

例8-7 两个同阶的实对称阵相似的充要条件是它们的特征值相同.

证明： 充分性 设A与B为同阶实对称阵，且特征值都为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则存在正交阵 Q_1,Q_2，使

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=Q_2^{-1}BQ_2,$$

$$Q_2Q_1^{-1}AQ_1Q_2^{-1}=B,\quad (Q_1Q_2^{-1})^{-1}A(Q_1Q_2^{-1})=B.$$

所以A与B相似.

必要性 在讲相似矩阵的性质时已证.

补充

判别两个矩阵是否相似的方法:

(1) 相似于同一个对角阵的方阵是相似的。

(2) 当A与B都可相似对角化时, A与B相似的充要条件是特征值相同。

(3) 两个实对称阵相似的充要条件是特征值相同。

因为: 实对称阵都可相似对角化。

(4) 若两个矩阵的特征值不同, 则它们一定不相似。

注意 对于普通矩阵, 特征值相同时, 不一定相似。

例如, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$与$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的特征值相同,

但不相似. 因为$A\neq P^{-1}EP$

例 下列矩阵中与$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$相似的矩阵是(　　)

(A) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&3\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

A的特征值为0,0,3，且可相似对角化

后三个选项特征值都为0,0,3，但（B）和（C）

不可相似对角化，答案选（D）

补充

当A可相似对角化时，A的非零特征值的个数等于$r(A)$.

当A不可相似对角化时，A的非零特征值的个数不一定等于$r(A)$.

例如，$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$不可相似对角化，

A的非零特征值的个数不等于A的秩。

实对称阵A的非零特征值的个数等于$r(A)$.

当0是实对称阵A的特征值时，其重数等于$n-r(A)$.

习题8－3第5题　设α为实的n元单位列向量，

（1）求$A=\alpha\alpha^T$的秩、迹和特征值.

（2）求$B=E-\alpha\alpha^T$的秩、迹和特征值.

解：可验证$A=\alpha\alpha^T$为实对称阵，实对称阵都可相似对角化.

对于可相似对角化的矩阵，秩等于非零特征值的个数.

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)=1,$$

A只有一个非零特征值，0为A的$n-1$重特征值.

$$A\alpha=(\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=\alpha$$

A的特征值为1(单)，0($n-1$重)，$tr(A)=r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)=1.$

（2）$B=E-A$, B可看成A的多项式，

由A为实对称阵可知，B也为实对称阵，

根据A的特征值可求出B的特征值.

书上127页例6－3　$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$

8.3.3 正交相似变换矩阵的求法

现在要做的事情是：对于实对称阵A，怎样求一个正交阵Q，使得$Q^{-1}AQ$为对角阵.

157页注意部分，146页定理7-4，163页定理8-7，144页定理7-3，144页施密特正交化方法。

(1) 求出实对称阵A的全部特征值.

(2) 求出每个特征值λ_i对应的方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$的基础解系，即线性无关的特征向量.

(3) 单特征值对应的特征向量 ——单位化

重特征值对应的特征向量 ——正交化,再单位化

(4) 以两两正交的单位特征向量为列构成的矩阵就是正交相似变换矩阵.

例8-8 设$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求一个正交阵$Q$，使得$Q^{-1}AQ$为对角阵.

解： $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-4)=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

A 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-1$.

A的特征值都是单特征值.

对于 $\lambda_1 = 2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E - A)x = 0$.

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 E - A)x = 0$化成$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \quad 6x_2 = 0 \end{cases}$

注意：x_3 是自由未知数.

$(\lambda_1 E - A)x = 0$ 的基础解系为$p_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$

故$\lambda_1 = 2$对应的线性无关特征向量为$p_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$$

对于 $\lambda_2=4$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=0.$

$$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$(\lambda_2 E-A)x=0$ 化成 $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\ \qquad 2x_3=0\end{cases}$

$(\lambda_2 E-A)x=0$ 的基础解系为 $p_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$

故 $\lambda_2=4$ 对应的线性无关特征向量为 $p_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix},\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=-1$$

对于$\lambda_3=-1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_3 E-A)x=0.$

$$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

$(\lambda_3 E-A)x=0$化成$\begin{cases}2x_1+x_2=0\\ \quad -3x_3=0\end{cases}$

$(\lambda_3 E-A)x=0$ 的基础解系为$p_3=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$

故$\lambda_3=-1$对应的线性无关特征向量为 $p_3=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix},\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=-1$$

$\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=-1$对应的特征向量依次为

$$p_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ p_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\ p_3=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

根据定理8－7可知，p_1,p_2,p_3两两正交.

将p_1,p_2,p_3单位化，得

$$q_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad q_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

注意：q_1,q_2,q_3是A的两两正交的单位特征向量.

令$Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$Q$为正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ=diag(2,4,-1).$$

注意

若令$P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$,

则P为普通的可逆矩阵，仍然可将A相似对角化

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&-1\end{pmatrix}$$

例8-9 设$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求一个正交阵$Q$，

使得$Q^{-1}AQ$为对角阵.

解： $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

A的特征值为$\lambda_1=1(2\text{重})$，$\lambda_2=-2(\text{单})$.

对于 $\lambda_1=1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=0$.

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 E-A)x=0$化成$x_1-x_2-x_3=0$

$(\lambda_1 E-A)x=0$ 的基础解系为

$$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ p_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

故$\lambda_1=1$对应的线性无关特征向量为

$$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ p_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix},\lambda_1=1(2重),\lambda_2=-2(单).$$

重特征值对应的特征向量要先正交化，再单位化

将 p_1, p_2 正交化，取

$$u_1 = p_1,$$

$$u_2 = p_2 - \frac{u_1^{\mathrm{T}} p_2}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

将 u_1, u_2 单位化，得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 2$对应的线性无关特征向量为

$$p_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad p_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于$\lambda_2=-2$，解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=0$.

$$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2-r_3}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-2&1\\0&3&-3\end{pmatrix}$$

$(\lambda_2 E-A)x=0$化成$\begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=0\\ \qquad\qquad x_2-x_3=0\end{cases}$

$(\lambda_2 E-A)x=0$ 的基础解系为 $p_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$

故$\lambda_2=2$对应的线性无关特征向量为 $p_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

根据定理8－7可知，p_3与p_1,p_2都正交，

只需将p_3单位化，得 $q_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix},\lambda_1=1(2重),\lambda_2=-2(单).$$

令$Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

则Q为正交阵，且 $Q^{-1}AQ=diag(1,1,-2)$.

$q_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$，$q_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，$q_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 为A的两两正交的单位特征向量，对应的特征值为$1,1,-2$

注意

$$若令P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则P为普通的可逆矩阵，仍然可将A相似对角化

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

对于二重特征值$\lambda_1=1$,

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(\lambda_1 E-A)x=0$化成$x_1-x_2-x_3=0$

从上面方程组先求出一个解$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,

设$p_2=(x_1,x_2,x_3)^T$为$\lambda_1=1$对应的另一个与p_1正交的特征向量,

则$p_2=(x_1,x_2,x_3)^T$满足$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_1+x_2=0\text{正交}\end{cases}$, 求得$p_2=(1,-1,2)^T$.

$\lambda_1=1$对应的两个正交的特征向量为$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $p_2=(1,-1,2)^T$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix},\lambda_1=1(2\text{重}),\lambda_2=-2(\text{单}).$$