

第 5 章练习

一、单选题（共 28 题，42 分）

1、下列向量组中线性相关的是

A、 $(a, b, 1)^T, (2a, 2b, c+2)^T, (a, b, c \neq 0)$

B、 $(1, 0, 0, 0)^T$

C、 $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 0, 0)^T$

D、 $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 0)^T$

正确答案： D

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是（ ）

A、

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0, k_1, k_2, \dots, k_m$ 为常数，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关；

B、

C、

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_m ,

都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ；

D、

若有一组全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

正确答案： B

3、 设 A 是 n 阶方阵，且 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中（ ）

A、 任一行向量是其余行向量的线性组合；

B、 必有两列元素对应成比例；

- C、 至少有一列向量是其余列向量的线性组合；
 D、 必有一列元素全为零.

正确答案: C

- 4、
 设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 而 β_2 不能由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性表示, 则对任意常数 k , 必有 ()

- A、 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关
 B、 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关
 C、 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关
 D、 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

正确答案: A

- 5、 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足等式 $AB = O$, 则必有 ()

- A、 $A = O$ 或 $B = O$
 B、 $A + B = O$
 C、 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$
 D、 $|A| + |B| = 0$

正确答案: C

- 6、 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

- A、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 线性相关
 B、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 线性无关
 C、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 线性相关
 D、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 线性无关

正确答案: A

7、
设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组(II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列结论正确的是().

- A、 若向量组(I)线性无关, 则 $r \leq s$
- B、 若向量组(I)线性相关, 则 $r > s$
- C、 若向量组(II)线性无关, 则 $r \leq s$
- D、 若向量组(II)线性相关, 则 $r > s$

正确答案: A

8、
已知4维向量组 $\alpha_1 = (1 + a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2 + a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3 + a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4 + a)^T$ 线性相关, 则

- A、 $a = 0$ 或 $a = -10$
- B、 $a \neq 0, a \neq 10$
- C、 $a = 5$
- D、 $a = 3$

正确答案: A

9、 对于向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, 因为有 $0\alpha_1 + \dots + 0\alpha_s = 0$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 () 的向量组.

- A、 全为零向量
- B、 线性无关
- C、 任意
- D、 线性相关

正确答案: C

10、 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关的充要条件是().

- A、 $r > 1$
- B、 它有一个部分向量组线性无关
- C、 它的所有部分向量组线性无关
- D、 $r > 0$

正确答案: C

11、 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $|A| = 0$

- A、 A 中至少有一行(列)的元素全为零
- B、 A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合
- C、 A 中必有两行(列)的元素对应成比例
- D、 A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

正确答案: B

12、 设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组(II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则().

- A、 当 $r < s$ 时, 向量组(II)必线性相关

- B、 当 $r > s$ 时, 向量组(II)必线性相关
 C、 当 $r < s$ 时, 向量组(I)必线性相关
 D、 当 $r > s$ 时, 向量组(I)必线性相关

正确答案: D

13、 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有().

- A、 \mathbf{A} 的列向量组线性相关, \mathbf{B} 的行向量组线性相关
 B、 \mathbf{A} 的列向量组线性相关, \mathbf{B} 的列向量组线性相关
 C、 \mathbf{A} 的行向量组线性相关, \mathbf{B} 的行向量组线性相关
 D、 \mathbf{A} 的行向量组线性相关, \mathbf{B} 的列向量组线性相关

正确答案: A

14、

已知向量组 $a_1 = (1, 2, -1, 1)^T, a_2 = (2, 0, t, 0)^T, a_3 = (0, 4, 5, 2)^T$ 的秩为 2, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- A、 -5
 B、 -6
 C、 -7
 D、 -8

正确答案: C

15、

设三阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 三维向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若向量 \mathbf{Aa} 与 \mathbf{a} 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- A、 0
 B、 -1
 C、 1
 D、 2

正确答案: B

16、 已知 $m < n$, $\mathbf{A}_{m \times n}, \mathbf{B}_{n \times m}$, 则

- A、 $|\mathbf{AB}| = 0$
 B、 $|\mathbf{AB}| \neq 0$
 C、 $|\mathbf{BA}| = 0$
 D、 $|\mathbf{BA}| \neq 0$

正确答案: C

17、 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 等价, 那么下面结论正确的是

- A、 当 $|A| = a (a \neq 0)$, 那么 $|B| = a$
 B、 当 $|A| = a (a \neq 0)$, 那么 $|B| = -a$
 C、 当 $|A| = 0$ 那么 $|B| \neq 0$
 D、 当 $|A| = 0$ 那么 $|B| = 0$

正确答案: D

18、

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, B 为非零三阶矩阵, 且满足 $AB = O$, 则 $r(B) =$

- A、 当 $t=6$ 时, $r(B)$ 必为 1
 B、 当 $t=6$ 时, $r(B)$ 必为 2
 C、 当 $t \neq 6$ 时, $r(B)$ 必为 1
 D、 当 $t \neq 6$ 时, $r(B)$ 必为 2

正确答案: C

19、 $a = [1, 2, 3]^T$, $b = [3, 2, 1]^T$, 则 $r(ab^T) = (\quad)$

- A、 0
 B、 1
 C、 2
 D、 3

正确答案: B

20、

设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB + B) = (\quad)$

- A、 0
 B、 1
 C、 2
 D、 3

正确答案: B

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & a+b-1 & 2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ b-6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

且 $r(AB) < \min\{r(A), r(B)\}$, 则 a, b 的值为 ()

- A、 $a=1; b=0$
- B、 $a=1, b=6$
- C、 $a=-5, b=6$
- D、 $a=0, b=0$

正确答案: C

22、设向量组 1: a_1, a_2, \dots, a_m 和向量组 2: b_1, b_2, \dots, b_m 都是 n 元列向量组, 并且向量组 1 线性无关,

那么向量组 2 线性无关的充要条件是 ()

- A、 向量组 1 可以由向量组 2 线性表示
- B、 向量组 2 可以由向量组 1 线性表示
- C、 两个向量组等价
- D、 矩阵 (a_1, a_2, \dots, a_m) 和矩阵 (b_1, b_2, \dots, b_m) 等价

正确答案: D

23、设向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 线性无关, 则下列向量组线性无关的是

- A、 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_1$
- B、 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1$
- C、 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_1$
- D、 $a_1 + a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_1$

正确答案: D

24、若向量组 1 和 2 等价, 那么

- A、 当 1 线性无关时, 2 也线性无关
- B、 当 1 线性相关时, 2 也线性相关
- C、 1 和 2 的极大无关组相同
- D、 1 和 2 的极大无关组等价

正确答案: D

25、

已知向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; (II): \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; (III): \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 如果 $r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$, 则

- A、 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = 2.$
- B、 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = 3.$
- C、 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = 4.$

D、 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = 1$.

正确答案： C

26、 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵,若 $AB = C$,且 B 可逆,则

- A、 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- B、 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- C、 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- D、 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

正确答案： B

27、

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的向量组,向量组 $2\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 5\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4$ 的秩是

- A、 1
- B、 2
- C、 3
- D、 4

正确答案： C

28、 设 A, B 皆为 n 阶矩阵,秩 $r(A) = \text{秩}r(B)$ 的充分必要条件是

- A、 A 的行向量组与 B 的行向量组等价
- B、 矩阵 A 与 B 列向量组等价
- C、 矩阵 A 与 B 等价
- D、 $|A| = |B|$

正确答案： C

二、多选题（共 4 题， 11.5 分）

1、

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, 若 $r(A) < 3$, 则 $a =$ _____。

- A、 0
- B、 1
- C、 2
- D、 3

正确答案： AC

2、

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

- A、 A 是可逆阵
- B、 A 的秩不为零
- C、 A 的秩有可能为 1
- D、 A 的秩有可能为 $n-1$ (其中 n 为矩阵 A 的阶数)

正确答案: CD

3、

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ 的秩为 } 3.$$

当 a, b 可能的取值有,

- A、 $a=1, b=2$;
- B、 $a \neq 1, b \neq 2$;
- C、 $a=1, b \neq 2$;
- D、 $a \neq 1; b=2$

正确答案: CD

4、

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- A、 $a=1, b=2$ 则秩为 2
- B、 $a \neq 1, b \neq 2$ 则 A 的秩为 4
- C、 $a \neq 1, b=2$ 则 A 的秩为 3
- D、 $a=1, b \neq 2$ 则 A 的秩为 2

正确答案: ABC

三、填空题（共 6 题， 9 分）

1、

向量组 $a_1 = (1, 2, -1, 4)^T, a_2 = (9, 100, 10, 4)^T, a_3 = (-2, -4, 2, -8)^T$ 的秩为 _____

正确答案： 2

2、

向量组 $a_1 = (1, 2, 1, 3)^T, a_2 = (4, -1, -5, -6)^T, a_3 = (1, -3, -4, -7)^T$ 的秩为 _____

正确答案： 2

3、

已知向量组 $a_1 = (1, 2, -1, 1)^T, a_2 = (2, 0, t, 0)^T, a_3 = (0, 4, 5, 2)^T$ 的秩为 2，则 $t =$ _____

正确答案： -7；

4、

已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 0, t, 0)^T, \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)^T$ 的秩为 2，则 $t =$ _____

正确答案： 3

5、

向量组 $a_1 = (1, 2, -1, 4)^T, a_2 = (9, 100, 10, 4)^T, a_3 = (-2, -4, 2, -8)^T$ 的秩为 _____

正确答案： 2

6、

设 A 和 B 均为三阶方阵， $AB = O, A^* \neq O, B \neq O$ ，则 $r(A) =$ _____

正确答案： 2

四、判断题（共 25 题， 37.5 分）

1、

若向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 是线性相关的，则 a_1 可由 a_2, \dots, a_m 线性表示。

正确答案： 错误

2、

若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$ 成立，则

a_1, a_2, \dots, a_m 线性相关， b_1, b_2, \dots, b_m 也线性相关。

正确答案： 错误

3、

若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为 0 时，等式 $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$ 才能成立，

则 a_1, a_2, \dots, a_m 线性无关， b_1, b_2, \dots, b_m 也线性无关。

正确答案： 错误

4、

若 a_1, a_2, \dots, a_m 线性相关， b_1, b_2, \dots, b_m 也线性相关，则有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0, \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$ 同时成立。

正确答案： 错误

5、向量组线性无关的充要条件是该向量组的秩等于向量组所含向量的个数。

正确答案： 正确

6、若 $r(A) = r$ ，则 A 中所有 r 阶子阵都是非奇异的。

正确答案： 错误

7、若 $r(A) = r$ ，则 A 的 $i(1 \leq i \leq r)$ 阶子阵中至少有一个是可逆的。

正确答案： 正确

8、若 A 中有 r 阶子式不等于 0，则 $r(A) \geq r$ 。

正确答案： 正确

9、若 A 的前 r 列线性无关，则 A 的前 r 行也线性无关。

正确答案： 错误

10、当 A 为方阵时，A 的行向量组和列向量组有相同的线性相关性。

正确答案： 正确

11、若 $r(AB) = r(B)$ ，则 A 为可逆阵。

正确答案： 错误

12、若 $AB = O$ ，A 和 B 都是 n 阶非零矩阵，则 A 和 B 都是降秩阵。

正确答案： 正确

解析：

13、若 $C=AB$ ， C 的列向量组线性无关，则 A 和 B 的列向量组也都是线性无关的。

正确答案： 错误

14、设 A 是 $m \times n$ 型矩阵， B 是去掉 A 中的 $s(s \leq m)$ 行后所得到的矩阵，则 $r(A) - s \leq r(B) \leq r(A)$

正确答案： 正确

15、若存在 $r+1$ 阶子式为零，则有 $r(A) = r$

正确答案： 错误

16、设 A 为 n 阶矩阵，则 $r(A+E) + r(A-E) \geq n$

正确答案： 正确

17、只有初等行变换不改变矩阵的秩，列变换可能会改变矩阵的秩。

正确答案： 错误

18、设 A 是 2×3 型矩阵， B 是 3×2 型矩阵，则 $|BA|=0$

正确答案： 正确

19、如果向量组 1 能由向量组 2 线性表示，向量组 2 也能由向量组 1 线性表示。

正确答案： 错误

20、向量组 1 能由向量组 2 线性表示，向量组 2 能由向量组 3 线性表示，那么向量组 1 也能由向量组 3 线性表示。

正确答案： 正确

21、等价矩阵的列向量组是等价的

正确答案： 错误

22、等价的列向量组构成的矩阵一定是等价的。

正确答案： 错误

23、秩相同的向量组是等价的。

正确答案： 错误

24、等价的向量组所含向量个数和秩都相同。

正确答案： 错误

25、

设 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$ ，则向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关。

正确答案： 正确