第三章 可逆矩阵及 n×n型线性方程组

§3.2 n×n型线性方程组

3.2.1 $n\times n$型齐次线性方程组

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 一定有解 $\boldsymbol{x}=0$,

把这个解称为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的零解.

若 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解, 则称 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的非零解.

2. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解分为两种情况:

(1) 只有零解（即有唯一解）

(2) 有非零解（即解不唯一，也可说成有无穷多个解）

因为：若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{Au}=0$,

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{u})=0,\quad \boldsymbol{x}=k\boldsymbol{u}\text{也是}\boldsymbol{Ax}=0\text{的解.}$$

当 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解时，$\boldsymbol{x}=0$ 仍然是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解.

定理3−5　设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$是$n\times n$型齐次线性方程组，则

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$只有零解$\Leftrightarrow\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$(即$\boldsymbol{A}$可逆),

【$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$有非零解$\Leftrightarrow\left|\boldsymbol{A}\right|=0$(即$\boldsymbol{A}$不可逆)】

证明 充分性.　因为$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$,所以$\boldsymbol{A}$可逆,

在$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$的两边同时左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得$\boldsymbol{x}=0$,

所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$只有零解。

必要性.　设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$只有零解,

下面用反证法证明$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$.

假设$|A|=0$, 由定理1－2可知,存在可逆阵P和Q,

使得 $PAQ=\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 于是$\begin{vmatrix} E_s & O \\ O & O \end{vmatrix}=|P||A||Q|=0$,

因此必有$s<n$，即PAQ的最后一列一定为零向量,

于是有 $(PAQ)e_n=0$, 左乘P^{-1}可得$A(Qe_n)=0$,

即$Aq_n=0$. 由Q可逆可知，$q_n\neq 0$.

这说明q_n是$Ax=0$的非零解,

这与$Ax=0$只有零解矛盾, 所以$|A|\neq 0$.

例3-9 k满足什么条件时，右面的方程组有非零解？只有零解？

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

解 设该方程组的系数阵为$\boldsymbol{A}$,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal{\text{加到第1列}} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$= (k+2)(k-1)^2.$$

当$k=-2$或$k=1$时，$|\boldsymbol{A}|=0$，该方程组有非零解；

当$k\neq-2$且$k\neq1$时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，该方程组只有零解.

3.2.2 $n \times n$型非齐次线性方程组

定理3－6 $n \times n$型非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$（即$\boldsymbol{A}$可逆），其解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

证明 充分性. 因为$|\boldsymbol{A}| \neq 0$,所以$\boldsymbol{A}^{-1}$存在.

首先，由$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$可知，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

其次，设$\boldsymbol{u}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解，则$\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{b}$.

在$\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{b}$两边左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$可得， $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$,

所以$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的唯一解.

必要性. 设方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{u}$, 即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}$,

下面用反证法证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 假设$|\boldsymbol{A}|=0$,

由定理3−5可知,方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$有非零解,

设$\boldsymbol{c}\neq 0$为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$的非零解, 则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=0$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+0=\boldsymbol{b},$$

这说明$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c}$也是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解,

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{u}$, 这与方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解矛盾,

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理3−7 （Cramer法则） 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,

$n \times n$型非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中$\boldsymbol{B}_i$是把$\boldsymbol{A}$的第i列换成$\boldsymbol{b}$所得的矩阵.

证明 由定理3−6可知,当$|\boldsymbol{A}| \neq 0$时,

方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

设矩阵A的按列分块矩阵为$A=[a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n]$,

则 $B_i=[a_1,\cdots,b,\cdots,a_n]$. A和B_i只有第i列可能不同,

所以A和B_i的第i列有相同的代数余子式向量a_i,

将$|B_i|$按第i列展开，得

$$|B_i|=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni}=a_i^Tb,$$

$$x_i=e_i^Tx=e_i^TA^{-1}b=e_i^T\frac{A^*}{|A|}b=\frac{(e_i^TA^*)b}{|A|}$$

$$=\frac{a_i^Tb}{|A|}=\frac{|B_i|}{|A|}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad A^*=\begin{bmatrix}a_1^T\\ \vdots\\ a_i^T\\ \vdots\\ a_n^T\end{bmatrix}$$

例3－11　用Cramer法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad |\mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad |\mathbf{B}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$x_1 = \frac{|\mathbf{B}_1|}{|\mathbf{A}|} = 2, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{B}_2|}{|\mathbf{A}|} = -1, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{B}_3|}{|\mathbf{A}|} = 1. \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

小结

解系数矩阵为可逆阵的线性方程组的**方法**:

1. 初等行变换法: $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] \to [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{x}]$

2. 求逆矩阵法 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$

3. Cramer法则.

注意: 上面三种方法的计算量是依次增加的.