作业：大工-超星平台提交，请拍照上传

第5周作业，第7周（4月10日）前上传

作业请抄题

P.120	习题7.1 (A)	7 (3)； 8 (2)；
P.128	习题7.2 (A)	7； (B) 2
P.138	习题7.3 (A)	16 (5) (6)；
P.139	习题7.3 (B)	1;
P.152	习题7.4 (A)	12; 13
P.153	习题7.4 (B)	1

第七章

多元函数微分学及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

7.1 多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的定义

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

区域

1. 邻域

点集$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$,称为点 P_0 的**δ邻域**.

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$(圆邻域)

在空间中,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

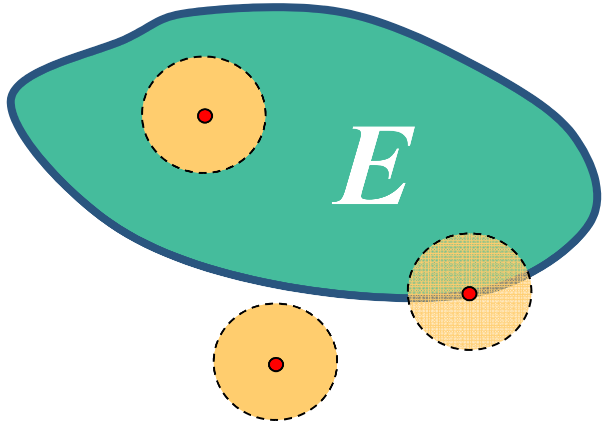
(球邻域)

若不需要强调邻域半径δ,也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

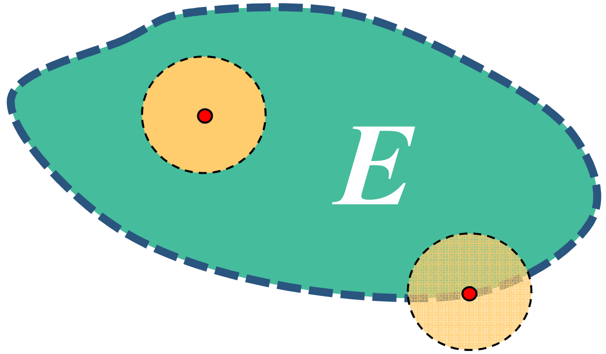


设有点集 E 及一点 P:

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点;
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E 中的内点也含 E 的外点，则称 P 为 E 的边界点 .

显然, E 的内点必属于 E, E 的外点必不属于 E, E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

(2) 聚点

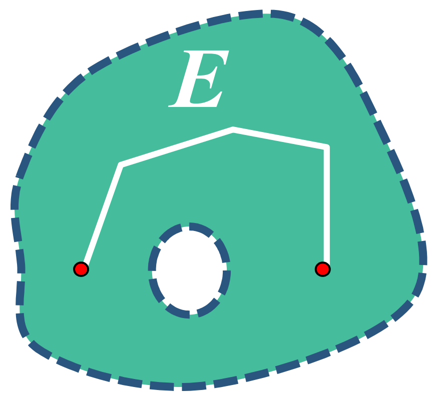


若对任意给定的δ，点P的去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$内总有E中的点，则称P是E的**聚点**.

聚点可以属于E，也可以不属于E (因为聚点可以为E的边界点)

(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- 若点集E 的所有聚点都属于 E,则称 E 为闭集;
- 若集 E 中任意两点都可用一完全属于 E 的折线相连，则称 E 是连通的；
- 连通的开集称为开区域,简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.



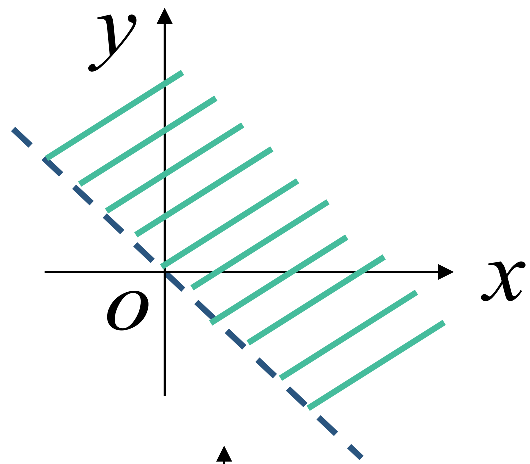
例如，在平面上

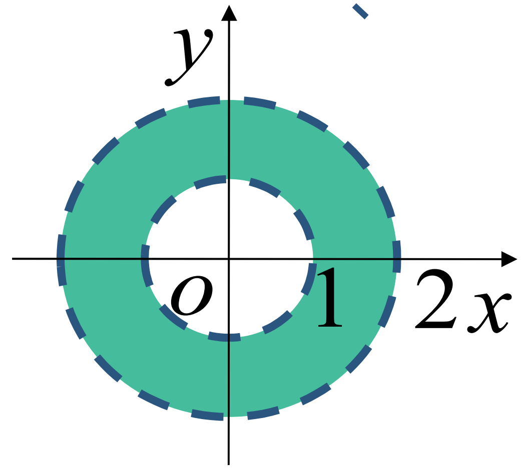
- ♣ $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- ♣ $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

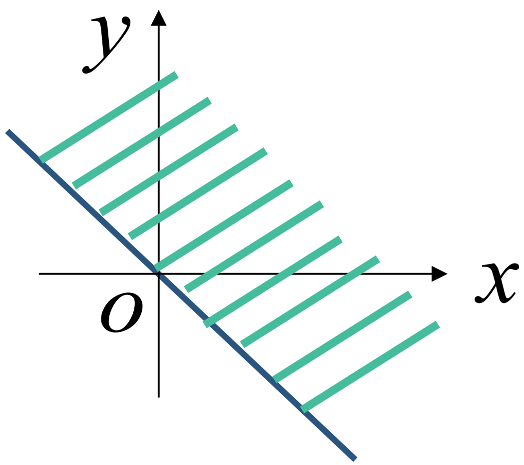
开区域

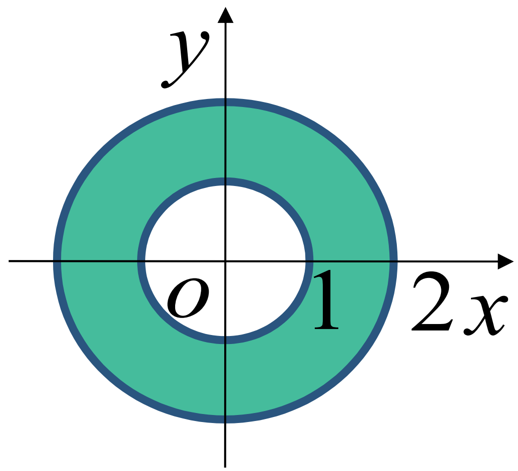
- ♣ $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- ♣ $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域









3. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**, 记作 R^n,即

$$\mathrm{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为空间中的一个**点**, 数 x_k 称为该点的第 k 个坐标 .

当所有坐标 $x_k = 0$ 时, 称该元素为 R^n 中的零元, 记作 O .

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与点$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的**距离**为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零元O的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

7.1.1 多元函数的定义

定义: 设非空点集 $D \subset \mathrm{R}^n$, 映射 $f: D \to \mathrm{R}$ 称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**； 数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域** .

特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$$

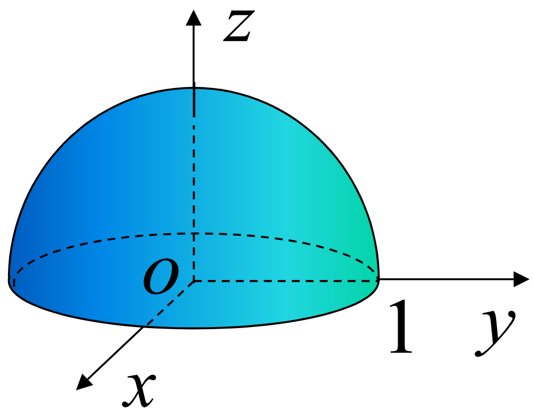
当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$$

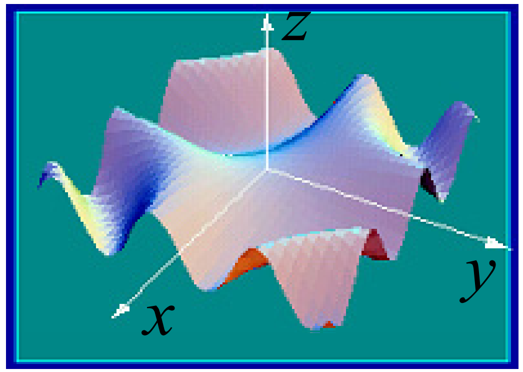
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为 圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

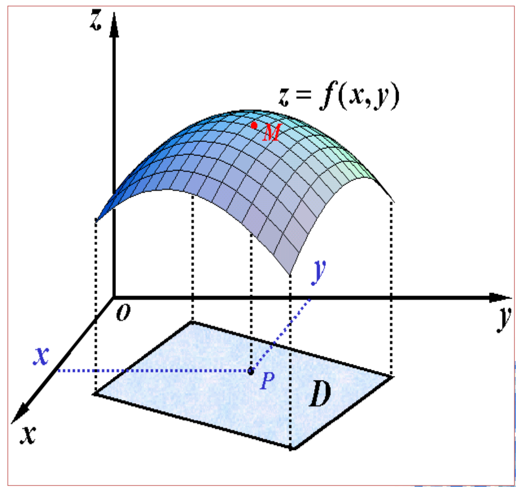


又如, $z=\sin(xy),(x,y)\in \mathrm{R}^2$



二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$

的图形一般为空间曲面 Σ.



7.1.2 多元函数的极限

定义(重极限) 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathbb{R}^n, P_0$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A \quad (P\to P_0)$$

当 $n=2$ 时，$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

二元函数的极限可写作：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

或 $f(x_0,y_0)\to A\ \ ((x,y)\to(x_0,y_0))$ 或 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

上述二元函数的极限也称为**二重极限**.

例. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

要证 $<\varepsilon$

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

求证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|f(x,y)-0\right| \le \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \quad (xy\neq 0)$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$\boxed{\text{要证} < \varepsilon}$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon/2,$ 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时,有

$$\left|f(x,y)-0\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

例. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^4}$.

解1: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^4} \sin y$

由于当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\right| \leq 1$ （有界量）

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin y = 0$, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^4} = 0$.

解2: 由于当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$0 \leq \left|\frac{x^2 \sin y}{x^2+y^4}\right| \leq |\sin y| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0))$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^4} = 0$.

例. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\ln(1+xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} y$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 1\cdot 2 = 2$$

$$\boxed{\ln(1+xy) \sim xy \quad ((x,y)\to(0,2))}$$

- 若当点 $P(x,y)$以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$时, 函数趋于不同值或有的极限不存在, 则可以断定函数极限**不存在**.

例. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0), 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

$\boxed{k \text{ 值不同极限不同}}$

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在.

例. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

解: 因 $x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left| \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

故极限不存在.

定义(累次极限) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0)的某个去心邻域内有定义，如果对每个固定的 $y\neq y_0$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$存在，且极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\phi(y)$ 也存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处**先对*x*后对*y***的**累次极限**（或**二次极限**），记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

类似可以定义 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**先对*y*后对*x***的**累次极限**，并记作

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

- 累次极限不一定都存在，即使都存在也不一定相等.

- 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不同.

- 仅知其中一个存在, 推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但在(0,0)点二重极限不存在 .

- 如果它们都存在, 则三者相等.

7.1.3 多元函数的连续性

定义. 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 **连续**, 否则称为不连续, 此时 P_0 称为**间断点** .

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上**连续**.

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在，故 (0, 0)为间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

- 连续函数的和差积仍为连续函数.
- 连续函数的商在分母不为零处仍连续.
- 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

定义区域: 包含在定义域内的开区域或闭区域.

例. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理. 若 $f(P)$ 在**有界闭域** D 上连续, 则

(1) $\exists\, K > 0$, 使 $|f(P)| \le K$, $P \in D$; **(有界性定理)**

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu \in [m, M]$, $\exists\, Q \in D$, 使 $f(Q) = \mu$;

(介值定理)

(4) $f(P)$ 必在 D 上一致连续 . **(一致连续性定理)**

内容小结

1. 区域

- 邻域：$U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 ——— 连通的开集
- R^n 空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$P \in D \subset \mathrm{R}^n$$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数（图形一般为空间曲面）} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |PP_0| < \delta \text{时},$$

$$\text{有} |f(P) - A| < \varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\rightleftarrows \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理； 最值定理； 介值定理

3) 多元初等函数在定义区域内连续