9.3 曲面及其方程

像在平面解析几何中把曲线看作动点的轨迹那样，我们把曲面也看成是一个动点或一条动曲线按照一定的条件或规律运动而产生的轨迹. 根据这一条件或规律就能导出曲面上动点 P 的坐标 (x,y,z) 所满足的方程

$$F(x,y,z)=0\,. \tag{9.4}$$

如果当且仅当 P 为曲面上的点时，P 点的坐标才满足这个方程，那么曲面的几何性质必然由这个方程反映出来. 因此，我们可以用这个方程来表示曲面，并把方程（9.4）称为**曲面的方程**，而把这个曲面称为**方程（9.4）的图形**.

在空间解析几何中，关于曲面的研究有以下两个基本问题：

（1）已知用点的轨迹表达的曲面，建立其方程.

（2）已知关于 x,y 和 z 的方程，研究它所表示的曲面的形状.

9.3.1 球面及其方程

在空间内与定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）称为**球面**. 定点叫做**球心**，定长叫做**半径**.

现在我们在空间直角坐标系中建立以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，以 r 为半径的球面的方程.

设 $P(x,y,z)$ 是球面上任意一点，则点 P 在球面上 $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{P_0P}\right|=r$,即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \tag{9.5}$$

这就是该球面的方程。

若球心在原点，则 $x_0=y_0=z_0=0$，球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,.$$

把方程（9.5）展开，得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+({x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2-r^2)=0$$

由此可见，球面方程是一个特殊的三元二次方程，它的特点是：x^2,y^2,z^2 的系数相同，没有 xy,yz,zx 这样的混合项.

9.3.2 柱面及其方程

由动直线 L 沿着一条定曲线 C 平行于定直线 l 移动所形成的曲面称为**柱面**.

定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线 L 称为柱面的**母线**（图 9.1）. 下面我们来分析一个具体的例子.

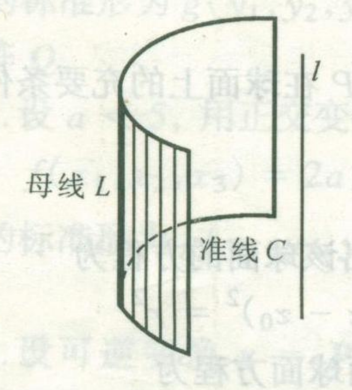

图 9.1

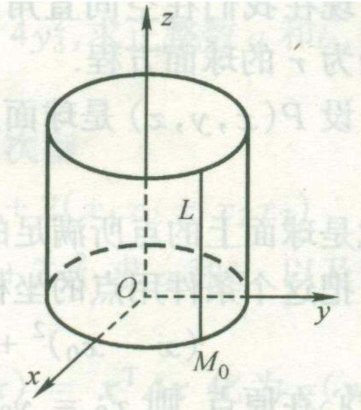

图 9.2

例 9-9　方程 $x^2+y^2=r^2$（$r>0$）表示一个什么样的曲面？

解　方程 $x^2+y^2=r^2$ 在 Oxy 面上表示圆心在原点 O，半径为 r 的圆.

在空间直角坐标系中，由于该方程不含竖坐标 z，因此无论点 (x,y,z) 的竖坐标 z 怎样，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 满足这个方程，那么这样的点就在该方程所表示的曲面上.

又因为通过 Oxy 面内的圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $M_0(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 L 上的所有点的横坐标、纵坐标均相同，点 M_0 的 x 和 y 坐标满足方程 $x^2+y^2=r^2$，所以直线 L 上的所有点也都满足方程 $x^2+y^2=r^2$，直线 L 在该曲面上.

因此，这曲面可以看作是由直线 L 沿 Oxy 面上的圆 $x^2+y^2=r^2$ 平行于 z 轴移动所形成的柱面（图 9.2），该柱面是**圆柱面**.

从上例可以看出，一个只含两个变量 x,y 的方程 $f(x,y)=0$ 在 $Oxyz$ 坐标系下表示母线平行于 z 轴，准线为 Oxy 面上的曲线 $f(x,y)=0$ 的柱面.

同理，$g(y,z)=0$ 和 $h(z,x)=0$ 在 $Oxyz$ 坐标系下分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

总的说来，一个只含两个变量的方程表示一个柱面，其母线平行于缺少的那个变量所对应的坐标轴.

例 9-10　方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x^2-2py=0(p>0)$ 分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面、双曲柱面（图 9.3）和抛物柱面（图 9.4）.

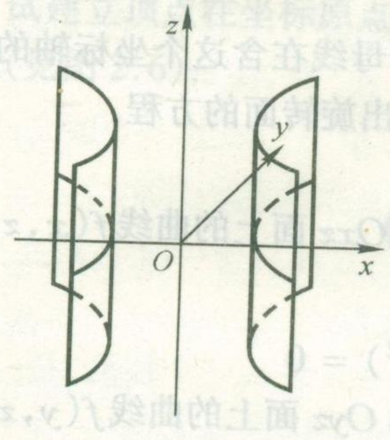

图 9.3

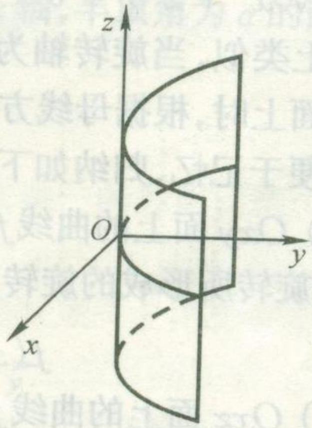

图 9.4

由于这三个方程都是二次的，因而这三个柱面都称为**二次柱面**.

例 9-11 在空间直角坐标系下，求准线为Oxy面上的圆$C: x^2+y^2=1$，母线平行于向量$\vec{s}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$的柱面的方程。

解 设$P(x,y,z)$为该柱面上任意一点，并设过点P的母线与准线C的交点为$P_0(x_0,y_0,0)$，则$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{s}$.根据推论 4.1，得

$$\frac{x-x_0}{-1}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z}{1}.$$

由该式求得

$$\begin{cases} x_0 = x+z \\ y_0 = y-3z \end{cases},$$

因为点P_0在圆C上，$x_0^2+y_0^2=1$,所以所求柱面的方程为

$$(x+z)^2+(y-3z)^2=1.$$

9.3.3 旋转面及其方程

由一条平面曲线C绕其所在平面上的定直线l旋转一周所形成的曲面称为**旋转面**. 曲线C称为旋转面的**母线**，直线l称为**旋转轴**.

本书只考虑旋转轴为坐标轴的情形.

设在Oyz面上有一条曲线C，它在平面直角坐标系中的方程是$f(y,z)=0$，我们来求曲线C绕z轴旋转一周所形成的旋转面的方程（图 9.5）.

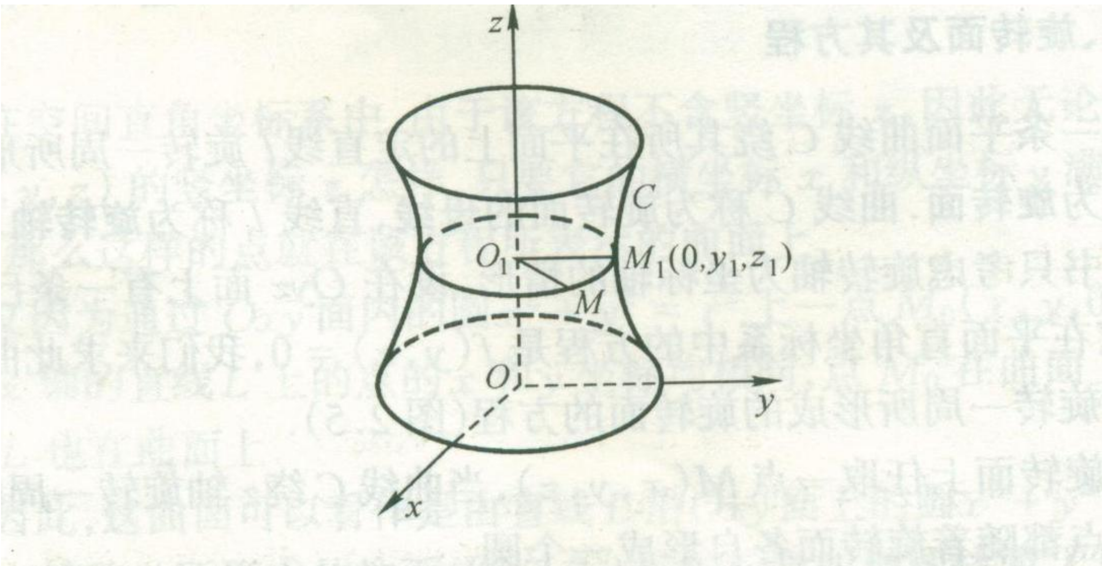

图 9.5

在旋转面上任取一点$M(x,y,z)$，当曲线C绕z轴旋转一周时，其上每一点都随着旋转而各自形成一个圆.

设点M在由曲线C上的点$M_1(0,y_1,z_1)$绕z轴旋转所形成的圆上，显然$z_1=z$,记圆心为$O_1(0,0,z_1)$，则$\left|\overrightarrow{O_1M}\right|=\left|\overrightarrow{O_1M_1}\right|$，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|,.$$

亦即

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

因为M_1在母线C上，所以$f(y_1,z_1)=0$.将$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$和$z_1=z$代入上式， 得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\,，$$

这就是所求旋转面的方程。

可见，在母线C的方程$f(y,z)=0$中将y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得出曲线C绕z轴旋转所形成的旋转面的方程.

同理，曲线C绕y轴旋转所形成的旋转面的方程为$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

与上类似，当旋转轴为某个坐标轴而母线在含这个坐标轴的某个坐标平面上时，根据母线方程就可直接写出旋转面的方程.

为便于记忆，归纳如下：

（1）Oxy面上的曲线$f(x,y)=0$和Oxz面上的曲线$f(x,z)=0$绕x轴旋转所形成的旋转面方程均为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0\,.$$

（2）Oxz 面上的曲线 $f(x,z)=0$ 和 Oyz 面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所形成的旋转面方程均为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

（3）Oyz 面上的曲线 $f(z,y)=0$ 和 Oxy 面上的曲线 $f(x,y)=0$ 绕 y 轴旋转所形成的旋转面方程均为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

由上述结论可以看出，以坐标轴为旋转轴的旋转面方程的特点是：x,y,z 中有两个变量总以平方和的形式出现，而旋转轴就是另一变量所对应的坐标轴.

例 9-12　求 Oyz 面上的直线 $y=az$ 绕 z 轴旋转一周所形成的圆锥面的方程。

解　因为旋转轴为 z 轴，所以只要将方程 $y=az$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到所求圆锥面的方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=az,$$

即 $x^2+y^2-a^2z^2=0$.

例 9-13　曲面 $x^2+y^2=az$ 叫做**旋转抛物面**，指出其旋转轴和母线.

解　旋转轴为 z 轴，母线为 Oyz 面上的抛物线 $y^2=az$ 或 Ozx 面上的抛物线 $x^2=az$.

9.3.4 空间曲线及其方程

正如空间直线可以看作两个平面的交线一样，一条空间曲线也可以看作是两个曲面的交线．设两个曲面 S_1 和 S_2 的方程分别为

$$F(x,y,z)=0 \qquad 和 \qquad G(x,y,z)=0,$$

则曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 上的点的坐标同时满足上述两个方程．反之，同时满足上述两个方程的点必定既在 S_1 上又在 S_2 上，即在 S_1 和 S_2 的交线上.

因此，曲线 C 的方程就是将这两个方程联立所形成的方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases},$$

该式称为**空间曲线的一般式方程**.

请注意，在空间直角坐标系中，曲面的方程只含一个关系式，而曲线的方程是由两个关系式联立起来的方程组.

例如，在空间直角坐标系下，$x^2+y^2=1$ 表示一个柱面，是一个母线平行于 z 轴的柱

面，它不表示圆．Oxy 面上以原点为圆心、半径为 1 的圆在空间直角坐标系下的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases},$$

这里是把它看成柱面 $x^2+y^2=1$ 和 Oxy 面的交线．当然也可把它看成球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 Oxy 面的交线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

由此看出，一条曲线的方程在形式上不唯一

空间曲线还可以看成动点运动的轨迹．这条曲线的方程可以用动点关于时间 t 的运动方程的坐标形式表达：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases}$$

这个含有参数 t 的方程叫做**空间曲线的参数方程**.

例 9-14 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω 和 v 都是常数），那么点 M 的运动轨迹构成的曲线叫做**螺旋线**．试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数．设 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处，经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$（图 9.6）.

记点 M 在 Oxy 面上的投影为 M', M' 的坐标为 $(x,y,0)$.

由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，从而在 t 时刻，有

$$\angle AOM'=\omega t$$

$$x=\left|\overrightarrow{OM'}\right|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t$$

$$y=\left|\overrightarrow{OM'}\right|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t$$

又由动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，得

$$z=\left|\overrightarrow{MM'}\right|=vt$$

因此，螺旋线的参数方程为

$$
\begin{cases}
x = a\cos\omega t \\
y = a\sin\omega t \\
z = vt
\end{cases}.
$$

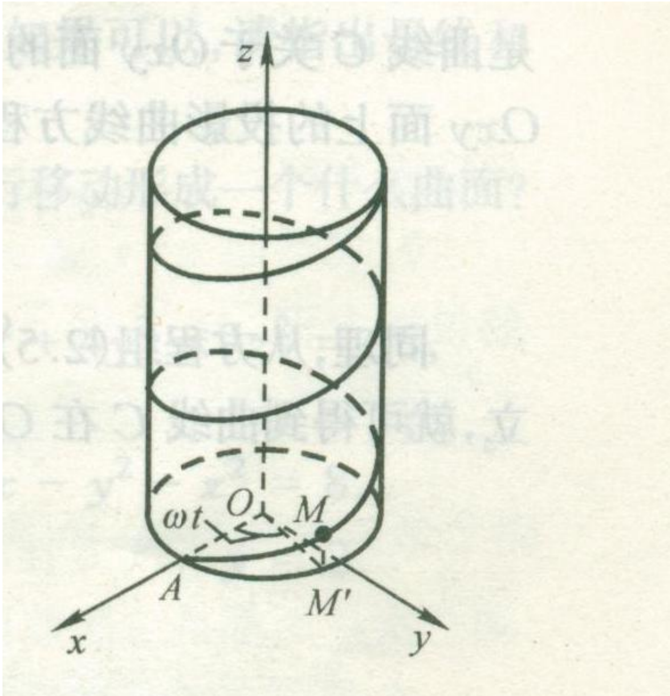

图 9.6

下面我们介绍空间曲线关于坐标面的投影柱面和投影曲线及其方程.

设有空间曲线C，过曲线C上的每一点作Oxy面的垂线，这些垂线形成一个母线平行于z轴且通过曲线C的柱面，称为曲线C关于Oxy面的**投影柱面**．这个柱面与Oxy面的交线称为曲线C在Oxy面上的**投影曲线**，简称**投影**.

事实上，投影曲线确实是由曲线C上各点在Oxy面上的垂直投影所形成的曲线.

设曲线C的方程为

$$
\begin{cases}
F(x,y,z)=0 \\
G(x,y,z)=0
\end{cases} \tag{9.6}
$$

再设由式（9.6）消去z所得的方程为$H(x,y)=0$.

由于方程$H(x,y)=0$中不含z坐标，所以它表示一个母线平行于z轴的柱面．又因为曲线C上的点的坐标满足方程组（9.6），当然也满足方程$H(x,y)=0$，所以曲线C上的点都在此柱面上．因此，方程$H(x,y)=0$就是曲线C关于Oxy面的投影柱面的方程．曲线C

在 Oxy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

同理，从方程组（9.6）中分别消去 x 和 y，并分别与 $x=0$ 和 $y=0$ 联立，就可得到曲线 C 在 Oyz 面和 Ozx 面上的投影曲线的方程.

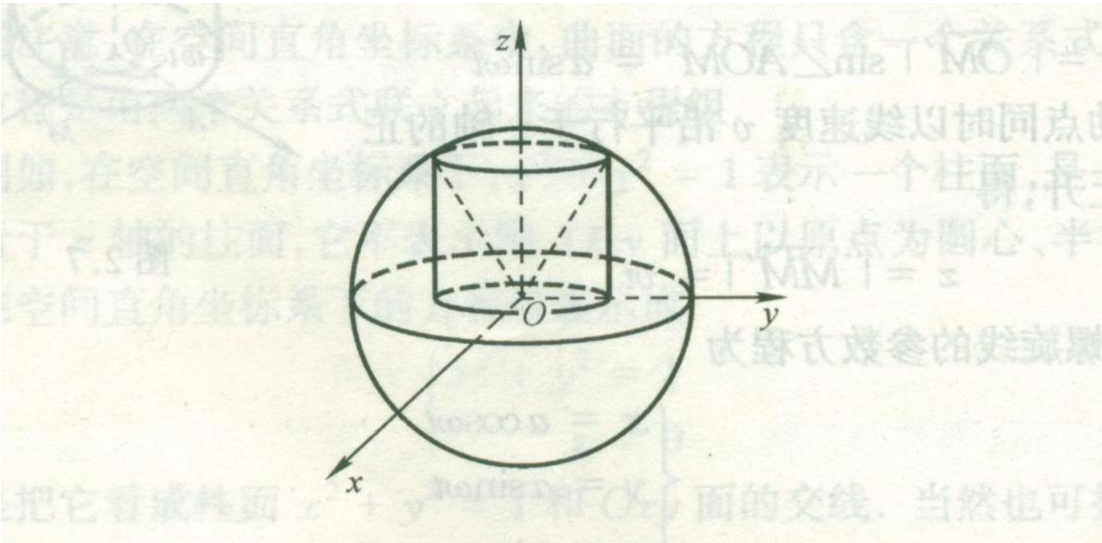

图 9.7

例 9-15 求曲线 C：

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$$

在 Oxy 面上的投影方程，并说明该投影是一条什么样的曲线，

解 消去变量 z，得

$$x^2+y^2=1,$$

这是曲线 C 关于 Oxy 面的投影柱面的方程，所以曲线 C 在 Oxy 面上的投影的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

它是 Oxy 面上以原点为圆心，半径为 1 的圆（图 9.7）.

思考题 9-3

1．球面和圆柱面可以看作一个旋转面吗？如果可以，请指出母线和旋转轴.

2．一个圆沿该圆所在平面的法向量方向平行移动形成一个什么曲面？

3．下列各方程组表示什么曲线？

（1）$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=36, \\ y=1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x^2-4y^2+z^2=25, \\ z=-4; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 4x^2-y^2-z^2=8, \\ y=2. \end{cases}$

习题 9-3

1．求球面 $2x^2+2y^2+2z^2-4y-6=0$ 的球心和半径.

2．在三维几何空间中，下列方程表示什么图形？并作略图.

（1）$4x^2+y^2=1;$　　（2）$y^2-z^2=1;$

（3）$x^2=2y;$　　（4）$z^2-x^2=1.$

3.求在 Oxy 面上的下列曲线绕指定轴旋转一周所形成的旋转面方程.

（1）$y^2=4x,$　绕 x 轴；

（2）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1,$ 绕 y 轴.

4．指出下列旋转面的母线和旋转轴，并画出草图.

（1）$x^2+2y^2+z^2=1;$

（2）$y^2+z^2=x;$

（3）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1.$

5．说明下列方程在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形.

（1）$x^2+y^2=1;$　　（2）$z=y^2.$

6．分别求母线平行于 x 轴及 y 轴且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$$

的柱面的方程.

7．求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 Oxy 面上的投影的方程.

9.4 二次曲面

一个三元二次方程所表示的曲面叫做**二次曲面**. 前面讲过的球面、二次柱面和圆锥面都

是二次曲面．

本节再介绍几种常见的二次曲面．在这里，我们首先给出它们的标准方程，然后从它们的标准方程来研究其形状．

研究的主要方法是：用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的形状，这种方法叫做**截痕法**．

在本节最后，我们将利用化二次型为标准形的方法，通过正交变换和平移变换把一般二次方程化为标准方程，从而判别曲面的类型．

9.4.1 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9.7}$$

所表示的曲面叫做**椭球面**．a,b 和 c（均为正数）称为椭球面的**半轴**．

下面用截痕法来研究椭球面的形状．

（1）它与三个坐标面的交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}.$$

这些曲线都是椭圆．

（2）它与平行于 Oxy 面的平面 $z=z_1(|z_1|<c)$ 的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2(c^2-z_1^2)/c^2}+\dfrac{y^2}{b^2(c^2-z_1^2)/c^2}=1\\ z=z_1\end{cases},$$

这是平面 $z=z_1$ 上的椭圆，它的两个半轴分别等于

$$a\sqrt{c^2-z_1^2}/c \quad 和 \quad b\sqrt{c^2-z_1^2}/c.$$

当 $|z_1|$ 由 0 逐渐增大到 c 时，椭圆的中心都在 z 轴上．椭圆截面由大变小，最后缩成一点．

用平行于另外两个坐标面的平面去截椭球面，可分别得出类似的结果．

综合上面的讨论可知，椭球面（9.7）的形状如图 9.8 所示．

如果 $a=b=c$，那么方程（9.7）变为

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

这是一个球面．可见，球面是椭球面的一种特殊情形．

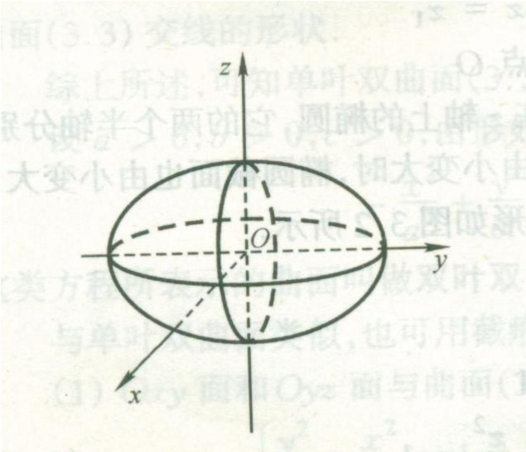

图 9.8

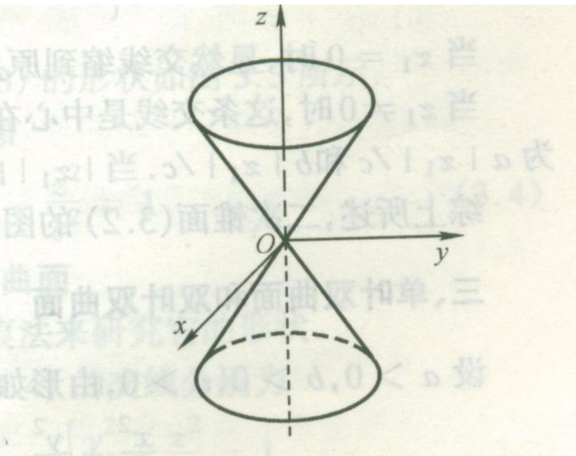

图 9.9

9.4.2 二次锥面

设$a>0,b>0,c>0$，由形如

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9.8)$$

这类方程所表示的曲面叫做**二次锥面**．下面用截痕法来研究它的形状．

（1）它与Oyz面的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\\ x=0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases},$$

这是Oyz面上的一对直线．

同理，它与Ozx面的交线也是一对直线．

（2）它与平行于Oxy面的平面$z=z_1$的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z_1^2}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$

当$z_1=0$时，显然交线缩到原点O．

当$z_1\neq 0$时，这条交线是中心在z轴上的椭圆，它的两个半轴分别为$a|z_1|/c$和$b|z_1|/c$．当$|z_1|$由小变大时，椭圆截面也由小变大．

综上所述，二次锥面（9.8）的图形如图 9.9 所示.

9.4.3 单叶双曲面和双叶双曲面

设$a>0,b>0,c>0$，由形如

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9.9}$$

这类方程所表示的曲面叫做**单叶双曲面**.

下面用截痕法来研究它的形状.

（1）它与Ozx面、Oyz面的交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},$$

它们都是双曲线，虚轴均在z轴上.

（2）它与Oxy面的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},$$

这是中心在原点的椭圆.

（3）它与平行于Oxy面的平面$z=z_1$的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2(c^2+z_1^2)/c^2}+\dfrac{y^2}{b^2(c^2+z_1^2)/c^2}=1\\ z=z_1\end{cases},$$

这是中心在z轴上的椭圆，它的两个半轴分别为

$$a\sqrt{c^2+z_1^2}/c \quad 和 \quad b\sqrt{c^2+z_1^2}/c.$$

当$|z_1|$由小变大时，椭圆截面也越来越大．当$z_1=0$时截面最小，即在Oxy面上的截面最小.

与（3）类似，还可以考察平行于Ozx面或平行于Oyz面的平面与该曲面的交线的形状.

综上所述，可知单叶双曲面（9.9）的形状如图 9.10 所示.

设$a>0,b>0,c>0$，由形如

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9.10}$$

这类方程所表示的曲面叫做**双叶双曲面**.

与单叶双曲面类似，也可用截痕法来研究它的形状.

（1）它与Oxy面、Oyz面的交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1\\ z=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},$$

它们都是双曲线，实轴都是y轴.

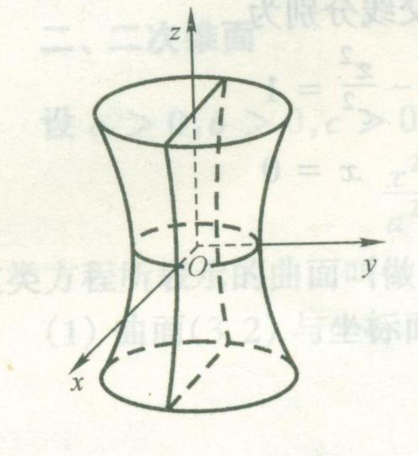

图 9.10

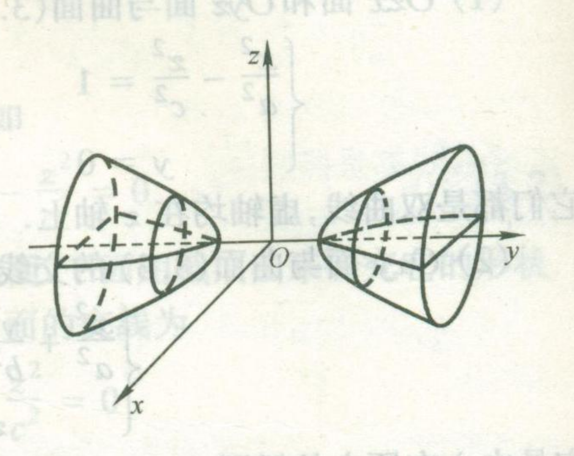

图 9.11

（2）它与平行于Oxz面的平面$y=y_1$（其中$|y_1|\geq b$）的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{(a\sqrt{y_1^2-b^2}/b)^2}+\dfrac{z^2}{(c\sqrt{y_1^2-b^2}/b)^2}=1\\ y=y_1\end{cases},$$

这是中心在y轴上的椭圆，它的两个半轴分别为

$$\frac{a\sqrt{y_1^2-b^2}}{b} \quad 和 \quad \frac{c\sqrt{y_1^2-b^2}}{b}.$$

当$|y_1|=b$时，截线缩成一点．当$|y_1|$比b越来越大时，椭圆的截面也越来越大.

综上所述，可知双叶双曲面（9.10）如图 9.11 所示.

9.4.4 椭圆抛物面和双曲抛物面

设$a>0,b>0$，由形如

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad 或 \quad -z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad (9.11)$$

这类方程所表示的曲面叫做**椭圆抛物面**.

下面以前者为例用截痕法研究其形状.

（1）它与Oyz面、Ozx面的交线分别为

$$\begin{cases} z = y^2/b^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z = x^2/a^2 \\ y = 0 \end{cases},$$

它们都是开口向上的抛物线．

（2）因为该曲面中的 $z \geq 0$，所以它的图形只在 Oxy 面的上方．

它与平面 $z = z_1$（$z_1 \geq 0$）的交线为

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = z_1 \end{cases}.$$

当 $z_1 = 0$ 时，交线缩到原点 O．

当 $z_1 > 0$ 时，交线是中心在 z 轴上的椭圆，两个半轴分别为 $a\sqrt{z_1}$ 和 $b\sqrt{z_1}$，当 z_1 由 0 增大时，该椭圆也由小变大．

综上所述，椭圆抛物面（9.11）如图 9.12 所示．

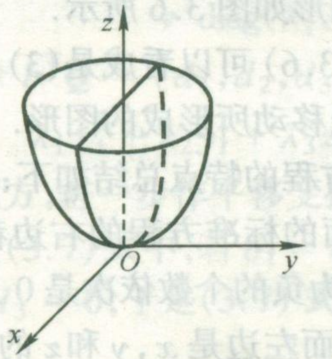

图 9.12

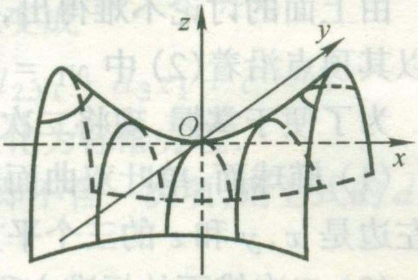

图 9.13

设 $a > 0, b > 0$，由形如

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{9.12}$$

这类方程所表示的曲面叫做**双曲抛物面或马鞍面**．

（1）它与平行于 Oxy 面的平面 $z = z_1$ 的交线为

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = z_1 \end{cases}.$$

当 $z_1 = 0$ 时，它是 Oxy 面上的两条直线 $y = \pm bx/a$．

当 $z_1 \neq 0$ 时，它是双曲线．如果 $z_1 > 0$，其实轴平行于 x 轴；如果 $z_1 < 0$，其实轴平行

于 y 轴.

（2）它与平行于 Ozx 面的平面 $y=y_1$ 的交线为

$$\begin{cases} z=x^2/a^2-y_1^2/b^2 \\ y=y_1 \end{cases},$$

这是一条抛物线，其对称轴与 z 轴平行，开口朝 z 轴的正方向，顶点为 $(0,y_1,-y_1^2/b^2)$.

（3）它与平行于 Oyz 面的平面 $x=x_1$ 的交线为

$$\begin{cases} z=-y^2/b^2+x_1^2/a^2 \\ x=x_1 \end{cases},$$

这也是一条抛物线，它的对称轴平行于 z 轴，开口朝 z 轴的负方向，顶点为 $(x_1,0,x_1^2/a^2)$.

显然这个顶点位于（2）中当 $y_1=0$ 时的抛物线上.

综上所述，可知双曲抛物面（9.12）的图形如图 9.13 所示.

由上面的讨论可以看出，双曲抛物面（9.12）可以看成是（3）中的抛物线以其顶点沿着（2）中 $y_1=0$ 时的抛物线移动所形成的图形.

为了便于掌握，现将二次曲面的标准方程的特点总结如下：

（1）椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面的标准方程的右边都是 1,而左边是 x,y 和 z 的三个平方项，其系数为负的个数依次是 $0,1,2$.

（2）二次锥面的标准方程的右边为 0，而左边是 x,y 和 z 的三个平方项，其系数不同号.

（3）椭圆抛物面和双曲抛物面的标准方程的左边都是一个一次项，而右边是另外两个变量的平方项，前者两项同号，而后者两项异号.

（4）母线平行于坐标轴的柱面，其方程中不含该坐标轴对应的变量，只含有另外两个变量.

9.4.5 化简二次方程判别曲面类型

由本节前面的讨论可以看出，如果知道二次曲面的标准方程，则很容易画出其图形，讨论其几何性质也比较容易.

但是，在很多实际问题的研究中，由于很难建立理想的空间直角坐标系，结果造成曲面方程不是标准方程.

这给我们提出一个新问题，能否找出合适的正交变换和平移变换将二次曲面的方程化为标准方程？这是我们下面要解决的问题.

设三元二次方程的一般形式为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0, \tag{9.13}$$

令 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{3x3},\mathbf{u}=\left[x,y,z\right]^T,\mathbf{b}^T=\left[b_1,b_2,b_3\right]$，则方程（9.13）可写成

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{b}^T\mathbf{u}+c=0 \tag{9.14}$$

因为 $\mathbf{A}$ 是实对称阵，所以存在正交阵 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

作正交变换 $\mathbf{u}=\mathbf{Q}\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}=\left[x_1,y_1,z_1\right]^T$，则（9.14）变为

$$\mathbf{v}^T diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\mathbf{v}+\mathbf{b}^T\mathbf{Q}\mathbf{v}+c=0 \quad . \tag{9.15}$$

设 $\mathbf{b}^T\mathbf{Q}=\left[d_1,d_2,d_3\right]$，则（9.15）就变成

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+d_1x_1+d_2y_1+d_3z_1+c=0.$$

通过配方，进一步作平移变换可将原方程化为标准方程.

式在 9.13）中，若 $b_1=b_2=b_3=0$，即不含一次项，则上式的 $d_1=d_2=d_3=0$，于是式（9.13）就化为

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+c=0,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为实对称阵 A 的特征值.

显然，很容易把这个方程化为标准方程。因此，当二次方程不含一次项时，只要求出其二次型部分对应的对称阵的特征值，就能马上写出其标准方程。

例 9-16 化 $3x^2+4xy+2z^2=1$ 为标准方程，并指出它是何种曲面.

解 设方程左边二次型对应的对称阵为 A，则

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

它的特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$ (见例 8-8).

由方程左边二次型的标准形就可得出标准方程为

$$\frac{x_1^2}{(1/2)^2}+\frac{y_1^2}{(1/\sqrt{2})^2}-\frac{z_1^2}{1}=1.$$

因此，该曲面是单叶双曲面.

例 9-17 将二次曲面方程

$$2xy+2xz+2yz-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-1=0$$

化为标准方程，并指出它是什么曲面.

解 令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right]^T,\mathbf{u}=\left[x,y,z\right]^T$$

则原方程可写成

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{b}^T\mathbf{u}-1=0. \tag{9.4.16}$$

由例 8-9 可知，$\mathbf{A}$ 的特征值及对应的正交的单位特向量分别为

$$\lambda_1=2，\quad \mathbf{q}_1=\left[1,1,1\right]^T/\sqrt{3}$$

$$\lambda_2=-1\text{（二重）},$$

$$\mathbf{q}_2=\left[1,-1,0\right]^T/\sqrt{2}，\quad \mathbf{q}_3=\left[1,1,-2\right]^T/\sqrt{6}.$$

令

$$\mathbf{Q}=\left[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

则有

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=diag(2,-1,-1),\quad \mathbf{b}^T\mathbf{Q}=\left[0,-2,0\right]\quad .$$

作正交变换 $\mathbf{u}=\mathbf{Q}\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}=\left[x_1,y_1,z_1\right]^T$，则式（9.4.16）变为

$$\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{v}+\mathbf{b}^T\mathbf{Q}\mathbf{v}-1=0,$$

即

$$2x_1^2-y_1^2-z_1^2-2y_1-1=0.$$

配方，得

$$2x_1^2-(y_1+1)^2-z_1^2=0.$$

作平移变换

$$\begin{cases}x_2=x_1\\ y_2=y_1+1,\\ z_2=z_1\end{cases}$$

得

$$2x_2^2-y_2^2-z_2^2=0.$$

这就是原曲面方程的标准方程，它表示一个顶点在原点、旋转轴为 x_2 轴的圆锥面.

思考题 9-4

1. 对椭球面、二次锥面、单叶双曲面、双叶双曲面和椭圆抛物面的标准方程进行讨论，看它们分别在什么条件下可成为旋转面。

2．椭球面、单叶双曲面和椭圆抛物面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值有什么差异？

3．能否通过二次锥面、单叶双曲面和双叶双曲面的二次项部分所对应的实对称阵的特征值来将这三种曲面加以区分？为什么？

习题 9-4

1．下列二次方程表示什么曲面？作出略图.

（1）$4x^2+y^2+9z^2=36$；

（2）$4x^2-4y^2+9z^2=36$；

（3）$x^2-2y^2-z^2=0$；

（5）$4x^2-9y^2=72z$；

（6）$x^2-y^2-z^2-2x+1=0$；

（7）$3x^2+z^2=2y$；

（8）$z=(y-1)^2+x^2$.

2．画出下列每组曲面所围成的图形：

（1）抛物柱面 $x=2y^2$，平面 $z=0$ 和 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$；

（2）抛物柱面 $z=1-x^2$，平面 $y=0$，$z=0$ 和 $x+y=1$；

（3）圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

（4）单叶双曲面 $x^2+2y^2-z^2=1$，平面 $z=0$ 和 $z=1$.

3．将下面的二次方程化成标准方程，并指出它们是什么曲面.

（1）$6x^2-8y^2+8z^2-32\sqrt{2}yz+24x+16\sqrt{6}y+16\sqrt{3}z=6$；

（2）$4x^2+y^2-z^2+4xy-4\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y+4z=0$；

（3）$20x^2-6y^2+6z^2-16yz+40x+20\sqrt{5}y-20\sqrt{5}z+100=0$；

（4）$4x^2-6y^2-6z^2-4yz-4x+4y+4z-5=0$；

（5）$x^2-y^2+4xz-4yz=3$；

（6）$2xy+2xz+2yz=-1$；

（7）$4x^2+3y^2+3z^2+2yz=1$.