第 9 章　二次型与二次曲面

空间的曲面和曲线是空间解析几何的重要组成部分，也是学习多元微积分和大学物理等课程的基础。二次型是线性代数的又一个重要的研究对象，它不仅是研究二次曲面的工具，而且在线性系统的理论和工程技术的许多领域中都有应用。

本章主要介绍化二次型为标准形的方法，正定二次型，空间的曲面与曲线，二次曲面及其方程。

9.1　二次型的概念及标准形

9.1.1　二次型的定义及矩阵表示

定义 9-1　关于 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (9.1)$$

称为 n 元**二次型**.

系数全为实数的二次型叫做实二次型.本书只讨论实二次型，简称为二次型.

只含平方项的二次型

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$ 称为**标准二次型**.

形如

$$h(z_1, z_2, \cdots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2 .$$

的二次型称为规范二次型.

为了便于二次型的研究，我们给出二次型的矩阵形式.

当 $j > i$ 时，令 $a_{ji} = a_{ij}$,则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j$ ，式(9.1)可写成

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = &\ a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots \\ &+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = &\ x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ &+x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &+\cdots \\ &+x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

$$=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{bmatrix}$$

$$=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

若记 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n},\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$,则式（9.1)可写成矩阵形式

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\text{，}$$

其中，$\mathbf{A}$ 为对称矩阵，叫做**二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵**.

本书如无特别注明,以后在二次型的矩阵形式 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 中均假定 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵.

注意　$\mathbf{A}$ 的对角元 a_{ii} 为 x_i^2 的整个系数，$\mathbf{A}$ 的非对角元 a_{ij} 为 x_ix_j 的系数的 $\frac{1}{2}$.

由上述讨论可以看出，二次型与对称矩阵之间是一一对应的. 因此，我们既可把二次型的问题转换成对称矩阵的问题进行研究，又可把对称矩阵的问题转换成二次型的问题进行研究.

对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩叫做**二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的秩**.

例 9-1　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵形式为

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

显然，$r(\mathbf{A})=2$.因此，该二次型的秩为 2.

9.1.2　线性变换与合同变换

为了研究二次型,我们需要通过变量替换将其化为标准的二次型.为此,先介绍线性变换的概念.

定义 9-2　设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别是 $m\times n$ 型矩阵和 n 元列向量，把 $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 叫做从 n 元向量 $\mathbf{x}$ 到 m 元向量 $\mathbf{y}$ 的**线性变换**.

当 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵时，$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 叫做**可逆变换**.

当 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵时，$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 叫做**正交变换**.

正交变换是一种特殊的可逆变换，它具有下面的性质.

性质 9-1 设 $\mathbf{Q}$ 为 n 阶正交矩阵，$\mathbf{x}_1 \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}, \mathbf{y}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{x}_2$，$\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 的夹角为 θ，$\mathbf{y}_1$ 与 $\mathbf{y}_2$ 的夹角为 φ，则 $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{x}_1\|, \varphi = \theta$.

证明 由 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，可得 $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}$. 于是，有

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_1^T\mathbf{y}_2 = (\mathbf{Q}\mathbf{x}_1)^T(\mathbf{Q}\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{E}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$\|\mathbf{y}_1\| = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}_1\|,$$

$$\varphi = \arccos\frac{(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)}{\|\mathbf{y}_1\|\|\mathbf{y}_2\|} = \arccos\frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|} = \theta.$$

性质 9-1 表明，正交变换保持向量的内积、长度和夹角不变，因而在几何空间中保持几何图形不变.

下面考察在可逆变换下二次型的变化规律.

对二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 进行可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$，由

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{y}$$

可知，此时得到一个新的二次型 $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$.

根据 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的关系，我们给出下面的定义。

定义 9-3 对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **合同**（也称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **相合**）；变换 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 叫做对 $\mathbf{A}$ 进行**合同变换**（也叫做**相合变换**）.

当 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵时，由

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^T)^T = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$$

可知，$\mathbf{B}$ 也为对称矩阵，即合同变换不改变矩阵的对称性.

由上面的讨论可以看出，对二次型进行可逆变换的实质是对其矩阵进行合同变换.

9.1.3 用正交变换化二次型为标准形

对于二次型，我们要解决的一个主要问题是寻找一个可逆变换将二次型化为标准形（即标准二次型）. 由前面的讨论及标准形的矩阵为对角矩阵可知，若 $\mathbf{P}$ 可逆，且 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 为对角矩阵，则可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 将二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形 $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$.

由定理 8-8 可知，对于任何实对称矩阵 $\mathbf{A}$，都存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$（即 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$）为对角矩阵，因而通过正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$，可将二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形.于是，有下面的定理。

定理 9-1 对于任给的 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，总有正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$，把 $f(\mathbf{x})$ 化为标准形

$$g(\mathbf{y})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

注意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 在标准形中的排列次序与它们对应的特征向量在正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 中的排列次序是一一对应的.

例 9-2 求一正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形.

解 ①该二次型的矩阵形式为 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$,其中，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

②按照例 8-9 的方法，可求得正交矩阵

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

使

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,-2),$$

即

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,-2)$$

③正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将该二次型化为标准形

$$g(\mathbf{y})=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$

9.1.4 用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形具有保持几何图形不变的优点.除了用正交变换，有些问题也可用普通的可逆变换来把二次型化为标准形，方法有很多，这里只介绍拉格朗日配方法.下面举例说明这种方法.

例 9-3 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$,求一可逆变换将该二次型化

为标准形.

解 由于该二次型中含有变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项集中起来，配方可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2^2+3x_3^2+8x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+2x_3^2$$

上式右端除第一项外已不再含有 x_1.由于剩下的部分含有 x_2 的平方项，再对含有 x_2 的项配方，可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-7x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=\quad x_2+3x_3 \\ y_3=\qquad x_3 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3 \\ x_2=\quad y_2-3y_3 \\ x_3=\qquad y_3 \end{cases},$$

则把所给二次型化为标准形

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-7y_3^2.$$

所用的可逆变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，其中,

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{P}$ 为可逆矩阵.

注意　如果令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2 \\ z_3=\sqrt{7}y_3 \end{cases}$

则可把所给二次型化为规范形（即规范二次型）

$$h(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2-z_3^2.$$

例 9-4　求一可逆变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 化为标准形.

解 由于该二次型中不含平方项，但含有混合项 x_1x_2 ,故令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}, \qquad (9.2)$$

可得含有平方项的二次型

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2y_2^2+4y_2y_3\ .$$

对含有 y_2 的项配方，得

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2(y_2-y_3)^2+2y_3^2\ .$$

令

$$\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2+z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases} \tag{9.3}$$

则把所给二次型化为标准形

$$h(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3^2\ .$$

将式(9.2)和式(9.3)复合，可得所求的可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Pz}$，其中

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

通过以上两个例子可以看出，如果二次型不含有平方项，可先用一个可逆变换将其化为含有平方项的二次型；对于含有 x_i^2 的二次型，可先将含有 x_i 的项集中起来进行配方.对剩下的部分，仍按上述方法进行.如此反复做下去，就可得到标准形.对于多次变换的情况，需要将各次变换合并起来，求出总的可逆变换的表达式及矩阵.

9.1.5　惯性定理

由例 9-2 和例 9-4 可以看出，用不同的方法将二次型所化为的标准形一般是不同的，但是标准形所含的平方项的项数是相同的，并且正、负平方项的项数对应相等，这反映了二次型在可逆变换下的一个不变的性质，通常称为二次型的惯性定理.

若可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Py}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 化为标准形 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{By}$,则 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}$ 为对角矩阵.由 $\mathbf{P}$ 为可逆矩阵可得，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$.由于标准形 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{By}$ 中平方项的项数等于 $\mathbf{B}$ 的非零对角元的个数（即 $r(\mathbf{B})$ ），所以标准形 $g(\mathbf{y})$ 中平方项的项数等于 $r(\mathbf{A})$.

定理 9-2　（**惯性定理**）用任何可逆变换将 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 所化为的标准形的正、负平方项的项数都对应相等.

***证明** 设 $r(\mathbf{A})=r$,可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}_1\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{z}$ 分别将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形

$$g_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\cdots+c_sy_s^2-c_{s+1}y_{s+1}^2-\cdots-c_ry_r^2$$

和

$$g_2(z_1,z_2,\cdots,z_n)=d_1z_1^2+d_2z_2^2+\cdots+d_tz_t^2-d_{t+1}z_{t+1}^2-\cdots-d_rz_r^2,$$

其中, $c_i>0,d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$.

下面用反证法证明 $s=t$.假设 $s\neq t$ ，并不妨设 $t>s$.由 $\mathbf{x}=\mathbf{P}_1\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{z}$ 可得可逆变换 $\mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{z}$ ，其中 $\mathbf{P}=\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2$.在可逆变换 $\mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{z}$ 下， $g_1(\mathbf{y})=g_2(\mathbf{z})$.

下面考察齐次线性方程组

$$\begin{cases}y_1=0\\y_2=0\\\vdots\\y_s=0\\z_{t+1}=0\\\vdots\\z_n=0\end{cases},$$

注意， $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 都是关于 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的线性表达式。由于 $z_{t+1}=\cdots=z_n=0$ ，所以

$$\begin{cases}y_1=0\\y_2=0\\\vdots\\y_s=0\end{cases}$$

可看做是关于 $z_1,z_2,\cdots,z_t$ 的一个齐次线性方程组.因为该方程组中方程个数 s 小于未知数个数 t，所以它一定有非零解 $z_1^*,z_2^*,\cdots,z_t^*$ ，从而存在向量

$$\mathbf{z}^*=\left[z_1^*,z_2^*,\cdots,z_t^*,0,\cdots,0\right]^T \text{ 和 } \mathbf{y}^*=\left[0,\cdots,0,y_{s+1}^*,\cdots,y_n^*\right]^T=\mathbf{P}\mathbf{z}^*\neq\mathbf{0}.$$

使 $g_1(\mathbf{y}^*)\le 0$ 和 $g_2(\mathbf{z}^*)>0$

相矛盾，所以 $s=t$.

由惯性定理可知,一个二次型的标准形中正、负平方项的项数由该二次型唯一确定，这两个数能反映一个二次型的某些特征，因而我们给出下面的定义.

定义 9-4 一个二次型的标准形的正、负平方项的项数分别叫做该二次型的**正、负惯性指数**.

推论 9-1 若二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则存在可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ ，将该二次型化为规范形

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2.$$

由于用可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形等价于用相合变换 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 将矩阵 $\mathbf{A}$ 化为对角矩阵. 因此，也可给出实对称矩阵的惯性定理及正、负惯性指数的概念.

定理 9-2′　（实对称矩阵的惯性定理）　用任何相合变换将实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 所化为的对角矩阵的正、负对角元的个数都对应相等.

定义 9-4′　与实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 相合的对角矩阵的正、负对角元的个数分别叫做 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数.

实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数分别等于二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的正、负惯性指数，可通过将二次型化为标准形的方法来求，也可通过 $\mathbf{A}$ 的特征值来求。

与推论 9-1 相对应，我们有下面的推论。

推论 9-1′　若实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则 $\mathbf{A}$ 相合于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$，即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$$

通常称 $\mathrm{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$ 为实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的**相合标准形**.

思考题 9-1

1. 若 $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T=\mathbf{B}$,$\mathbf{P}$ 可逆，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是否合同？

2.若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同，$\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 合同，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{C}$ 是否合同？

3.若两个同阶实对称矩阵的正、负惯性指数相同，则这两个矩阵是否合同？两个实对称矩阵合同的充要条件是什么？

4.两个合同的实对称矩阵的正、负惯性指数是否相同？

5.请利用定理 8-8 证明推论 9-1′.

习题 9-1

1.写出下列二次型的矩阵，并求二次型的秩：

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+4x_1x_2+x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=-x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

2.求一个正交变换将二次型化为标准形，并求其正、负惯性指数.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

3.用配方法将下列二次型化为标准形，并写出所用的可逆变换.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

4.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1-x_3)^2$,求一可逆变换将该二次型化为规范形.

5. 设用正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2bx_1x_2$ 化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+3y_2^2+4y_3^2$,求 a 和 b.

6.设用正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2ax_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=by_1^2+2y_2^2+3y_3^2$，求 a 和 b.

7.设 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，证明：对于任何 n 元单位列向量 $\mathbf{x}$，都有 $\lambda_1\le\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}\le\lambda_n$.

8.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵,对于任何 n 元列向量 $\mathbf{x}$,都有 $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{x}^T\mathbf{Bx}$,证明: $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ [提示：$(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)^T\mathbf{A}(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}$]。

9.2　正定二次型与正定矩阵

定义 9-5　对于 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$，若对任意 n 元非零实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})>0$，则称该二次型为**正定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**正定矩阵**；若对任意 n 元非零实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})<0$，则称该二次型为**负定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**负定矩阵**.

注意　正（负）定矩阵都要求是实对称矩阵，要判断一个矩阵是否为正（负）定矩阵，首先要判断它是否为实对称矩阵.

由于 $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}>0\Leftrightarrow\mathbf{x}^T(-\mathbf{A})\mathbf{x}<0$，所以 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow-\mathbf{A}$ 为负定矩阵.基于正定矩阵与负定矩阵之间的这种关系，我们下面重点研究正定矩阵的性质，作为推论可得出负定矩阵相应的性质.

定理 9-3　设 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 为 n 元二次型，则下列命题互为充要条件.

（1） $f(\mathbf{x})$ 为正定二次型，即 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵；

（2） $\mathbf{A}$ 的特征值都为正数；

（3） $\mathbf{A}$ 的正惯性指数为 n；

（4） $\mathbf{A}$ 相合于单位矩阵（即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{E}$ ）；

（5）存在 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

证明　采用循环证法.

$(1) \Rightarrow (2)$ 设 λ 为 $\mathbf{A}$ 的任一特征值，$\mathbf{p}$ 为对应的实特征向量，则有 $\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.由 $f(\mathbf{x})$ 为正定二次型，可得

$$\lambda\mathbf{p}^T\mathbf{p} = \mathbf{p}^T\mathbf{Ap} = f(\mathbf{p}) > 0,$$

再由 $\mathbf{p}^T\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|^2 > 0$，可得 $\lambda > 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$ 由 $\mathbf{A}$ 的正惯性指数等于 $\mathbf{A}$ 的正特征值的个数可知结论成立.

$(3) \Rightarrow (4)$ 由推论 9-1′ 可知结论正确.

$(4) \Rightarrow (5)$ 令 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}$ 即可.

$(5) \Rightarrow (1)$ 对任意 n 元非零实向量 $\mathbf{x}$，由 $\mathbf{B}$ 可逆可得 $\mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$.于是，有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{Bx} = (\mathbf{Bx})^T(\mathbf{Bx}) = \|\mathbf{Bx}\|^2 > 0,$$

故 $f(\mathbf{x})$ 为正定二次型.

推论 9-2 若 n 阶对称矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵，则

（1） $\mathbf{A}$ 的对角元 $a_{ii} > 0(i = 1,2,\cdots,n)$；

（2） $|\mathbf{A}| > 0$.

证明 （1）由定义 9-5 及 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，对于 $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n(i = 1,2,\cdots,n)$，有

$$a_{ii} = \mathbf{e}_i^T\mathbf{Ae}_i > 0.$$

（2）由定理 9-3 及 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{A}$ 的特征值都大于零. 因为 $|\mathbf{A}|$ 等于 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值之积，所以 $|\mathbf{A}| > 0$.

注意 推论 9-2 是 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的必要条件，不是充分条件. 根据推论 9-2，当 $\mathbf{A}$ 的对角元不全为正数时，$\mathbf{A}$ 一定不是正定矩阵. 但是，当 $\mathbf{A}$ 的对角元全为正数时，不能肯定 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，需做进一步的论证才能判断.下面给出一种非常有效的判断 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的方法.

定义 9-6 矩阵 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 的左上角 k 阶子阵称为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶**顺序主子阵**，记作 $\mathbf{A}_k$，即 $\mathbf{A}_k = \left[a_{ij}\right]_{k\times k}$. $\mathbf{A}_k$ 的行列式叫做 $\mathbf{A}$ 的 k 阶**顺序主子式**.

定理 9-4 实对称矩阵 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 为正定矩阵的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都大于零.

*__证明__ 必要性 设 $\mathbf{A}_k$ 为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶顺序主子阵，由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可知，$\mathbf{A}_k$ 也为实对称矩阵.

将 $\mathbf{A}$ 分块为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$.

对任意 k 元非零实向量 $\mathbf{x}$,令 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^n$.

由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，得

$$0<\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}=\left[\mathbf{x}^T,\mathbf{0}^T\right]\begin{bmatrix}\mathbf{A}_k & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}_k\mathbf{x},$$

所以 $\mathbf{A}_k$ 为正定矩阵.由推论 9-2 可知，$\left|\mathbf{A}_k\right|>0$.由 k 的任意性可知必要性正确.

充分性 用归纳法.

当 $n=1$ 时，$\mathbf{A}=\left[a_{11}\right],\left|\mathbf{A}\right|=a_{11}>0$，结论成立.

假设结论对 n-1 阶实对称矩阵成立，下面证明结论对 n 阶实对称矩阵也成立.将 $\mathbf{A}$ 分块为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\left[a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n}\right]^T$.由于 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为实对称矩阵且 $\mathbf{A}_{n-1}$ 的各阶顺序主子式都大于零，故由归纳假设可知 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为正定矩阵.由定理 9-3（4）可知，存在可逆阵 $\mathbf{G}$，使 $\mathbf{G}^T\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{G}=\mathbf{E}_{n-1}$. 由 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{A}_{n-1}$ 可逆.取 $\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}$,则 $\mathbf{P}_1$ 可逆.这时，有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1&=\begin{bmatrix}\mathbf{G}^T & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{G}^T\mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{G}^T\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^T & b\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中,$b=a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.由$\left|\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1\right|=\left|\mathbf{P}_1\right|^2\left|\mathbf{A}\right|>0$，可知 $b>0$.再取 $\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^T & \dfrac{1}{\sqrt{b}}\end{bmatrix}$,则 $\mathbf{P}_2$ 可逆，且有 $\mathbf{P}_2^T\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{E}$，即 $\mathbf{A}$ 相合于单位矩阵，故 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

例 9-5 证明 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 9\end{bmatrix}$ 为正定矩阵.

证明 由

$$\left|\mathbf{A}_1\right|=1>0,\ \left|\mathbf{A}_2\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0$$

及

$$|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

可知，$\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

例 9-6 试确定 k 的取值范围，使二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型.

解 该二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

根据定理 9-4，该二次型为正定二次型的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$|\mathbf{A}_1| = 1 > 0,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - k^2 > 0,$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k - k^2 > 0.$$

解上面的不等式，得 $0 < k < 2$.故当 $0 < k < 2$ 时,该二次型为正定二次型.

例 9-7 证明：合同变换不改变实对称矩阵的正定性.

证明 设 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \mathbf{B}, \mathbf{P}$ 可逆，$\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵.由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{A}$ 为实对称矩阵.再由合同变换保持对称性可知，$\mathbf{B}$ 为实对称矩阵.对于任意 n 元非零向量 $\mathbf{x}$，由 $\mathbf{P}$ 可逆可知，$\mathbf{Px} \neq 0$.由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，可得

$$(\mathbf{Px})^T\mathbf{A}(\mathbf{Px}) > 0,$$

即

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Bx} > 0.$$

故 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵, 结论正确.

例 9-8 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，证明：$\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在正定矩阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.

证明 充分性 根据定理 9-3 及 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{B}$ 的特征值都大于零。再由 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ 可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\mathbf{B}$ 的特征值的平方，所以 $\mathbf{A}$ 的特征值都大于零，$\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

必要性 由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可知，存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值. 由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零.

令 $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\mathbf{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\lambda_2^{\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}})$，则 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}$，

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T.$$

令 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$，由例 9-7 可知，$\mathbf{B}$ 为正定矩阵，且 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$.

若令 $\mathbf{C}=-\mathbf{B}$，则有结论：“$\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在负定矩阵 $\mathbf{C}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{C}^2$”.可见，正定矩阵具有与正数类似的性质.

通过正定矩阵的定义和特征值，可以证明正定矩阵具有下列性质：

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶正定阵，数 $c>0$,k 为正整数，则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}, c\mathbf{A}, \mathbf{A}^k, \mathbf{A}^{-1}$ 和 $\mathbf{A}^*$ 均为正定矩阵.

根据“$\mathbf{A}$ 为负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-\mathbf{A}$ 为正定矩阵”，我们可以得到负定矩阵的相应结论.

定理 9-5 设 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 为 n 元二次型，则下列命题互为充要条件.

（1）$f(\mathbf{x})$ 为负定二次型，即 $\mathbf{A}$ 为负定矩阵；

（2）$\mathbf{A}$ 的特征值都为负数；

（3）$\mathbf{A}$ 的负惯性指数为 n；

（4）$\mathbf{A}$ 合同于 $-\mathbf{E}$；

（5）存在 n 阶可逆阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A}=-\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

（6）$\mathbf{A}$ 的奇数阶顺序主子式都小于零，偶数阶顺序主子式都大于零.

大家在学习时，可重点掌握正定矩阵的研究方法，对于负定矩阵的问题，可直接讨论，也可通过添加负号转换成正定矩阵的问题进行研究.

***定义 9-7** 对于 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，若对任意 n 元实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})\geq 0$，且存在 $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{x}_0)=0$，则称该二次型为**半正定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**半正定矩阵**；若对任意 n 元实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})\leq 0$，且存在 $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{x}_0)=0$，则称该二次型为**半负定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**半负定矩阵**；若既存在 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{y})>0$，又存在 $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$, 使 $f(\mathbf{z})<0$，则称 $f(\mathbf{x})$ 为**不定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**不定矩阵**.

关于半正定二次型和半负定二次型的结论，读者可依照前面的讨论自己给出.

思考题 9-2

1. 写出 n 元正定二次型的规范形.
2. 负定矩阵的行列式是否一定小于零？
3.负定矩阵的对角元是否一定小于零？
4.若 $\mathbf{A}$ 为负定矩阵，则 $\mathbf{A}^k$（k 为正整数）是否为负定在？

5.设 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值从小到大排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，当 k 满足什么条件时，$\mathbf{A}+k\mathbf{E}$ 为正定矩阵？当 k 满足什么条件时，$\mathbf{A}+k\mathbf{E}$ 为负定矩阵？

6.“$\mathbf{C}=\mathrm{diag}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都为正定矩阵”是否正确？为什么？

7.从行列式、秩、特征值、特征值的符号及正定性方面讨论等价变换、相似变换、相合变换和正交相似变换的不变性.

习题 9-2

1.判别下列对称矩阵是正定矩阵还是负定矩阵，并说明理由.

（1）$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

2.判断下列二次型是否为正定二次型.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$.

3.按要求确定下面二次型或实对称矩阵中参数的取值范围.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+4x_3^2+2kx_1x_3$ 是正定二次型；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-kx_2^2-x_3^2-2kx_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是负定二次型；

（3）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$是正定矩阵；

（4）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$是负定矩阵；

（5）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$是负定矩阵.

4.设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵，证明：$|\mathbf{A}+\mathbf{E}|>1$.

5.设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶负定矩阵，证明：当 n 为奇数时，$\mathbf{A}^*$ 为正定矩阵；当 n 为偶数时，$\mathbf{A}^*$ 为负定矩

阵.

6. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\mathbf{P}$ 是秩为 k 的 $n \times k$ 型矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$,证明：$\mathbf{B}$ 是正定矩阵.

7.设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，证明：$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=n$.

8.设 $\mathbf{A}$ 既是正交矩阵又是正定矩阵，证明：$\mathbf{A}$ 为单位矩阵.

提高题 9-2

1.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵且 $\mathbf{B}$ 正定.证明：存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$,使 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 和 $\mathbf{P}^T\mathbf{BP}$ 都是对角矩阵.

2.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶正定矩阵，证明：$\mathbf{AB}$ 也为正定矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.