第2章 方阵的行列式

2.1 行列式的定义

1. 学习指导

行列式是方阵的一个重要的数值特性,在对矩阵和线性方程组等问题的研究中起着非常重要的作用.

行列式的概念最早是在求解$n \times n$型线性方程组时提出来的.下面以2×2 型线性方程组作为例子加以说明，引出行列式的概念.

本章的学习重点是：行列式性质的理解、使用及行列式的计算.

本节的学习重点是：三阶行列式的公式，代数余子式及n阶行列式的定义.

2. 二阶行列式的概念的引入

对于方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，通过消元法可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$时，该方程组有唯一解，其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

求出方程组的解以后，我们提出一个新问题，能否快速地把解的表达式记住呢?

这是有难度的，对于 4×4 型的方程组就已经很难了，这时解的表达式的分子和分母各有24项，每一项都是4个数相乘的形式.

为了比较容易地记住方程组的解的表达式,数学家想到了引进行列式的概念.

定义 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式（也称为二阶行列式），记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$，规定

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

det—determinant(行列式)

有了二阶行列式的定义以后，上面方程组的解可表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意，x_1 和x_2的分母都是上面方程组的系数矩阵的行列式，x_1和 x_2的分子分别是把系数矩阵的行列式中的第1列和第2列换成方程组右边的常数向量所得到的行列式.

现在再来记上面方程组的解的表达式就比较容易了,并且这个公式可推广到一般的$n \times n$型方程组,它在方程组的研究中曾发挥了很重要的作用.

3. 余子阵的概念

为了讲n阶行列式的定义,我们先来介绍余子阵的概念.

定义 从n阶方阵$\boldsymbol{A}$中去掉a_{ij}所在的第i行和第j列所余下的$n-1$阶方阵称为a_{ij}的**余子阵**，记作$\boldsymbol{A}(i,j)$.

例如,对于三阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$, 6的余子阵为

$$\boldsymbol{A}(2,3)=\begin{bmatrix}1&2\\7&8\end{bmatrix}$$

4. 二阶行列式的特点

我们现在来观察二阶行列式具有的特点.

若对于一阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{11}]$,规定它的行列式为 $\det(\boldsymbol{A})=a_{11}$,

则二阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 的行列式可表示成下面的形式

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}+a_{21}(-1)^{2+1}a_{12}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\det(\boldsymbol{A}(1,1))+a_{21}(-1)^{2+1}\det(\boldsymbol{A}(2,1))$$

小结： 二阶行列式等于第1列的每个元素乘以一个符号部分，再乘以对应的余子阵的行列式，最后把它们相加的结果，符号部分的指数是前面元素的下标之和.

5. n阶行列式的定义

根据二阶行列式的特点,我们按递归方式给出n阶行列式的定义.

定义2-1 设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 叫做**方阵$\boldsymbol{A}$的行列式**(也叫做**n阶行列式**)，记作$\det(\boldsymbol{A})$ 或$|\boldsymbol{A}|$.规定它是按下述运算法则所表达的一个算式:

当n=1时, $\boldsymbol{A}=\left[a_{11}\right]$，$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}$,

当n>1时, $\det(\boldsymbol{A})=a_{11}(-1)^{1+1}\det(\boldsymbol{A}(1,1))+a_{21}(-1)^{2+1}\det(\boldsymbol{A}(2,1))$

$$+\cdots+a_{n1}(-1)^{n+1}\det(\boldsymbol{A}(n,1))$$

6. 余子式、代数余子式的定义

定义 把元素 a_{ij} 的余子阵的行列式 $\det(\boldsymbol{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的**余子式**.

把 $(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的**代数余子式**，**记作** A_{ij}，

即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}(i,j))$.

利用代数余子式的符号，定义2-1中行列式的表达式可写成

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

上式称为行列式按第1列的展开式.

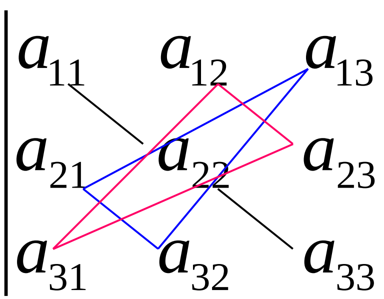
注意 (1)只有方阵才有行列式,行列式的运算结果是一个数.
(2)行列式的两侧是竖线,矩阵的两侧是方括号或圆括号.

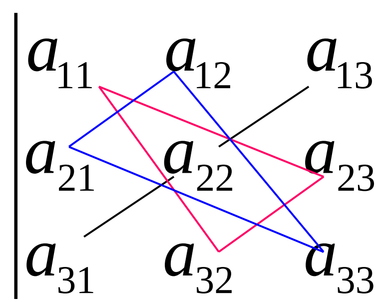
7. 三阶行列式的公式

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

注意 三阶行列式中共有6项，3项为加，3项为减.加的3项是由主对角线带出的两个三角形构成的，两个三角形的底边与主对角线平行，见下面左图；减的3项是由副对角线带出的两个三角形构成的,两个三角形的底边与副对角线平行,见下面右图.





2.2 行列式的性质

1. 学习指导

二阶行列式和三阶行列式都有比较简单的公式,对于四阶以上的行列式,也可以给出类似的公式,但是,当 $n \geq 4$ 时,项数太多,共有$n!$项,使用不方便.直接按定义来计算行列式一般也很麻烦.

对于大多数的行列式,都是要先通过行列式的性质对其进行化简,化简以后再进行计算.因此,我们需要研究行列式的性质.

本节的学习重点是:行列式性质的理解和使用。

2. 性质2-1

性质2-1 $\left|A^T\right| = \left|A\right|$

这个性质可用数学归纳法证明,由于证明的表述较繁,就不在课堂上讲述了,感兴趣的同学可参阅书上的附录.

注意 根据性质2-1,通过转置运算，行列式的行和列的位置可以相互转换,所以**行列式对列成立的性质对行也成立**.下面我们主要对列的情况讨论行列式的性质.

行列式的所有性质对行和列两种情况都成立.

3. 性质2-2 推论2-1

性质2-2 行列式可按其任一列或任一行展开,即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

上面两个式子分别称为行列式按第 j 列和第 i 行的展开式.

性质2-2可用数学归纳法证明(参阅书上的附录).

由性质2-2可得:

推论2-1 若方阵$\boldsymbol{A}$ 的某列(行)的元素全为零,则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

定义 设$\boldsymbol{a}_j$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,把 $\tilde{\boldsymbol{a}}_j = \left[A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}\right]^T$ 称为 $\boldsymbol{a}_j$ 的代数余子式向量.

利用代数余子式向量,性质2-2中的第一个式子可写成

$$|\boldsymbol{A}| = \tilde{\boldsymbol{a}}_j^T \boldsymbol{a}_j$$

4. 引理

为了证明行列式的其它性质,我们给出下面的引理.

引理 若方阵A和B只有第j列不同,则A和B的第j列各元素的代数余子式对应相等.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5. 性质2-3的(1)

性质2-3

（1）若行列式的**某列（或某行）有公因式** $\boldsymbol{k}$，则可将公因式k提到行列式的外面.

$$\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,k\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right| = k\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|$$

注意 这里的行列式都是按列分块形式，$\boldsymbol{a}_j = \left[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}\right]^T$.

上面结论的具体形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (ka_{1j})A_{1j} + (ka_{2j})A_{2j} + \cdots + (ka_{nj})A_{nj}$$

$$= k(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 性质2-3的(2)

（2）若行列式的某列（或某行）的元素都是两数之和的形式，则该行列式可按下面方式拆分成两个行列式之和的形式

$$\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|=\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|+\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|$$

注意 这里的行列式都是按列分块形式，$\boldsymbol{b}=\left[b_1,b_2,\cdots,b_n\right]^T$.

上面公式的具体形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【上式通常称为拆项公式】

证：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{1j}+b_1)A_{1j}+(a_{2j}+b_2)A_{2j}+\cdots+(a_{nj}+b_n)A_{nj}$$

$$=(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})+(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. 性质2-3的应用举例及推论2-2

例（1）$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

推论2-2　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为数，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.

注意　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，　则 $|-\boldsymbol{A}| = (-1)^n|\boldsymbol{A}|$

例 $$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 6\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

例 $$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$$

注意 $$|\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| \pm |\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \frac{1}{k}a_{11} & \frac{1}{k}a_{12} & \frac{1}{k}a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. 性质2-4

性质2-4 若n阶方阵$\boldsymbol{A}$中有两列(或两行)相同，则$|\boldsymbol{A}| = 0.$

证明 用数学归纳法证明.

当 $n = 2$ 时，通过计算可以验证结论成立.

当$n \geq 3$ 时,假设结论对 $n-1$阶行列式成立,并设$\boldsymbol{A}$ 的i, j两列相同.

将$|\boldsymbol{A}|$按第$k(k \neq i, j)$列展开，得

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}$$

由于$A_{ik}(i = 1, 2, \cdots, n)$都是 $n-1$ 阶行列式,并且其中都有两列相同,所以$A_{ik} = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，故 $|\boldsymbol{A}| = 0.$

推论2-3 若$|A|$中有两列（或两行）成比例，则 $|A|=0.$

推论2-4 若$|A|$中有一列（行）是另两列（行）之和，

则 $|A|=0.$

例 $|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2| = 0$

8. 性质2-5

性质2-5　若对方阵$\boldsymbol{A}$进行一次倍加变换得到$\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.
即倍加变换不改变行列式的值.

证明　设 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$

$$\xrightarrow{c_j+kc_i}\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j+k\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]=\boldsymbol{B}$$

则根据性质2-3和性质2-4可得

$$|\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j+k\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|+\left|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,k\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right|$$

$$=|A|+0=|A|$$

9. 性质2-6

性质2-6 若对方阵A进行一次对调变换得到B，则$|A| = -|B|$.

证明 设 $A=\left[a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right]$

$$\xrightarrow{c_i \longleftrightarrow c_j}\left[a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n\right]=B$$

则根据性质2-5和性质2-3可得

$$\begin{aligned}|A| &\overset{c_i+c_j}{=\!=\!=} \left|a_1,\cdots,a_i+a_j,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right| \\ &\overset{c_j-c_i}{=\!=\!=} \left|a_1,\cdots,a_i+a_j,\cdots,-a_i,\cdots,a_n\right| \\ &\overset{c_i+c_j}{=\!=\!=} \left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,-a_i,\cdots,a_n\right| \\ &= -\left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n\right| \\ &= -|B|\end{aligned}$$

10. 性质2-7

性质2-7 行列式某一列（行）的每个元素乘以**另一列（行）对应元素的代数余子式**之和等于零,即

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j).$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$, $\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$,

由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 只有第 j 列不同,所以它们的第 j 列各元素的代数余子式相同.

将 $|\boldsymbol{B}|$ 按第 j 列展开，得 $|\boldsymbol{B}|=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}$

由于 $|\boldsymbol{B}|$ 中有两列相同,所以 $|\boldsymbol{B}|=0.$

故 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$

为了搞清楚性质2-7的含义，我们来看下面的例子.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

上式是一个恒等式，第3列是什么样的数都成立。现在把第3列换成第1列的数，结论仍然成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33}$$

$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0$$

注：第1列的数乘第3列的代数余子式之和，相当于把原来行列式的第3列换成了第1列，结果一定为0。

11. 例题

例1 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2$都是三元列向量，$|\boldsymbol{\alpha},\gamma_1,\gamma_2|=1,|\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2|=2$

求$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_2,2\gamma_1+\gamma_2|$.

解 $$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_2,2\gamma_1+\gamma_2| \overset{c_3-c_2}{=} |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_2,2\gamma_1| = 2|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_2,\gamma_1|$$

$$\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=} -2|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2| = -2(|\boldsymbol{\alpha},\gamma_1,\gamma_2|+|\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2|)$$

$$=-2(1+2)=-6$$

例2 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & w \end{vmatrix}$，求$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$.

解 $$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{34}=0$$

本节主要结论的总结：

（1）性质 2-1，讲的是“转置不改变行列式的值。

（2）性质 2-2 和性质 2-7，这两个性质都与代数余子式有关。

（3）拆分公式，使用时要注意：一次只能拆开一个行（或一个列）

（4）与初等变换有关的三个结论：性质 2-3 的（1）、性质 2-5、性质 2-6.

这三个结论分别对应于：倍乘变换、倍加变换、对调变换。

（5）行列式等于 0 的情况，重点掌握推论 2-1

（6）记住公式：$|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$，　　$|-\mathbf{A}| = (-1)^n |\mathbf{A}|$