思考题 3-1

1. 对. 理由：由 $AB=CA=E$ 可知，B 和 C 都是方阵，进一步可知，B 和 C 都是 A 的逆矩阵，又因为逆矩阵是唯一的，所以 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

2.对.理由：因为 A 可逆，所以在 $AB=O$ 的两边同时左乘 A^{-1}，可得 $B=O$.

3.错.错的原因是：$AX=YA$ 中左右两边 A 的位置不同.

4.错. 改为 $X=CA^{-1}$.

5.错.反例，设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则 AB 可逆，但 A 和 B 都不可逆。若增加条件 A,B 为方阵，则结论正确。

6. 错.反例，设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则 A^TA 可逆，但 $\mathbf{AA}^T$ 不可逆.。若增加条件 A 为方阵，则结论正确。

7.对。$\because (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，$\therefore \mathbf{A}^{-1}$ 也是对称矩阵.

8. 错。反例，设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^*=O$，但 $A\neq O$.

9. 对。用反证法可以证明。

证: 若 A 的 n^2 个元素的余子阵都是奇异矩阵,则 A 的所有元素的代数余子式都为 0.将 A 的行列式按第一行展开，可知 $|A|=0$，这与 A 是非奇异矩阵矛盾，所以 A 的 n^2 个元素中至少有一个元素的余子阵是非奇异矩阵.

10. 对。因为 $AA^*=A^*A=|A|E$，$AA^{-1}=A^{-1}A=E$，所以正确。

注：讨论矩阵相乘可交换的问题时，一般要用到 $AA^{-1}=A^{-1}A$.

11. $BAC=E$ 不正确，$BCA=E$ 正确。理由：

由 A,B,C 为方阵及 $ABC=E$ 可知，A 可逆，其逆矩阵为 BC，所以 $BCA=E$.

同理可证 $CAB=E$.但得不出 $BAC=E$.

12. 对。矩阵 A 的奇异性由 $|A|$ 是否等于 0 决定，对三种初等变换分别讨论可知结论正确。

习题 3-1

1. $k \neq 5$ 且 $k \neq -1$.

2.(1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　　(4) $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

3.注：$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$

(1) $\left|2(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\boldsymbol{A}^T\right|=2^3\left|(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})^2\right|\left|\boldsymbol{A}^T\right|=8\left|\boldsymbol{A}^*\right|^2\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|^2\left|\boldsymbol{A}\right|=8\left|\boldsymbol{A}\right|^5\left|\boldsymbol{B}\right|^{-2}=\dfrac{256}{9}$.

(3) $\left|(4\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^*\right|=\left|4^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\dfrac{7}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=(-\dfrac{7}{4})^3\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=-\dfrac{343}{128}$

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{B} \\ (2\boldsymbol{A})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{3\times 3}\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}\right|\left|-\boldsymbol{B}\right|=-\dfrac{1}{|2\boldsymbol{A}|}\cdot(-1)^3\left|\boldsymbol{B}\right|=\dfrac{3}{16}$

5.

（3）**证法 1：**反证法。设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中有一个可逆，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 消去 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{B}$ 是非零的 n 阶方阵矛盾，所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都不可逆.

证法 2：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 是非零的 n 阶方阵可知，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}$ 不可逆。

将 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 转置，得 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{O}$。同理可证，$\boldsymbol{B}$ 不可逆

(4)**证：**由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$，得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}^2$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|=|-\boldsymbol{A}^2|$.由 $\mathbf{A}$ 可逆，得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $|-\boldsymbol{A}^2|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|^2\neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0$, $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，因而 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆.

进一步由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可逆可知，$\boldsymbol{AB}$ 可逆.

（6）**证：**由 $\boldsymbol{C}$ 可逆且 $\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^T$, 得 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$.

将上式转置，得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{T}=\boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{T}$.

（7）**证：** $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$.由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可逆可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆.因为 **A+B** 也可逆，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆，即 $\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$ 可逆.

（9）**证：** $\because (\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A},\therefore$ 结论正确。

（11）**注：在本题中，没告诉 $\boldsymbol{A}$ 可逆。**

证： 记 $\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}$,

$$\text{因为}\ B_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=k^{n-1}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=k^{n-1}A_{ij},$$

所以 $\boldsymbol{B}^{*}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}$, 即 $(k\boldsymbol{A})^{*}=\boldsymbol{A}^{*}$.

（12）**证：** $\because (\boldsymbol{A}^{T})^{*}=|\boldsymbol{A}^{T}|(\boldsymbol{A}^{T})^{-1}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{T},\ (\boldsymbol{A}^{*})^{T}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{T}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{T},\therefore$ 结论正确。

6. **证：**（1）在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1},$$

即 $$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

（2）由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$. 所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 都可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}.$$

（3）由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$, 得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),$$

即 $$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}.$$

注：研究矩阵可交换的问题，一般要通过 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ 来完成。

7.（1）$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

8. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

9.（1）**解：** $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$,

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

10.（1）**证：** 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的阶数分别为 m 和 n.

$$\because \begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{E},$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

（3）**证：** 归纳法.只对上三角形可逆矩阵进行证明，下三角形可逆矩阵的证明类似.

设 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 为 n 阶上三角形可逆矩阵.

当 $n=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{a_{11}a_{22}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ 0 & a_{11}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为上三角形矩阵，结论成立.

假设结论对于 $n-1$ 阶上三角形可逆矩阵成立，下面我们对 n 阶上三角形可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 加以证明.

将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0}^T & a_{nn}\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $n-1$ 阶子矩阵，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n-1,n}\end{bmatrix}$.

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知，$\boldsymbol{B}$ 也可逆，$a_{nn}\neq 0$.

由归纳法假设可知，$\boldsymbol{B}^{-1}$为上三角形矩阵.因为$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}a_{nn}^{-1}\\ \boldsymbol{0}^{T} & a_{nn}^{-1}\end{bmatrix}$, 所以$\boldsymbol{A}^{-1}$为上三角形矩阵，结论正确.

提高题　3-1

1. **解**：由$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{T}$, 得$\left|\boldsymbol{A}^{*}\right|=\left|\boldsymbol{A}^{T}\right|$, $\left|\boldsymbol{A}\right|^{2}=\left|\boldsymbol{A}\right|$, $\left|\boldsymbol{A}\right|=1$或$0$.

由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{T}$，得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$.

$\left|\boldsymbol{A}\right|=a_{i1}^{2}+a_{i2}^{2}+a_{i3}^{2}\ (i=1,2,3)$.

因为$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 所以$\boldsymbol{A}$中至少有一行不全为0，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$, $\left|\boldsymbol{A}\right|=1$.

2. **证**：由已知，得$\boldsymbol{E}_{1,2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 由$\boldsymbol{A}$可逆可知，$\boldsymbol{B}$也可逆.

$$\boldsymbol{B}^{*}=\left|\boldsymbol{B}\right|\boldsymbol{B}^{-1}=-\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{1,2}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{E}_{1,2},$$

所以对调$\boldsymbol{A}^{*}$第1列与第2列得$-\boldsymbol{B}^{*}$.

3. **解**：由已知，得$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{1,2}\boldsymbol{E}_{2,3}(2)$.

$$\boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{A}=\left|\boldsymbol{C}\right|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}=-\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}_{2,3}^{-1}(2)\boldsymbol{E}_{1,2}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{E}_{2,3}(-2)\boldsymbol{E}_{1,2}$$

$$=-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{E}_{1,2}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-2&0&4\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

4. **证**：因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}]=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}]$$

$$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

所以$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$可逆，且$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

5. **证**：因为

$$A^2=(E-aa^T)^2=E-2aa^T+(aa^T)(aa^T)$$

$$=E-2aa^T+a(a^Ta)a^T=E-2aa^T+aa^T=E-aa^T=A\text{ ，}$$

$$A^2-A=O,$$

$$(A+2E)(A-3E)=-6E,$$

$$(A+2E)\cdot\frac{A-3E}{-6}=E$$

所以 $A+2E$ 可逆，并且 $(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{6}(A-3E).$

6. **证法 1：** 由 $a^Ta=1$，得 $a\neq 0$.

因为 $Aa=(E-aa^T)a=a-a(a^Ta)=a-a=0$，所以方程组 $Ax=0$ 有非零解。

进一步可知 $|A|=0,\ A$ 不可逆。

证法 2： 反证法.设 A 可逆.通过计算，得

$$A^2=(E-aa^T)^2=E-2aa^T+(aa^T)(aa^T)$$

$$=E-2aa^T+a(a^Ta)a^T=E-2aa^T+aa^T=E-aa^T=A\text{ ，}$$

由 $A^2=A$ 消去 A，得 $A=E$，这与已知矛盾，所以 A 不可逆。

7. **证法 1：** 由 $A^2=B^2=E$，得 $|A|=\pm1,\ |B|=\pm1.$

因为 $|A|+|B|=0$，所以 $|A|$ 和 $|B|$ 当中有一个为 1，另一个为 -1，$|A||B|=-1.$

又因为

$$|A+B|=|AE+EB|=|AB^2+A^2B|=|A(B+A)B|=|A||A+B||B|=-|A+B|,$$

所以 $|A+B|=0$， $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 不可逆。

证法 2： 由 $A^2=B^2=E$，得 $|A|=\pm1,\ |B|=\pm1, A^{-1}=A, B^{-1}=B.$

因为 $|A|+|B|=0$，所以 $|A|$ 和 $|B|$ 当中有一个为 1，另一个为 -1，$|A||B|=-1.$

又因为 $|A+B|=|A(B^{-1}+A^{-1})B|=|A(B+A)B|=|A||A+B||B|=-|A+B|$，

所以 $|A+B|=0$， $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 不可逆。

习题 3-2

1. （2）当 $k=0$ 或 $-\dfrac{1}{6}$ 时，有非零解；当 $k\neq 0$ 且 $k\neq -\dfrac{1}{6}$ 时，只有零解.

3.证：必要性. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 知，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，设 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}]$，则 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

充分性. 将 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 按列分块，得

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

这说明 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，因而 $|\boldsymbol{A}|=0$.