高等数学2017级下学期期末试卷

A卷

一、填空题 (每题6分,共30分)

1、$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$， $2(x-1)+y+(z-1)=0$ 或 $2x+y+z=3$。

2、$3,\dfrac{8}{3}$。

3、$4,(0,-1,-3)$。

4、$\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}$。

5、$\dfrac{1}{2}(1-e^{-4}),4a$。

二、单项选择题 (每题4分,共20分)

1、D；2、A；3、C；4、B；5、D。

三、（工科） 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 的通解。

解： 特征方程 $r^2+4r+4=0$，特征根 $r_1=r_2=-2$。

齐次方程通解 $Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-2x}$，（4分）

特解形式 $y^*(x)=Ax^2e^{-2x}$。（7分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=\dfrac{1}{2}$，所以 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$。

∴通解 $y(x)=(c_1+c_1x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$。（10分）

三、（高数） 已知两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 和 $L_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ 相交。

1、求 λ； 2、求 L_1 与 L_2 之间的夹角。

解： 1、$\overline{s_1}=(1,-1,\lambda)$，$\overline{s_2}=(2,1,1)$，$M_1(1,\ -1,\ 1)$ ，$M_2(-1,\ 1,\ -3)$ ，

由题意，混合积$[\overline{s_1}，\overline{s_2}，\overline{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0$，得 $\lambda=2$。（5分）

2、$\cos\theta=\dfrac{\left|\overline{s_1}\bullet\overline{s_2}\right|}{\left|\overline{s_1}\right|\left|\overline{s_2}\right|}=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{3}$。（10分）

三、（微积分） 求二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$，其中D是由直线 $x=-2,y=0,y=2,$ 以及曲线

$x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

解： 设 D_1 为曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 和 y 轴围成的区域，有 （2 分）

$$\iint\limits_{D} ydxdy=\iint\limits_{D+D_1} ydxdy-\iint\limits_{D_1} ydxdy$$

$$=\int_{-2}^{0}dx\int_{0}^{2}ydy-\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta\int_{0}^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot rdr$$ （8 分）

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{\pi}{2}$$ 。（10 分）

四、设有幂级数 $\sum\limits_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}!}x^n$ 。1、求其收敛域；2、求其和函数 $S(x)$ 的表达式。

解：1、$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n+1}{n!}}{\frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}}=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。 （3 分）

2、设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)-1}{n!}x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2S_1(x)-e^x$，

其中：$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，

$$\int_0^x S_1(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n!}x^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$ （8 分）

两边对 x 求导，得 $S_1(x)=(x+1)e^x$，

$S(x)=(2x+1)e^x$，$(-\infty<x<+\infty)$。 （10 分）

五、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yzdzdx+(x^2+\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$\sum:x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1(z\geq0)$，取上侧。

解：补有向曲面 $\sum_1$ ：$z=0$ $(x^2+y^2\leq1)$，取下侧。 （2 分）

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+z)\mathrm{d}V$， （4 分）

其中，由对称性，得：$\iiint\limits_{\Omega}2x\mathrm{d}V=0,\iiint\limits_{\Omega}2y\mathrm{d}V=0$，

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z:x^2+y^2\le(\sqrt{1-\frac{z^2}{4}})^2} dxdy=\pi\int_0^2 z(1-\frac{z^2}{4})\,\mathrm{d}z=\pi(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{16})\Big|_0^2=\pi$$，（8 分）

而 $\iint_{\Sigma_1}(x^2+2\mathrm{xy})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yzdzdx+(x^2+\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_{\Sigma_1}(x^2+\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^2+\sin y)dxdy$

由对称性，得 $\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}\sin ydxdy=0$，

由轮换对称性，得 $\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$，

故 $I=\frac{5}{4}\pi$。 （10 分）

六、设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))\bullet y+f_2'(xy,yg(x))\bullet y\bullet g'(x)$。 （4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,yg(x))+y\bullet(f_{11}''(xy,yg(x))\bullet x+f_{12}''(xy,yg(x))\bullet g(x))$$

$$+f_2'(xy,yg(x))\bullet g'(x)+y\bullet g'(x)\bullet(f_{21}''(xy,yg(x))\bullet x+f_{22}''(xy,yg(x))\bullet g(x))$$ 。

（8 分）

由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，故 $g'(1)=0$。将 $g(1)=1$，$g'(1)=0$ 代入上式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$$ 。 （10 分）

七、设二元函数 f,g,h,φ 在闭区域 D：$x^2+y^2\le 1$ 上具有二阶连续偏导数。

1、证明积分等式：$\iint_D(f_x'g+f_y'h)dxdy=\oint_L fgdy-fhdx-\iint_D(fg_x'+fh_y')dxdy$，其中 L 为 D 的正向（逆时针方向）边界。

2、若 φ 在 D 上满足：$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=1$，求 $\iint_D(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y})dxdy$。

解：1、由格林公式， $\oint_L fgdy - fhdx \overset{\text{Green}}{=} \iint_D (f'_x g + fg'_x + f'_y h + fh'_y)dxdy$

移项得：$\iint_D (f'_x g + f'_y h)dxdy = \oint_L fgdy - fhdx - \iint_D (fg'_x + fh'_y)dxdy$ 。（5 分）

2、取 $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}, g(x,y) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, h(x,y) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$，由1得（7 分）

$$\iint_D (x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y})dxdy = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2+y^2}{2})\varphi'_x + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^2+y^2}{2})\varphi'_y)dxdy$$

$$= \oint_L (\frac{x^2+y^2}{2})\varphi'_x dy - (\frac{x^2+y^2}{2})\varphi'_y dx - \iint_D (\frac{x^2+y^2}{2})(\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy})dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\oint_L \varphi'_x dy - \varphi'_y dx - \iint_D (\frac{x^2+y^2}{2})dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy})dxdy - \iint_D \frac{x^2+y^2}{2}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\pi\bullet 1^2 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{2} rdr = \frac{\pi}{4}$$ 。（10 分）

B 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、 $4,(0,-1,-3)$ 。

2、 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$， $2(x-1) + y + (z-1) = 0$ 或 $2x + y + z = 3$ 。

3、 $3, \dfrac{8}{3}$ 。

4、 $\dfrac{1}{2}(1-e^{-4}), 4a$ 。

5、 $\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}$ 。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、A；2、C；3、D；4、D；5、B。

三、（工科）求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2 - 4r + 4 = 0$，特征根 $r_1 = r_2 = 2$ 。

齐次方程通解 $Y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$，（4 分）

特解形式 $y^*(x)=Ax^2e^{2x}$。（7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=\dfrac{1}{2}$，所以 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$。

∴通解 $y(x)=(c_1+c_1x)e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$。（10 分）

三、（高数）已知两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{\lambda}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 和 $L_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ 相交。

1、求 λ； 2、求 L_1 与 L_2 之间的夹角。

解：1、$\overrightarrow{s_1}=(\lambda,-1,2)$，$\overrightarrow{s_2}=(2,1,1)$，$M_1(1,\ -1,\ 1)$ ，$M_2(-1,\ 1,\ -3)$ ，

由题意，混合积 $[\overrightarrow{s_1}，\overrightarrow{s_2}，\overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -4\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda=1$。（5 分）

2、$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{s_1}\bullet\overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{3}$。（10 分）

三、（微积分）求二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$，其中 D 是由直线 $x=2,y=0,y=2,$ 以及曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

解： 设 D_1 为曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 和 y 轴围成的区域，有（2 分）

$$\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_{D+D_1} ydxdy-\iint\limits_{D_1} ydxdy$$

$$=\int_0^2dx\int_0^2ydy-\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot rdr \qquad （8 分）$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{\pi}{2}。 \qquad （10 分）$$

四、设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n!}x^n$；1、求其收敛域；2、求其和函数 $S(x)$ 的表达式。

解：1、$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n-1}{n!}}{\dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)!}}=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。（3 分）

2、设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2(n+1)-3}{n!}x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=2S_1(x)-3e^x$，

其中：$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$，

$$\int_0^x S_1(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n!}x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$ （8 分）

两边对 x 求导，得 $S_1(x)=(x+1)e^x$，

$S(x)=(2x-1)e^x$，$(-\infty<x<+\infty)$。（10 分）

五、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2xy)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yzdzdx+(y^2+\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$\sum$ ：$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1(z\geq 0)$，取上侧。

解：补有向曲面 $\sum_1$ ：$z=0\quad(x^2+y^2\leq 1)$，取下侧。（2 分）

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}\ =\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+z)\mathrm{d}V$，（4 分）

其中，由对称性，得：$\iiint\limits_{\Omega}2x\mathrm{d}V=0,\iiint\limits_{\Omega}2y\mathrm{d}V=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z:x^2+y^2\leq(\sqrt{1-\frac{z^2}{4}})^2}dxdy=\pi\int_0^2 z(1-\frac{z^2}{4})\,\mathrm{d}z=\pi(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{16})\Big|_0^2=\pi,$$ （8 分）

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+2\mathrm{xy})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yzdzdx+(y^2+\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2+\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\leq 1}(y^2+\sin x)dxdy$

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\leq 1}\sin xdxdy=0$，

由轮换对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\leq 1}y^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$，

故 $I=\frac{5}{4}\pi$。（10 分）

六，七题同 A 卷