高等数学、工科数学分析基础、微积分 2018 级下学期期末试卷（A 卷）

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、$(x-1)-4(y+2)+6(z-2)=0(x-4y+6z-21=0), \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$；2、$\dfrac{1}{8}, 2$；

3、$2\ln 2+1, 1$；　4、$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right), \dfrac{2}{3}$；5、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e}{n!}(x-1)^n, (-\infty,+\infty)$。

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上点 $(1,-2,2)$ 处的切平面方程为______________，法线方程为___________________。

2、设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在 $(-1,1]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}3, -1<x\le 0\\ x^3, 0<x\le 1\end{cases}$$

，函数 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数是：

$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x$，　$x\in(-\infty,+\infty)$，其和函数是 $S(x)$，则

$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=$____________，$S(11)=$___________。

3、函数 $z=(x+e^y)^x$ 在点 $(1,0)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,0)}=$_______ $dx+$_______ dy。

4、设有数量场 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则梯度 $gradu\big|_{(1,1,1)}=$______________，散度 $div(gradu)\big|_{(1,1,1)}=$______________。

5、函数 $f(x)=e^x$ 展为 $x-1$ 的幂级数是____________，收敛域是___________。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)1、B；2、A；3、B；4、C；5、D。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、（工科）微分方程 $y''-y=\sin x$ 的一个特解形式为（　　）

A、$xe^x(a\cos x+b\sin x)$；　B、$a\cos x+b\sin x$；

C、$e^x(a\cos x+b\sin x)$；　D、$ax\cos x+bx\sin x$。

1、（高数）直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 和 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 之间的夹角是（　　）。

A、$\dfrac{\pi}{2}$；　B、$\dfrac{\pi}{3}$；　C、$\dfrac{\pi}{4}$；　D、$\dfrac{\pi}{6}$。

1、（微积分）二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy=$（　　）。

A、$1+\sin 1$；　　B、$1-\sin 1$；　　C、$1+\cos 1$；　　D、$1-\cos 1$。

2、设 $f(x,y)=3x-x^3+y^2+2y$，则下列说法正确的是（　　）。

A、$f(-1,-1)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值；　　B、$f(-1,-1)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值；

C、$f(1,-1)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值；　　D、$f(1,-1)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值。

3、均匀曲线 L： $y=\sqrt{1-x^2}$ 的质心坐标为 $(0,\overline{y})$，则 $\overline{y}=$（　　）

A、$\frac{1}{\pi}$；　　B、$\frac{2}{\pi}$；　　C、$\frac{3}{\pi}$；　　D、$\frac{1}{2\pi}$。

4、在以下级数中，发散的是（　　）。

A、$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$；　B、$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$；C、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2}{n^3+3n}$；　D、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$。

5、设曲面 $\sum z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} zdS=$（　　）。

A、$\frac{\pi}{4}$；　　B、$\frac{\pi}{3}$；　　C、$\frac{\pi}{2}$；　　D、π。

三、（高数）已知两直线 $L_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z-1}{5}$，$L_2:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交。

1、求常数 λ；

2、求这两直线确定的平面方程。

解：1、$M_1(1,\ -1,\ 1)$，$M_2(-1,\ 1,\ 0)$，由题意，$\begin{vmatrix}4 & \lambda & 5\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$，

解得：$\lambda=8$。　　　　（5 分）

2、平面过 $M_1(1,\ -1,\ 1)$，法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 8 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(3,\ 1,\ -4)$，点法式方程：

$3(x-1)+(y+1)-4(z-1)=0$，即 $3x+y-4z+2=0$。　　　　（10 分）

（工科）求微分方程组 $\begin{cases}y_1'=2y_1+3y_2\\ y_2'=2y_1-3y_2\end{cases}$ 的通解。

解： 由 $\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-12=0$，得 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-4$。　　　　（4 分）

$\lambda = 3$时，对应的特征向量为 $(3,1)^T$，

$\lambda_2 = -4$时，对应的特征向量为 $(1,-2)^T$。

通解为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4x}$。（10 分）

（微积分）求二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$，其中 D 是以点 $O(0,0), A(1,2)$ 和 $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域。

解: $OA: y = 2x, OB: y = \dfrac{x}{2}, AB: y = 3 - x$，（3 分）

$$\iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy$$

$$= \int_0^1 xdx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy + \int_1^2 xdx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx + \int_1^2 (3x - \frac{3}{2} x^2) dx = \frac{3}{2}$$ （10 分）

四、已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n}$，求：1、收敛域；2、和函数。

解：1、收敛半径 $R = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/(2n+1)}{1/(2(n+1)+1)}} = 1$，

左端点 $x = -1$ 代入，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$ 发散，

右端点 $x = 1$ 代入，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$ 发散，

收敛域 $(-1,1)$。（4 分）

2、令和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$，

设 $S_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, S_1'(x) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{x^2}{1-x^2}$，

$S_1(x) = S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x S_1'(x) dx = \int_0^x \dfrac{x^2}{1-x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} - x$，

所以，$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$。（10 分）

五、计算曲线积分 $\int_L (x^2+2xy^2)dx+(2x^2y-y^3)dy$，其中 L 为从点 $A(0,1)$ 沿圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的四分之一弧到点 $B(1,2)$ 的一段曲线。

解：因 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=4xy$，故积分与路径无关。

令点 $C(0,2)$，加有向线段 AC 和 CB，（4 分）

则：

$$I=\int_{AC}+\int_{CB},$$

$$\int_{AC}(x^2+2xy^2)dx+(2x^2y-y^3)dy \xlongequal{\begin{cases}x=0\\ y=y\end{cases}} \int_1^2(-y^3)dy=-\frac{15}{4};$$

$$\int_{CB}(x^2+2xy^2)dx+(2x^2y-y^3)dy \xlongequal{\begin{cases}x=x\\ y=2\end{cases}} \int_0^1(x^2+8x)dx=\frac{13}{3};$$

所以，$I=\dfrac{7}{12}$。（10 分）

六、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x(y^2+z)dydz+y(x^2+x)dzdx+yzdxdy$，其中 Σ：曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，取下侧。

解：补有向曲面 $\sum_1$：$z=1 \quad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。（2 分）

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\sum_1}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+x+y+z)\mathrm{d}V$，（5 分）

由对称性，得 $\iiint\limits_{\Omega} xdv=\iiint\limits_{\Omega} ydv=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1(r^2+z)dz=\frac{\pi}{2},$$

而 $\iint\limits_{\sum_1} x(y^2+z)dydz+y(x^2+x)dzdx+yzdxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} ydxdy=0$，

故 $I=\dfrac{\pi}{2}$。（10 分）

七、 设变换$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$可把方程$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$简化为以$u$、$v$为自变量的方程，可化为什么样的形式？其中二阶偏导数连续。

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}$，（2 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 12\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，（8 分）

将上述结果代入原方程，经整理后得：

$$25\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

即$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$。（10 分）

B 卷

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1、$2\ln 2 + 1, 1$；

2、$(x-1) - 4(y+2) + 6(z-2) = 0 (x - 4y + 6z - 21 = 0), \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$；

3、$\frac{1}{8}, 2$； 4、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n, (-\infty, +\infty)$；5、$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \frac{2}{3}$。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分) 1、B；2、B；3、A； 4、D；5、C。
三、A 卷第五题。
四、A 卷第三题。
五、A 卷第四题。
六、A 卷第七题。
七、A 卷第六题。