4.4.2 常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

$\Big\downarrow$ 转化

求特征方程(代数方程)之根

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y''+py'+qy=0 \quad (p,q\text{为常数}) \qquad ①$$

因为λ为常数时，函数$e^{\lambda x}$和它的导数只差常数因子，所以令①的解为 $y=e^{\lambda x}$ (λ为待定常数)，代入①得

$$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$$

$$\longrightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的**特征方程**，其根称为**特征根**.

1. 当 $p^2-4q>0$ 时，②有两个相异实根λ_1,λ_2，则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1=e^{\lambda_1 x}$，$y_2=e^{\lambda_2 x}$，因此方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

2. 当 $p^2-4q=0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $\lambda_1=\lambda_2$ $=\frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1=e^{\lambda_1 x}$.

设另一特解 $y_2=y_1u(x)=e^{\lambda_1 x}u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$\cancel{e^{\lambda_1 x}}[(u''+2\lambda_1 u'+\lambda_1^2 u)+p(u'+\lambda_1 u)+qu]=0$$

$$u''+(\underline{2\lambda_1+p})u'+(\underline{\lambda_1^2+p\lambda_1+q})u=0$$

注意 λ_1 是特征方程的重根

$$u''=0$$

取 $u=x$, 则得 $y_2=xe^{\lambda_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$$

3. 当 $p^2-4q<0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\quad \lambda_2=\alpha-i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

小结:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{为常数})$$

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 特征根: λ_1, λ_2

特 征 根	通　　解
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 实根	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

推广:

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程: $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

若特征方程含 k 重实根 λ, 则其通解中必含对应项

$$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$$

若特征方程含 k 重复根 $r=\alpha\pm i\beta$, 则其通解中必含对应项

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+$$
$$+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

例. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$,特征根: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$,

因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例. 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = 0 \\ s\big|_{t=0} = 4,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = -2 \end{cases}$

解: 特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ 有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4,\quad C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t)e^{-t}$

内容小结

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: λ_1, λ_2

(1) 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

(2) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$

(3) 当 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 时, 通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解 .

4.4.3 常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$ 型

二、 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x$

$+\widetilde{P}_n(x)\sin\beta x]$ 型

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解　非齐次方程特解

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一、 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$ 型

α 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

设特解为 $y^*=\underline{e^{\alpha x}Q(x)}$，其中 $Q(x)$为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\alpha x}[\underline{\alpha Q(x)}+\underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\alpha x}[\underline{\alpha^2 Q(x)}+\underline{2\alpha Q'(x)}+\underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\alpha+p)Q'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 α 不是特征方程的根，即 $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)$.

$$Q''(x) + (2\alpha + p)Q'(x) \quad + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q(x) = P_m(x)$$

(2) 若α是特征方程的单根，即

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p \neq 0,$$

则$Q'(x)$为m次多项式，故特解形式为 $y^* = xQ_m(x)e^{\alpha x}$.

(3) 若α是特征方程的重根，即

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p = 0,$$

则$Q''(x)$是m次多项式，故特解形式为 $y^* = x^2 Q_m(x)e^{\alpha x}$

小结 对方程①，当α是特征方程的 **k 重根** 时，可设

特解 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\alpha x} \quad (k = 0, 1, 2)$

例. 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解: 本题 $\alpha=0$, 而特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$,

$\alpha=0$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$, 代入方程:

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases} \longrightarrow b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$.

例. 求方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0,$

其根为 $\lambda_1=2,\quad \lambda_2=3$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

本题 $\alpha=2,$

代入方程得 $-2b_0x-b_1+2b_0=x$

比较系数, 得 $\begin{cases}-2b_0=1\\2b_0-b_1=0\end{cases} \longrightarrow b_0=-\dfrac{1}{2}, b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$.

二、$f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+\widetilde{P}_n(x)\sin\beta x]$型

分析思路:

第一步 将$f(x)$转化为

$$f(x)=P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+\widetilde{P}_n(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\widetilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\widetilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\alpha-i\beta)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P_m(x)}\,e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P_m(x)\,e^{(\alpha+i\beta)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}} \qquad ③$$

设 $\alpha+i\beta$ 是特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$), 则 ② 有特解:

$$y_1{}^* = x^k Q_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $$(y_1{}^*)'' + p(y_1{}^*)' + q\,y_1{}^* \equiv P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

等式两边取共轭:

$$\overline{y_1{}^*}'' + p\,\overline{y_1{}^*}' + q\,\overline{y_1{}^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解.

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_n(x)\sin\beta x]$$

利用第二步的结果，根据叠加原理，原方程有特解：

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\alpha x}[Q_m e^{i\beta x} + \overline{Q_m} e^{-i\beta x}]$$

$$= x^k e^{\alpha x}[Q_m(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \overline{Q_m}(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= x^k e^{\alpha x}[R_m \cos\beta x + \widetilde{R}_m \sin\beta x]$$

其中 $R_m, \widetilde{R}_m$ 均为 m 次多项式.

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\alpha x}[R_m \cos\beta x + \widetilde{R}_m \sin\beta x]$$

因

$$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^*本质上为实函数，因此 $R_m, \widetilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式.

小 结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_n(x)\sin\beta x]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\alpha + i\beta$ 为特征方程的 ***k*** 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + \widetilde{R}_m(x)\sin\beta x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例. 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解.

解: 本题 $\alpha = 0, \beta = 2, P_l(x) = x, \widetilde{P}_n(x) = 0,$

特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$

$\alpha + i\beta = 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数, 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\therefore\ a = \frac{-1}{3},\ d = \frac{4}{9}$

$b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$.

例. 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $\lambda^2+9=0$, 其根为 $\lambda_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$\pm 3i$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x\underline{-6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x\underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5$, $b=3$,

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = e^{\alpha x} P_m(x)$

α 为特征方程的 $k\,(=0, 1, 2)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}$$

2. $y'' + p\,y' + q\,y = e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_n(x)\sin\beta x]$

$\alpha + i\beta$ 为特征方程的 $k\,(=0, 1)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + \widetilde{R}_m(x)\sin\beta x]$$

$$m = \max\{\,l, n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.