第5章　向量组的线性相关性与矩阵的秩

5.1　向量组的线性相关性和秩

本章学习指导

（1）这一章是本课程中最难也是最重要的部分.

（2）本章的内容很抽象、结论很多，有些地方不好想、不好理解，刚开始会很不适应。

（3）建议同学们把学过的概念和结论好好记住，典型的例子和典型的习题也要记住。

（4）要经常通过一些具体的例子来帮助我们思考一些问题。

1.向量组的定义

分量个数相同的一组行向量称为一个行向量组.

分量个数相同的一组列向量称为一个列向量组.

2.线性代数中很多重要的概念产生于对线性方程组研究的需要，本章要介绍的一些主要概念也都与线性方程组的研究有着密切的联系.

对于一般的线性方程组，我们需要解决这样一些问题:
何时有解？有解时是有唯一解还是有无穷多个解?
当有无穷多个解时，怎样求出和表达方程组的全部解?
为此，我们先介绍线性方程组的向量形式.

3. 线性方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,

将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$,

$$\boldsymbol{Ax}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n$$

方程组的向量形式为 $\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{b}$.

注意： 方程组的向量形式在本章中非常重要，经常要通过方程组的向量形式来思考一些问题.

例 方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$的矩阵形式为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,

可记为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

该方程组的向量形式为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,

可记为 $\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 = \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 分别是未知数 x_1, x_2 的系数构成的列向量,

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量.

4.由方程组的向量形式可知，

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{b}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$ 成立

5.根据上面的结论，我们给出下面的定义.

定义5−1　对于向量组：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$，

若存在 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$，

则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，

或称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

注1：在定义5-1中，“线性”指“线性运算”.

注2：在定义5-1中的系数可以全为0，也可以不全为0.

6.根据前面的讨论，可得：

定理5-1 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是 $m\times n$ 型线性方程组，

（1）方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由$\boldsymbol{A}$的列向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示。

（2）方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解 $\Leftrightarrow$ 向量$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{A}$的列向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示且表达式是唯一的。

由定理5-1可知，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解，就在于向量$\boldsymbol{b}$能否由$\boldsymbol{A}$的列向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，因而需要对向量之间的线性关系进行深入研究.

例 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ 是n元列向量组,

则n元列向量$\mathbf{0}$可以表示为 $\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_k$.

例 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ 中每个向量都可由该向量组线性表示,

例如 $\mathbf{a}_1=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_k$

例 设 $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix},$

则有 $\mathbf{a}=k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+k_3\mathbf{e}_3$.

类似的,任意n元列向量 $\mathbf{b}$ 都可以由$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性表示.

5.1.1 向量组的线性相关性

1.我们对齐次线性方程组有非零解的条件加以分析，引出线性相关的定义.

$$\text{齐次线性方程组}\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{存在不全为0的数}k_1,k_2,\cdots,k_n,\text{使得}$$

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

针对上面的结论，我们给出下面的定义.

2. **定义5-2** 对于向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$,

(1) 若存在 n 个不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

则称向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$ 线性相关.

(2) 若仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为0时，才使

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$ 线性无关.

注：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是线性相关还是线性无关，取决于线性表达式 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 成立时，其系数的取值情况：可以不全为零还是必须全为零.

一个向量组是否线性相关，反映了向量组的一种重要性质，这种性质称为向量组的线性相关性

课后习题中会出现“讨论向量组的线性相关性”这样的标题，意思就是

“讨论所给向量组是线性相关？还是线性无关?”

3. 定理5-2　设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$,

（1）向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解（只有零解）

证：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在不全为0的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得 $k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

（2）当A为方阵时，

向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow |\mathbf{A}|=0$ （$|\mathbf{A}|\neq 0$）

证：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\overset{\text{定理3-5}}{\Leftrightarrow}$ $|\mathbf{A}|=0$

（3）可逆矩阵的列向量组一定线性无关.

例5-1 单个向量$\mathbf{a}$线性相关（无关）$\Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{0}(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$.

证：（$\Leftarrow$）由$\mathbf{a}=\mathbf{0}$，得$2\mathbf{a}=\mathbf{0}$. 因为系数不为0，所以$\mathbf{a}$线性相关.

（$\Rightarrow$）由$\mathbf{a}$线性相关可知，存在$k\neq 0$，使得$k\mathbf{a}=\mathbf{0}$，故$\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

例5-2 含有零向量的向量组一定线性相关。

证：设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$中有一个向量$\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$，

则有$1\mathbf{a}_1+0\mathbf{a}_2+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$，

因为系数不全为0，所以该向量组线性相关。

例5-3 当k为何值时，向量组

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}1\\k\\6\end{bmatrix}$$线性相关？

注：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$作为列构成的矩阵是方阵，可用行列式做。

解: $$|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&k\\1&5&6\end{vmatrix}=12+5+0-2-0-5k$$

$$=15-5k=0,$$

当$k=3$时，向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性相关。

4. 定理5-3 向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n\,(n\geq 2)$线性相关的充要条件是该向量组中至少有一个向量能由其余$n-1$个向量线性表示。

证明: 充分性. 不妨设$\mathbf{a}_n$能由向量$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}$线性表示,

并设 $\mathbf{a}_n=k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}$, 则有 $k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}+(-1)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$

因为上式成立时系数不全为0, 所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性相关。

必要性. 因为向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关,

所以存在不全为零的数$l_1,l_2,\cdots,l_n$, 使得$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$,

不妨设$l_1\neq 0$, 则有$\mathbf{a}_1=(-\dfrac{l_2}{l_1})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\dfrac{l_n}{l_1})\mathbf{a}_n$

$\mathbf{a}_1$ 能由其余 $n-1$个向量线性表示。

注1:定理5-3的使用频率特别高，一定要熟练掌握。

注2:要学着使用“不妨设”的表达。

5. 用反证法可证:

向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$线性无关的充要条件是该向量组中任何一个向量都不能由其余$n-1$个向量线性表示.

定理5-3揭示了线性相关与线性表示之间的联系，线性相关的向量之间有线性表示关系，线性无关的向量之间没有线性表示关系，这正反映了线性相关的含义。

由定理5-3可知:

两个向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性相关$\Leftrightarrow\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$成倍数关系.

$|A|=0$

$\Leftrightarrow$ A的列向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ A中至少有一列可由其余列线性表示

$\Leftrightarrow$ A中至少有一列能全化成0

上面的结论对于行的情况也正确。

根据定理5-3，当一个向量组线性相关时，其中至少有一个向量能由其余向量线性表示，但到底是哪一个，这不好说。

做证明题时，通常用“不妨设”的方式假设一下。

6. 定理5-4 若向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，

而向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$线性相关，

则向量$\mathbf{b}$可由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示且表达式唯一.

注：由于加进$\mathbf{b}$使$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$线性相关，所以结论也与$\mathbf{b}$有关系.

证：由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$线性相关可知，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k$，使得$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n+k\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

下面用反证法来证明 $k\neq 0$.

假设$k=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零，并且

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

这与$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关矛盾，故$k\neq 0$.

$$\mathbf{b}=(-\frac{k_1}{k})\mathbf{a}_1+(-\frac{k_2}{k})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\frac{k_n}{k})\mathbf{a}_n.$$

即向量$\mathbf{b}$可由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示。

下面来证$\mathbf{b}$由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示的表达式是唯一的。

设 $\mathbf{b}=l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n,$

$\mathbf{b}=s_1\mathbf{a}_1+s_2\mathbf{a}_2+\cdots+s_n\mathbf{a}_n,$

将上面的两个式子相减，得

$$(l_1-s_1)\mathbf{a}_1+(l_2-s_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(l_n-s_n)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，所以上式成立时，系数一定全为0.

$l_i-s_i=0\ (i=1,2,\cdots,n),$ 即 $l_i=s_i\ (i=1,2,\cdots,n).$

所以表达式唯一。

推论 若$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关，$\mathbf{b}$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性表示，则向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$线性无关.

7.定理5-5 设向量组I为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_r$

向量组II为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_{r+1},\cdots,\mathbf{a}_n$

(1) 若向量组I线性相关，则向量组II也线性相关。

(2) 若向量组II线性无关，则向量组I也线性无关。

证明：【注：(2)是(1)的逆否命题，只需证(1)】

由向量组 I 线性相关可知，

存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_r$,使得 $k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_r\mathbf{a}_r=\mathbf{0}$,

马上可得 $k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_r\mathbf{a}_r+0\mathbf{a}_{r+1}+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$,

由于上式中的系数仍然不全为零，

所以向量组 II 也线性相关.

注：向量组I可看成向量组II的一部分，定理5-5的结论可叙述为“部分相关整体也相关，整体无关部分也无关”

8.定理5-6 设列向量组I为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_m$，列向量组II为$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_m$

列向量组III为 $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots\mathbf{c}_m$， 其中$\mathbf{c}_j=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_j\\ \mathbf{b}_j\end{bmatrix}, (j=1,2,\cdots,m)$

(1)若向量组I或向量组II线性无关，则向量组III也线性无关。

(2)若向量组III线性相关，则向量组I和II都线性相关。

证明： 【注：(2)是(1)的逆否命题，只需证(1)】

不妨设向量组I线性无关，另设$x_1\mathbf{c}_1+\cdots+x_m\mathbf{c}_m=\mathbf{0}$,

则有 $x_1\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_1\end{bmatrix}+\cdots+x_m\begin{bmatrix}\mathbf{a}_m\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$. $x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$

因为向量组I线性无关， 所以$x_1,\cdots,x_m$必须全为0

从而向量组III也线性无关。

定理5-6的结论可叙述为“线性无关的向量组在相同位置添加分量后仍然线性无关，线性相关的向量组在相同位置删去分量后仍然线性相关”

例 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$线性无关，

$\begin{bmatrix}1\\2\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\m\end{bmatrix}$也线性无关， $\begin{bmatrix}a\\1\\c\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\3\\m\\4\end{bmatrix}$也线性无关

例 因为$\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$, 所以$\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$线性相关.

去掉第二个分量以后，$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$仍然线性相关.

例 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$为n元列向量，$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,而$\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

证明：向量组$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

证：（用定义证）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (1)

用$\mathbf{A}^2$左乘(1)式，得 $k_1\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^4\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (2)

由 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 可得， $\mathbf{A}^4\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$， (2)式变为 $k_1\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

因为$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,所以$k_1=0$. (1)式变为 $k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (3)

用$\mathbf{A}$左乘(3)式，得 $k_2\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

由 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，可得 $k_2\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

因为$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,所以$k_2=0$.

将$k_1=k_2=0$代入(1)式，得 $k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,

再由$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 得$k_3=0$.

综合上面得证明可知，要使(1)式成立，k_1,k_2,k_3必须都为0,

所以向量组$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

例 设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}$

记$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n\right]$，$\mathbf{B}=\left[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n\right]$

若向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$线性相关，

则向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n$也线性相关。

证法1： 因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$线性相关，

所以$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解.(定理5-2)

于是，存在$\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$，使得$\mathbf{Au}=\mathbf{0}$.

$\mathbf{Bu}=\mathbf{PAu}=\mathbf{0}$，即$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$有非零解.

因此向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n$也线性相关.

例 设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{P}$ 满足 $\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}$

记 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n]$，$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n]$

若向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$ 线性相关，

则向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n$ 也线性相关。

证法2： $\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}\Rightarrow[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n]=\mathbf{P}[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n]$

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{P}\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_2=\mathbf{P}\mathbf{a}_2,\cdots,\ \mathbf{b}_n=\mathbf{P}\mathbf{a}_n$$

由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\mathbf{a}_n$ 线性相关可知，

存在不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$$

乘 $\mathbf{P}$，得 $k_1(\mathbf{P}\mathbf{a}_1)+k_2(\mathbf{P}\mathbf{a}_2)+\cdots+k_n(\mathbf{P}\mathbf{a}_n)=\mathbf{0}$

即 $k_1\mathbf{b}_1+k_2\mathbf{b}_2+\cdots+k_n\mathbf{b}_n=\mathbf{0}$

所以向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\mathbf{b}_n$ 也线性相关.

5.1.2. 向量组的秩和极大无关组

1.方程组与其增广矩阵是一一对应的，增广矩阵的行向量对应于方程组中的方程，我们可以将向量组的线性表示、线性相关和线性无关的概念推广到方程组上.

当增广矩阵的行向量组线性相关时，其中至少有一个行向量可由其余的行向量线性表示，这意味着方程组中至少有一个方程可由其余的方程线性表示，通过消元法可将这个方程消掉，也可以说这个方程是“多余”的.

我们研究方程组时，希望去掉“多余”的方程，只保留“最大个数”的线性无关的那些方程，对于增广矩阵就是要保留“最大个数”的线性无关的行向量.

受此启发，我们想到了研究极大无关组的问题。

2. 定义5-3

在向量组V中，若有含r个向量的子向量组线性无关，并且V中任何含$r+1$个向量的子向量组（当V中的向量多于r个时）都线性相关，则把r叫做向量组V的秩.

若向量组V的秩为r,则V中含r个向量的线性无关的子向量组叫做向量组V的极大线性无关组（简称极大无关组，或称最大无关组）.

注：向量组V的秩反映的是向量组V中所含线性无关向量的最大个数，也可以说，向量组V的秩反映的是从向量组V中最多能找到多少个向量放在一起是线性无关的.

3. 如果向量组V中只含r个向量，并且这r个向量是线性无关的，则向量组V的秩就是r，它的极大无关组就是这个向量组自己。

只含零向量的向量组的秩规定为0，它没有极大无关组。

对于含有非零向量的向量组，它的秩存在且唯一，它的极大无关组存在，但不一定唯一。

4. 向量组V线性无关 $\Leftrightarrow$ V的秩等于其所含向量的个数.

向量组V线性相关 $\Leftrightarrow$ V的秩小于其所含向量的个数.

注：通过秩来判断一个向量组的线性相关性是一种非常好的方法，下次课会讲求秩的方法。

5. 定理5-7　向量组V中的每个向量都可由其极大无关组唯一地线性表示。

证：设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组V的极大无关组。

首先，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$中的每个向量都能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示.

其次，对于V中任一个不在极大无关组中的向量$\mathbf{b}$,

由于向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{b}$含有$r+1$个向量,

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{b}$线性相关.

（注：由于$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是V的极大无关组，所以V中最多能找到$r$个向量线性无关，V中任何$r+1$个向量都线性相关）

根据定理5－4可知，$\mathbf{b}$可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$唯一地线性表示。

极大无关组可以看成是从向量组中选出来的"一组代表"，"这组代表"能把向量组中的所有向量唯一地表示，因此很多时候可以"全权代表"原向量组。

根据定理5–7，当一个方程组有无穷多个解时，找到该方程组的所有解向量所构成集合的一个极大无关组，就可用它将方程组的所有解向量表示出来，这样我们就找到了表示方程组的解的方法。

这可看成是极大无关组的一个应用。

6. 线性表示、线性相关、线性无关、秩、极大无关组这些概念对于行向量组和列向量组都适合.

我们可重点掌握列向量组的情况。

对于行向量组，可仿照列向量组的做法进行讨论，也可通过转置化成列向量组进行讨论。

例5-4 求列向量组I：$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$

和行向量组II：$\mathbf{b}_1^T=[1,1,0,2]$, $\mathbf{b}_2^T=[1,0,1,1]$, $\mathbf{b}_3^T=[3,2,1,5]$

的秩和一个极大无关组，并判断其线性相关性。

解： 对于向量组I，显然向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关，

$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_4=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$.

向量组I中任三个向量都线性相关，

向量组I的秩为2，它的一个极大无关组为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$.

对于向量组II，显然向量组 $\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$ 线性无关，

因为 $\mathbf{b}_3^T=2\mathbf{b}_1^T+\mathbf{b}_2^T$，所以$\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T,\mathbf{b}_3^T$ 线性相关.

向量组II的秩为2，它的一个极大无关组为 $\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$

 向量组I和向量组II都是线性相关的.