第8章　方阵的特征值与相似对角化

8.2　相似矩阵

8.2.1 相似矩阵的概念与性质

定义8-2 设A,B都为n阶方阵，若存在**可逆矩阵**P，使得$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似。

$P^{-1}AP$称为对A进行相似变换。

P称为相似变换矩阵。

注意 若$MAM^{-1}=B$，则A与B也相似。

$$(M^{-1})^{-1}AM^{-1}=B$$

若相似变换矩阵P是正交矩阵，则称A与B正交相似。

$P^{-1}AP$称为对A进行正交相似变换。

相似矩阵的性质：

（1）若A与B相似，则A^k与B^k也相似(k为正整数).

证明 设$P^{-1}AP=B$， 则有

$$B^k=\left(P^{-1}AP\right)^k$$

$$=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)$$

$$=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$$

$$=P^{-1}A^kP$$

所以A^k与B^k 相似.

扩展：

若A与B相似，则$f(A)$与$f(B)$也相似。

其中$f(A)=l_m A^m+\cdots+l_1 A+l_0 E$为矩阵多项式。

若A与B相似，且A,B可逆，

则A^{-1}与B^{-1}，　A^*与B^*也都相似。

（2）若A与B相似，则A和B的特征多项式相同。

从而A和B的特征值、行列式、迹均相同。

证明　设 $P^{-1}AP=B$，则有

$$|\lambda E-B|=|P^{-1}(\lambda E)P-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|$$

$$=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|$$

所以A和B的特征多项式相同，从而特征值相同。

因为行列式等于特征值之积，迹等于特征值之和，

所以 $|A|=|B|$, $tr(A)=tr(B)$.

注： 若A与B相似，则A和B的秩也相同。

8.2.2 相似对角化

定义8-3 如果方阵A能与对角矩阵相似，则称A可相似对角化. 即$\exists P$,使得$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵.

当A可相似对角化时，与A相似的对角矩阵叫做A的相似标准形。

注意 相似标准形是个对角矩阵，其对角元为A的特征值.

原因：（1）相似矩阵的特征值相同。

（2）对角矩阵的特征值为其对角元。

注意 不是所有方阵都可相似对角化.

例8-5 证明: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$不可相似对角化.

证明 A只有一个二重特征值1.

若A可相似对角化,

则存在可逆阵P,使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵。

由相似矩阵的特征值相同及对角矩阵的特征值为其对角元可知,$\Lambda=E$.

于是,$A=P\Lambda P^{-1}=PEP^{-1}=E$

这与已知条件矛盾,故A不可相似对角化.

定理 8-3

n 阶方阵 A 可相似对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证明 必要性 因为A可相似对角化，所以存在可逆矩阵$P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

设$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则有$AP=Pdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

$$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$(Ap_1,Ap_2,\cdots,Ap_n)=(\lambda_1 p_1,\lambda_2 p_2,\cdots,\lambda_n p_n),$$

$$Ap_j=\lambda_j p_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

因为P为可逆阵，所以$p_1,p_2,\cdots,p_n$都是非零向量且线性无关.由性质8-3可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_n$是它们分别对应的特征向量.

故A有n个线性无关的特征向量.

充分性

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，

它们分别对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，则有

$$Ap_j = \lambda_j p_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

令 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，参考必要性，可得

$$AP = P diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

因为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关，所以 P 可逆，于是

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

因而 A 可相似对角化.

注意:

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

1 $P=\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$

$\Lambda=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

$p_1,p_2,\cdots,p_n$是A的无关的特征向量,
$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是对应的特征值,
p_j与λ_j的次序要相互对应

2 λ_j对应的线性无关的特征向量是$\left(\lambda_jE-A\right)x=0$的基础解系.

书上157页中间的注意

推论8-2 若n阶方阵A的特征值都是单特征值，则A一定可相似对角化.

证明 设A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都是单特征值。

在上次课讲过，每个特征值都能对应出特征向量。

设$p_1,p_2,\cdots,p_n$分别是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$对应的特征向量。

根据定理8-1可知，相异特征值对应的特征向量一定无关，因而$p_1,p_2,\cdots,p_n$一定线性无关。

这样，A就有n个线性无关的特征向量，再根据定理8-3可知，A一定相似对角化.

定理8-4 设μ是n阶方阵A的k重特征值，$p_1, p_2, \cdots, p_s$是μ对应的线性无关的特征向量，则$s \le k$.

每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数不会超过其重数。

例 $A=\begin{bmatrix}2&3&3\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&3&3\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

对于这三个矩阵，2都是三重特征值，但是2对应的线性无关特征向量的个数不一样，分别为1个、2个、3个

证明 若$s=n$，则A可相似对角化，所化成的对角阵的对角元全为μ，μ是A的n重特征值，$s=k=n$.

若$s<n$，将$p_1,\cdots,p_s$扩充成R^n的一个基$p_1,\cdots,p_s,p_{s+1},\cdots,p_n$.

令$P=[p_1,\cdots,p_s,p_{s+1},\cdots,p_n]$，则$P$可逆.

$$AP=[Ap_1,\cdots,Ap_s,Ap_{s+1},\cdots,Ap_n]$$

$$=[p_1,\cdots,p_s,p_{s+1},\cdots,p_n]\begin{bmatrix} \mu & \cdots & 0 & b_{1,s+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu & b_{s,s+1} & \cdots & b_{sn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{s+1,s+1} & \cdots & b_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,s+1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$AP=PB$, $P^{-1}AP=B$, A与B的特征值相同。

从B的表达式可以看出，μ至少是s重特征值。

定理8-5 n阶方阵A可相似对角化的**充要条件**是A的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

证明 设A的全部互异特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_m$，

则$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$

由A为n阶方阵可知，$|\lambda E-A|$为n次多项式，

$$n_1+n_2+\cdots+n_m=n.$$

充分性 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数$n_1,n_2,\cdots,n_m$，则合起来正好有$n$个线性无关的特征向量.

再根据定理8-3可知，A可相似对角化.

必要性 因为A可相似对角化，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$为对角矩阵. Λ的n个对角元为A的全部特征值，其中有n_i个$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$.

由于P中与λ_i相对应的列向量是λ_i对应的线性无关特征向量，由定理8-4还知，λ_i最多对应出n_i个线性无关的特征向量，所以λ_i所对应的线性无关特征向量的个数恰好等于其重数n_i.

推论8-3 n阶方阵A可相似对角化的充要条件是每个特征值λ_i都满足$r(\lambda_i E - A) = n - n_i$，其中，$n_i$为$\lambda_i$的重数.

证明 n阶方阵A可相似对角化

$\Longleftrightarrow$ λ_i对应出n_i个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ $(\lambda_i E - A)x = 0$的基础解系含n_i个向量

$\Longleftrightarrow$ $n - r(\lambda_i E - A) = n_i$ 定理6-3

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$

注1：讨论一个矩阵是否可相似对角化时，

不用讨论单特征值。

注2：方阵A不可相似对角化

$\Leftrightarrow$ A至少有一个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于其重数

在例8-5中用反证法证明了$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$不可相似对角化，下面再根据定理8-5来说明这个矩阵不可相似对角化.

A的特征值为$\lambda_1=1$（二重），

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad r(\lambda_1 E-A)=1$$

由定理$6-3$可知，$(\lambda_1 E-A)x=0$的基础解系含一个向量，这说明二重特征值$\lambda_1=1$只对应出一个无关的特征向量，所以A不可相似对角化.

例　当k为何值时，方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可相似对角化？

解　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ -1 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$

A 的特征值为$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=0$(单)

要使A可相似对角化，$\lambda_1=1$需对应出两个无关的特征向量，

即 $(\lambda_1 E-A)x=0$ 的基础解系需含两个向量，

根据定理6－3可知，需$3-r(\lambda_1 E-A)=2$，$r(\lambda_1 E-A)=1$

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad k=2.$$

例8-6 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

(1) 求一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并写出该对角阵;

(2) 求 A^k，其中 k 为正整数.

(1)解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-\lambda+1&\lambda-1&0\\-\lambda+1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

A 的特征值为 $\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=2$(单)

对于 $\lambda_1 = 1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E - A)x = 0$.

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$(\lambda_1 E - A)x = 0$化成$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$(\lambda_1 E - A)x = 0$的基础解系为$p_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $p_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\lambda_1 = -1$对应的线性无关特征向量为 p_1, p_2

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}, \lambda_1 = 1(\text{二重}), \lambda_2 = 2(\text{单})$$

对于 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=0.$

$$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_1\div(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(\lambda_2 E-A)x=0$化成$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$

$(\lambda_2 E-A)x=0$ 的基础解系为$p_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

故$\lambda_2=2$对应的线性无关特征向量为$p_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix},\lambda_1=1(\text{二重}),\lambda_2=2(\text{单})$$

令$P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=1$(二重)对应的线性无关特征向量为$p_1=\left(-1,1,0\right)^{\mathrm{T}}, p_2=\left(1,0,1\right)^{\mathrm{T}}$

$\lambda_2=2$(单)对应的线性无关特征向量为$p_3=\left(1,1,1\right)^{\mathrm{T}}$

(2)解： 由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^k=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^k P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&2^k\\1&0&2^k\\0&1&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&2^k-1&1-2^k\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&2^k-1&2-2^k\end{pmatrix}.$$

---

(2) 求 A^k，其中 k 为正整数.

在第一问求得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}=\Lambda$

160页 习题8－2第1题

1.已知$A=\begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & 3 \end{pmatrix}$相似，求$x, y$.

$$A\text{与}B\text{相似} \Rightarrow \begin{cases} (1) & A\text{与}B\text{的特征值相同} \\ (2) & |A|=|B| \\ (3) & tr(A)=tr(B) \\ (4) & A\text{与}B\text{的特征多项式相同} \end{cases}$$

练习

1.设 $P=[p_1,p_2,p_3]$,$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$,

$Q=[3p_1,2p_2,p_3]$, $M=[3p_3,2p_2,p_1]$, 则

$Q^{-1}AQ=\underline{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$, $M^{-1}AM=\underline{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$

2.设A为三阶方阵，α_1,α_2是1对应的线性无关特征向量，α_3是2对应的特征向量，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，则$P=($ $)$

(A) $(\alpha_1,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_3)$

(B) $(\alpha_3,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$

(C) $(2\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ -\alpha_3)$

(D) $(\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+2\alpha_2,\ 3\alpha_3)$

3.设 A为三阶方阵，$\mathrm{r}(E-A)=1$, $\mathrm{r}(2E-A)=2$,

则$|3E-A|=$______, $\mathrm{r}(3E-A)=$______