5.2　矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵的一个重要的数值特性,它既可用于求向量组的秩,从而判断向量组的线性相关性,又在方程组等问题的研究中起着非常重要的作用.

5.2.1　矩阵的秩的概念

定义 5-4　矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量组的秩和列向量组的秩分别叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的**行秩**和**列秩**.

例如,由例 5-4 的结论可知,矩阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&1\\3&2&1&5\end{bmatrix}$ 的行秩和列秩相等,都为 2. 在后面我们将给出结论：任何矩阵的行秩和列秩都是相等的，并且和下面所定义的矩阵的秩也是相等的. 为此，我们先介绍 k 阶子阵的概念。

定义 5-5　设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\}$,由矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 个行和 k 个列相交处的 k^2 个元素按照原来的相对位置所构成的方阵叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的 ***k* 阶子阵**，其行列式叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的 ***k* 阶子式**。

对于上面的矩阵 $\mathbf{B}$，它的 1,2 行和 1,3 列相交处的元素所构成的 2 阶子阵为 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$；它的三个行和前三列所构成的 3 阶子阵为 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}$.

当一个向量组所构成的矩阵 $\mathbf{A}$ 为方阵时，该向量组线性无关对应于矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式不等于零. 在 5.1 节中，我们将极大无关组中所含向量的个数定义为向量组的秩，可以联想到将一个矩阵的最高阶非零子式的阶数定义为矩阵的秩应该是合适的.

定义 5-6　矩阵 $\mathbf{A}$ 中非奇异子阵的最高阶数（即非零子式的最高阶数）称为**矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩**，记作 $r(\mathbf{A})$.

当 $\mathbf{A}$ 为零矩阵时，规定 $r(\mathbf{A})=0$.

设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，由矩阵的秩的定义可知：

（1）$r(\mathbf{A})\leqslant m$ 且 $\mathrm{r}(\mathbf{A})\leqslant n$.

（2）$r(\mathbf{A})=m \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 中有 m 阶子式不为零；

$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 中有 n 阶子式不为零；

$r(\mathbf{A})=r(\mathrm{r}<m$ 且 $\mathrm{r}<n)$ $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 中有 r 阶子式不为零且 $\mathbf{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式都为零.

（3）$\mathbf{A}$ 的增广矩阵的秩不小于 $\mathbf{A}$ 的秩.例如，$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\geq r(\mathbf{A})$.

（4）当 $k\neq 0$ 时，$r(k\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$.

根据矩阵的秩的定义,求出矩阵 $\mathbf{A}$ 的各阶子式，找到最高阶非零子式,即可求出 $\mathbf{A}$ 的秩. 但是，这样做计算量一般很大.下面我们来研究矩阵的秩的性质，然后给出通过初等变换求秩的简便方法.

5.2.2 矩阵的秩的性质

性质 5-1 $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

证明 因为矩阵 $\mathbf{A}$ 的子阵转置后是 $\mathbf{A}^T$ 的子阵，而转置运算不改变行列式的值，所以 $\mathbf{A}$ 的非奇异子阵转置后成为 $\mathbf{A}^T$ 的非奇异子阵，$\mathbf{A}$ 的奇异子阵转置后成为 $\mathbf{A}^T$ 的奇异子阵，$\mathbf{A}$ 的非奇异子阵与 $\mathbf{A}^T$ 的非奇异子阵互相对应，非奇异子阵的最高阶数相同，因而 $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$. .

性质 5-2 $r(\mathbf{A})=\mathbf{A}$ 的行秩$=\mathbf{A}$ 的列秩.

该结论通常称为“**三秩相等定理**”，性质 5-2 的证明在本节后面的附录中给出.

定理 5-8 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$, 则 $\mathbf{A}$ 中任意 r 个列向量 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 和 $\mathbf{B}$ 中相应的列向量 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 满足相同的线性表达式，从而具有相同的线性相关性.

证明 将 $\mathbf{B}=\mathbf{PA}$ 中的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 按列分块，得

$$\left[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right]=\mathbf{P}\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right],$$

即

$$\left[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right]=\left[\mathbf{Pa}_1,\mathbf{Pa}_2,\cdots,\mathbf{Pa}_n\right],$$

$$\mathbf{b}_j=\mathbf{Pa}_j\ (j=1,2,\cdots,n).$$

若

$$k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$$

成立，则

$$k_1(\mathbf{Pa}_{i_1})+k_2(\mathbf{Pa}_{i_2})+\cdots+k_r(\mathbf{Pa}_{i_r})=\mathbf{0}$$

也成立，即

$$k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$$

成立。

反过来，若

$$l_1\mathbf{b}_{i_1}+l_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$$

成立，则

$$l_1(\mathbf{Pa}_{i_1})+l_2(\mathbf{Pa}_{i_2})+\cdots+l_r(\mathbf{Pa}_{i_r})=\mathbf{0}$$

成立。因为 $\mathbf{P}$ 可逆，所以上式中的 $\mathbf{P}$ 可消去。于是，可知

$$l_1\mathbf{a}_{i_1}+l_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$$

也成立。

综合上面的讨论可知，定理 5-8 的结论成立.

推论 5-1 在定理 5-8 的条件下，下列结论正确.

（1） $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一一对应， $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$；

（2） $\mathbf{a}_j=k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}\Leftrightarrow\mathbf{b}_j=k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}$ ，其中 $1\le j\le n$.

注 当 $\mathbf{P}$ 为可逆矩阵时，$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$ 表示用初等行变换将 $\mathbf{A}$ 化成了 $\mathbf{B}$。因而，定理 5-8 和推论 5-1 表明，若用初等行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化成矩阵 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的秩相等，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一一对应，并且 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 中对应的列向量满足相同的线性表达式.

性质 4-3 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A}).$$

证明 由推论 5-1 的（1）可得，$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$.

由性质 5-1 及 $\mathbf{Q}$ 可逆，又可得

$$r(\mathbf{AQ})=r((\mathbf{AQ})^T)=r(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}).$$

进一步，可得

$$r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{P}(\mathbf{AQ}))=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{A}).$$

由于在矩阵 $\mathbf{A}$ 的左（右）侧乘以可逆矩阵相当于对 $\mathbf{A}$ 进行初等行（列）变换，于是有下面的推论。

推论 5-2 初等变换不改变矩阵的秩.

根据推论 5-2, 我们可以先对矩阵进行化简，然后再来求它的秩.

例 5-5 求矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\-2&2&0&2&0\\1&-1&-1&3&3\\1&-1&1&1&3\end{bmatrix}$$

的秩，并判断 $\mathbf{A}$ 的行向量组和列向量组的线性相关性.

解 对 $\mathbf{A}$ 进行初等行变换，得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\-2&2&0&2&0\\1&-1&-1&3&3\\1&-1&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&2&2&4\\0&0&-2&3&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{1}{5}r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{B}.$$

由于$\mathbf{B}$中每个非零行的第一个非零元素所在的那些行和列相交处的元素所构成的子阵

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

是非奇异子阵，而$\mathbf{B}$中任何 4 阶子阵都是奇异阵，所以$r(\mathbf{B})=3$.

由推论 5-2 可知，$r(\mathbf{A})=3$.

由三秩相等定理可知，$\mathbf{A}$的行秩=$\mathbf{A}$的列秩=3,所以$\mathbf{A}$的行向量组和列向量组都是线性相关的.

类似于矩阵$\mathbf{B}$的矩阵称为**行阶梯矩阵**，其特点是：

（1）它的非零行向量都位于矩阵的前几行;

（2）每个非零行向量的第一个非零元素的列标随着行标的增大而严格增大.

用初等行变换求矩阵的秩的方法为：用初等行变换把该矩阵化为行阶梯矩阵，这个行阶梯矩阵的非零行向量的个数就是该矩阵的秩.

下面对例 5-5 中的矩阵$\mathbf{B}$继续做初等行变换，观察能将$\mathbf{B}$化为何种更简单的形式.

$$\mathbf{B}\xrightarrow[r_3\div 5]{r_2\div 2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

矩阵$\mathbf{C}$称为矩阵$\mathbf{A}$的**行最简形**，它是非零行的第一个非零元素都为 1 且这些 1 所在列的其它元素都为零的行阶梯矩阵。

再对矩阵$\mathbf{C}$进行初等列变换可将$\mathbf{C}$化成$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_3 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$. 从上面的化简过程我们可得出下面的结论。

性质 5-4 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$的秩为$r \Leftrightarrow \mathbf{A}$与$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$ 等价，即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$,

使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{F}$.

证明 由推论 5-2 可知，充分性正确.

必要性　由定理 1-2 可知，用初等变换能把 $\mathbf{A}$ 化为 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$ 的形式.由推论 5-2 可知 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{F})$, 即 r=s，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$ 等价。由推论 3-4 知，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$,使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{F}$.

根据性质 5-4 可知，矩阵 $\mathbf{A}$ 的等价标准形 $\mathbf{F}$ 由 $\mathbf{A}$ 的秩唯一确定，即 $\mathbf{A}$ 的等价标准形是唯一的.

性质 5-5 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵，$s\times t$ 矩阵，$m\times t$ 矩阵，则

（1）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$；

（2）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

证明 （1）设 $r(\mathbf{A})=r_1, r(\mathbf{B})=r_2$，根据性质 5-4，通过初等变换可得

$$\mathbf{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix},$$

所以

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r_1+r_2=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

（2）设 $r(\mathbf{A})=r_1, r(\mathbf{B})=r_2$,由矩阵的秩的定义可知，$\mathbf{A}$ 中有 r_1 阶非奇异子阵 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{B}$ 中有 r_2 阶非奇异子阵 $\mathbf{B}_1$, 于是 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 中有 r_1+r_2 阶非奇异子阵 $\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_1\end{bmatrix}$,其中，$\mathbf{C}_1$ 是 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 中 $\mathbf{A}_1$ 所在的行和 $\mathbf{B}_1$ 所在的列相交处的元素构成的子阵.所以

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r_1+r_2=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

性质 5-6 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times k$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $k\times n$ 矩阵，则

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k \le r(\mathbf{AB}) \le \min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}.$$

证明　先证右端的不等式.由

$$[\mathbf{A},\mathbf{O}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=[\mathbf{A},\mathbf{AB}]$$

及性质 5-3，得

$$r(\mathbf{A})=r([\mathbf{A},\mathbf{O}])=r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])\ge r(\mathbf{AB}).$$

由性质 5-1 及上式又可得

$$r(\mathbf{AB})=r((\mathbf{AB})^T)=r(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)\le r(\mathbf{B}^T)=r(\mathbf{B}).$$

再证左端的不等式. 可以验证下面的等式成立：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

根据性质 5-5 和性质 5-3，得

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)=r(-\mathbf{AB})+r(\mathbf{E}_k)=r(\mathbf{AB})+k,$$

所以

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB}).$$

性质 5-7　设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵和 $m\times k$ 矩阵，　则

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

证法 1　由 $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=[\mathbf{E},\mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 及性质 5-6 和性质 5-5，得

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

证法 2　**设** $r(\mathbf{A})=r, r(\mathbf{B})=s$, **则** $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组中分别最多能找到 r 个和 s 个线性无关的向量.于是，$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 的列向量组中最多能找到 $r+s$ 个线性无关的向量，所以 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

性质 5-8　设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 $m\times n$ 型矩阵，则

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})..$$

证明　由 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[\mathbf{A}，\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}$ 及性质 5-6 和性质 5-7，得

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\right) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

5.2.3 满秩矩阵

定义 5-7 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵. 当 $r(\mathbf{A}) = n$ 时，$\mathbf{A}$ 叫做满秩矩阵；当 $r(\mathbf{A}) < n$ 时，$\mathbf{A}$ 叫做降秩矩阵.

满秩矩阵具有下面的结论.

定理 5-9 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 为 n 元列向量，则下列命题互为充要条件.

（1） $\mathbf{A}$ 为满秩矩阵；

（2） $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵；

（3） $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵；

（4） $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解；

（5） $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解；

（6） $\mathbf{A}$ 的行向量组和列向量组都是线性无关的.

证明 由矩阵的秩的定义、非奇异矩阵的定义及矩阵可逆的条件可知，$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

由定理 3-3，定理 3-5 及定理 3-6 可知，$(3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$.

由定理 3-3 及定理 5-2 可知，$(3) \Leftrightarrow (6)$.

注意 满秩矩阵、非奇异矩阵和可逆矩阵是同一种矩阵.

附录 性质 5-2 的证明

引理 5-1 设 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，则 $r(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

证明 必要性 由 $r(\mathbf{A}) = n$ 可知，$\mathbf{A}$ 中有 n 阶的非奇异子阵，并且 $m \geqslant n$.

不失一般性，设 $\mathbf{A}$ 的上方 n 阶子阵 $\mathbf{A}_{11}$ 非奇异，即 $\left|\mathbf{A}_{11}\right| \ne 0$，则 $\mathbf{A}_{11}$ 的列向量组线性无关.设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix}$,其中，$\mathbf{A}_{21}$ 表示 $\mathbf{A}$ 中后 m-n 行所构成的子阵.由定理 5-6 可知，将 $\mathbf{A}_{11}$ 的列向量组添加分量以后所得到的 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 也是线性无关的.

充分性 用反证法.

设 $r(\mathbf{A}) = r < n$，则 $\mathbf{A}$ 中有 r 阶的非奇异子阵.不失一般性，设 $\mathbf{A}$ 的左上角 r 阶子阵 $\mathbf{A}_1$ 非奇异（即可逆）.

当 $r = m$ 时，由 $\mathbf{A}_1$ 可逆可知，$\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_n$ 有唯一解.由定理 5-1 可知，$\mathbf{a}_n$ 能由 $\mathbf{A}_1$ 的列向量组线性表示，所以 $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关，这与题设矛盾.

当 $r < m$ 时，记 $\mathbf{b} = \left[a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{rn}\right]^T$，由 $\mathbf{A}_1$ 可逆可知，$\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解.由定理 5-1 可知，$\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}_1$ 的列向量组唯一地线性表示，即存在唯一的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得

$$k_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\end{bmatrix}+\cdots+k_r\begin{bmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{rr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{rn}\end{bmatrix}. \qquad (5.2)$$

对于任意$i(r+1\le i\le m)$,令

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}&a_{rn}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ir}&a_{in}\end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}_1$为$\mathbf{B}$的左上角r阶子阵. 由$\mathbf{A}_1$可逆可知，$\mathbf{A}_1$的列向量组线性无关.由定理 5-6 可知，添加分量以后所得到的矩阵$\mathbf{B}$的前r个列向量也线性无关.由$r\left(\mathbf{A}\right)=r$知，$\mathbf{A}$的任何$r$+1 阶子阵都是奇异的，所以$\mathbf{B}$是奇异的，$\mathbf{B}$的列向量组线性相关.由定理 5-4 可知，$\mathbf{B}$的最后一列可由其前$r$列唯一地线性表示，于是，存在唯一的一组数$l_1,l_2,\cdots,l_r$，使得

$$l_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{r1}\\a_{i1}\end{bmatrix}+l_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{r2}\\a_{i2}\end{bmatrix}+\cdots+l_r\begin{bmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{rr}\\a_{ir}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{rn}\\a_{in}\end{bmatrix} \qquad （5.3）$$

由于式（5.3）包含了式（5.2），而这两个式子中的系数都是唯一的，所以式（5.3）中的系数与式（5.2）中的系数相同.这样，对于任意$i(r+1\le i\le m)$，均有

$$k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+\cdots+k_ra_{ir}=a_{in}，$$

结合式（5.2）可得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_r\mathbf{a}_r=a_n，$$

根据定理 5.3 可知，$\mathbf{A}$的列向量组线性相关，这与题设矛盾.

综合上面的讨论可知，充分性正确.

性质 5-2 的证明.

证明 先证$r(\mathbf{A})=\mathbf{A}$的列秩，设$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

若$r(\mathbf{A})=n$,则由引理 5-1 可知，$\mathbf{A}$的列向量组线性无关，$\mathbf{A}$的列秩=n=$r(\mathbf{A})$,结论正确.

若$r(\mathbf{A})=r<n$,则$\mathbf{A}$中有r阶非奇异子阵.不妨设$\mathbf{A}$的左上角r阶子阵$\mathbf{A}_1$非奇异，则

$\mathbf{A}_1$ 的列向量组线性无关.由定理 5-6 可知，$\mathbf{A}$ 的前 r 列线性无关，所以 $\mathbf{A}$ 的列秩 $\geqslant r(\mathbf{A})$.

现在设 $\mathbf{A}$ 的列秩为 s,并不妨设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_s$ 为 $\mathbf{A}$ 的列向量组的极大无关组.令 $\mathbf{A}_2=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_s\right]$，则 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{A}_2$ 的增广矩阵，$r\left(\mathbf{A}\right)\geq r\left(\mathbf{A}_2\right)=s=\mathbf{A}$ 的列秩.

综合上面的讨论可知，$r(\mathbf{A})=\mathbf{A}$ 的列秩.

再由 $\mathbf{A}$ 的行秩$=\mathbf{A}^T$ 的列秩$=r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$ 知，性质 5-2 成立.

思考题 5-2

1.下列结论是否正确？

（1）若 $r(\mathbf{A})=r$,则 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子阵都是非奇异的.

(2) 若 $r(\mathbf{A})=r$,则 $\mathbf{A}$ 的 $i(1\leq i\leq r-1)$ 阶子阵中至少有一个是可逆的.

（3）当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，$\mathbf{A}$ 的行向量组和列向量组有相同的线性相关性.

（4）若 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$，则 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵.

（5）若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都为降秩矩阵.

2.方阵 $\mathbf{A}$ 为降秩矩阵的充要条件有哪些？

习题 5-2

1. 求下列矩阵的秩：

(1) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&4&1\\1&3&1&5\\2&0&2&2\\1&-2&-2&1\end{bmatrix}$；　　(2) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&2&1&2\\2&0&1&-1&5\\0&2&3&3&-1\\1&1&0&-1&4\end{bmatrix}$.

2. 已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{bmatrix}$$

的秩为 3，求 a,b 的值.

3.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 等价的充要条件是 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})$.

4.设 $r(\mathbf{A})=1$，证明：存在列向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，使得 $\mathbf{A}=\mathbf{ab}^T$.

5.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵, $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,证明：$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=m$ 且 $m\leqslant n$.

6.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵，$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ 为可逆矩阵，$m\neq n$,证明：$\mathbf{A}$ 的

列向量组线性相关，$\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

7.设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵, $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,证明： $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}) \le k$.

8.设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵， $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-6\mathbf{E}=\mathbf{O}$ ，证明： $r(\mathbf{A}+3\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=n$.

9.设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，证明：

$$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n & r(\mathbf{A})=n \\ 1 & r(\mathbf{A})=n-1 \\ 0 & r(\mathbf{A}) \le n-2 \end{cases}.$$

10.设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵， $\mathbf{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵，且 $m>n$ ，证明： $|\mathbf{AB}|=0$.

提高题 5-2

1.设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的秩为 r,证明：存在秩也为 r 的两个矩阵 $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times r}$ 和 $\mathbf{C}=\left[c_{ij}\right]_{r\times n}$ ，使得 $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$.

2. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，证明：存在可逆矩阵 $\mathbf{B}$ 和幂等阵 $\mathbf{C}$ (即 $\mathbf{C}^2=\mathbf{C}$),使得 $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$.

3. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵， $r(\mathbf{A})=k$, 证明： $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

4.求 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的秩.