本课程的相关说明

1.请同学们加入QQ群，QQ号为462471660,群中昵称形式为“软国2101 王东”.

2.请同学们在手机中下载“学习通app”，我们用学习通上传作业，作业写好以后，拍照上传到学习通中。

电脑登录学习通的网址为：dlut.fanya.chaoxing.com

书上思考题、习题、提高题的答案老师会发到QQ群中.

3.本课程由线性代数和空间解析几何两部分构成。

线性代数部分不是很好学，原因是：（1）比较抽象，有些部分不好理解；（2）概念、结论很多，不好掌握；（3）知识点间的联系非常多，做题时需要有很好的分析、联想和猜想能力；（4）与以前所学数学联系较少。

4.该课程是一门重要的数学基础课，很多课程要用到。

5.课前要预习，课后要先看书再做题，要养成看书的习惯。要多看、多记（多背）、多想、多练。

第4章　空间的平面与直线

4.1　向量与空间直角坐标系

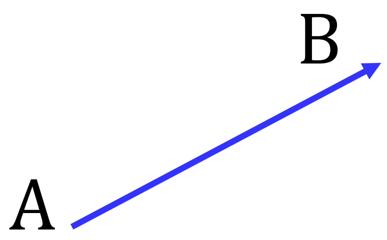
4.1.1 向量的基本概念

1.**定义4-1** 一个既有大小又有方向的量叫做**向量**（也称为**矢量**）.

在解析几何部分，用上面加箭头的字母表示向量.
例如：$\vec{a},\vec{i},\vec{s},\vec{n}$ 等.

在线性代数部分，是用黑体小写字母表示列向量.

2. 在几何上，通常用有向线段来表示向量。



这样一条有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$

3. 自由向量

自由向量是一个很重要的概念。

关于自由向量，我们需要从下面三个方面进行理解：

（1）所谓自由向量就是可以在空间中自由地平行移动的向量，并且总认为平移以后所得的向量与原来的向量是相等的.

（2）自由向量与它的起点无关，也可以说起点是自由的，放在哪儿都行.

（3）关于自由向量，我们只关心它的大小和方向，不关心起点.

注：本课程所讲的向量均指自由向量。

4. 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的大小相等且方向相同，则称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相等，记作$\vec{a}=\vec{b}$.

注：相等的向量通过平移能够完全重合。

5. 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的大小相等,但方向相反，则称$\vec{b}$是$\vec{a}$的反向量，记作$\vec{b}=-\vec{a}$.

6. 向量的大小叫做向量的长度（也称为模），向量$\vec{a}$的长度记作$\left|\vec{a}\right|$.

7. 长度是1的向量称为单位向量。

8. 长度是0的向量称为零向量，记作$\vec{0}$

注：零向量的方向是任意的。

9. 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的正方向所夹的不大于π的角，称为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角。

10. 用$\vec{a}//\vec{b}$表示$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，用$\vec{a}\perp\vec{b}$表示$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直。由于零向量的方向是任意的，所以零向量与任何向量都平行，也与任何向量都垂直。

11. 把互相平行的向量称为共线向量。

注：平行的向量可以平移到同一条直线上.

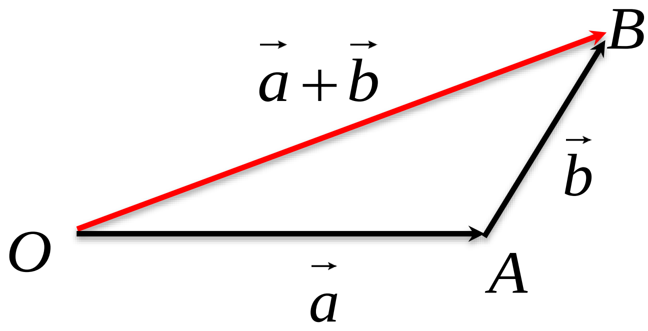
12. 把平行于同一个平面的向量称为共面向量.

注：通过平移，这些向量确实可以在同一个平面上.

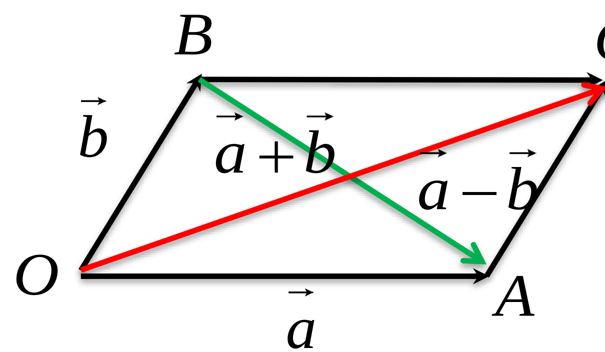
4.1.2 向量的线性运算及投影

定义 4-2

向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和记作 $\vec{a}+\vec{b}$. 规定 $\vec{a}+\vec{b}$ 是按“三角形法则”或“平行四边形法则”所确定的向量.



(1)三角形法则



(2)平行四边形法则

定义 4-3

数λ与向量$\vec{a}$的乘积记作$\lambda\vec{a}$，规定$\lambda\vec{a}$是一个向量，

它的长度为 $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda|\left|\vec{a}\right|$.

它的方向按照下面方式确定:

- 当$\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$相同;
- 当$\lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$相反;
- 当$\lambda = 0$时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$，其方向任意.

定义：向量的加法和向量与数的乘法合起来称为**向量的线性运算**

向量的线性运算性质

设λ和μ是实数,$\vec{a}$,$\vec{b}$和$\vec{c}$是任意三个向量.

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

(5) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\mu\left(\lambda\vec{a}\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$

(6) $1\vec{a}=\vec{a}$ 且 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(7) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(8) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

多个向量的加法：

先做出第一个向量，从第二个向量开始，总是以前一个向量的终点为起点来做下一个向量。

最后：

以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点，连起来的向量就是这些向量的和。

n个向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\ (n \geq 2)$

之和为$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$，它是一个以$\vec{a}_1$的起点为起点，以$\vec{a}_n$的终点为终点的向量.

下面来讨论向量的投影:

当 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 时，与 $\vec{b}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ 且 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 把 $|\vec{a}|\cos\theta$ 称为**向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影**，记作 $(\vec{a})_{\vec{b}}$ 或 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$，即

$$(\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos\theta.$$

把 $(\vec{a})_{\vec{b}} \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的**投影向量**.

向量的投影具有下列性质

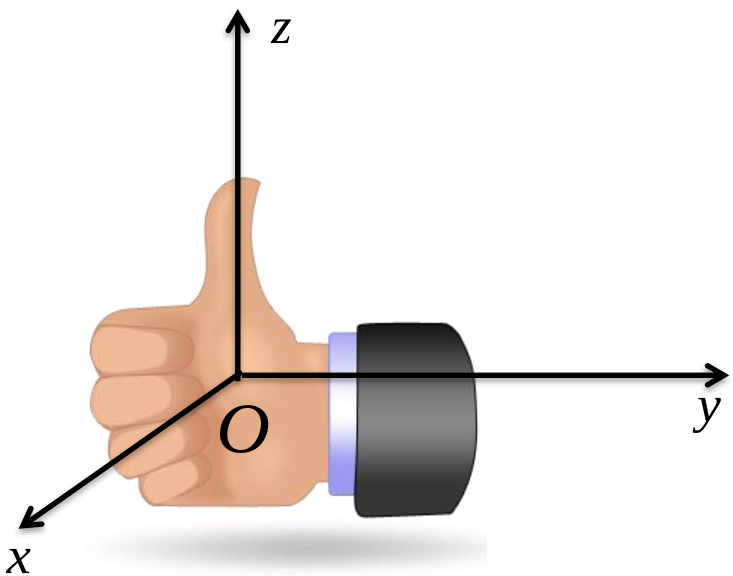
设$\vec{c} \neq \vec{0}$

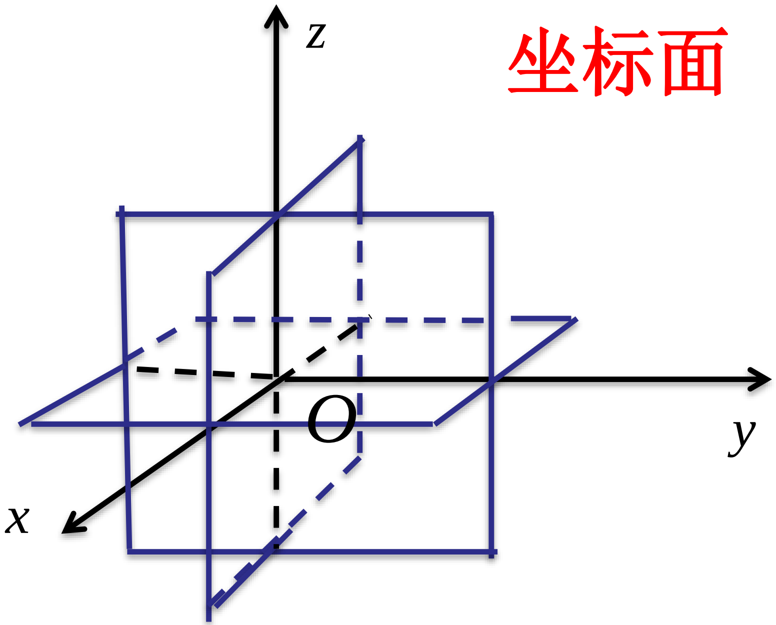
(1) 若$\vec{a} = \vec{b}$,则$\left(\vec{a}\right)_{\vec{c}} = \left(\vec{b}\right)_{\vec{c}}$

(2) $\forall \lambda \in \mathrm{R}$,都有$\left(\lambda \vec{a}\right)_{\vec{c}} = \lambda \left(\vec{a}\right)_{\vec{c}}$

(3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)_{\vec{c}} = \left(\vec{a}\right)_{\vec{c}} + \left(\vec{b}\right)_{\vec{c}}$

4.1.3 空间直角坐标系





坐标面

注意：要求依x轴、y轴、z轴的次序符合**右手法则。**
这样的坐标系称为**右手系。**

Oxy面，Oyz面及Ozx面将空间直角坐标系分成八个**卦限.**

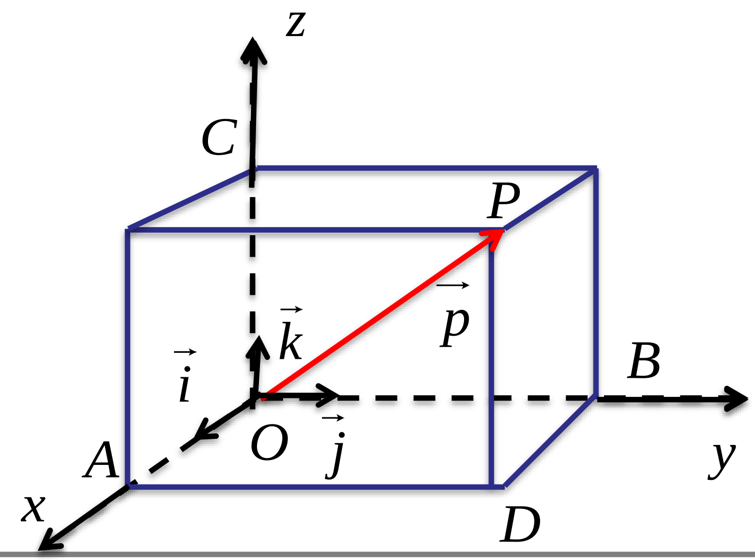
4.1.3 向量的坐标与点的坐标

（一）向量的坐标

定义

在$Oxyz$坐标系中，分别与x轴，y轴和z轴同方向的单位向量叫做该坐标系的**基本向量**，用$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$表示.

设$\vec{p}$为空间中任一向量，向量$\vec{p}$在三个坐标轴上的投影分别为p_x, p_y, p_z.



$$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$$

$$\overrightarrow{OA} = p_x \vec{i},$$

$$\overrightarrow{OB} = p_y \vec{j},$$

$$\overrightarrow{OC} = p_z \vec{k},$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$= \underline{p_x} \vec{i} + \underline{p_y} \vec{j} + \underline{p_z} \vec{k}$$

$\vec{p}$在x轴、y轴、z轴上的坐标

注：向量$\vec{p}$在三个坐标轴上的坐标就是它在三个坐标轴上的投影。

把 $\boldsymbol{p}=\left[p_x, p_y, p_z\right]^{\mathrm{T}}$ 称为向量 $\vec{p}$ 的坐标向量(也称为代数向量)

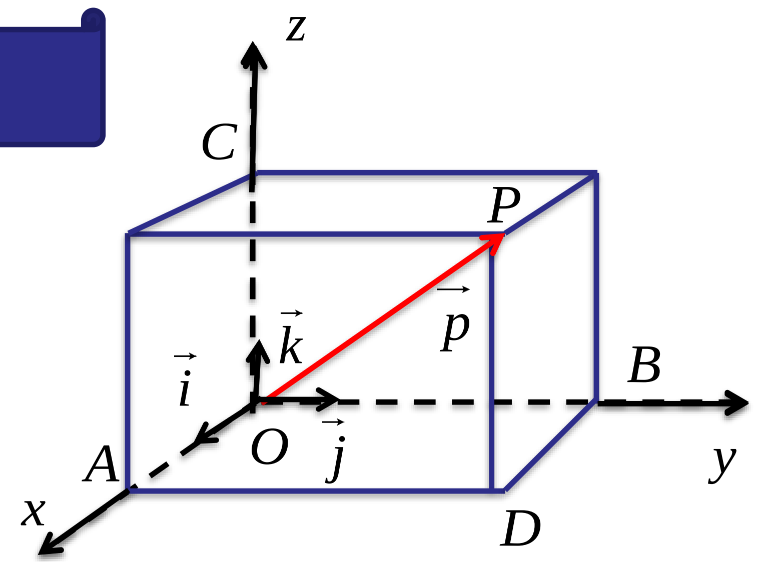
把 $\vec{p}$ 称为几何向量。

在一个给定的坐标系下，坐标向量$\boldsymbol{p}=\left[p_x, p_y, p_z\right]^{\mathrm{T}}$ 与几何向量 $\vec{p}$ 的是一一对应的。

以后，将用$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=\left[p_x, p_y, p_z\right]^{\mathrm{T}}$ 中的一个来表示向量的坐标。

$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{p}$ 按基本向量的分解式。

向量的长度的计算



$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2}$$

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}}$$

注：p_x, p_y, p_z是向量$\vec{p}$在三个坐标轴上的坐标。

（二）方向角 方向余弦

1. 定义：把向量 $\vec{p}$ 分别与x轴、y轴、z轴正方向的夹角α,β,γ叫做向量$\vec{p}$的方向角。

把方向角的余弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$叫做向量$\vec{p}$的方向余弦。

2. 已知向量$\vec{p}$的长度和方向角以后，可根据下面公式来求向量$\vec{p}$的坐标.

$$p_x=\left|\vec{p}\right|\cos\alpha,\qquad p_y=\left|\vec{p}\right|\cos\beta,\qquad p_z=\left|\vec{p}\right|\cos\gamma.$$

3. 已知向量$\vec{p}$的坐标p_x, p_y, p_z以后，可根据下面公式来求向量$\vec{p}$的长度和方向余弦.

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{p_x}{\left|\vec{p}\right|} = \frac{p_x}{\sqrt{p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}}}$$

$$\cos\beta = \frac{p_y}{\left|\vec{p}\right|} = \frac{p_y}{\sqrt{p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}}}$$

$$\cos\gamma = \frac{p_z}{\left|\vec{p}\right|} = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}}}$$

4. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

从这里可以看出，方向角之间是有依赖关系的。

5. 与$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$同方向的单位向量为

$$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{p_x}{|\vec{p}|}\vec{i}+\frac{p_y}{|\vec{p}|}\vec{j}+\frac{p_z}{|\vec{p}|}\vec{k}$$

$$=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

可见，方向余弦是向量$\vec{p}$的单位向量的坐标，

因而方向角、方向余弦的叫法是合理的。

（三）点的坐标

1.对于空间中任一给定点P,由于点P与向量$\overrightarrow{OP}$一一对应,因而可把$\overrightarrow{OP}$的坐标p_x、p_y、p_z依次称为点P的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**．记作$P\left(p_x,p_y,p_z\right)$

2. 始点$P\left(p_x,p_y,p_z\right)$, 终点$Q\left(q_x,q_y,q_z\right)$

$$\overrightarrow{OP}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}\text{，}\quad \overrightarrow{OQ}=q_x\vec{i}+q_y\vec{j}+q_z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(q_x-p_x\right)\vec{i}+\left(q_y-p_y\right)\vec{j}+\left(q_z-p_z\right)\vec{k}$$

注意：向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标等于后点的坐标减去前点的坐标

$$d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(q_x-p_x\right)^2+\left(q_y-p_y\right)^2+\left(q_z-p_z\right)^2}$$

3.坐标轴、坐标面上的点的坐标

(1) 原点的坐标为$(0,0,0)$

(2) x轴上的点的坐标的形式为$(x,0,0)$,

y轴上的点的坐标的形式为$(0,y,0)$,

z轴上的点的坐标的形式为$(0,0,z)$.

(3) Oxy面上的点的坐标的形式为$(x,y,0)$,

Oyz面上的点的坐标的形式为$(0,y,z)$,

Ozx面上的点的坐标的形式为$(x,0,z)$.

例4-1 求点$P(1,2,0)$到点$Q\left(2,1,\sqrt{2}\right)$的距离$d(P,Q)$，向量$\overrightarrow{PQ}$的长度、方向余弦、方向角，以及与其同方向的单位向量。

解：$\overrightarrow{PQ}=(2-1)\vec{i}+(1-2)\vec{j}+\left(\sqrt{2}-0\right)\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$,

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2,\quad d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=2,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{1}{2},\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}.$$

与$\overrightarrow{PQ}$同方向的单位向量为 $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{1}{2}\vec{j}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$

三维几何空间既可看成是由三维空间中的**所有点**构成的，也可看成是由三维空间中的**所有向量**构成的。