第 3 章　可逆矩阵及 $n\times n$ 型线性方程组

本章将对可逆矩阵和 $n\times n$ 型线性方程组进行研究。关于可逆矩阵，将研究方阵可逆的条件、可逆矩阵的性质及求逆矩阵的方法；关于 $n\times n$ 型线性方程组，将研究它有唯一解的充要条件及其解法。

3.1 可逆矩阵

可逆矩阵是一类很重要的方阵，在对矩阵的研究及计算中起着非常重要的作用.

3.1.1 可逆矩阵的定义

对于一个非零的数 a, a 和它的倒数（也叫逆数）a^{-1} 满足

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

把数的这个性质加以推广，我们可给出可逆矩阵的定义.

定义 3-1　对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$，若存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}$，使得

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$$

则 $\mathbf{A}$ 叫做**可逆矩阵**（或称 $\mathbf{A}$ 可逆），$\mathbf{B}$ 叫做 $\mathbf{A}$ 的**逆矩阵**.否则，称 $\mathbf{A}$ 不可逆

由定义 3-1 可知，可逆矩阵及其逆矩阵都是方阵.在这里提醒大家注意，线性代数中有些概念和结论只对方阵才成立，比如，三角形矩阵、对称矩阵、行列式、可逆矩阵等.因此，在以后的学习中大家一定要注意所讨论问题中的矩阵是何种矩阵.

定理 3-1 若 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是唯一的

证明　设 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，则

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E},\ \mathbf{AC}=\mathbf{CA}=\mathbf{E}.$$

由

$$\mathbf{B}=\mathbf{EB}=(\mathbf{CA})\mathbf{B}=\mathbf{C}(\mathbf{AB})=\mathbf{CE}=\mathbf{C}$$

可知, $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是唯一的.证毕.

我们把 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵记作 $\mathbf{A}^{-1}$，读作“$\mathbf{A}$ 的逆”。

当 $\mathbf{A}$ 可逆时，$\mathbf{A}^{-1}$ 总满足

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

按理说，有了逆矩阵的定义以后可以给出矩阵除法的定义，因为对数 a 和 $b(b\neq 0)$，$a\div b$ 的本质就是 $a\times b^{-1}$，但是我们现在不能这样做，原因是矩阵的乘法不可交换.不过，有时我们可以按除法的方式来分析问题.

在这里提醒大家注意，不能把 $\mathbf{A}^{-1}$ 写成 $\dfrac{1}{\mathbf{A}}$.

在前面我们讲过 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时,矩阵的乘法不满足消去律。但是当 $\mathbf{A}$ 可逆时，消去律是成立的.

例如，当 $\mathbf{A}$ 可逆时，由 $\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$ 可消去 $\mathbf{A}$，得到 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$. 其消去的过程是在等式两端

同时左乘$\mathbf{A}^{-1}$，即$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AY}$.当$\mathbf{A}$可逆时，由$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$可消去$\mathbf{A}$，得到$\mathbf{B}=\mathbf{O}$.

根据定义 3-1 可以验证，当数$k_1,k_2,\cdots,k_n$都不为零时,

$$\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} k_1^{-1} & & & \\ & k_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & & k_1 \\ & & k_2 & \\ & \iddots & & \\ k_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & k_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & k_2^{-1} & & \\ k_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

3.1.2 伴随矩阵及矩阵可逆的条件

定义 3-2 设$n>1,\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$,把矩阵

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

叫做$\mathbf{A}$的伴随矩阵。

注意 $\mathbf{A}^*$是伴随矩阵的专有记号，$\mathbf{A}^*$第i列的元素是$\mathbf{A}$中第i行相应各元素的代数余子式，定义中有个转置的过程.

$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^*$之间具有下面的关系.

定理 3-2 设$\mathbf{A}$是n阶方阵，$n>1$，则

$$\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

证明 根据行列式的性质 2-2 和性质 2-7，可得

$$\mathbf{AA}^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

同理可证

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

定理 3-3　方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$.并且当 $\mathbf{A}$ 可逆时，

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}.$$

证明　必要性　由 $\mathbf{A}$ 可逆可知，$\mathbf{A}^{-1}$ 存在，且满足 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.对该式两边取行列式，得

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{E}|,$$

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = 1,$$

所以 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 且 $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$.

充分性　由定理 3-2 知，

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

因 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 故有

$$\mathbf{A}\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

由可逆矩阵的定义可知，$\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$.

定义 3-3　对于方阵 $\mathbf{A}$，当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为奇异矩阵；当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵.

由定理 3-3 可知，可逆矩阵和非奇异矩阵是同一种矩阵.

推论 3-1　若方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆，且 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$.

证明　由 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{E}| = 1$, 可知

$$|\mathbf{A}| \neq 0, \qquad |\mathbf{B}| \neq 0,$$

所以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆，并且

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{AE} = \mathbf{A}.$$

例 3-1 试确定二阶方阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆的条件，并求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 当$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$时，$\mathbf{A}$可逆.

通过计算可得$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，所以

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

例 3-2 求方阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解 $|\mathbf{A}|=6+4+3-2-6-6=-1.$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=0, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$

类似地可算出

$$A_{21}=-1, A_{22}=2,\ A_{23}=-1;$$

$$A_{31}=1, A_{32}=-1,\ A_{33}=0.$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意 求$\mathbf{A}^{-1}$时，应通过$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$进行检验。

例 3-3 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，证明

$$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}.$$

证明 分成三种情况加以证明.

（i）设$|\mathbf{A}|\neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆.

由$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$可得，

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1},$$

$$|\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^n |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

（ii）若 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$.这时 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}| = 0$，所以结论成立.

（iii）若 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}, |\mathbf{A}| = 0$，则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{O}. \qquad (3.1)$$

下面用反证法证明 $|\mathbf{A}^*| = 0$.

假设 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$，则由定理 3-3 可知，$\mathbf{A}^*$ 可逆.

从式(3. 1)消去 $\mathbf{A}^*$，得 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$，这与 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 矛盾.所以 $|\mathbf{A}^*| = 0$，结论成立.

注意　公式 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E},\ \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 和 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ 在讨论有关 $\mathbf{A}^*$ 的问题时经常用到.

可逆矩阵与后面所讲的很多问题有联系，证明一个方阵 **A** 可逆有很多种方法.在本节中，应掌握两种方法：

方法 1　通过证明|**A**|≠0 来证明 **A** 可逆.

方法 2　找出方阵 **B**，证明 **AB=E.**

注意　证明 **A** 不可逆或证明 $|\mathbf{A}| = 0$ 时经常用反证法。

例 3-4　设方阵 **A** 满足 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O}$，证明 $\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$ 可逆，并求出 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}$ 的表达式。

证明　由 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{E} = \mathbf{O}$，得

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})(\mathbf{A} + 3\mathbf{E}) = -5\mathbf{E},$$

即

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\frac{\mathbf{A} + 3\mathbf{E}}{-5} = \mathbf{E}.$$

由推论 3-1 可知 $\mathbf{A} - 2\mathbf{E}$ 可逆，并且

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = -\frac{\mathbf{A} + 3\mathbf{E}}{5}.$$

根据推论 3-1 可以证明，可逆阵 **A** 具有下列性质：

（1）$\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$；

（2）$\mathbf{A}^T$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$；

（3）若数 k≠0，则 $k\mathbf{A}$ 也可逆，且 $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$；

（4）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵，则 $\mathbf{AB}$ 也可逆，且

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

根据（4）还可用数学归纳法证明：若 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 为同阶可逆方阵，则 $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k$ 也可逆，且

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{-1}=\mathbf{A}_k^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

特别地，若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^k$ 也可逆，且

$$(\mathbf{A}^k)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^k.$$

注意 当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆时，$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$ 不一定可逆；即使可逆，$(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^{-1}$ 也不一定等于 $\mathbf{A}^{-1}\pm\mathbf{B}^{-1}$.

3.1.3 求逆矩阵的初等行变换法

在前面我们讲过，可以根据公式 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$ 来求 $\mathbf{A}^{-1}$.但是，当 $\mathbf{A}$ 的阶数较大时，计算量太大，因此这个公式主要用于理论推导和求低阶方阵以及特殊方阵的逆矩阵.下面我们来介绍求逆矩阵的另一种方法——初等行变换法.

在 1.3 节初等矩阵的性质 1-3 中我们讲过，当 $k\neq 0$ 时，

$$\mathbf{E}_{i,j}\mathbf{E}_{i,j}=\mathbf{E},\ \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(k^{-1})=\mathbf{E},\ \mathbf{E}_{i,j}(k)\mathbf{E}_{i,j}(-k)=\mathbf{E}\ .$$

由推论 3-1 可知，三种初等矩阵都是可逆矩阵，并且其逆矩阵还是同类型的初等矩阵：

$$\mathbf{E}_{i,j}^{-1}=\mathbf{E}_{i,j}\quad,\mathbf{E}_i^{-1}(k)=\mathbf{E}_i(k^{-1}),\qquad \mathbf{E}_{i,j}^{-1}(k)=\mathbf{E}_{i,j}(-k).$$

定理 3-4 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathbf{A}$ 能表示成有限个初等矩阵的乘积。

证明 充分性 由初等矩阵都可逆以及有限个可逆矩阵的乘积仍可逆可知，$\mathbf{A}$ 可逆.

必要性 由定理 1-2 可知，存在初等矩阵 $\mathbf{P}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 和初等矩阵 $\mathbf{Q}_j(j=1,2,\cdots,l)$，使得

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\ \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{F},$$

其中 $\mathbf{F}$ 是对角元为1或0的对角矩阵. .

因为初等矩阵都可逆，$\mathbf{A}$ 也可逆，所以 $\mathbf{F}$ 可逆.于是，$\mathbf{F}$=$\mathbf{E}$.因此

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\ \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{E}\ .$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_k^{-1}\ \mathbf{Q}_l^{-1}\cdots\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1}.$$

由于初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，所以 $\mathbf{A}$ 能表示成有限个初等矩阵的乘积.

从上面的证明可以看出，可逆矩阵的等价标准形是单位矩阵

推论 3-2 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 等价.

根据定理 3-4 可得下面的推论.

推论 3-3 在矩阵 $\mathbf{A}$ 的左（右）端乘以可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ 对 $\mathbf{A}$ 进行有限次初等行（列）变换。

推论 3-4 $m\times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价（相抵）的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$.

下面我们来研究求逆矩阵的初等行变换法。

当 $\mathbf{A}$ 可逆时，$\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，由 $\mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]=\left[\mathbf{E},\mathbf{A}^{-1}\right]$ 可知，用有限次初等行变换一定能把 $\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]$ 化为 $\left[\mathbf{E},\mathbf{A}^{-1}\right]$.

反过来，若用有限次初等行变换能把 $\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]$ 化为 $\left[\mathbf{E},\mathbf{B}\right]$，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{P}\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]=\left[\mathbf{E},\mathbf{B}\right].$$

由上式可得 $\mathbf{PA}=\mathbf{E}$，$\mathbf{PE}=\mathbf{B}$，所以，$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1},\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. 这说明只要能用初等行变换把 $\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]$ 化为 $\left[\mathbf{E},\mathbf{B}\right]$ 的形式，$\mathbf{B}$ 一定是 $\mathbf{A}^{-1}$.

因此，可用初等行变换来求可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵. 做法是：对 $\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]$ 进行初等行变换，目标是把 $\mathbf{A}$ 化为 $\mathbf{E}$，当把 $\mathbf{A}$ 化为 $\mathbf{E}$ 时，$\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]$ 中的 $\mathbf{E}$ 就化为了 $\mathbf{A}^{-1}$.

例 3−5 用初等行变换求例 3−2 中方阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵.

解 因为

$$\left[\mathbf{A},\mathbf{E}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&2&3&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&-2&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\longleftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&2&0&-1\\0&1&2&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&3&-2&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix},$$

因此，

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{bmatrix}.$$

注意 (1)当 $\mathbf{A}$ 的阶数 $n\geqslant 3$ 时，一般用初等行变换的方法求 $\mathbf{A}^{-1}$ 比用伴随矩阵的方法求 $\mathbf{A}^{-1}$ 方便.同时希望大家注意，初等行变换的方法便于用计算机进行运算.

(2)也可用初等列变换求 $\mathbf{A}^{-1}$，方法是：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 3-6 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，证明：分块上三角形矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 可逆，并求其逆矩阵.

证明 由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是可逆矩阵，可得

$$|\mathbf{A}| \neq 0, \quad |\mathbf{B}| \neq 0.$$

于是，有

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \neq 0,$$

故 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 可逆.

设 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AX}_1 + \mathbf{CX}_3 & \mathbf{AX}_2 + \mathbf{CX}_4 \\ \mathbf{BX}_3 & \mathbf{BX}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

于是，有

$$\begin{cases} \mathbf{AX}_1 + \mathbf{CX}_3 = \mathbf{E} \\ \mathbf{AX}_2 + \mathbf{CX}_4 = \mathbf{O} \\ \mathbf{BX}_3 = \mathbf{O} \\ \mathbf{BX}_4 = \mathbf{E} \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X}_2 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{X}_3 = \mathbf{O} \\ \mathbf{X}_4 = \mathbf{B}^{-1} \end{cases}.$$

故

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

类似地，可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

3.1.4 矩阵方程

矩阵方程的一般形式为 $\mathbf{AX}=\mathbf{C},\mathbf{YB}=\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{AZB}=\mathbf{C}$，其中，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可逆. 它们的解依次为 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C},\mathbf{Y}=\mathbf{CB}^{-1}$ 和 $\mathbf{Z}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$，求出 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $\mathbf{B}^{-1}$ 就可求得矩阵方程的解.

类似于用初等行交换求 $\mathbf{A}^{-1}$ 的讨论，对于 $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{YB}=\mathbf{C}$，也可用初等变换来求它们的解. 做法是：

$$[\mathbf{A},\mathbf{C}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\mathbf{E}，\mathbf{X}],$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}.$$

注意　若所给矩阵方程不能整理成上面所讲的三种形式，或者虽然能整理成上面的三种形式之一，但 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 不可逆，则需转化为方程组的形式进行求解.

例 3-7　已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{AX}=2\mathbf{X}+\mathbf{C}$，求矩阵 $\mathbf{X}$.

解　由 $\mathbf{AX}=2\mathbf{X}+\mathbf{C}$，得 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{C}$. 因为 $|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=1\neq 0$, 所以 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}$ 可逆。

因为

$$[\mathbf{A}-2\mathbf{E},\mathbf{C}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\\2&0\end{bmatrix}.$$

*例 3-9　解方程

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{X}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix}.$$

注意　该矩阵方程不能整理成 $\mathbf{AX}=\mathbf{C},\mathbf{YB}=\mathbf{C}$，$\mathbf{AZB}=\mathbf{C}$ 的形式。

解　设 $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，则有

$$\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}2x_1+x_3&2x_2+x_4\\3x_1+2x_3&3x_2+2x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+x_2\\x_3&2x_3+x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix}.$$

根据矩阵相等的定义，得

$$\begin{cases}2x_1+x_3=x_1+1\\2x_2+x_4=2x_1+x_2+7\\3x_1+2x_3=x_3-1\\3x_2+2x_4=2x_3+x_4+3\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}x_1+x_3=1\\-2x_1+x_2+x_4=7\\3x_1+x_3=-1\\3x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}.$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=2\\x_4=4\end{cases}.$$

故

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&4\end{bmatrix}.$$

对于矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$，将 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{C}$ 写成按列分块矩阵，得

$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s]=[\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots,\mathbf{c}_s]$.进一步，可得 $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{c}_i(i=1,2,\cdots,s)$. 因此，当 A 不可逆时，求解矩阵方程 **AX**=**C** 可转化为求解 s 个具有相同系数矩阵的方程组 $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{c}_i(i=1,2,\cdots,s)$.

思考题 3-1

判断对错.对的说明理由，错的补充条件使其成立或加以改正.

1. 若三个矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 满足 **AB**=**CA**=**E**，则 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.
2. 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，且 A 可逆，则 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$.
3. 当 **A** 可逆时，由 **AX**=**YA** 可得 **X**=**Y**.
4. 若 **A** 可逆，**XA**=**C**，则 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.
5. 若 **AB** 可逆，则 **A** 和 **B** 都可逆..
6. 若 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 也可逆.
7. 若对称矩阵 **A** 可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 也是对称矩阵.
8. 若 $\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$.
9. 若 n 阶方阵 **A** 是非奇异矩阵，则在 **A** 的 n^2 个元素中至少有一个元素的余子阵是非奇异矩阵.
10. **A** 与 $\mathbf{A}^*$，**A** 与 $\mathbf{A}^{-1}$ 均可交换.
11. 若方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 满足 **ABC**=**E**，则 **BAC**=**E**，**BCA**=**E**.
12. 对方阵 **A** 进行初等变换不改变其奇异性（可逆性）。

习题 3-1

1.设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$k\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵，求 k.

2.求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$；　　（2）$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&-2\\2&1&-3\end{bmatrix}$；

（3）$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&-3&0&0\\2&5&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$；　　（4）$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

3.设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为三阶方阵，$|\mathbf{A}|=2, |\mathbf{B}|=3,$ 计算：

(1) $\left|2(\mathbf{A}^*\mathbf{B}^{-1})^2\mathbf{A}^T\right|$; (2) $\left|2\mathbf{A}^*+3\mathbf{A}^{-1}\right|$; (3) $\left|(4\mathbf{A})^{-1}-\mathbf{A}^*\right|$; (4) $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{B} \\ (2\mathbf{A})^{-1} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$.

4.设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{ABA}^*=2\mathbf{BA}^*+\mathbf{E},$ 求 $|\mathbf{B}|$.

5. 证明：

（1）若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵且 $\mathbf{A}^k=\mathbf{O}$ (k 为正整数)，则 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，且

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}.$$

（2）若 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$ 且 $\mathbf{A}\neq\mathbf{E}$，则 $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|=0$..

（3）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是非零的 n 阶方阵且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都不可逆.

(4)若 $\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{B},\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{AB}$ 都可逆.

（5）若 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}+\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则方阵 $\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 可逆，并写出 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$ 的表达式.

（6）若 $\mathbf{C}$ 可逆且 $\mathbf{C}^{-1}=(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{E})\mathbf{A}^T$, 则 $\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T$.

（7）若 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 均可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$ 可逆.

（8）若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^k=2\mathbf{E}$（k 为正整数），则 $(\mathbf{A}^*)^k=2^{n-1}\mathbf{E}$..

（9）若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^*$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^*)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^*$.

（10）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵，则 $(\mathbf{AB})^*=\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

（11）若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵,则 $(k\mathbf{A})^*=k^{n-1}\mathbf{A}^*$.

（12）若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $(\mathbf{A}^T)^*=(\mathbf{A}^*)^T$.

6.设矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$，证明：

（1）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{E}$；

（2） $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}-\mathbf{E}$ 都可逆；

（3） $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

7.解下列矩阵方程：

（1） $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

（2）$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$；

8.已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{AXA}+\mathbf{BXB}=\mathbf{AXB}+\mathbf{BXA}+\mathbf{E}$, 求 $\mathbf{X}$.

9.设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

（1）若 $\mathbf{B}=(\mathbf{E}+\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{A})$, 求 $(\mathbf{E}+\mathbf{B})^{-1}$;

（2）若 $\mathbf{ABA}^{-1}=\mathbf{BA}^{-1}+4\mathbf{E}$, 求 $\mathbf{B}$.

10.（1）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可逆，证明：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

（2）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可逆，证明：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^{*} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & |\mathbf{A}|\mathbf{B}^{*}\end{bmatrix}.$$

（3）证明：若上（下）三角形矩阵可逆，则其逆矩阵仍为上（下）三角形矩阵.

提高题 3-1

1. 设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3},\mathbf{A}^{*}=\mathbf{A}^{T},\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$, 求 $|\mathbf{A}|$.

2. 设 $\mathbf{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，对调 $\mathbf{A}$ 的第 1 行与第 2 行得 $\mathbf{B}$, 证明：对调 $\mathbf{A}^{*}$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\mathbf{B}^{*}$.

3. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶可逆矩阵，$|\mathbf{A}|=2$，将 $\mathbf{A}$ 的 1，2 列对调得到 $\mathbf{B}$,再将 $\mathbf{B}$ 的第 2 列的 2 倍加到第 3 列得到 $\mathbf{C}$,求 $\mathbf{C}^{*}\mathbf{A}$.

4. 设 $\mathbf{E}-\mathbf{AB}$ 可逆，证明：$\mathbf{E}-\mathbf{BA}$ 也可逆，且 $(\mathbf{E}-\mathbf{BA})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{B}(\mathbf{E}-\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}$.

5. 设 $\mathbf{a}$ 为 n 元列向量，$\mathbf{A}=\mathbf{E}-\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{a}^{T}\mathbf{a}=1$，证明：$\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 可逆，并求出 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$

的表达式。

6. 设 $\mathbf{a}$ 为 n 元列向量，$\mathbf{A}=\mathbf{E}-\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{a}^{T}\mathbf{a}=1$，证明：$\mathbf{A}$ 不可逆。

7. 设 $\mathbf{A}^2=\mathbf{B}^2=\mathbf{E},|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=0$，证明：$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 不可逆。

第 3 章　$n\times n$ 型线性方程组

本节主要研究 $n\times n$ 型线性方程组有唯一解的充要条件及其解法，线性方程组的一般理论及一般方程组的解法将在第 5 章中进行介绍.

3.2.1　$n\times n$ 型齐次线性方程组

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 一定有解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，把这个解称为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的零解.若 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则称 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的非零解.

齐次线性方程组的解分为两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解.下面给出这两种情况的判别条件。

定理 3-5　$n\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解（有非零解）的充要条件是 $|\mathbf{A}|\neq 0\ (|\mathbf{A}|=0)$.

注意　$|\mathbf{A}|\neq 0\Leftrightarrow\mathbf{A}$ 可逆，$|\mathbf{A}|=0\Leftrightarrow\mathbf{A}$ 不可逆。

证明　充分性　因为 $|\mathbf{A}|\neq 0$，所以 $\mathbf{A}$ 可逆.在 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的两边同时从左一侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$，因此 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解。

必要性　用反证法证明.

设 $|\mathbf{A}|=0$，由定理 1-2 及推论 3-3 可知，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

由 $|\mathbf{A}|=0$ 可知，$s<n$，即 $\mathbf{PAQ}$ 的最后一列一定为零向量.于是，有

$$(\mathbf{PAQ})\mathbf{e}_n=\mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{P}$ 可逆，得

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_n)=\mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{Q}$ 可逆可知，$\mathbf{Q}$ 的第 n 列 $\mathbf{Q}\mathbf{e}_n\neq\mathbf{0}$。因此，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{Q}\mathbf{e}_n$，这与 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解矛盾，所以 $|\mathbf{A}|\neq 0$.

例 3-10 k 满足什么条件时，方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+kx_3=0 \end{cases}$$

（1）只有零解？（2）有非零解？

解 设该方程组的系数阵为 $\mathbf{A}$.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第2,3列都加到第1列}} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2.$$

由定理 3-5 可得：

（1）当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时，$|\mathbf{A}|\neq0$，该方程组只有零解.

（2）当 $k=-2$ 或 $k=1$ 时，$|\mathbf{A}|=0$，该方程组有非零解.

3.2.2 $n\times n$ 型非齐次线性方程组

对于非齐次线性方程组，它的解的情况比较复杂。它可能有解，也可能无解；有解时，可能是有唯一解，也可能是有无穷多个解。在这一部分中，我们只对 $n\times n$ 型非齐次线性方程组有唯一解的充要条件及其解法进行研究。

定理 3-6 $n\times n$ 型非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解的充要条件是$|\mathbf{A}|\neq0$(即 $\mathbf{A}$ 可逆)，其解为 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

证明 充分性 因为$|\mathbf{A}|\neq0$，所以 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在.由 $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})=(\mathbf{AA}^{-1})\mathbf{b}=\mathbf{Eb}=\mathbf{b}$ 可知，$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解.

设 $\mathbf{u}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的任一解，则有 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$. 在 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 的两边同时从左一侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$ ，得 $\mathbf{u}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ，故 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的唯一解.

必要性 设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{u}$ ，即 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ ，下面用反证法证明$|\mathbf{A}|\neq0$.

假设$|\mathbf{A}|=0$,则由定理 3-5 可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解.设 $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的非零解，则 $\mathbf{Ac}=\mathbf{0}$.

由

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{c})=\mathbf{Au}+\mathbf{Ac}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$$

可知，$\mathbf{u}+\mathbf{c}$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，这与 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解矛盾.所以 $\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$.

定理 3-7【克拉默（Cramer）法则】 当 $\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$ 时，$n\times n$ 型非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解

$$x_i=\frac{\left|\mathbf{B_i}\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中，$\mathbf{B_i}$ 是把 $\mathbf{A}$ 的第 i 列换为 $\mathbf{b}$ 所得的矩阵。

证明 由定理 3-6 可知，当|**A**|≠0 时，方程组 **Ax**=**b** 有唯一解 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

设 $\mathbf{A}$ 的按列分块矩阵为 $\mathbf{A}=\left(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right)$，则 $\mathbf{B_i}=\left(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{b},\cdots,\mathbf{a}_n\right)$， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}_i$ 只有第 i 列可能不同，所以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B_i}$ 的第 i 列有相同的代数余子式向量 $\tilde{\mathbf{a}}_i$.于是，有

$$\left|\mathbf{B_i}\right|=\tilde{\mathbf{a}}_i^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{e}_i^T\mathbf{x}=\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}^*\mathbf{b}}{\left|\mathbf{A}\right|}=\frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T\mathbf{b}}{\left|\mathbf{A}\right|}=\frac{\left|\mathbf{B_i}\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

例 3-11 用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\2x_1+2x_2+3x_3=5.\\x_1+2x_2+3x_3=3\end{cases}$$

解 因为

$$\left|\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}=-1,\qquad \left|\mathbf{B}_1\right|=\begin{vmatrix}2&1&1\\5&2&3\\3&2&3\end{vmatrix}=-2,$$

$$\left|\mathbf{B}_2\right|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&5&3\\1&3&3\end{vmatrix}=1,\qquad \left|\mathbf{B}_3\right|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&5\\1&2&3\end{vmatrix}=-1,$$

所以该方程组的解为

$$x_1=\frac{\left|\mathbf{B}_1\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}=2,\ \ x_2=\frac{\left|\mathbf{B}_2\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}=-1,x_3=\frac{\left|\mathbf{B}_3\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}=1.$$

注意 解系数矩阵为可逆矩阵的线性方程组共有三种方法：初等行变换法，求逆矩阵法和利用克拉默法则,这三种方法的运算量依次增加。

习题 3-2

1. 当 k 为何值时，下列方程组有非零解?只有零解?

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+kx_3=0 \\ x_1-kx_2+2x_3=0 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} kx_1 \quad -kx_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+3kx_2 \ =0 \end{cases}$

2. 分别用初等行变换法、求逆矩阵法和克拉默法则解下面的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ \quad x_2+2x_3=1. \\ x_1-x_2+x_3=4 \end{cases}$$

3. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，证明：$|\mathbf{A}|=0 \Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$，使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$.

*3.4 应用举例

例 3-12　信息加密

逆矩阵可用来对需要传输的信息加密．　表 3.1 给出了一种编码方式.

表 3.1

字母	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	空格
代码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

为传输信息“go tomorrow”，可把对应的编码按列写成 3×4 型矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 7 & 20 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 18 & 23 \\ 0 & 13 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

如果直接发送矩阵 $\mathbf{B}$，这是没有加密的信息，容易被破译，无论军事还是商业上均不可行.为此，如果选取一个元素均为整数，且行列式为±1 的三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 作为密钥矩阵，则由

$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$ 可知，$\mathbf{A}^{-1}$ 的元素均为整数.令

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB},$$

则 C 是 3×4 型矩阵，其元素也均为整数.若发送加密后的信息构成的矩阵 $\mathbf{C}$，己方接收者只需用 $\mathbf{A}^{-1}$ 进行解密，即通过 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}C$ 就能得到所发送的信息.

例如，取

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则$\left|\mathbf{A}\right|=1$，且

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-2&1&2\end{bmatrix}.$$

现发送矩阵

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&20&15&15\\15&15&18&23\\0&13&18&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}37&63&69&61\\30&43&54&46\\22&48&51&38\end{bmatrix},$$

接收者收到矩阵$\mathbf{C}$后，用$\mathbf{A}^{-1}$解密，得

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}37&63&69&61\\30&43&54&46\\22&48&51&38\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&20&15&15\\15&15&18&23\\0&13&18&0\end{bmatrix}$$

即可获得信息“go tomorrow”.

这里所述仅是信息加密的原理，实际应用中，密钥矩阵$\mathbf{A}$的阶数可能很大，其构造也十分复杂.第二次世界大战期间，一些优秀的数学家，包括著名数学家 A.M.Turing 等都从事过对己方信息的加密和对敌方信息的破译工作.

为了构造密钥矩阵$\mathbf{A}$，我们可以从单位阵$\mathbf{E}$开始，有限次地使用整数倍的倍加变换和对调变换，即可得到理想的密钥矩阵$\mathbf{A}$