4.5 线性微分方程组

一、线性微分方程组解的结构

二、常系数齐次线性微分方程组的解法

4.5.1 线性微分方程组通解的结构

线性微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$

则

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}(x) \not\equiv \boldsymbol{0} \text{ 时, 称为非齐次线性微分方程组;} \\ \boldsymbol{f}(x) \equiv \boldsymbol{0} \text{ 时, 称为齐次线性微分方程组.} \end{cases}$$

定义. 设 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x)$ 是定义在区间 I 上的二维向量值函数，若存在**不全为 0** 的常数 k_1, k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{y}_1(x) + k_2\boldsymbol{y}_2(x) \equiv \boldsymbol{0}, \quad x \in I$$

则称 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x)$ 在 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关.**

由齐次方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \quad \text{即} \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}$$

的两个线性无关的解构成的解组，称为一个**基本解组**.

定理 (齐次线性微分方程组通解结构) 若 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x)$ 是齐次方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \quad \text{即} \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}$$

的基本解组, 则 $\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 是该方程组的通解.

定理 (非齐次线性微分方程组通解结构) 给定非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \quad \text{即} \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x)$ 是对应齐次方程组的基本解组，$\boldsymbol{y}^*(x)$ 是非齐次方程组的特解，则非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{y}(x) = \underbrace{c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x)}_{\text{齐次方程组通解}} + \underbrace{\boldsymbol{y}^*(x)}_{\text{非齐次方程组特解}}$$

4.5.2 常系数齐次线性微分方程组的解法

常系数齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \quad \text{即} \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

特征值 λ_1, λ_2.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 实根. λ_1, λ_2 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$,

方程组通解为

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 x}$$

例. 求方程组 $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$ 的通解.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. 特征方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

特征值 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5.$

$\lambda_1 = -1$ 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 5$ 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

因此方程组的通解为

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x}$, 即 $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ y_2 = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{5x} \end{cases}$

2. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. λ_1,λ_2 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$.

例. 求方程组 $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ 的通解.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. 特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$.

特征值 $\lambda_1=3i,\ \lambda_2=-3i$.

$\lambda_1=3i$ 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$\lambda_2=-3i$ 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

对应的复值解

$$\boldsymbol{y}_1^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3ix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_2^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{-3ix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

因此方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

3. $\lambda_1 = \lambda_2$, 且 $\lambda_1 = \lambda_2$ 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.

例. 求方程组 $\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$ 的通解.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 特征方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

特征值 $\lambda = 1$ (二重).

$\lambda = 1$ 对应两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此方程组的通解为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$

4. $\lambda_1=\lambda_2$，且 $\lambda_1=\lambda_2$ 只对应一个线性无关的特征向量.

例. 求方程组 $\begin{cases} y_1'=3y_1-4y_2 \\ y_2'=y_1-y_2 \end{cases}$ 的通解.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0.$

特征值 $\lambda=1$ (二重).

$\lambda=1$ 对应一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

设方程组的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2x \\ b_1+b_2x \end{pmatrix}e^x$$

代入微分方程组, 得

$$(4b_2-2a_2)x+(2a_1-a_2-4b_1)=0$$

$$(a_2-2b_2)x+(a_1-2b_1-b_2)=0$$

比较系数, 得
$$\begin{cases} 4b_2-2a_2=0 \\ 2a_1-a_2-4b_1=0 \\ a_2-2b_2=0 \\ a_1-2b_1-b_2=0 \end{cases}$$

解得两个线性无关的解
$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=0 \\ b_1=1 \\ b_2=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=2 \\ b_1=0 \\ b_2=1 \end{cases}$$

因此方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \end{pmatrix} e^x$$