第 2 章　方阵的行列式

行列式是方阵的一个重要的数值特性,在对矩阵和线性方程组等问题的研究中起着非常重要的作用.

本章学习的重点是对行列式性质的理解、使用及行列式的计算.本章主要讲述行列式的定义；行列式的性质；行列式的计算.

2.1　*n* 阶行列式的定义

行列式的概念首先是在求解 $n \times n$ 型线性方程组时提出来的.下面以 2×2 型线性方程组作为例子加以说明.

对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{2.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时，方程组(2.1)有唯一解，其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} .$$

为了比较容易地记住方程组(2.1)的解的表达式,我们引进二阶行列式的定义.

设 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{2\times2}$，把

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

叫做二阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式(也称为二阶行列式),记作 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$，规定

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

这时,方程组(2.1)的解可表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意，x_1 和 x_2 的分母都是方程组(2.1)的系数矩阵的行列式，x_1 和 x_2 的分子分别是把系数矩阵的行列式中的第 1 列和第 2 列换成常数向量所得的行列式.

现在再来记方程组(2.1)的解的表达式就比较容易了,并且这个公式可推广到一般的 $n \times n$ 型方程组,它在方程组的研究中曾发挥了很重要的作用.

为了给出 n 阶行列式的定义,我们先介绍余子阵的概念.

从方阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列所余下的 n-1 阶方阵称为 a_{ij} 的余子阵,记作 $\mathbf{A}(i,j)$.

例如,对于三阶方阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix},$$

6 的余子阵为 $\mathbf{A}(2,3)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{bmatrix}$.

下面我们来观察二阶行列式具有的特点.

若对于一阶方阵 $\mathbf{A}=\left[a_{11}\right]$,规定它的行列式为 $\det(\mathbf{A})=a_{11}$，则二阶方阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ 的行列式可表示成

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}+a_{21}(-1)^{2+1}a_{12}\\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\det(\mathbf{A}(1,1))+a_{21}(-1)^{2+1}\det(\mathbf{A}(2,1)) .\end{aligned}$$

根据二阶行列式的特点,我们按递归方式给出 n 阶行列式的定义.

定义 2-1 设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，把

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

叫做**方阵 A 的行列式**(也叫做 ***n* 阶行列式**),记作 $\det(\mathbf{A})$ 或 $\left|\mathbf{A}\right|$.规定它是按下述运算法则所表达的一个算式：

当 n=1 时， $\mathbf{A}=\left[a_{11}\right]$, $\det(\mathbf{A})=a_{11}$.

当 n>1 时，$\det(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}(-1)^{k+1}\det(\mathbf{A}(k,1))$.

我们把 a_{ij} 的余子阵 $\mathbf{A}(i,j)$ 的行列式 $\det(\mathbf{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的余子式.把 $(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}(i,j))$$

利用代数余子式的符号，我们有

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

上式称为$\det(\mathbf{A})$按第 1 列的展开式.

注意　(1)只有方阵才有行列式,行列式的运算结果是一个数.

(2)行列式的两侧是竖线,矩阵的两侧是方括号或圆括号.

例 2-1　设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$，计算$\det(\mathbf{A})$.

解　$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\ .$$

注意　三阶行列式中共有 6 项,3 项为加,3 项为减.加的 3 项是由主对角线带出的两个三角形构成的,两个三角形的底边与主对角线平行,

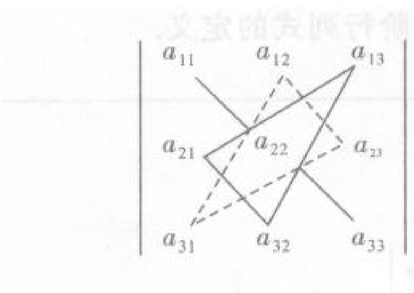

图 2.1

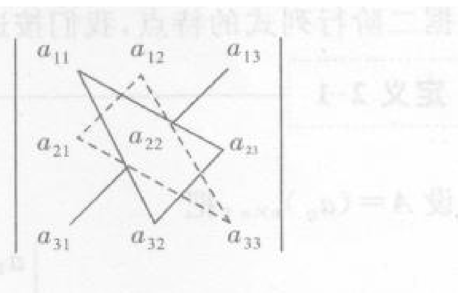

图 2.2

如图 2.1 所示;减的 3 项是由副对角线带出的两个三角形构成的,两个三角形的底边与副对角线平行,如图 2.2 所示.

习题 2-1

1. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，求 A_{32}.

2. 用行列式的定义计算下面的行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

$$(3)\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&2&1\end{vmatrix};\qquad (4)\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\1&2&-1&0\\0&1&2&-1\\0&0&1&2\end{vmatrix}.$$

2.2 行列式的性质

二阶行列式和三阶行列式都有比较简单的公式,对于四阶以上的行列式,也可以给出类似的公式,但是,当 $n\geqslant 4$ 时,项数太多,共有 $n!$项,使用不方便.直接按定义来求行列式一般也很麻烦.对于大多数行列式,要先通过行列式的性质对其进行化简,然后再进行计算.因此，我们需要研究行列式的性质.

性质 2-1 $\left|\mathbf{A}^T\right|=\mathbf{A}.$

这个性质可用数学归纳法证明,由于证明的表述较繁,不在此处给出,感兴趣的读者可参阅本节后面的附录.

注意　根据性质 2-1,行列式的行和列是可以相互转换的,所以行列式对列成立的性质对行也成立.下面我们主要对列的情况讨论行列式的性质.

性质 2-2 行列式$\left|\mathbf{A}\right|$可按其任一列或任一行展开,即

$$\left|\mathbf{A}\right|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ ,$$

$$\left|\mathbf{A}\right|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ .$$

上面两个式子分别称为行列式按第 j 列和第 i 行的展开式.

性质 2-2 的证明与性质 2-1 的证明类似,也可用数学归纳法证明(参阅本节附录).

由性质 2-2 可得：

推论 2−1　若方阵 $\mathbf{A}$ 的某列(行)的元素全为零, 则$\left|\mathbf{A}\right|=0.$

为了简捷地证明行列式的其他性质, 我们给出下面的定义和引理.

设 a_j 为 $\mathbf{A}$ 的第 j 个列向量,把向量 $\tilde{a}_j=\left[A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}\right]^T$ 称为 a_j 的**代数余子式向量**.

利用代数余子式向量, 性质 2−2 中的第一个式子可写成

$$\left|\mathbf{A}\right|=\tilde{a}_j^T a_j\,.$$

根据代数余子式及代数余子式向量的定义，可得

引理 2-1 若方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 只有第 j 列不同,则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的第 j 列的代数余子式向量相同.

性质 2-3 (行列式的线性性质)

（1） $\left|a_1,\cdots,ka_j,\cdots,a_n\right|=k\left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right|$；

（2） $\left|a_1,\cdots,a_j+b,\cdots,a_n\right|=\left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right|+\left|a_1,\cdots,b,\cdots,a_n\right|$

注　$\left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right|$ 为$\left|\mathbf{A}\right|$的按列分块形式，性质 2-3 的结论对于行的情况也成立。

证明 性质 2-3 中出现的 5 个行列式只有第 j 列不同,所以它们的第 j 列的代数余子式向量相同,都为 $\tilde{a}_j$.

（1）按第 j 列展开,得

$$\left|a_1,\cdots,ka_j,\cdots,a_n\right| = \tilde{a}_j^T(ka_j) = k(\tilde{a}_j^T a_j) = k\left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right|.$$

（2）按第 j 列展开，得

$$\begin{aligned}\left|a_1,\cdots,a_j+b,\cdots,a_n\right| &= \tilde{a}_j^T(a_j+b)\\ &= \tilde{a}_j^T a_j + \tilde{a}_j^T b\\ &= \left|a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_n\right| + \left|a_1,\cdots,b,\cdots,a_n\right|.\end{aligned}$$

注意 列式的线性性质不同于矩阵的线性运算.

例如,一般情况下，

(1) $$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 6\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(2) $$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

推论 2-2 $|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$ (n 为方阵 **A** 的阶数).

性质 2-4 若方阵 **A** 中有两列（行）相同,则 $|\mathbf{A}| = 0$.

证明 用数学归纳法证明.显然,n=2 时结论成立.
当 n≥3 时,假设结论对 n-1 阶行列式成立,并设 **A** 的 i,j 两列相同.

将 $|\mathbf{A}|$ 按第 $k(k\neq i,j)$列展开,得

$$|\mathbf{A}| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}\ .$$

由于 $A_{ik}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n-1 阶行列式,且其中都有两列相同,所以根据数学归纳法的假设可知 $A_{ik} = 0(i=1,2,\ \cdots,n)$, 故 $|\mathbf{A}| = 0$.

根据性质 2-3 和性质 2-4，可得下面的推论 2-3 和推论 2-4.

推论 2-3 若$\left|\mathbf{A}\right|$中有两列(行)成比例,则$\left|\mathbf{A}\right|=0$.

推论 2-4 若$\left|\mathbf{A}\right|$中有一列(行)是另两列(行)之和,则$\left|\mathbf{A}\right|=0$.

性质 2-5 若对方阵$\mathbf{A}$进行一次倍加列（行）变换得到$\mathbf{B}$,则$\left|\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{B}\right|$.即倍加变换不改变行列式的值.

证明 设

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$$

$$\xrightarrow{c_j+kc_i}\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j+k\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right]=\mathbf{B},$$

则根据性质 2-3(2)和推论 2-3 可得

$$\left|\mathbf{B}\right|=\left|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\right|+\left|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,k\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right|$$

$$=\left|\mathbf{A}\right|+0=\left|\mathbf{A}\right|.$$

性质 2-6 若对方阵$\mathbf{A}$进行一次对调列（行）变换得到方阵$\mathbf{B}$,则$\left|\mathbf{A}\right|=-\left|\mathbf{B}\right|$.

证明 设

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$$

$$\xrightarrow{c_i\longleftrightarrow c_j}\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right]=\mathbf{B}$$

则根据性质 2-5 和性质 2-3 可得

$$\left|\mathbf{A}\right|\overset{c_i+c_j}{=}\left|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\right|$$

$$\overset{c_j-c_i}{=}\left|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j,\cdots,-\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right|$$

$$\overset{c_i+c_j}{=}\left|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,-\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right|$$

$$\overset{c_j\div(-1)}{=}-\left|\mathbf{B}\right|.$$

性质 2-7 行列式某一列的每个元素乘以另一列对应元素的代数余子式之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j).$$

注：该结论对于行的情况也成立。

证明 设n阶方阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的按列分块矩阵分别为

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\right],$$

$$\mathbf{B}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\right].$$

由于$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$只有第j列不同,所以它们的第j列各元素的代数余子式相同.将$\left|\mathbf{B}\right|$按第j列

展开,得

$$|\mathbf{B}| = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj}.$$

又因为$|\mathbf{B}|$的 i,j 两列相同,所以

$$|\mathbf{B}| = 0,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

附录　性质 2-1 及性质 2-2 的证明

1.性质 2-1 的证明

以四阶方阵 **A** 为例,来讲述性质 2-1 的证明思想.

证明 当 n=2 时,结论显然成立.假设 n=3 时,结论成立.我们来证 n=4 时,结论也成立.

$$|\mathbf{A}^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{定义2-1}}{=} a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{归纳法假设}}{=} a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

将上式中的后 3 个三阶行列式都按第 1 列展开,然后分别把含 a_{21}, a_{31}, a_{41} 的项进行合并,得

$$|\mathbf{A}^T| = a_{11}A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\left\{a_{12}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. a_{14}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}\right\} + a_{31}(-1)^{3+1}\left\{a_{12}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \right.$$

$$a_{13}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}\Bigg\} +$$

$$a_{41}(-1)^{4+1}\Bigg\{a_{12}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} +$$

$$a_{14}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{41}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= |\mathbf{A}|$$

2.性质 2-2 的证明

证明　由行列式的定义知，只需证明

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \ (j > 1).$$

类似于性质 2-1 的证明方法,在 $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ 中，将 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 的余子式分别按第 1 列展开,然后分别把含 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}$ 的项进行合并,即可证明.

思考题 2-2

1.若对方阵 $\mathbf{A}$ 进行一次初等变换得到 $\mathbf{B}$,则 $|\mathbf{A}|$ 和 $|\mathbf{B}|$ 是什么关系?

2.设三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的按列分块矩阵为 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \mathbf{a}_3 = k\mathbf{a}_1 + l\mathbf{a}_2$, 其中 k,l 是数，则 $\det(\mathbf{A})$ 为何数?

3. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶方阵,下列结论是否正确?

(1) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$;

（2） $|-\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$;

（3）若 $|\mathbf{A}| = 0$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

4.初等矩阵的行列式 $|\mathbf{E}_{i,j}|, |\mathbf{E}_i(k)|, |\mathbf{E}_{i,j}(k)|$ 分别等于多少?

5.性质 2-2 和性质 2-7 有什么区别?

习题 2-2

1. 设三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的按列分块矩阵为 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\det(\mathbf{A})=2$, $\mathbf{B}=[2\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1,-4\mathbf{a}_3]$, 求 $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$.

2.已知 $|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=2$, 求 $|3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3|$.

3.设 $|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_1|=m$, $|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2,\mathbf{a}_3|=n$, 求 $|\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2|$.

4.证明:

(1) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) 若 $\mathbf{A}$ 是奇数阶反称矩阵,则 $|\mathbf{A}|=0$.

5. 已知 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的行列式的值为 c,求行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{vmatrix}$$

的值。

6.计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$.

提高题 2-2

1.设四阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}]$, $|\mathbf{A}|=1$, $|\mathbf{B}|=2$, 求 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$.

2.设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+4\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2+6\mathbf{a}_3]$, $|\mathbf{A}|=1$, 求 $|\mathbf{B}|$.

3.已知行列式$\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$, 求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

4. 已知四阶行列式 D 中第三列的元素依次为-1,2,0,1.

(1)如果 D 的第三列元素的余子式依次为 5,3,-7,4,求 D;

(2)如果第四列元素的余子式依次为 5,a,-7,4,求 a.

5. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&c&d&e\\4&4&4&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$, $D=4$ 求

（1） $A_{21}+A_{22}+A_{23}$；　　（2） $A_{31}+A_{32}+A_{33}$

2.3 行列式的计算

通过这一节的学习,应掌握行列式的一些常规的计算方法以及某些具有特殊结构的行列式的特殊计算方法.计算行列式时,首先要观察所给行列式结构上具有什么特点,然后利用这些特点对行列式进行化简、计算.

2.3.1 按行(列)展开法

当行列式的某些行(列)中零元素较多时,可通过按行(列)展开的方法来计算.

例 2-2 设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 是上三角形矩阵,证明:

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 用数学归纳法.当 n=2 时,结论显然成立.

假设结论对 n-1 阶上三角形矩阵成立,下面证明结论对 n 阶上三角形矩阵结论也成立。将$|\mathbf{A}|$按第 1 列展开,得

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{归纳法假设}}a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由于下三角形矩阵的转置是上三角形矩阵,所以三角形矩阵的行列式都等于其对角元的乘积.

例 2-3　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解　按第一列展开,得

$$原式=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

2.3.2　化为三角行列式

因为对于任何方阵 **A,**只用有限次倍加行变换(或有限次倍加列变换)都能将它化为上（下）三角形矩阵,而上（下）三角形矩阵的行列式等于其对角元的乘积，所以可通过初等变换将所给的行列式化成上（下）三角形行列式的形式进行计算。

例 2-4　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

解　原式 $\overset{c_1\longleftrightarrow c_2}{=}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4+r_1}{=}}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{r_3+11r_2}{\underset{r_4+r_2}{=}}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}\overset{r_3\longleftrightarrow r_4}{=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-8r_3}{=}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix}=-40.$$

2.3.3 先化简再展开

该方法的做法是:选取行列式的一行(或一列),利用倍加变换将该行(列)化为只剩下一个数不为零的情形,再按该行(列)展开.

例 2-5 计算例 2-4 中的行列式.

解 原式 $\overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4+r_1}{=}}\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1 & -5\\ -11 & 0 & 5 & -5\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\overset{\text{按第2列展开}}{=}1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & -5\\ -11 & 5 & -5\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$$\overset{c_1+c_2}{=}-\begin{vmatrix}2 & 1 & -5\\ -6 & 5 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\overset{\text{按第3行展开}}{=}-1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -5\\ -6 & -5\end{vmatrix}=-40.$$

2.3.4 范德蒙德行列式

例 2-6 n 阶方阵

$$\mathbf{V}_n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

叫做范德蒙德（Vandermonde）矩阵, $\det(\mathbf{V}_n)$ 称为范德蒙德行列式.证明:

$$\det(\mathbf{V}_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i),$$

其中,“$\prod$”为连乘符号.

证明 用数学归纳法.

当 n=2 时,

$$\det(\mathbf{V}_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le i<j\le 2}(x_j-x_i),$$

结论成立.

假设结论对 n-1 阶范德蒙德行列式成立,下面对 n 阶的情况加以证明.

从 $\det(\mathbf{V}_n)$ 的最后一行开始,每行减去上一行的 x_1 倍,得

$$\det(\mathbf{V}_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第一列展开}}{=}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{提公因式}}{=}\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{归纳法假设}}{=}\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

2.3.5 各行(列)元素之和相等的行列式

例 2-7 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

注：该行列式的对角元都为 a，非对角元都为 b。

解 原式 $\overset{\text{第2至第}n\text{列都加到第1列}}{=}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{第2至第}n\text{行都减第1行}}{=}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

2.3.6 箭形行列式

例 2-8 计算箭形行列式

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, a_i\ne 0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

解 将第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍都加到第 1 列，得

$$原式=\begin{vmatrix} x-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(x-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}).$$

例 2-7 和例 2-8 的主要思想都是将行列式化简成上三角形式,但使用的方法不同.

*2.3.7 递推法及三对角行列式

例 2-9 计算三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 将该行列式按第 1 行展开，得

$$D_n=5D_{n-1}-2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=5D_{n-1}-6D_{n-2},$$

即得递推关系式

$$D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}.$$

进一步，可得

$$D_n-2D_{n-1}=3(D_{n-1}-2D_{n-2})$$

$$=\cdots=3^{n-2}(D_2-2D_1)=3^n,$$

即

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n.$$

由于转置时，行列式的值不变，把上式中的 2 和 3 的位置互换又可得

$$D_n - 3D_{n-1} = 2^n.$$

解上面两个式子联立后所得的方程组，得

$$D_n = 3^n - 2^n.$$

按例 2-9 的做法可证明：$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)x_1^n & (x_1 = x_2) \\ \dfrac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$，

其中，x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的根.

思考题 2-3

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{2r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 错在什么地方？

2. 对行列式进行初等变换和对矩阵进行初等变换有什么区别?

3. 将 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ 整理成 $D_n - kD_{n-1} = l(D_{n-1} - kD_{n-2})$ 的形式时，怎样确定 k 和 l？

习题　2-3

1. 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} d & f & g & 0 & k \\ 0 & c & 0 & 0 & l \\ 0 & h & e & 0 & x \\ z & u & v & a & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 & 0 \\ 0 & d_1 & b_1 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$；　　(8) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　(10) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列n阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+s & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+s & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+s \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$；　　(5) $\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_{\mathrm{n}}+1 \end{vmatrix}$.

3. 证明：

（1）若 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ $(n>1)$ 的对角元都是 a,非对角元除 $a_{1n}=a_{n1}=1$ 外都是 0,则

$$\det(\mathbf{A})=a^{n-2}(a^2-1);$$

(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n;$

（3）$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{x_k-a})\prod_{k=1}^{n}(x_k-a);$

（4）$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}k!.$

2.4 分块三角行列式及矩阵乘积的行列式

定理 2-1 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵， $\mathbf{C}$ 为 $m\times n$ 型矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

证明　由定理 1-1 可知, 只用倍加行变换可把任一方阵化为上三角矩阵, 因而可设

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{倍加行变换}}\mathbf{S}\ \text{（上三角矩阵）},$$

$$\mathbf{B}\xrightarrow{\text{倍加行变换}}\mathbf{T}\ \text{（上三角矩阵）}.$$

由于倍加变换不改变行列式的值,所以

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{S}| = s_{11}s_{22}\cdots s_{mm},$$

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{T}| = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}\text{。}$$

其中, $s_{ii}, t_{jj}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 分别为$\mathbf{S},\mathbf{T}$的对角元.

对分块上三角矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$作类同于上面的倍加行变换也可将它化为上三角矩阵, 设对$\mathbf{C}$作与$\mathbf{A}$同样的倍加行变换后化为H, 则有

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{作类同于上面的倍加行变换}} \begin{bmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{H}\\ \mathbf{O} & \mathbf{T}\end{bmatrix} \text{（上三角矩阵）.}$$

于是, 有

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{H}\\ \mathbf{O} & \mathbf{T}\end{vmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{mm}t_{11}t_{22}\cdots t_{nn},$$

所以

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

由行列式的性质 2-1 和定理 2-1 可知

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

定理 2-2 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是 n 阶方阵,则

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

证明 由定理 1-1 可知,只用倍加行变换可把 $\mathbf{A}$ 化为上三角矩阵,只用倍加列变换也可把 $\mathbf{B}$ 化为上三角矩阵,因此存在倍加矩阵 $\mathbf{P}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 和 $\mathbf{Q}_j(j=1,2,\cdots,l)$ 以及上三角矩阵$\mathbf{S}=\left[s_{ij}\right]_{n\times n}$ 和 $\mathbf{T}=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}$, 使得

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{S}, \qquad \mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{T}.$$

由性质 2-5(倍加变换不改变行列式的值)及例 2(上三角行列式等于其对角元的乘积)可得

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{S}| = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}, \qquad |\mathbf{B}| = |\mathbf{T}| = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}..$$

其中, $s_{ii}, t_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为$\mathbf{S},\mathbf{T}$的对角元.

由性质 2-5 及例 1-5(上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵),得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_l| \\
&= |(\mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_l)| \\
&= |\mathbf{ST}| = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}t_{11}t_{22}\cdots t_{nn},
\end{aligned}
$$

所以

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

推论 2-5 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, k 为正整数,则

$$|\mathbf{A}^k| = |\mathbf{A}|^k.$$

思考题 2-4

1.当 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同阶方阵时，$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$ 是否正确?为什么?

2. 能否构造出使 $|\mathbf{AB}| \neq |\mathbf{BA}|$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$？

3. 能否构造出 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$ 的方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$？从中会发现什么?

习题 2-4

1.计算

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$；

（3） $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵， $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为 $m \times n$ 型矩阵和 $n \times m$ 型矩阵, $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3,$ 试计算 $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$.

提高题 2-4

1. $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别为 m 阶、n 阶和 k 阶方阵, $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3, |\mathbf{C}| = 4$ ，试计算

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{vmatrix}.$$

2.设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\mathbf{AA}^T = \mathbf{E}, |\mathbf{A}| < 0,$ 证明：$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0.$

3. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A} - \mathbf{B}|.$$