一、选择题　每小题5分，共 50分.

Ⓐ卷： 1 A；　2 B；　3 A；　4 C；　5 B；　6 D；　7 B；　8 C；　9 A；　10 B.

Ⓑ卷： 1 D；　2 D；　3 A；　4 B；　5 C；　6 B；　7 B；　8 C；　9 C；　10 D.

Ⓐ二、（微积分）（10 分）求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}V$，其中 $\Omega: x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$.

解 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\,\mathrm{d}V$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \qquad （3分）$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho \qquad （7分）$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\cdot\frac{32}{5}\cdot\left(\frac{-\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{15}\pi. \qquad （10分）$$

Ⓐ二、（高数）（10 分）设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$，直线 $L_2:\begin{cases}x=3+2t\\ y=1+t\\ z=2+t\end{cases}$.

(1) 证明 L_1 与 L_2 平行.　(2) 求 L_1 与 L_2 确定的平面方程.

(1)证 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,1)$，取点 $M_1(1,2,3)\in L_1$； L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(2,1,1)$，取点 $M_2(3,1,2)\in L_2$. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,-1,-1)$ 与 $\boldsymbol{s}_1$ 不平行，所以 L_1 与 L_2 平行.　（4分）

(2)所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=(0,4,-4)$，　（7分）

平面方程 $4(y-2)-4(z-3)=0$，即 $y-z+1=0$.　（10分）

Ⓐ二、（工数）（10 分）求微分方程 $y''+y'-2y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 特征方程 $r^2+r-2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=-2$.

对应的齐次方程的通解 $Y(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}$.　（4分）

设原方程的特解 $y^*=Ax\mathrm{e}^x$，代入原方程，得　（7分）

$A(x+2)\mathrm{e}^x+A(x+1)\mathrm{e}^x-2Ax\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$，得 $3A=1$，即 $A=\dfrac{1}{3}$，$y^*=\dfrac{1}{3}x\mathrm{e}^x$.　（9分）

原方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{3}x\mathrm{e}^x$.（10 分）

Ⓐ三、（10 分）通过 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u\\ y=\mathrm{e}^v\end{cases}$，变换方程 $2x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解 $u=\ln x, v=\ln y$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{y}$；（2 分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{1}{xy}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{y^2}$；（8 分）

$$2x^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{xy}\right)+y^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}\right)=0,$$

$$2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$（10 分）

即 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$.

Ⓐ四、（10 分）求曲线积分 $\int_L f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\big(f(x)\cos y+\pi x\big)\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，L 是圆周线 $(x-1)^2+(y-\pi)^2=1+\pi^2$ 上从点 $A(2,2\pi)$ 沿逆时针方向到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f'(x)\cos y+\pi,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=f'(x)\cos y$.

<u>方法 1</u>　取从 $O(0,0)$ 到 $A(2,2\pi)$ 的有向线段 $\overline{OA}: y=\pi x\ (0\le x\le 2)$，（2 分）

由格林公式，$\displaystyle\oint_{L+\overline{OA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\big(f(x)\cos y+\pi x\big)\mathrm{d}y=\iint_D \pi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}\left(1+\pi^2\right)$.（5 分）

又 $\displaystyle\int_{\overline{OA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\big(f(x)\cos y+\pi x\big)\mathrm{d}y$

$\displaystyle=\int_0^2\big(f'(x)\sin\pi x+\pi\cdot\big(f(x)\cos\pi x+\pi x\big)\big)\mathrm{d}x$（8 分）

$\displaystyle=\left(f(x)\sin\pi x+\frac{\pi^2}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2=2\pi^2$（9 分）

所以，原积分 $=\dfrac{\pi^2}{2}\left(1+\pi^2\right)-2\pi^2=\dfrac{1}{2}\pi^4-\dfrac{3}{2}\pi^2$.（10 分）

方法 2　取点 $B(2,0)$，由格林公式，

$$\oint_{L+\overline{OB}+\overline{BA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=\iint_D \pi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\pi^2\right)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\right)=\frac{\pi^2}{2}\left(5+\pi^2\right),$$（5 分）

又 $\displaystyle\int_{\overline{OB}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=0$，（7 分）

$$\int_{\overline{BA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left(f(2)\cos y+2\pi\right)\mathrm{d}y=4\pi^2,$$（9 分）

所以，原积分 $=\dfrac{\pi^2}{2}\left(5+\pi^2\right)-4\pi^2=\dfrac{1}{2}\pi^4-\dfrac{3}{2}\pi^2$.（10 分）

Ⓐ五、（10 分）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+2}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域、和函数 $S(x)$.

解　收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，且 $x=\pm1$ 时级数发散，所以收敛域为 $(-1,1)$.（3 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+2}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+1\right)x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

记 $\widetilde{S}_1(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+1\right)x^{n+1}$，$\widetilde{S}_2(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

$$\widetilde{S}_1(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+1\right)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'=x\left(\frac{1}{\left(1-x\right)^2}-1\right).$$（6 分）

$$\widetilde{S}_2'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1,$$

$$\widetilde{S}_2(x)=\widetilde{S}_2(0)+\int_0^x\widetilde{S}_2'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}-1\right)\mathrm{d}t=-\ln(1-x)-x.$$（9 分）

$$S(x)=\frac{x}{\left(1-x\right)^2}-\ln(1-x)-2x=\frac{-x+4x^2-2x^3}{\left(1-x\right)^2}-\ln(1-x),\ x\in(-1,1)..$$（10 分）

Ⓐ六、（10 分）求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=x$ 所截下的有限部分，取下侧.

解 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=x \end{cases}$，消去 x，得 Σ 在 yOz 面的投影域 $D_{yz}: y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=+\iint\limits_{D_{yz}}\left(z-y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{（3 分）}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\left(r\sin\theta-r^2\cos^2\theta\right)r\,\mathrm{d}r \qquad \text{（6 分）}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin^4\theta-\frac{1}{4}\sin^4\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{（8 分）}$$

$$=\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{7}{64}\pi. \qquad \text{（10 分）}$$

方法 2（高斯公式）取平面 $z=x$ 被所截下曲面 $z=x^2+y^2$ 的有限部分 S，取上侧.

$$\oiint\limits_{\Sigma+S} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{V}2x\,\mathrm{d}V \qquad \text{（3 分）}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{x}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}2x\left(x-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r\cos\theta\left(r\cos\theta-r^2\right)r\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos^6\theta-\frac{1}{5}\cos^6\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{32}\pi. \qquad \text{（6分）}$$

$$\iint\limits_{S} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_{D_{yz}}z^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r^2\sin^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{5}{64}\pi. \qquad \text{（9 分）}$$

原积分 $=\dfrac{1}{32}\pi+\dfrac{5}{64}\pi=\dfrac{7}{64}\pi.$ （10 分）

B 卷第二题　同　A 卷第三题
B 卷第三题　同　A 卷第二题
B 卷第四题　同　A 卷第四题
B 卷第五题　同　A 卷第六题
B 卷第六题　同　A 卷第五题