5.3 矩阵的秩在向量组中的应用

5.3.1 判断向量组的线性相关性

以所给向量组为列构造矩阵 $\mathbf{A}$，根据三秩相等定理，求出 $\mathbf{A}$ 的秩即可知该向量组的秩，从而可判断该向量组的线性相关性.

在例 5-5 中我们通过矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩讨论了它的行向量组和列向量组的线性相关性，下面我们再讲几个例子.

例 5-6 证明：$m>n$ 时，n 元列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 一定线性相关.

证明 令 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right]$，则 $\mathbf{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵.由

$$r(\mathbf{A})\le n<m$$

可知，$\mathbf{A}$ 的列秩<m，所以 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性相关.

例 5-7 证明：$r(\mathbf{R}^{\mathbf{n}})=n$.

证明 因为 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 中的向量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 线性无关，由例 5-6 可知 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 中任何 n+1 个向量都是线性相关的，所以 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 中所含线性无关向量的最大个数为 n,故 $r(\mathbf{R}^{\mathbf{n}})=n$.

例 5-8 设向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关，证明：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ 也线性无关.

证明 因为初等变换不改变矩阵的秩，所以

$$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)\overset{c_2-c_1}{=}r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2\ ,$$

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ 线性无关.

注意 很多关于线性相关性的证明题可利用秩来证明.

5.3.2 求向量组的极大无关组

根据定理 5-8 和推论 5-1 可知，若用初等行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化成矩阵 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组是一一对应的，并且它们的对应列向量满足相同的线性表达式.因此，我们可以用初等行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯矩阵 $\mathbf{B}$，通过 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组来找到 $\mathbf{A}$ 的列向量组的极大无关组，通过 $\mathbf{B}$ 中的列向量所满足的表达式来求出 $\mathbf{A}$ 中的列向量所满足的表达式.

例 5-9 求向量组 $\mathbf{a}_1=\left[1,0,1,-1\right]^T,\mathbf{a}_2=\left[1,-2,1,1\right]^T,\mathbf{a}_3=\left[1,2,1,-3\right]^T$,
$\mathbf{a}_4=\left[0,1,1,3\right]^T,\mathbf{a}_5=\left[2,-4,0,-6\right]^T$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解 以所给向量组为列构造矩阵 $\mathbf{A}$,并用初等行变换将 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯矩阵 $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5\right]$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\1&1&1&1&0\\-1&1&-3&3&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&2&-2&3&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&4&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-4r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{B},$$

$$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=3,$$

所以所给向量组的秩为 3.

$\mathbf{B}$ 中每个非零行的第一个非零元素所在的列构成的子阵为

$$\left[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4\right]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

它也是行阶梯矩阵，秩为 3，所以这三个列向量线性无关.由 $r(\mathbf{B})$=3 可知，这三个列向量构成 $\mathbf{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，于是, $\mathbf{A}$ 中对应的列向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 为所给向量组的一个极大无关组.

为了将 $\mathbf{a}_3$ 和 $\mathbf{a}_5$ 用该极大无关组线性表示，需进一步用初等行变换将 $\mathbf{B}$ 化为行最简形

$$\mathbf{B}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&0&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

由于 $\mathbf{c}_3=2\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_5=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2-2\mathbf{c}_4$，所以根据推论 5-1 的(2)可得

$$\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_4\quad.$$

注意　(1)极大无关组一般不唯一，在例 5-9 中还可求出其它组合形式的极大无关组.

（2）求一个矩阵的列向量组的极大无关组并将其它向量用极大无关组线性表示时，不要做列变换.

5.3.3 等价向量组

定义 5-8 若向量组Ⅰ: $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 中的每个向量都能由向量组Ⅱ： $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示，则称向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示.

若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ能够互相线性表示，则称这两个向量组等价.

注意 (1)向量组等价与矩阵等价的含义不同.

（2）一个向量组与其极大无关组是等价的.

(3)一个向量组的两个极大无关组是等价的.

设向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示，并设表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m1}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_2 = p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m2}\mathbf{a}_m \\ \qquad\qquad\vdots \\ \mathbf{b}_n = p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{mn}\mathbf{a}_m \end{cases}, \tag{5.4}$$

上式可写成

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n] = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}.$$

令 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n], \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m], \mathbf{P} = \left[p_{ij} \right]_{m\times n}$, 则式(5.4)可写成矩阵形式：

$\mathbf{B} = \mathbf{AP}$.注意， $\mathbf{P}$ 为式(5.4)中系数矩阵的转置并且 $\mathbf{P}$ 在 $\mathbf{A}$ 的右侧.

由上面的讨论可得定理 5-10.

定理 5-10 向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$. 其中， $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$.

根据定理 5-10 及性质 5-6 可得：.

定理 5-11 若向量组 I 能由向量组 II 线性表示，则 $r(\mathrm{I})\leq r(\mathrm{II})$.

推论 5-3 若向量组 I 与向量组 II 等价，则 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

例 5-10 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为 n 元向量组，$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ ，证明：向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关.

证法 1 设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$, 则已知条件可写成矩阵形式 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$，其中，

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $|\mathbf{P}| = 2$ 知， $\mathbf{P}$ 可逆，所以

$$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})=r(\mathbf{A}).$$

再由三秩相等定理知，$\mathbf{B}$ 的列秩$=\mathbf{A}$ 的列秩，所以 $\mathbf{B}$ 的列向量组和 $\mathbf{A}$ 的列向量组的线性相关性相同，结论成立.

注意　在例 5-10 中，若 $|\mathbf{P}|=0$，则 $r(\mathbf{P})<3$，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})\le r(\mathbf{P})<3,\ \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 一定线性相关.

证法 2　由已知条件可求得

$$\mathbf{a}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3),\mathbf{a}_2=\frac{1}{2}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_3),\mathbf{a}_3=\frac{1}{2}(-\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3).$$

向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 与向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 等价，它们的秩相等，线性相关性相同，所以结论成立.

定理 5-12　（极大无关组的等价定义）若向量组 $\mathbf{V}$ 中有 r 个向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性无关，并且 $\mathbf{V}$ 中的任一向量都可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性表示，则 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是向量组 V 的一个极大无关组.

证明　设 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$ 是向量组 $\mathbf{V}$ 中的任意 r+1 个向量，则它们可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性表示.由定理 5-11 可知，

$$r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1})\le r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r)=r<r+1,$$

故 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$ 线性相关.

可见，$\mathbf{V}$ 中任意 r+1 个向量都线性相关，又因为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性无关，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 为向量组 $\mathbf{V}$ 的一个极大无关组.

* **定理 5-13**　向量组Ⅰ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由向量组Ⅱ:$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示的充要条件是 $r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)=r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$

证明 必要性 显然 $r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)\ge r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$

另一方面，由已知条件可知，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\ \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示，由定理 5-11 可得

$$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)\le r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$$

综合上面的讨论可知必要性正确.

充分性　设 $r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)=r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right)=r,$ 并设 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 的一个极大无关组，则它也是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 的一个极大无

关组.故$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$线性表示，从而能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示.

*推论 5-4　向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$与向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$等价的充要条件是

$$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)=r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n).$$

思考题 5-3

1.若向量组 I 能由向量组 II 线性表示，则向量组 II 是否能由向量组 I 线性表示?

2.若向量组 I 能由向量组 II 线性表示，向量组 II 能由向量组 III 线性表示，则向量组 I 是否能由向量组 III 线性表示？

3.等价矩阵的列向量组是否等价？等价的列向量组所构成的矩阵是否等价？

4.秩相等的向量组是否等价?

5.设向量组Ⅰ: $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$和Ⅱ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$都是 n 元列向量组，且向量组Ⅰ线性无关，则向量组Ⅱ线性无关的充要条件是（　　）.

（A）　向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示

（B）　向量组Ⅱ可由向量组Ⅰ线性表示

（C）　向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价

（D）　矩阵($\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$)与矩阵($\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$)等价.

6 若向量组Ⅰ与Ⅱ等价，则（　　）.

（A）　当Ⅰ线性无关时，Ⅱ也线性无关

（B）　当Ⅰ线性相关时，Ⅱ也线性相关

（C）　Ⅰ与Ⅱ的极大无关组相同

（D）　Ⅰ与Ⅱ的极大无关组等价

7. 设向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组(II)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则(　　　)

(A)　$r<s$时向量组(II)线性相关；　　(B)　$r>s$时向量组(II)线性相关；

(C)　$r<s$时向量组(I)线性相关；　　(D)　$r>s$时向量组(I)线性相关.

8.设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$线性无关，则下列向量组线性无关的是（　　）.

A. $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4$，$\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$；

B. $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$，$\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1$；

C. $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4$，$\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$；

D. $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4$，$\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_1$.

习题 5-3

1.判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\mathbf{a}_1=[1,3,1]^T,\mathbf{a}_2=[-1,1,3]^T,\mathbf{a}_3=[2,0,4]^T,\mathbf{a}_4=[-1,2,4]^T$；

（2）$\mathbf{b}_1=[1,0,2,3]^T,\mathbf{b}_2=[-1,2,-1,1]^T,\mathbf{b}_3=[3,-4,4,1]^T$.

2.求下列向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

（1）$\mathbf{a}_1=[1,0,1,-1]^T,\mathbf{a}_2=[1,-2,1,1]^T,\mathbf{a}_3=[3,-2,3,-1]^T,\mathbf{a}_4=[0,2,1,3]^T$，

$\mathbf{a}_5=[1,0,2,4]^T$；

（2）$\mathbf{a}_1=[1,-1,0,1]^T,\mathbf{a}_2=[2,1,3,0]^T,\mathbf{a}_3=[0,3,3,-2]^T,\mathbf{a}_4=[3,-3,2,2]^T$；

(3) $\mathbf{a}_1^T=[1,-2,0,2],\mathbf{a}_2^T=[1,-1,-1,2],\mathbf{a}_3^T=[4,-5,-3,8],\mathbf{a}_4^T=[0,0,1,1]$.

3.设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\in\mathbf{R}^\mathbf{n}$,证明：向量组 $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关。

4.设向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关，当 k 为何值时，向量组 $\mathbf{b}_1=k\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1+k\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ 线性相关？

5. 设 $m\geqslant 2$，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性无关， $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\cdots,$ $\mathbf{b}_{m-1}=\mathbf{a}_{m-1}+\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_m=\mathbf{a}_m+\mathbf{a}_1$，试讨论向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 的线性相关性。

6.设线性无关的向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示，证明： $m\leqslant n$.

7.证明：$\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 中的向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 的极大无关组的充要条件是 $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 中的任意向量 $\mathbf{a}$ 都能由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示.

8. 已知向量组Ⅰ：$\mathbf{a}_1=[0,1,2,3]^T,\mathbf{a}_2=[3,0,1,2]^T,\mathbf{a}_3=[2,3,0,1]^T$ 和向量组Ⅱ：$\mathbf{b}_1=[2,1,1,2]^T,\mathbf{b}_2=[0,-2,1,1]^T,\mathbf{b}_3=[4,4,1,3]^T$,证明：向量组Ⅱ能由向量组Ⅰ线性表示，但向量组Ⅰ不能由向量组Ⅱ线性表示.

9. 已知向量组Ⅰ：$\mathbf{a}_1=[1,0,2]^T,\mathbf{a}_2=[1,-1,1]^T,\mathbf{a}_3=[1,-1,k+2]^T$ 和向量组Ⅱ：$\mathbf{b}_1=[1,1,3]^T,\mathbf{b}_2=[2,1,k+6]^T,\mathbf{b}_3=[2,1,4]^T$，问 k 为何值时，向量组Ⅰ与Ⅱ等价？

*5.4 应用举例

例 5-11 调味品选购问题

某调料有限公司用 7 种成分来制造多种调味品.表 5.1 列出了 6 种调味品 A、B、C、D、E、F 每包所需各种成分的质量（以克为单位）.

表 5.1

成分	质量/克					
	A	B	C	d	E	F
辣椒	60	15	45	75	90	90
姜	40	40	0	80	10	120
胡椒	20	20	0	40	20	60
大蒜	20	20	0	40	10	60
盐	10	10	0	20	20	30
味精	5	5	0	20	10	15
香油	10	10	0	20	20	30

一位顾客不需购买全部 6 种调味品，他可以只购买其中的一部分并用它们配制出其余几种调味品.为了能配制出其余几种调味品，这位顾客必须购买的最少的调味品的种类是多少？并写出所需最少的调味品的集合.

解 若分别记 6 种调味品各自的成分列向量为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_6$，则本题就是要找出该向量组的一个极大无关组.记 $\mathbf{M}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_6\right]$，用初等行变换将 $\mathbf{M}$ 化为行最简形，得

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 60 & 15 & 45 & 75 & 90 & 90 \\ 40 & 40 & 0 & 80 & 10 & 120 \\ 20 & 20 & 0 & 40 & 20 & 60 \\ 20 & 20 & 0 & 40 & 10 & 60 \\ 10 & 10 & 0 & 20 & 20 & 30 \\ 5 & 5 & 0 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 0 & 20 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因而，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_6$ 的秩为 4，且极大无关组有 6 个：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5;\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5;$

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6;\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5;\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6;\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6$. 考虑到该问题的实际意义，只有当其余两个向量在由该极大无关组线性表示时的系数均非负，才切实可行.

由于取 $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5$ 为极大无关组时，有

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_6=3\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,$$

所以可以选 B、C、D、E 四种调味品作为最少调味品的集合.

例 5-12 求不定积分 $I=\int\frac{k\cos x+l\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$（其中，$a^2+b^2\neq 0$).

解 我们可先求出两种特殊情况下 I 的值.

当 $(k,l)=(a,b)$ 时，

$$I=I_1=x+C_1,$$

其中，C_1 为积分常数.

当 $(k,l)=(b,-a)$ 时，

$$I=I_2=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2,$$

其中，C_2 为积分常数.

对于其他情况，可利用向量组的线性相关性和这两种特殊情况的结论来加以计算.

由 $a^2+b^2\neq 0$ 可知，向量 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}b\\-a\end{bmatrix}$ 线性无关，它们构成 $\mathbf{R}^2$ 的一个极大无关组.设

$$\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}=m_1\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+m_2\begin{bmatrix}b\\-a\end{bmatrix},$$

解得

$$m_1=\frac{ka+lb}{a^2+b^2},\quad m_2=\frac{kb-la}{a^2+b^2}.$$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{(m_1a+m_2b)\cos x+(m_1b-m_2a)\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x\\&=m_1\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x+m_2\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x\\&=m_1I_1+m_2I_2\\&=\frac{ka+lb}{a^2+b^2}x+\frac{kb-la}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+C\end{aligned}$$

其中，C 为积分常数.