7.5 方向导数与梯度

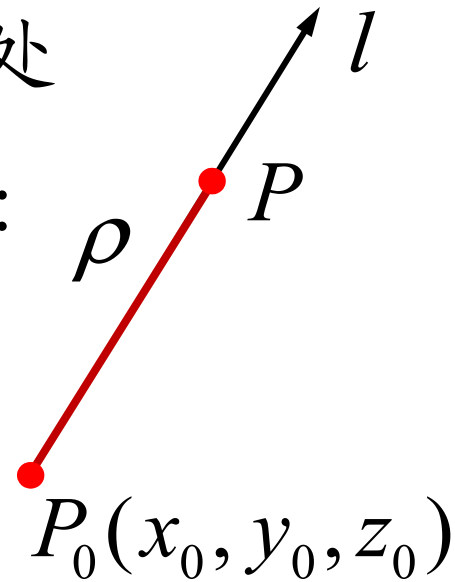
一、方向导数

二、多元函数的梯度

三、数量场和向量场

7.5.1 方向导数

定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ (方向角为 α,β,γ) 存在下列极限:



$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

记作 $=\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$

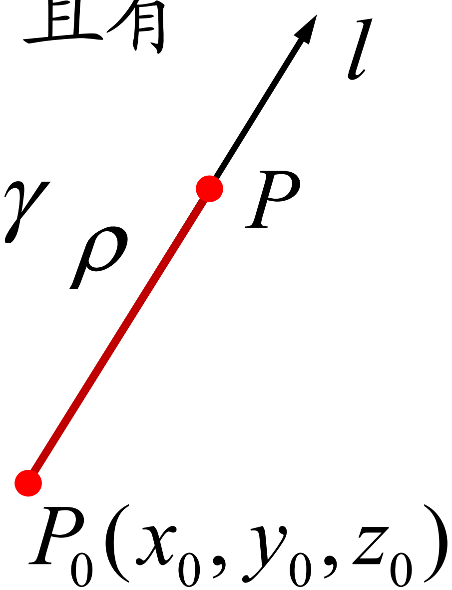
$$\left(\begin{array}{c}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\,,\\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta\,,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

则称 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 为函数在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**.

定理. 若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微，则函数在该点沿**任意方向 $\boldsymbol{l}$** 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.



证明: 由函数 $f(x, y, z)$ 在点 P_0 可微，得

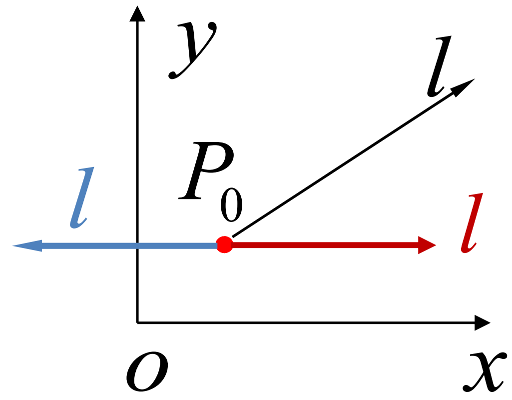
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$$

$$= \rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right) + o(\rho)$$

故 $$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

对于可微的二元函数$f(x,y)$，在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向$\boldsymbol{l}$

（方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$）的方向导数为



$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$$=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta$$

$$\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta\right)$$

特别： 若 $f(x,y)$ 在点 P_0 存在关于 x 的偏导数

- 当 $\boldsymbol{l}$ **与** $\boldsymbol{x}$ **轴同向** $(\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2})$时，有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 $\boldsymbol{l}$ **与** $\boldsymbol{x}$ **轴反向** $(\alpha=\pi,\ \beta=\frac{\pi}{2})$时，有 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

即使函数在某点沿任何方向的方向导数都存在，也不能保证函数在该点的偏导数存在. (同时也不能保证函数在该点连续.)

例如， $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 沿任何方向的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\rho}=1.$$

但函数在点 (0, 0) 处的两个偏导数都不存在.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

例. 求函数 $u = x^2yz$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

解: 向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0} = \left.\left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

7.5.2 多元函数的梯度

方向导数公式 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma$

令向量 $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \cdot \boldsymbol{e}_l \qquad (\,|\boldsymbol{e}_l| = 1\,)$$

当 $\boldsymbol{e}_l$ 与向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 的方向一致时，方向导数取最大值：$\|(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))\|$

这说明向量

$$(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \begin{cases} \text{方向：} f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模：} f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$$

定义. 向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在点 P_0 处的**梯度**(gradient)，记作 $\operatorname{grad} f(P_0)$ 或 $\nabla f(P_0)$，

即
$$\operatorname{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$$
$$= f_x(P_0)\boldsymbol{i} + f_y(P_0)\boldsymbol{j} + f_z(P_0)\boldsymbol{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 的梯度.

说明： 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

例. 函数 $u=x^2+2xy^2-3z^2$ 在点 $P_0(2,-1,-1)$ 处沿什么方向的方向导数取得最大值和最小值? 最大值和最小值为多少?

解: 函数 $u=x^2+2xy^2-3z^2$ 在点 $P_0(2,-1,-1)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} u\,|_{P_0}=(2x+2y^2,4xy,-6z)\Big|_{P_0}=(6,-8,6),$$

故 u 在点 P_0 处沿梯度方向 $(6,-8,6)$ 的方向导数取得最大值，最大值为 $\left\|\operatorname{grad} u\,|_{P_0}\right\|=2\sqrt{34}.$

u 在点 P_0 处沿负梯度方向 $(-6,8,-6)$的方向导数取得最小值，最小值为 $-\left\|\operatorname{grad} u\,|_{P_0}\right\|=-2\sqrt{34}.$

7.5.3 数量场和向量场

函数 ⟶ 场 (物理量的分布)

- **数量场** 如: 温度场, 电位场等
- **向量场** 如: 力场, 速度场等

可微函数 $f\,(P)$ (势) ⟶ 梯度场 $\mathrm{grad}\, f\,(P)$ (有势场) (向量场)

注意: 向量场不一定都是梯度场.

内容小结

1. 方向导数

- 可微函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ (方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$) 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma$$

- 可微函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ (方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$) 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0))$$

3. 关系

- 可微 $\begin{matrix}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{matrix}$ 方向导数存在 $\begin{matrix}\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{matrix}$ 偏导数存在

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot \boldsymbol{e}_l$ 梯度在 $\boldsymbol{l}$ 方向上的投影.