第7章 向量空间及向量的正交性

7.1 向量空间

大连理工大学

7.1.1 向量空间的概念

定义7-1 设V是n元向量的集合，如果

V非空，

并且对于向量的线性运算封闭

(即对任意$\boldsymbol{v}_1 \in V, \boldsymbol{v}_2 \in V, k \in \mathrm{R}$，都有$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V, k\boldsymbol{v}_1 \in V$)

则称V是向量空间.

只含有零向量的集合$V = \{\mathbf{0}\}$是一个向量空间.

例7-1 所有n元实向量的集合R^n是一个向量空间.

例7-2 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的所有解向量构成的集合S是一个向量空间. 把它叫做这个齐次线性方程组的解空间.

证明 因为齐次线性方程组一定有解，所以S非空。

$$\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in S,\ k \in R \Longrightarrow \boldsymbol{Av}_1 = 0, \boldsymbol{Av}_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0,\ \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{v}_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in S,\ k\boldsymbol{v}_1 \in S$$

这说明S关于向量的线性运算封闭，

所以S是向量空间.

例7-3 若V是向量空间，则V一定含有零向量.

证明 因为V是向量空间，所以V非空。

设$\boldsymbol{v} \in V$，根据V关于向量的线性运算封闭可得

$$\mathbf{0}=0 \cdot \boldsymbol{v} \in V$$

所以V含有零向量。

注意 （1）含有零向量是V为向量空间的必要条件.

（2）由于非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解集不含零向量，所以$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解集不是向量空间.

例7-4 集合$V=\left\{\boldsymbol{v}=(x,y)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x,y\in R\text{且}xy=0\right\}$不是向量空间.

证明 因为$\boldsymbol{v}_1=(1,0)^T\in V$，$\boldsymbol{v}_2=(0,1)^T\in V$,

但是$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=(1,1)^T\notin V$.

这说明关于加法不封闭，所以V不是向量空间.

例7-5 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是m个已知的 n 元向量，则集合

$$V=\left\{\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{a}_j \,\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_m\in R\right\}$$ 是一个向量空间.

叫做**由向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间.**

简记为$V=\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$

证明 显然V 非空

设$\boldsymbol{v}_1=\sum_{j=1}^{m}x_j^{(1)}\boldsymbol{a}_j\in V$，$\boldsymbol{v}_2=\sum_{j=1}^{m}x_j^{(2)}\boldsymbol{a}_j\in V$，$k\in R$

则有 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^{(1)}+x_j^{(2)}\right)\boldsymbol{a}_j\in V$, $k\boldsymbol{v}_1=\sum_{j=1}^{m}kx_j^{(1)}\boldsymbol{a}_j\in V$

这说明关于线性运算封闭，所以V 是向量空间.

定义7-2 设V_1和V_2是两个向量空间.

(1) 若$V_1 \subseteq V_2$，则称V_1是V_2的子空间.

(2)若$V_1 \subseteq V_2$且$V_2 \subseteq V_1$，则称这两个向量空间相等，记作$V_1=V_2$.

例 $V=\left\{v=(x,y,z)^T \mid x,y,z\in\mathrm{R} \text{ 且 } x=y\right\}$是一个向量空间.

证: 显然V非空.

设$\boldsymbol{v}_1=(x_1,y_1,z_1)^T\in V$, $\boldsymbol{v}_2=(x_2,y_2,z_2)^T\in V$, $k\in\mathrm{R}$,

则$x_1=y_1$, $x_2=y_2$.

$$x_1+x_2=y_1+y_2, \qquad kx_1=ky_1$$

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)^T\in V,$$

$$k\boldsymbol{v}_1=(kx_1, ky_1, kz_1)^T\in V.$$

这说明V关于向量的线性运算封闭，所以V是向量空间.

例 $V=\left\{\boldsymbol{v}=(1,x,y)^T \mid x,y\in\mathrm{R}\right\}$不是一个向量空间.

讨论：

当$\boldsymbol{v}_1=(1,x_1,y_1)^T\in V$, $\boldsymbol{v}_2=(1,x_2,y_2)^T\in V$时,

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=(2,x_1+x_2,y_1+y_2)^T\notin V,$$

这说明V关于向量的线性运算不封闭，所以V不是向量空间.

注：由于V不含零向量，也可得知V不是向量空间.

7.1.2 向量空间的基与维数

定义7-3

向量空间V的一个极大无关组叫做V的一个基.

向量空间V的秩叫做 V 的维数，记作 $\dim(V)$.

若$\dim(V)=r$，则称 V 为 r 维向量空间.

在三维几何空间中，如果把向量的起点都平移到原点，把每个向量和它的终点对应起来，则$\mathbf{R}^3$就是三维几何空间。

$\mathbf{R}^3$的一个二维子空间就是一个过原点的平面。

若$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$为$r$维向量空间$V$的基，则向量空间$V$可以表示为

$$V=\left\{\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{v}_r \,\middle|\, x_1,\ldots,x_r\in R\right\}$$

这样，我们就找到了表示向量空间的一种方法，并且可用V的基作为代表来对V进行理论研究。

定理7-1 设 V 是 n 维向量空间，$m<n$，则 V 中任一线性无关的向量组 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 都可扩充成 V 的一个基.

证明 因为 $m<n$，所以一定存在向量 $\boldsymbol{v}_{m+1}\in V$，使得向量组 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_{m+1}$ 线性无关.

（否则，对于任意的 $\boldsymbol{v}\in V$，都有 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}$ 线性相关. 根据定理5-4，$\boldsymbol{v}$ 可由向量组 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 线性表示.

再根据定理5-12可知，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 是 V 的极大无关组.

$\dim(V)=m<n$，这与 $\dim(V)=n$ 矛盾）

如果 $m+1=n$，则定理得证

如果 $m+1<n$，重复上面的想法可以证明.

7.1.3 向量在基下的坐标

在空间解析几何中，把 $\vec{a}$ 按基本向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的分解式 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ 中的系数叫做 $\vec{a}$ 在空间直角坐标系下的坐标.

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基（即极大无关组），则对于 V 中任一向量 $\boldsymbol{b}$，存在唯一一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$.

反过来，任给一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{b}\in V$ ，使得 $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$.

可见，在基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 下，向量 $\boldsymbol{b}$ 与有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 一一对应 。

把这组有序的数叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在这个基下的**坐标。**

定义 7-4

设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是$n$维向量空间$V$的一个基，对任意向量$\boldsymbol{b}\in V$，把满足

$$\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$$

的有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$叫做向量$\boldsymbol{b}$在这个基下的坐标. $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$叫做向量$\boldsymbol{b}$在这个基下的坐标向量.

注意: $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$

求向量在基下的坐标就是解方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{A}$一定是列满秩矩阵。

当$\boldsymbol{A}$为方阵时，$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵。

例7-6 求 R^3 中的向量 $\boldsymbol{b}=(3,0,10)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标向量.

解： $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 在本题中 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\2&-1&3&10\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&-1&1&4\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{b}$ 在该基下的坐标向量为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

例　求向量空间$V=\left\{ \boldsymbol{a}=(x,x,y)^T \,\middle|\, x,y\in \mathrm{R} \right\}$的维数和它的一个基，

并求向量$\boldsymbol{b}=(2,2,3)^{\mathrm{T}}$在该基下的坐标向量.

解：由于V中的向量$\boldsymbol{a}_1=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(0,0,1)^T$线性无关，

V中任一向量$\boldsymbol{a}=(x,x,y)^T$都可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性表示，

$$\boldsymbol{a}=(x,x,y)^T=x(1,1,0)^T+y(0,0,1)^T=x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2,$$

所以根据定理5-12可知$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$是$V$的一个极大无关组，

也就是V的一个基.

V的秩为2，　$\dim(V)=2.$

注意：V是R^3的一个2维子空间.

由$\boldsymbol{b}=(2,2,3)^T=2(1,1,0)^T+3(0,0,1)^T=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$可知，

$\boldsymbol{b}$在该基下的坐标向量为$(2,3)^T$.

7.1.4 过渡矩阵与坐标变换

设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$为$n$维向量空间$V$的一个基(旧基)，则$V$的另一个基(新基)$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$可由旧基性线表示，

$$
设\begin{cases}
\boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n \\
\boldsymbol{b}_2 = p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n \\
\qquad\vdots \\
\boldsymbol{b}_n = p_{1n}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n
\end{cases} \qquad (7.2)
$$

其矩阵形式为$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{P}$ (7.3)

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}
p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\
p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}
\end{pmatrix}
$$

式(7.2)或式(7.3)称为从旧基到新基的基变换公式。

$\boldsymbol{P}$称为从旧基到新基的过渡矩阵。

注：从旧到新就是用旧表示新。

注：过渡矩阵一定是可逆矩阵.

证：$\boldsymbol{P}$满足$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{P}$,

向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$和$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$都线性无关.

由$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$线性无关，得$r([\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n])=n$.

$$n=r([\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n])=r([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{P})$$

$$\leq r(\boldsymbol{P})\leq n$$

$$r(\boldsymbol{P})=n$$

$\boldsymbol{P}$为满秩矩阵，所以$\boldsymbol{P}$可逆.

定理7-2 设n维向量空间V中的向量$\boldsymbol{v}$在旧基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$和新基$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$下的坐标向量分别为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$，从旧基到新基的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，则有坐标变换公式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}. \qquad 即\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

证： 旧基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 新基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n) \qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n) \qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=0 \xRightarrow{\because r(\boldsymbol{A})=n} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=0$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}. \qquad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

例7-7

已知R^3的两个基

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$$

和 $\boldsymbol{b}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_3=(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求从基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$到基$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$.

(2) 设向量$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}=(4,2,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$下的坐标向量$\boldsymbol{y}$.

解：(1) 记 $A=(a_1,a_2,a_3)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$， 则 $B=AP$.

求过渡矩阵P，就是解矩阵方程$AP=B$.

方法1：通过逆矩阵做，$P=A^{-1}B$.

方法2：直接通过初等行变换做.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\1&-1&2&1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&2&2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\qquad P=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

解： (2) $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$.

求$\boldsymbol{y}$ 就是解方程组$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$, 过渡矩阵$\boldsymbol{P}$为可逆阵.

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$