第8章　方阵的特征值与相似对角化

8.1　方阵的特征值及其特征向量

8.1.1 特征值与特征向量的概念及计算

定义8-1

设 A 为 n 阶方阵，λ 为变量，把 $|\lambda E - A| = 0$ 的根叫做 A 的**特征值**(单根称为单特征值，重根称为重特征值）.

设 λ_i 是 A 的特征值，则齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的非零解向量叫做 A 的对应于(或属于) λ_i 的**特征向量**.

$|\lambda E - A| = 0$ 称为 A 的**特征方程**.

注意： $|\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow (-1)^n |A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$

注意：

(1) 特征值一定能对应出特征向量.

若λ_i是A的特征值，则$\left|\lambda_i E-A\right|=0$.

根据定理3-5，方程组$\left(\lambda_i E-A\right)x=0$一定有非零解，所以$\lambda_i$一定能对应出特征向量.

(2) 当λ_i是A的特征值时，$\left(\lambda_i E-A\right)x=0$的基础解系是$\lambda_i$对应的无关特征向量. $\left(\lambda_i E-A\right)x=0$的通解去掉零向量后是$\lambda_i$对应的全部特征向量.

(3) 若p是λ_i对应的特征向量，则$\left(\lambda_i E-A\right)p=0$ ，马上可得$\left(\lambda_i E-A\right)(kp)=0$ ， 当$k\neq 0$时，kp也是λ_i对应的特征向量.

(4) 若$p_1,\cdots,p_r$都是λ_i对应的特征向量，由特征向量的定义和解的性质可知， 当$k_1p_1+\cdots+k_rp_r\neq 0$时，$k_1p_1+\cdots+k_rp_r$也是$\lambda_i$对应的特征向量.

$p_1,\cdots,p_r$是$\left(\lambda_i E-A\right)x=0$的解$\Rightarrow\left(\lambda_i E-A\right)(k_1p_1+\cdots+k_rp_r)=0$

上（下）三角形矩阵及对角矩阵的特征值就是它们的对角元.

例如，设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-4 & -5\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)=0$$

A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=6$

例8-1 求$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$的特征值.

解： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$

A的特征值为$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$, 其中, i 为虚数单位。

注意 （1）实矩阵的特征值不一定是实数.

（2）初等变换会改变矩阵的特征值.

例如, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B$

A的特征值为$-i,i$, 而B的特征值为$-1,1$.

例8-2 求方阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值及其对应的全部特征向量.

解： $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -2 & \lambda+3 & 2\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}} \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -\lambda-1 & \lambda+1 & 0\\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$$

B 的特征值为 $\lambda_1=-1$ (二重)，$\lambda_2=1$(单)

算特征值的第二个方法：算出 $|\lambda E-B|=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 B 的特征值，则 $|\lambda E-B|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$，$-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=c$，从 c 的因数进行考虑，试着对 $|\lambda E-B|$ 分解因式.

大连理工大学 例如：6的因数有 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

对于$\lambda_1=-1$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-B)x=0$.

$$\lambda_1 E-B=\begin{pmatrix}-2&2&2\\-2&2&2\\2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$(\lambda_1 E-B)x=0$化成$x_1-x_2-x_3=0$

$(\lambda_1 E-B)x=0$的基础解系为 $p_1=(1,1,0)^T$, $p_2=(1,0,1)^T$.

故 $\lambda_1=-1$对应的线性无关特征向量为p_1，p_2

$\lambda_1=-1$对应的全部特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2$ (k_1,k_2不全为0).

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\-2&\lambda+3&2\\2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

对于 $\lambda_2=1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-B)x=0$.

$$\lambda_2 E-B=\begin{pmatrix}0&2&2\\-2&4&2\\2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&4&2\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 2]{r_1\div 2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(\lambda_2 E-B)x=0$化成$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$

$(\lambda_2 E-B)x=0$ 的基础解系为 $p_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$

故$\lambda_2=1$对应的全部特征向量为 $k_3p_3\,(k_3\neq 0)$.

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\-2&\lambda+3&2\\2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

8.1.2 特征值与特征向量的性质

性质8-1 n 阶方阵 A 在复数范围内有且只有n 个特征值(k 重特征值看作 k 个).

当 $n=2$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})-a_{21}a_{12}$$

$$=\lambda^2-\left(a_{11}+a_{22}\right)\lambda+\left(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\right).$$

当$n>2$时，用数学归纳法可证明(略):

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-tr\left(A\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\left(-1\right)^n|A| \qquad (8.1)$$

根据代数学基本定理，特征方程$|\lambda E-A|=0$在复数范围内有且只有n个根，故性质8-1正确。

将$tr(A)$称为A的迹（trace），
它等于A的对角元之和。

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$|\lambda E-A|$称为A的特征多项式。

性质8-2 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

(2) $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

证明： 由A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，得

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-tr(A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A| \qquad (8.1)$$

比较上面两个式子的系数和常数项可知性质8-2成立。

推论8-1 方阵A可逆$\Longleftrightarrow$ A的特征值都不为0

证：A可逆$\Leftrightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$

性质8-3 λ是方阵A的特征值且p是λ对应的特征向量

$\Longleftrightarrow$ 数λ和非零向量p满足$Ap=\lambda p$.

证明 ($\Rightarrow$) 由p是λ对应的特征向量可知，

p是方程组$(\lambda E-A)x=0$的非零解向量，

$(\lambda E-A)p=0$且$p\neq 0$，即$Ap=\lambda p$且$p\neq 0$.

($\Leftarrow$) 由$Ap=\lambda p$，得$(\lambda E-A)p=0$

这说明$p\neq 0$是$(\lambda E-A)x=0$的非零解向量，

所以$|\lambda E-A|=0$，λ是A的特征值，

再根据p是$(\lambda E-A)x=0$的非零解向量可知，

p是λ对应的特征向量。

小结 证明λ是A的特征值的方法:

方法1 证明$|\lambda E-A|=0$.

方法2 找$p\neq 0$，证明$Ap=\lambda p$.

方法3 根据特征值的性质进行证明.

性质8-4 若λ是A的特征值，p是λ对应的特征向量，k是正整数，则λ^k是A^k的特征值，p也是λ^k对应的特征向量.

证明 由已知条件及性质8-3，得$Ap=\lambda p$且$p\neq 0$.

$$A^k p=A^{k-1}Ap=\lambda A^{k-1}p=\lambda A^{k-2}Ap=\lambda^2 A^{k-2}p=\cdots=\lambda^k p$$

推广 若λ是A的特征值，p是λ对应的特征向量，

则 $f(\lambda)=l_m\lambda^m+l_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+l_1\lambda+l_0$ 是

$f(A)=l_mA^m+l_{m-1}A^{m-1}+\cdots+l_1A+l_0E$的特征值

p仍然是对应的特征向量。

证：
$$\begin{aligned}f(A)p&=(l_mA^m+l_{m-1}A^{m-1}+\cdots+l_1A+l_0E)p\\&=l_mA^mp+l_{m-1}A^{m-1}p+\cdots+l_1Ap+l_0p\\&=l_m\lambda^mp+l_{m-1}\lambda^{m-1}p+\cdots+l_1\lambda p+l_0p\\&=f(\lambda)p\end{aligned}$$

例8-4 设方阵A满足$A^2+A-2E=O$，证明:A的特征值只能为1或-2.

证明 设λ是A的特征值,则$\lambda^2+\lambda-2$是A^2+A-2E的特征值.

由$A^2+A-2E=O$可知，A^2+A-2E是零矩阵，A^2+A-2E的特征值都为0, 所以$\lambda^2+\lambda-2=0$, $\lambda=1$或-2.

注意 在本题中，A的特征值会出现多种可能，可能全为1，也可能全为-2，还有可能部分特征值为1，部分特征值为-2.

下面的矩阵都满足$A^2+A-2E=O$，但特征值会出现四种不同的情况。

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$$

性质8-5 设λ是可逆阵A的特征值，p是对应的特征向量，则λ^{-1}和$|A|\lambda^{-1}$分别是A^{-1}和A^*的特征值，p仍然是对应的特征向量.

证明： 由A可逆及推论8-1可知，$\lambda \neq 0$

由性质8-3，得$Ap = \lambda p$，$p \neq 0$

由上式可得 $A^{-1}p = \lambda^{-1}p$

所以λ^{-1}是A^{-1}的特征值，p是λ^{-1}对应的特征向量.

由$A^* = |A|A^{-1}$及上式，得 $A^*p = |A|A^{-1}p = \left(|A|\lambda^{-1}\right)p$

所以$|A|\lambda^{-1}$是A^*的特征值，p是$|A|\lambda^{-1}$对应的特征向量.

通过前面的讨论可知：

若λ是A的特征值，p是对应的特征向量，

则λ^k，$f(\lambda)$，λ^{-1}，$|A|\lambda^{-1}$ 分别是

A^k，$f(A)$，A^{-1}，A^* 的特征值，

p还是对应的特征向量.　　注：$A^* = |A|A^{-1}$

注1：$f(A)$为A的多项式，

$f(A)$可以为A^2+A, A^2-E, A^3+A+E 等等，

将来会经常遇到这种情况。

注2：上面讨论A^*的特征值时，是假设A可逆，

如果A不可逆，得不出上面的结论.

大连理工大学

性质8-6 方阵A与A^{T}的特征值相同。

证明： $$\left|\lambda E - A^{\mathrm{T}}\right| = \left|(\lambda E - A)^{\mathrm{T}}\right| = \left|\lambda E - A\right|$$

$\left|\lambda E - A^{\mathrm{T}}\right| = 0$和$\left|\lambda E - A\right| = 0$的根相同，

所以A^{T}和A的特征值相同.

注意 A与A^T的特征向量一般不相同.

原因在于：方程组$(\lambda E - A)x = 0$与$(\lambda E - A^T)x = 0$没有很好的关系。

定理8-1 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的互异特征值，则它们分别对应的特征向量$p_1,p_2,\cdots,p_m$一定线性无关。

证明： 对$s(1\le s\le m)$做数学归纳法.

当$s=1$时，由$p_1\ne 0$可知结论成立.

假设结论对$s-1$成立，下面证明结论对s也成立.

设
$$k_1p_1+\cdots+k_{s-1}p_{s-1}+k_sp_s=0, \tag{1}$$

$$k_1Ap_1+\cdots+k_{s-1}Ap_{s-1}+k_sAp_s=0,$$

$$k_1\lambda_1p_1+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}p_{s-1}+k_s\lambda_sp_s=0, \tag{2}$$

$\lambda_s\times(1)-(2)$,得

$$k_1(\lambda_s-\lambda_1)p_1+\cdots+k_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})p_{s-1}=0,$$

由$p_1,p_2,\cdots,p_{s-1}$线性无关，可得

$$k_j(\lambda_s-\lambda_j)=0(j=1,2,\cdots,s-1).$$

$\because\lambda_s\ne\lambda_j,\therefore k_j=0(j=1,2,\cdots,s-1)$,从而$k_sp_s=0$

$\because p_s\ne 0,\therefore k_s=0,$ $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 线性无关

所以结论成立。

定理8-2 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的互异特征值，$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{ir_i}$是$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$对应的线性无关的特征向量，则$p_{11},p_{12},\cdots,p_{1r_1},\cdots,p_{m1},p_{m2}\cdots,p_{mr_m}$线性无关。

注意：对于一般的向量组，如果各个部分都线性无关，则合并起来不一定线性无关。上面定理反映的是特征向量所**独有**的性质。

练习

1. 设A是三阶方阵，由下列条件可知道谁是特征值?

(1) $|A-2E|=0$

(2) $|E+2A|=0$

(3) $r(2E-A)<3$

(4) $(1,2,3)^T$是$Ax=0$的解

(5) $AB=O, B\neq O$

（6）A 的各行元素之和都为2

2. 设$A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，求$\left|A^2+E\right|$

3. 设A为三阶方阵，$|A-E|=0, |A-2E|=0, |A-3E|=0$，求$|A-4E|$.