第 7 章　向量空间及向量的正交性

向量空间是线性代数中的一个十分重要而基本的概念，它是具体的几何空间的推广与升华，并与线性方程组解的理论有着密切的联系.本章只介绍向量空间的一些基本知识.，内容包括向量空间的概念、向量空间的基与维数、向量在基下的坐标、过渡矩阵与坐标变换、向量的内积、正交基与施密特正交化方法、正交矩阵。

7.1　向量空间

7.1.1　向量空间的概念

定义 7-1　设 V 是 n 元向量的集合，如果 V 非空, 并且对于向量的线性运算封闭(即对任意 $\mathbf{v}_1 \in V, \mathbf{v}_2 \in V, k \in \mathbf{R}$, 都有 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$, $k\mathbf{v}_1 \in V$),则称 V 是一个**向量空间**.

显然，只含有零向量的集合 $V=\{\mathbf{0}\}$ 是一个向量空间.

例 7-1　所有 n 元实向量的集合 $\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间.

证明　显然 $\mathbf{R}^n$ 非空.又因为任何两个 n 元实向量的和还是 n 元实向量，任意实数与 n 元实向量之积还是 n 元实向量，它们的运算结果都在 $\mathbf{R}^n$ 中，所以 $\mathbf{R}^n$ 对于向量的线性运算封闭，故 $\mathbf{R}^n$ 是向量空间.

例 7-2　齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量构成的集合 S 是一个向量空间. 把它叫做这个齐次线性方程组的**解空间**.

证明　因为齐次线性方程组总是有解的，所以 S 非空.

对于 S 中任意两个向量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 及任一实数 k，由 $\mathbf{Av}_1=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{Av}_2=\mathbf{0}$ 得出

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=\mathbf{0}\,,\qquad \mathbf{A}(k\mathbf{v}_1)=\mathbf{0}\,.$$

于是，$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \in S, k\mathbf{v}_1 \in S$，$S$ 对于向量的线性运算封闭，故 S 是向量空间.

例 7-3　若 V 是向量空间，则 V 一定含有零向量.

证明　因为 V 是向量空间，所以 V 非空.设 $\mathbf{v} \in V$,则有 $\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{v}\in V$，故 V 含有零向量.

由于非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解集不含零向量，所以 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解集不是向量空间.

例 7-4　集合 V={ $\mathbf{v}=[x,y]^T \,|\, x,y \in \mathbf{R}$ 且 xy=0}不是向量空间.

证明 因为$\mathbf{v}_1=[1,0]^T\in V,\mathbf{v}_2=[0,1]^T\in V$, 而$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\notin V$，所以$V$对于向量的加法运算不封闭.故$V$不是向量空间.

例 7-5 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$是$m$个已知的$n$元向量，则集合$V=\left\{\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j \middle| x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbf{R}\right\}$是一个向量空间.把它叫做**由向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$所生成的向量空间**.

证明 显然V非空.

设$\mathbf{v}_1=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j\in V,\mathbf{v}_2=\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbf{a}_j\in V,k\in\mathbf{R}$, 则

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\sum_{j=1}^{m}(x_j+y_j)\mathbf{a}_j\in\mathbf{R},$$

$$k\mathbf{v}_1=\sum_{j=1}^{m}(kx_j)\mathbf{a}_j\in V,$$

V对于向量的线性运算封闭，故V是向量空间.

定义 7-2 设V_1和V_2是两个向量空间.

(1) 若$V_1\subseteq V_2$，则称V_1是V_2的**子空间**.

（2）若$V_1\subseteq V_2$且$V_2\subseteq V_1$，则称这两个**向量空间相等**，记作$V_1=V_2$.

7.1.2 向量空间的基与维数

定义 7-3 向量空间V的一个极大无关组叫做V的一个**基**. V的秩叫做V的**维数**，记作 dim(V). 若 dim(V)=r, 则称V为 ***r*** **维向量空间**.

在三维几何空间中，如果把向量的起点都平移到坐标原点，把每个向量和它的终点对应起来，则$\mathbf{R}^3$就是三维几何空间，$\mathbf{R}^3$的一个二维子空间就是一个过坐标原点的平面.

下面介绍向量空间的基的作用.

若已知r维向量空间V的基为$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$，则向量空间$V$可表示成

$$V=\left\{\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r \middle| x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\right\}$$

的形式.这样，我们就找到了表示向量空间的一种方法，并且可用V的基作为代表来对V进行理论研究. 在研究齐次线性方程组的解时，我们就是按照这样的思路来做的.

定理 7-1 设V是n维向量空间，$m<n$, 则V中任一线性无关的向量组$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$都可扩充成$V$的一个基.

证明 因为 $m<n$, 所以一定有 $\mathbf{v}_{m+1}\in V$,使 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}$ 线性无关.（否则，对任意的 $\mathbf{v}\in V$，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}$ 均线性相关，由定理 5-4 可知 $\mathbf{v}$ 可由 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$ 线性表示，再由定理 5-12 可知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$ 为 V 的一个基，dim(V)=m，这与 V 的维数为 n 矛盾.）

如果 $m+1=n$，定理得证.

如果 $m+1<n$，继续上述步骤，必存在 $\mathbf{v}_{m+2},\cdots,\mathbf{v}_n$，使 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$，$\mathbf{v}_{m+1}$，$\mathbf{v}_{m+2},\cdots,\mathbf{v}_n$ 线性无关，这就是 V 的一个基.

7.1.3 向量在基下的坐标

在空间解析几何中，如果向量 $\vec{a}$ 按照三个坐标轴上的单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 的分解式为

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ ,$$

则把上式中的三个系数叫做向量 $\vec{a}$ 在该坐标系下的坐标.

按照类似的方法,我们可给出向量在基下的坐标的定义.

设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基（即极大无关组），则由定理 5-7 可知 V 中任一向量 $\mathbf{b}$ 都能由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 唯一地线性表示,即存在唯一的一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n\ . \qquad (7.1)$$

反之，任给一组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有 V 中唯一的向量 $\mathbf{b}$ 按式（7.1)与之对应. 可见，V 中的向量 $\mathbf{b}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 下与有序数组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 一一对应.

定义 7-4 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，对任意向量 $\mathbf{b}\in V$,把满足 $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ 的有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫做向量 $\mathbf{b}$ 在这个基下的**坐标**. $\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$ 叫做向量 $\mathbf{b}$ 在这个基下的**坐标向量**.

令 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$，则式(7.1)可表示成矩阵形式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.可见，求向量在基下的坐标，就是求解一个线性方程组.

例 7-6 求 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{b}=\left[3,0,10\right]^T$ 在基 $\mathbf{a}_1=\left[1,0,2\right]^T$,$\mathbf{a}_2=\left[0,1,-1\right]^T$, $\mathbf{a}_3=\left[1,1,3\right]^T$ 下的坐标向量.

解 令 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]$，下面来解线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.因为

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\2&-1&3&10\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&-1&1&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix},$$

所以$\mathbf{b}$在该基下的坐标向量为$\mathbf{x}=[1,-2,2]^T$.

7.1.4　过渡矩阵与坐标变换

同一个向量在不同基下的坐标向量一般是不同的，但是这两个不同的坐标向量却有着内在的联系.

设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$为$n$维向量空间$V$的一个基（称为旧基），则$V$的另一个基（称为新基）$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由旧基线性表示，设

$$\begin{cases}\mathbf{b}_1=p_{11}\mathbf{a}_1+p_{21}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{n1}\mathbf{a}_n\\\mathbf{b}_2=p_{12}\mathbf{a}_1+p_{22}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{n2}\mathbf{a}_n\\\qquad\vdots\\\mathbf{b}_n=p_{1n}\mathbf{a}_1+p_{2n}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{nn}\mathbf{a}_n\end{cases},\tag{7.2}$$

其矩阵形式为

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]\mathbf{P},\tag{7.3}$$

其中，

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}.$$

式(7.2)或式(7.3)叫做从旧基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$到新基$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$的**基变换公式**，$n$阶方阵$\mathbf{P}$叫做从旧基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$到新基$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$的**过渡矩阵**.

由$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$线性无关可以证明，过渡矩阵$\mathbf{P}$是可逆矩阵.

定理 7-2　设n维向量空间V中的向量$\mathbf{v}$在旧基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$和新基$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$下的

坐标向量分别为$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$，从旧基到新基的过渡矩阵为$\mathbf{P}$，则有坐标变换公式

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y},$$

即

$$\mathbf{y}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}.$$

证明 记

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n],\ \mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n].$$

由已知条件可得

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P},$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}.$$

将关于$\mathbf{v}$的两个式子相减，得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{P}\mathbf{y})=\mathbf{0}.$$

由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$为$V$的基可知，$r(\mathbf{A})=n$.再由定理 6-1 可得

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y},$$

即

$$\mathbf{y}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}.$$

例 7-7 已知$\mathbf{R}^3$的两个基

$$\mathbf{a}_1=[1,0,1]^T,\mathbf{a}_2=[0,1,-1]^T,\mathbf{a}_3=[1,1,2]^T$$

和

$$\mathbf{b}_1=[0,1,1]^T,\mathbf{b}_2=[1,1,0]^T,\mathbf{b}_3=[2,-1,3]^T,$$

(1)求从基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$到基$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$的过渡矩阵$\mathbf{P}$；

（2）设向量$\mathbf{v}$在基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$下的坐标向量为$\mathbf{x}=[4,2,1]^T$，求$\mathbf{v}$在基$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$下的坐标向量$\mathbf{y}$.

解 （1）记

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3],\ \mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3],$$

则

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

由

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\1&-1&2&1&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&2&2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix},$$

得

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

(2)因向量 $\mathbf{y}$ 满足 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，故由

$$[\mathbf{P},\mathbf{x}]=\begin{bmatrix}-1&1&2&4\\0&1&-1&2\\1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&2\\-1&1&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&2\\0&1&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&2\\0&0&3&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

得

$$\mathbf{y}=[1,3,1]^T.$$

习题 7-1

1. 下列集合是否为向量空间？为什么？

（1）$V_1=\left\{\mathbf{v}=[x,y,z]^T \middle| x,y,z\in\mathbf{R}\text{且}x+y+z=1\right\}$;

(2) $V_2=\left\{\mathbf{v}=[x,y,z]^T \middle| x,y,z\in\mathbf{R}\text{且}x=y\right\}$;

(3) $V_3=\left\{\mathbf{v}=[x,y,z]^T \middle| x,y,z\in\mathbf{R}\text{且}x=2y=3z\right\}$;

(4) $V_4=\left\{\mathbf{v}=[x,y,z]^T \middle| x,y,z\in\mathbf{R}\text{且}z<0\right\}$.

2. 试求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+3x_4=0\\ x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间的维数和一个基.

3. 证明 $\mathbf{a}_1=[1,2,1]^T,\mathbf{a}_2=[2,3,3]^T,\mathbf{a}_3=[3,7,1]^T$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求向量 $\mathbf{v}=[1,0,5]^T$ 在该基下的坐标.

4. 设 $\mathbf{a}_1=[1,1,-1,-1]^T,\mathbf{a}_2=[4,5,-2,-7]^T,\mathbf{a}_3=[2,3,0,-5]^T,\mathbf{a}_4=[0,1,0,-1]^T$，求由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 所生成的向量空间的维数和它的一个基.

5. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的旧基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 和新基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 分别为

$$\mathbf{a}_1=[1,0,0]^T,\mathbf{a}_2=[1,1,0]^T,\mathbf{a}_3=[1,1,1]^T;$$

$$\mathbf{b}_1=[2,1,2]^T,\mathbf{b}_2=[-2,2,1]^T,\mathbf{b}_3=[1,2,-2]^T.$$

(1) 求从旧基到新基的过渡矩阵 $\mathbf{P}$；

（2）已知向量 $\mathbf{v}$ 在旧基下的坐标向量 $\mathbf{x}=[2,1,4]^T$,求它在新基下的坐标向量 $\mathbf{y}$;

(3) 已知向量 $\mathbf{u}$ 在新基下的坐标向量为 $[1,0,1]^T$，求它在旧基下的坐标向量.

6.设 V_1 是由 $\mathbf{a}_1=[1,2,0]^T$， $\mathbf{a}_2=[2,0,-1]^T$， $\mathbf{a}_3=[0,3,1]^T$ 所生成的向量空间，V_2 是由 $\mathbf{b}_1=[-1,-1,0]^T$， $\mathbf{b}_2=[3,-1,-2]^T$， $\mathbf{b}_3=[1,-1,-1]^T$ 所生成的向量空间，证明 $\mathrm{V}_2\subset\mathrm{V}_1$

7. 证明：由 $\mathbf{a}_1=[1,1,1]^T,\mathbf{a}_2=[0,1,1]^T,\mathbf{a}_3=[1,0,2]^T$ 所生成的向量空间为 $\mathbf{R}^3$.

8. 设 V 是由 $m\times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组所生成的向量空间，证明 $\dim(V)=r(\mathbf{A})$.

9. 设 V_1 和 V_2 是两个向量空间，证明：$V_1=V_2\Leftrightarrow V_1$ 的基与 V_2 的基等价.

10. 设 V 是 $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 的子空间，且 $\dim(V)=n$,证明 $V=\mathbf{R}^\mathbf{n}$.

11.求在 $\mathbf{R}^3$ 的两个基：

（1） $\mathbf{a}_1=[2,1,2]^T$, $\mathbf{a}_2=[-2,2,1]^T$, $\mathbf{a}_3=[1,2,-2]^T$；

（2） $\mathbf{b}_1=[1,1,1]^T, \mathbf{b}_2=[-1,1,1]^T, \mathbf{b}_3=[1,0,-4]^T$
下有相同坐标的单位向量。

7.2　向量的正交性

本节我们将空间解析几何中向量的数量积的概念推广到实向量空间 $\mathbf{R^n}$ 中，给出向量的内积的定义，并进一步讨论向量的长度、夹角及正交性.

7.2.1　向量的内积

在空间解析几何中，向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积定义为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>.$$

其坐标表达式为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

其中, $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标向量分别为

$$\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3]^T，\quad \mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]^T.$$

由数量积的定义，可得

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ ,$$

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

现在我们将上面的定义及公式推广到 n 维实向量空间 $\mathbf{R^n}$ 中.

定义 7-5　设 $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T, \mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 是两个实向量， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**内积**记作 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$,规定

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

也可用矩阵运算表示内积

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\mathbf{b}.$$

根据内积的定义,容易验证内积具有下列性质（也称为内积公理）：

（1） $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$;

(2) $(k\mathbf{a},\mathbf{b})=k(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

(3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$;

(4) $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0$,且 $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0\Leftrightarrow\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

其中，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{R^n}$，$k$ 为任意实数.

定义 7-6 定义了内积的向量空间称为**欧氏空间**.

在欧氏空间中，我们可以讨论长度、角度等问题。

定义 7-7 实向量 $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 的**长度**（也叫做**范数**）记作 $\|\mathbf{a}\|$，规定

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

当 $\|\mathbf{a}\|=1$ 时，$\mathbf{a}$ 叫做单位向量；对于非零向量 $\mathbf{a}$，称 $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ 为 $\mathbf{a}$ 的单位化向量.

注意 $\mathbf{a}^T\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2$.

向量的长度具有下列性质：

（1）非负性 $\|\mathbf{a}\|\geq 0$，且 $\|\mathbf{a}\|=0\Leftrightarrow\mathbf{a}=\mathbf{0}$;

(2) 齐次性 $\|k\mathbf{a}\|=|k|\|\mathbf{a}\|$;

（3）三角不等式 $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leq\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$;

(4)柯西-施瓦茨不等式 $|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\leq\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.

根据长度的定义，性质（1）和（2）显然成立.性质（3）可利用性质（4）来证明，下面仅给出性质（4）的证明.

当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时，显然结论成立.

当 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ 时，对任意实数 x,恒有

$$(x\mathbf{a}+\mathbf{b},x\mathbf{a}+\mathbf{b})\geq 0,$$

即

$$(\mathbf{a},\mathbf{a})x^2+2x(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{b})\geq 0,$$

亦即

$$\|\mathbf{a}\|^2x^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})x+\|\mathbf{b}\|^2\geq 0,$$

上式左端是关于 x 的二次函数，由于它非负，所以

$$4(\mathbf{a},\mathbf{b})^2-4\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\leq 0,$$

即

$$\left|(\mathbf{a},\mathbf{b})\right| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|.$$

定义 7-8 当 $\mathbf{a} \ne \mathbf{0}, \mathbf{b} \ne \mathbf{0}$ 时，

$$\theta = \arccos\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$$

叫做**向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角**.

当 $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$,即 $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$ 时，称向**量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 正交**.

7.2.2 正交向量组与施密特正交化方法

定义 7-9 由两两正交的非零向量组成的向量组称为**正交向量组**；由单位向量组成的正交向量组称为**标准正交向量组**.

定理 7-3 正交向量组一定线性无关.

证明 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是正交向量组，且

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

用 $\mathbf{a}_1^T$ 乘上式两端，得

$$k_1\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 + \cdots + k_m\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是正交向量组，可知

$$\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 = \|\mathbf{a}_1\|^2 \ne 0,$$

$$\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_j = 0 \quad (j = 2,\cdots,m).$$

于是，有

$$k_1\|\mathbf{a}_1\|^2 = 0,$$

故

$$k_1 = 0.$$

同理可证

$$k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性无关.

定理 7-3 的逆命题不成立，但是可以根据下面方法从一个线性无关的向量组求出一个与之等价的正交向量组.

设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是一个线性无关的向量组，若令

$$
\begin{cases}
\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j - \sum\limits_{i=1}^{j-1} \dfrac{\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i
\end{cases}, \tag{7.4}
$$

则 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$ 是与 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ 等价的正交向量组.

该方法称为施密特正交化方法.将 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m$ 单位化后，可得到一个与 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ 等价的标准正交向量组.

上面的方法来自于下面的几何观察.

若按图 7.1 所示来取 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$，则 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 正交且与 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 等价.由 $\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_2 = 0$，求得

$$
l = \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 .
$$

求出 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 后，再按图 7.2 所示取 $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (l_1 \mathbf{b}_1 + l_2 \mathbf{b}_2)$.由 $\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_3 = 0$ 和 $\mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_3 = 0$，可求得

$$
l_1 = \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_1\|^2}, \qquad l_2 = \frac{\mathbf{b}_2^T \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_2\|^2},
$$

所以

$$
\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2^T \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_2\|^2} \mathbf{b}_2 ,
$$

并且 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 与 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 等价.

将上面的过程加以推广可得到施密特正交化公式。

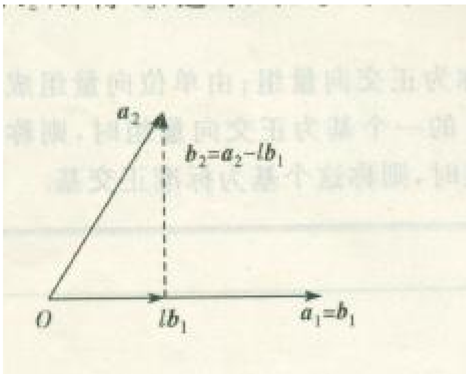

图 7.1

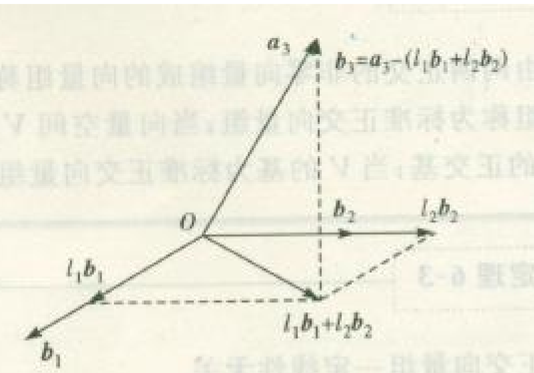

图 7.2

我们经常采用正交向量组或标准正交向量组作为欧氏空间的基，这可给很多问题的研究带来方便。

定义 7-10 当向量空间 V 的一个基为正交向量组时，则称这个基为 V 的**正交基**；当 V 的基为标准正交向量组时，则称这个基为**标准正交基**.

7.2.3 正交矩阵

正交矩阵是一类非常重要的可逆矩阵，在几何上有着重要的应用.

定义 7-11 若实方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，则称 $\mathbf{A}$ 为**正交矩阵**.

注意：当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}\Leftrightarrow\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T\Leftrightarrow\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}$. 因而，当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，这三个等价的式子中的任一个都可作为正交矩阵的定义。

正交矩阵有如下性质：

设 $\mathbf{A}$ 、$\mathbf{B}$ 为同阶正交矩阵，则

（1） $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ ；

（2） $\mathbf{A}^T$ 为正交矩阵（即 $\mathbf{A}^{-1}$ 为正交矩阵）;

（3） $\mathbf{AB}$ 为正交矩阵；

（4） $|\mathbf{A}|=\pm1$.

根据正交矩阵的定义可证明这些结论，证明过程留给读者作为练习.

定理 7-4 实方阵 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的列向量组为标准正交向量组.

证明 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$ 为 $\mathbf{A}$ 的列分块阵，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\\\mathbf{a}_2^T\\\vdots\\\mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n\\\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n\end{bmatrix}$$

由上式可知，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$ 的充要条件是

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_i=1,\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j=0\ \ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n),$$

即 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是标准正交向量组.

我们一般利用定义 7-11 或定理 7-4 证明一个矩阵为正交矩阵.

例 7-8 设 $\mathbf{a}$ 为 n 元单位向量，$\mathbf{A}=\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ 是正交矩阵,求 k.

解 直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{A}&=(\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\\&=\mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\\&=\mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T\\&=\mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2\mathbf{a}\|\mathbf{a}\|^2\mathbf{a}^T\end{aligned}$$

由 $\mathbf{a}$ 是单位向量可知，$\|\mathbf{a}\|=1$, 所以

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}+(k^2-2k)\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

又因为 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，所以

$$k^2-2k=0..$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } 2.$$

例 7-9 已知 $\mathbf{A}=a\begin{bmatrix} b & 8 & 4 \\ 8 & b & 4 \\ 4 & 4 & c \end{bmatrix}$ 为正交矩阵，求 a,b,c.

解 由定理 7-4 可知，$\mathbf{A}$ 的列向量组为标准正交向量组.

由 $\mathbf{A}$ 的列向量两两正交，可得

$$\begin{cases} 8b+8b+16=0 \\ 32+4b+4c=0 \end{cases},$$

解得

$$b=-1, c=-7.$$

由于 $\mathbf{A}$ 的列向量为单位向量，所以通过 $\mathbf{A}$ 的第一列的长度等于 1 可得

$$\sqrt{(-a)^2+(8a)^2+(4a)^2}=1$$

解得

$$a=\pm\frac{1}{9}.$$

思 考 题 7-2

1. 正交矩阵的行向量组是否为标准正交向量组？

2. 若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶正交矩阵，则 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 是否为正交矩阵？

习题 7-2

1. 求与向量 $\mathbf{a}_1=[1,-1,1,1]^T$，$\mathbf{a}_2=[2,0,1,-1]^T$，$\mathbf{a}_3=[1,1,0,-2]^T$ 都正交的所有向量.

2. 设 $\mathbf{a}_1=[k,2,-2]^T$，$\mathbf{a}_2=[2,k,2]^T$，$\mathbf{a}_3=[-2,2,k]^T$，$\mathbf{A}=m[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$，求 m,k 使 $\mathbf{A}$ 为

正交矩阵.

3. 设$\mathbf{a}_1=[2,-1,1,1]^T$，$\mathbf{a}_2=[-1,-1,0,1]^T$，$\mathbf{a}_3=[1,-2,1,2]^T$，求由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$所生成的向量空间的一个标准正交基.

4.设$n>1$，$\mathbf{A}$为n阶正交矩阵，证明：

（1）$\mathbf{A}^*$为正交矩阵；

（2）若$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，则$|\mathbf{A}|=1$；

（3）若n为偶数且$|\mathbf{A}|=-1$，则$|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$.

5. 设$\mathbf{C}$为反称矩阵，$\mathbf{E}-\mathbf{C}$可逆，证明$\mathbf{A}=(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{C})$为正交矩阵.

提高题 7-2

1.设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为正交矩阵，且$|\mathbf{A}|\neq|\mathbf{B}|$,证明$\mathbf{A}+\mathbf{B}$不可逆.

2. 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$是正交向量组，证明

$$\|\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_m\|^2=\|\mathbf{a}_1\|^2+\|\mathbf{a}_2\|^2+\cdots+\|\mathbf{a}_m\|^2.$$

3. 设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$为$m\times n$型矩阵，$\mathbf{A}$的列向量组是正交向量组，$\mathbf{u}$为方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$的非零解，证明：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{u}$线性无关。

4 设方阵$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$的列向量组为正交向量组，证明：

（1）$\mathbf{A}$可逆并且$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathbf{a}_1^T}{\|\mathbf{a}_1\|^2}\\ \dfrac{\mathbf{a}_2^T}{\|\mathbf{a}_2\|^2}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathbf{a}_n^T}{\|\mathbf{a}_n\|^2}\end{bmatrix}$；

（2）方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$有唯一解，其解为

$$x_i=\frac{\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}_i\|^2}\ (i=1,2,\cdots,n).$$