# 第5章　向量组的线性相关性与矩阵的秩

## 5.2　矩阵的秩

注：矩阵的秩是矩阵的一个重要的数值特性，它既可用于求向量组的秩，从而判断向量组的线性相关性，又在方程组等问题的研究中起着非常重要的作用.

后面几章中经常会用到矩阵的秩.

## 5.2.1 矩阵的秩的概念

1. 定义5－4 矩阵**A**的行向量组的秩叫做矩阵**A**的行秩.

矩阵**A**的列向量组的秩叫做矩阵**A**的列秩.

例如， 设 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$,

由例5-4可知，**B**的行秩=**B**的列秩=2.

后面将给出结论：所有矩阵的行秩和列秩都是相等的，并且和下面要讲的矩阵的秩也是相等的。

注：矩阵的秩是通过行列式来定义的。

下面来介绍$k$阶子阵、$k$阶子式的定义。

2.定义5−5 设**A**为$m\times n$型矩阵，$1\le k\le \min\{m,n\}$,由矩阵**A**的$k$个行和$k$个列相交处的$k^2$个元素按照原来的相对位置所构成的方阵叫做矩阵**A**的$k$阶子阵，其行列式叫做矩阵**A**的$k$阶子式.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&1\\3&2&1&5\end{bmatrix}$$

由1,2行和1,3列交出来的2阶子阵为$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

对应的的2阶子式为$\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0$

3阶子式共有4个:

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\3&2&5\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&1\\3&1&5\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&1&5\end{vmatrix}=0$$

因为**B**的行向量满足$\mathbf{b}_3^T=2\mathbf{b}_1^T+\mathbf{b}_2^T$，所以这四个三阶子式也满足这样的关系，故这四个三阶子式都为0.

可见，**B**中非零子式的最高阶数等于**B**的行秩、列秩，因而把一个矩阵的非零子式的最高阶数定义成矩阵的秩应该是合理的.

3.定义5−6 矩阵**A**中非奇异子阵的最高阶数（即非零子式的最高阶数）称为矩阵**A**的秩(rank)，记作$r(\mathbf{A})$或$R(\mathbf{A})$.

当**A**为零矩阵时，规定**A**的秩$r(\mathbf{A})=0$.

4. 设**A**为$m\times n$型矩阵，由矩阵的秩的定义可得:

(1) $r(\mathbf{A})\le m,\ r(\mathbf{A})\le n$ 注:这个结论经常用

（因为子式的阶数不会超过**A**的行数和列数，所以结论正确）

(2) $r(\mathbf{A})=m \Leftrightarrow$ **A**有$m$阶子式不为零;

$r(\mathbf{A})=n \Leftrightarrow$ **A**有$n$阶子式不为零;

$r(\mathbf{A})=r(r<m$且$r<n) \Leftrightarrow$ **A**有$r$阶子式不为零，并且**A**的所有$r+1$阶子式都为零。

(3)$\mathbf{A}$的增广矩阵的秩一定大于或等于$\mathbf{A}$的秩.

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}]) \geq r(\mathbf{A}), \qquad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\right) \geq r(\mathbf{A}),$$

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right) \geq r(\mathbf{A})$$

(4) 当$c \neq 0$时，$r(c\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.

矩阵$c\mathbf{A}$的所有的$k$阶子式都是矩阵$\mathbf{A}$的对应的$k$阶子式的$c^k$倍，

对应的$k$阶子式要么同时为0，要么同时不为0，

非零子式的最高阶数一定相同，所以结论正确。

例如：设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，则$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$中左上角二阶子式为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，

$c\mathbf{A}$中左上角二阶子式为$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = c^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

# 5.2.2 矩阵的秩的性质

性质5−1　$r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$.

证明：因为$\mathbf{A}$的子阵转置以后成为$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的子阵,

而转置运算不改变行列式的值,

所以$\mathbf{A}$的非奇异子阵转置以后成为$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的非奇异子阵,

$\mathbf{A}$的奇异子阵转置以后成为$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的奇异子阵,

$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的非奇异子阵互相对应,

非奇异子阵的最高阶数相同,

所以 $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$.

性质5−2　$r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$的行秩 $= \mathbf{A}$的列秩。

该性质通常称为"三秩相等定理",证明在书上本节的附录中。

性质5-2建立了矩阵的秩与其行向量组、列向量组的秩的联系。

定理5−8 设$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$， $\mathbf{P}$为可逆矩阵，

则$\mathbf{A}$中任意$r$个列向量$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$和$\mathbf{B}$中相应的列向量$\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$

满足相同的线性表达式，从而具有相同的线性相关性。

证明：将$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$中的$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$按列分块，得

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=\mathbf{P}[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{b}_j=\mathbf{Pa}_j\ (j=1,2,\cdots,n).$$

【上式给我们的感觉，就和$\mathbf{b}_j$与$\mathbf{a}_j$相差一个倍数的感觉一样】

若线性表达式 $k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立，

等式两边左乘$\mathbf{P}$可得，$k_1(\mathbf{Pa}_{i_1})+k_2(\mathbf{Pa}_{i_2})+\cdots+k_r(\mathbf{Pa}_{i_r})=\mathbf{0}$,

于是线性表达式 $k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立.

反过来，若线性表达式 $l_1\mathbf{b}_{i_1}+l_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$成立，

则 $l_1(\mathbf{P}\mathbf{a}_{i_1})+l_2(\mathbf{P}\mathbf{a}_{i_2})+\cdots+l_r(\mathbf{P}\mathbf{a}_{i_r})=\mathbf{0}$,

因为$\mathbf{P}$可逆，在上式两端左乘$\mathbf{P}^{-1}$，可知

线性表达式 $l_1\mathbf{a}_{i_1}+l_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立.

综上，向量组$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$和向量组$\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$满足相同的线性表达式.

从而具有相同的线性相关性。

$$\mathbf{b}_j=\mathbf{P}\mathbf{a}_j\ (j=1,2,\cdots,n).$$

推论5-1 若$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$, $\mathbf{P}$为可逆矩阵，则下列结论正确：

(1)$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组一一对应， $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$;

(2) $\mathbf{a}_j=k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r} \Leftrightarrow \mathbf{b}_j=k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}$

其中$1\le j\le n$.

证明： $\mathbf{a}_j=k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}$

$$\Leftrightarrow\ k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}-\mathbf{a}_j=0$$

$$\Leftrightarrow\ k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}-\mathbf{b}_j=0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{b}_j=k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}.$$

注： 当$\mathbf{P}$可逆时，$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$表示用初等行变换将$\mathbf{A}$化成了$\mathbf{B}$.
因而，定理5-8和推论5-1表明，若用初等行变换将矩阵$\mathbf{A}$化成矩阵$\mathbf{B}$，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的秩相等，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组一一对应，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$中对应的列向量满足相同的线性表达式.

性质5−3　设$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$可逆，则$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A})$.

该结论可叙述为：在$\mathbf{A}$的左边或右边乘可逆矩阵，秩都不变.

证明：由推论5−1可得，$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$.

$$r(\mathbf{AQ})=r((\mathbf{AQ})^T)=r(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T)\overset{\mathbf{Q}^T\text{可逆}}{=}r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}).$$

$$r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{P}(\mathbf{AQ}))\overset{\mathbf{P}\text{可逆}}{=}r(\mathbf{AQ})\overset{\mathbf{Q}\text{可逆}}{=}r(\mathbf{A}).$$

由于在矩阵$\mathbf{A}$的左侧乘可逆矩阵相当于对$\mathbf{A}$进行初等行变换，在矩阵$\mathbf{A}$的右侧乘可逆矩阵相当于对$\mathbf{A}$进行初等列变换，于是根据性质5-3，可得下面结论.

推论5−2　初等变换不改变矩阵的秩。

例题5−5 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$的秩，

并判断$\mathbf{A}$的行向量组和列向量组的线性相关性。

解: 对矩阵$\mathbf{A}$进行初等行变换.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{1}{5}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

$$\mathbf{B}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$|\mathbf{B}_3| = 10 \neq 0$, $\mathbf{B}$的所有4阶子式都为0,

因此 $r(\mathbf{B}) = 3$, 所以 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B}) = 3$,

$\mathbf{A}$的行秩=$\mathbf{A}$的列秩=$r(\mathbf{A}) = 3$,

$\mathbf{A}$的行向量组和列向量组都线性相关。

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

注：行阶梯矩阵的秩等于它的非零行的个数。

类似于B的矩阵称为行阶梯矩阵．其特点是：

(1) 非零行在上，零行在下，

(2) 非零行最左面的非零元素的列标随着行标的增大而严格增大（也可以说成每个台阶只有一行）．

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

这两个不是行阶梯矩阵.

矩阵**B**还能继续化简吗?

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&2&2&4\\0&0&0&5&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\div 5]{r_2\div 2}\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

矩阵**C**称为矩阵**A**的行最简形,满足下面的条件:

(1) 是行阶梯矩阵,

(2) 每个非零行的第一个非零元素都是1,这些1所在列的其它元素都为0.

注:行最简形通常要求只做行变换。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_5-c_3 \\ c_5-c_4}]{\substack{c_2+c_1 \\ c_5-c_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 \leftrightarrow c_4]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

这就是矩阵**A**的等价标准形.

性质5－4 矩阵$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$的秩为$r \Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$等价，

即存在可逆矩阵$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{PAQ}=\mathbf{F}$.

证明： 充分性显然。

必要性．设$r(\mathbf{A})=r$，由定理1－2可知

用初等变换能把矩阵$\mathbf{A}$化为$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$的形式，

由推论5－2可得 $s=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})=r$

所以$\mathbf{A}$与$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$等价。证毕。

矩阵$\mathbf{A}$的等价标准形由矩阵$\mathbf{A}$的秩唯一确定，

即矩阵$\mathbf{A}$的等价标准形是唯一的.

性质5−5 设**A**、**B**和**C**分别为$m\times n$型、$s\times t$型和$m\times t$型矩阵，则

(1) $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$;　(2) $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

注意，下列公式也正确：

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\qquad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$$

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{C}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\qquad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$$

性质5－5 设**A**、**B**和**C**分别为$m\times n$型、$s\times t$型和$m\times t$型矩阵，则

(1) $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$;　(2) $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

证明：(1) 设$r(\mathbf{A})=r_1, r(\mathbf{B})=r_2$,　　根据性质5－4,

通过初等变换可得 $\mathbf{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$$

所以 $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r_1+r_2=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$

性质5－5 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$分别为$m\times n$型、$s\times t$型和$m\times t$型矩阵，则

（1）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$;　（2）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

证明:（2）设$r(\mathbf{A})=r_1$, $r(\mathbf{B})=r_2$, 由矩阵的秩的定义可知，

$\mathbf{A}$中有$r_1$阶非奇异子阵$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}$中有$r_2$阶非奇异子阵$\mathbf{B}_1$,

于是，矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$中有$r_1+r_2$阶非奇异子阵$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_1\end{bmatrix}$,

$\mathbf{C}_1$是$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$中$\mathbf{A}_1$所在的行和$\mathbf{B}_1$所在的列相交处的元素构成的子矩阵

所以 $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq r_1+r_2=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

## 1. 分块矩阵的初等变换的定义:

(1) 对调分块矩阵的两行(列)称为分块矩阵的对调变换.

(2) 将分块矩阵的某行左乘(或某列右乘)一个可逆矩阵称为分块矩阵的倍乘变换.

(3) 将分块矩阵的某行左乘一个矩阵加到另一行(或某列右乘一个矩阵加到另一列) 称为分块矩阵的倍加变换.

2. 将单位矩阵的行和列做同样的分块所得到的矩阵称为分块单位矩阵.

3. 对分块单位矩阵进行一次初等变换所得到的矩阵称为分块初等矩阵.

4. 对一个分块矩阵进行一次初等行(列)变换等同于用对应的分块初等矩阵左(右)乘这个分块矩阵.

性质5−6 设$\mathbf{A}$为 $m\times k$ 型矩阵，$\mathbf{B}$为 $k\times n$ 型矩阵，则

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})\le\min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}.$$

关于性质5-6的理解：

注1：性质5-6给出了$\mathbf{AB}$的秩的一个大概范围.

注2：公式中的$k$是$\mathbf{A}$的列数.

注3：$r(\mathbf{AB})\le\min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}$的意思是$r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})$且$r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$，
做题时，要从这两个式子中选择一个使用.

注4：性质5-3和性质5-6都是关于矩阵乘积的秩的公式。
做题时，如果相乘的矩阵中有可逆矩阵，要用性质5-3；
如果相乘的矩阵中没有可逆矩阵，则用性质5-6.

证明： 先证右端不等式 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})$， $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$

$$r(\mathbf{A})=r([\mathbf{A},\mathbf{O}])\overset{c_2+c_1\mathbf{B}}{=}r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])\ge r(\mathbf{AB}),$$

即 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})$.

【注:$[\mathbf{A},\mathbf{AB}]$可看成$\mathbf{AB}$的增广矩阵，所以$r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])\ge r(\mathbf{AB})$】

因为$[\mathbf{A},\mathbf{O}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=[\mathbf{A},\mathbf{AB}]$， $\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}$可逆，

所以根据性质5−3可得 $r([\mathbf{A},\mathbf{O}])=r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])$

$$r(\mathbf{AB})\overset{\text{性质5-1}}{=}r((\mathbf{AB})^T)=r(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)\overset{\text{套公式}r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})}{\le}r(\mathbf{B}^T)=r(\mathbf{B}).$$

证明：再证左端不等式 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})$

即证 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le r(\mathbf{AB})+k$

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\overset{\text{性质5-5}}{\le} r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\overset{r_1-\mathbf{A}r_2}{=} r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{c_2-c_1\mathbf{B}}{=} r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)\overset{\text{性质5-5}}{=} r(-\mathbf{AB})+r(\mathbf{E}_k)=r(\mathbf{AB})+k,$$

由 $\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_k\end{bmatrix}$ 可逆

可得 $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$

由 $\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & -\mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & -\mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}$ 可逆

可得 $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)$

性质5−7 设$\mathbf{A}$为$m\times n$型矩阵，$\mathbf{B}$为$m\times k$型矩阵，则

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

证法1. $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=[\mathbf{E},\mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$

根据性质5-6可得 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$

又因为$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\overset{\text{性质5-5}}{=}r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$, 所以$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

证法2. 设$r(\mathbf{A})=r, r(\mathbf{B})=s$,

则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组中分别最多能找到$r$个和$s$个线性无关的向量,

于是,$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$的列向量组中最多能找到$r+s$个线性无关的向量,

所以 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r+s=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

性质5−8 设A和B都是$m\times n$型矩阵，则$r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

证明： $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}$

根据性质5-6可得 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r\left([\mathbf{A},\mathbf{B}]\right)\overset{\text{性质5-7}}{\le} r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

注1：$r(\mathbf{A}-\mathbf{B})=r(\mathbf{A}+(-\mathbf{B}))\le r(\mathbf{A})+r(-\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

即 $r(\mathbf{A}-\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

注2：$r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\ge ?$

$r(\mathbf{A})=r((\mathbf{A}+\mathbf{B})-\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A}+\mathbf{B})+r(\mathbf{B})$

$r(\mathbf{A})-r(\mathbf{B})\le r(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, 同理 $r(\mathbf{B})-r(\mathbf{A})\le r(\mathbf{A}+\mathbf{B})$

故 $|r(\mathbf{A})-r(\mathbf{B})|\le r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

书上112页第7题

设$\mathbf{A}$为$m\times k$矩阵,$\mathbf{B}$为$k\times n$矩阵,$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,证明 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le k$.

证：根据性质5−6可得 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})=0$,

所以 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le k$.

要记住这个结论，做题时经常用到这个结论。

例 设$\mathbf{A}$是$n$阶方阵,$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$,证明 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n.$

证明: 由$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$, 得 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{O}$,

根据112页第7题的结论可得

$$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})\le n.$$

$$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})$$

$$\overset{\text{性质5-8}}{\ge} r[(\mathbf{A}+2\mathbf{E})-(\mathbf{A}-\mathbf{E})]=r(3\mathbf{E})=n,$$

所以 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n.$

注1: 这里的结论具有一般性。

例如, 由$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-6\mathbf{E}=\mathbf{O}$, 可得 $r(\mathbf{A}+3\mathbf{E})+r(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=n.$

注2: 经常通过证明两个不等式来证明一个等式。

112页 第9题 设$\mathbf{A}$为$n$阶方阵,证明 $r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n & r(\mathbf{A})=n \\ 1 & r(\mathbf{A})=n-1. \\ 0 & r(\mathbf{A})\le n-2 \end{cases}$

**注：要记住这个结论。**

证明：(1) 当$r(\mathbf{A})=n$时,根据矩阵的秩的定义可知$|\mathbf{A}|\neq 0$,

由$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}\neq 0$可知，$r(\mathbf{A}^*)=n.$

(2) 当$r(\mathbf{A})=n-1$时,$\mathbf{A}$中非零子式的最高阶数为$n$-1,

所以$|\mathbf{A}|=0$, $\mathbf{A}^*\neq\mathbf{O}.$ 由$\mathbf{A}^*\neq\mathbf{O}$可得，$r(\mathbf{A}^*)\ge 1.$

因为$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=\mathbf{O},$

由112页第7题的结论，得 $r(\mathbf{A}^*)+r(\mathbf{A})\le n,$

因此$r(\mathbf{A}^*)\le n-r(\mathbf{A})=1.$ 所以$r(\mathbf{A}^*)=1.$

(3) 当$r(\mathbf{A})\le n-2$时,根据矩阵的秩的定义可知$\mathbf{A}^*=\mathbf{O},$

所以 $r(\mathbf{A}^*)=0.$

## 5.2.3 满秩矩阵

定义5−7 设$\mathbf{A}$为$n$阶方阵，

当$r(\mathbf{A})=n$时，$\mathbf{A}$叫做满秩矩阵；

当$r(\mathbf{A})<n$时，$\mathbf{A}$叫做降秩矩阵。

定义 设$\mathbf{A}$为$m\times n$型矩阵，

当$r(\mathbf{A})=m$时，$\mathbf{A}$叫做行满秩矩阵；

当$r(\mathbf{A})=n$时，$\mathbf{A}$叫做列满秩矩阵。

定理5−9 设**A**为$n$阶方阵，**x**和**b**为$n$元列向量，则

**A**为满秩矩阵

$\Leftrightarrow$ **A**为非奇异矩阵

$\Leftrightarrow$ **A**为可逆矩阵

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有唯一解

$\Leftrightarrow$ **A**的行向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ **A**的列向量组线性无关

注：上面结论都 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$

**A**为降秩矩阵

$\Leftrightarrow$ **A**为奇异矩阵

$\Leftrightarrow$ **A**为不可逆矩阵

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$无解或有无穷多解

$\Leftrightarrow$ **A**的行向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ **A**的列向量组线性相关

注：上面结论都 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0$

注：定理5-9建立了矩阵、方程组、向量组三者之间的联系.

113页提高题第3题　设$\mathbf{A}$为$m\times k$型矩阵,$\mathbf{B}$为$k\times n$型矩阵,

证明 (1) 若$\mathbf{A}$为列满秩矩阵，即$r(\mathbf{A})=k$，则$r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$,

(2) 若$\mathbf{B}$为行满秩矩阵，即$r(\mathbf{B})=k$，则$r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A})$.

证明：(1)由性质5−6，得$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$,

又因为$r(\mathbf{A})=k$，所以上式变成 $r(\mathbf{B})\le r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$,

即 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

同理可证(2).

性质5−3 若$\mathbf{P},\mathbf{Q}$可逆，则$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A})$

可逆矩阵既是行满秩阵又是列满秩阵.

上面第3题的结论可以看成是性质5-3的推广.

(1) 若$\mathbf{A}$是列满秩矩阵，$\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$，则$\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

(2) 若$\mathbf{B}$是行满秩矩阵，$\mathbf{XB}=\mathbf{YB}$，则$\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

注：这两个结论可看成“可逆矩阵可消去的推广”.

证明：(1) 由$\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$可得，$\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{Y})=\mathbf{O}$

因为$\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{Y})=\mathbf{O}$，所以$r[\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{Y})]=0$

由$\mathbf{A}$为列满秩矩阵可得，$r[\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{Y})]=r(\mathbf{X}-\mathbf{Y})$

所以 $r(\mathbf{X}-\mathbf{Y})=0$，即$\mathbf{X}-\mathbf{Y}=\mathbf{O}$，也即 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

同理可证(2).