第 8 章　方阵的特征值与相似对角化

特征值是矩阵的又一个重要的数值特性。工程技术中的振动问题和稳定性问题，数学中矩阵的对角化、曲面方程的化简、微分方程组的求解及解的稳定性分析等问题，都可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题.

本章先介绍方阵的特征值与特征向量的概念及性质，再引入相似矩阵的概念，并讨论一般方阵的相似对角化，最后介绍实对称矩阵的相似对角化.

8.1　方阵的特征值及其特征向量

8.1.1 特征值与特征向量的概念及计算

定义 8-1　设$\mathbf{A}$为 n 阶方阵，λ 为变量，把$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$的根叫做$\mathbf{A}$的**特征值**（单根称为**单特征值**，重根称为**重特征值**）.

设λ_i是$\mathbf{A}$的特征值，则齐次线性方程组$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的非零解向量叫做$\mathbf{A}$的对应于（或属于）$\lambda_i$的**特征向量**.

$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$称为$\mathbf{A}$的**特征方程**.

由定义可知，上（下）三角矩阵及对角矩阵的特征值就是它们的对角元.

下面介绍几个求特征值和特征向量的例子.

例 8-1　求$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征值.

解　由

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. 其中,i为虚数单位.

此例表明，实方阵的特征值不一定都是实数.

例 8-2　求方阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值及其对应的全部特征向量.

注意　若λ是$\mathbf{B}$的特征值，则$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的全部非零解向量（即通解中去掉零向量）就是$\lambda$所对应的全部特征向量.

解　由

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -2 & \lambda+3 & 2\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -\lambda-1 & \lambda+1 & 0\\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

求得$\mathbf{B}$的特征值为$\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=1$（单）.

对于$\lambda_1=-1$，解齐次线性方程组$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

由

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\div(-2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

求得$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为

$$\mathbf{p}_1=[1,1,0]^T,\ \mathbf{p}_2=[1,0,1]^T.$$

故$\lambda_1=-1$对应的全部特征向量为$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$（其中，$k_1,k_2$不全为零）.

注：$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$.是$\lambda_1=-1$对应的线性无关的特征向量。

对于$\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

由

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1\div 2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=[1,1,-1]^T.$$

故$\lambda_2 = 1$对应的全部特征向量为$k_3\mathbf{p}_3$（$k_3 \neq 0$）.

例 8-3 求方阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值及其对应的全部特征向量.

解 由

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -3 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3,$$

可得$\mathbf{C}$的特征值为$\lambda_1 = 1$（三重）.

由

$$\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求得方程组$(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{0}$的基础解系为

$$\mathbf{p} = [-1, 1, -1]^T,$$

故$\lambda_1 = 1$对应的全部特征向量为$k\mathbf{p}$ $(k \neq 0)$.

8.1.2 特征值与特征向量的性质

性质 8-1 n阶方阵$\mathbf{A}$在复数域内有且只有n个特征值（k重特征值看作k个）.

当n=2 时，

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

当$n > 2$时，用归纳法可证明：

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^n - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\mathbf{A}|. \tag{8.1}$$

其中，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$叫做$\mathbf{A}$的**迹**，它等于$\mathbf{A}$的n个对角元之和.

根据代数学基本定理可知，n阶方阵$\mathbf{A}$的特征方程$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$在复数域内有且只有$n$个根，故性质 8-1 正确.

$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$称为$\mathbf{A}$的**特征多项式**。

性质 8-2　若n阶方阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

（1）$tr(\mathbf{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$；

（2）$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

证明　由$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，得

$$\begin{aligned}|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\end{aligned}$$

比较上式与式(8.1)的系数和常数项可知性质 8-2 成立.

由性质 8-2 和"$\mathbf{A}$可逆$\Leftrightarrow|\mathbf{A}|\neq 0$"可得：

推论 8-1　方阵$\mathbf{A}$可逆$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$的特征值都不为零.

性质 8-3　设$\mathbf{A}$是n阶方阵，则λ是$\mathbf{A}$的特征值且$\mathbf{p}$是λ对应的特征向量$\Leftrightarrow$数λ和n元非零向量$\mathbf{p}$满足$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$.

证明　必要性　由λ是$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}$是λ对应的特征向量可得

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{0}\text{ 且 }\mathbf{p}\neq\mathbf{0},$$

即

$$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}\text{ 且 }\mathbf{p}\neq\mathbf{0}.$$

充分性　由$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$，得

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{0},$$

这说明$\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$是方程组$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的非零解向量，所以$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\mathbf{0}$，$\lambda$是$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}$是$\lambda$对应的特征向量.

这个性质很重要，它描述了矩阵与其特征值及其对应的特征向量之间的关系，常用于论证有关特征值和特征向量的某些问题,也可用这个充要条件来定义方阵的特征值及其特征向量.

性质 8-4　若λ是方阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}$是对应的特征向量，k是正整数，则λ^k是$\mathbf{A}^k$的特征值，$\mathbf{p}$仍是对应的特征向量.

证明　由已知条件及性质 8-3，得

$$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p} \text{ 且 } \mathbf{p}\neq\mathbf{0}.$$

于是，可得

$$\mathbf{A}^k\mathbf{p}=\mathbf{A}^{k-1}(\mathbf{Ap})=\lambda\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{p}=\cdots=\lambda^k\mathbf{p},$$

故 λ^k 是 $\mathbf{A}^k$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

通过验证 $f(\mathbf{A})\mathbf{p}=f(\lambda)\mathbf{p}$ 可以证明，若 λ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 是对应的特征向量，则

$$f(\lambda)=l_m\lambda^m+l_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+l_1\lambda+l_0$$

是

$$f(\mathbf{A})=l_m\mathbf{A}^m+l_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+l_1\mathbf{A}+l_0\mathbf{E}$$

的特征值，$\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量，其中 m 为正整数.

例 8-4 设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，证明: $\mathbf{A}$ 的特征值只能为 1 或-2.

证明 令 $f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}$，则 $f(\mathbf{A})=\mathbf{O}$, $f(\mathbf{A})$ 只有零特征值.

设 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$ 是 $f(\mathbf{A})$ 的特征值，所以

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

故 λ=1 或 -2.结论正确.

性质 8-5 设 λ 是可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 是对应的特征向量，则 λ^{-1} 和 $|\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 分别是 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $\mathbf{A}^*$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

证明 由 $\mathbf{A}$ 可逆及推论 8-1，得 $\lambda\neq$0.由性质 8-3 可得

$$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p},$$

用 $\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 左乘上式的两端，得

$$\lambda^{-1}\mathbf{p}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}，\text{即 } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}=\lambda^{-1}\mathbf{p}.$$

由 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 及上式，可得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{p}=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}=|\mathbf{A}|\lambda^{-1}\mathbf{p},$$

因为 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$，所以由性质 8-3 可知结论正确.

性质 8-6 方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征值相同.

证明 由

$$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}^T\right|=\left|(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^T\right|=\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|$$

可知，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征多项式相同，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征方程的根相同，即 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征值相同.

定理 8-1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的互异特征值，则它们分别对应的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ 一定线性无关.

证明 对 $s(1\le s\le m)$ 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时，由 $\mathbf{p}_1\ne\mathbf{0}$ 可知结论成立.

假设结论对 $s-1$ 成立，下面证明结论对 s 也成立.设

$$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}\mathbf{p}_{s-1}+k_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0} \tag{8.2}$$

用 $\mathbf{A}$ 左乘上式的两端，并注意 $\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i\,(i=1,2,\cdots,m)$，得

$$k_1\lambda_1\mathbf{p}_1+k_2\lambda_2\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}\mathbf{p}_{s-1}+k_s\lambda_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0} \tag{8.3}$$

用 λ_s 乘以式（8.2）的两端，再与式（8.3 相减，得

$$k_1(\lambda_s-\lambda_1)\mathbf{p}_1+k_2(\lambda_s-\lambda_2)\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})\mathbf{p}_{s-1}=\mathbf{0}\ .$$

由归纳法的假设可知 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_{s-1}$ 线性无关，于是可得

$$k_i(\lambda_s-\lambda_i)=0\,(i=1,2,\cdots,s-1)\ .$$

因为 $\lambda_s\ne\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,s-1)$,所以 $k_i=0\,(i=1,2,\cdots,s-1)$.这时，式（8.2）成为

$$k_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0}\,.$$

由特征向量 $\mathbf{p}_s\ne\mathbf{0}$，又可得 $k_s=0$，所以 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$ 线性无关.

可以将定理 8-1 推广到下面更一般的情形：

定理 8-2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的互异特征值，$\mathbf{p}_{i1},\mathbf{p}_{i2},\cdots,\mathbf{p}_{ir_i}$ 是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 对应的线性无关的特征向量，则 $\mathbf{p}_{11},\mathbf{p}_{12},\cdots,\mathbf{p}_{1r_1},\cdots,\mathbf{p}_{m1},\mathbf{p}_{m2},\cdots,\mathbf{p}_{mr_m}$ 线性无关.

该定理的证明与定理 8-1 类似，留作练习.

注意 对于一般的向量组，如果各个部分都线性无关，则合并起来不一定线性无关.上面定理反映的是特征向量所独有的性质.

思考题 8-1

1. 方阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同特征值能否对应同一个特征向量？

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵，$2n$ 阶分块对角矩阵 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 的特征值与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值有什么关系？

3.若用初等变换将方阵 $\mathbf{A}$ 化为方阵 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值是否相同？

4. 若 λ 和 μ 分别为方阵 $\mathbf{A}$ 和方阵 $\mathbf{B}$ 的特征值，则 $\lambda+\mu$ 是否为方阵 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的特征值？

5. 设三阶方阵 $\mathbf{A}$ 有一个二重特征值 $\lambda_1=-2,$ 并且 $r(\mathbf{A}+\mathbf{E})=2,$ 则 $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 和 $|\mathbf{A}|$ 等于什么？

6. 若 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 对应的线性无关的特征向量，则对任意实数 k_1 和 k_2，$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$ 是否为 λ 对应的特征向量？

习题 8-1

1. 求下列方阵的特征值及对应的全部特征向量.

（1） $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$； (2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$；

(3) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 3\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$； (4) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$；

（5）n 阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & k & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & k\end{bmatrix}$.

2. 已知方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}+6\mathbf{E}=\mathbf{O}$，试确定 $\mathbf{A}$ 的特征值的可能取值.

3. 已知向量 $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & k\end{bmatrix}$ 的对应于特征值 λ_1 的特征向量，求 k 及 $\mathbf{A}$ 的全部特征值.

4. 设 2 是可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值且 $|\mathbf{A}|=4$，试给出 $2\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^*$ 的一个特征值.

5. 已知 $\mathbf{A}$ 为四阶方阵，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=-1$，$-2$ 是 $\mathbf{A}$ 的二重特征值，1 是 $\mathbf{A}$ 的单特征值，求 $\mathbf{A}$ 的行列式及特征多项式.

6. 设 $\mathbf{A}$ 为方阵，若存在正整数 k 使 $\mathbf{A}^k=\mathbf{O}$，则称 $\mathbf{A}$ 为幂零矩阵.证明幂零矩阵只有零特征值.

7. 设 n 阶对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的每一列元素之和都为常数 k，证明 k 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，且 n 元向量 $[1,1,\cdots,1]^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的对应于特征值 k 的特征向量.

8. 设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{E}=\mathbf{O}$，证明 $\mathbf{A}+k\mathbf{E}$ 可逆 $\Leftrightarrow k\neq -2$.

提高题 8-1

1. 设 $\mathbf{u}=[6,0,12]^T$，三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1=[-2,1,0]^T,\mathbf{p}_2=[1,0,1]^T,\mathbf{P}_3=[1,-2,3]^T$，求 $\mathbf{A}^n\mathbf{u}$.

2. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵，λ 是 $\mathbf{AB}$ 的特征值，证明：λ 也是 $\mathbf{BA}$ 的特征值.

3.设 $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 和 $\mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 是两个相互正交的非零向量.

（1）证明：$\mathbf{A}=\mathbf{ab}^T$ 只有零特征值.

（2）求 $\mathbf{A}$ 的全部特征向量.

4.设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶降秩矩阵，证明：$\mathbf{A}^*$ 的特征值要么全为零，要么有 n-1 重零特征值和一个特征值 $\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$，其中 A_{ii} 为 a_{ii} 的代数余子式.

5. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵,且 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})<n$,证明：$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 至少有一个相同的特征向量.

8.2 相似矩阵

矩阵的相似变换是化简矩阵的又一条思路,通过这种变换将矩阵化为的对角矩阵包含了矩阵的特征值的信息.本节将讨论相似变换的概念、性质以及方阵可相似对角化的条件.

8.2.1 相似矩阵的概念与性质

定义 8-2 设 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵,如果存在 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$,使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$,则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **相似**；$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 称为对 $\mathbf{A}$ 进行相**似变换**；$\mathbf{P}$ 称为**相似变换矩阵**.

如果相似变换矩阵 $\mathbf{P}$ 是正交矩阵，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **正交相似**；$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 称为对 $\mathbf{A}$ 进行**正交相似变换**.

相似矩阵具有如下性质：

（1）若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，则 $\mathbf{A}^k$ 与 $\mathbf{B}^k$ 相似（k 为正整数）；

（2）若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值、行列式及迹均相同.

证明（1）设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$，则

$$\mathbf{B}^k=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^k=\overbrace{(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})}^{k\text{个}}$$

$$=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}（\mathbf{PP}^{-1}）\mathbf{A}（\mathbf{PP}^{-1}）\cdots\mathbf{A}（\mathbf{PP}^{-1}）\mathbf{AP}$$

$$=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$$

(2)设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$，则

$$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}\right|=\left|\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right|=\left|\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{P}\right|$$

$$=\left|\mathbf{P}^{-1}\right|\cdot\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|\cdot\left|\mathbf{P}\right|=\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|$$

所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同.

再由性质 8-2 可知，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的行列式和迹也相同.

8.2.2 相似对角化

定义 8-3 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 能与对角矩阵相似，则称 $\mathbf{A}$ **可相似对角化**. 当 $\mathbf{A}$ 可相似对角化时，与 $\mathbf{A}$ 相似的对角矩阵叫做 $\mathbf{A}$ 的**相似标准形**.

根据相似矩阵的性质可知，如果 $\mathbf{A}$ 相似于对角矩阵，那么这个对角矩阵的所有对角元为 $\mathbf{A}$ 的全部特征值.我们首先举例说明不是所有方阵都可相似对角化，然后再给出方阵可相似对角化的条件及判定方法.

例 8-5 证明: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 不可相似对角化.

证明 显然，$\mathbf{A}$ 只有一个二重特征值 1.

若 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵.

由相似矩阵有相同的特征值及对角矩阵的特征值为其对角元可知，$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{E}$.于是，

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\mathbf{PEP}^{-1}=\mathbf{E}\text{，}$$

这与已知条件矛盾，所以 $\mathbf{A}$ 不可相似对角化.

下面我们来讨论方阵可相似对角化的条件.

定理 8-3 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化的充要条件是 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证明 必要性 因为$\mathbf{A}$可相似对角化，所以存在可逆矩阵$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$为对角矩阵.设

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

则有

$$\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

即

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},.$$

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1,\mathbf{A}\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n]=[\lambda_1\mathbf{p}_1,\lambda_2\mathbf{p}_2,\cdots,\lambda_n\mathbf{p}_n],$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

因为$\mathbf{P}$为可逆矩阵，所以$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$都是非零向量且线性无关.由性质 8-3 可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$是它们分别对应的特征向量.故$\mathbf{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

充分性 设$\mathbf{A}$有n个线性无关的特征向量$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$,它们分别对应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

令$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]$，参考必要性的证明，可得

$$\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

由$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$线性无关可知，$\mathbf{P}$可逆.于是得出

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

所以$\mathbf{A}$可相似对角化.

注意 （1）由上述证明可以看出，用来把$\mathbf{A}$相似对角化的相似变换矩阵$\mathbf{P}$是以$\mathbf{A}$的 n 个线性无关的特征向量为列所构成的矩阵，所化为的对角矩阵$\mathbf{\Lambda}$的对角元恰为$\mathbf{A}$的n个特征值，并且特征值在$\mathbf{\Lambda}$中的排列次序与特征向量在$\mathbf{P}$中的排列次序相对应.

（2）通过求方程组$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系可找到$\mathbf{A}$的线性无关的特征向量，其中$\lambda_i$为$\mathbf{A}$的

特征值.

用定理 8-3 判别方阵是否可相似对角化，需要求出属于每个特征值的特征向量.下面给出不用求特征向量的判别方法.

由定理 8-1 和定理 8-3 可得：

推论 8-2 若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都是单特征值，则 $\mathbf{A}$ 可相似对角化.

下面对 $\mathbf{A}$ 有重特征值的情况加以研究.

定理 8-4 方阵 $\mathbf{A}$ 的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数一定小于或等于它的重数.

*__证明__ 设 μ 是 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的 k 重特征值，$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$ 是 μ 对应的线性无关的特征向量，我们来证明 $s\le k$.

若 $s=n$，则 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，所化成的对角矩阵的对角元全为 μ，μ 为 $\mathbf{A}$ 的 n 重特征值，$s=k=n$.

若 $s<n$，则 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$ 可扩充成全体 n 元向量所构成的向量空间的一个基 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$，$\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{p}_n$.令 $\mathbf{P}=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s,\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{p}_n\right]$,则 $\mathbf{P}$ 可逆.由已知条件可得，$\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\mu\mathbf{p}_i\,(i=1,2,\cdots,s)$.由于 $\mathbf{A}\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n$ 为 n 元向量，所以 $\mathbf{A}\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n$ 能由基 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$，$\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{p}_n$ 线性表示。设

$$\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{p}_{s+1}=b_{1,s+1}\mathbf{p}_1+b_{2,s+1}\mathbf{p}_2+\cdots+b_{s,s+1}\mathbf{p}_s+\mathrm{b}_{s+1,s+1}\mathbf{p}_{s+1}+\cdots+b_{n,s+1}\mathbf{p}_n\\ \qquad\vdots\\ \mathbf{A}\mathbf{p}_n=b_{1n}\mathbf{p}_1+b_{2n}\mathbf{p}_2+\cdots+b_{sn}\mathbf{p}_s+\mathrm{b}_{s+1,n}\mathbf{p}_{s+1}+\cdots+b_{nn}\mathbf{p}_n\end{cases},$$

于是，有

$$\mathbf{AP}=\left[\mathbf{A}\mathbf{p}_1,\mathbf{A}\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_s,\mathbf{A}\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n\right]$$

$$=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s,\mathbf{p}_{s+1},\cdots,\mathbf{p}_n\right]\begin{bmatrix}\mu & 0 & \cdots & 0 & b_{1,s+1} & \cdots & b_{1,n}\\ 0 & \mu & \cdots & 0 & b_{2,s+1} & \cdots & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu & b_{s,s+1} & \cdots & b_{s,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{s+1,s+1} & \cdots & b_{s+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,s+1} & \cdots & b_{n,n}\end{bmatrix}.$$

记上式最后一个矩阵为 $\mathbf{B}$，则有

$$\mathbf{Ap}=\mathbf{pB},$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B},$$

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同.

直接计算可知，μ 至少为 $\mathbf{B}$ 的 s 重特征值，所以 μ 至少为 $\mathbf{A}$ 的 s 重特征值，$s \le k$.

定理 8-5 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

证明 设 $\mathbf{A}$ 的互异特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$,则

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n.$$

充分性 根据定理 8-2，若 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 对应的线性无关特征向量的个数恰好等于其重数 n_i ，则合并起来正好有 n 个线性无关的特征向量。再根据定理 8-3 可知，$\mathbf{A}$ 可相似对角化.

必要性 因为 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，所以存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ ，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵. $\mathbf{\Lambda}$ 的 n 个对角元为 $\mathbf{A}$ 的全部特征值，其中有 n_i 个 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m)$.由于 $\mathbf{P}$ 中与 λ_i 相对应的 n_i 个列向量为 λ_i 对应的线性无关的特征向量，由定理 8-4 还知 λ_i 最多只能对应出 n_i 个线性无关的特征向量，所以 λ_i 所对应的线性无关特征向量的个数恰好等于其重数 n_i .

根据定理 8-5 可知,例 8-2 中的矩阵 $\mathbf{B}$ 是可相似对角化的，例 8-3 中的矩阵 $\mathbf{C}$ 和例 8-5 中的矩阵 $\mathbf{A}$ 是不可相似对角化的.

由 $(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数等于 $n - r(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})$,可得：

推论 8-3 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化的充要条件是每个特征值 λ_i 都满足 $r(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = n - n_i$,其中，n_i 为 λ_i 的重数.

注意 讨论方阵 $\mathbf{A}$ 是否可相似对角化时，单特征值不需讨论.

例 8-6 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

（1）求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$ ，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

(2) 求 $\mathbf{A}^k$,其中 k 为正整数.

解 （1）由

故

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -(\lambda-1) & \lambda-1 & 0\\ -(\lambda-1) & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（单）.

对于 $\lambda_1=1$，由

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_1=[-1,1,0]^T,\ \mathbf{p}_2=[1,0,1]^T\ .$$

对于 $\lambda_2=2$，由

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1-r_2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=[1,1,1]^T\ .$$

令

$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}.$$

（2）根据相似变换的性质可知，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}^k$，其中,$\mathbf{\Lambda}$ 为前面所求得的对角矩阵.

故

$$\mathbf{A}^k=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&-1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^k&2^k-1&1-2^k\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&2^k-1&2-2^k\end{bmatrix}.$$

思考题 8-2

1. 若 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，则 $\mathbf{A}$ 的相似标准形是否唯一？

2. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵且存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,则 $\mathbf{P}$ 是否唯一?为什么？

3. 如果方阵 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 中有一个可逆，则 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 是否相似?

4. 若 $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{B}$,$\mathbf{P}$ 可逆，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是否相似?

5. 请举例说明特征值完全相同的两个矩阵不一定相似.

6.对角元互异的上三角矩阵能否与对角矩阵相似？为什么？

7. 方阵 $\mathbf{A}$ 的秩等于其非零特征值的个数，这个结论是否成立？若不成立，加上什么条件就一定成立?

习题 8-2

1. 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}x&2&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&&\\&y&\\&&3\end{bmatrix}$ 相似，求 x 和 y.

2. 设三阶方阵 $\mathbf{A}$ 相似于矩阵 $\mathrm{diag}(-1,1,2)$,求 $\left|\mathbf{A}^2+\mathbf{E}\right|$.

3. 判断下列矩阵是否可相似对角化：

（1） $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&5\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$;　　(2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$.

4. 对下列矩阵为 $\mathbf{A}$，求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$；　　(2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-2&-2\\2&-1&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}$.

5. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶方阵，且 $\mathbf{E}-2\mathbf{A},\mathbf{E}+2\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{E}-3\mathbf{A}$ 的秩都小于 3，证明 $\mathbf{A}$ 可逆并求 $\left|\mathbf{E}+6\mathbf{A}\right|$ 和 $\left|2\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\right|$.

6. 当 k 为何值时，方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-5&k\\1&-4&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可相似对角化？

7. 已知三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$；$\mathbf{p}_1=[1,0,1]^T,\mathbf{p}_2=[1,1,1]^T$ 是特征值 1 对应的特征向量，$\mathbf{p}_3=[1,2,3]^T$ 是特征值 2 对应的特征向量，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^k$.

8. 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，$f(x)$ 是 x 的多项式，证明 $f(\mathbf{A})$ 与 $f(\mathbf{B})$ 也相似.

9. 设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$,$\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值 μ 对应的特征向量，证明：$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值 μ 对应的特征向量.

10. 设方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，证明：存在可逆矩阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{A}^T=\mathbf{O}$.

提高题 8-2

1. 设可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，证明 $\mathbf{A}^{-1}$ 与 $\mathbf{B}^{-1}$ 相似，$\mathbf{A}^*$ 与 $\mathbf{B}^*$ 相似.

2.设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的二元列向量，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，求 $\mathbf{A}$ 的特征值。

3.设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是三元列向量，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 相似于 $\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$.

4. 已知方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$,证明 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，并写出其相似标准形.

8.3 实对称矩阵的相似对角化

在可相似对角化的矩阵中，实对称矩阵是非常重要的一类. 很多问题都可归结为实对称矩阵的性质，例如，后面要讨论的二次型的标准化，特别是二次曲线和二次曲面的研究、多元函数的极值的判断以及线性偏微分方程的分类等问题都涉及到实对称矩阵. 因此，弄清实

对称矩阵有哪些特性是很有必要的.本节我们将主要介绍实对称矩阵的特征值、特征向量及可相似对角化的性质.

8.3.1 共轭矩阵

为了研究对称矩阵的特征值的性质，我们先简单介绍共轭矩阵的概念及性质.

定义 8-4 把复矩阵$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$的每个元素用其共轭复数代替所得的矩阵叫做$\mathbf{A}$的**共轭矩阵**，记作$\overline{\mathbf{A}}=\left[\overline{a}_{ij}\right]_{m\times n}$.

显然，$\mathbf{A}$为实矩阵$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$.

根据共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质，容易验证共轭矩阵具有下列性质：

（1）$\overline{\overline{\mathbf{A}}}=\mathbf{A}$；（2）$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$；（3）$\overline{k\mathbf{A}}=\overline{k}\overline{\mathbf{A}}$；

（4）$\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{B}}$；（5）$\overline{\mathbf{A}^T}=\overline{\mathbf{A}}^T$

对于任一复向量$\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$，因为

$$\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}=\left[\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\overline{x}_1x_1+\overline{x}_2x_2+\cdots+\overline{x}_nx_n$$

$$=\left|x_1\right|^2+\left|x_2\right|^2+\cdots+\left|x_n\right|^2,$$

其中,$\left|x_i\right|$（i=1,2,⋯,n)是复数x_i的模.所以

$$\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\geq 0;\qquad 当\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}\ 时，\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}>0.$$

8.3.2 实对称阵的性质

定理 8-6 实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值都是实数.

证明 由$\mathbf{A}$为实对称矩阵可得， $\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$. 故 $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}$.

设λ是$\mathbf{A}$的任一特征值，$\mathbf{p}$为λ对应的特征向量，则有

$$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}\ 且\ \mathbf{p}\neq\mathbf{0}.$$

由

$$\overline{\lambda}\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=(\overline{\lambda\mathbf{p}})^T\mathbf{p}=(\overline{\mathbf{Ap}})^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{Ap}=\lambda\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}\ ,$$

得

$$(\overline{\lambda}-\lambda)\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=0.$$

由 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$，可知 $\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}>0$.所以 $\overline{\lambda}-\lambda=0$，即 $\overline{\lambda}=\lambda$，$\lambda$ 为实数。

注意　若 λ_i 是实对称阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 λ_i 为实数，$\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 为实矩阵，$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系可取为实向量，故 λ_i 对应的特征向量可取为实向量.如无特别注明，下面所讲的实对称阵的特征向量均为实向量.

定理 8-7　实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的相异特征值 λ 和 μ 分别对应的特征向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 一定正交.

证明　由题意，得

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A},\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p},\mathbf{Aq}=\mu\mathbf{q},\lambda\neq\mu.$$

于是，有

$$\lambda\mathbf{p}^T\mathbf{q}=(\lambda\mathbf{p})^T\mathbf{q}=(\mathbf{Ap})^T\mathbf{q}=\mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{q}=\mathbf{p}^T\mathbf{Aq}=\mu\mathbf{p}^T\mathbf{q}\ ,$$

即

$$(\lambda-\mu)\mathbf{p}^T\mathbf{q}=0\,.$$

因为 $\lambda\neq\mu$,所以 $\mathbf{p}^T\mathbf{q}=0$,即 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 正交.

上一节我们研究了方阵可相似对角化的条件，并给出了不可相似对角化的例子.下面的定理告诉我们，实对称矩阵都可相似对角化，并且可用正交相似变换将其相似对角化，这是实对称矩阵的一个非常重要的性质.

定理 8-8　对于任意 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$，都存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\,,$$

其中，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

***证明**　用归纳法.

当 n=1 时，结论成立.

假设结论对 n-1 阶实对称矩阵成立，下面证明结论对 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 也成立.

设 $\mathbf{p}_1$ 是属于 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ_1 的单位特征向量，则

$$\mathbf{Ap}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1\,.$$

将 $\mathbf{p}_1$ 扩充成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$，按施密特正交化方法将其正交化并单位化，所得向量记作 $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_n$，其中 $\mathbf{q}_1=\mathbf{p}_1$.令 $\mathbf{Q}_1=\left[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_n\right]$，则 $\mathbf{Q}_1$ 为正交矩阵，且

$\mathbf{Q}_1\mathbf{e}_1=\mathbf{p}_1$.进一步，可得 $\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{p}_1=\mathbf{e}_1$.

用 $\mathbf{Q}_1^{-1}$ 左乘 $\mathbf{A}\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$ 的两端，得

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{p}_1,$$

即

$$(\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1)\mathbf{e}_1=\lambda_1\mathbf{e}_1.$$

由 $\mathbf{Q}_1$ 为正交矩阵可知，$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1=\mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$.由此式可验证 $\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$ 为实对称矩阵.于是，$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$ 的形式为

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix},$$

其中，$\mathbf{B}$ 为 n-1 阶实对称矩阵.

由相似矩阵具有相同的特征值可知，$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$ 与 $\mathbf{A}$ 的特征值相同，故 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$.

由归纳法的假设可知，存在正交矩阵 $\mathbf{Q}_2$，使得

$$\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_2=\mathrm{diag}\left(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n\right).$$

令 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}$，由

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^T\end{bmatrix}\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

可知，$\mathbf{Q}$ 为正交矩阵.这时，有

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}&=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_2\end{bmatrix}\\ &=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).\end{aligned}$$

由定理 8-5 和定理 8-8 可得：

推论 8-4 实对称矩阵的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

例 8-7 两个同阶的实对称矩阵相似的充要条件是它们有相同的特征值.

证明 充分性 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶的实对称矩阵，且有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.因为实对称矩阵都可正交相似对角化，所以存在正交矩阵 $\mathbf{Q}_1$ 和 $\mathbf{Q}_2$，使

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)=\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_2,$$

通过该式可得

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^{-1})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^{-1}=\mathbf{B}.$$

所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似.

必要性在相似矩阵的性质中已证明.

8.3.3 正交相似变换矩阵的求法

当实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都是单特征值时，求出每个特征值 λ_i 对应的方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，然后将它们单位化，可得到 $\mathbf{A}$ 的两两正交的单位特征向量，把它们作为 $\mathbf{Q}$ 的列向量，则 $\mathbf{Q}$ 就是所求的正交相似变换矩阵.

例 8-8 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

求一个正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 为对角矩阵.

解 由

$$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1),$$

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=2$，由

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\-2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_1=[0,0,1]^T.$$

对于 $\lambda_2=4$，由

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_2=[2,1,0]^T.$$

对于 $\lambda_3=-1$，由

$$\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=[1,-2,0]^T.$$

注：$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 对应的特征向量，由定理 8-7 可知，$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 两两正交。

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 单位化，得

$$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\1&0&0\end{bmatrix},$$

则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(2,4,-1)。$$

当实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 有重特征值时，求正交相似变换矩阵 $\mathbf{Q}$ 的步骤如下：

（1）求出 $\mathbf{A}$ 的全部特征值；

（2）对于各个不同的特征值 λ_i，分别求出齐次线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，并将其正交化和单位化；

（3）以上面所得的两两正交的单位特征向量为列即得正交相似变换矩阵 $\mathbf{Q}$.

注意　（1）$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是 λ_i 对应的线性无关的特征向量.

（2）正交化是对各个特征值 λ_i 所对应的线性无关的特征向量分别进行的.

例 8-9　设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$，求一个正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ 为对角矩阵.

解　由

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),,$$

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=-2$（单）.

对于 $\lambda_1=1$，由

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_1=[1,1,0]^T,\ \mathbf{p}_2=[1,0,1]^T.$$

注：$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$ 是 λ_1 对应的线性无关特征向量。

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 正交化，取

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2-\frac{\mathbf{u}_1^T\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

注：$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ 是 λ_1 对应的正交特征向量。

再将 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 单位化，得

$$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

注：$\mathbf{q}_1$，$\mathbf{q}_2$ 是 λ_1 对应的正交的单位特征向量。

对于 $\lambda_2=-2$，由

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2-r_3}\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-2&1\\0&3&-3\end{bmatrix},$$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为

$$\mathbf{p}_3=\left[-1,1,1\right]^T .$$

由于 λ_2 是单特征值，所以不需要正交化过程，但必须单位化。将 $\mathbf{p}_3$ 单位化，得

$$\mathbf{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

令

$$\mathbf{Q}=\left[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,-2) .$$

思考题 8-3

1.实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的非零特征值的个数是否为 $r(\mathbf{A})$？

2.若 $\mathbf{A}$ 不是实对称矩阵，则能否用正交相似变换将 $\mathbf{A}$ 化为对角矩阵？

3.将实对称矩阵的 k 重($k\geqslant 2$)特征值 λ_i 对应的 k 个线性无关的特征向量正交化后得到的

k 个向量还是λ_i对应的特征向量吗？为什么？

习题 8-3

1.对于下列实对称矩阵$\mathbf{A}$，分别求一个正交阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$为对角矩阵.

（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$; (2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$; (4) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$.

2.已知$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$是三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}_3=\left[1,1,1\right]^T$是$\lambda_3$对应的一个特征向量，求实对称矩阵$\mathbf{A}$.

3. 已知$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$是三阶实对称阵$\mathbf{A}$的特征值，$\mathbf{p}_1=\left[1,-1,0\right]^T,\mathbf{p}_2=\left[0,0,1\right]^T$是$\lambda_1=\lambda_2=1$对应的特征向量，求实对称阵$\mathbf{A}$.

4. 设n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$满足$\mathrm{tr}(\mathbf{A})<0$，证明：存在向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，使得$\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}<0$.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$为单位向量.求：

（1）矩阵$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的秩、迹和特征值.

（2）矩阵$\mathbf{B}=\mathbf{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的秩、迹和特征值.

6. 设实对称矩阵$\mathbf{A}$满足$(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}^2+\mathbf{E})=\mathbf{O}$，证明$\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

提高题 8-3

1.设$\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵，$\mathbf{A}^2=\mathbf{A},r(\mathbf{A})=r\ (0<r<n)$，证明：$\mathbf{A}$相似于$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$.

2. 证明：正交矩阵的特征值的模为 1.

3. 证明：实的反称矩阵的特征值为零或纯虚数.

*8.4 应用举例

例 8-10 预测从事各种职业人数之发展趋势

设某城市共有 30 万人从事农业、工业、商业工作，假定这个总人数在若干年内保持不变.社会调查表明：

（1）在 30 万就业人员中，目前约有 15 万人从事农业，9 万人从事工业，6 万人经商；

（2）在从农人员中，每年约有 20%改为从工，10%改为经商；

（3）在从工人员中，每年约有 20%改为从农，10%改为经商；

（4）在经商人员中，每年约有 10%改为从农，10%改为从工.

试预测若干年后，从事各种职业人员总数之发展趋势.

解 用 $\mathbf{x}^{(i)}=\left[x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)}\right]^T$ 表示第 i 年后从事农业、工业、商业的总人数所构成的向量.由题意，得

$$\mathbf{x}^{(0)}=\left[15,9,6\right]^T,$$

$$\mathbf{x}^{(n)}=\mathbf{A}\mathbf{x}^{(n-1)},$$

其中，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}.$$

于是，有

$$\mathbf{x}^{(n)}=\mathbf{A}\mathbf{x}^{(n-1)}=\mathbf{A}^2\mathbf{x}^{(n-2)}=\cdots=\mathbf{A}^n\mathbf{x}^{(0)}.$$

通过计算，可求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0.7,\lambda_3=0.5,$ 因而存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda},$$

其中，

$$\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,0.7,0.5).$$

这时，有

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},$$
$$\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1},$$
$$\mathbf{x}^n=(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x}^{(0)}.$$

由

$$\mathbf{\Lambda}^n=\mathrm{diag}(1,0.7^n,0.5^n)$$

可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\mathbf{\Lambda}^n\to\mathrm{diag}(1,0,0).$$

因而 $\mathbf{x}^n$ 将趋于一确定的向量 $\mathbf{x}^*$.因 $\mathbf{x}^{n-1}$ 也趋于 $\mathbf{x}^*$,所以由

$$\mathbf{x}^n=\mathbf{A}\mathbf{x}^{n-1}$$

可知，$\mathbf{x}^*$满足

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^*,$$

故$\mathbf{x}^*$是矩阵$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1 = 1$的特征向量.

求出$\lambda_1 = 1$对应的特征向量，可知

$$\mathbf{x}^* = k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

由$k+k+k=30$,得$k=10$. 这说明多年之后从事三种职业的人数将趋于相等，均有 10 万人.

在种群迁移、市场预测、生态与环境保护、生物繁殖、物种培育、遗传病的预防与控制、隐性连锁基因等问题的研究中都经常用到例 8-10 的研究方法.

例 8-11 隐性连锁基因问题　人类隐性连锁基因是位于 X 染色体的基因，例如，蓝、绿色盲就是一种隐性连锁基因.为了描述某地区居民中色盲的变化情况与性别的关系，我们假设男性与女性的比例为 1∶1. 以$x_1^{(0)}$和$x_2^{(0)}$分别表示该地区男性与女性居民中带有色盲基因的比例.因男性从母亲接受一个 X 染色体，故第二代色盲男性的比例$x_1^{(1)}$与第一代带有色盲基因的女性的比例$x_2^{(0)}$相等；因女性从父母双方各接受一个 X 染色体，第二代带有色盲基因的女性的比例$x_2^{(1)}$应为$x_1^{(0)}$与$x_2^{(0)}$的平均值.故

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{2}x_1^{(0)} + \dfrac{1}{2}x_2^{(0)} \end{cases}.$$

假定$x_1^{(0)} \neq x_2^{(0)}$,并且以下每一代的比例不变.引进符号

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}, \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix}x_1^{(n)}\\ x_2^{(n)}\end{bmatrix},$$

$x_1^{(n)}$，$x_2^{(n)}$分别表示第$n+1$代男性居民与女性居民中带有色盲基因的比例，则显然有

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{A}^n\mathbf{x}^{(0)} \quad .$$

利用相似对角化可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

于是，有

$$\mathbf{x}^{(n)}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (-\dfrac{1}{2})^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1-(-\dfrac{1}{2})^{n-1} & 2+(-\dfrac{1}{2})^{n-1}\\ 1-(-\dfrac{1}{2})^{n} & 2+(-\dfrac{1}{2})^{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x_1^{(0)}+2x_2^{(0)}\\ x_1^{(0)}+2x_2^{(0)}\end{bmatrix}.$$

上式表明，当世代增加时，在男性与女性中具有色盲基因的比例将趋于相同的值.若假设男性色盲基因的比例为 p ，则女性色盲基因的比例也是 p ，因为色盲是隐性的，可以预测色盲女性的比例将是 p^2.