第 6 章　线性方程

线性方程组是线性代数的一个非常重要的研究对象,应用非常广泛.本章利用第 5 章的知识来研究线性方程组有解的充要条件、解的结构及线性方程组的解法.

6.1　线性方程组解的存在性

6.1.1　齐次线性方程组有非零解的充要条件

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 一定有解，它的解分为两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解.下面给出其判别定理.

定理 6-1　$m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解(只有零解)$\Leftrightarrow$ $r(\mathbf{A})<n\,(r(\mathbf{A})=n)$.

证明　令 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$，则有

$$\begin{aligned}&\text{齐次线性方程组 } \mathbf{Ax}=\mathbf{0} \text{ 有非零解}\\ \Leftrightarrow\ &\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0} \text{ 有非零解}\\ \Leftrightarrow\ &\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n \text{ 线性相关}\\ \Leftrightarrow\ &r(\mathbf{A})<n..\end{aligned}$$

注意　$r(\mathbf{A})<n$ 意味着将 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯矩阵时非零行的个数小于 n,即对方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 化简以后所留下方程的个数小于 n,一个方程只能确定一个未知数，这时有自由变化的未知数，所以有非零解.

6.1.2　非齐次线性方程组解的存在性

对于非齐次线性方程组，它可能有解，也可能无解；有解时，可能是有唯一解，也可能是有无穷多个解。下面我们将利用矩阵的秩给出其判别方法。

定理 6-2　设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是 $m\times n$ 型非齐次线性方程组，则

（1）$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right);.$

（2）$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right)=n.$

证明（1）必要性. 设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\mathbf{u}$，则 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$，

$$r(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right])=r(\left[\mathbf{A},\mathbf{Au}\right])=r(\mathbf{A}\left[\mathbf{E},\mathbf{u}\right])\le r(\mathbf{A}).$$

由 $\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]$ 为 $\mathbf{A}$ 的增广矩阵又知，$r(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right])\ge r(\mathbf{A})$，所以

$$r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right).$$

充分性. 设 $r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right)=r$，并设 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是 $\mathbf{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，则

$\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$ 也是 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 的列向量组一个极大无关组. 由定理 5-7 可知，$\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \cdots, \mathbf{a}_{i_r}$ 线性表示，从而能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组线性表示.再由定理 5-1 可知，$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解.

（2）必要性 设 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{u}$,由（1）可得

$$r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) \leqslant \text{n}.$$

假设 $r(\mathbf{A})<\text{n}$,则由定理 6-1 可知，$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解，即存在 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$，使得 $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$. 由

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

可知，$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解。由于 $\mathbf{u}+\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$，这与 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解矛盾，所以 $r(\mathbf{A}) = n$.

充分性 由 $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) = n$ 可知，$\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关且为 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 的列向量组的极大无关组.由定理 5-7 可知，$\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组唯一地线性表示，再根据定理 5-1 可知 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解.证毕.

对于 $m \times n$ 型非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,由定理 6-2 可知：

（1）当 $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) \neq r(\mathbf{A})$ 时，$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 无解；

（2）当 $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) = n$ 时，$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解；

（3）当 $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) < n$ 时，$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解.

具体判别时，用初等行变换将增广矩阵 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 化为行阶梯矩阵 $[\mathbf{B}, \mathbf{c}]$，由 $\mathbf{B}$ 和 $[\mathbf{B}, \mathbf{c}]$ 的秩可知 $\mathbf{A}$ 和 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 的秩.

例 6-1 k 取何值时，方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = k \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = k \end{cases}$$

(1)有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

解 $$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} k & 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -k & k \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 & k \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - kr_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & k \\ 0 & k-1 & k+1 & 1-k \\ 0 & 1-k & k^2-1 & k-k^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & k \\ 0 & k-1 & k+1 & 1-k \\ 0 & 0 & k^2+k & 1-k^2 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}, \mathbf{c}]$$

(1)当 $k-1 \neq 0$ 且 $k^2+k \neq 0$，即 $k \neq 0$ 且 $k \neq \pm 1$ 时，$r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) = 3$,方程组有唯一解.

(2)当 k=0 时，

$$[\mathbf{B},\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，方程组无解.

(3)当 k=－1 时，

$$[\mathbf{B},\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&-2&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$,方程组有无穷多个解.

当 k=1 时，

$$[\mathbf{B},\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$,方程组有无穷多个解.

注意　对于例 6-1,也可先由 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 求出使方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解的 k，然后再对使 $|\mathbf{A}|=0$ 的 k 的取值情况加以讨论.

6.1.3 几何应用

下面我们用线性方程组和矩阵的秩来研究空间解析几何中平面与直线的问题.

设有三个平面

$$\pi_1: a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,$$
$$\pi_2: a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,$$
$$\pi_3: a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_{3.}$$

令 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}, \mathbf{u}=[x,y,z]^T, \mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$. 则三个平面间的位置关系就化为方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 的解的存在性问题，而求三个平面的交点或交线等计算就化为解方程组的计算.根据定理 6-2，可得：

1．上面的三个平面交于一点 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3.$

2．上面的三个平面重合 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解并且只有一个线性无关的方程 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=1.$

3．上面的三个平面交于一条直线 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解并且有两个线性无关的方程 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2.$

例 6-2　根据参数 k 的取值，判别三个平面

$$\pi_1 : kx+y-z=k,$$
$$\pi_2 : x+ky+z=1,$$
$$\pi_3 : x+y-kz=k$$

的相对位置.

解　将这三个平面的方程联立组成一个方程组，按照例 6-1 的做法，可得

(1) 当 $k\neq 0$ 且 $k\neq \pm 1$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3$，该方程组有唯一解，这三个平面交于一点.

(2) 当 $k=1$ 或 $k=-1$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$，该方程组有无穷多个解，这三个平面交于一条直线.

(3）当 $k=0$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，该方程组无解，这三个平面无公共交点．进一步分析可知，这三个平面两两相交.

当三个平面的方程组成的方程组无解时，平面的相对位置有多种情况，在此不再探讨．有兴趣的读者可自行探讨和研究.

下面我们来研究直线与平面之间的位置关系。

直线

$$l:\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \end{cases}$$

与平面

$$\pi : a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_{3.}$$

之间的关系可以看成三个平面之间的关系．可按上述方法处理，有如下的结论：

1. 直线 l 与平面 π 相交 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3.$

2. 直线 l 在平面 π 上 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解且 l 的两个方程的系数不成比例 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$ 且 $\mathbf{A}$ 的前两个行向量线性无关.

3. 直线 l 与平面 π 平行 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 无解且 l 的两个方程的系数不成比例 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2$ 且 $\mathbf{A}$ 的前两个行向量线性无关.

求直线 l 与平面 π 的交点就相当于求方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 的唯一解.

求 m 条直线（其方程为一般式方程）的交点就相当于求 $2m\times 3$ 型非齐次方程组的唯一解.

两条直线之间的关系也可以用矩阵的秩来判别，请读者研究.

思考题 6-1

下列结论是否正确？

（1）若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq\mathbf{0})$ 有无穷多个解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 也有无穷多个解.

（2）若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解.

（3）设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是 $m\times n$ 型线性方程组，若 $r(\mathbf{A})=m$,则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 一定有解.

（4）若 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$m<n$,则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解.

习题 6-1

1.当 k 为何值时，下列齐次线性方程组有非零解？

（1）$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2+x_3=0 \\ x_1+(k+1)x_2+kx_3=0 \\ 4x_1+(k-2)x_2+2x_3=0 \end{cases}$

2.当 k,a,b 取何值时，下列方程组有唯一解；无解；有无穷多个解？

（1）$\begin{cases} x_1+x_2-kx_3=k \\ 2x_1+kx_2-x_3=2 \\ kx_1+2x_2+x_3=k \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k^2 \\ x_1+kx_2+x_3=k \\ x_1+x_2+kx_3=1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3 \\ \quad -3ax_2+(a+2b)x_3=-3 \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+x_2-kx_3=-k \\ 2x_1+kx_2-x_3=2 \\ kx_1+2x_2+x_3=k \\ 3x_1+(k+1)x_2-(k+1)x_3=k^2 \end{cases}$

3.当 k 为何值时，向量 $\mathbf{b}=(1,-1,1)^T$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1=(-1,1,k)^T$,$\mathbf{a}_2=(1,k,1)^T$，$\mathbf{a}_3=(k,1,-1)^T$ 线性表示？

4. 已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值。

5. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times k$ 型和 $k\times n$ 型非零矩阵且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，证明：$r(\mathbf{A})<k$ 且 $r(\mathbf{B})<k$.

6. 设 $r(\mathbf{A}_{m\times n})=m$,证明：存在秩为 m 的 $n\times m$ 型矩阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$.

7. 设向量 $\mathbf{b}$ 能由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示，证明：向量 $\mathbf{b}$ 由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示的表达式唯一 $\Leftrightarrow$ 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关.

6.2 线性方程组解的性质、结构与解法

在这一节中我们将讲述线性方程组的解的性质、结构及用矩阵的初等行变换解线性方程组的方法。

6.2.1 线性方程组解的性质

设 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$,通过代入方程组进行验证的方法可以证明方程组的解具有下列性质：

（1）若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$ 为齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，则 $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_s\mathbf{v}_s$ 也为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意常数.

（2）若 $\mathbf{u}$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解， $\mathbf{v}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，则 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解.

（3）非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的两个解 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 的差 $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

（4）若 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_s$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，则

①$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_s\mathbf{u}_s$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解 $\Leftrightarrow k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0$；

②$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_s\mathbf{u}_s$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解 $\Leftrightarrow k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1$.

6.2.2 齐次线性方程组解的结构

一个方程组的所有解的一般表达式叫做这个方程组的**通解**.

研究方程组解的结构就是研究其通解的表达式.

定义 6-1 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集 S（即全部解向量的集合）的极大无关组叫做该齐次线性方程组的**基础解系**.

若已知 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$ ，则由定理 5-7 及解的性质（1）可知， $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_s\mathbf{v}_s$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意常数.

为了确定齐次线性方程组的基础解系，我们给出下面的定理.

定理 6-3 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集 S 的秩 $r(S) = n - r(\mathbf{A})$,即 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系所含向量的个数为 $n - r(\mathbf{A})$ ，其中， n 为未知数的个数，即 $\mathbf{A}$ 的列数.

证明 若 $r(\mathbf{A}) = n$,则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解，没有基础解系，结论正确.

若 $r(\mathbf{A}) = r < n$,不妨设 $\mathbf{A}$ 的行最简形为 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$,其中, $\mathbf{B}_1$ 为 $r \times (n\text{-}r)$ 型矩阵,则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ 同解.

令 $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}-\mathbf{B}_1\\ \mathbf{E}_{n-r}\end{bmatrix}$, 由 $\mathbf{E}_{n-r}$ 的列向量组线性无关可知，$\mathbf{Y}$ 的列向量组也线性无关;由 $\mathbf{BY}=\mathbf{O}$ 可知, $\mathbf{Y}$ 的列向量都是 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 的解（即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解），所以 $\mathbf{Y}$ 的列向量组是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，因而可得

$$r(S)\geq n-r=n-r(\mathbf{A}).$$

设 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，令 $\mathbf{V}=\left[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s\right]$,则 $\mathbf{AV}=\mathbf{O}$ 且 $r(\mathbf{V})=s$.由性质 5-6 可得

$$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{V})-n\leq r(\mathbf{AV})=0,$$

即

$$r(\mathbf{V})\leq n-r(\mathbf{A}),$$

所以

$$r(S)=r(\mathbf{V})\leq n-r(\mathbf{A}).$$

综合上面的讨论可得，

$$r(S)=n-r(\mathbf{A}).$$

注意　向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 为 $m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的充要条件是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解、线性无关且 $s=n-r(\mathbf{A})$..

例 6-3　设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

证明　先证明方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 同解。

若 $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任一解，则 $\mathbf{Au}=\mathbf{0}$.

在 $\mathbf{Au}=\mathbf{0}$ 的两边左乘 $\mathbf{A}^T$，得 $\mathbf{A}^T\mathbf{Au}=\mathbf{0}$，这说明 $\mathbf{u}$ 也是 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

若 $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任一解，则 $\mathbf{A}^T\mathbf{Av}=\mathbf{0}$.用 $\mathbf{v}^T$ 乘以上式两边，得

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Av}=\mathbf{0},\quad \text{即}\,(\mathbf{Av})^T(\mathbf{Av})=\mathbf{0}.$$

设 $\mathbf{Av}=\left[c_1,c_2,\cdots,c_m\right]^T$，则有

$$c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2=0.$$

故 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$，$\mathbf{Av}=\mathbf{0}$, $\mathbf{v}$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

综上可知,方程组 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 同解，它们的解集的秩相等，所以

$$n - r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{A}),$$

即

$$r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}).$$

根据上面所得结论，进一步可得

$$r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = r((\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}).$$

6.2.3 非齐次线性方程组解的结构

当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解时，解的结构不需讨论.下面对 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多个解的情况加以讨论.

定理 6-4 设 $\mathbf{u}$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个已知解（称为**特解**），$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{n-r}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{n-r}\mathbf{v}_{n-r} + \mathbf{u}, \tag{6.1}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

证明 由解的性质可知，对于任意的 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，式(6.1)所表示的向量都是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解.

另一方面，设 $\mathbf{c}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任一解，则 $\mathbf{c} - \mathbf{u}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，于是存在数 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-r}$，使得

$$\mathbf{c} - \mathbf{u} = l_1\mathbf{v}_1 + l_2\mathbf{v}_2 + \cdots + l_{n-r}\mathbf{v}_{n-r},$$

即

$$\mathbf{c} = l_1\mathbf{v}_1 + l_2\mathbf{v}_2 + \cdots + l_{n-r}\mathbf{v}_{n-r} + \mathbf{u},$$

这说明 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任一解都可表示成式(6.1)的形式，故式(6.1)为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解.

注意 “非齐次线性方程组的通解”=“对应的齐次线性方程组的通解”+“该非齐次线性方程组的一个特解”.

例 6-4 设 $r(\mathbf{A}_{4\times3}) = 2$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = [2, -2, 2]^T$, $\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3 = [1, 0, -1]^T$，求 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解.

解 由 $r(\mathbf{A}_{4\times3}) = 2$ 可知，$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系只含一个向量，因而，$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的任意一个非零解都可作为它的基础解系.下面来求 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系和 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解.

由 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{Au}_1 + \mathbf{Au}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{b} = 2\mathbf{b},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3) = \mathbf{Au}_1 + 2\mathbf{Au}_3 = \mathbf{b} + 2\mathbf{b} = 3\mathbf{b}.$$

根据上面两个式子，可得

$$\mathbf{A}[3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)]=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}\frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}=\mathbf{b}.$$

因而，$3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，$\frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个特解。

通过计算，可得

$$3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)=(4,-6,8)^T,$$

$$\frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}=(1,-1,1)^T.$$

于是，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x}=k[4,-6,8]^T+[1,-1,1]^T.$$

其中，k 为任意实数.

6.2.4　利用矩阵的初等行变换解线性方程组

由于对非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等行变换时，方程组的解不变，因此，我们可以先用初等行变换将非齐次线性方程组的增广矩阵化为行最简形，然后求出这个行最简形所对应的方程组的通解，即可得到原方程组的通解.对于齐次线性方程组，只需用初等行变换将它的系数矩阵化成行最简形。

例 6-5 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=0. \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \end{cases} \tag{6.2}$$

解　首先用初等行变换将该方程组的系数矩阵化为行最简形.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该行最简形对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_2 \quad -x_4=0 \\ \qquad x_3-2x_4=0 \end{cases};$$

即

$$\begin{cases} x_1=x_2+x_4 \\ x_3=\quad 2x_4 \end{cases}. \tag{6.3}$$

方程组（6.3）与方程组（6.2）同解.

在方程组（6.3）中，把 x_2 和 x_4 看作可以取任意实数的自由未知数.

令 $x_2=k_1,x_4=k_2$,得

$$\begin{cases} x_1=k_1+k_2 \\ x_2=k_1 \\ x_3=\quad 2k_2 \\ x_4=\quad k_2 \end{cases}.$$

写成向量形式为

$$\mathbf{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意实数.这就是方程组（6.2）的通解.

容易验证，$\mathbf{v}_1=[1,1,0,0]^T,\mathbf{v}_2=[1,0,2,1]^T$ 线性无关且都是方程组（6.2）的解.由 $r(\mathbf{A})=2$ 可知方程组（6.2）的基础解系含 2 个向量，所以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 为方程组（6.2）的基础解系，上面所求得的结果确实是通解.

注意　（1）解方程组时不要做倍加列变换和倍乘列变换。若做对调列变换，那么行最简形对应的方程组怎样写要考虑清楚.

（2）一般取行最简形的每个非零行的第一个非零元素所在列对应的未知数为非自由未知数，取其余的未知数为自由未知数.

（3）有些问题可能不需要求通解，只需要求基础解系，这时可这样做：逐次令自由未知数中的一个为 1，其余的自由未知数为 0，可求得一组解，这组解就是基础解系.

例如，在方程组（6.3）中，令 $x_2=1,x_4=0$ ，求得一个解为 $\mathbf{v}_1=[1,1,0,0]^T$;令 $x_2=0,x_4=1$ ，又求得一个解为 $\mathbf{v}_2=[1,0,2,1]^T$ ，则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就是方程组（6.2）的基础解系.

例 6-6　求解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=2 \\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=-1. \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$$

解　首先用初等行变换将该方程组的增广矩阵化为行最简形.

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&2\\-1&1&2&-3&-1\\1&-1&1&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&2&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&3\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

该行最简形对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad\quad - x_4 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 3 \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1 \end{cases}.$$

取 x_2 和 x_4 为自由未知数，并令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$,得

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 3 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = \quad\quad 2k_2 + 1 \\ x_4 = \quad\quad\quad k_2 \end{cases}.$$

写成向量形式为

$$\mathbf{x} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意实数.这就是该方程组的通解.

思考题 6-2

1.齐次线性方程组的基础解系是否唯一？

2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的两个不同的基础解系之间有什么关系？

3.$m \times n$ 型方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解时，自由未知数的个数与 $r(\mathbf{A})$ 有何关系？为什么？

4.解方程组时自由未知数的选择是否唯一？按例 6-5 中的方法选择自由未知数有什么好处？

习题 6-2

1.求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \quad\quad x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

2.求下列齐次线性方程组的通解和一个基础解系：

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3 \quad =0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+x_4=0 \end{cases}$.

3. 求下列非齐次线性方程组的通解：

（1）$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=9 \\ x_1+2x_2+x_3 \quad =6 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=7 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=11 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+3x_2+3x_3-7x_4=7 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=5 \\ x_1 \quad +2x_3+4x_4=1 \end{cases}$.

4.设 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，试问 m 和 k 满足什么条件时，$m\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$，$k\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$，$2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

5.设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4]$ 为四阶方阵，$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 线性无关，$\mathbf{a}_1=2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$，$\mathbf{b}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$，求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解.

6.设 $r(\mathbf{A}_{4\times4})=3$, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，且 $\boldsymbol{\eta}_1=[2,3,4,5]^T$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[1,2,3,4]^T$，求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解.

7. 设 $\mathbf{u}_{s+1}$ 是非齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个解，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，$\mathbf{u}_i=\mathbf{v}_i+\mathbf{u}_{s+1}(i=1,2,\cdots,s)$，证明：

（1）$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x}=k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_{s+1}\mathbf{u}_{s+1},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{s+1}$ 为任意常数，且 $\sum_{i=1}^{s+1}k_i=1$；

（2）向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s,\mathbf{u}_{s+1}$ 线性无关;

（3）向量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_s,\mathbf{u}_{s+1}$ 线性无关.

8.证明：

（1）$(\mathbf{AB})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 同解 $\Leftrightarrow r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$；

(2) 若 $m\times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r，$s=n-r$，则存在秩为 s 的 $n\times s$ 型矩阵 $\mathbf{B}$，使得

$$\mathbf{AB}=\mathbf{O}.$$

*9. 证明：方程组 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{b}$ 总是有解的，其中 $\mathrm{A}\in\mathrm{R}^{\mathrm{m\times n}},\mathrm{b}\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$.

*6.3 应用举例

例 6-7　化学方程式的配平

化学实验的结果表明，丙烷燃烧时将消耗氧气并产生二氧化碳和水，该反应的化学反应式具有下列形式

$$x_1C_3H_8 + x_2O_2 \to x_3CO_2 + x_4H_2O，$$

要使该化学方程式平衡，需选择 x_1，x_2，x_3，x_4，使上式两端的 C、H、O 的原子数目对应相等.于是，得到方程组

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ 8x_1 = 2x_4 \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

求解上述方程组，可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{4}x_4 \\ x_3 = \dfrac{3}{4}x_4 \end{cases}.$$

考虑到 x_1，x_2，x_3，x_4 都是正整数，取 $x_4 = 4$，得 $x_1 = 1$，$x_2 = 5$，$x_3 = 3$. 故该化学方程式为

$$C_3H_8 + 5O_2 = 3CO_2 + 4H_2O.$$

例 6-8　电路求解

试求如图 6.1 所示的电路中各支路的电流.

解　分析电路的依据是 Kirchhoff 电流定律（KCL）与电压定律（KVL）:

（1）KCL　汇集在一个节点上的支路电流的代数和恒等于零.

（2）KVL　任一回路内，支路电压的代数和恒等于零.

每一电阻上的电压降 E 由欧姆定律 $E = iR$ 给出.于是，对节点 A 和节点 B 应用 KCL，得

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0,$$
$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0.$$

对上回路和下回路应用 KVL，得

$$4i_1 + 2i_2 = 8,$$
$$2i_2 + 5i_3 = 9.$$

解上面的 4 个方程所构成的方程组可得

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \quad i_3 = 1.$$

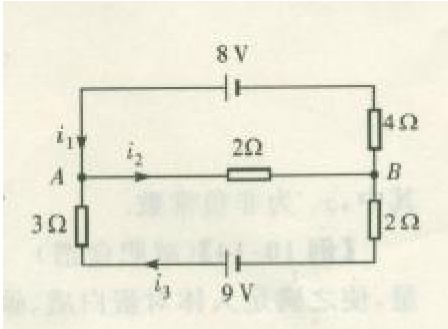

图 6. 1

例 6-9 交通流量分析

某城市有两组单行道，构成了一个包含四个节点 A、B、C、D 的十字路口（图 6.2）. 图上标出了在交通繁忙时段汽车进出此十字路口的流量（每小时的车流数）. 计算每两个节点之间路段上的交通流量 x_1, x_2, x_3, x_4.

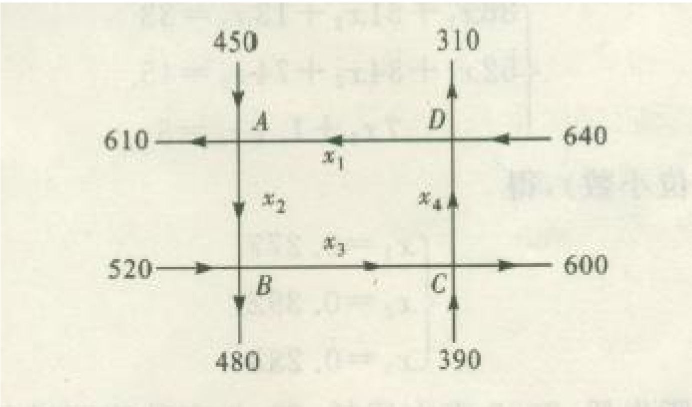

图 6.2

解 在每个节点上，进入和离开的车辆数应该相等.依次考虑 A、B、C、D 四个节点，得

$$\begin{cases} x_1 + 450 = x_2 + 610 \\ x_2 + 520 = x_3 + 480 \\ x_3 + 390 = x_4 + 600 \\ x_4 + 640 = x_1 + 310 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_3 = -40 \\ x_3 - x_4 = 210 \\ x_4 - x_1 = -330 \end{cases}.$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 330 \\ x_2 = x_3 + 170 \\ x_3 = x_4 + 210 \end{cases},$$

其中，x_4为非负常数.

例 6-10　对无解方程组的解决方法

在一些实际问题中，我们所遇到的方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$不一定都是有解的.例如，通过实验我们了解到一个质点的运动轨迹是直线，为了确定这条直线的方程$y=ax+b$，我们测得n个不同时刻质点的位置$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$.

由于实验都存在误差，(x_i,y_i)不一定都在直线$y=ax+b$上，通常都有偏差；另外，为了保证所求直线方程相对精确，我们希望多测一些点.这时关于a,b的方程组

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \\ \qquad\vdots \\ ax_n+b=y_n \end{cases} \tag{6.4}$$

一般都是无解的. 为了求得相对精确的a和b，我们希望所求出的a,b能使

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

最小，这样的a,b称为方程组（6.4)的**最小二乘解**.

对于无解的方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$,使得$\|\mathbf{Ax}-\boldsymbol{\beta}\|$最小的$\hat{\mathbf{x}}$叫做该方程组的最小二乘解.

利用正交向量的相关结论，可以证明，方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的最小二乘解等于方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^T\boldsymbol{\beta}$的解，并且可以证明方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^T\boldsymbol{\beta}$一定有解.

因而，通过解方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^T\boldsymbol{\beta}$可求得方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的最小二乘解.