

2.4 分块三角行列式及方阵乘积的行列式

代万基

数学科学学院

大连理工大学



定理2-1 设 A 和 B 分别为 m 阶和 n 阶方阵,

$$C \text{ 为 } m \times n \text{ 型矩阵, 则 } \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

证: 根据21页定理1-1及35页性质2-5可得

$$A \xrightarrow{\text{倍加行变换}} S \text{ 上三角阵, } |A| = |S| = s_{11} \cdots s_{mm}$$

$$B \xrightarrow{\text{倍加行变换}} T \text{ 上三角阵, } |B| = |T| = t_{11} \cdots t_{nn}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{倍加行变换}} \begin{pmatrix} S & H \\ O & T \end{pmatrix} \text{ 上三角阵}$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & H \\ O & T \end{vmatrix} = s_{11} \cdots s_{mm} t_{11} \cdots t_{nn} = |S| \cdot |T| = |A| \cdot |B|$$



定理2-1的结论可推广到分块下三角行列式和分块对角行列式的情况:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

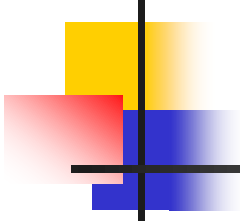
注意: 一般 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A||D| - |B||C|$

例: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

则有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

但是 $|A||D| - |B||C| = 1$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A||D| - |B||C|$$

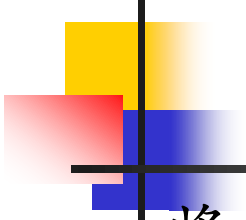


知识拓展：下面讨论按副对角线看的分块对角行列式、分块下三角行列式、分块上三角行列式。

例：设 A 为3阶方阵， B 为 n 阶方阵，

证明：
$$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |A| |B|$$

$$\begin{aligned}
\text{证: } \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3n} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|
\end{aligned}$$



将上面例题的结论加以推广可得下面的定理。

定理 设 A 为 m 阶方阵， B 为 n 阶方阵，则
$$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

类似的还有

$$\begin{vmatrix} O & B \\ A & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} D & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

下面来讨论方阵乘积的行列式。

定理2-2 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，则 $|AB|=|A|\cdot|B|$

证明： (1) 由21页定理1-1可知,只用倍加行变换或只用倍加列变换都能把一个方阵化成上三角矩阵。

存在倍加矩阵 P_1, P_2, \dots, P_k 和倍加矩阵 Q_1, Q_1, \dots, Q_l , 使得

$$P_k \cdots P_2 P_1 A = S \quad (\text{做倍加行变换将} A \text{化成上三角矩阵} S)$$

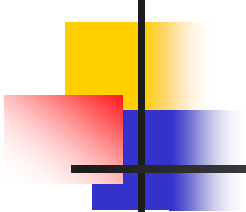
$$B Q_1 Q_2 \cdots Q_l = T \quad (\text{做倍加列变换将} B \text{化成上三角矩阵} T)$$

(2) 由性质2-5(倍加变换不改变行列式的值)及例2-2(上三角行列式等于其对角元的乘积)可得

$$|A| = |S| = s_{11} \cdots s_{nn}, \quad |B| = |T| = t_{11} \cdots t_{nn}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad |AB| &= |P_k \cdots P_1 (AB) Q_1 \cdots Q_l| = |(P_k \cdots P_1 A)(B Q_1 \cdots Q_l)| \\ &= |ST| = (s_{11} t_{11}) \cdots (s_{nn} t_{nn}) = s_{11} \cdots s_{nn} t_{11} \cdots t_{nn} = |A| |B| \end{aligned}$$

注：由第一章例1-4可知，上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵



由定理2-2可得


推论2-5 设 A 是 n 阶方阵, k 为正整数, 则

$$|A^k| = |A|^k.$$

注1: 若 A, B 为同阶方阵, 则 $|AB| = |BA|$

证: 因为 $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|BA| = |B| \cdot |A|$, $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$

所以 $|AB| = |BA|$



注2: 若 A, B 不是同阶方阵, 则 $|AB|$ 不一定等于 $|BA|$

例: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\text{则 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$|AB| \neq |BA|$$
