第5章　向量组的线性相关性与矩阵的秩

5.3　矩阵的秩在向量组中的应用

5.3.1 判断向量组的线性相关性

向量组V线性无关$\Leftrightarrow$V的秩等于其所含向量的个数.

向量组V线性相关$\Leftrightarrow$V的秩小于其所含向量的个数.

以所给向量组为列（或行）构造矩阵**A**，根据三秩相等定理，求出**A**的秩就可知道该向量组的秩，从而可判断该向量组的线性相关性。

例5−6 证明：当$m>n$时，n元向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$一定线性相关。

注1: 在本题中，m表示向量个数，n表示分量个数.

注2: 该例题的结论可叙述为

向量个数大于分量个数的向量组一定线性相关

证明：令$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]$，则$\mathbf{A}$为$n\times m$型矩阵.

因为 $r(\mathbf{A})\le n<m$，所以$\mathbf{A}$的列秩$<m$,

因而$\mathbf{A}$的列向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性相关。

例5－7 证明： $r(\mathbf{R}^n)=n.$

注1: $\mathbf{R}^n$表示所有n元实向量构成的集合.

$\mathbf{R}^n$ 也表示n维几何空间.

注2: 该例题的结论表明$\mathbf{R}^n$的秩等于$\mathbf{R}^n$的维数.

证明: $\mathbf{R}^n$中的向量$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关,

由例5-6可知$\mathbf{R}^n$ 中任何$n+1$个向量都是线性相关的,

所以$r(\mathbf{R}^n)=n.$

例5−8 设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关，证明：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$也线性无关.

证法1： 因为 $r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)\overset{c_2-c_1}{=}r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2,$

【注： 由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关可得$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2$】

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关。

注：通过初等变换来求矩阵的秩是一种很重要的方法.

证法2： $\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

显然$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$可逆,

根据性质5-3可得 $r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)=r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2,$

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关。

证法3：（用线性无关的定义证）

设$k_1\mathbf{a}_1+k_2(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=0$,　则有$(k_1+k_2)\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$.

由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关可得 $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \end{cases}$

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关。

向量组线性相关、线性无关的讨论方法：

(1) 根据定义5-2

(2) 通过行列式（要求所给向量组构成的矩阵是方阵）

(3) 通过秩

(4) 反证法

(5) 定理5-2的第一个结论

(6) 定理5-3

(7) 定理5-5

(8) 定理5-6

(9) 例5-6

(10) 定理5-11，推论5-3，例5-10，习题5-3第4题

5.3.2 求向量组的极大无关组

根据定理5－8和推论5-1可知，若用初等行变换将矩阵**A**化成矩阵**B**，则**A**和**B**的列向量组的极大无关组是一一对应的，并且对应的列向量满足相同的线性表达式。

根据上面的结论，我们可以用初等行变换将矩阵**A**化成行阶梯矩阵**B**，通过**B**的列向量组的极大无关组来找到**A**的的列向量组的极大无关组，通过**B**中列向量满足的表达式来找到**A**中列向量所满足的表达式.

例5－9　求向量组$\mathbf{a}_1=[1,0,1,-1]^T$，$\mathbf{a}_2=[1,-2,1,1]^T$，$\mathbf{a}_3=[1,2,1,-3]^T$，$\mathbf{a}_4=[0,1,1,3]^T$，$\mathbf{a}_5=[2,-4,0,-6]^T$的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：以所给向量为列构造矩阵$\mathbf{A}$，用行变换将$\mathbf{A}$化成行阶梯矩阵$\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{B}$$

$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=3$,　　所给向量组的秩为3.

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{b}_5]$$

B的每个非零行的第一个非零元素所在的列构成的子矩阵为

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad r([\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4])=3,$$

$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4$线性无关。

于是$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4$是向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{b}_5$的极大无关组,

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$是向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5$的极大无关组。

注1：极大无关组还可以是$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5$；$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$；$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_5$等

注2：不能说$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4$是所给向量组的极大无关组.

为了将$\mathbf{a}_3$和$\mathbf{a}_5$用极大无关组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$线性表示，

需进一步用初等行变换将**B**化为行最简形。

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&\boxed{1}&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&0&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&\boxed{1}&1&0&2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{C}$$

因为$\mathbf{c}_3=2\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2$，$\mathbf{c}_5=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2-2\mathbf{c}_4$,

所以 $\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_4$.

注意：在该题中不能做列变换。否则，极大无关组和线性表达式就不一一对应了.

5.3.3 等价向量组

定义5-8　若向量组Ⅰ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 中的每个向量都能由

向量组Ⅱ：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示,

则称向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示.

若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ能够互相线性表示,

则称向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.

注1：向量组之间的的线性表示、等价具有传递性.

注2：一个向量组与其极大无关组是等价的(可用定理5-7证明).

注3：同一个向量组的两个极大无关组是等价的.

注：向量组等价与矩阵等价的含义不同.

虽然向量组与矩阵之间有联系，但不能把二者等同。

(1) 等价矩阵的列向量组不一定等价.

例如，矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$等价,

但是列向量组$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$不等价.

(2) 等价的列向量组所构成的矩阵不一定等价.

例如，向量组$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$与向量组$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$等价,

但是它们构成的矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$不等价.

设向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示，并设表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m1}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_2 = p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m2}\mathbf{a}_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{b}_n = p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{mn}\mathbf{a}_m \end{cases} \tag{5.4}$$

上式可写成

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}.$$

式（5.4）可写成矩阵形式 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$

注：$\mathbf{P}$是式（5.4）中系数矩阵的转置，$\mathbf{P}$在$\mathbf{A}$的右侧.

定理5-10 向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵$\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}$.

其中 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m],\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$.

注意：矩阵方程$\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{B}$有解 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵$\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$.

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}$的列向量组能由$\mathbf{A}$的列向量组线性表示

定理5-11 若向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示，则$r(\text{Ⅰ})\le r(\text{Ⅱ})$.

证明 设向量组Ⅰ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$， $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$，

向量组Ⅱ：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$， $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]$，

向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示$\Rightarrow$存在矩阵$\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}$

$r(\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})$， 所以$r(\text{Ⅰ})\le r(\text{Ⅱ})$.

推论5-3 若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价，则$r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

证明：Ⅰ与Ⅱ等价 $\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ⅰ能由Ⅱ表示}\Rightarrow r(\text{Ⅰ})\le r(\text{Ⅱ})\\ \text{Ⅱ能由Ⅰ表示}\Rightarrow r(\text{Ⅱ})\le r(\text{Ⅰ})\end{array}\right\}\Rightarrow r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

例 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为线性无关的n元列向量组,

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\quad \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-k\mathbf{a}_3,\quad \mathbf{b}_3=k\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3.$$

(1) 当k取何值时，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关?

(2) 当k取何值时，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性相关?

解 设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$,

已知条件可写成矩阵形式$\mathbf{B}=\mathbf{AP}$，其中$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&k\\1&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix}$.

$$|\mathbf{P}|=1-k^2,$$

(1) 当$k\neq\pm1$时，$|\mathbf{P}|\neq0$，$\mathbf{P}$可逆，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})=r(\mathbf{A})=3$,

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关.

(2) 当$k=1$或$k=-1$时，$|\mathbf{P}|=0$，$r(\mathbf{P})<3$，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})\leq r(\mathbf{P})<3$,

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性相关.

注：当$|\mathbf{P}|\neq0$，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关时，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关.

当$|\mathbf{P}|=0$时,不管$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是相关还是无关,向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$都相关

例5−10　设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为n元向量组,

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3.$$

证明：向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 线性无关$\Leftrightarrow$向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关.

证法1　设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$,　$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$,

则 $$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix},$$

即 $\mathbf{B}=\mathbf{AP}$,　其中 $$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

$|\mathbf{P}|=2$,　$\mathbf{P}$可逆,　$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})=r(\mathbf{A})$.

$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关$\Leftrightarrow r(\mathbf{B})=3\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=3\Leftrightarrow \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关.

例5－10　设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为n元向量组,

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3.$$

证明：向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 线性无关$\Leftrightarrow$向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关.

证法2　由已知条件可求得

$$\mathbf{a}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3),$$

$$\mathbf{a}_2=\frac{1}{2}(-\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3),$$

$$\mathbf{a}_3=\frac{1}{2}(-\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3).$$

向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$与向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$等价,

它们的秩相等，线性相关性相同，所以结论成立.

定理5-12　若向量组V中有r个向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性无关，并且V中的任一向量都可由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示，则向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组V的一个极大无关组。

【注：该定理可作为极大无关组的定义，通过定理5-12求极大无关组要比根据定义5-3做简单】

证明：设$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$是向量组V中的任意$r+1$个向量，

则它们可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示。

$$r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1})\le r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r)=r<r+1,$$

故$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$线性相关。

又因为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性无关，

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组V的一个极大无关组。

定理5-13 向量组Ⅰ: $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组Ⅱ: $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示的充要条件是

$$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m).$$

证明: 先证必要性. 因为向量组I能由向量组II线性表示,

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示,

根据定理5-11可得

$$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)\le r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m).$$

又因为$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)\ge r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$.

所以$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$.

定理5-13　向量组Ⅰ: $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组Ⅱ: $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示的充要条件是

$$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m).$$

证明：再证充分性.

设$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)=r$,

并设$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的一个极大无关组,

则它也是向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$的一个极大无关组。

故$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$线性表示,

从而能由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示。

即向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示。

注：讨论线性表示的问题时，一般都要用到极大无关组.

推论5-4 向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$与$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$等价的充要条件是

$$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n).$$

推论5-5 设$\mathbf{A}$为$k\times m$型矩阵，$\mathbf{B}$为$k\times n$型矩阵，

则 矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$有解$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{B}])=r(\mathbf{A})$.

证明： 令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m],\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$,

矩阵方程$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$有解

$\Leftrightarrow$向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能有向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示

$\Leftrightarrow r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$

$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{B}])=r(\mathbf{A})$.

推论5-6 方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$