2.3 行列式的计算

代万基
数学科学学院
大连理工大学

学习指导

关于行列式的计算,首先要掌握一些常规的计算方法，然后再通过学习去掌握一些具有特殊结构的行列式的特殊计算方法及其公式.

计算行列式时,首先要观察所给行列式结构上具有什么特点，然后利用这些特点对行列式进行化简、计算.

2.3.1 按行（列）展开法

当行列式的某些行(或列)中零元素较多时，可以通过按行(或按列)展开的方法来计算。

例2-2 证明: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

证明 用数学归纳法

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$，结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶的情况成立,下面证明结论对 n 阶的情况也成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})$$

根据归纳法假设

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

所以结论正确.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{转置}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上面的结论可推广到下三角行列式和对角行列式，结果也都等于其对角元的乘积.

下面我们来研究按副对角线来看的上三角、下三角及对角行列式的公式.

$$\begin{vmatrix} & & & n \\ & & \iddots & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}}_{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{vmatrix}$$

注：通过上面的做法，将副对角线换到了主对角线，将行列式进行了上下翻转。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

例2-3 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

解 将该行列式按第1列展开，得

$$原式 = a(-1)^{1+1}a^{n-1} + b(-1)^{n+1}b^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}
\arrow[r, "\text{转置}"] \arrow[d, "\text{上下翻转}"', "(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}"]
&
\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}
\arrow[d, "\text{上下翻转}"', "(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}"]
\\
\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\arrow[r, "\text{转置}"]
&
\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{vmatrix}
\end{tikzcd}
$$

2.3.2 化为三角行列式

因为上（下）三角行列式等于其对角元的乘积，所以可通过初等变换将所给的行列式化成上（下）三角行列式的形式进行计算。

例2-4

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+r_1}{\overset{r_3-2r_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{r_4+r_2}{\overset{r_3+11r_2}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-\frac{1}{8}r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} = -40$$

注意:

（1）计算行列式时，行变换、列变换都可使用。

（2）对行列式化简时，要用等号表示。

（3）做对调变换时，行列式前面要添加负号,需记住.

（4）主要的化简思路是：依次将每一列的对角元下方全化为0，在化简其中一列时，要先考虑是否需要将该列的对角元进行调整，若需调整，可通过对调变换或倍加变换进行调整.

2.3.3 先化简再展开

该方法的做法是:选取行列式的一行(或一列),利用倍加变换将该行(或列)化为只剩下一个数不为零的情形,再按该行(或列)展开.

选取行（或列）的基本原则是: 所选的行（或列）尽可能多地含有0，数之间的倍数要好.

例2-5

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4+r_1}{=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \\ -11 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第2列展开}}{=} 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -11 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -6 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第3行展开}}{=} -1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -40$$

2.3.4 范德蒙德行列式

例2-6 n 阶方阵

$$V_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

叫做范德蒙德矩阵，$\det(V_n)$ 称为范德蒙德行列式.

$$\begin{aligned}\det(V_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\\ &\qquad\qquad\qquad (x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \quad \vdots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

练习：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$

$$=\left(-1-1\right)\left(2-1\right)\left(3-1\right)\left(2+1\right)(3+1)(3-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

注：这是按列看的范德蒙德行列式

$$=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(d-a\right)\left(c-b\right)(d-b)(d-c)$$

用数学归纳法证明：

$$n=2\text{ 时，}\det(V_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\le i<j\le 2}(x_j-x_i)$$

假设n-1阶范德蒙德行列式成立，下面证明对n成立。

$$\det(V_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

2.3.5 各行（列）元素之和相等的行列式

例2-7 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{下面行都减第一行}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$$

练习： 计算下面的n阶行列式

$$(1)\begin{vmatrix} b & \cdots & b & a \\ b & \cdots & a & b \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix} 1+k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+k & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+k & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} k+\dfrac{n(n+1)}{2} & k+\dfrac{n(n+1)}{2} & k+\dfrac{n(n+1)}{2} & \cdots & k+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 2 & 2+k & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+k & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & k \end{vmatrix}$$

$$=[k+\frac{n(n+1)}{2}]k^{n-1}$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(-a) & b+0 & b+0 & b+0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)(a-b)^3 + (-a)\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

2.3.6 箭形行列式 例2-8

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

注意：箭形行列式总共有四种形式。

$$(a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

将第2列的$-\dfrac{d_1}{a_1}$倍，第3列的$-\dfrac{d_2}{a_2}$倍，$\cdots$，第n列的$-\dfrac{d_n}{a_n}$倍都加到第1列

$$= \begin{vmatrix} x - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{b_i d_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(x - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i d_i}{a_i} \right) a_1 \cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

将第2行的$-\dfrac{b_1}{a_1}$倍，

第3行的$-\dfrac{b_2}{a_2}$倍，$\cdots$，

第n行的$-\dfrac{b_n}{a_n}$倍都加到第1行

$$= \begin{vmatrix} x - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{b_i d_i}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(x - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i d_i}{a_i} \right) a_1 \cdots a_n$$

练习:

$$\begin{vmatrix} 1+k & k & k & k \\ k & 2+k & k & k \\ k & k & 1+k & k \\ k & k & k & 2+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k & k & k & k \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+3k & k & k & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1+3k)$$

$$\begin{vmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 2k_1 & 1+2k_2 & 2k_3 & 2k_4 \\ 3k_1 & 3k_2 & 1+3k_3 & 3k_4 \\ 4k_1 & 4k_2 & 4k_3 & 1+4k_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+k_1+2k_2+3k_3+4k_4 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1+k_1+2k_2+3k_3+4k_4$$

2.3.7 递推法及三对角行列式

例2-9 $$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开，得

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D_n = 5D_{n-1} + 3\cdot(-1)^{1+2}$$

$$= 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

设$D_n - mD_{n-1} = k(D_{n-1} - mD_{n-2})$，则$D_n = (m+k)D_{n-1} - mkD_{n-2}$，

$\begin{cases} m+k=5 \\ mk=6 \end{cases}$, $\begin{cases} k=5-m \\ m^2-5m+6=0 \end{cases}$, 求得$\begin{cases} m=2 \\ k=3 \end{cases}$或$\begin{cases} m=3 \\ k=2 \end{cases}$

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19, \quad D_1 = 5$$

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n$$

类似地可得$D_n - 3D_{n-1} = 2^n$，

从上面两个式子消去D_{n-1}，求得$D_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3-2}$

补充例

$$D_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开，得

$$D_n = 6D_{n-1} + 9\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 6D_{n-1} - 9D_{n-2}$$

设$D_n - mD_{n-1} = k(D_{n-1} - mD_{n-2})$，则$D_n = (m+k)D_{n-1} - mkD_{n-2}$，

$\begin{cases} m+k=6 \\ mk=9 \end{cases}$，$\begin{cases} k=6-m \\ m^2-6m+9=0 \end{cases}$，求得$\begin{cases} m=3 \\ k=3 \end{cases}$

$$D_n - 3D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - 3D_1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad D_1 = 6$$

$$D_n - 3D_{n-1} = 3^n$$

$$D_n = 3D_{n-1} + 3^n = 3^2 D_{n-2} + 2\cdot 3^n = \cdots = 3^{n-1}D_1 + (n-1)\cdot 3^n$$

$$= (n+1)\cdot 3^n$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)x_1^n & (x_1 = x_2) \\ \dfrac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} & (x_1 \neq x_2) \end{cases}$$

其中x_1和x_2是方程$x^2 - ax + bc = 0$的根。

内容总结

本次课程先讲授了行列式的三种常规计算方法：按行（列）展开法、三角化法及先化简再展开的方法。

后面又讲授了四种特殊类型的行列式：范德蒙德行列式、各行（列）元素之和相等的行列式、箭形行列式、三对角行列式。