0.1 Strukturtheorie zu Gruppen ("Einige Aussagen")

Sei im Weiteren M ein Monoid, G eine Gruppe und X eine Menge.

Definition 0.1 (**Wirkung**)**.** Eine Abbildung

$$\lambda : M \times X \to X, (m, x) \mapsto m \cdot x := \lambda(m, x)$$

heißt Linkswirkung (left action, Linksoperation) von M auf X, wenn es gelten $\forall x \in X, m, m' \in M$:

(i) Neutrales Element: $e \cdot x = x$

(ii) Assoziativität: $m \cdot (m' \cdot x) = (m \cdot m') \cdot x$

Bezeichnung. Ist M eine Gruppe, so heißt λ auch Gruppenwirkung und X heißt Links-M-Menge.

Bemerkung. Analog kann man auch Rechtswirkungen

$$\rho : X \times M \to X, (x, m) \mapsto x \cdot m$$

definieren. (Axiome: $x \cdot e = c$ und $(x \cdot m) \cdot m' = x \cdot (m \cdot m')$)

Bemerkung (Übung)**.** Jede Links-G-Wirkung kann man in eine Rechts-G-Wirkung überführen: zu $\lambda : G \times X \to X$ definiere $\rho : X \times G \to X$ durch

$$\rho(x, g) := \lambda(g^{-1}, x) \iff x \cdot g := g^{-1} \cdot x$$

Proposition 0.2 (Alternative Beschreibung von Wirkungen)**.**

(a) Sei $\lambda : G \times X \to X$ eine Linkswirkung, dann ist

$$\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X), g \mapsto (\varphi_g : X \to X, x \mapsto gx)$$

ein wohl-definierter Gruppenhomomorphismus.

(b) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist

$$\lambda : G \times X \to X, (g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$$

eine Linkswirkung von G auf X.

Beweis. (a) Für $g \in G$ sei $\varphi_g : X \to X, x \mapsto gx$, dann gelten: $\varphi_e : X \to X, x \mapsto ex = x$ ist id_X (Axiom (i)), und

$$(*) \quad \varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{gg'}$$

denn $\forall x \in X$:

$$(\varphi_g \circ \varphi_{g'})(x) = \varphi_g(\varphi_{g'}(x)) = g(g'x) \overset{(ii)}{=} (gg')x = \varphi_{gg'}(x)$$

Damit folgen:

1. $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \underbrace{\varphi_e}_{\mathrm{id}_X} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g \implies \varphi_g$ ist eine bijektive Abbildung mit Inverse $\varphi_{g^{-1}}$, d.h.
$$\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X), g \mapsto \varphi_g$$
ist wohl-definiert.
2. φ ist ein Gruppenhomomorphismus: folgt aus $(*)$ (Verknüpfung in $\mathrm{Bij}(X)$ ist die Verkettung von Abbildungen.)

(b) Übung.

□

Bemerkung. (a) Das Analogon von Proposition 2 gilt auch für Monoide. Die Linkewirkungen eines Monoids M auf X entsprechen Monoidhomomorphismen $M \to (\mathrm{Abb}(X,X), \mathrm{id}_X, \circ)$

(b) Eine Gruppe kann auch auf "Objekten" mit mehr Struktur als eine Menge wirken, z.B. auf eine Gruppe!

Beispiel. G wirkt auf eine Gruppe N heißt, man hat einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(N)$ (vgl. Lemma 1.56)

Definition 0.3 (Eigenschaften von Wirkungen)**.** Sei $\lambda : G \times X \to X$ eine Linkswirkung von G auf X.

(a) Die **Bahn** zu $x \in X$ ist $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Die Länge der Bahn zu x ist $\#Gx$

(b) λ ist transitiv $\iff \forall y, z \in X \exists g \in G : gy = z \overset{\text{Übung}}{\iff} \forall y \in X : Gy = X \overset{\text{Übung}}{\iff} \exists x \in X : Gx = X$

(c) λ ist n-fach transitiv ($n \in \mathbb{N}$), wenn für alle Paare von n-Tupeln $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$ mit $\#\{x_1, ..., x_n\} = \#\{y_1, ..., y_n\}$ gilt $\exists g \in G : gx_i = y_i, \forall i$.

(d) Die Wirkung heißt **treu**, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ (aus Proposition 2) injektiv ist
$$\overset{\text{Übung}}{\iff} \forall g \in G \setminus \{e\} : \exists x \in X : \underbrace{gX \neq X}_{\varphi_g(x) \neq \mathrm{id}_X(x)}$$

Beispiel 0.4.

1. Ist V ein K-Vektoraum, so wirkt das Monoid $(K, 1, \cdot)$ auf V durch Skalarmultiplikation $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$
2. Die folgenden 3 Beispiele sind Linkswirkungen von $\mathrm{GL_n}(K)$:
   (i) $\mathrm{GL_n}(K) \times K^n \to K^n, (g, v) \mapsto gv$. (Übung: Es gibt die Bahnen $\{0\}, K^n \setminus \{0\}$)
   (ii) Sei $\mathcal{B} = \{\text{geordnete Basen von } K^n\}$ und
   $$\mathrm{GL_n}(K) \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, (g, (b_1, ..., b_n)) \mapsto (gb_1, ..., gb_n)$$
   die Wirkung ist treu und transitiv.

(iii) $\mathrm{GL_n}(K) \times \mathrm{End}_K(K^n) \to \mathrm{End}_K(K^n), (A, B) \mapsto ABA^{-1}$ die Wirkung ist nicht treu $Z(\mathrm{GL_n}(K))$ wirkt trivial. (Übung: Bahnen stehen in Bijektion zu den Frobeniusnormalformen von Matrizen.)

3. $S_n \times \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}, (\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$ Wirkung ist treu und n-fach transitiv.

4. Abstrakte Beispiele: Sei $H \leq G$ eine Untergruppe.

   (i) $\lambda : H \times G \to G, (h, g) \mapsto hg$. Die Bahnen sind die Mengen Hg, also die Rechtsnebenklassen zu H (treu?) Menge der Rechtsnebenklassen

   $$H\backslash G := \{Hg \mid g \in G\}$$

   (ii) $\rho : G \times H \to G, (g, h) \mapsto gh$ Bahnen = Linksnebenklassen zu H und

   $$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

   (iii) $c. : G \times G \to G, (g, g') \mapsto gg'g^{-1}$ ist eine Linkswirkung, denn der nach Proposition 2 zugehörige Gruppenhomomorphismus ist $c : G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto c_g$.

   (iv) $G \times G/H \to G/H, (g, g'H) \mapsto gg'H$ Die Klassen gH heißen Linksnebenklassen wegen der Links-G-Wirkung auf ihnen.

Proposition 0.5. *Sei X eine Links-G-Menge (zu der Wirkung $\lambda : G \times X \to X, (g, x), \mapsto gx$) definiere Relation $\sim$ auf X durch*

$$x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$$

dann gelten:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Äquivalenzklasse zu $x \in X$ bezüglich $\sim$ ist die Bahn Gx. Insbesondere ist X die disjunkte Vereinigung seiner Bahnen. (Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der G-Bahnen, so gilt also $\#X = \sum_{i \in I} \#Gx$)

Beweis. (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation: Prüfe

- $\sim$ reflexiv: $ex = x \implies x \sim x$.
- $\sim$ symmetrisch: Gelte $x \sim y$, d.h. $\exists g \in G : gx = y$, dann gilt $x = ex = g^{-1}(gx) = g^{-1}y \implies y \sim x$.
- $\sim$ transitiv: Gelte $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h. $\exists g, h' \in G : gx = y, g'y = z$

$$\implies (g'g)x = g'(gx) = g'y = z \implies x \sim z$$

(b) Sei $x \in X$, dann ist

$$\{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\} = \{gx \mid g \in G\} = Gx.$$

□

Satz 0.6 (**Satz von Cayley**). *Jede Gruppe G (jedes Monoid M) ist isomorph zu einer Untergruppe (einem Untermonoid) von* $(\mathrm{Bij}(G), \mathrm{id}_G, \circ)$ *(bzw.* $(\mathrm{Abb}(G,G), \mathrm{id}_G, \circ)$*).*

Beweis. (Für Gruppen, Rest ist eine Übung) Definiere die Wirkung $\lambda G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh$, dann erhalten wir den induzierten Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(G)$, wir zeigen φ ist injektiv: Sei $g \in G \setminus \{e\}$, dann gilt $ge = g \neq e \implies$ Wirkung treu, also φ ist ein Gruppenmonomorphismus. D.h. G "ist" Untergruppe von $\mathrm{Bij}(G)$. □

Definition 0.7 (**Stabilisator**). Sei X eine Links-G-Menge und $x \in X$, dann heißt

$$G_x := \mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$$

Stabilisator von x (unter G). Warnung: $G_x \neq G \cdot x$.

Beispiel. $\mathrm{Stab}_{S_n}(\{n\}) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}$ mit der üblichen S_n-Wirkung auf $\{1, ..., n\}$.

Übung. G-Wirkung auf einer Menge X ist treu

$$\iff \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$$

Proposition 0.8. *Sei X eine links-G-Menge, $x \in X, g \in G$, dann gilt*

(a) $\mathrm{Stab}_G(x) \leq G$ *ist eine Untergruppe.*

(b) $\mathrm{Stab}_G(gx) = g\,\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}$

Beweis.

(a) $e \in \mathrm{Stab}_G(x)$, denn $ex = x$. Seien $\underbrace{g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)}_{\text{bedeutet } g_1x=x, g_2x=x}$, zu zeigen ist $g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)$

$$\overset{g_1^{-1}\cdot}{\implies} x = ex = g_1^{-1}g_1x = g^{-1}x$$

Damit gilt $(g_1^{-1} \cdot g_2^{-1})x = g_1^{-1}(g_2x) = g_1^{-1}x = x$

(b) Sei $h \in G$, dann:

$$h \in \mathrm{Stab}_G(gx) \iff hgx = gx \overset{g^{-1}\cdot}{\iff} g^{-1}hgx = x$$

$$\iff g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_G(x) \underset{\text{Konj. mit } g}{\iff} h \in g\,\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}.$$ □

Proposition 0.9 (Bahngleichung). *Sei X eine links-G-Menge, $x \in X$, dann gilt:*

- $\psi : {}^{G}\!/_{G_x} \to Gx, hG_x \mapsto hx$ *ist wohl-definiert und eine Bijektion.*
- *Ist G endlich, so folgt $\#G \cdot x = [G : G_x]$.*

Beweis.

- ψ injektiv und wohl definiert: Seien $g, h \in G$, dann

$$hx = gx \iff g^{-1}hx = x \iff g^{-1}h \in G_x \leq G$$
$$\iff g^{-1}hG_x = G_x \iff hG_x = gG_x$$

- ψ surjektiv nach Definition von $G \cdot x$.
- Aussage über Mächtigkeiten: ψ bijektiv $\implies \#{}^{G}\!/_{G_x} = \#G \cdot x$.

□

Bemerkung. Die Abbildung ψ ist ein Homomorphismus von links-G-Mengen (ein Isomorphismus!), ${}^{G}\!/_{G_x}$ und $G \times x \subseteq X$ sind links-G-Mengen und ψ erfüllt:

$$\psi(g \cdot hG_x) = g \cdot \psi(hG_x)$$

(beides ist $= gx \cdot x$)

Definition 0.10. Sei X eine links-G-Menge,

(a) Man sagt G operiert **frei** auf $X \iff \forall x \in X : G_x = \{e\}$

(b) Die Menge der **Fixpunkte** der G-Wirkung ist

$$X^G := \{x \in X \mid G_x = G\}$$

Beispiel. $\mathrm{GL_n}(K)$ operiert frei auf der Menge der geordneten Basen von K^n.

Korollar 0.11. *Sei X eine links-G-Menge. Sei $x_1, ..., x_n$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Länge ≥ 2. Dann:*

(a) $X = X^G \sqcup \bigsqcup_{i \in \{1,...,n\}} G \cdot x_i$

(b) $\#X = \#X^G + \sum_{i \in \{1,...,n\}} \underbrace{[G : G_{x_i}]}_{=\#G \cdot x}$

Beweis. Aus Proposition 5 folgt (a), Lemma 9 gibt (b). □

Anwendung. Sei $X := G$. Sei die G-Wirkung durch Konjugation gegeben, d.h.

$$g \underbrace{\circ}_{\text{Wirk.}} h = ghg^{-1}$$

Die Bahnen unter dieser G-Wirkung heißen **Konjugationsklassen**. Die Konjugationsklasse zu $h \in G = X$ ist

$$G_h := \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$$

Bahnen der Länge 1 sind Fixpunkte unter Konjugation mit allen $g \in G$

$$= \{h \in G \mid \forall g \in G : \underbrace{ghg^{-1} = h}_{gh=hg}\} =: Z(G) \text{ das Zentrum von } G$$

Stabilisator zu $h \in G$ (unter Konjugationswirkung)

$$= \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = C_G(h) \text{ Zentralisator von } h$$

Aus Korollar 11 ergibt sich nun:

Satz 0.12 (Klassengleichung)**.** *Sei G endlich. Ist $g_1, ..., g_n$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der Länge ≥ 2, so gilt:*

$$\#\underbrace{G}_{X} = \#\underbrace{Z(G)}_{X^G} + \sum_{i=1}^{n}[G : \underbrace{C_G(g_i)}_{C_g}]$$

Definition 0.13 (p**-Gruppe**)**.** Sei p eine Primzahl, eine Gruppe G heißt p-Gruppe $\iff \# = p^m$ füe ein $m \in \mathbb{N}$

Beispiel.

$$\mathbb{Z}/(p^m) \text{ oder } U_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

Korollar 0.14. *Ist G eine p-Gruppe, so gilt $p|\#Z(G)$, (d.h. $Z(G)$ ist nichttrivial und also eine p-Gruppe)*

Beweis. Seien $g_1, ..., g_n$ wie im Satz 12. Dann gilt: $C_G(g_i) < G$ ist eine echte Untergruppe. (sonst $g_i = Z(G)$, ist ausgeschlossen)

$$\underset{\text{Lagrange}}{\implies} [G : C_G(g_i)] \text{ teilt } \#G = p^m$$

ist ungleich 1!

$$\implies p|[G : C_G(g_i)], \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Klassengleichung modulo p :

$$\underbrace{0}_{\#G} \cong \#Z(G) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{0}_{[G:C_G(g_i)]} \mod p \implies p|\#Z(G). \qquad \square$$

Übung 0.15 (Satz von Cauchy)**.** (?) Sei p eine Primzahl und G endlich, dann gilt:

$$p|\#G \implies \exists g \in G : \text{ord}(g) = p.$$

($\implies \#G$ und $\#\exp(G)$ haben dieselben Primteiler)

Idee: Verwende Induktion über $\#G$ und die Klassengleichung. In Induktionsschritt 2 Fälle:

1. $\exists H < G$ echte Untergruppe mit $p|\#H$
2. $\neg\exists H < G$ echte Untergruppe mit $p|\#H$

Im 2. Fall wende Klassengleichung mod p an!

0.2 Permutationsgruppen

Sei $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \text{Bij}(\{1, ..., n\})$, Notation für $\sigma \in S_n$, d.h. $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ bijektiv ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ ist eine Permutation von $\{1, ..., n\}$, d.h.

$$\#\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} = n$$

Korollar 0.16. $\#S_n = n!$

Beweis. (Übung) Betrachte die möglichen "Wertetabellen" für Permutationen. □

Definition 0.17. Für $\sigma, \tau \in S_n$ definiere

(a) $\text{supp}(\sigma) =$ **Träger** von $\sigma, \text{supp}(\sigma) := \{i \in \{1, ..., n\} \mid \sigma(i) \neq i\}$

(b) σ und τ sind **disjunkt** $\iff \text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$

Bemerkung. $\text{supp}(\sigma) = \emptyset \iff 0 = \text{id}$

Lemma 0.18 (Andere Interpretation des Trägers)**.** *Sei $\sigma \in S_n$, dann gilt für die Wirkung von $\langle\sigma\rangle$: $\text{supp}(\sigma) =$ Vereinigung der Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, ..., n\}$ der Länge ≥ 2.*

Beweis.

- "$\subseteq$": Sei $i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \implies \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), ..., \sigma^m(i), ...\}$ ist Bahn von $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^j \mid j \in \mathbb{N}_0\} = \{\text{id}, \sigma, ..., \sigma^{r-1}\}$ der Länge ≥ 2. für $r = \text{ord}(\sigma)$.
- "$\supseteq$": Sei $i \notin \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) = i \implies \sigma^j(i) = i, \forall j \in \mathbb{N} \implies$ Bahn von i unter $\langle\sigma\rangle$ ist 1-elementig.

□

Korollar 0.19. *Für $\sigma \in S_n$ gelten:*

(a) $i \in \text{supp}(\sigma) \iff \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$

(b) Auf jeder $\langle\sigma\rangle$-Bahn (durch $i \in \{1, ..., n\}$) wirkt σ als "zyklische Permutation", d.h.

$$i_n := i \longmapsto i_2 = \sigma(i) \longmapsto i_3 = \sigma^2(i) \longmapsto \cdots \longmapsto i_r = \sigma^{r-1}(i)$$

$$\overset{\sigma}{\underset{(mit\ \#\{1\cdots n\}=r)}{\curvearrowright}}$$

Beweis. (a)

$$i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \underset{\sigma \text{ anwenden}}{\implies} \sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \implies \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$$

Falls $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$, so gilt $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \underset{\sigma^{-1} \text{ anwenden}}{\implies} \sigma(i) \neq i$

(b) Sei r die Länge der Bahn durch i unter $\langle\sigma\rangle$. Dann sind $i_{j+1} := \sigma^j(i), j = 0, ..., r-1$ *paarweise verschieden.* Sonst $\exists 0 \leq j_1 < j_2 \leq r-1$ mit $\sigma^{j_1}(i) = \sigma^{j_2}(i)$

$$\underset{\sigma^{-1} \text{ anwenden}}{\Longrightarrow} \quad i = \sigma^{j_2 - j_1}(i) \quad (*)$$

$\Longrightarrow$ Bahn durch i hat höchstens $j_2 - j_1 < r$ Elemente, die Bahn ist wegen $(*)$

$$= \{i, \sigma(i), ..., \sigma^{j_2-j_1}(i)\}$$

Und nun: Wiederholtes Anwenden von σ gibt den Zykel

$$i_1 \longmapsto i_2 \longmapsto \cdots \longmapsto i_r$$

$\square$

Lemma 0.20. *Sind $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt, so gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.*

Beweis. Zeige $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ als Abbildungen $\{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$, sei $i \in \{1, ..., n\}$

- Fall 1: $i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma) \implies i, \sigma(i) \notin \text{supp}(\tau)$. Also $\tau(i) = i, \tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$
- Fall 2: $i \in \text{supp}(\tau)$ analog zu Fall 1.
- Fall 3: $i \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau) \implies \sigma(i) = i = \tau(i)$.

Also $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i))$. $\square$

(Folge: σ, τ disjunkt $\implies \text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$)

Definition 0.21. Seien $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n\}$ paarweise verschieden. Der r-**Zykel**

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)(j) = \begin{cases} j & j \notin \{i_1, ..., i_r\} \\ i_{s+1} & j = i_s\ (s \in \{1, ..., n\}) \\ i_1 & j = i_r \end{cases}$$

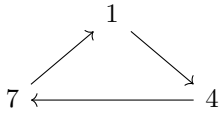
2-Zykel heißen **Transposition**. Konvention: $(\cdot) := \text{id}_{\{1,...,n\}}$ (leerer Zykel). Beachte:

(i) $(i) = (\cdot)$ für $i \in \{1, ..., n\}$

(ii) $\text{supp}(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = \begin{cases} \{i_1, ..., i_r\} & r \geq 2 \\ \emptyset & r = 1 \end{cases}$

(iii) $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = (i_r\ i_1\ i_2\ \cdots i_{r-1})$ (Notation ist nicht eindeutig, können Einträge zyklisch weiterschieben.) z.B.

$$(1\ 4\ 7) = (7\ 1\ 4) = (4\ 7\ 1) =$$



(iv) $\text{ord}(i_1\ \cdots\ i_r) = r$, z.B. $\text{ord}(1\ 2) = 2$

Satz 0.22 (**Zykeldarstellung von Permutationen**). *Sei $\sigma \in S_n$, seien $I_1, ..., I_t \subseteq \{1, ..., n\}$ die paarweise verschiedenen Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, ..., n\}$ der Länge ≥ 2, dann:*

(a) Für $j \in \{1, ..., t\}$ $\exists!$ Zykel $\sigma_j \in S_n$ mit $\operatorname{supp}(\sigma_j) = I_j$, und $\sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j}$

(b) $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ und die σ_i kommutieren paarweise.

(c) Die Darstellung in (b) ist eindeutig bis auf Permutation der Faktoren.

(d) Für σ gilt: $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(\#I_j \mid j \in \{1, ..., t\})$

Beweis. (a) Sei r_j die Länge von I_j. Sei $i_j \in I_j$, dann ist (vgl. Beweis von Korollar 19)

$$\sigma_j := (i_j, \sigma(i_j), \sigma^2(i_j), ..., \sigma^{r_j - 1}(i_j)) \in S_n$$

ein r_j-Zykel und $\sigma|_{I_j} = \sigma_j$

(b) Die (σ_j) kommutieren paarweise, denn deren Träger, die Mengen I_j, sind paarweise disjunkt.

Um $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ zu prüfen, wende beide Abbildungen an auf $i \in \{1, ..., n\}$.

- Fall $j \in \{1, ..., t\} : i \in J$
  $(*)$ Es gilt $\sigma_{j'}(i) = i$ für $j' \neq j$ (da $I_{j'} \cap I_j = \emptyset$)

$$\implies \sigma(i) = \sigma_j(i) \overset{(*)}{=} \left(\sigma_j \cdot \textstyle\prod_{j' \neq j} \sigma_{j'}\right)(i)$$

$$\overset{\sigma_j \text{ kommutieren}}{=} (\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_j \cdot ... \cdot \sigma_t)(i)$$

- Fall $0 : i \in \{1, ..., n\} \setminus \bigcup_{j \in \{1, ..., t\}} I_j$. Dann: $\sigma(i) = i$ (1-elementige Bahn).
  Da $i \notin I_j : \sigma_j(i) = i, \forall j \in \{1, \ldots, t\}$. also $(\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_t)(i) = i = \sigma(i)$

(c) Es gelte $\sigma = \sigma'_1 \cdot \ldots \sigma'_{t'}$ mit paarweise disjunkten Zykeln $\sigma = \sigma'_1 \cdot \ldots \sigma'_{t'}$ der Länge ≥ 2. Sei $I'_{j'} := \operatorname{supp}(\sigma'_{j'})$ für $j' \in \{1, \ldots, t'\}$. Dann:

$$\sigma|_{I'_{j'}} = \sigma'_{j'}|_{I'_{j'}}$$

$\implies I'_{j'}$ ist Bahn von $\langle\sigma\rangle$ der Länge ≥ 2. $\implies t' = t$ und nach Umindizieren der $I'_{j'}$ gelte

$$I'_j = I_j \text{ für } j \in \{1, \ldots, t\}$$

und $\sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j} = \sigma'_j|_{I_j} \overset{\sigma_j, \sigma'_j \text{ sind } r_j = \#I_j\text{-Zykel}}{\Longrightarrow} \sigma_j = \sigma' j$

(d) (Übung). □

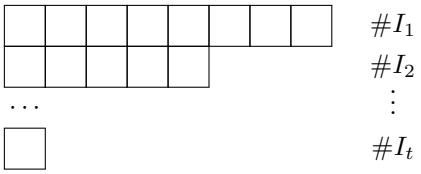
Beispiel 0.23.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$$

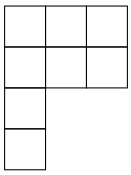
$\implies \langle\sigma\rangle$-Bahnen: $\{1, 2, 5\}, \{3, 8, 7\}, \{4\}, \{6\}$ und $\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 8\ 7)$

Definition 0.24 (**Young-Diagramm/Partition**). Sei $\sigma \in S_n$, seien $I_1, ..., I_t$ die Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ (auch Bahnen der Länge 1), und gelte o.E. $\#I_1 \geq \#I_2 \geq \cdots \geq \#I_t$.

(a) Das Young-Diagramm zu σ ist das Diagramm der Form:



im obigen Beispiel 23



(b) Eine Partition von n ist ein Tupel $(n_1, ..., n_t)$ aus $\mathbb{N}$ mit $n_1 \geq \cdots \geq n_t$ unt $n = n_1, + \cdots + n_t$. (Young-Diagramm: Möglichkeit eine Partition zu veranschaulichen z.B. ist $(\#I_1, ..., \#I_t)$ eine Partition von n)

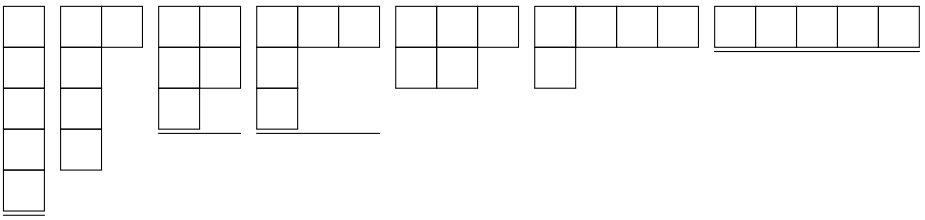
Satz 0.25 (Übung)**.**

(a) Seien $i_1, ..., i_r$ aus $\{1, \ldots, n\}$ paarweise verschiedene Elemente. Dann gilt $\forall\sigma \in S_n$:

$$\sigma \circ (i_1\ i_2 \cdots\ i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \cdots\ \sigma(i_r))$$

(b) σ_1 und σ_2 aus S_n liegen in dieselben Konjugationsklasse $\iff$ sie haben dasselbe Young-Diagramm.

Beispiel. S_5 hat 7 Youngdiagramme



also auch 7 Konjugationsklassen.

Definition (**Signum-Funktion/Alternierende Gruppe**). Sei sgn : $S_n \to \{\pm 1\}$ die Signum-Funktion aus der linearen Algebra. sgn ist eindeutig bestimmt durch:

(i) sgn ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) $\text{sgn}(\tau) = -1$, für τ eine Transposition.

(jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich schreiben als Produkt von Transpositionen) A_n = Kern(sgn) = die alternierende Gruppe auf n Elementen

$$A_n = \{\tau_1 \cdot ... \cdot \tau_{2m} \mid \tau_i \in S_n, \text{sgn}(\tau) = -1, m \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 0.26 (Formeln für sgn)**.** *(Übung)*

(a) Jeder r-Zykel σ ist ein Produkt von $r-1$ Transpositionen, und also gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{r-1}$

(b) Hat σ die Zykeldarstellung $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ mit Zykellängen r_i (von σ_i), $i \in \{1, \dots, t\}$, so gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{r_1 + \dots + r_t - t}$

Bemerkung. Man kann sgn durch (b) bestimmen und kann dann nachprüfen: σ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 0.27. *Sei $C_3 = \{\sigma \in A_n \mid \sigma$ ist 3-Zykel$\}$ und sei $C_{2,2} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \tau_2$ mit τ_1, τ_2 disjunkt.$\}$, dann*

(a) Für $n \geq 3$ gilt $A_n = \langle C_3 \rangle =: H_3$

(b) Für $n \geq 5$ gilt $A_n = \langle C_{2,2} \rangle =: H_{2,2}$

(c) Für $n \geq 5$ sind C_3 und $C_{2,2}$ A_n-Konjugationsklassen.

Beweis.

$$A_n = \{\underbrace{\tau_1 \cdot ... \cdot \tau_{2m}}_{\text{gerade Anzahl}} \mid \tau_i \in S_n \text{ Transpositionen.}\}$$

(a) Zeige: $\tau, \tau' \in H_3$ für τ, τ' beliebige Transpositionen in S_n

(i) $\tau = \tau'$:
$\tau \cdot \tau' = \mathrm{id} = \sigma^3$ für jeden 3-Zykel $\sigma \in H_3$

(ii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' nicht disjunkt:
also $\tau = (a\ b)$, $\tau' = (b\ c)$ mit $\#\{a, b, c\} = 3, a, b, c \in \{1, \dots, n\}$.

$$\tau\tau' = (a\ b\ c) = (a\ b)(b\ c) \quad \begin{smallmatrix} a \leftarrow b \leftarrow c \\ c \leftarrow c \leftarrow b \\ b \leftarrow a \leftarrow a \end{smallmatrix}$$

(iii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' disjunkt also $\tau = (a\ b), \tau' = (c\ d), \#\{a, b, c, d\} = 4, \{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

$$(a\ c\ b)(a\ c\ d) \overset{(\text{Übung})}{=} (a\ b)(c\ d)$$

(b) Zeige $\tau \cdot \tau \in H_{2,2}$ für $\tau, \tau' \in S_n$ Transpositionen.

- Fall (iii) trivial.
- Fall (i) trivial
$$(\tau_1 \cdot \tau_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) \in \langle C_{2,2} \rangle = H_{2,2}$$
- Fall (ii) $\tau = (a\ b), \tau' = (b\ c)$ (wie oben). Wegen $n \geq 5$, finde $d \neq e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$. Dann
$$\tau \cdot \tau' = ((a\ b)(d\ e))((b\ c)(d\ e))$$

(c) C_3 ist A_n-Konjugationsklasse.

Zu zeigen $(a\ b\ c)$ ($\{a,b,c\} \in \{1,\dots,n\}$ 3 elementig) ist konjugiert zu $(1\ 2\ 3)$.

Wahle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$.

$$\overset{\text{Satz } 25}{\Longrightarrow} \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} \overset{(*)}{(} \underbrace{a}_{\sigma(1)}\ \underbrace{b}_{\sigma(2)}\ \underbrace{c}_{\sigma(3)})$$

Aber $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist unklar $+1, -1$?

Beachte: $(*)$ gilt auch für $\sigma(4\ 5)$ und: entweder gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ oder $\operatorname{sgn}(\sigma(4\ 5)) = 1 \implies (1\ 2\ 3) \in A_n$ konjugiert zu $(a\ b\ c)$

Für $C_{2,2}$: zu zeigen $(a\ b)(c\ d)$ A_n-konjugiert zu $(1\ 2)(3\ 4)$ für $\{a,b,c,d\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ 4-elementig.

Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c, \sigma(4) = d$

$$\implies \sigma(1\ 2)(3\ 4)\sigma^{-1} \overset{(**)}{=} (a\ b)(c\ d)$$

und $(*)$ gilt auch für $\sigma(1\ 2)$ ... etc. (Schließe wie für C_3.)

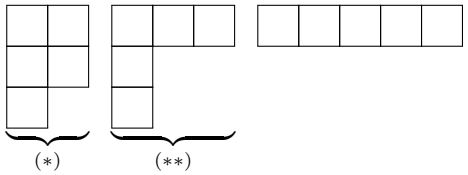
□

Definition 0.28 (**Einfache Gruppe**)**.** Eine Gruppe G heißt **einfach** $\iff \{e\}$ und G sind die einzigen Normalteiler von G. (d.h. G hat keine nicht-trivialen Normalteiler)

Satz 0.29. *Für $n \geq 5$ ist A_n einfach.*

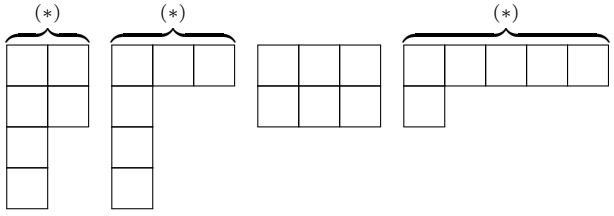
Beweis. Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein Normalteiler und $\{e\} \subsetneq N$ und sei $\sigma \in N \setminus \{e\}$.

- $n = 5$:



  $(*)$ Doppeltranspositionen bilden A_5-Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls Doppeltranspositionen in N, so folgt $N = A_5$.
  $(**)$ 3-Zykel bilden A_5-Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls σ ein $3-Zykel \implies N = A_5$.
  Gelte $\sigma = 5\text{-Zykel} = (a\ b\ c\ d\ e)$. Nun: $N \ni \underbrace{(a\ b\ c)\sigma(a\ b\ c)^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma}_{\in N} \overset{\text{Übung}}{=}$
  $(a\ b\ d)$ 3-Zykel

- $n = 6$: möglichen Youngdiagramme: (zu $\sigma \in A_6 \setminus \{e\}$)



$(*)$ wurden schon im A_5-Fall erklärt.

Sei also $\sigma^2 = (a\,b\,c)(d\,e\,f) \in N$, mit $\{a, \dots f\} = \{1, \dots, 6\}$. Sei $\tau = (a\,b\,c)$, berechne $\tau(\sigma)(\tau^{-1})$ (Satz 25)

$$\underbrace{\underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma}_{\in N}}_{\in N} = \underset{f \longleftarrow f \longleftarrow \; e \longleftarrow e \longleftarrow f}{(b\;d\;c)(a\;e\;f)(a\;c\;b)(e\;d\;f)} \overset{\text{Übung}}{=} (a\;b\;e\;c\;d) \in 5-\text{Zykel}$$

wurde schon bei $n = 5$ geklärt.

- $n \geq 6$: o.E. (Permutation von $1, ..., n$) $\sigma(1) \neq 1$ Wähle $\{j, k\} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, \sigma(1)\}$. Sei $\tau := (\sigma(1)\;j\;k) \implies \sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1} \in N$ Dann:
  (i) $\varphi := \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N$
  (ii) $\varphi(\sigma(n)) = \tau\sigma\tau^{-1}(1) \underset{1 \notin \text{supp}(\tau^{-1})}{\overset{1 \notin \text{supp}(\tau)}{=}} \tau\sigma(1) = j \neq \sigma(1)$, also $\varphi \neq \text{id}$.
  (iii) $\#\,\text{supp}(\varphi) \leq 6$, denn:

$$\varphi = \underbrace{\tau}_{3\text{-Zykel}} \cdot \sigma \underbrace{\underbrace{\tau^{-1}}_{3\text{-Zykel}}\,\sigma^{-1}}_{3\text{-Zykel}}$$

  o.E: $\text{supp}(\varphi) \subseteq \{1, \dots, 6\} \implies \varphi \in A_6 \setminus \{e\}$

- Fälle $n \leq 6$: Nurmalteiler, der von φ erzeugt wird enthält 3-Zykel oder Doppeltransposition. Dann fertig wegen Lemma 27. □

Bemerkung. Es gibt eine Klassifikation aller endlich einfachen Gruppen: Liste:

- $\mathbb{Z}/(p), p$ prim
- $A_n, n \geq 5$
- endliche Gruppen vom Lie typ:
  (i) $\text{SL}_\text{n}(K)/Z(\text{SL}_\text{n}(K))$ bis auf einige kleine $\#K$ sind einfach (endlich falls K endlich).
  (ii) Weitere Untergruppen von SL_n, welche zu "linearen algebraischen Gruppen" korrespondieren.
- 26 weitere.

0.3 Sylow Theoreme

Satz 0.30 (Sylow I, nach Wieland)**.** *Sie G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $\#G$, $k \in \mathbb{N}$ sodass $p^k | \#G$, setze*

$$n_k := \#\{H \leq G \mid \#H = p^k\}$$

Dann gilt:

$$n_k \equiv 1 \mod p$$

Insbesondere ist $n_k \neq 0$, d.h. $\exists H \leq G$ mit $\#H = p^k$.

Übung (Vorbereitung)**.** Sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$, dann:

$$\binom{mp^k}{p^k} = m \cdot u$$

wobei $\mathbb{N} \ni u \equiv 1 \mod p$.

Beweis. (zu 30) Durch Analyse der Wirkung von G auf $X := \{S \subseteq G \mid \#S = p^k\}$ gegeben durch

$$\lambda : G \times X \to X, (g, S) \mapsto g \cdot S = \{g \cdot s \mid s \in S\}$$

(beachte: $\ell_g : h \mapsto g \cdot h$ ist bijektiv $\implies \#gS = \#S = p^k$ d.h. $g \cdot S \in X$) Setze $m := \#{}^{G}\!/_{p^k}$, für $S \in X$ definiere

$$G_S := \mathrm{Stab}_G(S) = \{g \in G \mid gS = S\}$$

1. $\forall S \in X : \#G_S | p^k$:
   Beachte: G_S wirkt auf S (da $gS = S \forall g \in G_S$) durch Linkstranslation:
   $$G_S \times S \to S, (g, s) \mapsto g \cdot s$$
   Scchreibe S als disjunkte Vereinigung seiner G_S-Bahnen.
   $$S = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,\ell\}} G_S h_i$$
   wobei $h_1, ..., h_\ell$ ein Repräsentantensystem der Bahnen ist.
   Beachte: $r_{h_i} : g \mapsto gh_i$ ist bijektiv. Also folgt $\#G_S h_i = \#G_S$
   $$\implies p^k = \#S = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S h_i = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S = \ell \#G_S$$
   d.h. $\#G_S | p^k$.
2. Sei $X_0 := \{S \in X \mid \#G_S = p^k\}$ und $X_1 := X \setminus X_0$
   Behauptung: $\#X_0 = m \cdot n_k$
   (a) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit $\#H = p^k$, dann:
   $$\{S \in X_0 \mid G_S = H\} = \{Hg \mid g \in G\}$$
   Denn:
   - "$\subseteq$": Gelte $G_S = H$, d.h. $H \cdot S = S \implies H \cdot s \subseteq S, \forall s \in S$.
     Aber: $\#H \cdot s \underset{r_s \text{ist bij.}}{=} \#H = p^k = \#S \implies H \cdot s = S \implies s$ (ist das gesuchte g)
   - "$\supseteq$": Zu zeigen: $\mathrm{Stab}_G(H \cdot s) = H$. Sei $g \in G$.
     $$g \in \mathrm{Stab}_G(Hs) \iff gHs = Hs \underset{r_s \text{ist bij.}}{\iff} gH = H \underset{H \leq G}{\iff} g \in H$$

(b)

$$X_0 = \bigsqcup_{H\leq G, \#H=p^k} \{S \in X \mid G_S = H\} \overset{(a)}{=} \bigsqcup_{H\leq G, \#H=p^k} \{Hg \mid g \in G\}$$

$$\#X_0 = \sum_{H\leq G, \#H=p^k} \#\underbrace{\{Hg \mid g \in G\}}_{=H\backslash G} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\#G}{\#H} = \frac{\#G}{p^k} = m$$

$$= m\left(\sum_{H\leq G, \#H=p^k} 1\right) = m \cdot n_k$$

3. $pm|\#X_1$

   (a) G wirkt auf X_1 (durch $(g, S) \mapsto gS$)
   d.h. gilt $S \in X_1$ und $g \in G$, so auch $gS \in X_1$. Es genügt also zu zeigen: $\#G_{gS} = \#G_S$
   Dazu:

$$G_{gS} = \operatorname{Stab}_G(gS) = g\operatorname{Stab}_G(S)g^{-1} = gG_Sg^{-1} \underset{\text{ist Gruppenisom.}}{\overset{\text{Konj. mit } g}{\cong}} G_S.$$

   (b) Betrachte nun G-Bahn durch $S \in X_1$, Behauptung: $\#G\cdot S$ ist Vielfaches von $p \cdot m$
   Dazu: Bahngleichung:

$$\#G \cdot S = {}^{\#G}\!/_{\#G_S} = {}^{mp^k}\!/_{\#G_S}$$

   da $\#G_S$ echter Teiler von p^k, also Teiler von $p^{k-1} \implies \#GS$ ist Vielfaches von ${}^{mp^k}\!/_{p^{k-1}} = mp$

$$(m \cdot {}^{2^5}\!/_{2^4} = m \cdot 2, \quad m \cdot {}^{2^5}\!/_{2^2} = m \cdot 2^3,)$$

   (c) Schreibe nun X_1 als disjunkte Vereinigung seiner Bahnen

$$X_1 = \bigsqcup_{j\in I} G \cdot \underbrace{S_j}_{\text{Bahnrepr.}}$$

   und $\#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot a_j, a_j \in \mathbb{N}$

$$\implies \#X_1 = \sum_{j\in J} \#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{j\in J} a_j}_{=:N\in\mathbb{N}}$$

4. $\#X = \#X_0 + \#X_1 = m \cdot n_k + m \cdot p \cdot N = m(n_k + pN)$
   gleichzeitig:

$$\#X = \#\{S \subseteq G \mid \#S = p^k\} \underset{\#G=m\cdot p^k}{=} \binom{m \cdot p^k}{p^k} \underset{\text{Übung}}{=} m \cdot u$$

   für ein $u \in \mathbb{N} : u \equiv 1 \mod p$.

$\implies m(n_k + pN) = n \cdot u \implies n_k + pN = u \underset{\text{mod } p_k}{\equiv} u \equiv 1 \mod p.$ $\square$

Korollar 0.31 (**Satz von Cauchy**). *Sei G eine endliche Gruppe mit $p|\#G$ für p eine Primzahl, dann $\exists g \in G : \mathrm{ord}(g) = p$*

Beweis. Nach Sylow I $\exists H \leq G : \#H = p$, sei $g \in H \setminus \{e\}$. Dann gilt $\mathrm{ord}(g) = p$. ($\mathrm{ord}(g) \neq 1$ und $\mathrm{ord}(g)|\#G = p$). □

Definition 0.32 (**p-Sylow Gruppe**). Sei G endlich, gelte $\#G = p^f \cdot m$ für $m, f \in \mathbb{N}$ sodass $p \not| m$. Eine Untergruppe $H \leq G$ mit $\#H = p^f$ heißt p-Sylow (Unter-)Gruppe von G, schreiben

$$\mathrm{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid H \text{ ist } p - \mathrm{Sylow}\}$$

$$\mathrm{syl}_p(G) = \#\mathrm{Syl}_p(G)$$

Definition 0.33 (**Normalisator**). Der Normalisator einer Untergruppe $H \leq G$ ist

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

(c_g ist Automorphismus $\implies \#gHg^{-1} = \#H, \forall g \in G$)

Interpretation. Sei $X := \{H \mid H \leq G\}$, X ist eine G-Menge durch Konjugation $c : G \times X \to X, (g, H) \mapsto gHg^{-1}$

Proposition 0.34 (Übung). *(a)* $N_G(H) \underset{\text{für } H \leq G}{=} \mathrm{Stab}_G(H)$

(Insbesondere ist $N_G(H) \leq G$ eine Untergruppe.)

(b) Es gelten: $H \trianglelefteq N_G(H)$ und $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe von G, sodass H ein Normalteiler in dieser ist.

Lemma 0.35. *Sei $H \leq G$ eine p-Gruppe, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (p eine Primzahl), dann:*

(a) Gilt $P \leq H$, so folgt $P = H$.

(b) Ist $H \leq N_G(P)$, so gilt $H \leq P$.

(c) Gilt $H \nsubseteq P$, so folgt $\mathrm{Stab}_H(P) < H$ (ist echte Untergruppe)

Beweis. (a) Schreibe $\#G = p^f \cdot m$, so dass $p \not| m$ ($m, f \in \mathbb{N}$), P p-Sylow Untergruppe $\implies \#P = p^f$.

H eine p-Gruppe in $G \underset{\text{Lagrange}}{\implies} \#H|p^f \cdot m$. also $\#H|p^f$

Nun: $P \subseteq H$ und $p^f = \#P \geq \#H \implies P = H$ (und $\#H = p^f$)

(b) Sei $G' = N_G(P)$. Aus Proposition

$$\implies P \trianglelefteq G' \underset{\text{Voraussetzung}}{\overset{\text{Nach}}{\implies}} H \leq G' \underset{\text{Isomorphiesatz}}{\overset{\text{Erster}}{\implies}} P \trianglelefteq P \cdot H$$

und

$$(P \cdot H)/P \cong H/P \cap H$$

Ordnung ist p-Potenz, evtl p^f

$$\underset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow} \#P \cdot H = \underbrace{\#P}_{p\text{-Potenz}} \cdot \underbrace{\#^{P \cdot H}\!/_{P}}_{p\text{-Potenz}}$$

Also ist $P \cdot H$ eine p-Gruppe mit $P \subseteq PH$

$$\underset{(a)}{\Longrightarrow} PH = P \underset{eH \subseteq P}{\Longrightarrow} H \subseteq P$$

(c) Gelte $H \nsubseteq P$. zu zeigen: $\mathrm{Stab}_H(P) < H$
Angenommen: $H = \mathrm{Stab}_H(P) = \underbrace{\{h \in H \mid hPh^{-1} = P\}}_{= H \cap \mathrm{Stab}_G(P)} = H \cap N_G(P)$

Dann folgt

$$H \subseteq N_G(P) \underset{(b)}{\Longrightarrow} H \subseteq G. \qquad \square$$

Satz 0.36 (**Sylow II**). *Sei G endlich, p ein Primteiler von $\#G$. Dnan:*

(a) Je 2 p-Sylow Gruppen von G sind kunjugiert.

(b) Jede p-Gruppe H mit $H \leq G$ liegt in einer p-Sylow Gruppe von G.

(c) $\forall P \in \mathrm{Syl}_p(G) : \mathrm{syl}_p(G) = [G : N_G(P)]$ und insbesondere $(P \leq N_G(P))$ gilt $\mathrm{syl}_p(G) | [G : P]$

Beweis. (a) $X := \mathrm{Syl}_p(G)$ ist G-Menge via Konjugation ($P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $g \in G \implies \#gPg^{-1} = \#P \implies gPg^{-1} \in \mathrm{Syl}_p(G)$)

Zu zeigen: G wirkt transitiv auf X.

Annahme: X besteht aus $t \geq 2$ Bahnen, also

$$X = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,t\}} G \circ P_i$$

für geeignete Repräsentantensystem $P_1, ..., P_t \in \mathrm{Syl}_p(G)$ ($g \circ P = gPg^{-1}$)

Behauptung: $p | \#G \circ P_i, \forall i \in \{1, \dots, t\}$.

Dazu: Wähle $j \neq i$ betrachte die P_j-Wirkung auf $G \circ P_i$. Schreibe wieder $G \circ P_i$ als disjunkte Vereinigung von P_j-Bahnen:

$$G \circ P_i = P_j \circ Q_1 \sqcup \cdots \sqcup P_j \circ Q_s \quad (*)$$

($s \in \mathbb{N}$ geeignet, $Q_\ell \in \mathrm{Syl}_p(G)$ geeignet)

Bahngleichung:

$$\#P_j \circ Q_\ell = {}^{\#P_j}\!/_{\#\,\mathrm{Stab}_{P_j}(Q_\ell)}$$

beachte: $P_j \notin G \circ P_i$, d.h. $P_j \neq Q_\ell$

$\underset{35(c)}{\Longrightarrow} \mathrm{Stab}_{P_j}(Q_\ell) < P_j \implies \#P_j \circ Q_\ell \neq 1$ und teilt $\#P_j \implies p | \#P_j \circ Q_\ell$

$\implies p$ alle Bahnlängen in $(*)$ von $G \circ P$ als P_j-Menge $\implies p | \#G \circ P_i, \forall i \implies p | \#\,\mathrm{Syl}_p(G)$

$$\implies \mathrm{Syl}_p(G) = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,t\}} G \circ P_i$$

Widerspruch zu (0): $\mathrm{syl}_p(G) \equiv 1 \mod p$.

(b) Annahme: $H \leq G$ eine p-Gruppe liegt in keiner p-Sylow. Betrachte Konjugationswirkung von H auf $X = \mathrm{Syl}_p(G)$. Schreibe

$$X = H \circ R_1 \sqcup \cdots \sqcup H \circ R_w$$

($w \in \mathbb{N}$) die R_i sind Repräsentanten der Bahnen. Beachte $H \nsubseteq R_i$ ($i \in \{1, \ldots, w\}$). Wie in (a) gilt $\mathrm{Stab}_H(R_i) < H$ also, dass $p | \# H \circ R_i, \forall i \implies p | \# X$ Widerspruch zu (0).

(c) Bahngleichung für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (Verwenden (a), d.h. $G \circ P = \mathrm{Syl}_p(G)$)

$$\mathrm{syl}_p(G) = \# \mathrm{Syl}_p(G) = {}^{\#G}\!/_{\# \mathrm{Stab}_G(P)} : {}^{\#G}\!/_{\# N_G(P)} = [G : N_G(P)]$$

($\mathrm{syl}_p(G)$ teilt $[G : P]$ schon oben eingesehen, da $P \leq N_G(P)$)

□

Korollar 0.37. *Sei G endlich und p ein Primteiler von $\#G$, dann $\mathrm{syl}_p(G) = 1 \iff$ jede p-Sylow ist ein Nullteiler in G.*

Beweis. Für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ gilt:

$$P \trianglelefteq G \iff N_G(P) = G \underset{36(c)}{\iff} \mathrm{syl}_p(G) = [G : N_p(G)] = 1. \qquad \square$$

Korollar 0.38. *Sei G endlich, seien $p_1, ..., p_t$ die paarweise verschiedenen Primteiler von $\#G$. Sei $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$. Dann gilt: sind $P_1, ..., P_t$ Normalteiler von G, so folgt: die Abbildung $P_1 \times \cdots \times P_t \to G, (g_1, ..., g_t) \mapsto g_1 \cdot ... \cdot g_t$ ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. $P_i \trianglelefteq G$ für $i \in \{1, \ldots, t\}$
und $\mathrm{ggT}(\#P_i, \#P_j) \underset{i \neq j}{=} 1$ (p_i, p_j versch. Primzahlen) und $\prod_{i=1}^{t} \#P_i = \#G$
$\underset{\text{Kor. 1.55}}{\implies}$ die angegebene Abbildung ist ein Gruppenisomorphismus. □

Beispiel. Ist G abelsch, so sind alle Untergruppen Normalteiler.

Korollar 0.39. *G endlich abelsch und p_i und P_i wie in Korollar 38. So gilt: $\times_{i=1}^{t} P_i \xrightarrow{\text{wie in Kor. 38}} G$ ist Gruppenisomorphismus. (P_i sind abelsche p_i-Gruppen).*

Satz 0.40. *Sei G eine endliche abelsche p-Gruppe, dann $\exists! t \in \mathbb{N}, \exists! e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_t \in \mathbb{N}$, sodass*

$$G \cong \bigtimes_{i=1}^{t} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^{e_i}}$$

Beispiel. G abelsch mit $\mathrm{ord}(G) = 105 \implies G \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{3\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{5\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{7\mathbb{Z}}$

Wiederholung. G heißt einfach $\iff$ einzige Nullteiler von G sind $\{e\}$ und G.

Lemma 0.41 (Übung)**.** *sei G endlich, $\#G = p^f \cdot m$ mit $f, m \in \mathbb{N}, p$ Primzahl und $p \nmid m$. Dann: $p^f \nmid (m-1)! \implies G$ ist nicht einfach.*

Beweis. Idee: Sei $P \in Syl_p(G)$, betrachte G-Wirkung auf G/P durch Linkstranslation, d.h.

$$\rho : G \to \text{Bij}(G/P), g \mapsto \ell g$$

Trick: Kern(ρ) ist der gesuchte Normalteiler. □

Satz 0.42. *Ist G einfache Gruppe mit $\#G < 60$, so gilt $G \cong \mathbb{Z}/p$ für p eine Primzahl.*

Beweis. Sei G einfach mit $\#G < 60$. o.E. $\#G$ keine Primzahl, sonst fertig. o.E. G ist keine p-Gruppe für Primzahl p. (sonst: $Z(G) \supsetneq \{e\} \overset{\substack{G \text{ einfach} \\ \Longrightarrow \\ Z(G) \trianglelefteq G}}{\Longrightarrow} G = Z(G)$, d.h. G abelsch. $\underset{G \text{ einfach}}{\Longrightarrow} G \cong \mathbb{Z}/p$)

Fall $\# = p^f m$ mit $p^f \not| (n-1)! \implies G$ nicht einfach (Lemma 41)

(Übung)Es bleiben $\#G \in \{\underbrace{30}_{2\cdot 3\cdot 5}, \underbrace{40}_{2^3\cdot 5}, \underbrace{56}_{2^3\cdot 7}\}$

Fall 1: $\#G = 2^3 \cdot 5$, dann: $Syl_5(G) \cong 1(5)$ (Sylow I)

$Syl_5(G)$ teilt $\#G/5 = 8$ (Sylow II)

Teiler von $8 : 1, 2, 4, 8$ Kongruenz erzwingt $Syl_5(G) = 1 \underset{37}{\Longrightarrow}$ die einzige 5-Sylow Untergruppe von G ist ein Normalteiler (Widerspruch zu G einfach)

Fall 2: $\#G = 2^3 \cdot 7$, dann (Shritte wie im Fall 1 für $p = 7$)

$$Syl_7(G) \in \{1, 8\}$$

(teilt 8, $\cong 1 \mod 7$)

Fall: Es gibt 8 7-Sylow Untergruppen, isomorph zu $\mathbb{Z}/7$

Beachte: 2 7-Sylow's schneiden sich nur in $\{e\}$ (sonst sinid sie gleich, Elemente $\neq e$ sind Erzeuer)

$\implies$ es gibt $8 \cdot 6$ Elemente in G der Ordnung 7

$\implies$ Es gibt $56 - 48 = 8$ Elemente in G der Ordnung $\neq 7$

Aber: Es gibt (mindestens) eine 2-Sylow Untergruppe von G und die hat Ordnung $8 = 2^3$.

Es folgt: Die 8 obigen Elemente bilden die einzig mögliche 2-Sylow Untergruppe von G.

$\implies Syl_2(G) = 1 \implies$ die 2-Sylow ist ein nicht triviale Normalteiler von G.

Fall 3 (Übung) □

Bemerkung. Die Zahl 60 ist optimal, denn A_5 ist einfach, nicht zyklisch (von Primzahlordnung) und hat 60 Elemente.

0.4 Auflösbare Gruppen

Definition 0.43.

(a) Eine aufsteigende Folge von Untergruppen

$$\{e\} = G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_t = G$$

von G heißt Normalreihe (von G), wenn $\forall i \in \{1, \ldots, t\} : G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ ist Normalteiler.

Schreibe auch $(G_i)_{i=0}^t$ oder $\mathscr{G}$ für die Folge.

(b) die Faktorgruppe $\left(G_i/G_{i-1}\right)_{i=1}^{t}$ heißen Faktoren der Normalreihe.

(c) Eine Normalreihe $\mathscr{G}$ heißt Zerlegungsreihe $\iff$ alle Faktoren sind einfach.

(d) $\mathscr{G}$ heißt abelsch $\iff$ alle Faktoren sind abelsch.

(e) G heißt auflösbar $\iff$ G besitzt eine abelsche Normalreihe.

(f) Ist $\mathscr{G}' : \{e\} = G'_0 < G'_1 < \cdots < G'_{t'} = G$ eine weitere Normalreihe, so heißt $\mathscr{G}'$ (echt) feiner als $\mathscr{G}$ $\iff$

$$\underbrace{\{G_i \mid i \in \{0,...,t\}\}}_{\text{von } \mathscr{G}} \subsetneq \underbrace{\{G'_j \mid j \in \{0,...,t'\}\}}_{\text{von } \mathscr{G}'}$$

Beispiel.

$$\overbrace{S_4}^{G_4} \triangleright \overbrace{A_4}^{G_3} \triangleright \underbrace{\overbrace{V}^{G_2}}_{\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}} \triangleright \overbrace{\{e,(1\ 2)(3\ 4)\}}^{G_1} \triangleright \overbrace{\{e\}}^{G_0}$$

ist eine Zerlegungsreihe mit den Faktoren:

i	4	3	2	1
G_i/G_{i-1}	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$

Insbesondere ist $\mathscr{G}$ abelsch (und S_4 ist auflösbar). Beachte: $G_1 \triangleleft G_2$ ist Normalteiler $G_1 \triangleleft G_3$ (Übung)

Proposition 0.44. *Sei $\mathscr{G} : \{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_t = G$ eine Normalereihe, dann:*

(a) $\mathscr{G}$ ist eine Zerlegungsreihe $\iff$ $\mathscr{G}$ besitzt keine echte Verfeinerung.

(b) Es gilt $2^t \leq \#G$

(c) Ist G endlich, so besitzt $\mathscr{G}$ eine Verfeinerung, die eine Zerlegungsreihe ist.

(d) Ist $\mathscr{G}$ abelsch, so ist auch die Verfeinerung abelsch.

Beweis. (a) G ist keine Zerlegungsreihe

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : G_i/G_{i-1}$ nicht einfach

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : \overline{H} \trianglelefteq G_i/G_{i-1}$ mit $\overline{H} \neq \{e\}, \overline{H} \subsetneq G_i/G_{i-1}$

$\overset{\text{2. Isometriesatz}}{\iff} \exists i \in \{1,\dots,t\} : \exists H \triangleleft G_i$ mit $G_{i-1} \triangleleft H$

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : \mathscr{G}$ kann zwischen G_{i-1} und G_i echt verfeinert werden

$\iff \mathscr{G}$ besitzt eine echte Verfeinerung.

(b) Lagrange: (Für $H \leq G : \#G = \#H \cdot \#G/H$)

$$\#G = \#G_t = \#G_{t-1} \cdot \#G_t/G_{t-1}$$

$$= \#G_{t-2} \cdot \#{}^{G_{t-1}}\!/_{G_{t-2}} \cdot \#{}^{G_t}\!/_{G_{t-1}} = \cdots = \prod_{i=1}^{t} \# \underbrace{{}^{G_i}\!/_{G_{i-1}}}_{\substack{\text{nichttriviale} \\ \text{endliche Gruppe}}} \geq 2^t$$

$$\implies t \leq \log_2 \#G$$

(c) Sei $\mathscr{G}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{G}$, maximaler Länge t'. Das gibt es, da $t' \leq \log_2 \#G$. Dieses $\mathscr{G}'$ kann nicht echt verweinert werden (t' maximal!)
$\implies \mathscr{G}'$ ist Zerlegungsreihe, die $\mathscr{G}$ verfeinert.

(d) Sei $\mathscr{G}$ abelsch und $\mathscr{G}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{G}$, z.z. $\mathscr{G}'$ ist abelsch.

$$(\mathscr{G}' : \quad G'_0 = \{e\} \lhd G'_1 \lhd G'_2 \lhd \cdots \lhd G'_{t'} = G)$$

Sei $j \in \{1, \ldots, t'\}$, z.z. ${}^{G'_j}\!/_{G'_{j-1}}$ ist abelsch. Finde zu $j, j-1$ ein $i \in \{1, \ldots, t\}$, sodass

$$\begin{array}{ccccccc} G & \cdots & G_{i-1} & & \lhd & & G_i & \cdots \\ & & \| & & & & \| & \\ & & G'_\ell \leq & G'_{j-1} & \lhd G_{j'} & & \leq G'_m & \end{array}$$

Wir wissen: ${}^{G_i}\!/_{G_{i-1}} = {}^{G'_m}\!/_{G'_\ell}$ ist eine abelsche Gruppe, wir wissen auch:

$${}^{G'_\ell}\!/_{G'_\ell} \leq {}^{G'_{j-1}}\!/_{G_\ell} \leq {}^{G'_j}\!/_{G_\ell} \leq {}^{G'_m}\!/_{G'_\ell}$$

(2. Isomorphiesatz für $G'_m \to {}^{G'_m}\!/_{G_\ell}$) Beachte: ${}^{G'_m}\!/_{G'_\ell}$ ist abelsch $\implies$ ${}^{G'_{j-1}}\!/_{G'_\ell}, {}^{G'_j}\!/_{G'_\ell}$ sind abelsch, und (2. Isomorphiesatz)

$${}^{G'_j}\!/_{G'_{j-1}} \cong \underbrace{\left({}^{G'_j}\!/_{G'_\ell}\right)}_{\text{abelsch}} \Big/ \left({}^{G'_{j-1}}\!/_{G'_\ell}\right) \implies {}^{G'_j}\!/_{G'_{j-1}} \text{ abelsch.} \qquad \square$$

Satz 0.45 (**Satz von Jordan-Hölder**). *Ist G endlich, so ist die Folge der Faktoren einer Zerlegungsreihe $\mathscr{G}$ von G bis auf Reihenfolge der Faktoren unabhängig von der Wahl der Zerlegungsreihe von G.*

Beweis. Siehe Jantzen Schwermer Satz II. 2.4 oder Jacobson §4.6 $\square$

Korollar 0.46. *Sei G endlich, dann ist G auflösbar $\iff$ die Faktoren jeder Zerlegungsreihe sind abelsch und von Primzahlordnung.*

Beweis.

" $\implies$ ": Sei $\mathscr{G}$ eine abelsche Normalreihe $\underset{\text{Prop. 44}}{\implies} \exists$ Zerlegungsreihe $\mathscr{G}'$ die $\mathscr{G}$ verfeinert, diese ist dann (stets) wieder abelsch. Ihre Faktoren sind einfach und ablesch (und endliche Gruppen), also zyklisch von Primzahlordnung. Wende nun Jordan-Hölder an.

" $\impliedby$ ": Hat man $\mathscr{G}$ wie angegeben (zu G), so ist $\mathscr{G}$ abelsch, also G auflösbar. $\square$

Beispiel 0.47. Sei G eine p-Gruppe $\implies$ G ist auflösbar

Beweis. Sei $\mathscr{G}$ eine Zerlegungsreihe von G, dann sind die Faktoren H_i einfache p-Gruppen. Wir wissen, dass $Z(H_i) \supsetneq \{e\}$ nicht-trivial ist.

$$\overset{H_i \text{ einfach}}{\underset{Z(H_i) \trianglelefteq H_i}{\Longrightarrow}} H_i = Z(H_i)$$

Da $Z(H_i)$ eine einfache abelsche p-Gruppe ist folgt $\mathscr{G}$ ist eine abelsche Normalreihe. Nach dem Satz von Cauchy finde $\mathbb{Z}/p$ als Untergruppe von $H_i \implies H_i$ einfach abelsch ($\mathbb{Z}/p \trianglelefteq H_i$). □

Beispiel 0.48. Gilt $\#G < 60$, so ist G auflösbar.

Beweis. Sei $\mathscr{G}$ eine Zerlegungsreihe mit einfachen Faktoren H_i mit $\#H_i < 60$. Nach Satz 42 sind H_i sind zyklisch von Primzahlordnung $\implies$ G auflösbar. □

Proposition 0.49 (übung)**.** *Sei G endlich, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe, dann:*

(a) G auflösbar $\iff$ N und G/N sind auflösbar.

(b) G auflösbar $\implies$ H auflösbar.

Wiederholung. Die Kommutatoruntergruppe von G ist

$$[G,G] = \langle [g,h] := ghg^{-1}h^{-1} \mid g,h \in G \rangle$$

Eigenschaften:

(a) $[G,H] \trianglelefteq G$

(b) $G/[G,G]$ ist abelsch

(c) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit G/N abelsch, so gilt $[G,G] \leq N$ ist Untergruppe.

(d) $H \leq G$ Untergruppe $\implies$ $[H,H] \leq [G,G]$ nach Definition.

(e) $\pi : G \to G'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, dann:

$$\pi([G,G]) = [G',G']$$

Denn:

Beweisskizze.

$$\pi(\{[g,h] \mid g,h \in G\}) = \{[\pi(g),\pi(h)] \mid g,h \in G\} \underset{\pi\text{surj.}}{=} \{[g',h'] \mid g',h' \in G'\} \cdots$$

□

Definition 0.50 (**Abgeleitete Reihe**)**.** Die abgeleitete Reihe von G ist definiert als die Folge

$$D^0(G) \geq D^1(G) \geq D^2(G) \geq \cdots$$

mit $D^0(G) := G$ und $D^{i+1}(G) := [D^i, D^i(G)]$ für $i \geq 0$

Bemerkung 0.51.

(a) Gilt $D^{i+1}(G) = D^i(G)$, so folgt $D^n(G) = D^i(G), \forall n \geq i$

(b) Nach Wiederholung (a) folgt: $D^i(G) \trianglelefteq D^{i-1}(G), \forall i \geq 1$. Es gilt sogar: (Übung 3) $D^i(G) \trianglelefteq G, \forall i \geq 0$

(c) $H \leq G \underset{\text{von Whg.}}{\overset{\text{vgl (d)}}{\Longrightarrow}} D^i(H) \leq D^i(G) \cap H$ (induktiv)

(d) $\pi : G \to G'$ surjektiv $\underset{\text{zu (e) Whg.}}{\overset{\text{Übung, Induktion}}{\Longrightarrow}} \pi(D^i(G)) = D^i(G')$

Satz 0.52 (**Auflösbarkeitskriterium**)**.** *Sei G endlich, dann ist G auflˆ* $\iff$ $\exists i : D^i(G) = \{e\}$.

Beweis.

" $\Longrightarrow$ ": Sei $G = G_t \triangleright G_{t-1} \triangleright G_{t-2} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\}$ eine abelsche Normalreihe. Dann folgt aus Wiederholung (c)

$$\forall i : [G_i, G_i] \leq G_{i-1} \quad (\text{da } {}^{G_i}\!/_{G_{i-1}} \text{ abelsch})$$

$$\Longrightarrow D^1(G) \leq G_{t-1} \Longrightarrow D^2(G) \leq D^1(G_{t-1}) \leq G_{t-2} \text{ etc.}$$

$$\underset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} D^t(G) = \{e\} \quad (D^i(G) \leq G_{t-i}, \forall i \in \{0, \ldots, t\})$$

" $\Longleftarrow$ ": Trivial. Sei $t \geq 0$ minimal mit $D^t(G) = \{e\}$, dann gilt

$$G = D^0(G) \triangleright D^1(G) \triangleright D^2(G) \triangleright \cdots \triangleright D^{t-1}(G) \triangleright D^t(G) = \{e\}$$

(echte Normalteiler wegen Sylow I (a) und t minimal.) ist eine Normalreihe, Faktoren sind abelsch nach Definition der abgeleiteten Reihe (da ${}^{H}\!/_{[H,H]}$ abelsch). □

Beispiel 0.53.

(a) G abelsch $\Longrightarrow D^1(G) = \{e\}$

(b) (Übung) $D^1(D_n) \leq C_n$, wobei D_n die Diedergruppe bezeichnet.

(c) (Übung) Für $n \geq 5$ gezeigt $D^1(A_n) = A_n \Longrightarrow A_n$ nicht auflösbar. (Wissen auch A_n ist einfach und nicht abelsch $\Longrightarrow A_n$ ist nicht auflösbar.)

Definition 0.54 (**Perfekte Gruppe**)**.** Eine Gruppe G heißt perfekt $\iff G = [G, G] = G^1(G)$. Damit (Übung) ist A_n perfekt für $n \geq 5$.

Bemerkung (ohne Beweis)**.** $\mathrm{SL}_n(K)$ ist perfekt, falls $\#K \notin \{2, 3\}$