2.1 Einige Aussagen

Definitionen

2.1 Gruppenwirkung (Wirkung) 2.2 Bahn (Transitive Wirkung, Treue Wirkung) 2.3 Stabilisator 2.4 Freie Wirkung (Fixpunkt) 2.5 Konjugationsklasse 2.6 p-Gruppe ($\#G = p^m$)

Sätze

2.1 $\lambda : G \times X \to X$ Wirkung, dann $\varphi : G \to \text{Bij}(X), g \mapsto \ell_g$ ist Hom. und ist $\varphi : G \to \text{Bij}(X)$ ein Hom, dann $\lambda : G \times X \to X, (g,x) \mapsto \varphi(g)(x)$ Wirkung.
2.2 $G \underset{\lambda}{\curvearrowright} X$, dann $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$ ist äquiv. Und die Klassen sind die Bahnen.
2.3 Satz von Cayley: $\forall G \exists H \leq \text{Bij}(G) : G \cong H$
2.4 $G \curvearrowright X$ treu $\iff \bigcap_{x\in X} \text{Stab}_G(x) = \{e\}$
2.5 $\text{Stab}_G(x) \leq G, \forall x \in X$ und $\text{Stab}_G(gx) = g\text{Stab}_G(x)g^{-1}$
2.6 Bahngleichung: $\frac{G}{\text{Stab}_G(x)} \cong Gx$
2.7 $X = X^G \sqcup \bigsqcup_{1\leq i\leq n} Gx_i$ und $\#X = \#X^G + \sum_{i\leq n}[G : Gx_i]$
2.8 Klassengleichung: $\#G = \#\text{Z}(G) + \sum_{i=1}^{n}[G : C_G(g_i)]$
2.9 G p-Gruppe, dann ist das Zentrum $Z(G)$ auch p-Gruppe
2.10 Satz von Cauchy

2.2 Permutationsgruppen

Definitionen

2.1 Träger einer Permutation (Disjunkte Permutationen) 2.2 Zykel (Transposition) 2.3 Young-Diagramm (Partition) 2.4 Signum 2.5 Einfache Gruppe

Sätze

2.1 $\#S_n = n!$
2.2 $\sigma \in S_n$, dann $\text{supp}(\sigma) = \bigcup$ Bahnen von $\langle\sigma\rangle \curvearrowright [n]$ der Länge ≥ 2.
2.3 $i \in \text{supp}(\sigma) \iff \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$, und auf jeder $\langle\sigma\rangle$-Bahn wirkt σ als zyklische Permutation auf $[n]$.
2.4 σ, τ disjunkt $\Rightarrow \sigma\tau = \tau\sigma$
2.5 Zykeldarstellung von Permutationen
2.6 $\forall i_k, \sigma \in S_n : \sigma \circ (i_1 \ \cdots \ i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ \cdots \ \sigma(i_r))$ und falls σ_1, σ_2 in dieselben Konjugationsklasse $\iff$ sie haben dasselbe Youngdiagramm.
2.7 Formeln für sgn
2.8 $C_3 := \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ 3-Zykel}\}$, $C_{2,2} := \{\sigma \in A_n \mid \sigma = \tau_1\tau_2 \text{ disj.}\}$, dann
  (1) $A_n \cong \langle C_3\rangle =: H_3$ für $n \geq 3$
  (2) $A_n \cong \langle C_{2,2}\rangle =: H_{2,2}$ für $n \geq 5$
  (3) C_3 und $C_{2,2}$ sind A_n-Konjugationsklassen für $n \geq 5$.
2.9 A_n ist einfach für $n \geq 5$.

2.3 Sylow Theoreme

Definitionen

2.1 p-Sylow Gruppe 2.2 Normalisator

Sätze

2.1 Erster Sylow-Satz (Sylow I): $p^k \mid \#G$, $n_k := \#\{H \leq G \mid \#H = p^k\}$, dann gilt $n_k \equiv 1 \mod p$, insb. $\exists H \leq G$ mit Ord. p^k.
2.2 Satz von Cauchy
2.3 Für $H \leq G$ ist $N_G(H) = \text{Stab}_G(H)$, $H \trianglelefteq N_G(H)$ und $N_G(H)$ ist die größte U.G von G mit H Normalteiler.
2.4 $H \leq G$ p-Gruppe, $P \in \text{Syl}_p(G)$, dann:
  (1) $P \leq H \Rightarrow P = H$
  (2) $H \leq N_G(P) \Rightarrow H \leq P$
  (3) $H \not\subseteq P \Rightarrow \text{Stab}_H(P) < H$
2.5 Zweiter Sylow-Satz (Sylow II): $p \mid \#G$, dann:
  (1) Je 2 p-Sylow Gruppen von G sind konjugiert.
  (2) $H \leq G$ p-Gruppe $\Rightarrow H$ liegt in einer p-Sylow Gruppe
  (3) $\forall P \in \text{Syl}_p(G) : \text{Syl}_p(G) = [G : N_G(P)]$ und insb. $(P \leq N_G(P))$ gilt $\text{Syl}_p(G)$ teilt $[G : P]$.
2.6 $p \mid \#G, \text{Syl}_p(G) = 1 \iff$ alle p-Sylow Gruppen sind Nullteiler von G.
2.7 $p_1, \ldots, p_t$ die Primteiler von $\#G, P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, dann: $P_1, \ldots P_t \trianglelefteq G \Rightarrow \times P_i \to G, (g_i) \mapsto \prod g_i$ ist Isomorphismus. Insb. $\times P_i \cong G$.
2.8 G abelsch $\Rightarrow$ alle Untergruppen sind Normalteiler.
2.9 G endl. abelsch, p_i, P_i wie in vorigem Satz, dann ist $G \cong \times P_i$.
2.10 G endl. abelsche p-Gruppe, dann $\exists! e_1 \geq \cdots \geq e_t \in \mathbb{N}$ mit $G \cong \times_{i\leq t} \frac{\mathbb{Z}}{p^{e_i}\mathbb{Z}}$
2.11 $\#G = p^f m, p \nmid m$, dann $p^f \nmid (m-1)! \Rightarrow G$ nicht einfach.
2.12 G einfach $\#G < 60 \Rightarrow G \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ für p Prim.

2.4 Auflösbare Gruppen

Definitionen

2.1 Normalreihe (Faktor, Zerlegungsreihe, Abelsche Normalreihe, Auflösbare Gruppe, Verfeinerung) 2.2 Kommutatoruntergruppe 2.3 Abgeleitete Reihe 2.4 Perfekte Gruppe

Sätze

2.1 $\Gamma : \{e\} \triangleleft \cdots \triangleleft G$ Normalreihe, dann:
  (1) Γ Zerlegungsreihe $\iff \Gamma$ hat keine Verfeinerung.
  (2) $2^t \leq \#G$
  (3) G endl., dann Γ hat eine Zerlegungsreihe als Verfeinerung.
  (4) Γ abelsch., dann Verfeinerungen sind abelsch.
2.2 Satz von Jordan-Hölder
2.3 G endl. dann G auflösbar $\iff$ die Faktoren jeder Zerlegungsreihe sind abelsch und von Primzahlordnung.
2.4 p-Gruppe $\Rightarrow$ auflösbar.
2.5 $\#G < 60 \Rightarrow$ auflösbar.
2.6 $N \triangleleft G, H \leq G$, dann:
  (1) G auflösbar $\iff N$ und $\frac{G}{N}$ auflösbar
  (2) G auflösbar $\Rightarrow H$ auch.
2.7 $D^{i+1}(G) = D^i(G)$, dann $D^n(G) = D^i(G), \forall n \geq i$
2.8 Es gilt $D^i(G) \triangleleft D^{i-1}(G), \forall i \geq 1$, insb. $D^i(G) \triangleleft G \forall i$.
2.9 $H \leq G \Rightarrow D^i(H) \leq D^i(G) \cap H$
2.10 $\pi : G \to G'$ surj $\Rightarrow \pi(D^i(G)) = D^i(G')$
2.11 Auflösbarkeitskriterium: G endl, dann auflösbar $\iff \exists i : D^i(G) = \{e\}$.
2.12 G abelsch $\Rightarrow D^1(G) = \{e\}$.