

Algebra 1 Vorlesungsmitschrieb
nach Vorlesung von Prof. Gebhard Böckle

Yousef Khell

November 23, 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Gruppentheorie	5
1.1	Gruppen und Monoide	5
	Monoid	5
	Gruppe	5
	Ring	7
	Ordnung	7
	Untermoid/Untergruppe	8
	Erzeuger	9
	Zyklische Gruppe	9
	Satz von Lagrange	11
	Exponent einer Gruppe	13
1.2	Gruppenhomomorphismen	14
	Homomorphismus	14
	Isomorphismus	15
	Normalteiler	16
	Kommutator/Kommutatoruntergruppe	18
	Faktor-/Quotientengruppe	19
	Homomorphiesatz für Gruppen	19
	Einschub: Faktorringe	21
	Die Isomorphiesätze	21
	Erster Isomorphiesatz	22
	Zweiter Isomorphiesatz	22
	(Semi-)direkte Produkte	24
	Semi-direktes Produkt	26
2	Gruppen Strukturtheorie	27
2.1	Strukturtheorie zu Gruppen (“Einige Aussagen”)	27
	Wirkungen	27
	Eigenschaften von Wirkungen	28
	Bahn	28
	Satz von Cayley	30
	Stabilisator	30
	Bahngleichung	31
	Freie Operation	31
	Fixpunkte	31
	Konjugationsklasse	32
	Klassengleichung	32
	p-Gruppe	32

	Satz von Cauchy	33
2.2	Permutationsgruppen	33
	Träger	33
	disjunkte Permutationen	33
	Zykel/Transposition	34
	Zykeldarstellung von Permutationen	35
	Young-Diagramm/Partition	36
	Signum-Funktion/Alternierende Gruppe	37
	Einfache Gruppe	38
2.3	Sylow Theoreme	40
	Sylow I	40
	Satz von Cauchy	42
	p -Sylow Gruppe	42
	Normalisator	42
	Sylow II	43
2.4	Auflösbare Gruppen	46
	Jordan-Hölder Satz	47

Kapitel 1

Gruppentheorie

1.1 Gruppen und Monoide

Notation.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\#X$ = die Kardinalität/Mächtigkeit einer Menge X

Definition 1.1 (Monoid). Ein Tripel (M, e, \circ) mit

- M einer Menge.
- e einem Element aus M ,
- $\circ : M \times M \rightarrow M$ einer zweistelligen Verknüpfung

heißt **Monoid** falls gilt

(M1) Assoziativität:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(M2) Neutrales Element:

$$\forall a \in M : a \circ e = a = e \circ a$$

Wir nennen ein $a \in M$ **invertierbar**, falls

$$\exists b, b' \in M : b \circ a = e = a \circ b'$$

(b bzw. b' heißen dann Links- bzw. Rechtsinverse)

Bemerkung. $b = b'$, denn

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b$$

Definition 1.2 (Gruppe). Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem alle Elemente invertierbar sind.

Bemerkung 1.3 (zur Assoziativität). Seien $a_1, \dots, a_n \in M$, und setzt man in

$$a_1 \circ \dots \circ a_n$$

Klammern, sodass \circ jeweils 2 Elemente verknüpft, so ist wegen (M1) das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Klammerung, and also lässt man i.a. die Klammern weg. (Die Reihenfolge ist aber schon wichtig!)

Definition 1.4 (Abelsche Gruppe/Monoid). Ein Monoid bzw. eine Gruppe M heißt **abelsch** (oder kommutativ) : $\iff \forall a, b \in M :$

$$a \circ b = b \circ a$$

Proposition 1.5 (Eindeutigkeit des neutralen Elements bzw. der neutralen Elementen). *Sei M ein Monoid, dann*

(a) *Erfüllt $e' \in M$ die Bedingung $e' \circ a = a \forall a \in M$, so gilt $e' = e$.*

(b) *Ist $a \in M$ invertierbar, so ist sein Inverses eindeutig.*

Beweis.

(a) Nach Konstruktion $e = e' \circ e = e'$.

(b) Gelte $a \circ b' = e$ und b sei ein Inverses von a , dann:

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b.$$

□

Satz 1.6 (ohne Beweis). *Sei (G, e, \circ) ein Tripel mit G eine Menge, $e \in G$, $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine assoziative Verknüpfung sodass:*

- *e ist Linkseins, d.h.*

$$\forall g \in G : e \circ g = g$$

- *jedes g hat ein Linksinverses*

$$\forall g \in G \exists h \in G : h \circ g = e$$

So ist (G, e, \circ) eine Gruppe.

Hinweis (Nutzen von Satz 6). Es müssen weniger Axiome geprüft werden.

Notation.

(i) $ab := a \circ b$

(ii) $a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n a, n \in \mathbb{N}$

(iii) $a^n = (a^{-n})^{-1}, n < 0$

(iv) Ist \circ kommutativ, so schreibt man oft $+$

Übung (Rechenregeln).

- (i) $a^n a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$
- (ii) Ist a invertierbar, so gelten die Regeln $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Proposition 1.7 (Übung). Sei G eine Gruppe, seien $g, h \in G$, dann:

- (a) Die Gleichung $xg = h$ besitzt genau eine Lösung (in G), nämlich $x = hg^{-1}$.
- (b) Es gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$
- (c) Die Rechtstranslation (um g) $r_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg$ und die Linkstranslationen (um g) $\ell_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$ sind bijektiv.

Beispiel. 1) $(\mathbb{N}_0, 0, +), (\mathbb{N}_0, 1, \cdot)$ sind kommutative Monoide.

2) Jede Gruppe ist ein Monoid.

3) Ist X eine Menge, $\text{Abb}(X, X)$ bzw. $\text{Bij}(X, X)$ die Menge aller Abbildungen bzw. Bijektionen von X in sich, so gilt:

- (a) $(\text{Abb}(X, X), \text{id}_X, \circ)$ ist ein Monoid.
- (b) $(\text{Bij}(X, X), \text{id}_X, \circ)$ ist eine Gruppe.

Schreibe $S_n := \text{Bij}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\})$ für die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$.

4) Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum, so sind

- (i) $O(V) := \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V) \mid \varphi \text{ orthogonal}\}$ und $SO(V) := \{\varphi \in O(V) \mid \det(\varphi) = 1\}$ Gruppen.
 - (ii) Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $P_n := \{\cos \frac{2\pi j}{n}, \sin \frac{2\pi j}{n} \mid j = 0, \dots, n-1\}$, dann ist
 - (a) $C_n := \{\varphi \in SO(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die Gruppe der Drehungen um 0 von Winkel $\frac{2\pi j}{n}, (j = 0, \dots, n-1)$ und
 - (b) $D_n := \{\varphi \in O(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die [[Diedergruppe]] der Ordnung $2n$
- (Übung) $\#C_n = n, \#D_n = 2n$.

Gruppen beschreiben oft Symmetrien eines geometrischen Objekts.

5) Ist M ein Monoid, so ist $M^\times := \{a \in M \mid a \text{ invertierbar}\}$ eine Gruppe, also (M^\times, e, \circ) .

Definition 1.8 (Ring). Ein [[Ring]] ist ein [[Tupel]] $(R, 0, 1, +, \cdot)$, sodass

(R1) $(R, 0, +)$ eine [[abelsche Gruppe]],

(R2) $(R, 1, \cdot)$ ein Monoid,

(R3) Es gelten die Distributivgesetze

Definition 1.9 (Ordnung einer Gruppe). Ist M ein Monoid oder eine Gruppe, so heißt

$$\text{ord}(M) := \#M$$

die Ordnung von M .

Definition 1.10 (Untermonoid/Untergruppe). Seien M ein Monoid, G eine Gruppe, dann

(a) $N \subseteq M$ heißt Untermonoid (UM) wenn:

- $e \in N$
- $\forall n, n' \in N : n \circ n' \in N$

(b) $H \subseteq G$ heißt Untergruppe (UG) wenn:

- $e \in H$
- $\forall h, h' \in H : h \circ h' \in H$

So schreiben wir $N \leq M, H \leq G$.

Übung 1.11. (i) $N \leq M \implies (N, e, \cdot|_{N \times N} : N \times N \rightarrow N)$ ist Monoid

(ii) $H \leq G \implies (H, e, \cdot|_{H \times H} : H \times H \rightarrow H)$ ist Monoid

Beispiel. Sei K ein Körper, dann ist

- (i) $SL_n(K) \leq GL_n(K)$
- (ii) $SO(V) \leq O(V) \leq \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$

Proposition 1.12 (Übung). Sind $(H_i)_{i \in I}$ Untergruppen von G , so ist

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G.$$

Beispiel. Sei G eine Gruppe, $g \in G, S \leq G$, dann:

(i) $C_G(g)$ **Zentralisator** von $g \in G$, also

$$C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\} \leq G$$

(ii) $C_G(S)$ **Zentralisator** von S , also

$$C_G(S) = \{h \in G \mid hs = sh \forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} C_G(s) \leq G$$

(iii) $Z(G)$ **Zentrum** von G , also

$$Z(G) = C_G(G) \underset{\text{komm.}}{\leq} G$$

(iv) (Übung) $Z(GL_n(K)) = K^\times \mathbf{1}_n$

Lemma 1.13. Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge, dann \exists kleinste Untergruppe $\langle S \rangle \leq G$, die S umfasst.

Beweis. Definiere

$$\langle S \rangle := \bigcap \{H \leq G \mid S \subseteq H\}.$$

□

Übung 1.14. Sei M ein Monoid, $S \subseteq M$ eine Teilmenge, ein Wort aus S ist ein Ausdruck

$$s_1 \cdot \dots \cdot s_n, s_i \in S, n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt: $\{\text{Worte in } S \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq M$ ist das kleinste Untermonoid von M , das S umfasst. Und ist G eine Gruppe, so gilt $\{\text{Worte in } S \cup S^{-1} \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq G$ ist die kleinste Untergruppe von G , die S umfasst.

Definition 1.15 (Erzeugendensystem). Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge. S heißt Erzeugendensystem von $G \iff \langle S \rangle = G$.

Beispiel (Übung). Seien $E_{ij} \in M_{n \times n}(K)$ die Elementarmatrizen mit 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Dann ist

$$\{1_n + aE_{ij} \mid a \in K, i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$$

ein Erzeugendensystem von $SL_n(K)$ (Gauß-Algorithmus)

Lemma 1.16. Sei G eine Gruppe, $g \in G$, dann gilt

$$\langle g \rangle = \langle \{g\} \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. (Nach Übung 14)

$$\begin{aligned} \langle \{g\} \rangle &= \{\text{Worte in } \{g, g^{-1}, e\}\} \\ &= \{g^{i_1}, \dots, g^{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^{i_1 + \dots + i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. $\langle g \rangle$ ist abelsch.

Definition 1.17 (Ordnung eines Gruppenelements, Zyklische Gruppe). Sei G eine Gruppe, $g \in G$

(a) Die Ordnung von g ist

$$\text{ord}(g) = \#\langle g \rangle = \#\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(b) g hat endliche Ordnung $\iff \text{ord}(g) \in \mathbb{N}$

(c) G ist zyklisch $\iff \exists g \in G : G = \langle g \rangle$

Proposition 1.18. Zyklische Gruppen sind abelsch.

Beweis. G zyklisch $\implies \exists g \in G : G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dann:

$$g^n g^m = g^{n+m} \stackrel{+ \text{ komm. in } \mathbb{Z}}{=} g^{m+n} = g^m g^n.$$

□

Proposition 1.19. Sei G eine Gruppe, $g \in G, n := \text{ord}(g)$ und

$$n' = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid e, g, g^2, \dots, g^{m-1} \text{ paarw. versch.}\}$$

Dann gelten:

(a) $n' = \infty = \sup \mathbb{N}$ oder $g^{n'} = e$ und $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n'-1}\}$. Insbesondere ist $n' = n$

(b) Falls $n = \text{ord}(g) < \infty$, so gilt für $m, m' \in \mathbb{Z}$:

$$g^m = g^{m'} \iff m \equiv m' \pmod{n}$$

Insbesondere ist $g^m = e \iff n \mid m$

(c) Für $s \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\text{ord}(g^s) = \frac{n}{\text{ggT}(n, s)}$$

Beweis.

(a) Gelte $n' < \infty$:

Definition von $n' \implies g^{n'} \in \{e, g, \dots, g^{n'-1}\}$ Annahme: $g^{n'} = g^i$ für ein $i \in \{1, \dots, n'-1\}$ Multipliziere mit $g^{-i} \implies g^{n'-i} = g^0 = e$ und $0 < n'-i < n'$, d.h. $g^{n'-i} \in \{e, \dots, g^{n'-1}\} \implies \{g^0, \dots, g^{n'-1}\}$ nicht paarweise verschieden (Widerspruch) Sei schließlich $m \in \mathbb{Z}$ beliebig, Division mit Rest:

$$m = qn' + r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1$$

$$\implies g^m = g^{qn'+r} = (g^{n'})^q g^r = g^r \in \{g^0, \dots, g^{n'-1}\}$$

Also: $\langle g \rangle = \{e, \dots, g^{n'-1}\}$ sind paarweise verschieden. $\implies \text{ord}(g) = \#\langle g \rangle = n'$

(b) Seien $m, m' \in \mathbb{Z}$, schreibe $m' - m = qn' + r, (q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1)$, dann:

$$g^{m'} = g^m \iff g^{m'-m} = g^0 = e \iff g^{qn'+r} = e$$

$$\iff g = e \xrightarrow[e, \dots, g^{n'-1} \text{ paarw. versch.}]{1, \overset{n=n'}{\iff}} r = 0$$

$$\iff m' - m \text{ ist Vielfaches von } n = n' \iff m \equiv m' \pmod{n}$$

(c) Bestime die $m \in \mathbb{Z}$ mit $(g^s)^m = e$

$$(g^s)^m = e \iff g^{sm} = e \iff n \mid sm$$

$$\iff \frac{n}{\text{ggT}(n, s)} \mid \frac{s}{\text{ggT}(n, s)} m \iff \frac{n}{\text{ggT}(n, s)} \mid m$$

Da $\frac{n}{\text{ggT}(n, s)}, \frac{s}{\text{ggT}(n, s)}$ teilerfremd sind

$$\xrightarrow{2.} \text{ord}(g^s) = \frac{n}{\text{ggT}(n, s)} \quad \square.$$

□

Beispiel.

$$\text{ord}(g) = 6 \implies \text{ord}(g^2) = 3 = 6/\text{ggT}(6, 2) = 6/2$$

Korollar 1.20. Sei G eine Gruppe, dann

(a) Für $g \in G$ gilt:

$$\text{ord}(g) = \infty \iff g^n, n \in \mathbb{Z} \text{ sind paarw. verschieden}$$

(b) Ist G zyklisch und $G \leq G$ eine Untergruppe, so ist H zyklisch.

Beweis.

(a) \Leftarrow vgl. 19(a) \implies wissen nach 19(a), dass e, g, \dots, g^n, \dots paarw. versch. sind. Multipliziere mit $g^{-m}, (m \in \mathbb{N}) \implies g^{-m}, g^{-m+1}, \dots, g^0, g^1, \dots$ sind paarw. versch.

(b) Sei $g \in G$ ein Erzeuger von $G, H \leq G$ eine UG von G und ohne Einschränkung $H \supsetneq \{e\}$

$$\implies \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : g^m \in H \setminus \{e\}$$

$$H \text{ ist Gruppe} \implies g^m, (g^m)^{-1} = g^{-m} \in H$$

Sei $t \in \min\{m \in \mathbb{N} \mid g^m \in H\}$. Behauptung: $\langle g^t \rangle = H$.

- “ \subseteq ”: Klar, da $g^t \in H$ also auch $\langle g^t \rangle \subseteq H$ (H ist UG die t enthält)
- “ \supseteq ”: Sei $g^m \in H$, Division mit Rest: $m = tq + r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < t$

$$\implies H \ni g^m = g^{tq+r} = \underbrace{(g^t)^q}_{\in H} g^r \implies g^r = (g^m)((g^t)^q)^{-1} \in H$$

Nach Def von t muss gelten: $r = 0$, da $r = 1, \dots, t-1$ verboten. Also ist $g^m = (g^t)^q \in \langle g^t \rangle$.

□

Korollar 1.21 (Übung). Untergruppen von \mathbb{Z} sind die Mengen $\mathbb{Z}n = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}, (n \in \mathbb{N}_0)$

Wiederholung (Vorbereitung).

- Äquivalenzrelationen
- Äquivalenzklassen
- Repräsentantensysteme

Bemerkung.

- $X = \bigsqcup_{r \in \mathcal{R}} [r]_{\sim}$
- Falls $\#X < \infty : \# = \sum_{r \in \mathcal{R}} \#[r]_{\sim}$

Satz 1.22 (Satz von Lagrange). Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gilt $\#H \mid \#G$.

Beweis.

- 1) Definiere \sim auf G durch $g \sim g' : \iff \exists h \in H : g' = gh \sim$ ist eine Äquivalenzrelation:

- reflexiv: $g \sim g$ denn $g = ge, e \in H$
- symmetrisch: gelte $g' = gh$ für ein $h \in H$

$$\xRightarrow{h^{-1}} g'h^{-1} = g \xRightarrow{H \text{ Gruppe}} h^{-1} \in H \implies g' \sim g$$

- transitiv: gelte $g \sim g', g' \sim g'',$ d.h. $\exists h \in H : g' = gh, \exists h' \in H : g'' = g'h$

$$\implies g'' = g'h' = (gh)h' = g(hh') \implies g \sim g''$$

- 2) Äquivalenzklassen: Für $g \in G$ ist

$$[g]_{\sim} = \{g' \in G \mid \exists h \in H : g' = gh\} = \{gh \mid h \in H\} =: gH$$

- 3) Beachte G endlich $\implies H \subseteq G$ endlich (und ebenso jede Teilmenge von G)
Behauptung: $\#gH = \#H \forall g \in G$ Grund: Die Abbildungen

$$\ell_g : H \rightarrow gH, h \mapsto gh, \ell_{g^{-1}} : gH \rightarrow H, x \mapsto g^{-1}x$$

sind zueinander invers (Übung) und also bijektiv. $\implies \#H = \#gH$.

- 4) Sei $\mathcal{R} \subseteq G$ ein Repräsentantensystem zu \sim

$$\begin{aligned} \implies \#G &= \sum_{g \in \mathcal{R}} \#[g]_{\sim} = \sum_{g \in \mathcal{R}} \#gH = \sum_{g \in \mathcal{R}} \#H \stackrel{3)}{=} \#\mathcal{R} \#H \\ \implies \#H &\text{ teilt } \#G. \end{aligned}$$

□

Notation. Seien G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und \sim wie im Beweis vom Satz 22.

- Schreibe G/H für die Menge aller Äquivalenzklassen also für $\{gH \mid g \in G\}$
- Schreibe $[G : H] := \#G/H = \#\mathcal{R}$ (Index von H in G)

Lagrange sagt: $\#G = \#G/H \cdot \#H = [G : H] \cdot \#H$

Übung 1.23. Seien $H' \leq H \leq G$ Untergruppen, dann ist $H' \leq G$ und

$$[G : H'] = [G : H] \cdot [H : H']$$

Korollar 1.24. Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:

- (a) $\forall g \in G : \text{ord}(g) \mid \text{ord}(G) = \#G$
(b) Ist $\text{ord}(G)$ eine Primzahl, so ist G zyklisch

Beweis.

- (a) $\langle g \rangle \leq G$ ist eine Untergruppe $\xRightarrow{\text{Lagrange}} \text{ord}(g) = \#\langle g \rangle \mid \#G = \text{ord}(G)$

- (b) Sei $p = \text{ord}(G) \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, sei $g \in G \setminus \{e\}$ ($\#G \geq 2$) Nach 1. gilt

$$\underbrace{\text{ord}(g)}_{\neq 1 \text{ da } g \neq e} \mid \text{ord}(G) = p$$

Folglich: $p = \text{ord}(g) = \text{ord}(G)$, d.h. $\langle g \rangle \leq G$ ist Inklusion gleichmächtiger endlicher Mengen, also $\langle g \rangle = G$. \square

Definition 1.25 (Gruppenexponent). Sei G eine Gruppe, der Exponent von G ist $\exp(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g^n = e\}$ (wobei $\min \emptyset = \infty$).

Beispiel (Übung).

- (i) $\exp(C_n) = n$
- (ii) $\exp D_n = \text{kgV}(2, n)$
- (iii) $\exp(S_3) = 6$
- (iv) $\exp(S_4) = 12$
- (v) $\exp(G) = 2 \implies G$ abelsch
- (vi) \mathbb{F}_p Körper mit p Elementen und $0 \neq V$ ein \mathbb{F}_p -[[Vektorraum]], so gilt $\exp(V, 0, +) = p$

Satz 1.26. Sei G eine endliche Gruppe, es gelten

- (a) $\exp(G) \mid \text{card}(G)$
- (b) $\exp(G) = \text{kgV}(\{\text{ord}(g) \mid g \in G\})$

Beweis.

- (a) Folgt aus (b) und $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G) \forall g \in G$ nach Korollar 24.
- (b) $\text{ord}(g) \mid \exp(G), \forall g \in G$, denn nach Definition gilt:

$$g^{\exp(G)} = e \xRightarrow{19} \text{ord}(g) \mid \exp(G)$$

folglich: $N := \text{kgV}(\{\text{ord}(g) \mid g \in G\})$ teilt $\exp G$.

Behauptung: $\exp G \leq N$, (dann fertig)

Wir zeigen: $g^N = e \implies \exp G \leq N$. Dies folgt aus $g^{\text{ord}(g)} = e$ und $\text{ord}(g) \mid N = \text{kgV}(\dots)$. \square

Übung 1.27. Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:

- (a) Sind $g, h \in G : gh = hg$ und gilt $\text{ggT}(\text{ord}(g), \text{ord}(h)) = 1$, so gilt

$$\text{ord}(gh) = \text{ord}(g)\text{ord}(h)$$

- (b) Gelte $p^f \mid \exp G$ für p eine Primzahl und $f \in \mathbb{N}$, dann $\exists g \in G : \text{ord}(g) = p^f$

- (c) Ist G abelsch, so $\exists g \in G : \exp(G) = \text{ord}(g)$

Satz 1.28. Sei G eine endliche abelsche Gruppe, dann ist G genau dann zyklisch, wenn $\text{ord}(G) = \exp(G)$

Beweis.

- “ \implies ”: Sei $g \in G$ Erzeuger $\xRightarrow{19} \text{ord}(G) = \text{ord}(g)$

$$\text{ord}(g) \mid \exp G, \exp G \mid \text{ord}(G) \implies \exp G = \text{ord}(G)$$

- “ \Leftarrow ”: Wähle nach 27.3 ein $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = \exp(G)$, nach Voraussetzung ist $\exp(G) = \text{ord}(g) \implies \text{ord}(g) = \text{ord}(G) \implies \langle g \rangle \subseteq G$ ist Gleichheit, d.h. $\langle g \rangle = G$.

□

1.2 Gruppenhomomorphismen

Seien im Weiteren M, M' Monoide und G, G' Gruppen.

Definition 1.29 (Monoid-/Gruppenhomomorphismus).

(a) Eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow M'$ heißt **Monoidhomomorphismus**, falls

- (i) $\varphi(e) = e'$ und
- (ii) $\forall m, \tilde{m} \in M : \varphi(m \circ \tilde{m}) = \varphi(m) \circ' \varphi(\tilde{m})$

(b) Sind M, M' Gruppen, so heißt ein Gruppenhomomorphismus \iff (ii) gilt.

Bemerkung 1.30.

- (a) Ist $\varphi : M \rightarrow M'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi(e) = e'$ und $\varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}, \forall m \in M$.
- (b) (Übung) Die Verkettung von Monoid- bzw. Gruppenhomomorphismen ist wieder ein solcher.

Beweis. Zu (a):

$$e' \circ' \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e \circ e) = \varphi(e) \circ' \varphi(e)$$

Kürzen $\implies e' = \varphi(e)$. Und

$$\varphi(m^{-1}) \circ' \varphi(m) = \varphi(m^{-1} \circ m) = \varphi(e) = e'$$

Eindeutigkeit des Inverses $\implies \varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}$. □

Beispiel 1.31. (a) Für $g \in G$ ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Bild}(\varphi) = \langle g \rangle$.

- (b) Sei K ein Körper, V, W K -Vektorräume, $\varphi : V \rightarrow W$ ein Vektorraumhomomorphismus, dann ist

$$\varphi : (V, 0_V, +_V) \rightarrow (W, 0_W, +_W)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Die Vorzeichenfunktion (Aus der linearen Algebra)

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 1.32 (Kern/Bild). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Der Kern von φ ist $\text{Kern}(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$

(b) Das Bild von φ ist $\text{Bild}(\varphi) := \{\varphi(g) \in G' \mid g \in G\}$

Proposition 1.33 (Übung). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann

(a) Für $H \leq G$ eine Untergruppe ist $\varphi(H) \leq G'$ eine Untergruppe.

(b) Für $H' \leq G'$ eine Untergruppe ist $\varphi^{-1}(H') \leq G$ eine Untergruppe.

Insbesondere sind $\text{Bild}(\varphi) \leq G'$, $\text{Kern}(\varphi) \leq G$ Untergruppen.

(c) φ ist injektiv (ein Gruppenmonomorphismus) $\iff \text{Kern}(\varphi) = \{e\}$.

(d) φ ist surjektiv (ein Gruppenepimorphismus) $\iff \text{Bild}(\varphi) = G'$

Bemerkung. (a), (b) und (d) gelten auch für Monoide.

Definition 1.34 (Gruppenisomorphismus). Ein Gruppenhomomorphismus φ ist ein Gruppenisomorphismus, wenn φ bijektiv ist. ($\iff \text{Kern}(\varphi) = \{e\}$ und $\text{Bild}(\varphi) = G'$).

Bemerkung (Übung). Definiere ein Monoidhomomorphismus analog zu Definition 24.

Notation. Wir schreiben $G \cong G'$ (G ist isomorph zu G') wenn \exists Gruppenisomorphismus $\varphi : G \rightarrow G'$.

Definition 1.35 (Gruppenautomorphismus). (a) Ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G \rightarrow G$ heißt Gruppenautomorphismus.

(b) $\text{Aut}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ ist ein Gruppenautomorphismus}\}$.

Bemerkung 1.36 (Übung). (a) $\text{id}_G : G \rightarrow G \in \text{Aut}(G)$

(b) Verkettung von Gruppenisomorphismen (oder Automorphismen) ist wieder ein solcher.

(c) Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenisomorphismus, so gelten

(i) $\#G = \#G'$.

(ii) G abelsch $\iff G'$ abelsch.

(iii) $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem $\iff \varphi(S) \subseteq G'$ ein Erzeugendensystem.

Proposition 1.37. $(\text{Aut}(G), \text{id}_G, \circ)$ und $(\text{Aut}(M), \text{id}_M, \circ)$ sind Gruppen.

Beweis. (Übung) Zeige:

$$\text{Aut}(G) \leq \text{Bij}(G), \text{Aut}(M) \leq \text{Bij}(M)$$

sind Untergruppen. □

Beispiel 1.38 (Übung).

(a) $\text{Aut}((\mathbb{Z}, 0, +)) = \{\text{id}_{\mathbb{Z}}, -\text{id}_{\mathbb{Z}}\} \cong C_2$

(b) Für $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n)$ der Ring der Restklassen modulo n gilt

$$(\mathbb{Z}_n, \bar{0}, +) \cong C_n \text{ und } \text{Aut}(\mathbb{Z}_n, \bar{0}, +) \cong \mathbb{Z}_n^\times$$

z.B. Erzeuger von \mathbb{Z}_n sind Reste \bar{a} , sodass $\text{ggT}(a, n) = 1$

(c) Sei G beliebig, zu $g \in G$ definiere den **Konjugationsautomorphismus** (**Konjugation** mit g)

$$c_g : G \rightarrow G, h \mapsto g \circ h \circ g^{-1}$$

(i) $c_g \circ c_{g'} = c_{g \circ g'}, \forall g, g' \in G$

(ii) $c_e = \text{id}_G$ und $c_g \in \text{Aut}(G), \forall g \in G$

(iii) $c : G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(iv) $\text{Kern}(c) = Z(G)$ (Zentrum von G).

Bemerkung. $\text{Bild}(c) =: \text{Inn}(G)$ die Gruppe der **inneren Automorphismen** von G

Lemma 1.39. Seien $\varphi, \varphi' : G \rightarrow G'$ Gruppenhomomorphismen. Sei $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Dann gilt

$$\varphi(s) = \varphi'(s) \forall s \in S \iff \varphi = \varphi' \quad (*)$$

Analoge Aussage gilt für Monoide

Beweisskizze. (Übung)

• “ \Leftarrow ”: Klar.

• “ \Rightarrow ”:

1) Zeige $H := \{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi'(g)\} \leq G$ ist eine Untergruppe.

2) Da $S \subseteq H$ nach Definition von H und Voraussetzung von “ \Rightarrow ”, folgt $G = \langle S \rangle \subseteq H \leq G$

□

Normalteiler (Normal Subgroup)

Notation. Für $X \subseteq G$ und $g \in G$ setze

$$\ell_g(X) = \{gx \mid x \in X\} = gX \text{ und } r_g(X) = \{xg \mid x \in X\} = Xg$$

Gruppenverknüpfung assoziativ \implies

$$(i) \quad c_g(X) = \{gxg^{-1} \mid x \in X\} = (gX)g^{-1} = g(Xg^{-1}).$$

$$(ii) \quad g(hX) = (gh)X \text{ und } (Xg)h = X(gh).$$

Bemerkung. Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, dann heißt gH **Linksnebenklasse** und Hg **Rechtsnebenklasse**.

Definition 1.40 (Normalteiler). Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler (N.T.) $\iff \forall g \in G : Ng = gN$. (Diese Definition ist auch für Monoide sinnvoll)

Lemma 1.41. Für eine Untergruppe $N \leq G$ sind äquivalent:

$$(i) \quad \forall g \in G : gN = Ng$$

$$(ii) \quad \forall g \in G : gNg^{-1} = N$$

$$(iii) \quad \forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N$$

Beweis. • “(ii) \implies (iii)”: Klar.

- “(iii) \implies (i)”: Rechtsmultiplikation mit g liefert aus (iii):

$$(gNg^{-1})g = gN(g^{-1}g) = gNe = gN \subseteq Ng$$

Für die andere Inklusion betrachte (iii) für g^{-1} :

$$g^{-1}Ng \subseteq N \xRightarrow{\text{Linksmult. mit } g} Ng \subseteq gN$$

- “(i) \implies (ii)”: Wende auf (i) Rechtsmultiplikation mit g^{-1} an. ($r_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ ist eine bijektive Abbildung.)

□

Notation.

$H \leq G$ bedeutet $H \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

$H \trianglelefteq G$ bedeutet $H \subseteq G$ ist ein Normalteiler.

Satz 1.42. Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig, zu zeigen ist $g \circ \text{Kern}(\varphi) \circ g^{-1} \subseteq \text{Kern}(\varphi)$

Sei $h \in \text{Kern}(\varphi)$, zu zeigen ist $ghg^{-1} \in \text{Kern}(\varphi)$. Damit:

$$\begin{aligned} \varphi(ghg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) \underset{h \in \text{Kern}(\varphi)}{=} \varphi(g) \circ e' \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = e'. \end{aligned}$$

$$\implies \text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G.$$

□

Übung 1.43.

- (a) Ist $N' \trianglelefteq G'$ und $\varphi : G \rightarrow G'$ Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi^{-1}(N') \trianglelefteq G$.
- (b) Ist $h \leq G$ eine Untergruppe mit $[G : H] = \#G/H = 2$, so folgt $H \trianglelefteq G$.
- (c) Ist G abelsch, so ist jede Untergruppe $H \leq G$ ein Normalteiler.
- (d) Der **Kommutator** zu $g, h \in G$ ist $ghg^{-1}h^{-1}$, die **Kommutatoruntergruppe** von G ist

$$[G, G] := \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$$

Es gilt $[G, G] \trianglelefteq G$.

Beispiel. Es gibt Beispiele für folgende Aussagen:

- (i) $\exists H \leq G : H \not\trianglelefteq G$
- (ii) $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$ mit $\varphi(G) \not\trianglelefteq G'$
- (iii) $\exists N \trianglelefteq G$ und $H \trianglelefteq N$, so dass $H \not\trianglelefteq G$.

Beweis.

- (i) $G = S_3 = \text{Bij}(\{1, 2, 3\}) \supseteq H = \{\text{id}, \sigma\}$ mit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dann $H \leq G$ Klar, aber $H \not\trianglelefteq G$, denn für $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $\tau\sigma\tau^{-1}$ (Übung) $\implies \tau H \tau^{-1} \not\subseteq H$
- (ii) Betrachte $\varphi : H \rightarrow G$ Inklusion mit G, H aus (i), dann gilt $H \trianglelefteq H$ aber $\varphi(H) = H$ kein Normalteiler von $G = S_3$.
- (iii) Später.

□

Satz 1.44. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, dann gelten:

- (a) Aus $gN = g'N$ und $hN = h'N$ für $g, g', h, h' \in G$ folgt $ghN = g'h'N$ und insbesondere ist die Verknüpfung

$$\circ : \underbrace{G/N}_{\{gN \mid g \in G\}} \times G/N \longrightarrow G/N, (gN, hN) \mapsto gN \circ hN = ghN$$

wohl-definiert.

- (b) $G/N, \underbrace{N}_{=eN}, \circ$ ist eine Gruppe.

- (c) $gN = g'N \iff g^{-1}g' \in N$.

- (d) $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\pi) = N$.

Beweis. (a) Es gelten (Formeln von Definition 40)

$$\begin{aligned} (gh)N &= g(hN) \stackrel{N \trianglelefteq G}{=} g(Nh) = (gN)h \\ &= (g'N)h = g'(Nh) = g'(hN) = g'(h'N) = (g'h')N \implies (a) \end{aligned}$$

(b) Überlege Gruppenaxiome.

- Assoziativität (Übung)
- Linkseins ist $N = eN$, denn

$$N \circ (gN) = eN \circ gN \stackrel{\text{wohl-def.}}{=} (e \circ g)N = gN$$

- Linksinverses zu gN ist $g^{-1}N$, denn

$$(g^{-1}N) \circ gN \stackrel{\text{nach Def.}}{=} (g^{-1}g)N \stackrel{\text{Gruppe}}{=} eN = N$$

(c) $gN = g'N \stackrel{g^{-1} \circ_-}{=} N = g^{-1}g'N \stackrel{e \in N}{\implies} N \ni g^{-1}g'e$, d.h. $g^{-1}g' \in G$.

$$g^{-1}g' \in N \stackrel{\substack{\ell_{g^{-1}g'}: N \rightarrow N \\ \text{ist bijektiv.}}}{\implies} N = g^{-1}N \stackrel{g^{-1} \circ_-}{\implies} gN = g'N$$

(d) $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ ist Gruppenhomomorphismus, denn

$$\pi(gg') = gg'N \stackrel{\text{Def. von } \circ}{=} gN \circ g'N = \pi(g) \circ \pi(g')$$

$$g \in \text{Kern}(\pi) \iff gN = eN \stackrel{(c)}{\iff} e^{-1}g = g \in N$$

□

Bemerkung (Bezeichnung). G/N (bzw. $(G/N, eN, \circ)$) heißt **Faktorgruppe** von G modulo N .

Bemerkung (Übung). G abelsch $\implies G/N$ abelsch.

Satz 1.45 (Homomorphiesatz für Gruppen). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus mit $N = \text{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$, sodass

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ G/N & & \end{array}$$

kommutiert, d.h. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. (wobei $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ aus Satz 44). Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist injektiv und $\bar{\varphi}$ bijektiv $\iff \varphi$ surjektiv.

Beweis. • Existenz von $\bar{\varphi}$: Definiere $\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g), \forall g \in G$.

- $\bar{\varphi}$ wohl-definiert: Es gilt: $gN = g'N \iff N = g^{-1}g'N \xLeftrightarrow[44c] g^{-1}g' \in N$.
Damit

$$\implies \varphi(g') = \varphi(gg^{-1}g') = \varphi(g)\varphi(\underbrace{g^{-1} \circ g'}_{\in N = \text{Kern}(\varphi)}) = \varphi(g)e = \varphi(g).$$

- $\bar{\varphi}$ Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(gN \circ g'N) &\stackrel{\text{Def. von } \circ}{=} \bar{\varphi}(gg'N) \stackrel{\text{Def. von } \bar{\varphi}}{=} \varphi(gg') \stackrel{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(g)\varphi(g') \\ &\stackrel{\text{Def. von } \bar{\varphi}}{=} \bar{\varphi}(gN)\bar{\varphi}(g'N). \end{aligned}$$

- $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$: (Aus der Definition von $\bar{\varphi}$):

$$\underbrace{\bar{\varphi}(gN)}_{\bar{\varphi}(\pi(g))} = \varphi(g)$$

- $\bar{\varphi}$ injektiv: $\bar{\varphi}(gN) = e \iff \varphi(g) = e \iff g \in N = \text{Kern}(\varphi) \xLeftrightarrow[44c] gN = eN = N$.
- $\bar{\varphi}$ eindeutig: Folgt aus der Surjektivität von π .
- Zusatz φ surjektiv $\iff \bar{\varphi}$ Isomorphismus (Übung): Verwende $\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(\bar{\varphi})$ und $\bar{\varphi}$ injektiv.

□

Satz 45' (Homomorphiesatz'). (Übung) Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$, so dass $N \subseteq \text{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\bar{\varphi} : G/N \longrightarrow G' \text{ mit } \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi.$$

wobei $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$

Notation. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Restklassenring. ($n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe)

Korollar 1.46. Sei G eine zyklische Gruppe,

(a) Falls $m := \text{ord}(G) \in \mathbb{N} \implies G \cong \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m)$.

(b) Falls $\text{ord}(G) = \infty \implies G \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $g \in G$ ein Erzeuger und betrachte

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$$

φ ist surjektiv, da $\text{Bild}(\varphi) = \langle g^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle = G$.

$$\xRightarrow[\text{Satz 45}]{\implies} \bar{\varphi} : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m \xrightarrow{\cong} G$$

für $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $\text{Kern}(\varphi) = \mathbb{Z}m$.

- Fall (b): $\text{ord}(G) = \infty \implies \text{Kern}(\varphi) = \{0\} \implies \varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ist ein Isomorphismus.
- Fall (a): $\text{ord}(G) = m \in \mathbb{N}$ dann ist $\bar{\varphi}$ der gewünschte Isomorphismus.

□

Korollar 1.47. Für zyklische Gruppen G, H gilt $G = H \iff \#G = \#H$

Übung. (a) $G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Für $N \trianglelefteq G$ gilt:

$$G/N \text{ abelsch} \iff [G, G] \leq N$$

Einschub: Faktorringer

Definition 1.48 (Ideal). Sei R ein kommutativer Ring. $I \subseteq R$ heißt Ideal wenn

- (i) I ist Untergruppe von $(R, 0, +)$
- (ii) $RI := \{ri \mid r \in R, i \in I\} \subseteq I$

Beispiel. 1) $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$ ist ein Ideal $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) $Ra \subseteq R$ für $a \in R$ ist ein Ideal von R .

Satz 1.49. Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, und $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ die Nebenklassenmenge von R modulo I (für die Gruppe $(R, 0, +)$). Dann:

(a) Die Verknüpfungen

$$+ : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, (r + I, s + I) \longmapsto (r + s) + I$$

$$\cdot : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, (r + I, s + I) \longmapsto rs + I$$

sind wohl-definiert auf R/I

(b) $(R/I, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring ($\bar{r} := r + I$ Notation für die Klasse von r) der Restklassenring von R modulo I .

(c) $\pi : R \longrightarrow R/I, r \longmapsto r + I$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Beweis. (a) “+” wohl-definiert folgt aus Satz 44. ($I \subseteq (R, 0, +)$ Ideal!)

“ \cdot ” wohl-definiert: Gelte $a + I = a' + I$ und $b + I = b' + I$.

$$\implies a'b' + I = ab + aj + bi + ij + I = ab + I$$

(b) (Übung)

(c) Wie in 45 (d)

□

Die Isomorphiesätze

Satz 1.50 (Erster Isomorphiesatz). Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:

- (a) $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\} \subseteq G$ ist eine Untergruppe.
- (b) $H \cap N \subseteq H$ ist ein Normalteiler (und (Übung) $N \trianglelefteq HN$)
- (c) Die folgende Abbildung ist wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus

$$H/H \cap N \longrightarrow HN/N, h(H \cap N) \mapsto hN$$

Beweis. (a) Seien $hn, h'n' \in HN$, dann:

$$(h'n')(hn)^{-1} = h' \underbrace{n'n^{-1}h^{-1}}_{\substack{\in Nh^{-1} \\ N \trianglelefteq G} = h^{-1}N} = h'h^{-1}\tilde{n} \stackrel{H \text{ U.G.}}{=} (h'h^{-1})\tilde{n} \in HN$$

und $e = ee = HN$

- (b) Zu zeigen: für $h \in H$ gilt $h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N$

Dazu:

$$\begin{aligned} h(H \cap N)h^{-1} &\subseteq hHh^{-1} = H \\ h(H \cap N)h^{-1} &\subseteq hNh^{-1} \stackrel{N \trianglelefteq G}{=} N \implies h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N. \end{aligned}$$

- (c) Betrachte die Verkettung von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi : H \xrightarrow[h \mapsto h]{\text{Inklusion}} HN \xrightarrow[x \mapsto xN]{} HN/N$$

dann ist φ ein Gruppenautomorphismus.

φ ist surjektiv: Jede Klasse in HN/N ist von der Form

$$hnN = \underbrace{hN}_{=\varphi(h)}$$

für ein $h \in H$. Nach Homomorphiesatz: nur noch zu zeigen $\text{Kern}(\varphi) = H \cap N$: für $h \in H$:

$$h \in \text{Kern}(\varphi) \iff \varphi(h) = eN \iff hN = eN \stackrel{44(c)}{\implies} h \in N \stackrel{h \in H}{\implies} h \in N \cap H$$

Umgekehrt: $h \in N \cap H \implies h \in N \implies hN = eN = N$.

□

Satz 1.51 (Zweiter Isomorphiesatz). Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, und sei $\pi : G \longrightarrow G/N, g \mapsto \bar{g} = gN$ die Faktorabbildung.

(a) Sei $X := \{H \leq G \mid N \subseteq H\}$, und sei $\bar{X} := \{\bar{H} \leq G/N\}$, dann ist die Abbildung

$$\psi : X \longrightarrow \bar{X}, H \longmapsto \pi(H) = H/N =: \bar{H}$$

eine Bijektion mit inverser Abbildung

$$\nu : \bar{X} \longrightarrow X, \bar{H} \longmapsto \pi^{-1}(\bar{H}).$$

Dabei gilt:

$$X \ni H \trianglelefteq G \iff \bar{X} \ni \pi(H) \trianglelefteq G/N$$

(b) Ist $H \in X$ ein Normalteiler von G , so ist

$$G/H \longrightarrow \left(\frac{G/N}{H/N} \right), g \longmapsto \underbrace{\bar{g}}_{gN} \underbrace{\bar{H}}_{\pi(H)}$$

wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. (a) Nach Proposition 33 sind ψ und ν wohl-definiert.

- $\nu \circ \psi = \text{id}_X$: Sei $H \leq G$ mit $N \subseteq H$, zu zeigen ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$. Es gilt:

$$g \in \pi^{-1}(\pi(H)) \iff \pi(g) \in \pi(H) \iff gN \in \bigcup_{h \in H} hN$$

$$\iff \exists h \in H : gN = hN \xrightarrow{44(c)} h^{-1}g \in N \subseteq H \implies g \in hH = H.$$

(“ \Leftarrow ” klar: $g \in H \implies g \in \pi^{-1}(\pi(H))$).

- $\psi \circ \nu = \text{id}_{\bar{X}}$: Für $\bar{H} \in \bar{X}$ (d.h. $\bar{H} \leq G/N$) ist zu zeigen $\pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \bar{H}$. Dies gilt, denn π ist surjektiv.
- Schließlich: Sei $H \in X$, zu zeigen ist $H \trianglelefteq G \iff \pi(H) \trianglelefteq G/N$

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$$

$$\xRightarrow{\pi: G \rightarrow G/N \text{ surj.}} \forall \bar{g} \in G/N : \bar{g}\pi(H)\bar{g} \subseteq \pi(H) \implies \pi(H) \trianglelefteq \bar{G}$$

Umgekehrt: Falls $\pi(H) \trianglelefteq \bar{G}$ und $g \in G$:

$$\pi(gHg^{-1}) = \bar{g}\pi(H)\bar{g}^{-1} \subseteq \pi(H)$$

$$\implies gHg^{-1} \subseteq \pi^{-1}(\pi(gHg^{-1})) \subseteq \pi^{-1}(\pi(H)) \xrightarrow{\nu \circ \psi = \text{id}_X} H$$

(b) Sei $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq H$, so dass nach (a)

$$\bar{H} = \underbrace{H/N}_{\pi(H)} \trianglelefteq \underbrace{G/N}_{\pi(G)}$$

ein Normalteiler ist. Betrachte den verketteten Gruppenautomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow[g \mapsto gN]{\pi} G/N \xrightarrow[\bar{g} \mapsto \bar{g}\bar{H}]{\pi'} \left(\frac{G/N}{H/N} \right)$$

π, π' sind surjektive Gruppenhomomorphismen nach Satz 44(d) \implies die Verkettung φ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Nach Homomorphiesatz für Gruppen bleibt zu zeigen: $\text{Kern}(\varphi) = H$:

$$\begin{aligned} g \in \text{Kern}(\varphi) &\stackrel{\pi'(\pi(g))=e}{\iff} \pi(g) \in \text{Kern}(\pi') \iff gN \in H/N \\ &\iff gN \subseteq H \stackrel{N \leq H}{\iff} g \in H. \end{aligned}$$

□

(Semi-)direkte Produkte

Lemma 1.52 (Übung). Seien (G_1, e_1, \circ_1) und (G_2, e_2, \circ_2) Gruppen, dann ist $G = (G_1 \times G_2, (e_1, e_2), \circ)$ eine Gruppe mit

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$$

Analog für $k \geq 2$ Faktoren. Dabei sind $G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G$ und $\{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G$ Nullteiler von G .

Definition 1.53 (Direktes Produkt). Die Gruppe G aus Lemma 52 heißt das direkte Produkt von G_1 und G_2 , Notation $G_1 \times G_2$.

Beispiel.

$$(\mathbb{R}^n, \underline{0}, +) = (\mathbb{R}, 0, +) \times \cdots \times (\mathbb{R}, 0, +) = \bigtimes_{i=1}^n (\mathbb{R}, 0, +)$$

Proposition 1.54. Sei G eine Gruppe, seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ Nullteiler mit $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, dann gelten:

- (a) $\forall n_1 \in N_1, n_2 \in N_2 : n_1 n_2 = n_2 n_1$
- (b) $N_1 N_2 \trianglelefteq G$ ist ein Normalteiler in G
- (c) $\psi : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1 N_2, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$ ist ein Gruppenisomorphismus.
(Insbesondere gilt $\#N_1 N_2 = \#N_1 \#N_2$)

Zusatz: Gilt $G = N_1 N_2$, so folgt $G \cong N_1 \times N_2$ via ψ .

Beweis. (a) Seien $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$, setze $x = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}$. Nun:

$$x = (n_1 n_2 n_1^{-1}) n_2^{-1} \in (n_1 N_2 n_1^{-1}) N_2 \subseteq N_2 N_2 = N_2$$

analog

$$x = n_1 (n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}) \in N_1 (n_2 N_1 n_2^{-1}) \stackrel{N_2 \trianglelefteq G}{\subseteq} N_1 N_1 = N_1$$

damit ist $x \in N_1 \cap N_2 = \{e\} \implies x = e \implies n_1 n_2 = n_2 n_1$.

(b) Für $g \in G$:

$$g N_1 N_2 g^{-1} = g N_1 g^{-1} g N_2 g^{-1} \subseteq N_1 N_2$$

(c) ψ ist wohl-definiert: klar. ψ ein Gruppenhomomorphismus folgt aus (a)

$$\begin{aligned}\psi((n_1, n_2) \circ (n'_1, n'_2)) &= \psi((n_1 \circ n'_1, n_2 \circ n'_2)) = n_1 n'_1 n_2 n'_2 \\ &\stackrel{(a)}{=} n_1 n_2 n'_1 n'_2 = \psi(n_1, n_2) \circ \psi(n'_1, n'_2)\end{aligned}$$

$\{(e, e)\} = \text{Kern}(\psi)$:

$$\begin{aligned}\psi(n_1, n_2) = e &\iff n_1 n_2 = e \iff n_1 = n_2^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{e\} \\ &\iff n_1 = n_2 = e\end{aligned}$$

$\text{Bild}(\psi) = N_1 N_2$.

□

Korollar 1.55 (Übung). Sei G eine endliche Gruppe. Seien $N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ Normalteiler von G und gelte:

$$(i) \quad \forall i \neq j : \text{ggT}(\#N_i, \#N_j) = 1$$

$$(ii) \quad \prod_{j=1}^k \#N_j = \#G$$

Dann ist

$$\psi : \bigtimes_{j=1}^k N_j \longrightarrow G, (n_1, \dots, n_k) \longmapsto n_1 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{j=1}^k n_j$$

ein Gruppenisomorphismus.

Übung. Spezialfall: $n = \prod_{i=1}^k p_i^{f_i}$ für p_1, \dots, p_k paarweise verschiedene Primzahlen, dann gilt:

$$\bigtimes_i^k \mathbb{Z}/(p_i^{f_i}) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

ist Folge von Korollar 55.

Lemma 1.56. Seien $H = (H, e_H, \circ_H), N = (N, e_N, \circ_N)$ Gruppen und sei $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Definiere

$$G := N \rtimes H := N \rtimes_{\varphi} H = (N \times H, \underbrace{(e_N, e_H)}_{=: e}, \circ)$$

mit \circ der Verknüpfung auf G definiert durch

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, h_2) = (n_1 \circ_N \varphi(h_1)(n_2), h_1 \circ_H h_2)$$

Dann ist G eine Gruppe und es gelten:

- $N' := \{(n, e_H) \mid n \in N\} \cong N$ ist ein Normalteiler in G ,
- $H' := \{(e_N, h) \mid h \in H\} \cong H$ ist eine Untergruppe von G ,
- $N'H' = G$ und $N' \cap H' = \{e\}$,

- $G \rightarrow H, (n, h) \mapsto h$ ist ein Gruppenepimorphismus (surj.) mit Kern N' .

Definition 1.57 (Semi-direktes Produkt). Die Gruppe $G = N \rtimes H$ heißt das semi-direkte Produkt von N mit H (bezüglich φ).

Satz 1.58. Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:

- (a) $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N), h \mapsto \underbrace{(c_h|_N : N \rightarrow N, n \mapsto hnh^{-1})}_{\text{Konjugation mit } h}$ ist wohl-definiert und ein Gruppenhomomorphismus.
- (b) Gelten zusätzlich (i) $NH = G$, (ii) $N \cap H = \{e\}$, so ist

$$\psi : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G, (n, h) \mapsto n \circ_G h$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Siehe Jantzen, Schwermer - Algebra. □

Beispiele.

1. Seien $A_n = \text{Kern}(\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\})$ die Untergruppe der geraden Permutationen und τ eine beliebige Transposition, dann gilt:

$$S_n \cong A_n \rtimes \{\text{id}, \tau\}$$

2. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\sigma \in O(V)$ eine Spiegelung, dann gilt

$$O(V) \cong SO(V) \rtimes \{\text{id}, \sigma\}$$

3. Sei K ein Körper, dann gilt

$$\text{GL}_n(K) \cong \text{SL}_n(K) \rtimes H \cong \text{SL}_n(K) \rtimes K^{\times}$$

wobei

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^{\times} \right) \right\} \cong K^{\times}$$

4. Sei $\sigma \in A_4$ ein 3-Zykel, z.B. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, und V ist die kleinsche Vierergruppe

$$V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \trianglelefteq A_4,$$

dann gilt

$$A_4 \cong V \rtimes \{\text{id}, \sigma, \sigma^2\}$$

Beweis. (Übung) eventuell noch 12 Tage warten. □

Kapitel 2

Gruppen Strukturtheorie

2.1 Strukturtheorie zu Gruppen (“Einige Aussagen”)

Sei im Weiteren M ein Monoid, G eine Gruppe und X eine Menge.

Definition 2.1 (Wirkung). Eine Abbildung

$$\lambda : M \times X \rightarrow X, (m, x) \mapsto m \cdot x := \lambda(m, x)$$

heißt Linkswirkung (left action, Linksoperation) von M auf X , wenn es gelten $\forall x \in X, m, m' \in M$:

- (i) Neutrales Element: $e \cdot x = x$
- (ii) Assoziativität: $m \cdot (m' \cdot x) = (m \cdot m') \cdot x$

Bezeichnung. Ist M eine Gruppe, so heißt λ auch Gruppenwirkung und X heißt Links- M -Menge.

Bemerkung. Analog kann man auch Rechtswirkungen

$$\rho : X \times M \rightarrow X, (x, m) \mapsto x \cdot m$$

definieren. (Axiome: $x \cdot e = x$ und $(x \cdot m) \cdot m' = x \cdot (m \cdot m')$)

Bemerkung (Übung). Jede Links- G -Wirkung kann man in eine Rechts- G -Wirkung überführen: zu $\lambda : G \times X \rightarrow X$ definiere $\rho : X \times G \rightarrow X$ durch

$$\rho(x, g) := \lambda(g^{-1}, x) \iff x \cdot g := g^{-1} \cdot x$$

Proposition 2.2 (Alternative Beschreibung von Wirkungen).

(a) Sei $\lambda : G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung, dann ist

$$\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X), g \mapsto (\varphi_g : X \rightarrow X, x \mapsto gx)$$

ein wohl-definierter Gruppenhomomorphismus.

(b) Sei $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist

$$\lambda : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$$

eine Linkswirkung von G auf X .

Beweis. (a) Für $g \in G$ sei $\varphi_g : X \rightarrow X, x \mapsto gx$, dann gelten: $\varphi_e : X \rightarrow X, x \mapsto ex = x$ ist id_X (Axiom (i)), und

$$(*) \quad \varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{gg'}$$

denn $\forall x \in X$:

$$(\varphi_g \circ \varphi_{g'})(x) = \varphi_g(\varphi_{g'}(x)) = g(g'x) \stackrel{(ii)}{=} (gg')x = \varphi_{gg'}(x)$$

Damit folgen:

1. $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \underbrace{\varphi_e}_{\text{id}_X} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g \implies \varphi_g$ ist eine bijektive Abbildung mit Inverse $\varphi_{g^{-1}}$, d.h.

$$\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X), g \mapsto \varphi_g$$

ist wohl-definiert.

2. φ ist ein Gruppenhomomorphismus: folgt aus $(*)$ (Verknüpfung in $\text{Bij}(X)$ ist die Verkettung von Abbildungen.)

(b) Übung.

□

Bemerkung. (a) Das Analogon von Proposition 2 gilt auch für Monoide. Die Linkswirkungen eines Monoids M auf X entsprechen Monoidhomomorphismen $M \rightarrow (\text{Abb}(X, X), \text{id}_X, \circ)$

(b) Eine Gruppe kann auch auf “Objekten” mit mehr Struktur als eine Menge wirken, z.B. auf eine Gruppe!

Beispiel. G wirkt auf eine Gruppe N heißt, man hat einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(N)$ (vgl. Lemma 1.56)

Definition 2.3 (Eigenschaften von Wirkungen). Sei $\lambda : G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung von G auf X .

(a) Die **Bahn** zu $x \in X$ ist $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Die Länge der Bahn zu x ist $\#Gx$

(b) λ ist transitiv $\iff \forall y, z \in X \exists g \in G : gy = z \stackrel{\text{Übung}}{\iff} \forall y \in X : Gy = X \stackrel{\text{Übung}}{\iff} \exists x \in X : Gx = X$

(c) λ ist n -fach transitiv ($n \in \mathbb{N}$), wenn für alle Paare von n -Tupeln $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ mit $\#\{x_1, \dots, x_n\} = \#\{y_1, \dots, y_n\}$ gilt $\exists g \in G : gx_i = y_i, \forall i$.

- (d) Die Wirkung heißt **treu**, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ (aus Proposition 2) injektiv ist

$$\stackrel{\text{Übung}}{\Longleftrightarrow} \forall g \in G \setminus \{e\} : \exists x \in X : \underbrace{gX \neq X}_{\varphi_g(x) \neq \text{id}_X(x)}$$

Beispiel 2.4.

1. Ist V ein K -Vektorraum, so wirkt das Monoid $(K, 1, \cdot)$ auf V durch Skalarmultiplikation $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$
2. Die folgenden 3 Beispiele sind Linkswirkungen von $\text{GL}_n(K)$:
 - (i) $\text{GL}_n(K) \times K^n \rightarrow K^n, (g, v) \mapsto gv$. (Übung: Es gibt die Bahnen $\{0\}, K^n \setminus \{0\}$)
 - (ii) Sei $\mathcal{B} = \{\text{geordnete Basen von } K^n\}$ und

$$\text{GL}_n(K) \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, (g, (b_1, \dots, b_n)) \mapsto (gb_1, \dots, gb_n)$$

die Wirkung ist treu und transitiv.

- (iii) $\text{GL}_n(K) \times \text{End}_K(K^n) \rightarrow \text{End}_K(K^n), (A, B) \mapsto ABA^{-1}$ die Wirkung ist nicht treu $Z(\text{GL}_n(K))$ wirkt trivial. (Übung: Bahnen stehen in Bijektion zu den Frobeniusnormalformen von Matrizen.)
3. $S_n \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, (\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$ Wirkung ist treu und n -fach transitiv.
4. Abstrakte Beispiele: Sei $H \leq G$ eine Untergruppe.

- (i) $\lambda : H \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto hg$. Die Bahnen sind die Mengen Hg , also die Rechtsnebenklassen zu H (treu?) Menge der Rechtsnebenklassen

$$H \backslash^G := \{Hg \mid g \in G\}$$

- (ii) $\rho : G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ Bahnen = Linksnebenklassen zu H und

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

- (iii) $c : G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto gg'g^{-1}$ ist eine Linkswirkung, denn der nach Proposition 2 zugehörige Gruppenhomomorphismus ist $c : G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g$.
- (iv) $G \times G/H \rightarrow G/H, (g, g'H) \mapsto gg'H$ Die Klassen gH heißen Linksnebenklassen wegen der Links- G -Wirkung auf ihnen.

Proposition 2.5. Sei X eine Links- G -Menge (zu der Wirkung $\lambda : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$) definiere Relation \sim auf X durch

$$x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$$

dann gelten:

- (a) \sim ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Äquivalenzklasse zu $x \in X$ bezüglich \sim ist die Bahn Gx . Insbesondere ist X die disjunkte Vereinigung seiner Bahnen. (Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der G -Bahnen, so gilt also $\#X = \sum_{i \in I} \#Gx_i$)

Beweis. (a) \sim ist eine Äquivalenzrelation: Prüfe

- \sim reflexiv: $ex = x \implies x \sim x$.
- \sim symmetrisch: Gelte $x \sim y$, d.h. $\exists g \in G : gx = y$, dann gilt $x = ex = g^{-1}(gx) = g^{-1}y \implies y \sim x$.
- \sim transitiv: Gelte $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h. $\exists g, h' \in G : gx = y, g'y = z$
 $\implies (g'g)x = g'(gx) = g'y = z \implies x \sim z$

(b) Sei $x \in X$, dann ist

$$\{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\} = \{gx \mid g \in G\} = Gx.$$

□

Satz 2.6 (Satz von Cayley). Jede Gruppe G (jedes Monoid M) ist isomorph zu einer Untergruppe (einem Untermonoid) von $(\text{Bij}(G), \text{id}_G, \circ)$ (bzw. $(\text{Abb}(G, G), \text{id}_G, \circ)$).

Beweis. (Für Gruppen, Rest ist eine Übung) Definiere die Wirkung $\lambda G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$, dann erhalten wir den induzierten Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(G)$, wir zeigen φ ist injektiv: Sei $g \in G \setminus \{e\}$, dann gilt $ge = g \neq e \implies$ Wirkung treu, also φ ist ein Gruppenmonomorphismus. D.h. G "ist" Untergruppe von $\text{Bij}(G)$. □

Definition 2.7 (Stabilisator). Sei X eine Links- G -Menge und $x \in X$, dann heißt

$$G_x := \text{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$$

Stabilisator von x (unter G). Warnung: $G_x \neq G \cdot x$.

Beispiel. $\text{Stab}_{S_n}(\{n\}) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}$ mit der üblichen S_n -Wirkung auf $\{1, \dots, n\}$.

Übung. G -Wirkung auf einer Menge X ist treu

$$\iff \bigcap_{x \in X} \text{Stab}_G(x) = \{e\}$$

Proposition 2.8. Sei X eine links- G -Menge, $x \in X, g \in G$, dann gilt

(a) $\text{Stab}_G(x) \leq G$ ist eine Untergruppe.

(b) $\text{Stab}_G(gx) = g \text{Stab}_G(x) g^{-1}$

Beweis.

(a) $e \in \text{Stab}_G(x)$, denn $ex = x$. Seien $\underbrace{g_1, g_2 \in \text{Stab}_G(x)}_{\text{bedeutet } g_1x=x, g_2x=x}$, zu zeigen ist $g_1^{-1}g_2 \in \text{Stab}_G(x)$

$$\xrightarrow{g_1^{-1} \cdot} x = ex = g_1^{-1}g_1x = g^{-1}x$$

Damit gilt $(g_1^{-1} \cdot g_2^{-1})x = g_1^{-1}(g_2x) = g_1^{-1}x = x$

(b) Sei $h \in G$, dann:

$$\begin{aligned} h \in \text{Stab}_G(gx) &\iff hgx = gx \xrightarrow{g^{-1} \cdot} g^{-1}hgx = x \\ &\iff g^{-1}hg \in \text{Stab}_G(x) \xleftrightarrow[\text{Konj. mit } g]{} h \in g \text{Stab}_G(x)g^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 2.9 (Bahngleichung). *Sei X eine links- G -Menge, $x \in X$, dann gilt:*

- $\psi : G/G_x \rightarrow Gx, hG_x \mapsto hx$ ist wohl-definiert und eine Bijektion.
- Ist G endlich, so folgt $\#G \cdot x = [G : G_x]$.

Beweis.

- ψ injektiv und wohl definiert: Seien $g, h \in G$, dann

$$\begin{aligned} hx = gx &\iff g^{-1}hx = x \iff g^{-1}h \in G_x \leq G \\ &\iff g^{-1}hG_x = G_x \iff hG_x = gG_x \end{aligned}$$

- ψ surjektiv nach Definition von $G \cdot x$.
- Aussage über Mächtigkeiten: ψ bijektiv $\implies \#G/G_x = \#G \cdot x$. \square

Bemerkung. Die Abbildung ψ ist ein Homomorphismus von links- G -Mengen (ein Isomorphismus!), G/G_x und $G \times x \subseteq X$ sind links- G -Mengen und ψ erfüllt:

$$\psi(g \cdot hG_x) = g \cdot \psi(hG_x)$$

(beides ist $= gx \cdot x$)

Definition 2.10. Sei X eine links- G -Menge,

- (a) Man sagt G operiert **frei** auf $X \iff \forall x \in X : G_x = \{e\}$
- (b) Die Menge der **Fixpunkte** der G -Wirkung ist

$$X^G := \{x \in X \mid G_x = G\}$$

Beispiel. $\text{GL}_n(K)$ operiert frei auf der Menge der geordneten Basen von K^n .

Korollar 2.11. *Sei X eine links- G -Menge. Sei x_1, \dots, x_n ein Repräsentantensystem der Bahnen der Länge ≥ 2 . Dann:*

- (a) $X = X^G \sqcup \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, n\}} G \cdot x_i$

$$(b) \#X = \#X^G + \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \underbrace{[G : G_{x_i}]}_{=\#G \cdot x}$$

Beweis. Aus Proposition 5 folgt (a), Lemma 9 gibt (b). \square

Anwendung. Sei $X := G$. Sei die G -Wirkung durch Konjugation gegeben, d.h.

$$g \underbrace{\circ}_{\text{Wirk.}} h = ghg^{-1}$$

Die Bahnen unter dieser G -Wirkung heißen **Konjugationsklassen**. Die Konjugationsklasse zu $h \in G = X$ ist

$$G_h := \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$$

Bahnen der Länge 1 sind Fixpunkte unter Konjugation mit allen $g \in G$

$$= \{h \in G \mid \forall g \in G : \underbrace{ghg^{-1}}_{gh=hg} = h\} =: Z(G) \text{ das Zentrum von } G$$

Stabilisator zu $h \in G$ (unter Konjugationswirkung)

$$= \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = C_G(h) \text{ Zentralisator von } h$$

Aus Korollar 11 ergibt sich nun:

Satz 2.12 (Klassengleichung). *Sei G endlich. Ist g_1, \dots, g_n ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der Länge ≥ 2 , so gilt:*

$$\# \underbrace{G}_X = \# \underbrace{Z(G)}_{X^G} + \sum_{i=1}^n [G : \underbrace{C_G(g_i)}_{C_g}]$$

Definition 2.13 (p -Gruppe). Sei p eine Primzahl, eine Gruppe G heißt p -Gruppe $\iff \# = p^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$

Beispiel.

$$\mathbb{Z}/(p^m) \text{ oder } U_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

Korollar 2.14. *Ist G eine p -Gruppe, so gilt $p \mid \#Z(G)$, (d.h. $Z(G)$ ist nicht-trivial und also eine p -Gruppe)*

Beweis. Seien g_1, \dots, g_n wie im Satz 12. Dann gilt: $C_G(g_i) < G$ ist eine echte Untergruppe. (sonst $g_i = Z(G)$, ist ausgeschlossen)

$$\xRightarrow{\text{Lagrange}} [G : C_G(g_i)] \text{ teilt } \#G = p^m$$

ist ungleich 1!

$$\implies p \mid [G : C_G(g_i)], \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Klassengleichung modulo p :

$$\underbrace{0}_{\#G} \cong \#Z(G) + \sum_{i=1}^n \underbrace{0}_{[G:C_G(g_i)]} \pmod{p} \implies p \mid \#Z(G). \quad \square$$

Übung 2.15 (Satz von Cauchy). (?) Sei p eine Primzahl und G endlich, dann gilt:

$$p \mid \#G \implies \exists g \in G : \text{ord}(g) = p.$$

($\implies \#G$ und $\#\exp(G)$ haben dieselben Primteiler)

Idee: Verwende Induktion über $\#G$ und die Klassengleichung. In Induktionsschritt 2 Fälle:

1. $\exists H < G$ echte Untergruppe mit $p \mid \#H$
2. $\neg \exists H < G$ echte Untergruppe mit $p \mid \#H$

Im 2. Fall wende Klassengleichung mod p an!

2.2 Permutationsgruppen

Sei $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$, Notation für $\sigma \in S_n$, d.h. $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ ist eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, d.h.

$$\#\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = n$$

Korollar 2.16. $\#S_n = n!$

Beweis. (Übung) Betrachte die möglichen “Wertetabellen” für Permutationen. □

Definition 2.17. Für $\sigma, \tau \in S_n$ definiere

- (a) $\text{supp}(\sigma) = \text{Träger von } \sigma, \text{supp}(\sigma) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(i) \neq i\}$
- (b) σ und τ sind **disjunkt** $\iff \text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$

Bemerkung. $\text{supp}(\sigma) = \emptyset \iff 0 = \text{id}$

Lemma 2.18 (Andere Interpretation des Trägers). Sei $\sigma \in S_n$, dann gilt für die Wirkung von $\langle \sigma \rangle : \text{supp}(\sigma) = \text{Vereinigung der Bahnen von } \langle \sigma \rangle \text{ auf } \{1, \dots, n\} \text{ der Länge } \geq 2$.

Beweis.

- “ \subseteq ”: Sei $i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \implies \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^m(i), \dots\}$ ist Bahn von $\langle \sigma \rangle = \{\sigma^j \mid j \in \mathbb{N}_0\} = \{\text{id}, \sigma, \dots, \sigma^{r-1}\}$ der Länge ≥ 2 . für $r = \text{ord}(\sigma)$.
- “ \supseteq ”: Sei $i \notin \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) = i \implies \sigma^j(i) = i, \forall j \in \mathbb{N} \implies$ Bahn von i unter $\langle \sigma \rangle$ ist 1-elementig.

□

Korollar 2.19. Für $\sigma \in S_n$ gelten:

- (a) $i \in \text{supp}(\sigma) \iff \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$

(b) Auf jeder $\langle \sigma \rangle$ -Bahn (durch $i \in \{1, \dots, n\}$) wirkt σ als “zyklische Permutation”, d.h.

$$i_n := i \mapsto i_2 = \sigma(i) \mapsto i_3 = \sigma^2(i) \mapsto \dots \mapsto i_r = \sigma^{r-1}(i)$$

σ
 $(mit \# \{1 \dots n\} = r)$

Beweis. (a)

$$i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \underset{\sigma \text{ anwenden}}{\implies} \sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \implies \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$$

Falls $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$, so gilt $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \xRightarrow[\sigma^{-1} \text{ anwenden}]{} \sigma(i) \neq i$

(b) Sei r die Länge der Bahn durch i unter $\langle \sigma \rangle$. Dann sind $i_{j+1} := \sigma^j(i), j = 0, \dots, r-1$ paarweise verschieden. Sonst $\exists 0 \leq j_1 < j_2 \leq r-1$ mit $\sigma^{j_1}(i) = \sigma^{j_2}(i)$

$$\sigma^{-1} \text{ anwenden} \implies i = \sigma^{j_2 - j_1}(i) \quad (*)$$

\implies Bahn durch i hat höchstens $j_2 - j_1 < r$ Elemente, die Bahn ist wegen $(*)$

$$= \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{j_2-j_1}(i)\}$$

Und nun: Wiederholtes Anwenden von σ gibt den Zykel

$$i_1 \xrightarrow{\quad} i_2 \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\quad} i_r \quad \square$$

Lemma 2.20. Sind $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt, so gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Beweis. Zeige $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ als Abbildungen $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, sei $i \in \{1, \dots, n\}$

- Fall 1: $i \in \text{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma) \implies i, \sigma(i) \notin \text{supp}(\tau)$. Also $\tau(i) = i, \tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$
- Fall 2: $i \in \text{supp}(\tau)$ analog zu Fall 1.
- Fall 3: $i \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau) \implies \sigma(i) = i = \tau(i)$.

Also $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i))$. □

(Folge: σ, τ disjunkt $\implies \text{ord}(\sigma\tau) = \text{kgV}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$)

Definition 2.21. Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Der r -Zykel

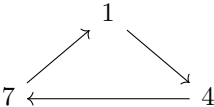
$$(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_r)(j) = \begin{cases} j & j \notin \{i_1, \dots, i_r\} \\ i_{s+1} & j = i_s \ (s \in \{1, \dots, n\}) \\ i_1 & j = i_r \end{cases}$$

2-Zykel heißen **Transposition**. Konvention: $(\cdot) := \text{id}_{\{1, \dots, n\}}$ (leerer Zykel).
Beachte:

(i) $(i) = (\cdot)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

(ii) $\text{supp}(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) = \begin{cases} \{i_1, \dots, i_r\} & r \geq 2 \\ \emptyset & r = 1 \end{cases}$

(iii) $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) = (i_r \ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{r-1})$ (Notation ist nicht eindeutig, können Einträge zyklisch weiterschieben.) z.B.

$$(1 \ 4 \ 7) = (7 \ 1 \ 4) = (4 \ 7 \ 1) =$$


(iv) $\text{ord}(i_1 \ \dots \ i_r) = r$, z.B. $\text{ord}(1 \ 2) = 2$

Satz 2.22 (Zykeldarstellung von Permutationen). Sei $\sigma \in S_n$, seien $I_1, \dots, I_t \subseteq \{1, \dots, n\}$ die paarweise verschiedenen Bahnen von $\langle \sigma \rangle$ auf $\{1, \dots, n\}$ der Länge ≥ 2 , dann:

(a) Für $j \in \{1, \dots, t\} \exists!$ Zykel $\sigma_j \in S_n$ mit $\text{supp}(\sigma_j) = I_j$, und $\sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j}$

(b) $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_t$ und die σ_i kommutieren paarweise.

(c) Die Darstellung in (b) ist eindeutig bis auf Permutation der Faktoren.

(d) Für σ gilt: $\text{ord}(\sigma) = \text{kgV}(\#I_j \mid j \in \{1, \dots, t\})$

Beweis. (a) Sei r_j die Länge von I_j . Sei $i_j \in I_j$, dann ist (vgl. Beweis von Korollar 19)

$$\sigma_j := (i_j, \sigma(i_j), \sigma^2(i_j), \dots, \sigma^{r_j-1}(i_j)) \in S_n$$

ein r_j -Zykel und $\sigma|_{I_j} = \sigma_j$

(b) Die (σ_j) kommutieren paarweise, denn deren Träger, die Mengen I_j , sind paarweise disjunkt.

Um $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_t$ zu prüfen, wende beide Abbildungen an auf $i \in \{1, \dots, n\}$.

- Fall $j \in \{1, \dots, t\} : i \in I_j$

(*) Es gilt $\sigma_{j'}(i) = i$ für $j' \neq j$ (da $I_{j'} \cap I_j = \emptyset$)

$$\implies \sigma(i) = \sigma_j(i) \stackrel{(*)}{=} \left(\sigma_j \cdot \prod_{j' \neq j} \sigma_{j'} \right)(i)$$

$$\stackrel{\sigma_j \text{ kommutieren}}{=} (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_j \cdot \dots \cdot \sigma_t)(i)$$

- Fall 0 : $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{j \in \{1, \dots, t\}} I_j$. Dann: $\sigma(i) = i$ (1-elementige Bahn).

Da $i \notin I_j : \sigma_j(i) = i, \forall j \in \{1, \dots, t\}$. also $(\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_t)(i) = i = \sigma(i)$

(c) Es gelte $\sigma = \sigma'_1 \cdot \dots \cdot \sigma'_{t'}$ mit paarweise disjunkten Zykeln $\sigma = \sigma'_1 \cdot \dots \cdot \sigma'_{t'}$ der Länge ≥ 2 . Sei $I'_{j'} := \text{supp}(\sigma'_{j'})$ für $j' \in \{1, \dots, t'\}$. Dann:

$$\sigma|_{I'_{j'}} = \sigma'_{j'}|_{I'_{j'}}$$

$\implies I'_{j'}$ ist Bahn von $\langle \sigma \rangle$ der Länge ≥ 2 . $\implies t' = t$ und nach Umindizieren der $I'_{j'}$ gelte

$$I'_j = I_j \text{ für } j \in \{1, \dots, t\}$$

$$\text{und } \sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j} = \sigma'_j|_{I_j} \xrightarrow[r_j = \#I_j\text{-Zykel}]{\sigma_j, \sigma'_j \text{ sind}} \sigma_j = \sigma' j$$

(d) (Übung). □

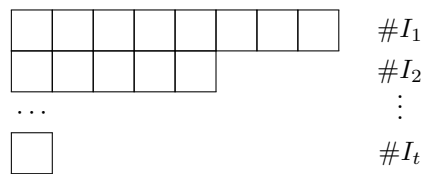
Beispiel 2.23.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$$

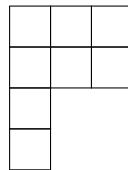
$\Rightarrow \langle \sigma \rangle$ -Bahnen: $\{1, 2, 5\}, \{3, 8, 7\}, \{4\}, \{6\}$ und $\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 8\ 7)$

Definition 2.24 (Young-Diagramm/Partition). Sei $\sigma \in S_n$, seien I_1, \dots, I_t die Bahnen von $\langle \sigma \rangle$ (auch Bahnen der Länge 1), und gelte o.E. $\#I_1 \geq \#I_2 \geq \dots \geq \#I_t$.

(a) Das Young-Diagramm zu σ ist das Diagramm der Form:



im obigen Beispiel 23



(b) Eine Partition von n ist ein Tupel (n_1, \dots, n_t) aus \mathbb{N} mit $n_1 \geq \dots \geq n_t$ und $n = n_1 + \dots + n_t$. (Young-Diagramm: Möglichkeit eine Partition zu veranschaulichen z.B. ist $(\#I_1, \dots, \#I_t)$ eine Partition von n)

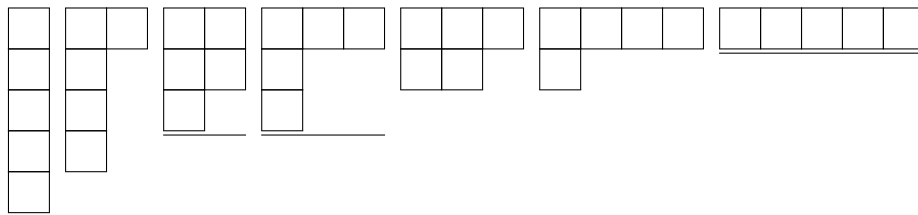
Satz 2.25 (Übung).

(a) Seien i_1, \dots, i_r aus $\{1, \dots, n\}$ paarweise verschiedene Elemente. Dann gilt $\forall \sigma \in S_n$:

$$\sigma \circ (i_1 \ i_2 \cdots i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ \sigma(i_2) \cdots \sigma(i_r))$$

(b) σ_1 und σ_2 aus S_n liegen in dieselben Konjugationsklasse \iff sie haben dasselbe Young-Diagramm.

Beispiel. S_5 hat 7 Youngdiagramme



also auch 7 Konjugationsklassen.

Definition (Signum-Funktion/Alternierende Gruppe). Sei $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ die Signum-Funktion aus der linearen Algebra. sgn ist eindeutig bestimmt durch:

(i) sgn ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) $\text{sgn}(\tau) = -1$, für τ eine Transposition.

(jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich schreiben als Produkt von Transpositionen) $A_n = \text{Kern}(\text{sgn}) =$ die alternierende Gruppe auf n Elementen

$$A_n = \{\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{2m} \mid \tau_i \in S_n, \text{sgn}(\tau_i) = -1, m \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 2.26 (Formeln für sgn). (Übung)

(a) Jeder r -Zykel σ ist ein Produkt von $r - 1$ Transpositionen, und also gilt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{r-1}$

(b) Hat σ die Zykeldarstellung $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_t$ mit Zykellängen r_i (von σ_i), $i \in \{1, \dots, t\}$, so gilt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{r_1 + \dots + r_t - t}$

Bemerkung. Man kann sgn durch (b) bestimmen und kann dann nachprüfen: σ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 2.27. Sei $C_3 = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ ist 3-Zykel}\}$ und sei $C_{2,2} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \text{ mit } \tau_1, \tau_2 \text{ disjunkt.}\}$, dann

(a) Für $n \geq 3$ gilt $A_n = \langle C_3 \rangle =: H_3$

(b) Für $n \geq 5$ gilt $A_n = \langle C_{2,2} \rangle =: H_{2,2}$

(c) Für $n \geq 5$ sind C_3 und $C_{2,2}$ A_n -Konjugationsklassen.

Beweis.

$$A_n = \{\underbrace{\tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{2m}}_{\text{gerade Anzahl}} \mid \tau_i \in S_n \text{ Transpositionen.}\}$$

(a) Zeige: $\tau, \tau' \in H_3$ für τ, τ' beliebige Transpositionen in S_n

(i) $\tau = \tau'$:

$$\tau \cdot \tau' = \text{id} = \sigma^3 \text{ für jeden 3-Zykel } \sigma \in H_3$$

(ii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' nicht disjunkt:

$$\text{also } \tau = (a \ b), \tau' = (b \ c) \text{ mit } \#\{a, b, c\} = 3, a, b, c \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\tau\tau' = (a \ b \ c) = (a \ b)(b \ c)$$

$$\begin{array}{c} a \leftarrow b \leftarrow c \\ c \leftarrow a \leftarrow b \\ b \leftarrow a \leftarrow c \end{array}$$

(iii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' disjunkt also $\tau = (a \ b), \tau' = (c \ d), \#\{a, b, c, d\} = 4, \{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

$$(a \ c \ b)(a \ c \ d) \stackrel{(\text{Übung})}{=} (a \ b)(c \ d)$$

(b) Zeige $\tau \cdot \tau \in H_{2,2}$ für $\tau, \tau' \in S_n$ Transpositionen.

- Fall (iii) trivial.
- Fall (i) trivial

$$(\tau_1 \cdot \tau_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) \in \langle C_{2,2} \rangle = H_{2,2}$$

- Fall (ii) $\tau = (a \ b), \tau' = (b \ c)$ (wie oben). Wegen $n \geq 5$, finde $d \neq e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$. Dann

$$\tau \cdot \tau' = ((a \ b)(d \ e))((b \ c)(d \ e))$$

(c) C_3 ist A_n -Konjugationsklasse.

Zu zeigen $(a \ b \ c)$ ($\{a, b, c\} \in \{1, \dots, n\}$ 3 elementig) ist konjugiert zu $(1 \ 2 \ 3)$.

Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$.

$$\stackrel{\text{Satz 25}}{\implies} \sigma(1 \ 2 \ 3)\sigma^{-1} \begin{pmatrix} \underbrace{a}_{\sigma(1)} & \underbrace{b}_{\sigma(2)} & \underbrace{c}_{\sigma(3)} \end{pmatrix}^{(*)}$$

Aber $\text{sgn}(\sigma)$ ist unklar $+1, -1$?

Beachte: $(*)$ gilt auch für $\sigma(4 \ 5)$ und: entweder gilt $\text{sgn}(\sigma) = 1$ oder $\text{sgn}(\sigma(4 \ 5)) = 1 \implies (1 \ 2 \ 3) \in A_n$ konjugiert zu $(a \ b \ c)$

Für $C_{2,2}$: zu zeigen $(a \ b)(c \ d)$ A_n -konjugiert zu $(1 \ 2)(3 \ 4)$ für $\{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ 4-elementig.

Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c, \sigma(4) = d$

$$\implies \sigma(1 \ 2)(3 \ 4)\sigma^{-1} \stackrel{(**)}{=} (a \ b)(c \ d)$$

und $(*)$ gilt auch für $\sigma(1 \ 2) \dots$ etc. (Schließe wie für C_3 .)

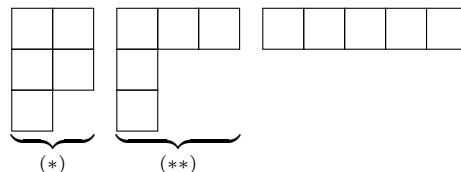
□

Definition 2.28 (Einfache Gruppe). Eine Gruppe G heißt **einfach** $\iff \{e\}$ und G sind die einzigen Normalteiler von G . (d.h. G hat keine nicht-trivialen Normalteiler)

Satz 2.29. Für $n \geq 5$ ist A_n einfach.

Beweis. Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein Normalteiler und $\{e\} \subsetneq N$ und sei $\sigma \in N \setminus \{e\}$.

- $n = 5$:

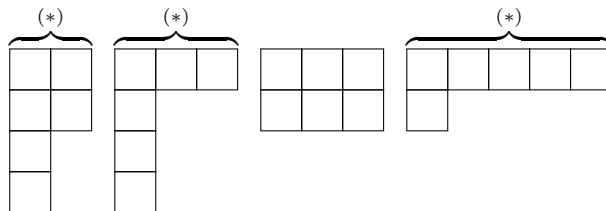


(*) Doppeltranspositionen bilden A_5 -Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls Doppeltranspositionen in N , so folgt $N = A_5$.

(**) 3-Zykel bilden A_5 -Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls σ ein 3-Zykel $\implies N = A_5$.

Gelte $\sigma = 5$ -Zykel $= (a \ b \ c \ d \ e)$. Nun: $N \ni \underbrace{(a \ b \ c)\sigma(a \ b \ c)^{-1}}_{\in N} \underbrace{\sigma}_{\in N} \stackrel{\text{Übung}}{=} (a \ b \ d)$ 3-Zykel

- $n = 6$: möglichen Youngdiagramme: (zu $\sigma \in A_6 \setminus \{e\}$)



(*) wurden schon im A_5 -Fall erklärt.

Sei also $\sigma^2 = (a b c)(d e f) \in N$, mit $\{a, \dots, f\} = \{1, \dots, 6\}$. Sei $\tau = (a b c)$, berechne $\tau(\sigma)(\tau^{-1})$ (Satz 25)

$$\underbrace{\tau \sigma \tau^{-1}}_{\in N} \underbrace{\sigma}_{\in N} = \underbrace{(b d c)(a e f)(a c b)(e d f)}_{f \leftarrow f \leftarrow e \leftarrow e \leftarrow f} \stackrel{\text{Übung}}{=} (a b e c d) \in 5\text{-Zykel}$$

wurde schon bei $n = 5$ geklärt.

- $n \geq 6$: o.E. (Permutation von $1, \dots, n$) $\sigma(1) \neq 1$ Wähle $\{j, k\} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, \sigma(1)\}$. Sei $\tau := (\sigma(1) j k) \implies \sigma^{-1} \tau \sigma \tau^{-1} \in N$ Dann:

(i) $\varphi := \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} \in N$

(ii) $\varphi(\sigma(n)) = \tau \sigma \tau^{-1}(1) \stackrel{1 \notin \text{supp}(\tau)}{=} \tau \sigma(1) = j \neq \sigma(1)$, also $\varphi \neq \text{id}$.

(iii) $\# \text{supp}(\varphi) \leq 6$, denn:

$$\varphi = \underbrace{\tau}_{3\text{-Zykel}} \cdot \underbrace{\sigma \tau^{-1}}_{3\text{-Zykel}} \sigma^{-1}$$

$$\text{o.E: } \text{supp}(\varphi) \subseteq \{1, \dots, 6\} \implies \varphi \in A_6 \setminus \{e\}$$

- Fälle $n \leq 6$: Nurmalteiler, der von φ erzeugt wird enthält 3-Zykel oder Doppeltransposition. Dann fertig wegen Lemma 27. \square

Bemerkung. Es gibt eine Klassifikation aller endlich einfachen Gruppen: Liste:

- $\mathbb{Z}/(p), p$ prim
- $A_n, n \geq 5$
- endliche Gruppen vom Lie typ:
 - (i) $\text{SL}_n(K)/Z(\text{SL}_n(K))$ bis auf einige kleine $\#K$ sind einfach (endlich falls K endlich).
 - (ii) Weitere Untergruppen von SL_n , welche zu "linearen algebraischen Gruppen" korrespondieren.
- 26 weitere.

2.3 Sylow Theoreme

Satz 2.30 (Sylow I, nach Wieland). *Sei G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $\#G$, $k \in \mathbb{N}$ sodass $p^k | \#G$, setze*

$$n_k := \#\{H \leq G \mid \#H = p^k\}$$

Dann gilt:

$$n_k \equiv 1 \pmod{p}$$

Insbesondere ist $n_k \neq 0$, d.h. $\exists H \leq G$ mit $\#H = p^k$.

Übung (Vorbereitung). Sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$, dann:

$$\binom{mp^k}{p^k} = m \cdot u$$

wobei $\mathbb{N} \ni u \equiv 1 \pmod{p}$.

Beweis. (zu 30) Durch Analyse der Wirkung von G auf $X := \{S \subseteq G \mid \#S = p^k\}$ gegeben durch

$$\lambda : G \times X \rightarrow X, (g, S) \mapsto g \cdot S = \{g \cdot s \mid s \in S\}$$

(beachte: $\ell_g : h \mapsto g \cdot h$ ist bijektiv $\implies \#gS = \#S = p^k$ d.h. $g \cdot S \in X$) Setze $m := \#G/p^k$, für $S \in X$ definiere

$$G_S := \text{Stab}_G(S) = \{g \in G \mid gS = S\}$$

1. $\forall S \in X : \#G_S | p^k$:

Beachte: G_S wirkt auf S (da $gS = S \forall g \in G_S$) durch Linkstranslation:

$$G_S \times S \rightarrow S, (g, s) \mapsto g \cdot s$$

Schreibe S als disjunkte Vereinigung seiner G_S -Bahnen.

$$S = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, \ell\}} G_S h_i$$

wobei h_1, \dots, h_ℓ ein Repräsentantensystem der Bahnen ist.

Beachte: $r_{h_i} : g \mapsto gh_i$ ist bijektiv. Also folgt $\#G_S h_i = \#G_S$

$$\implies p^k = \#S = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S h_i = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S = \ell \#G_S$$

d.h. $\#G_S | p^k$.

2. Sei $X_0 := \{S \in X \mid \#G_S = p^k\}$ und $X_1 := X \setminus X_0$

Behauptung: $\#X_0 = m \cdot n_k$

(a) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit $\#H = p^k$, dann:

$$\{S \in X_0 \mid G_S = H\} = \{Hg \mid g \in G\}$$

Denn:

- “ \subseteq ”: Gelte $G_S = H$, d.h. $H \cdot S = S \implies H \cdot s \subseteq S, \forall s \in S$.
Aber: $\#H \cdot s \underset{r_s \text{ ist bij.}}{=} \#H = p^k = \#S \implies H \cdot s = S \implies s$ (ist das gesuchte g)
- “ \supseteq ”: Zu zeigen: $\text{Stab}_G(H \cdot s) = H$. Sei $g \in G$.

$$g \in \text{Stab}_G(Hs) \iff gHs = Hs \underset{r_s \text{ ist bij.}}{\iff} gH = H \underset{H \leq G}{\iff} g \in H$$

(b)

$$\begin{aligned} X_0 &= \bigsqcup_{H \leq G, \#H=p^k} \{S \in X \mid G_S = H\} \stackrel{(a)}{=} \bigsqcup_{H \leq G, \#H=p^k} \{Hg \mid g \in G\} \\ \#X_0 &= \sum_{H \leq G, \#H=p^k} \underbrace{\#\{Hg \mid g \in G\}}_{=H \backslash G} \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{\#G}{\#H} = \frac{\#G}{p^k} = m \\ &= m \left(\sum_{H \leq G, \#H=p^k} 1 \right) = m \cdot n_k \end{aligned}$$

3. $pm \mid \#X_1$

- (a) G wirkt auf X_1 (durch $(g, S) \mapsto gS$)
d.h. gilt $S \in X_1$ und $g \in G$, so auch $gS \in X_1$. Es genügt also zu zeigen: $\#G_{gS} = \#G_S$
Dazu:

$$G_{gS} = \text{Stab}_G(gS) = g \text{Stab}_G(S) g^{-1} = gG_S g^{-1} \underset{\substack{\text{Konj. mit } g \\ \text{ist Gruppenisom.}}}{\cong} G_S.$$

- (b) Betrachte nun G -Bahn durch $S \in X_1$, Behauptung: $\#G \cdot S$ ist Vielfaches von $p \cdot m$

Dazu: Bahngleichung:

$$\#G \cdot S = \#G / \#G_S = mp^k / \#G_S$$

da $\#G_S$ echter Teiler von p^k , also Teiler von $p^{k-1} \implies \#G_S$ ist Vielfaches von $mp^k / p^{k-1} = mp$

$$(m \cdot 2^5 / 2^4 = m \cdot 2, \quad m \cdot 2^5 / 2^2 = m \cdot 2^3,)$$

- (c) Schreibe nun X_1 als disjunkte Vereinigung seiner Bahnen

$$X_1 = \bigsqcup_{j \in I} G \cdot \underbrace{S_j}_{\text{Bahnrepr.}}$$

und $\#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot a_j, a_j \in \mathbb{N}$

$$\implies \#X_1 = \sum_{j \in J} \#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{j \in J} a_j}_{=: N \in \mathbb{N}}$$

$$4. \#X = \#X_0 + \#X_1 = m \cdot n_k + m \cdot p \cdot N = m(n_k + pN)$$

gleichzeitig:

$$\#X = \#\{S \subseteq G \mid \#S = p^k\} \stackrel{\#G=m \cdot p^k}{=} \binom{m \cdot p^k}{p^k} \stackrel{\text{Übung}}{=} m \cdot u$$

für ein $u \in \mathbb{N} : u \equiv 1 \pmod{p}$.

$$\implies m(n_k + pN) = n \cdot u \implies n_k + pN = u \cdot \frac{n}{m} \equiv u \equiv 1 \pmod{p}. \quad \square$$

Korollar 2.31 (Satz von Cauchy). Sei G eine endliche Gruppe mit $p \mid \#G$ für p eine Primzahl, dann $\exists g \in G : \text{ord}(g) = p$

Beweis. Nach Sylow I $\exists H \leq G : \#H = p$, sei $g \in H \setminus \{e\}$. Dann gilt $\text{ord}(g) = p$.
($\text{ord}(g) \neq 1$ und $\text{ord}(g) \mid \#G = p$). \square

Definition 2.32 (p -Sylow Gruppe). Sei G endlich, gelte $\#G = p^f \cdot m$ für $m, f \in \mathbb{N}$ sodass $p \nmid m$. Eine Untergruppe $H \leq G$ mit $\#H = p^f$ heißt p -Sylow (Unter-)Gruppe von G , schreiben

$$\text{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid H \text{ ist } p\text{-Sylow}\}$$

$$\text{syl}_p(G) = \#\text{Syl}_p(G)$$

Definition 2.33 (Normalisator). Der Normalisator einer Untergruppe $H \leq G$ ist

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

(c_g ist Automorphismus $\implies \#gHg^{-1} = \#H, \forall g \in G$)

Interpretation. Sei $X := \{H \mid H \leq G\}$, X ist eine G -Menge durch Konjugation $c : G \times X \rightarrow X, (g, H) \mapsto gHg^{-1}$

Proposition 2.34 (Übung). (a) $N_G(H) \stackrel{\text{für } H \leq G}{=} \text{Stab}_G(H)$

(Insbesondere ist $N_G(H) \leq G$ eine Untergruppe.)

(b) Es gelten: $H \trianglelefteq N_G(H)$ und $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe von G , sodass H ein Normalteiler in dieser ist.

Lemma 2.35. Sei $H \leq G$ eine p -Gruppe, $P \in \text{Syl}_p(G)$ (p eine Primzahl), dann:

(a) Gilt $P \leq H$, so folgt $P = H$.

(b) Ist $H \leq N_G(P)$, so gilt $H \leq P$.

(c) Gilt $H \not\leq P$, so folgt $\text{Stab}_H(P) < H$ (ist echte Untergruppe)

Beweis. (a) Schreibe $\#G = p^f \cdot m$, so dass $p \nmid m$ ($m, f \in \mathbb{N}$), P p -Sylow Untergruppe $\implies \#P = p^f$.

H eine p -Gruppe in $G \stackrel{\text{Lagrange}}{\implies} \#H \mid p^f \cdot m$. also $\#H \mid p^f$

Nun: $P \subseteq H$ und $p^f = \#P \geq \#H \implies P = H$ (und $\#H = p^f$)

(b) Sei $G' = N_G(P)$. Aus Proposition

$$\implies P \trianglelefteq G' \xrightarrow[\text{Voraussetzung}]{\text{Nach}} H \leq G' \xrightarrow[\text{Isomorphiesatz}]{\text{Erster}} P \trianglelefteq P \cdot H$$

und

$$(P \cdot H)/P \cong H/P \cap H$$

Ordnung ist p -Potenz, evtl p^f

$$\xRightarrow{\text{Lagrange}} \#P \cdot H = \underbrace{\#P}_{p\text{-Potenz}} \cdot \underbrace{\#(P \cdot H)/P}_{p\text{-Potenz}}$$

Also ist $P \cdot H$ eine p -Gruppe mit $P \subseteq PH$

$$\xRightarrow{(a)} PH = P \xRightarrow{eH \subseteq P} H \subseteq P$$

(c) Gelte $H \not\subseteq P$. zu zeigen: $\text{Stab}_H(P) < H$

$$\text{Angenommen: } H = \text{Stab}_H(P) = \underbrace{\{h \in H \mid hPh^{-1} = P\}}_{=H \cap \text{Stab}_G(P)} = H \cap N_G(P)$$

Dann folgt

$$H \subseteq N_G(P) \xRightarrow{(b)} H \subseteq G. \quad \square$$

Satz 2.36 (Sylow II). Sei G endlich, p ein Primteiler von $\#G$. Dann:

(a) Je 2 p -Sylow Gruppen von G sind konjugiert.

(b) Jede p -Gruppe H mit $H \leq G$ liegt in einer p -Sylow Gruppe von G .

(c) $\forall P \in \text{Syl}_p(G) : \text{syl}_p(G) = [G : N_G(P)]$ und insbesondere $(P \leq N_G(P))$ gilt $\text{syl}_p(G) \mid [G : P]$

Beweis. (a) $X := \text{Syl}_p(G)$ ist G -Menge via Konjugation ($P \in \text{Syl}_p(G)$ und $g \in G \implies \#gPg^{-1} = \#P \implies gPg^{-1} \in \text{Syl}_p(G)$)

Zu zeigen: G wirkt transitiv auf X .

Annahme: X besteht aus $t \geq 2$ Bahnen, also

$$X = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, t\}} G \circ P_i$$

für geeignete Repräsentantensystem $P_1, \dots, P_t \in \text{Syl}_p(G)$ ($g \circ P = gPg^{-1}$)

Behauptung: $p \mid \#G \circ P_i, \forall i \in \{1, \dots, t\}$.

Dazu: Wähle $j \neq i$ betrachte die P_j -Wirkung auf $G \circ P_i$. Schreibe wieder $G \circ P_i$ als disjunkte Vereinigung von P_j -Bahnen:

$$G \circ P_i = P_j \circ Q_1 \sqcup \dots \sqcup P_j \circ Q_s \quad (*)$$

($s \in \mathbb{N}$ geeignet, $Q_\ell \in \text{Syl}_p(G)$ geeignet)

Bahngleichung:

$$\#P_j \circ Q_\ell = \#P_j / \# \text{Stab}_{P_j}(Q_\ell)$$

beachte: $P_j \notin G \circ P_i$, d.h. $P_j \neq Q_\ell$

$$\xRightarrow{35(c)} \text{Stab}_{P_j}(Q_\ell) < P_j \implies \#P_j \circ Q_\ell \neq 1 \text{ und teilt } \#P_j \implies p | \#P_j \circ Q_\ell$$

$$\implies p \text{ alle Bahnlängen in } (*) \text{ von } G \circ P \text{ als } P_j\text{-Menge} \implies p | \#G \circ P_i, \forall i \implies p | \# \text{Syl}_p(G)$$

$$\implies \text{Syl}_p(G) = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, t\}} G \circ P_i$$

Widerspruch zu (0): $\text{syl}_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$.

- (b) Annahme: $H \leq G$ eine p -Gruppe liegt in keiner p -Sylow. Betrachte Konjugationswirkung von H auf $X = \text{Syl}_p(G)$. Schreibe

$$X = H \circ R_1 \sqcup \dots \sqcup H \circ R_w$$

($w \in \mathbb{N}$) die R_i sind Repräsentanten der Bahnen. Beachte $H \not\subseteq R_i$ ($i \in \{1, \dots, w\}$). Wie in (a) gilt $\text{Stab}_H(R_i) < H$ also, dass $p | \#H \circ R_i, \forall i \implies p | \#X$ Widerspruch zu (0).

- (c) Bahngleichung für $P \in \text{Syl}_p(G)$ (Verwenden (a), d.h. $G \circ P = \text{Syl}_p(G)$)

$$\text{syl}_p(G) = \# \text{Syl}_p(G) = \#G / \# \text{Stab}_G(P) : \#G / \#N_G(P) = [G : N_G(P)]$$

($\text{syl}_p(G)$ teilt $[G : P]$ schon oben eingesehen, da $P \leq N_G(P)$)

□

Korollar 2.37. Sei G endlich und p ein Primteiler von $\#G$, dann $\text{syl}_p(G) = 1 \iff$ jede p -Sylow ist ein Nullteiler in G .

Beweis. Für $P \in \text{Syl}_p(G)$ gilt:

$$P \trianglelefteq G \iff N_G(P) = G \xLeftrightarrow{36(c)} \text{syl}_p(G) = [G : N_G(P)] = 1. \quad \square$$

Korollar 2.38. Sei G endlich, seien p_1, \dots, p_t die paarweise verschiedenen Primteiler von $\#G$. Sei $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$. Dann gilt: sind P_1, \dots, P_t Normalteiler von G , so folgt: die Abbildung $P_1 \times \dots \times P_t \rightarrow G, (g_1, \dots, g_t) \mapsto g_1 \cdot \dots \cdot g_t$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. $P_i \trianglelefteq G$ für $i \in \{1, \dots, t\}$

und $\text{ggT}(\#P_i, \#P_j) \stackrel{i \neq j}{=} 1$ (p_i, p_j versch. Primzahlen) und $\prod_{i=1}^t \#P_i = \#G$

$\xRightarrow{\text{Kor. 1.55}}$ die angegebene Abbildung ist ein Gruppenisomorphismus. □

Beispiel. Ist G abelsch, so sind alle Untergruppen Normalteiler.

Korollar 2.39. G endlich abelsch und p_i und P_i wie in Korollar 38. So gilt: $\times_{i=1}^t P_i \xrightarrow{\text{wie in Kor. 38}} G$ ist Gruppenisomorphismus. (P_i sind abelsche p_i -Gruppen).

Satz 2.40. Sei G eine endliche abelsche p -Gruppe, dann $\exists t \in \mathbb{N}, \exists e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_t \in \mathbb{N}$, sodass

$$G \cong \times_{i=1}^t \mathbb{Z}/p^{e_i}$$

Beispiel. G abelsch mit $\text{ord}(G) = 105 \implies G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Wiederholung. G heißt einfach \iff einzige Nullteiler von G sind $\{e\}$ und G .

Lemma 2.41 (Übung). sei G endlich, $\#G = p^f \cdot m$ mit $f, m \in \mathbb{N}, p$ Primzahl und $p \nmid m$. Dann: $p^f \nmid (m-1)! \implies G$ ist nicht einfach.

Beweis. Idee: Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$, betrachte G -Wirkung auf G/P durch Linkstranslation, d.h.

$$\rho : G \rightarrow \text{Bij}(G/P), g \mapsto \ell g$$

Trick: $\text{Kern}(\rho)$ ist der gesuchte Normalteiler. \square

Satz 2.42. Ist G einfache Gruppe mit $\#G < 60$, so gilt $G \cong \mathbb{Z}/p$ für p eine Primzahl.

Beweis. Sei G einfach mit $\#G < 60$. o.E. $\#G$ keine Primzahl, sonst fertig. o.E. G ist keine p -Gruppe für Primzahl p . (sonst: $Z(G) \supsetneq \{e\} \xrightarrow[Z(G) \trianglelefteq G]{G \text{ einfach}} G = Z(G)$,

d.h. G abelsch. $\xRightarrow{G \text{ einfach}} G \cong \mathbb{Z}/p$)

Fall $\# = p^f m$ mit $p^f \nmid (m-1)! \implies G$ nicht einfach (Lemma 41)

(Übung) Es bleiben $\#G \in \{\underbrace{30}_{2 \cdot 3 \cdot 5}, \underbrace{40}_{2^3 \cdot 5}, \underbrace{56}_{2^3 \cdot 7}\}$

Fall 1: $\#G = 2^3 \cdot 5$, dann: $\text{Syl}_5(G) \cong 1(5)$ (Sylow I)

$\text{Syl}_5(G)$ teilt $\#G/5 = 8$ (Sylow II)

Teiler von 8 : 1, 2, 4, 8 Kongruenz erzwingt $\text{Syl}_5(G) = 1 \xRightarrow{37}$ die einzige

5-Sylow Untergruppe von G ist ein Normalteiler (Widerspruch zu G einfach)

Fall 2: $\#G = 2^3 \cdot 7$, dann (Schritte wie im Fall 1 für $p = 7$)

$$\text{Syl}_7(G) \in \{1, 8\}$$

(teilt 8, $\cong 1 \pmod{7}$)

Fall: Es gibt 8 7-Sylow Untergruppen, isomorph zu $\mathbb{Z}/7$

Beachte: 2 7-Sylow's schneiden sich nur in $\{e\}$ (sonst sind sie gleich, Elemente $\neq e$ sind Erzeuger)

\implies es gibt $8 \cdot 6$ Elemente in G der Ordnung 7

\implies Es gibt $56 - 48 = 8$ Elemente in G der Ordnung $\neq 7$

Aber: Es gibt (mindestens) eine 2-Sylow Untergruppe von G und die hat Ordnung $8 = 2^3$.

Es folgt: Die 8 obigen Elemente bilden die einzig mögliche 2-Sylow Untergruppe von G .

$\implies \text{Syl}_2(G) = 1 \implies$ die 2-Sylow ist ein nicht triviale Normalteiler von G .

Fall 3 (Übung) \square

Bemerkung. Die Zahl 60 ist optimal, denn A_5 ist einfach, nicht zyklisch (von Primzahlordnung) und hat 60 Elemente.

2.4 Auflösbare Gruppen

Definition 2.43. (a) Eine aufsteigende Folge von Untergruppen $G_0 < G_1 < G_2 < \dots < G_t = G$ von G heißt Normalreihe, wenn $\forall i \in \{1, \dots, t\} : G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ ist Normalteiler.

Schreibe auch $(G_i)_{i=0}^t$ oder $\&$ für die Folge.

- (b) die Faktorgruppe $(G_i/G_{i-1})_{i=1}^t$ heißen Faktoren der Normalreihe.
- (c) Eine Normalreihe \mathcal{G} heißt Zerlegungsreihe \iff alle Faktoren sind einfach.
- (d) X heißt abelsch \iff alle Faktoren sind abelsch.
- (e) G heißt auflösbar $\iff G$ besitzt eine abelsche Normalreihe.
- (f) Ist $\mathcal{G}' : G'_0 < G'_1 < \dots < G'_{t'} = G$ eine weitere Normalreihe, so heißt \mathcal{G}' **echt** feiner als $\mathcal{G} \iff$

$$\{G_i \mid i \in \{0, \dots, t\}\} \subsetneq \{G'_j \mid j \in \{0, \dots, t'\}\}$$

Beispiel.

Proposition 2.44. Sei $G^n\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_t = G$ eine Normalreihe, dann:

- (a) G ist eine Zerlegungsreihe iff G besitzt keine echte Verfeinerung.
- (b) Es gilt $2^t \leq \#G$
- (c) Ist G endlich, so besitzt G eine Verfeinerung, die eine Zerlegungsreihe ist.
- (d) Ist G abelsch, so ist auch Verfeinerung abelsch.

Beweis. (a) G ist keine Zerlegungsreihe $\iff \exists i \in \{1, \dots, t\} : G_i/G_{i-1}$ nicht einfach $\iff \exists i \in \{1, \dots, t\} : \overline{H} \trianglelefteq G_i/G_{i-1}$ ein Normalteiler mit $\overline{H} \neq \{e\}, \overline{H} \subsetneq G_i/G_{i-1}$ $\xLeftrightarrow{2. \text{ Isometriesatz}} \{e\}i \in \{1, \dots, t\} : \exists H \triangleleft G_i$ ein Normalteiler mit $G_{i-1} \triangleleft H$

$\iff \exists i \in \{1, \dots, t\} : G$ kann zwischen G_{i-1} und G_i echt verfeinert werden

$\iff G$ besitzt eine echte Verfeinerung.

- (b) Lagrange: (Für $H \leq G : \#G = \#H \cdot \#G/H$)

$$G = G_t = \#G_{t-1} \cdot \#G_t/G_{t-1} = \#G_{t-2} \cdot \#G_{t-1}/G_{t-2} \cdot \#G_t/G_{t-1}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^t \#G_i/G_{i-1} \geq 2^t$$

$$\implies t \leq \log_2 \#G$$

- (c) Sei G' eine Verfeinerung von G , maximaler Länge t' . Das gibt es, da $t' \leq \log_2 \#G$ dieses G' kann nicht echt verfeinert werden (t' maximal!)
 $\implies G'$ ist Zerlegungsreihe, die G verfeinert.
- (d) Sei G abelsch und G' eine Verfeinerung von G , z.z. G' ist abelsch. ($G' : G'_0 = \{e\} \triangleleft G'_1 \triangleleft \dots \triangleleft G'_{t'} = G$) Sei $j \in \{1, \dots, t'\}$, z.z. G'_j / G'_{j-1} abelsch.
Finde zu $j, j-1$ ein $i \in \{1, \dots, t\}$, sodass

$$\begin{array}{ccccccc} G & \cdots & G_{i-1} & & \triangleleft & & G_i \cdots \\ & & = & & & & \\ & & G'_\ell & \leq & G'_{j-1} & \triangleleft & G'_{j'} \end{array}$$

□

Satz 2.45 (Jordan-Hölder). *Ist G endlich, so ist die Folge der Faktoren einer Zerlegungsreihe $G(srqa)$ von G bis auf Reihenfolge der Faktoren unabhängig von der Wahl der Zerlegungsreihe von G .*

Beweis.

Jantzen Schwermer Satz II. 2.4

Jacobson §4.6

□

Korollar 2.46. *G endlich, dann G auflösbar \iff die Faktoren jeder Zerlegungsreihe sind (abelsch und) von Primzahlordnung.*

Beweis.

“ \implies ”: Sei \mathcal{G} eine abelsche Normalreihe $\xRightarrow{44} \exists$ Zerlegungsreihe G' die G verfeinert, diese ist dann (stets) wieder abelsch.

Ihre Faktoren sind einfach und abelsch (und endliche Gruppen), also zyklisch von Primzahlordnung.

Wende nun Jordan-Hölder an.

“ \impliedby ”: Hat man G wie angegeben (zu G), dann ist \mathcal{G} abelsch, also G auflösbar.

□