1.1 Gruppen und Monoide

Definitionen

1.1: Monoid 1.2: Gruppe 1.4: Abelsche Gruppe/Abelsches Monoid 1.8: Ring 1.9: Ordnung einer Gruppe/Ordnung eines Monoids 1.10: Untergruppe/Untermonoid 1. Zentralisator/Zentrum 1.15: Erzeuger 1.17: Ordnung eines Gruppenelements/Zyklische Gruppe 1.25: Gruppenexponent

Sätze

1.3: Assoziativität gilt für mehrere Elemente
1.5: Neutrales Element und Inverse sind eindeutig in einem Monoid
1.6: Linkseins und Linksinverse $\Rightarrow$ Gruppe
1. $H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \in H : ab^{-1} \in H$

1.7: $xg = h$ hat genau eine Lösung in G und r_g, ℓ_g sind bijektiv.
1.8: $(ab)^n = a^n b^n \Leftrightarrow ab = ba$
1.12: $H_i \leq G \Rightarrow \bigcap H_i \leq G$
1.13: $\forall S \subseteq G \exists$ kleinste Gruppe $\langle S \rangle$, die S enthält
1.14: $S \subseteq G$, dann $\langle S \rangle = \{\text{Worte in } S \cup S^{-1} \cup \{e\}\}$
1.16: $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
1.18: zyklisch $\Rightarrow$ abelsch
1.19: $g \in G, n = \mathrm{ord}(g), n' = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid g^k \neq g^j \forall k \neq j < n\}$ (a) $n' = n$ (b) $n < \infty \Rightarrow \forall m, m' \in \mathbb{Z} : g^m = g^{m'} \Leftrightarrow m \equiv m' \mod n$ und $g^m = e \Leftrightarrow n \mid m$ (c) $\forall s \in \mathbb{Z} : \mathrm{ord}(g^s) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n,s)}$
1.20: (a) $\mathrm{ord}(g) = \infty \Leftrightarrow g^n$ paarw. versch $\forall n \in \mathbb{Z}$ (b) G zyklisch $\Rightarrow \forall H \leq G$ zyklisch
1.21: Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
1.22: Satz von Lagrange
1.23: $F \leq H \leq G$, dann $[G : F] = [G : H] \cdot [H : F]$
1.24: G endlich, dann (a) $\forall g \in G : \mathrm{ord}(g) \mid \mathrm{ord}(G)$ (b) $\mathrm{ord}(G) = p$ Primzahl, dann G zyklisch
1.26: G endlich, dann (a) $\exp(G) \mid \mathrm{ord}(G)$ (b) $\exp(G) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord} g \mid g \in G)$
2. $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(hg) \forall g \in G$

1.27: G endlich, dann (a) $gh = hg$ und $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord} g, \mathrm{ord} h) = 1$ dann $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord} g \cdot \mathrm{ord} h$ (b) $p^f \mid \exp G$ für p prim, $f \in \mathbb{N}$, dann $\exists g \in G : \mathrm{ord} g = p^f$ (c) G abelsch, dann $\exists g \in G : \exp(G) = \mathrm{ord}(g)$
1.28: G endlich abelsch, dann G zyklisch $\Leftrightarrow \mathrm{ord}(G) = \exp(G)$

1.2 Gruppenhomomorphismen

Definitionen

1.29: Monoidhomomorphismus/Gruppenhomomorphismus 1.38: Konjugation/Innerer Automorphismus

Sätze

1.33: $H \leq G, \varphi : G \to G' \geq H'$, dann $\varphi(H) \leq G'$, $\varphi^{-1}(H') \leq G$
1.39: G erzeugt von S, dann $\varphi(s) = \psi(s) \forall s \Leftrightarrow \varphi = \psi$

1.3 Normalteiler

Definitionen

- Nebenklasse

1.40: Normalteiler
- Normale Hülle (Körper)

1.44: Faktorgruppe

Sätze

1.41: $gN = Ng \Leftrightarrow gNg^{-1} = N \Leftrightarrow gNg^{-1} \subseteq N \Leftrightarrow N \trianglelefteq G$
1.42: $\mathrm{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$
1.43: $N' \trianglelefteq G', \varphi : G \to G'$, dann:
  (a) $\varphi^{-1}(N') \trianglelefteq G$
  (b) $[G : H] = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$
  (c) G abelsch, $H \leq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$
  (d) $[G, G] \trianglelefteq G$

1.44: Faktorgruppe
1. G abelsch $\Rightarrow G/N$ auch

1.4 Homomorphiesatz für Gruppen

Sätze

1.45: Homomorphiesatz für Gruppen
1.46: G zyklisch, dann $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}$
1.47: G/N abelsch $\Leftrightarrow [G, G] \leq N$

1.5 Einschub: Faktorringe

Definitionen

1.48: Ideal
1.49: Faktorring

1.6 Die Isomorphiesätze

Sätze

1.50: Erster Isomorphiesatz
1.51: Zweiter Isomorphiesatz

1.7 (Semi-)direkte Produkte

Definitionen

1.53: Direktes Produkt von Gruppen 1.57: Semidirektes Produkt

Sätze

1.54: $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ disjunkt, dann:
  (a) $n_1 n_2 = n_2 n_1, \forall n_1, n_2$
  (b) $N_1 N_2 \trianglelefteq G$
  (c) $N_1 \times N_2 \cong N_1 N_2$, insbesondere $\# N_1 N_2 = \# N_1 \# N_2$

1.55: G endlich, $\{N_i\}_{i \leq k} \trianglelefteq G$ und gelte $\# N_i$ paarw. teilerfremd und $\prod \# N_i = \# G$, dann $\prod N_i \cong G$ via $(n_i) \mapsto \prod n_i$
1. $n = \prod p_i^{f_i}$ für paarw. versch. Primzahlen, dann $\prod \mathbb{Z}/(p_i^{f_i}) \cong \mathbb{Z}/(n)$

1.56: Semidirektes Produkt
1.58: $N \trianglelefteq G, H \leq G$, dann:
  (a) $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto c_h$ ist Homomorphismus
  (b) Gelten $NH = G$ disjunkt, so ist $\psi : N \rtimes_\varphi H \to G, (n, h) \mapsto n \cdot_G h$