Algebra 1 Vorlesungsmitschrieb
nach Vorlesung von Prof. Gebhard Böckle

Yousef Khell

November 28, 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gruppentheorie

1.1 Gruppen und Monoide

Notation.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\#X$ = die Kardinalität/Mächtigkeit einer Menge X

Definition 1.1 (**Monoid**). Ein Tripel $(M, e, \circ)$ mit

- M einer Menge.
- e einem Element aus M,
- $\circ : M \times M \to M$ einer zweistelligen Verknüpfung

heißt **Monoid** falls gilt

(M1) Assoziativität:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(M2) Neutrales Element:

$$\forall a \in M : a \circ e = a = e \circ a$$

Wir nennen ein $a \in M$ **invertierbar**, falls

$$\exists b, b' \in M : b \circ a = e = a \circ b'$$

(b bzw. b' heißen dann Links- bzw. Rechtsinverse)

Bemerkung. $b = b'$, denn

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b$$

Definition 1.2 (**Gruppe**)**.** Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem alle Elemente invertierbar sind.

Bemerkung 1.3 (zur Assoziativität)**.** Seien $a_1, ..., a_n \in M$, und setzt man in

$$a_1 \circ \cdots \circ a_n$$

Klammern, sodass $\circ$ jeweils 2 Elemente verknüpft, so ist wegen (M1) das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Klammerung, and also lässt man i.a. die Klammern weg. (Die Reihenfolge ist aber schon wichtig!)

Definition 1.4 (**Abelsche Gruppe/Monoid**)**.** Ein Monoid bzw. eine Gruppe M heißt **abelsch** (oder kommutativ) $:\iff \forall a, b \in M$:

$$a \circ b = b \circ a$$

Proposition 1.5 (Eindeutigkeit des neutralen Elements bzw. der neutralen Elementen)**.** *Sei M ein Monoid, dann*

(a) Erfüllt $e' \in M$ die Bedingung $e' \circ a = a \forall a \in M$, so gilt $e' = e$.

(b) Ist $a \in M$ invertierbar, so ist sein Inverses eindeutig.

Beweis.

(a) Nach Konstruktion $e = e' \circ e = e'$.

(b) Gelte $a \circ b' = e$ und b sei ein Inverses von a, dann:

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b.$$

□

Satz 1.6 (ohne Beweis)**.** *Sei $(G, e, \circ)$ ein Tripel mit G eine Menge, $e \in G$, $\circ : G \times G \to G$ eine assoziative Verknüpfung sodass:*

- *e ist Linkseins, d.h.*
$$\forall g \in G : e \circ g = g$$

- *jedes g hat ein Linksinverses*

$$\forall g \in G \exists h \in G : h \circ g = e$$

So ist $(G, e, \circ)$ eine Gruppe.

Hinweis (Nutzen von Satz 6)**.** Es müssen weniger Axiome geprüft werden.

Notation.

(i) $ab := a \circ b$

(ii) $a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n a, n \in N$

(iii) $a^n = (a^{-n})^{-1}, n < 0$

(iv) Ist $\circ$ kommutativ, so schreibt man oft $+$

Übung (Rechenregeln)**.**

(i) $a^n a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$

(ii) Ist a invertierbar, so gelten die Regeln $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Proposition 1.7 (Übung). *Sei G eine Gruppe, seien $g, h \in G$, dann:*

(a) Die Glecihung $xg = h$ besitzt genau eine Lösung (in G), nämlich $x = hg^{-1}$.

(b) Es gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

(c) Die Rechtstranslation (um g) $r_g : G \to G, x \mapsto xg$ und die Linkstranslationen (um g) $\ell_g : G \to G, x \mapsto gx$ sind bijektiv.

Beispiel. 1) $(\mathbb{N}_0, 0, +), (\mathbb{N}_0, 1, \cdot)$ sind kommutative Monoide.

2) Jede Gruppe ist ein Monoid.

3) Ist X eine Menge, $\mathrm{Abb}(X, X)$ bzw. $\mathrm{Bij}(X, X)$ die Menge aller Abbildungen bzw. Bijektionen von X in sich, so gilt:

   (a) $(\mathrm{Abb}(X, X), \mathrm{id}_X, \circ)$ ist ein Monoid.

   (b) $(\mathrm{Bij}(X, X), \mathrm{id}_X, \circ)$ ist eine Gruppe.

   Schreibe $S_n := \mathrm{Bij}(\{1, ..., n\}, \{1, ..., n\})$ für die Gruppe der Permutationen von $\{1, ..., n\}$.

4) Ist $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum, so sind

   (i) $O(V) := \{\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) | \varphi \text{ orthogonal}\}$ und $SO(V) := \{\varphi \in O(V) | \det(\varphi) = 1\}$ Gruppen.

   (ii) Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $P_n := \{\cos \frac{2\pi j}{n}, \sin \frac{2\pi j}{n} \mid j = 0, ..., n-1\}$, dann ist

      (a) $C_n := \{\varphi \in SO(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die Gruppe der Drehungen um 0 von Winkel $\frac{2\pi j}{n}, (j = 0, ..., n = 1)$ und

      (b) $D_n := \{\varphi \in O(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die [[Diedergruppe]] der Ordnung $2n$

      (Übung) $\#C_n = n, \#D_n = 2n$.

   Gruppen beschreiben oft Symmetrien eines geometrischen Objekts.

5) Ist M ein Monoid, so ist $M^\times := \{a \in M \mid a \text{ invertierbar}\}$ eine Gruppe, also $(M^\times, e, \circ)$.

Definition 1.8 (**Ring**). Ein Ring ist ein Tupel $(R, 0, 1, +, \cdot)$, sodass

(R1) $(R, 0, +)$ eine abelsche Gruppe,

(R2) $(R, 1, \cdot)$ ein Monoid,

(R3) Es gelten die Distributivgesetze

Definition 1.9 (**Ordnung einer Gruppe**). Ist M ein Monoid oder eine Gruppe, so heißt

$$\mathrm{ord}(M) := \#M$$

die Ordnung von M.

Definition 1.10 (Untermonoid/Untergruppe). Seien M ein Monoid, G eine Gruppe, dann

(a) $N \subseteq M$ heißt Untermonoid (UM) wenn:

- $e \in N$
- $\forall n, n' \in N : n \circ n' \in N$

(b) $H \subseteq G$ heißt Untergruppe (UG) wenn:

- $e \in H$
- $\forall h, h' \in H : h \circ h' \in H$

So schreiben wir $N \leq M, H \leq G$.

Übung 1.11. (i) $N \leq M \implies (N, e, \cdot\,|_{N \times N} \colon N \times N \to N)$ ist Monoid

(ii) $H \leq G \implies (H, e, \cdot\,|_{H \times H} \colon H \times H \to H)$ ist Monoid

Beispiel. Sei K ein Körper, dann ist

(i) $SL_n(K) \leq GL_n(K)$

(ii) $SO(V) \leq O(V) \leq \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$

Proposition 1.12 (Übung). *Sind $(H_i)_{i \in I}$ Untergruppen von G, so ist*

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G.$$

Beispiel. Sei G eine Gruppe, $g \in G, S \leq G$, dann:

(i) $C_G(g)$ **Zentralisator** von $g \in G$, also

$$C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\} \leq G$$

(ii) $C_G(S)$ **Zentralisator** von S, also

$$C_G(S) = \{h \in G \mid hs = sh \forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} C_G(s) \leq G$$

(iii) $Z(G)$ **Zentrum** von G, also

$$Z(G) = C_G(G) \underset{\text{komm.}}{\leq} G$$

(iv) (Übung) $Z(GL_n(K)) = K^\times \mathbf{1}_n$

Lemma 1.13. *Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge, dann $\exists$ kleinste Untergruppe $\langle S \rangle \leq G$, die S umfasst.*

Beweis. Definiere

$$\langle S \rangle := \bigcap \{H \leq G \mid S \subseteq H\}.$$

□

Übung 1.14. Sei M ein Monoid, $S \subseteq M$ eine Teilmenge, ein Wort aus S ist ein Ausdruck

$$s_1 \cdot \dots \cdot s_n, s_i \in S, n \in N$$

Dann gilt: $\{\text{Worte in } S \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq M$ ist das kleinste Untermodnoid von M, das S umfasst. Und ist G eine Gruppe, so gilt $\{\text{Worte in } S \cup S^{-1} \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq G$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S umfasst.

Definition 1.15 (Erzeugendensystem). Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge. S heißt Erzeugendensystem von $G \iff \langle S \rangle = G$.

Beispiel (Übung)**.** Seien $E_{ij} \in M_{n\times n}(K)$ die Elementarmatrizen mit 1 an der Stelle (i,j) und 0 sonst. Dann ist

$$\{\mathbf{1}_n + aE_{ij} \mid a \in K, i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j\}$$

ein Erzeugendensystem von $SL_n(K)$ (Gauß-Algorithmus)

Lemma 1.16. *Sei G eine Gruppe, $g \in G$, dann gilt*

$$\langle g \rangle = \langle \{g\} \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. (Nach Übung 14)

$$\begin{aligned}\langle \{g\} \rangle &= \{\text{Worte in } \{g, g^{-1}, e\}\} \\ &= \{g^{i_1}, ..., g^{i_n} \mid n \in \mathbb{N} i_1, ..., i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^{i_1 + \dots + i_n} \mid n \in \mathbb{N} i_1, ..., i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

□

Bemerkung. $\langle g \rangle$ ist abelsch.

Definition 1.17 (Ordnung eines Gruppenelements, Zyklische Gruppe). Sei G eine Gruppe, $g \in G$

(a) Die Ordnung von g ist

$$\operatorname{ord}(g) = \#\langle g \rangle = \#\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(b) g hat endliche Ordnung $\iff \operatorname{ord}(g) \in \mathbb{N}$

(c) G ist zyklisch $\iff \exists g \in G : G = \langle g \rangle$

Proposition 1.18. *Zyklische Gruppen sind abelsch.*

Beweis. G zyklisch $\implies \exists g \in G : G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dann:

$$g^n g^m = g^{n+m} \overset{+\text{komm. in } \mathbb{Z}}{=} g^{m+n} = g^m g^n.$$

□

Proposition 1.19. *Sei G eine Gruppe, $g \in G, n := \mathrm{ord}(g)$ und*

$$n' = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid e, g, g^2 ..., g^{m-1} \text{ paarw. versch.}\}$$

Dann gelten:

(a) $n' = \infty = \sup \mathbb{N}$ *oder* $g^{n'} = e$ *und* $\langle g \rangle = \{e, g, g^2 ..., g^{n'-1}\}$. *Insbesondere ist* $n' = n$

(b) Falls $n = \mathrm{ord}(g) < \infty$, *so gilt für* $m, m' \in \mathbb{Z}$:

$$g^m = g^{m'} \iff m \equiv m' \mod n$$

Insbesondere ist $g^m = e \iff n \mid m$

(c) Für $s \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\mathrm{ord}(g^s) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n, s)}$$

Beweis.

(a) Gelte $n' < \infty$:

Definition von $n' \implies g^{n'} \in \{e, g, ..., g^{n'-1}\}$ Annahme: $g^{n'} = g^i$ für ein $i \in \{1, ..., n'-1\}$ Multipliziere mit $g^{-i} \implies g^{n'-i} = g^0 = e$ und $0 < n' - i < n'$, d.h. $g^{n'-i} \in \{e, ..., g^{n'-1}\} \implies \{g^0, ..., g^{n'-1}\}$ nicht paarweise verschieden (Widerspruch) Sei schließlich $m \in \mathbb{Z}$ beliebig, Division mit Rest:

$$m = qn' + r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1$$

$$\implies g^m = g^{qn'+r} = (g^{n'})^q g^r = g^r \in \{g^0, ..., g^{n-1}\}$$

Also: $\langle g \rangle = \{e, ..., g^{n'-1}\}$ sind paarweise verschieden. $\implies \mathrm{ord}(g) = \#\langle g \rangle = n'$

(b) Seien $m, m' \in \mathbb{Z}$, schreibe $m' - m = qn' + r, (q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1)$, dann:

$$g^{m'} = g^m \iff g^{m'-m} = g^0 = e \iff g^{qn'+r} = e$$

$$\iff g = e \underset{e,...,g^{n-1}\text{paarw. versch.}}{\overset{1.\ n=n'}{\iff}} r = 0$$

$$\iff m' - m \text{ ist Vielfaches von } n = n' \iff m \equiv m \mod n$$

(c) Bestime die $m \in \mathbb{Z}$ mit $(g^s)^m = e$

$$(g^s)^m = e \iff g^{sm} \underset{2.}{=} e \iff n \mid sm$$

$$\underset{\mathrm{ggT}(n,s)|n,s}{\iff} \frac{n}{\mathrm{ggT}(n, s)} \mid \frac{s}{\mathrm{ggT}(n, s)} m \iff \frac{n}{\mathrm{ggT}(n, s)} \mid m$$

Da $\frac{n}{\mathrm{ggT}(n,s)}, \frac{s}{\mathrm{ggT}(n,s)}$ teilerfremd sind

$$\overset{2.}{\iff} \mathrm{ord}(g^s) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n, s)} \square.$$

□

Beispiel.

$$\operatorname{ord}(g) = 6 \implies \operatorname{ord}(g^2) = 3 = 6/\operatorname{ggT}(6,2) = 6/2$$

Korollar 1.20. *Sei G eine Gruppe, dann*

(a) Für $g \in G$ gilt:

$$\operatorname{ord}(g) = \infty \iff g^n, n \in \mathbb{Z} \text{ sind paarw. verschieden}$$

(b) Ist G zyklisch und $G \leq G$ eine Untergruppe, so ist H zyklisch.

Beweis.

(a) $\Longleftarrow$ vgl. 19(a) $\implies$ wissen nach 19(a), dass $e, g, ..., g^n, ...$ paarw. versch. sind. Multipliziere mit $g^{-m}, (m \in \mathbb{N}) \implies g^{-m}, g^{-m+1}, ..., g^0, g^1, ...$ sind paarw. versch.

(b) Sei $g \in G$ ein Erzeuger von $G, H \leq G$ eine UG von G und ohne Einschränkung $H \supsetneq \{e\}$

$$\implies \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : g^m \in H \setminus \{e\}$$

H ist Gruppe $\implies g^m, (g^m)^{-1} = g^{-m} \in H$

Sei $t \in \min\{m \in \mathbb{N} \mid g^m \in H\}$. Behauptung: $\langle g^t \rangle = H$.

- "$\subseteq$": Klar, da $g^t \in H$ also auch $\langle g^t \rangle \subseteq H$ (H ist UG die t enthält)
- "$\supseteq$": Sei $g^m \in H$, Division mit Rest: $m = tq+r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq t-1$

$$\implies H \ni g^m = g^{tq+r} = \underbrace{(g^t)^q}_{\in H} g^r \implies g^r = (g^m)((g^t)^q)^{-1} \in H$$

Nach Def von t muss gelten: $r = 0$, da $r = 1, ..., t-1$ verboten. Also ist $g^m = (g^t)^q \in \langle g^t \rangle$.

□

Korollar 1.21 (Übung)**.** *Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind die Mengen $\mathbb{Z}n = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}, (n \in \mathbb{N}_0)$*

Wiederholung (Vorbereitung)**.**

- Äquivalenzrelationen
- Äquivalenzklassen
- Repräsentantensysteme

Bemerkung.

- $X = \bigsqcup_{r \in \mathcal{R}} [r]_\sim$
- Falls $\#X < \infty : \# = \sum_{r \in \mathcal{R}} \#[r]_\sim$

Satz 1.22 (Satz von Lagrange)**.** *Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gilt $\#H \mid \#G$.*

Beweis.

1) Definiere $\sim$ auf G durch $g \sim g' :\iff \exists h \in H : g' = gh$ $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:

- reflexiv: $g \sim g$ denn $g = ge, e \in H$
- symmetrisch: gelte $g' = gh$ für ein $h \in H$

$$\underset{\_\cdot h^{-1}}{\implies} g'h^{-1} = g \underset{H \text{ Gruppe}}{\implies} h^{-1} \in H \implies g' \sim g$$

- transitiv: gelte $g \sim g', g' \sim g''$, d.h. $\exists h \in H : g' = gh, \exists h' \in H" g'' = g'h$

$$\implies g'' = g'h' = (gh)h' = g(hh') \implies g \sim g''$$

2) Äquivalenzklassen: Für $g \in G$ ist

$$[g]_\sim = \{g' \in G \mid \exists h \in H : g' = gh\} = \{gh \mid h \in H\} =: gH$$

3) Beachte G endlich $\implies H \subseteq G$ endlich (und ebenso jede Teilmenge von G) Behauptung: $\#gH = \#H \forall g \in G$ Grund: Die Abbildungen

$$\ell_g : H \to gH, h \mapsto gh, \ell_{g^{-1}} : gH \to H, x \mapsto g^{-1}x$$

sind zueinander invers (Übung) und also biijektiv. $\implies \#H = \#gH$.

4) Sei $\mathcal{R} \subseteq G$ ein Repräsentantensystem zu $\sim$

$\implies \#G = \sum_{g\in\mathcal{R}} \#[g]_\sim = \sum_{g\in\mathcal{R}} \#gH = \sum_{g\in\mathcal{R}} \#H \overset{3)}{=} \#\mathcal{R}\#H$
$\implies \#H$ teilt $\#G$. □

Notation. Seien G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und $\sim$ wie im Beweis vom Satz 22.

- Schreibe G/H für die Menge aller Äquivalenzklassen also für $\{gH \mid g \in G\}$
- Schreibe $[G : H] := \# G/H = \#\mathcal{R}$ (Index von H in G)

Lagrange sagt: $\#G = \# G/H \cdot \#H = [G : H] \cdot \#H$

Übung 1.23. Seien $H' \leq H \leq G$ Untergruppen, dann ist $H' \leq G$ und

$$[G : H'] = [G : H] \cdot [H : H']$$

Korollar 1.24. *Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:*

(a) $\forall g \in G : \mathrm{ord}(g) \mid \mathrm{ord}(G) = \#G$

(b) Ist $\mathrm{ord}(G)$ *eine Primzahl, so ist G zyklisch*

Beweis.
(a) $\langle g \rangle \leq G$ ist eine Untergruppe $\underset{\text{Lagrange}}{\implies} \mathrm{ord}(g) = \#\langle g \rangle \mid \#G = \mathrm{ord}(G)$

(b) Sei $p = \mathrm{ord}(G) \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, sei $g \in G \setminus \{e\}$ $(\#G \geq 2)$ Nach 1. gilt $\underbrace{\mathrm{ord}(g)}_{\neq 1 \text{ da } g \neq e} \mid \mathrm{ord}(G) = p$

Folglich: $p = \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(G)$, d.h. $\langle g \rangle \leq G$ ist Inklusion gleichmächtiger endlicher Mengen, also $\langle g \rangle = G$. □

Definition 1.25 (**Gruppenexponent**). Sei G eine Gruppe, der Exponent von G ist $\exp(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g^n = e\}$ (wobei $\min \emptyset = \infty$).

Beispiel (Übung).

(i) $\exp(C_n) = n$

(ii) $\exp D_n = \mathrm{kgV}(2, n)$

(iii) $\exp(S_3) = 6$

(iv) $\exp(S_4) = 12$

(v) $\exp(G) = 2 \implies G$ abelsch

(vi) $\mathbb{F}_p$ Körper mit p Elementen und $0 \neq V$ ein $\mathbb{F}_p$-[[Vektorraum]], so gilt $\exp(V, 0, +) = p$

Satz 1.26. *Sei G eine endliche Gruppe, es gelten*

(a) $\exp(G) \mid \mathrm{card}(G)$

(b) $\exp(G) = \mathrm{kgV}(\{\mathrm{ord}(g) \mid g \in G\})$

Beweis.

(a) Folgt aus (b) und $\mathrm{ord}(g) \mid \mathrm{ord}(G) \forall g \in G$ nach Korollar 24.

(b) $\mathrm{ord}(g) \mid \exp(G), \forall g \in G$, denn nach Definition gilt:

$$g^{\exp(G)} = e \underset{19}{\implies} \mathrm{ord}(g) \mid \exp(G)$$

folglich: $N := \mathrm{kgV}(\{\mathrm{ord}(g) \mid g \in G\})$ teilt $\exp G$.

Behauptung: $\exp G \leq N$, (dann fertig)

Wir zeigen: $g^N = e \implies \exp G \leq N$. Dies folgt aus $g^{\mathrm{ord}(g)} = e$ und $\mathrm{ord}(g) \mid N = \mathrm{kgV}(...)$. □

Übung 1.27. Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:

(a) Sind $g, h \in G : gh = hg$ und gilt $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h)) = 1$, so gilt

$$\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(g)\mathrm{ord}(h)$$

(b) Gelte $p^f \mid \exp G$ für p eine Primzahl und $f \in \mathbb{N}$, dann $\exists g \in G : \mathrm{ord}(g) = p^f$

(c) Ist G abelsch, so $\exists g \in G : \exp(G) = \mathrm{ord}(g)$

Satz 1.28. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe, dann ist G genau dann zyklisch, wenn* $\mathrm{ord}(G) = \exp(G)$

Beweis.

- "$\implies$": Sei $g \in G$ Erzeuger $\underset{19}{\implies}$ $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(g)$

$$\mathrm{ord}(g) \mid \exp G, \exp G \mid \mathrm{ord}(G) \implies \exp G = \mathrm{ord}(G)$$

- "$\impliedby$": Wähle nach 27.3 ein $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = \exp(G)$, nach Voraussetzung ist $\exp(G) = \mathrm{ord}(g) \implies \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(G) \implies \langle g \rangle \subseteq G$ ist Gleichheit, d.h. $\langle g \rangle = G$.

□

1.2 Gruppenhomomorphismen

Seien im Weiteren M, M' Monoide und G, G' Gruppen.

Definition 1.29 (**Monoid-/Gruppenhomomorphismus**).

(a) Eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ heißt **Monoidhomomorphismus**, falls

  (i) $\varphi(e) = e'$ und

  (ii) $\forall m, \widetilde{m} \in M : \varphi(m \circ \widetilde{m}) = \varphi(m) \circ' \varphi(\widetilde{m})$

(b) Sind M, M' Gruppen, so heißt ein Gruppenhomomorphismus $\iff$ (ii) gilt.

Bemerkung 1.30.

(a) Ist $\varphi : M \to M'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi(e) = e'$ und $\varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}, \forall m \in M$.

(b) (Übung) Die Verkettung von Monoid- bzw. Gruppenhomomorphismen ist wieder ein solcher.

Beweis. Zu (a):

$$e' \circ' \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e \circ e) = \varphi(e) \circ' \varphi(e)$$

Kürzen $\implies e' = \varphi(e)$. Und

$$\varphi(m^{-1}) \circ' \varphi(m) = \varphi(m^{-1} \circ m) = \varphi(e) = e'$$

Eindeutigkeit des Inverses $\implies \varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}$. □

Beispiel 1.31. (a) Für $g \in G$ ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, n \mapsto g^n$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle g \rangle$.

(b) Sei K ein Körper, V, W K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus, dann ist

$$\varphi : (V, 0_V, +_V) \to (W, 0_W, +_W)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Die Vorzeichenfunktion (Aus der linearen Algebra)

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 1.32 (Kern/Bild). Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Der Kern von φ ist $\operatorname{Kern}(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$

(b) Das Bild von φ ist $\operatorname{Bild}(\varphi) := \{\varphi(g) \in G' \mid g \in G\}$

Proposition 1.33 (Übung)**.** *Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann*

(a) Für $H \leq G$ eine Untergruppe ist $\varphi(G) \leq G'$ eine Untergruppe.

(b) Für $H' \leq G'$ eine Untergruppe ist $\varphi^{-1}(H') \leq G$ eine Untergruppe. Insbesondere sind $\operatorname{Bild}(\varphi) \leq G', \operatorname{Kern}(\varphi) \leq G$ Untergruppen.

(c) φ ist injektiv (ein Gruppenmonomorphismus) $\iff \operatorname{Kern}(\varphi) = \{e\}$.

(d) φ ist surjektiv (ein Gruppenepimorphismus) $\iff \operatorname{Bild}(\varphi) = G'$

Bemerkung. (a), (b) und (d) gelten auch für Monoide.

Definition 1.34 (Gruppenisomorphismus). Ein Gruppenhomomorphismus φ ist ein Gruppenisomorphismus, wenn φ bijektiv ist. ($\iff \operatorname{Kern}(\varphi) = \{e\}$ und $\operatorname{Bild}(\varphi) = G'$).

Bemerkung (Übung)**.** Definiere ein Monoidhomomorphismus analog zu Definition 24.

Notation. Wir schreiben $G \cong G'$ (G ist isomorph zu G') wenn $\exists$ Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G'$.

Definition 1.35 (Gruppenautomorphismus). (a) Ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G$ heißt Gruppenautomorphismus.

(b) $\operatorname{Aut}(G) := \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ ist ein Gruppenautomorphismus}\}$.

Bemerkung 1.36 (Übung)**.** (a) $\operatorname{id}_G : G \to G \in \operatorname{Aut}(G)$

(b) Verkettung von Gruppenisomorphismen (oder Automorphismen) ist wieder ein solcher.

(c) Ist $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenisomorphismus, so gelten

  (i) $\#G = \#G'$.

  (ii) G abelsch $\iff G'$ abelsch.

  (iii) $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem $\iff \varphi(S) \subseteq G'$ ein Erzeugendensystem.

Proposition 1.37. $(\operatorname{Aut}(G), \operatorname{id}_G, \circ)$ *und* $(\operatorname{Aut}(M), \operatorname{id}_M, \circ)$ *sind Gruppen.*

Beweis. (Übung) Zeige:

$$\mathrm{Aut}(G) \leq \mathrm{Bij}(G), \mathrm{Aut}(M) \leq \mathrm{Bij}(M)$$

sind Untergruppen. □

Beispiel 1.38 (Übung)**.**

(a) $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}, 0, +)) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\} \cong C_2$

(b) Für $\mathbb{Z}_n := {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(n)}$ der Ring der Restklassen modulo n gilt

$$(\mathbb{Z}_n, \overline{0}, +) \cong C_n \text{ und } \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, \overline{0}, +) \cong \mathbb{Z}_n^\times$$

z.B. Erzeuger von $\mathbb{Z}_n$ sind Reste $\overline{a}$, sodass $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$

(c) Sei G beliebig, zu $g \in G$ definiere den **Konjugationsautomorphismus** (**Konjugation** mit g)

$$c_g : G \to G, h \mapsto g \circ h \circ g^{-1}$$

(i) $c_g \circ c_{g'} = g_{g \circ g'}, \forall g, g' \in G$
(ii) $c_e = \mathrm{id}_G$ und $c_g \in \mathrm{Aut}(G), \forall g \in G$
(iii) $c_. : G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto c_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
(iv) $\mathrm{Kern}(c_.) = Z(G)$ (Zentrum von G).

Bemerkung. $\mathrm{Bild}(c_.) =: \mathrm{Inn}(G)$ die Gruppe der **inneren Automorphismen** von G

Lemma 1.39. *Seien $\varphi, \varphi' : G \to G'$ Gruppenhomomorphismen. Sei $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Dann gilt*

$$\varphi(s) = \varphi'(s) \forall s \in S \iff \varphi = \varphi' \quad (*)$$

Analoge Aussage gilt für Monoide

Beweisskizze. (Übung)

- " $\Longleftarrow$ ": Klar.
- " $\Longrightarrow$ ":
  1) Zeige $H := \{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi'(g)\} i \leq G$ ist eine Untergruppe.
  2) Da $S \subseteq$ nach Definition von H und Voraussetzung von " $\Longrightarrow$ ", folgt $G = \langle S \rangle \subseteq H \leq G$

□

Normalteiler (Normal Subgroup)

Notation. Für $X \subseteq G$ und $g \in G$ setze

$$\ell_g(X) = \{gx \mid x \in X\} = gX \text{ und } r_g(X) = \{xg \mid x \in X\} = Xg$$

Gruppenverknüpfung assoziaativ $\implies$

(i) $c_g(X) = \{gxg^{-1} \mid x \in X\} = (gX)g^{-1} = g(Xg^{-1})$.

(ii) $g(hX) = (gh)X$ und $(Xg)h = X(gh)$.

Bemerkung. Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, dann heißt gH **Linksnebenklasse** und Hg **Rechtsnebenklasse**.

Definition 1.40 (Normalteiler). Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler (N.T.) $\iff$ $\forall g \in G : Ng = gN$. (Diese Definition ist auch für Monoide sinnvoll)

Lemma 1.41. *Für eine Untergruppe $N \leq G$ sind äquivalent:*

(i) $\forall g \in G : gN = nG$

(ii) $\forall g \in G : gNg^{-1} = N$

(iii) $\forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N$

Beweis.

- "$(ii) \implies (iii)$": Klar.
- "$(iii) \implies (i)$": Rechtsmultiplikation mit g liefert aus (iii):

  $$(gNg^{-1})g = gN(g^{-1}g) = gNe = gN \subseteq Ng$$

  Für die andere Inklusion betrachte (iii) für g^{-1}:

  $$g^{-1}Ng \subseteq N \underset{\text{Linksmult. mit } g}{\implies} Ng \subseteq gN$$

- "$(i) \implies (ii)$": Wende auf (i) Rechtsmultiplikation mit g^{-1} an. ($r_{g^{-1}} : G \to G$ ist eine bijektive Abbildung.)

$\square$

Notation.

$H \leq G$ bedeuteg $H \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

$H \trianglelefteq G$ bedeuteg $H \subseteq G$ ist ein Normailteiler.

Satz 1.42. *Ist $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist* $\text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$ *ein Normalteiler.*

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig, zu zeigen ist $g \circ \text{Kern}(\varphi) \circ g^{-1} \subseteq \text{Kern}(\varphi)$

Sei $h \in \text{Kern}(\varphi)$, zu zeigen ist $ghg^{-1} \in \text{Kern}(\varphi)$. Damit:

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) \underset{h \in \text{Kern}(\varphi)}{=} \varphi(g) \circ e' \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$$

$$= \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = e'.$$

$\implies \text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$. $\square$

Übung 1.43.

(a) Ist $N' \trianglelefteq G'$ und $\varphi : G \to G'$ Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi^{-1}(N') \trianglelefteq G$.

(b) Ist $h \leq G$ eine Untergruppe mit $[G : H] = \#{}^{G}\!/\!_{H} = 2$, so folgt $H \trianglelefteq G$.

(c) Ist G abelsch, so ist jede Untergruppe $H \leq G$ ein Normalteiler.

(d) Der **Kommutator** zu $g, h \in G$ ist $ghg^{-1}h^{-1}$, die **Kommutatoruntergruppe** von G ist

$$[G, G] := \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$$

Es gilt $[G, G] \trianglelefteq G$.

Beispiel. Es gibt Beispiele für folgende Aussagen:

(i) $\exists H \leq G : H \ntrianglelefteq G$

(ii) $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$ mit $\varphi(G) \ntrianglelefteq G'$

(iii) $\exists N \trianglelefteq G$ und $H \trianglelefteq N$, so dass $H \ntrianglelefteq G$.

Beweis.

(i) $G = S_3 = \text{Bij}(\{1, 2, 3\}) \supseteq H = \{\text{id}, \sigma\}$ mit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dann $H \leq G$ Klar, aber $H \ntrianglelefteq G$, denn für $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $\tau\sigma\tau^{-1}$ (Übung) $\implies \tau H \tau^{-1} \nsubseteq H$

(ii) Betrachte $\varphi : H \to G$ Inklusion mit G, H aus (i), dann gilt $H \trianglelefteq H$ aber $\varphi(H) = H$ kein Normalteiler von $G = S_3$.

(iii) Später.

□

Satz 1.44. *Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, dann gelten:*

(a) Aus $gN = g'N$ und $hN = h'N$ für $g, g', h, h' \in G$ folgt $ghN = g'h'N$ und insbesondere ist die Verknüpfung

$$\circ : \underbrace{{}^{G}\!/\!_{N}}_{\{gN \mid g \in G\}} \times {}^{G}\!/\!_{N} \longrightarrow {}^{G}\!/\!_{N}, \ (gN, hN) \longmapsto gN \circ hN = ghN$$

wohl-definiert.

(b) ${}^{G}\!/\!_{N}, \underbrace{N}_{=eN}, \circ)$ ist eine Gruppe.

(c) $gN = g'N \iff g^{-}1g' \in N$.

(d) $\pi : G \to {}^{G}\!/\!_{N}, g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\pi) = N$.

Beweis. (a) Es gelten (Formeln von Definition 40)

$$(gh)N = g(hN) \overset{N \trianglelefteq G}{=} g(Nh) = (gN)h$$
$$= (g'N)h = g'(Nh) = g'(hN) = g'(h'N) = (g'h')N \implies (a)$$

(b) Überlege Gruppenaxiome.

- Assoziativität (Übung)
- Linkseins ist $N = eN$, denn

$$N \circ (gN) = eN \circ gN \overset{\text{wohl-def.}}{=} (e \circ g)N = gN$$

- Linksinverses zu gN ist $g^{-1}N$, denn

$$(g^{-1}N) \circ gN \underset{\text{nach Def.}}{=} (g^{-1}g)N \underset{\text{Gruppe}}{=} eN = N$$

(c) $gN = g'N \underset{g^{-1}\circ\_}{=} N = g^{-1}g'N \underset{e \in N}{\implies} N \ni g^{-1}g'e$, d.h. $g^{-1}g' \in G$.

$$g^{-1}g' \in N \underset{\substack{\ell_{g^{-1}g'}: N \to N \\ \text{ist bijektiv.}}}{\implies} N = g^{-1}N \underset{g^{-1}\circ\_}{\implies} gN = g'N$$

(d) $\pi : G \to {}^{G}\!/\!_{N}, g \mapsto gN$ ist Gruppenhomomorphismus, denn

$$\pi(gg') = gg'N \underset{\text{Def. von } \circ}{=} gN \circ g'N = \pi(g) \circ \pi(g')$$

$$g \in \text{Kern}(\pi) \iff gN = eN \underset{(c)}{\iff} e^{-1}g = g \in N$$

□

Bemerkung (Bezeichnung)**.** ${}^{G}\!/\!_{N}$ (bzw. $({}^{G}\!/\!_{N}, eN, \circ)$) heißt **Faktorgruppe** von G modulo N.

Bemerkung (Übung)**.** G abelsch $\implies$ ${}^{G}\!/\!_{N}$ abelsch.

Satz 1.45 (Homomorphiesatz für Gruppen)**.** *Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus mit $N = \text{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : {}^{G}\!/\!_{N} \longrightarrow G'$, sodass*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ {}^{G}\!/\!_{N} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$. (wobei $\pi : G \longrightarrow {}^{G}\!/\!_{N}, g \mapsto gN$ aus Satz 44). Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist injektiv und $\overline{\varphi}$ bijektiv $\iff$ φ surjektiv.

Beweis.
- Existenz von $\overline{\varphi}$: Definiere $\overline{\varphi}(gN) = \varphi(g), \forall g \in G$.

- $\overline{\varphi}$ wohl-definiert: Es gilt: $gN = g'N \iff N = g^{-1}g'N \underset{44c}{\iff} g^{-1}g' \in N$. Damit
$$\implies \varphi(g') = \varphi(gg^{-1}g') = \varphi(g)\varphi(\underbrace{g^{-1} \circ g'}_{\in N = \mathrm{Kern}(\varphi)}) = \varphi(g)e = \varphi(g).$$
- $\overline{\varphi}$ Gruppenhomomorphismus:
$$\overline{\varphi}(gN \circ g'N) \underset{\text{Def. von } \circ}{=} \overline{\varphi}(gg'N) \underset{\text{Def. von } \overline{\varphi}}{=} \varphi(gg') \underset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(g)\varphi(g')$$
$$\underset{\text{Def. von } \overline{\varphi}}{=} \overline{\varphi}(gN)\overline{\varphi}(g'N).$$
- $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$: (Aus der Definition von $\overline{\varphi}$):
$$\underbrace{\overline{\varphi}(gN)}_{\overline{\varphi}(\pi(g))} = \varphi(g)$$
- $\overline{\varphi}$ injektiv: $\overline{\varphi}(gN) = e \iff \varphi(g) = e \iff g \in N = \mathrm{Kern}(\varphi) \underset{44c}{\iff} gN = eN = N$.
- $\overline{\varphi}$ eindeutig: Folgt aus der Surjektivität von π.
- Zusatz φ surjektiv $\iff \overline{\varphi}$ Isomorphismus (Übung): Verwende $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\overline{\varphi})$ und $\overline{\varphi}$ injektiv.

□

Satz 45' (Homomorphiesatz'). *(Übung) Ist $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$, so dass $N \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus*
$$\overline{\varphi} : G/N \longrightarrow G' \text{ mit } \overline{\varphi} \circ \pi = \varphi.$$
wobei $\pi : G \to G/N, g \mapsto gN$

Notation. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Restklassenring. ($n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe)

Korollar 1.46. *Sei G eine zyklische Gruppe,*

(a) Falls $m := \mathrm{ord}(G) \in \mathbb{N} \implies G \cong \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m)$.

(b) Falls $\mathrm{ord}(G) = \infty \implies G \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $g \in G$ ein Erzeuger und betrachte
$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, n \mapsto g^n$$
φ ist surjektiv, da $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle g^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle = G$.
$$\underset{\text{Satz 45}}{\implies} \overline{\varphi} : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m \xrightarrow{\cong} G$$
für $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathbb{Z}m$.

- Fall (b): $\mathrm{ord}(G) = \infty \implies \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\} \implies \varphi : \mathbb{Z} \to G$ ist ein Isomorphismus.
- Fall (a): $\mathrm{ord}(G) = m \in \mathbb{N}$ dann ist $\overline{\varphi}$ der gewünschte Isomorphismus.

□

Korollar 1.47. *Für zyklische Gruppen G, H gilt $G = H \iff \#G = \#H$*

Übung. (a) $G/_{[G,G]}$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Für $N \trianglelefteq G$ gilt:
$$G/_{N} \text{ abelsch} \iff [G,G] \leq N$$

Einschub: Faktorringe

Definition 1.48 (Ideal). Sei R ein kommutativer Ring. $I \subseteq R$ heißt Ideal wenn

(i) I ist Untergruppe von $(R, 0, +)$

(ii) $RI := \{ri \mid r \in R, i \in I\} \subseteq I$

Beispiel. 1) $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$ ist ein Ideal $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) $Ra \subseteq R$ für $a \in R$ ist ein *Ideal* von R.

Satz 1.49. *Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, und $R/_{I} = \{r + I \mid r \in R\}$ die Nebenklassenmenge von R modulo I (für die Gruppe $(R, 0, +)$). Dann:*

(a) Die Verknüpfungen
$$+ : R/_{I} \times R/_{I} \longrightarrow R/_{I}, (r + I, s + I) \longmapsto (r + s) + I$$
$$\cdot : R/_{I} \times R/_{I} \longrightarrow R/_{I}, (r + I, s + I) \longmapsto rs + I$$
sind wohl-definiert auf $R/_{I}$

(b) $(R/_{I}, \overline{0}, \overline{1}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring ($\overline{r} := r + I$ Notation für die Klasse von r) der Restklassenring von R modulo I.

(c) $\pi : R \longrightarrow R/_{I}, r \longmapsto r + I$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Beweis. (a) "+" wohl-definiert folgt aus Satz 44. ($I \subseteq (R, 0, +)$ Ideal!)

"·" wohl-definiert: Gelte $a + I = a' + I$ und $b + I = b' + I$.
$$\implies a'b' + I = ab + aj + bi + ij + I = ab + I$$

(b) (Übung)

(c) Wie in 45 (d)

□

Die Isomorphiesätze

Satz 1.50 (**Erster Isomorphiesatz**). *Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:*

(a) $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\} \subseteq G$ ist ein Untergruppe.

(b) $H \cap N \subseteq H$ ist ein Normalteiler (und (Übung) $N \trianglelefteq HN$)

(c) Die folgende Abbildung ist wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus

$$H/_{H \cap N} \longrightarrow HN/_N, h(H \cap N) \longmapsto hN$$

Beweis. (a) Seien $hn, h'n' \in HN$, dann:

$$(h'n')(hn)^{-1} = h' \underbrace{n'n^{-1}h^{-1}}_{\in Nh^{-1} \underset{N \trianglelefteq G}{=} h^{-1}N} = h'h^{-1}\widetilde{n} \underset{H \text{ U.G.}}{=} (h'h^{-1})\widetilde{n} \in HN$$

und $e = ee = HN$

(b) Zu zeigen: für $h \in H$ gilt $h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N$

Dazu:

$$\begin{array}{r} h(H \cap N)h^{-1} \subseteq hHh^{-1} = H \\ h(H \cap N)h^{-1} \subseteq hNh^{-1} \underset{N \trianglelefteq G}{=} N \end{array} \implies h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N.$$

(c) Betrachte die Verkettung von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi : H \xrightarrow[h \longmapsto h]{\text{Inklusion}} HN \xrightarrow[x \longmapsto xN]{} HN/_N$$

dann ist φ ein Gruppenautomorphismus.

φ ist surjektiv: Jede Klasse in $HN/_N$ ist von der Form

$$hnN = \underbrace{hN}_{=\varphi(h)}$$

für ein $h \in H$. Nach Homomorphiesatz: nur noch zu zeigen $\text{Kern}(\varphi) = H \cap N$: für $h \in H$:

$$h \in \text{Kern}(\varphi) \iff \varphi(h) = eN \iff hN = eN \underset{44(c)}{\implies} h \in N \underset{h \in H}{\implies} h \in N \cap H$$

Umgekehrt: $h \in N \cap H \implies h \in N \implies hN = eN = N$.

□

Satz 1.51 (**Zweiter Isomorphiesatz**). *Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normailteiler, und sei $\pi : G \longrightarrow G/_N, g \longmapsto \overline{g} = gN$ die Faktorabbildung.*

(a) Sei $X := \{H \leq G \mid N \subseteq H\}$*, und sei* $\overline{X} := \left\{\overline{H} \leq {}^{G}\!/\!_{N}\right\}$*, dann ist die Abbildung*

$$\psi : X \longrightarrow \overline{X}, H \longmapsto \pi(H) = {}^{H}\!/\!_{N} =: \overline{H}$$

eine Bijektion mit inverser Abbildung

$$\nu : \overline{X} \longrightarrow X, \overline{H} \longmapsto \pi^{-1}(\overline{H}).$$

Dabei gilt:

$$X \ni H \trianglelefteq G \iff \overline{X} \ni \pi(H) \trianglelefteq {}^{G}\!/\!_{N}$$

(b) Ist $H \in X$ *ein Normalteiler von* G*, so ist*

$$ {}^{G}\!/\!_{H} \longrightarrow \left({}^{G}\!/\!_{N}\right)\!\Big/\!\left({}^{H}\!/\!_{N}\right), g \longmapsto \underbrace{\overline{g}}_{gN}\,\underbrace{\overline{H}}_{\pi(H)}$$

wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. (a) Nach Proposition 33 sind ψ und ν wohl-definiert.

- $\nu \circ \psi = \mathrm{id}_X$: Sei $H \leq G$ mit $N \subseteq H$, zu zeigen ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$. Es gilt:

$$g \in \pi^{-1}(\pi(H)) \iff \pi(g) \in \pi(H) \iff gN \in \bigcup_{h \in H} hN$$

$$\iff \exists h \in H : gN = hN \underset{44(c)}{\Longrightarrow} h^{-1}g \in N \subseteq H \implies g \in hH = H.$$

(“ $\Longleftarrow$ ” klar: $g \in H \implies g \in \pi^{-1}(\pi(H))$).

- $\psi \circ \nu = \mathrm{id}_{\overline{X}}$: Für $\overline{H} \in \overline{X}$ (d.h. $\overline{H} \leq {}^{G}\!/\!_{N}$) ist zu zeigen $\pi(\pi^{-1}(\overline{H})) = \overline{H}$. Dies gilt, denn π ist surjektiv.
- Schließlich: Sei $H \in X$, zu zeigen ist $H \trianglelefteq G \iff \pi(H) \trianglelefteq {}^{G}\!/\!_{N}$

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$$

$$\underset{\pi: G \to \overline{G} \text{ surj.}}{\Longrightarrow} \forall \overline{g} \in {}^{G}\!/\!_{N} : \overline{g}\pi(H)\overline{g} \subseteq \pi(H) \implies \pi(H) \trianglelefteq \overline{G}$$

Umgekehrt: Falls $\pi(H) \trianglelefteq\trianglelefteq \overline{G}$ und $g \in G$:

$$\pi(gHg^{-1}) = \overline{g}\pi(H)\overline{g}^{-1} \leq \pi(H)$$

$$\implies gHg^{-1} \subseteq \pi^{-1}(\pi(gHg^{-1})) \subseteq \pi^{-1}(\pi(H)) \underset{\nu\circ\psi = \mathrm{id}_X}{=} H$$

(b) Sei $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq H$, so dass nach (a)

$$\overline{H} = \underbrace{{}^{H}\!/\!_{N}}_{\pi(H)} \trianglelefteq \underbrace{{}^{G}\!/\!_{N}}_{\pi(G)}$$

ein Normalteiler ist. Betrachte den verketteten Gruppenautomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow[g \longmapsto gN]{\pi} {}^{G}\!/\!_{N} \xrightarrow[\overline{g} \longmapsto \overline{g}\overline{H}]{\pi'} \left({}^{G}\!/\!_{N}\right)\!\Big/\!\left({}^{H}\!/\!_{N}\right)$$

π, π' sind surjektive Gruppenhomomorphismen nach Satz 44(d) $\implies$ die Verkettung φ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Nach Homomorphiesatz für Gruppen bleibt zu zeigen: $\mathrm{Kern}(\varphi) = H$:

$$g \in \mathrm{Kern}(\varphi) \underset{\pi'(\pi(g))=e}{\iff} \pi(g) \in \mathrm{Kern}(\pi') \iff gN \in {}^{H}\!/_{N}$$

$$\iff gN \subseteq H \underset{N \leq H}{\iff} g \in H.$$

□

(Semi-)direkte Produkte

Lemma 1.52 (Übung)**.** *Seien $(G_1, e_1, \circ_1)$ und $(G_2, e_2, \circ_2)$ Gruppen, dann ist $G = (G_1 \times G_2, (e_1, e_2), \circ)$ eine Gruppe mit*

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$$

Analog für $k \geq 2$ Faktoren. Dabei sind $G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G$ und $\{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G$ Normalteiler von G.

Definition 1.53 (**Direktes Produkt**)**.** Die Gruppe G aus Lemma 52 heißt das direkte Produkt von G_1 und G_2, Notation $G_1 \times G_2$.

Beispiel.

$$(\mathbb{R}^n, \underline{0}, +) = (\mathbb{R}, 0, +) \times \cdots \times (\mathbb{R}, 0, +) = \bigtimes_{i=1}^{n} (\mathbb{R}, 0, +)$$

Proposition 1.54. *Sei G eine Gruppe, seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ Normalteiler mit $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, dann gelten:*

(a) $\forall n_1 \in N_1, n_2 \in N_2 : n_1 n_2 = n_2 n_1$

(b) $N_1 N_2 \trianglelefteq G$ ist ein Normalteiler in G

(c) $\psi : N_1 \times N_2 \to N_1 N_2, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$ ist ein Gruppenisomorphismus. (Insbesondere gilt $\# N_1 N_2 = \# N_1 \# N_2$)

Zusatz: Gilt $G = N_1 N_2$, so folgt $G \cong N_1 \times N_2$ via ψ.

Beweis. (a) Seien $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$, setze $x = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}$. Nun:

$$x = (n_1 n_2 n_1^{-1}) n_2^{-1} \in (n_1 N_2 n_1^{-1}) N_2 \subseteq N_2 N_2 = N_2$$

analog

$$x = n_1 (n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}) \in N_1 (n_2 N_1 n_2^{-1}) \overset{N_2 \trianglelefteq G}{\subseteq} N_1 N_1 = N_1$$

damit ist $x \in N_1 \cap N_2 = \{e\} \implies x = e \implies n_1 n_2 = n_2 n_1$.

(b) Für $g \in G$:

$$g N_1 N_2 g^{-1} = g N_1 g^{-1} g N_2 g^{-1} \subseteq N_1 N_2$$

(c) ψ ist wohl-definiert: klar. ψ ein Gruppenhomomorphismus folgt aus (a)

$$\begin{aligned}\psi((n_1,n_2)\circ(n_1',n_2')) &= \psi((n_1\circ n_1', n_2\circ n_2')) = n_1n_1'n_2n_2' \\ &\underset{(a)}{=} n_1n_2n_1'n_2' = \psi(n_1,n_2)\circ\psi(n_1',n_2')\end{aligned}$$

$\{(e,e)\} = \mathrm{Kern}(\psi)$:

$$\begin{aligned}\psi(n_1,n_2)=e \iff n_1n_2 = e &\iff n_1 = n_2^{-1}\in N_1\cap N_2 = \{e\} \\ &\iff n_1=n_2=e\end{aligned}$$

$\mathrm{Bild}(\psi) = N_1N_2$.

□

Korollar 1.55 (Übung)**.** *Sei G eine endliche Gruppe. Seien $N_1,...,N_k \trianglelefteq G$ Normalteiler von G und gelte:*

(i) $\forall i\neq j: \mathrm{ggT}(\#N_i,\#N_j)=1$

(ii) $\prod_{j=1}^k \#N_j = \#G$

Dann ist

$$\psi: \bigtimes_{j=1}^k N_j \longrightarrow G, (n_1,...,n_k)\longmapsto n_1\cdot ...\cdot n_k = \prod_{j=1}^k n_j$$

ein Gruppenisomorphismus.

Übung. Spezialfall: $n=\prod_{i=1}^k p_i^{f_i}$ für $p_1,...,p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen, dann gilt:

$$\bigtimes_i^k \mathbb{Z}/(p_i^{f_i}) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

ist Folge von Korollar 55.

Lemma 1.56. *Seien $H=(H,e_H,\circ_H), N=(N,e_N,\circ_N)$ Gruppen und sei $\varphi: H\to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Definiere*

$$G := N\rtimes H := N\rtimes_\varphi H = (N\times H, \underbrace{(e_n,e_H)}_{=:e},\circ)$$

mit $\circ$ der Verknüpfung auf G definiert durch

$$(n_1,h_1)\circ(n_2,h_2) = (n_1\circ_N \varphi(h_1)(n_2), h_1\circ_H h_2)$$

Dann ist G eine Gruppe und es gelten:

- $N' := \{(n,e_H)\mid n\in N\}\cong N$ *ist ein Normalteiler in G,*
- $H' := \{(e_N,h)\mid h\in H\}\cong H$ *ist eine Untergruppe von G,*
- $N'H' = G$ *und* $N'\cap H' = \{e\}$,

- *$G \to H, (n,h) \mapsto h$ ist ein Gruppenepimorphismus (surj.) mit Kern N'.*

Definition 1.57 (Semi-direktes Produkt). Die Gruppe $G = N \rtimes H$ heißt das semi-direkte Produkt von N mit H (bezüglich φ).

Satz 1.58. *Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:*

(a) $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto \underbrace{(c_h|_N : N \to N, n \mapsto hnh^{-1})}_{\textit{Konjugation mit } h}$ ist wohl-definiert und ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Gelten zusätzlich (i) $NH = G$, (ii) $N \cap H = \{e\}$, so ist

$$\psi : N \rtimes_{\varphi} H \to G, (n,h) \mapsto n \circ_G h$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Siehe Jantzen, Schwermer - Algebra. $\square$

Beispiele.

1. Seien $A_n = \mathrm{Kern}(\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\})$ die Untergruppe der geraden Permutationen und τ eine beliebige Transposition, dann gilt:

$$S_n \cong A_n \rtimes \{\mathrm{id}, \tau\}$$

2. V Sei ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\sigma \in \mathrm{O}(V)$ eine Spiegelung, dann gilt

$$\mathrm{O}(V) \cong \mathrm{SO}(V) \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma\}$$

3. Sei K ein Körper, dann gilt

$$\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes H \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes K^{\times}$$

wobei

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \in K^{\times} \right\} \cong K^{\times}$$

4. Sei $\sigma \in A_4$ ein 3-Zykel, z.B. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, und V ist die kleinsche Vierergruppe

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \trianglelefteq A_4,$$

dann gilt

$$A_4 \cong V \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$$

Beweis. (Übung) eventuell noch 12 Tage warten. $\square$

Kapitel 2

Gruppen Strukturtheorie

2.1 Strukturtheorie zu Gruppen ("Einige Aussagen")

Sei im Weiteren M ein Monoid, G eine Gruppe und X eine Menge.

Definition 2.1 (**Wirkung**)**.** Eine Abbildung

$$\lambda : M \times X \to X, (m, x) \mapsto m \cdot x := \lambda(m, x)$$

heißt Linkswirkung (left action, Linksoperation) von M auf X, wenn es gelten $\forall x \in X, m, m' \in M$:

(i) Neutrales Element: $e \cdot x = x$

(ii) Assoziativität: $m \cdot (m' \cdot x) = (m \cdot m') \cdot x$

Bezeichnung. Ist M eine Gruppe, so heißt λ auch Gruppenwirkung und X heißt Links-M-Menge.

Bemerkung. Analog kann man auch Rechtswirkungen

$$\rho : X \times M \to X, (x, m) \mapsto x \cdot m$$

definieren. (Axiome: $x \cdot e = c$ und $(x \cdot m) \cdot m' = x \cdot (m \cdot m')$)

Bemerkung (Übung)**.** Jede Links-G-Wirkung kann man in eine Rechts-G-Wirkung überführen: zu $\lambda : G \times X \to X$ definiere $\rho : X \times G \to X$ durch

$$\rho(x, g) := \lambda(g^{-1}, x) \iff x \cdot g := g^{-1} \cdot x$$

Proposition 2.2 (Alternative Beschreibung von Wirkungen)**.**
(a) Sei $\lambda : G \times X \to X$ eine Linkswirkung, dann ist

$$\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X), g \mapsto (\varphi_g : X \to X, x \mapsto gx)$$

ein wohl-definierter Gruppenhomomorphismus.

(b) Sei $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist

$$\lambda : G \times X \to X, (g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$$

eine Linkswirkung von G auf X.

Beweis. (a) Für $g \in G$ sei $\varphi_g : X \to X, x \mapsto gx$, dann gelten: $\varphi_e : X \to X, x \mapsto ex = x$ ist id_X (Axiom (i)), und

$$(*) \quad \varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{gg'}$$

denn $\forall x \in X$:

$$(\varphi_g \circ \varphi_{g'})(x) = \varphi_g(\varphi_{g'}(x)) = g(g'x) \overset{(ii)}{=} (gg')x = \varphi_{gg'}(x)$$

Damit folgen:

1. $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \underbrace{\varphi_e}_{\mathrm{id}_X} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g \implies \varphi_g$ ist eine bijektive Abbildung mit Inverse $\varphi_{g^{-1}}$, d.h.
$$\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X), g \mapsto \varphi_g$$
ist wohl-definiert.
2. φ ist ein Gruppenhomomorphismus: folgt aus $(*)$ (Verknüpfung in $\mathrm{Bij}(X)$ ist die Verkettung von Abbildungen.)

(b) Übung.

□

Bemerkung. (a) Das Analogon von Proposition 2 gilt auch für Monoide. Die Linkewirkungen eines Monoids M auf X entsprechen Monoidhomomorphismen $M \to (\mathrm{Abb}(X, X), \mathrm{id}_X, \circ)$

(b) Eine Gruppe kann auch auf "Objekten" mit mehr Struktur als eine Menge wirken, z.B. auf eine Gruppe!

Beispiel. G wirkt auf eine Gruppe N heißt, man hat einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(N)$ (vgl. Lemma 1.56)

Definition 2.3 (Eigenschaften von Wirkungen)**.** Sei $\lambda : G \times X \to X$ eine Linkswirkung von G auf X.

(a) Die **Bahn** zu $x \in X$ ist $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Die Länge der Bahn zu x ist $\#Gx$

(b) λ ist transitiv $\iff \forall y, z \in X \exists g \in G : gy = z \overset{\text{Übung}}{\iff} \forall y \in X : Gy = X \overset{\text{Übung}}{\iff} \exists x \in X : Gx = X$

(c) λ ist n-fach transitiv ($n \in \mathbb{N}$), wenn für alle Paare von n-Tupeln $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$ mit $\#\{x_1, ..., x_n\} = \#\{y_1, ..., y_n\}$ gilt $\exists g \in G : gx_i = y_i, \forall i$.

(d) Die Wirkung heißt **treu**, wenn der induzierte Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ (aus Proposition 2) injektiv ist

$$\overset{\text{Übung}}{\iff} \forall g \in G \setminus \{e\} : \exists x \in X : \underbrace{gX \neq X}_{\varphi_g(x) \neq \mathrm{id}_X(x)}$$

Beispiel 2.4.

1. Ist V ein K-Vektoraum, so wirkt das Monoid $(K, 1, \cdot)$ auf V durch Skalarmultiplikation $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

2. Die folgenden 3 Beispiele sind Linkswirkungen von $\mathrm{GL_n}(K)$:

   (i) $\mathrm{GL_n}(K) \times K^n \to K^n, (g, v) \mapsto gv$. (Übung: Es gibt die Bahnen $\{0\}, K^n \setminus \{0\}$)

   (ii) Sei $\mathcal{B} = \{$geordnete Basen von $K^n\}$ und

   $$\mathrm{GL_n}(K) \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, (g, (b_1, ..., b_n)) \mapsto (gb_1, ..., gb_n)$$

   die Wirkung ist treu und transitiv.

   (iii) $\mathrm{GL_n}(K) \times \mathrm{End}_K(K^n) \to \mathrm{End}_K(K^n), (A, B) \mapsto ABA^{-1}$ die Wirkung ist nicht treu $Z(\mathrm{GL_n}(K))$ wirkt trivial. (Übung: Bahnen stehen in Bijektion zu den Frobeniusnormalformen von Matrizen.)

3. $S_n \times \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}, (\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$ Wirkung ist treu und n-fach transitiv.

4. Abstrakte Beispiele: Sei $H \leq G$ eine Untergruppe.

   (i) $\lambda : H \times G \to G, (h, g) \mapsto hg$. Die Bahnen sind die Mengen Hg, also die Rechtsnebenklassen zu H (treu?) Menge der Rechtsnebenklassen

   $$H\backslash G := \{Hg \mid g \in G\}$$

   (ii) $\rho : G \times H \to G, (g, h) \mapsto gh$ Bahnen = Linksnebenklassen zu H und

   $$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

   (iii) $c. : G \times G \to G, (g, g') \mapsto gg'g^{-1}$ ist eine Linkswirkung, denn der nach Proposition 2 zugehörige Gruppenhomomorphismus ist $c : G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto c_g$.

   (iv) $G \times G/H \to G/H, (g, g'H) \mapsto gg'H$ Die Klassen gH heißen Linksnebenklassen wegen der Links-G-Wirkung auf ihnen.

Proposition 2.5. *Sei X eine Links-G-Menge (zu der Wirkung $\lambda : G \times X \to X, (g, x), \mapsto gx$) definiere Relation $\sim$ auf X durch*

$$x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$$

dann gelten:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Die Äquivalenzklasse zu $x \in X$ bezüglich $\sim$ ist die Bahn Gx. Insbesondere ist X die disjunkte Vereinigung seiner Bahnen. (Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der G-Bahnen, so gilt also $\#X = \sum_{i \in I} \#Gx$)

Beweis. (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation: Prüfe

- $\sim$ reflexiv: $ex = x \implies x \sim x$.
- $\sim$ symmetrisch: Gelte $x \sim y$, d.h. $\exists g \in G : gx = y$, dann gilt $x = ex = g^{-1}(gx) = g^{-1}y \implies y \sim x$.
- $\sim$ transitiv: Gelte $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h. $\exists g, h' \in G : gx = y, g'y = z$

$$\implies (g'g)x = g'(gx) = g'y = z \implies x \sim z$$

(b) Sei $x \in X$, dann ist

$$\{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\} = \{gx \mid g \in G\} = Gx.$$

□

Satz 2.6 (Satz von Cayley). *Jede Gruppe G (jedes Monoid M) ist isomorph zu einer Untergruppe (einem Untermonoid) von $(\mathrm{Bij}(G), \mathrm{id}_G, \circ)$ (bzw. $(\mathrm{Abb}(G, G), \mathrm{id}_G, \circ)$).*

Beweis. (Für Gruppen, Rest ist eine Übung) Definiere die Wirkung $\lambda G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh$, dann erhalten wir den induzierten Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(G)$, wir zeigen φ ist injektiv: Sei $g \in G \setminus \{e\}$, dann gilt $ge = g \neq e \implies$ Wirkung treu, also φ ist ein Gruppenmonomorphismus. D.h. G "ist" Untergruppe von $\mathrm{Bij}(G)$. □

Definition 2.7 (Stabilisator). Sei X eine Links-G-Menge und $x \in X$, dann heißt

$$G_x := \mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$$

Stabilisator von x (unter G). Warnung: $G_x \neq G \cdot x$.

Beispiel. $\mathrm{Stab}_{S_n}(\{n\}) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}$ mit der üblichen S_n-Wirkung auf $\{1, ..., n\}$.

Übung. G-Wirkung auf einer Menge X ist treu

$$\iff \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$$

Proposition 2.8. *Sei X eine links-G-Menge, $x \in X, g \in G$, dann gilt*

(a) $\mathrm{Stab}_G(x) \leq G$ *ist eine Untergruppe.*

(b) $\mathrm{Stab}_G(gx) = g \,\mathrm{Stab}_G(x) g^{-1}$

Beweis.

(a) $e \in \mathrm{Stab}_G(x)$, denn $ex = x$. Seien $\underbrace{g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)}_{\text{bedeutet } g_1x=x, g_2x=x}$, zu zeigen ist $g_1^{-1}g_2 \in$ $\mathrm{Stab}_G(x)$

$$\overset{g_1^{-1}\cdot}{\Longrightarrow} x = ex = g_1^{-1}g_1x = g^{-1}x$$

Damit gilt $(g_1^{-1} \cdot g_2^{-1})x = g_1^{-1}(g_2x) = g_1^{-1}x = x$

(b) Sei $h \in G$, dann:

$$h \in \mathrm{Stab}_G(gx) \iff hgx = gx \overset{g^{-1}\cdot}{\iff} g^{-1}hgx = x$$

$$\iff g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_G(x) \underset{\text{Konj. mit } g}{\iff} h \in g\,\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}.$$

□

Proposition 2.9 (Bahngleichung). *Sei X eine links-G-Menge, $x \in X$, dann gilt:*

- $\psi : {}^{G}\!/\!{}_{G_x} \to Gx, hG_x \mapsto hx$ *ist wohl-definiert und eine Bijektion.*
- *Ist G endlich, so folgt* $\#G \cdot x = [G : G_x]$.

Beweis.

- ψ injektiv und wohl definiert: Seien $g, h \in G$, dann

$$hx = gx \iff g^{-1}hx = x \iff g^{-1}h \in G_x \leq G$$

$$\iff g^{-1}hG_x = G_x \iff hG_x = gG_x$$

- ψ surjektiv nach Definition von $G \cdot x$.
- Aussage über Mächtigkeiten: ψ bijektiv $\implies \#{}^{G}\!/\!{}_{G_x} = \#G \cdot x$.

□

Bemerkung. Die Abbildung ψ ist ein Homomorphismus von links-G-Mengen (ein Isomorphismus!), ${}^{G}\!/\!{}_{G_x}$ und $G \times x \subseteq X$ sind links-G-Mengen und ψ erfüllt:

$$\psi(g \cdot hG_x) = g \cdot \psi(hG_x)$$

(beides ist $= gx \cdot x$)

Definition 2.10. Sei X eine links-G-Menge,

(a) Man sagt G operiert **frei** auf $X \iff \forall x \in X : G_x = \{e\}$

(b) Die Menge der **Fixpunkte** der G-Wirkung ist

$$X^G := \{x \in X \mid G_x = G\}$$

Beispiel. $\mathrm{GL_n}(K)$ operiert frei auf der Menge der geordneten Basen von K^n.

Korollar 2.11. *Sei X eine links-G-Menge. Sei $x_1, ..., x_n$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Länge ≥ 2. Dann:*

(a) $X = X^G \sqcup \bigsqcup_{i\in\{1,...,n\}} G \cdot x_i$

(b) $\#X = \#X^G + \sum_{i\in\{1,...,n\}} \underbrace{[G : G_{x_i}]}_{=\#G\cdot x}$

Beweis. Aus Proposition 5 folgt (a), Lemma 9 gibt (b). □

Anwendung. Sei $X := G$. Sei die G-Wirkung durch Konjugation gegeben, d.h.

$$g \underbrace{\circ}_{\text{Wirk.}} h = ghg^{-1}$$

Die Bahnen unter dieser G-Wirkung heißen **Konjugationsklassen**. Die Konjugationsklasse zu $h \in G = X$ ist

$$G_h := \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$$

Bahnen der Länge 1 sind Fixpunkte unter Konjugation mit allen $g \in G$

$$= \{h \in G \mid \forall g \in G : \underbrace{ghg^{-1} = h}_{gh=hg}\} =: Z(G) \text{ das Zentrum von } G$$

Stabilisator zu $h \in G$ (unter Konjugationswirkung)

$$= \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = C_G(h) \text{ Zentralisator von } h$$

Aus Korollar 11 ergibt sich nun:

Satz 2.12 (Klassengleichung)**.** *Sei G endlich. Ist $g_1, ..., g_n$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der Länge ≥ 2, so gilt:*

$$\#\underbrace{G}_{X} = \#\underbrace{Z(G)}_{X^G} + \sum_{i=1}^{n}[G : \underbrace{C_G(g_i)}_{C_g}]$$

Definition 2.13 (**p-Gruppe**)**.** Sei p eine Primzahl, eine Gruppe G heißt p-Gruppe $\iff \# = p^m$ füe ein $m \in \mathbb{N}$

Beispiel.

$$\mathbb{Z}/(p^m) \text{ oder } U_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

Korollar 2.14. *Ist G eine p-Gruppe, so gilt $p|\#Z(G)$, (d.h. $Z(G)$ ist nichttrivial und also eine p-Gruppe)*

Beweis. Seien $g_1, ..., g_n$ wie im Satz 12. Dann gilt: $C_G(g_i) < G$ ist eine echte Untergruppe. (sonst $g_i = Z(G)$, ist ausgeschlossen)

$$\underset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow} [G : C_G(g_i)] \text{ teilt } \#G = p^m$$

ist ungleich 1!

$$\Longrightarrow p|[G : C_G(g_i)], \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Klassengleichung modulo p :

$$\underbrace{0}_{\#G} \cong \#Z(G) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{0}_{[G:C_G(g_i)]} \mod p \Longrightarrow p|\#Z(G).$$ □

Übung 2.15 (Satz von Cauchy)**.** (?) Sei p eine Primzahl und G endlich, dann gilt:

$$p|\#G \implies \exists g \in G : \mathrm{ord}(g) = p.$$

($\implies$ $\#G$ und $\#\exp(G)$ haben dieselben Primteiler)

Idee: Verwende Induktion über $\#G$ und die Klassengleichung. In Induktionsschritt 2 Fälle:

1. $\exists H < G$ echte Untergruppe mit $p|\#H$
2. $\neg\exists H < G$ echte Untergruppe mit $p|\#H$

Im 2. Fall wende Klassengleichung mod p an!

2.2 Permutationsgruppen

Sei $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \mathrm{Bij}(\{1, ..., n\})$, Notation für $\sigma \in S_n$, d.h. $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ bijektiv ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ ist eine Permutation von $\{1, ..., n\}$, d.h.

$$\#\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} = n$$

Korollar 2.16. $\#S_n = n!$

Beweis. (Übung) Betrachte die möglichen "Wertetabellen" für Permutationen. □

Definition 2.17. Für $\sigma, \tau \in S_n$ definiere

(a) $\mathrm{supp}(\sigma) =$ **Träger** von $\sigma, \mathrm{supp}(\sigma) := \{i \in \{1, ..., n\} \mid \sigma(i) \neq i\}$

(b) σ und τ sind **disjunkt** $\iff \mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \emptyset$

Bemerkung. $\mathrm{supp}(\sigma) = \emptyset \iff 0 = \mathrm{id}$

Lemma 2.18 (Andere Interpretation des Trägers)**.** *Sei $\sigma \in S_n$, dann gilt für die Wirkung von $\langle\sigma\rangle : \mathrm{supp}(\sigma) =$ Vereinigung der Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, ..., n\}$ der Länge ≥ 2.*

Beweis.

- "$\subseteq$": Sei $i \in \mathrm{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \implies \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), ..., \sigma^m(i), ...\}$ ist Bahn von $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^j \mid j \in \mathbb{N}_0\} = \{\mathrm{id}, \sigma, ..., \sigma^{r-1}\}$ der Länge ≥ 2. für $r = \mathrm{ord}(\sigma)$.
- "$\supseteq$": Sei $i \notin \mathrm{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) = i \implies \sigma^j(i) = i, \forall j \in \mathbb{N} \implies$ Bahn von i unter $\langle\sigma\rangle$ ist 1-elementig.

□

Korollar 2.19. *Für $\sigma \in S_n$ gelten:*

(a) $i \in \mathrm{supp}(\sigma) \iff \sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$

(b) Auf jeder $\langle\sigma\rangle$-Bahn (durch $i \in \{1, ..., n\}$) wirkt σ als "zyklische Permutation", d.h.

$$\begin{tikzcd}
i_n := i \arrow[r, mapsto] & i_2 = \sigma(i) \arrow[r, mapsto] & i_3 = \sigma^2(i) \arrow[r, mapsto] & \cdots \arrow[r, mapsto] & i_r = \sigma^{r-1}(i) \arrow[llll, bend left, "\sigma"', "(mit\ \#\{1 \cdots n\} = r)"]
\end{tikzcd}$$

Beweis. (a)

$$i \in \operatorname{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \neq i \underset{\sigma \text{ anwenden}}{\implies} \sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \implies \sigma(i) \in \operatorname{supp}(\sigma)$$

Falls $\sigma(i) \in \operatorname{supp}(\sigma)$, so gilt $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i) \underset{\sigma^{-1} \text{ anwenden}}{\implies} \sigma(i) \neq i$

(b) Sei r die Länge der Bahn durch i unter $\langle\sigma\rangle$. Dann sind $i_{j+1} := \sigma^j(i), j = 0, ..., r-1$ *paarweise verschieden.* Sonst $\exists 0 \leq j_1 < j_2 \leq r-1$ mit $\sigma^{j_1}(i) = \sigma^{j_2}(i)$

$$\underset{\sigma^{-1} \text{ anwenden}}{\implies} i = \sigma^{j_2 - j_1}(i) \quad (*)$$

$\implies$ Bahn durch i hat höchstens $j_2 - j_1 < r$ Elemente, die Bahn ist wegen $(*)$

$$= \{i, \sigma(i), ..., \sigma^{j_2 - j_1}(i)\}$$

Und nun: Wiederholtes Anwenden von σ gibt den Zykel

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r, mapsto] & i_2 \arrow[r, mapsto] & \cdots \arrow[r, mapsto] & i_r \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 2.20. *Sind $\sigma, \tau \in S_n$ disjunkt, so gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.*

Beweis. Zeige $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ als Abbildungen $\{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$, sei $i \in \{1, ..., n\}$

- Fall 1: $i \in \operatorname{supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \in \operatorname{supp}(\sigma) \implies i, \sigma(i) \notin \operatorname{supp}(\tau)$. Also $\tau(i) = i, \tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$
- Fall 2: $i \in \operatorname{supp}(\tau)$ analog zu Fall 1.
- Fall 3: $i \notin \operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\tau) \implies \sigma(i) = i = \tau(i)$.

Also $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i))$. □

(Folge: σ, τ disjunkt $\implies \operatorname{ord}(\sigma\tau) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\sigma), \operatorname{ord}(\tau)))$

Definition 2.21. Seien $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n\}$ paarweise verschieden. Der **r-Zykel**

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)(j) = \begin{cases} j & j \notin \{i_1, ..., i_r\} \\ i_{s+1} & j = i_s\ (s \in \{1, ..., n\}) \\ i_1 & j = i_r \end{cases}$$

2-Zykel heißen **Transposition**. Konvention: $(\cdot) := \mathrm{id}_{\{1,...,n\}}$ (leerer Zykel). Beachte:

(i) $(i) = (\cdot)$ für $i \in \{1, ..., n\}$

(ii) $\operatorname{supp}(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = \begin{cases} \{i_1, ..., i_r\} & r \geq 2 \\ \emptyset & r = 1 \end{cases}$

(iii) $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = (i_r\ i_1\ i_2\ \cdots i_{r-1})$ (Notation ist nicht eindeutig, können Einträge zyklisch weiterschieben.) z.B.

$$(1\ 4\ 7) = (7\ 1\ 4) = (4\ 7\ 1) = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 7 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

(iv) $\operatorname{ord}(i_1\ \cdots\ i_r) = r$, z.B. $\operatorname{ord}(1\ 2) = 2$

Satz 2.22 (**Zykeldarstellung von Permutationen**). *Sei $\sigma \in S_n$, seien $I_1, ..., I_t \subseteq \{1, ..., n\}$ die paarweise verschiedenen Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, ..., n\}$ der Länge ≥ 2, dann:*

(a) Für $j \in \{1, ..., t\}$ $\exists!$ Zykel $\sigma_j \in S_n$ mit $\operatorname{supp}(\sigma_j) = I_j$, und $\sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j}$

(b) $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ und die σ_i kommutieren paarweise.

(c) Die Darstellung in (b) ist eindeutig bis auf Permutation der Faktoren.

(d) Für σ gilt: $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(\#I_j \mid j \in \{1, ..., t\})$

Beweis. (a) Sei r_j die Länge von I_j. Sei $i_j \in I_j$, dann ist (vgl. Beweis von Korollar 19)

$$\sigma_j := (i_j, \sigma(i_j), \sigma^2(i_j), ..., \sigma^{r_j - 1}(i_j) \in S_n$$

ein r_j-Zykel und $\sigma|_{I_j} = \sigma_j$

(b) Die (σ_j) kommutieren paarweise, denn deren Träger, die Mengen I_j, sind paarweise disjunkt.

Um $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ zu prüfen, wende beide Abbildungen an auf $i \in \{1, ..., n\}$.

- Fall $j \in \{1, ..., t\} : i \in J$
  (∗) Es gilt $\sigma_{j'}(i) = i$ für $j' \neq j$ (da $I_{j'} \cap I_j = \emptyset$)

$$\implies \sigma(i) = \sigma_j(i) \overset{(*)}{=} \Big(\sigma_j \cdot \textstyle\prod_{j' \neq j} \sigma_{j'}\Big)(i)$$

$$\overset{\sigma_j \text{ kommutieren}}{=} (\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_j \cdot ... \cdot \sigma_t)(i)$$

- Fall 0 : $i \in \{1, ..., n\} \setminus \bigcup_{j \in \{1, ..., t\}} I_j$. Dann: $\sigma(i) = i$ (1-elementige Bahn).
  Da $i \notin I_j : \sigma_j(i) = i, \forall j \in \{1, \ldots, t\}$. also $(\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_t)(i) = i = \sigma(i)$

(c) Es gelte $\sigma = \sigma'_1 \cdot \ldots \sigma'_{t'}$ mit paarweise disjunkten Zykeln $\sigma = \sigma'_1 \cdot \ldots \sigma'_{t'}$ der Länge ≥ 2. Sei $I'_{j'} := \operatorname{supp}(\sigma'_{j'})$ für $j' \in \{1, \ldots, t'\}$. Dann:

$$\sigma|_{I'_{j'}} = \sigma'_{j'}|_{I'_{j'}}$$

$\Longrightarrow$ $I'_{j'}$ ist Bahn von $\langle\sigma\rangle$ der Länge ≥ 2. $\Longrightarrow$ $t' = t$ und nach Umindizieren der $I'_{j'}$ gelte

$$I'_j = I_j \text{ für } j \in \{1, \dots, t\}$$

und $\sigma_j|_{I_j} = \sigma|_{I_j} = \sigma'_j|_{I_j} \underset{r_j = \#I_j\text{-Zykel}}{\overset{\sigma_j, \sigma'_j \text{ sind}}{\Longrightarrow}} \sigma_j = \sigma' j$

(d) (Übung). $\square$

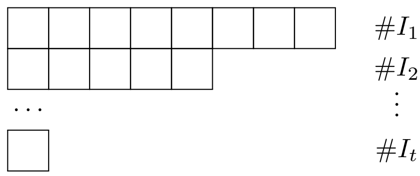
Beispiel 2.23.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$$

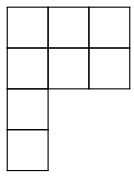
$\Longrightarrow$ $\langle\sigma\rangle$-Bahnen: $\{1, 2, 5\}, \{3, 8, 7\}, \{4\}, \{6\}$ und $\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 8\ 7)$

Definition 2.24 (Young-Diagramm/Partition). Sei $\sigma \in S_n$, seien $I_1, ..., I_t$ die Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ (auch Bahnen der Länge 1), und gelte o.E. $\#I_1 \geq \#I_2 \geq \dots \geq \#I_t$.

(a) Das Young-Diagramm zu σ ist das Diagramm der Form:



im obigen Beispiel 23



(b) Eine Partition von n ist ein Tupel $(n_1, ..., n_t)$ aus $\mathbb{N}$ mit $n_1 \geq \dots \geq n_t$ unt $n = n_1, + \dots + n_t$. (Young-Diagramm: Möglichkeit eine Partition zu veranschaulichen z.B. ist $(\#I_1, ..., \#I_t)$ eine Partition von n)

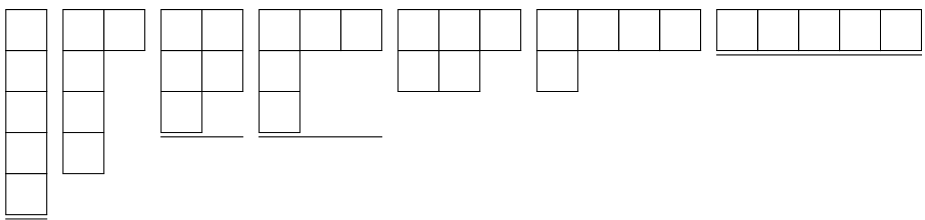
Satz 2.25 (Übung)**.**

(a) Seien $i_1, ..., i_r$ aus $\{1, \dots, n\}$ paarweise verschiedene Elemente. Dann gilt $\forall \sigma \in S_n$:

$$\sigma \circ (i_1\ i_2 \cdots\ i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \cdots\ \sigma(i_r))$$

(b) σ_1 und σ_2 aus S_n liegen in dieselben Konjugationsklasse $\Longleftrightarrow$ sie haben dasselbe Young-Diagramm.

Beispiel. S_5 hat 7 Youngdiagramme



also auch 7 Konjugationsklassen.

Definition (**Signum-Funktion/Alternierende Gruppe**)**.** Sei $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ die Signum-Funktion aus der linearen Algebra. sgn ist eindeutig bestimmt durch:

(i) sgn ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$, für τ eine Transposition.

(jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich schreiben als Produkt von Transpositionen) $A_n = \mathrm{Kern}(\mathrm{sgn})$ = die alternierende Gruppe auf n Elementen

$$A_n = \{\tau_1 \cdot ... \cdot \tau_{2m} \mid \tau_i \in S_n, \mathrm{sgn}(\tau) = -1, m \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 2.26 (Formeln für sgn)**.** *(Übung)*

(a) Jeder r-Zykel σ ist ein Produkt von $r-1$ Transpositionen, und also gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{r-1}$

(b) Hat σ die Zykeldarstellung $\sigma = \sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_t$ mit Zykellängen r_i (von σ_i), $i \in \{1, \ldots, t\}$, so gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{r_1+\cdots+r_t-t}$

Bemerkung. Man kann sgn durch (b) bestimmen und kann dann nachprüfen: σ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 2.27. *Sei $C_3 = \{\sigma \in A_n \mid \sigma$ ist 3-Zykel$\}$ und sei $C_{2,2} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \tau_2$ mit τ_1, τ_2 disjunkt.$\}$, dann*

(a) Für $n \geq 3$ gilt $A_n = \langle C_3 \rangle =: H_3$

(b) Für $n \geq 5$ gilt $A_n = \langle C_{2,2} \rangle =: H_{2,2}$

(c) Für $n \geq 5$ sind C_3 und $C_{2,2}$ A_n-Konjugationsklassen.

Beweis.

$$A_n = \{\underbrace{\tau_1 \cdot ... \cdot \tau_{2m}}_{\text{gerade Anzahl}} \mid \tau_i \in S_n \text{ Transpositionen.}\}$$

(a) Zeige: $\tau, \tau' \in H_3$ für τ, τ' beliebige Transpositionen in S_n

(i) $\tau = \tau'$:
$\tau \cdot \tau' = \mathrm{id} = \sigma^3$ für jeden 3-Zykel $\sigma \in H_3$

(ii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' nicht disjunkt:
also $\tau = (a\ b)$, $\tau' = (b\ c)$ mit $\#\{a, b, c\} = 3, a, b, c \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\tau\tau' = (a\ b\ c) = \underset{\substack{a\leftarrow b\leftarrow c\\ c\leftarrow c\leftarrow b\\ b\leftarrow a\leftarrow a}}{(a\ b)(b\ c)}$$

(iii) $\tau \neq \tau'$ und τ, τ' disjunkt also $\tau = (a\ b), \tau' = (c\ d), \#\{a, b, c, d\} = 4, \{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

$$(a\ c\ b)(a\ c\ d) \overset{(\text{Übung})}{=} (a\ b)(c\ d)$$

(b) Zeige $\tau \cdot \tau \in H_{2,2}$ für $\tau, \tau' \in S_n$ Transpositionen.

- Fall (iii) trivial.
- Fall (i) trivial
$$(\tau_1 \cdot \tau_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) \in \langle C_{2,2} \rangle = H_{2,2}$$
- Fall (ii) $\tau = (a\ b), \tau' = (b\ c)$ (wie oben). Wegen $n \geq 5$, finde $d \neq e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$. Dann
$$\tau \cdot \tau' = ((a\ b)(d\ e))((b\ c)(d\ e))$$

(c) C_3 ist A_n-Konjugationsklasse.

Zu zeigen $(a\ b\ c)$ ($\{a, b, c\} \in \{1, \dots, n\}$ 3 elementig) ist konjugiert zu $(1\ 2\ 3)$.

Wahle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$.

$$\overset{\text{Satz 25}}{\Longrightarrow} \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} \overset{(*)}{(} \underbrace{a}_{\sigma(1)} \underbrace{b}_{\sigma(2)} \underbrace{c}_{\sigma(3)})$$

Aber $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist unklar $+1, -1$?

Beachte: $(*)$ gilt auch für $\sigma(4\ 5)$ und: entweder gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ oder $\operatorname{sgn}(\sigma(4\ 5)) = 1 \implies (1\ 2\ 3) \in A_n$ konjugiert zu $(a\ b\ c)$

Für $C_{2,2}$: zu zeigen $(a\ b)(c\ d)$ A_n-konjugiert zu $(1\ 2)(3\ 4)$ für $\{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ 4-elementig.

Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c, \sigma(4) = d$

$$\implies \sigma(1\ 2)(3\ 4)\sigma^{-1} \overset{(**)}{=} (a\ b)(c\ d)$$

und $(*)$ gilt auch für $\sigma(1\ 2)$ ... etc. (Schließe wie für C_3.)

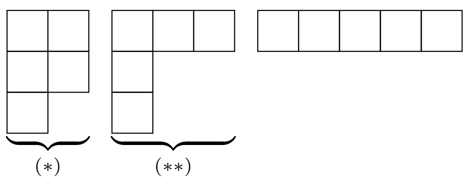
$\square$

Definition 2.28 (Einfache Gruppe). Eine Gruppe G heißt **einfach** $\iff$ $\{e\}$ und G sind die einzigen Normalteiler von G. (d.h. G hat keine nicht-trivialen Normalteiler)

Satz 2.29. *Für $n \geq 5$ ist A_n einfach.*

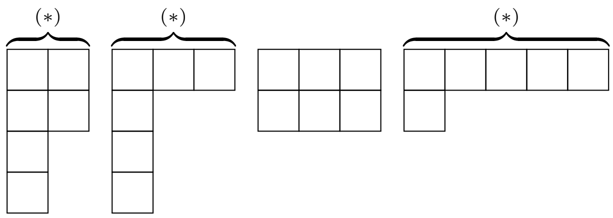
Beweis. Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein Normalteiler und $\{e\} \subsetneq N$ und sei $\sigma \in N \setminus \{e\}$.

- $n = 5$:



$(*)$ Doppeltranspositionen bilden A_5-Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls Doppeltranspositionen in N, so folgt $N = A_5$.
$(**)$ 3-Zykel bilden A_5-Konjugationsklasse und erzeugen A_5 (Lemma 27). Falls σ ein $3 - Zykel \implies N = A_5$.
Gelte σ = 5-Zykel = $(a\ b\ c\ d\ e)$. Nun: $N \ni \underbrace{(a\ b\ c)\sigma(a\ b\ c)^{-1}}_{\in N} \underbrace{\sigma}_{\in N} \overset{\text{Übung}}{=}$
$(a\ b\ d)$ 3-Zykel

- $n = 6$: möglichen Youngdiagramme: (zu $\sigma \in A_6 \setminus \{e\}$)



  (∗) wurden schon im A_5-Fall erklärt.

  Sei also $\sigma^2 = (a\,b\,c)(d\,e\,f) \in N$, mit $\{a, \dots f\} = \{1, \dots, 6\}$. Sei $\tau = (a\,b\,c)$, berechne $\tau(\sigma)(\tau^{-1})$ (Satz 25)

$$\underbrace{\underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma}_{\in N}}_{\in N} = (b\ d\ c)(a\ e\ f)(a\ c\ b)(e\ d\ f) \overset{\text{Übung}}{=} (a\ b\ e\ c\ d) \in 5 - \text{Zykel}$$
$$f \longleftarrow f \longleftarrow \quad e \longleftarrow e \longleftarrow f$$

  wurde schon bei $n = 5$ geklärt.

- $n \geq 6$: o.E. (Permutation von $1, ..., n$) $\sigma(1) \neq 1$ Wähle $\{j, k\} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, \sigma(1)\}$. Sei $\tau := (\sigma(1)\ j\ k) \implies \sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1} \in N$ Dann:

  (i) $\varphi := \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N$

  (ii) $\varphi(\sigma(n)) = \tau\sigma\tau^{-1}(1) \underset{1 \notin \mathrm{supp}(\tau^{-1})}{\overset{1 \notin \mathrm{supp}(\tau)}{=}} \tau\sigma(1) = j \neq \sigma(1)$, also $\varphi \neq \mathrm{id}$.

  (iii) $\#\,\mathrm{supp}(\varphi) \leq 6$, denn:

$$\varphi = \underbrace{\tau}_{\text{3-Zykel}} \cdot \underbrace{\sigma \underbrace{\tau^{-1}}_{\text{3-Zykel}} \sigma^{-1}}_{\text{3-Zykel}}$$

  o.E: $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \{1, \dots, 6\} \implies \varphi \in A_6 \setminus \{e\}$

- Fälle $n \leq 6$: Normalteiler, der von φ erzeugt wird enthält 3-Zykel oder Doppeltransposition. Dann fertig wegen Lemma 27. □

Bemerkung. Es gibt eine Klassifikation aller endlich einfachen Gruppen: Liste:

- $\mathbb{Z}/_{(p)}$, p prim
- $A_n, n \geq 5$
- endliche Gruppen vom Lie typ:
  (i) $\mathrm{SL_n}(K)/_{Z(\mathrm{SL_n}(K))}$ bis auf einige kleine $\#K$ sind einfach (endlich falls K endlich).
  (ii) Weitere Untergruppen von $\mathrm{SL_n}$, welche zu “linearen algebraischen Gruppen” korrespondieren.
- 26 weitere.

2.3 Sylow Theoreme

Satz 2.30 (Sylow I, nach Wieland)**.** *Sie G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $\#G$, $k \in \mathbb{N}$ sodass $p^k|\#G$, setze*

$$n_k := \#\{H \leq G \mid \#H = p^k\}$$

Dann gilt:

$$n_k \equiv 1 \mod p$$

Insbesondere ist $n_k \neq 0$, d.h. $\exists H \leq G$ mit $\#H = p^k$.

Übung (Vorbereitung)**.** Sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$, dann:

$$\binom{mp^k}{p^k} = m \cdot u$$

wobei $\mathbb{N} \ni u \equiv 1 \mod p$.

Beweis. (zu 30) Durch Analyse der Wirkung von G auf $X := \{S \subseteq G \mid \#S = p^k\}$ gegeben durch

$$\lambda : G \times X \to X, (g, S) \mapsto g \cdot S = \{g \cdot s \mid s \in S\}$$

(beachte: $\ell_g : h \mapsto g \cdot h$ ist bijektiv $\implies \#gS = \#S = p^k$ d.h. $g \cdot S \in X$) Setze $m := \#^{G}\!/_{p^k}$, für $S \in X$ definiere

$$G_S := \mathrm{Stab}_G(S) = \{g \in G \mid gS = S\}$$

1. $\forall S \in X : \#G_S|p^k$:

   Beachte: G_S wirkt auf S (da $gS = S \forall g \in G_S$) durch Linkstranslation:

   $$G_S \times S \to S, (g, s) \mapsto g \cdot s$$

   Scchreibe S als disjunkte Vereinigung seiner G_S-Bahnen.

   $$S = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,\ell\}} G_S h_i$$

   wobei $h_1, ..., h_\ell$ ein Repräsentantensystem der Bahnen ist.

   Beachte: $r_{h_i} : g \mapsto gh_i$ ist bijektiv. Also folgt $\#G_S h_i = \#G_S$

   $$\implies p^k = \#S = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S h_i = \sum_{i=1}^{\ell} \#G_S = \ell \#G_S$$

   d.h. $\#G_S|p^k$.

2. Sei $X_0 := \{S \in X \mid \#G_S = p^k\}$ und $X_1 := X \setminus X_0$

   Behauptung: $\#X_0 = m \cdot n_k$

   (a) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit $\#H = p^k$, dann:

   $$\{S \in X_0 \mid G_S = H\} = \{Hg \mid g \in G\}$$

   Denn:

- "$\subseteq$": Gelte $G_S = H$, d.h. $H \cdot S = S \implies H \cdot s \subseteq S, \forall s \in S$.
Aber: $\#H \cdot s \underset{r_s \text{ist bij.}}{=} \#H = p^k = \#S \implies H \cdot s = S \implies s$ (ist das gesuchte g)
- "$\supseteq$": Zu zeigen: $\mathrm{Stab}_G(H \cdot s) = H$. Sei $g \in G$.

$$g \in \mathrm{Stab}_G(Hs) \iff gHs = Hs \underset{r_s \text{ist bij.}}{\iff} gH = H \underset{H \leq G}{\iff} g \in H$$

(b)

$$X_0 = \bigsqcup_{H \leq G, \#H = p^k} \{S \in X \mid G_S = H\} \overset{(a)}{=} \bigsqcup_{H \leq G, \#H = p^k} \{Hg \mid g \in G\}$$

$$\#X_0 = \sum_{H \leq G, \#H = p^k} \# \underbrace{\{Hg \mid g \in G\}}_{= H \backslash G} \overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\#G}{\#H} = \frac{\#G}{p^k} = m$$

$$= m \left(\sum_{H \leq G, \#H = p^k} 1 \right) = m \cdot n_k$$

3. $pm | \#X_1$

(a) G wirkt auf X_1 (durch $(g, S) \mapsto gS$)
d.h. gilt $S \in X_1$ und $g \in G$, so auch $gS \in X_1$. Es genügt also zu zeigen: $\#G_{gS} = \#G_S$
Dazu:

$$G_{gS} = \mathrm{Stab}_G(gS) = g \,\mathrm{Stab}_G(S) g^{-1} = g G_S g^{-1} \underset{\text{ist Gruppenisom.}}{\overset{\text{Konj. mit } g}{\cong}} G_S.$$

(b) Betrachte nun G-Bahn durch $S \in X_1$, Behauptung: $\#G{\cdot}S$ ist Vielfaches von $p \cdot m$
Dazu: Bahngleichung:

$$\#G \cdot S = {}^{\#G}\!/_{\#G_S} = {}^{mp^k}\!/_{\#G_S}$$

da $\#G_S$ echter Teiler von p^k, also Teiler von $p^{k-1} \implies \#GS$ ist Vielfaches von ${}^{mp^k}\!/_{p^{k-1}} = mp$

$$(m \cdot {}^{2^5}\!/_{2^4} = m \cdot 2, \quad m \cdot {}^{2^5}\!/_{2^2} = m \cdot 2^3,)$$

(c) Schreibe nun X_1 als disjunkte Vereinigung seiner Bahnen

$$X_1 = \bigsqcup_{j \in I} G \cdot \underbrace{S_j}_{\text{Bahnrepr.}}$$

und $\#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot a_j, a_j \in \mathbb{N}$

$$\implies \#X_1 = \sum_{j \in J} \#G \cdot S_j = m \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{j \in J} a_j}_{=: N \in \mathbb{N}}$$

4. $\#X = \#X_0 + \#X_1 = m \cdot n_k + m \cdot p \cdot N = m(n_k + pN)$
   gleichzeitig:

$$\#X = \#\{S \subseteq G \mid \#S = p^k\} \underset{\#G = m \cdot p^k}{=} \binom{m \cdot p^k}{p^k} \underset{\text{Übung}}{=} m \cdot u$$

   für ein $u \in \mathbb{N} : u \equiv 1 \mod p$.

$$\implies m(n_k + pN) = n \cdot u \implies n_k + pN = u \underset{\text{mod } p_k}{n} \equiv u \equiv 1 \quad \text{mod } p. \quad \square$$

Korollar 2.31 (**Satz von Cauchy**). *Sei G eine endliche Gruppe mit $p|\#G$ für p eine Primzahl, dann $\exists g \in G : \mathrm{ord}(g) = p$*

Beweis. Nach Sylow I $\exists H \leq G : \#H = p$, sei $g \in H \setminus \{e\}$. Dann gilt $\mathrm{ord}(g) = p$. ($\mathrm{ord}(g) \neq 1$ und $\mathrm{ord}(g)|\#G = p$). $\square$

Definition 2.32 (**p-Sylow Gruppe**). Sei G endlich, gelte $\#G = p^f \cdot m$ für $m, f \in \mathbb{N}$ sodass $p \not| m$. Eine Untergruppe $H \leq G$ mit $\#H = p^f$ heißt p-Sylow (Unter-)Gruppe von G, schreiben

$$\mathrm{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid H \text{ ist } p - \text{Sylow}\}$$

$$\mathrm{syl}_p(G) = \#\mathrm{Syl}_p(G)$$

Definition 2.33 (**Normalisator**). Der Normalisator einer Untergruppe $H \leq G$ ist

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

(c_g ist Automorphismus $\implies \#gHg^{-1} = \#H, \forall g \in G$)

Interpretation. Sei $X := \{H \mid H \leq G\}$, X ist eine G-Menge durch Konjugation $c : G \times X \to X, (g, H) \mapsto gHg^{-1}$

Proposition 2.34 (Übung). *(a) $N_G(H) \underset{\text{für } H \leq G}{=} \mathrm{Stab}_G(H)$*

(Insbesondere ist $N_G(H) \leq G$ eine Untergruppe.)

(b) Es gelten: $H \trianglelefteq N_G(H)$ und $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe von G, sodass H ein Normalteiler in dieser ist.

Lemma 2.35. *Sei $H \leq G$ eine p-Gruppe, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (p eine Primzahl), dann:*

(a) Gilt $P \leq H$, so folgt $P = H$.

(b) Ist $H \leq N_G(P)$, so gilt $H \leq P$.

(c) Gilt $H \nsubseteq P$, so folgt $\mathrm{Stab}_H(P) < H$ (ist echte Untergruppe)

Beweis. (a) Schreibe $\#G = p^f \cdot m$, so dass $p \not| m$ ($m, f \in \mathbb{N}$), P p-Sylow Untergruppe $\implies \#P = p^f$.

H eine p-Gruppe in $G \underset{\text{Lagrange}}{\implies} \#H|p^f \cdot m$. also $\#H|p^f$

Nun: $P \subseteq H$ und $p^f = \#P \geq \#H \implies P = H$ (und $\#H = p^f$)

(b) Sei $G' = N_G(P)$. Aus Proposition

$$\implies P \trianglelefteq G' \underset{\text{Voraussetzung}}{\overset{\text{Nach}}{\implies}} H \leq G' \underset{\text{Isomorphiesatz}}{\overset{\text{Erster}}{\implies}} P \trianglelefteq P \cdot H$$

und

$$(P \cdot H)/P \cong H/P \cap H$$

Ordnung ist p-Potenz, evtl p^f

$$\underset{\text{Lagrange}}{\implies} \#P \cdot H = \underbrace{\#P}_{p\text{-Potenz}} \cdot \underbrace{\# P \cdot H/P}_{p\text{-Potenz}}$$

Also ist $P \cdot H$ eine p-Gruppe mit $P \subseteq PH$

$$\underset{(a)}{\implies} PH = P \underset{eH \subseteq P}{\implies} H \subseteq P$$

(c) Gelte $H \nsubseteq P$. zu zeigen: $\mathrm{Stab}_H(P) < H$

Angenommen: $H = \mathrm{Stab}_H(P) = \underbrace{\{h \in H \mid hPh^{-1} = P\}}_{=H \cap \mathrm{Stab}_G(P)} = H \cap N_G(P)$

Dann folgt

$$H \subseteq N_G(P) \underset{(b)}{\implies} H \subseteq G. \qquad \square$$

Satz 2.36 (Sylow II). *Sei G endlich, p ein Primteiler von $\#G$. Dnan:*

(a) Je 2 p-Sylow Gruppen von G sind kunjugiert.

(b) Jede p-Gruppe H mit $H \leq G$ liegt in einer p-Sylow Gruppe von G.

(c) $\forall P \in \mathrm{Syl}_p(G) : \mathrm{syl}_p(G) = [G : N_G(P)]$ und insbesondere $(P \leq N_G(P))$ gilt $\mathrm{syl}_p(G) | [G : P]$

Beweis. (a) $X := \mathrm{Syl}_p(G)$ ist G-Menge via Konjugation ($P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $g \in G \implies \#gPg^{-1} = \#P \implies gPg^{-1} \in \mathrm{Syl}_p(G)$)

Zu zeigen: G wirkt transitiv auf X.

Annahme: X besteht aus $t \geq 2$ Bahnen, also

$$X = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,t\}} G \circ P_i$$

für geeignete Repräsentantensystem $P_1, ..., P_t \in \mathrm{Syl}_p(G)$ $(g \circ P = gPg^{-1})$

Behauptung: $p | \#G \circ P_i, \forall i \in \{1, \dots, t\}$.

Dazu: Wähle $j \neq i$ betrachte die P_j-Wirkung auf $G \circ P_i$. Schreibe wieder $G \circ P_i$ als disjunkte Vereinigung von P_j-Bahnen:

$$G \circ P_i = P_j \circ Q_1 \sqcup \dots \sqcup P_j \circ Q_s \quad (*)$$

($s \in \mathbb{N}$ geeignet, $Q_\ell \in \mathrm{Syl}_p(G)$ geeignet)

Bahngleichung:

$$\#P_j \circ Q_\ell = \#P_j / \# \mathrm{Stab}_{P_j}(Q_\ell)$$

beachte: $P_j \notin G \circ P_i$, d.h. $P_j \neq Q_\ell$

$\underset{35(c)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Stab}_{P_j}(Q_\ell) < P_j \implies \# P_j \circ Q_\ell \neq 1$ und teilt $\# P_j \implies p | \# P_j \circ Q_\ell$

$\implies p$ alle Bahnlängen in $(*)$ von $G \circ P$ als P_j-Menge $\implies p | \# G \circ P_i, \forall i \implies p | \# \mathrm{Syl}_p(G)$

$$\implies \mathrm{Syl}_p(G) = \bigsqcup_{i \in \{1,\dots,t\}} G \circ P_i$$

Widerspruch zu (0): $\mathrm{syl}_p(G) \equiv 1 \mod p$.

(b) Annahme: $H \leq G$ eine p-Gruppe liegt in keiner p-Sylow. Betrachte Konjugationswirkung von H auf $X = \mathrm{Syl}_p(G)$. Schreibe

$$X = H \circ R_1 \sqcup \dots \sqcup H \circ R_w$$

($w \in \mathbb{N}$) die R_i sind Repräsentanten der Bahnen. Beachte $H \nsubseteq R_i$ ($i \in \{1, \dots, w\}$). Wie in (a) gilt $\mathrm{Stab}_H(R_i) < H$ also, dass $p | \# H \circ R_i, \forall i \implies p | \# X$ Widerspruch zu (0).

(c) Bahngleichung für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (Verwenden (a), d.h. $G \circ P = \mathrm{Syl}_p(G)$)

$$\mathrm{syl}_p(G) = \# \mathrm{Syl}_p(G) = {}^{\# G}\!/_{\# \mathrm{Stab}_G(P)} : {}^{\# G}\!/_{\# N_G(P)} = [G : N_G(P)]$$

($\mathrm{syl}_p(G)$ teilt $[G : P]$ schon oben eingesehen, da $P \leq N_G(P)$)

□

Korollar 2.37. *Sei G endlich und p ein Primteiler von $\# G$, dann* $\mathrm{syl}_p(G) = 1 \iff$ *jede p-Sylow ist ein Nullteiler in G.*

Beweis. Für $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ gilt:

$$P \trianglelefteq G \iff N_G(P) = G \underset{36(c)}{\iff} \mathrm{syl}_p(G) = [G : N_p(G)] = 1.$$ □

Korollar 2.38. *Sei G endlich, seien $p_1, \dots, p_t$ die paarweise verschiedenen Primteiler von $\# G$. Sei $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$. Dann gilt: sind $P_1, \dots, P_t$ Normalteiler von G, so folgt: die Abbildung $P_1 \times \dots \times P_t \to G, (g_1, \dots, g_t) \mapsto g_1 \cdot \ldots \cdot g_t$ ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. $P_i \trianglelefteq G$ für $i \in \{1, \dots, t\}$
und $\mathrm{ggT}(\# P_i, \# P_j) \underset{i \neq j}{=} 1$ (p_i, p_j versch. Primzahlen) und $\prod_{i=1}^t \# P_i = \# G$
$\underset{\text{Kor. 1.55}}{\Longrightarrow}$ die angegebene Abbildung ist ein Gruppenisomorphismus. □

Beispiel. Ist G abelsch, so sind alle Untergruppen Normalteiler.

Korollar 2.39. *G endlich abelsch und p_i und P_i wie in Korollar 38. So gilt: $\bigtimes_{i=1}^t P_i \xrightarrow{\text{wie in Kor. 38}} G$ ist Gruppenisomorphismus. (P_i sind abelsche p_i-Gruppen).*

Satz 2.40. *Sei G eine endliche abelsche p-Gruppe, dann $\exists! t \in \mathbb{N}, \exists! e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_t \in \mathbb{N}$, sodass*

$$G \cong \bigtimes_{i=1}^t {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^{e_i}}$$

Beispiel. G abelsch mit $\operatorname{ord}(G) = 105 \implies G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Wiederholung. G heißt einfach $\iff$ einzige Nullteiler von G sind $\{e\}$ und G.

Lemma 2.41 (Übung). *sei G endlich, $\#G = p^f \cdot m$ mit $f, m \in \mathbb{N}, p$ Primzahl und $p \nmid m$. Dann: $p^f \nmid (m-1)! \implies G$ ist nicht einfach.*

Beweis. Idee: Sei $P \in Syl_p(G)$, betrachte G-Wirkung auf G/P durch Linkstranslation, d.h.

$$\rho : G \to \operatorname{Bij}(G/P), g \mapsto \ell g$$

Trick: Kern(ρ) ist der gesuchte Normalteiler. □

Satz 2.42. *Ist G einfache Gruppe mit $\#G < 60$, so gilt $G \cong \mathbb{Z}/p$ für p eine Primzahl.*

Beweis. Sei G einfach mit $\#G < 60$. o.E. $\#G$ keine Primzahl, sonst fertig. o.E. G ist keine p-Gruppe für Primzahl p. (sonst: $Z(G) \supsetneq \{e\} \overset{G \text{ einfach}}{\underset{Z(G) \trianglelefteq G}{\Longrightarrow}} G = Z(G)$, d.h. G abelsch. $\underset{G \text{ einfach}}{\Longrightarrow} G \cong \mathbb{Z}/p$)

Fall $\# = p^f m$ mit $p^f \nmid (n-1)! \implies G$ nicht einfach (Lemma 41)

(Übung)Es bleiben $\#G \in \{\underbrace{30}_{2\cdot 3\cdot 5}, \underbrace{40}_{2^3\cdot 5}, \underbrace{56}_{2^3\cdot 7}\}$

Fall 1: $\#G = 2^3 \cdot 5$, dann: $Syl_5(G) \cong 1(5)$ (Sylow I)

$Syl_5(G)$ teilt $\#G/5 = 8$ (Sylow II)

Teiler von $8 : 1, 2, 4, 8$ Kongruenz erzwingt $Syl_5(G) = 1 \underset{37}{\Longrightarrow}$ die einzige 5-Sylow Untergruppe von G ist ein Normalteiler (Widerspruch zu G einfach)

Fall 2: $\#G = 2^3 \cdot 7$, dann (Shritte wie im Fall 1 für $p = 7$)

$$Syl_7(G) \in \{1, 8\}$$

(teilt 8, $\cong 1 \mod 7$)

Fall: Es gibt 8 7-Sylow Untergruppen, isomorph zu $\mathbb{Z}/7$

Beachte: 2 7-Sylow's schneiden sich nur in $\{e\}$ (sonst sinid sie gleich, Elemente $\neq e$ sind Erzeuer)

$\implies$ es gibt $8 \cdot 6$ Elemente in G der Ordnung 7

$\implies$ Es gibt $56 - 48 = 8$ Elemente in G der Ordnung $\neq 7$

Aber: Es gibt (mindestens) eine 2-Sylow Untergruppe von G und die hat Ordnung $8 = 2^3$.

Es folgt: Die 8 obigen Elemente bilden die einzig mögliche 2-Sylow Untergruppe von G.

$\implies Syl_2(G) = 1 \implies$ die 2-Sylow ist ein nicht triviale Normalteiler von G.

Fall 3 (Übung) □

Bemerkung. Die Zahl 60 ist optimal, denn A_5 ist einfach, nicht zyklisch (von Primzahlordnung) und hat 60 Elemente.

2.4 Auflösbare Gruppen

Definition 2.43.

(a) Eine aufsteigende Folge von Untergruppen

$$\{e\} = G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_t = G$$

von G heißt Normalreihe (von G), wenn $\forall i \in \{1, \ldots, t\} : G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ ist Normalteiler.

Schreibe auch $(G_i)_{i=0}^t$ oder $\mathscr{G}$ für die Folge.

(b) die Faktorgruppe $\left({G_i}/{G_{i-1}}\right)_{i=1}^t$ heißen Faktoren der Normalreihe.

(c) Eine Normalreihe $\mathscr{G}$ heißt Zerlegungsreihe $\iff$ alle Faktoren sind einfach.

(d) $\mathscr{G}$ heißt abelsch $\iff$ alle Faktoren sind abelsch.

(e) G heißt auflösbar $\iff$ G besitzt eine abelsche Normalreihe.

(f) Ist $\mathscr{G}' : \{e\} = G'_0 < G'_1 < \cdots < G'_{t'} = G$ eine weitere Normalreihe, so heißt $\mathscr{G}'$ (echt) feiner als $\mathscr{G}$ $\iff$

$$\underbrace{\{G_i \mid i \in \{0, ..., t\}\}}_{\text{von } \mathscr{G}} \subsetneq \underbrace{\{G'_j \mid j \in \{0, ..., t'\}\}}_{\text{von } \mathscr{G}'}$$

Beispiel.

$$\overbrace{S_4}^{G_4} \triangleright \overbrace{A_4}^{G_3} \triangleright \underbrace{\overbrace{V}^{G_2}}_{\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}} \triangleright \overbrace{\{e, (1\ 2)(3\ 4)\}}^{G_1} \triangleright \overbrace{\{e\}}^{G_0}$$

ist eine Zerlegungsreihe mit den Faktoren:

i	4	3	2	1
${G_i}/{G_{i-1}}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$

Insbesondere ist $\mathscr{G}$ abelsch (und S_4 ist auflösbar). Beachte: $G_1 \triangleleft G_2$ ist Normalteiler $G_1 \triangleleft G_3$ (Übung)

Proposition 2.44. *Sei $\mathscr{G} : \{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_t = G$ eine Normalereihe, dann:*

(a) $\mathscr{G}$ ist eine Zerlegungsreihe $\iff$ $\mathscr{G}$ besitzt keine echte Verfeinerung.

(b) Es gilt $2^t \leq \#G$

(c) Ist G endlich, so besitzt $\mathscr{G}$ eine Verfeinerung, die eine Zerlegungsreihe ist.

(d) Ist $\mathscr{G}$ abelsch, so ist auch die Verfeinerung abelsch.

Beweis. (a) G ist keine Zerlegungsreihe

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : G_i/G_{i-1}$ nicht einfach

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : \overline{H} \trianglelefteq G_i/G_{i-1}$ mit $\overline{H} \neq \{e\}, \overline{H} \subsetneq G_i/G_{i-1}$

$\overset{\text{2. Isometriesatz}}{\iff} \exists i \in \{1,\dots,t\} : \exists H \triangleleft G_i$ mit $G_{i-1} \triangleleft H$

$\iff \exists i \in \{1,\dots,t\} : \mathscr{G}$ kann zwischen G_{i-1} und G_i echt verfeinert werden

$\iff \mathscr{G}$ besitzt eine echte Verfeinerung.

(b) Lagrange: (Für $H \leq G : \#G = \#H \cdot \# G/H$)

$$\#G = \#G_t = \#G_{t-1} \cdot \# G_t/G_{t-1}$$

$$= \#G_{t-2} \cdot \# G_{t-1}/G_{t-2} \cdot \# G_t/G_{t-1} = \dots = \prod_{i=1}^{t} \# \underbrace{G_i/G_{i-1}}_{\substack{\text{nichttriviale}\\ \text{endliche Gruppe}}} \geq 2^t$$

$$\implies t \leq \log_2 \#G$$

(c) Sei $\mathscr{G}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{G}$, maximaler Länge t'. Das gibt es, da $t' \leq \log_2 \#G$. Dieses $\mathscr{G}'$ kann nicht echt verweinert werden (t' maximal!)

$\implies \mathscr{G}'$ ist Zerlegungsreihe, die $\mathscr{G}$ verfeinert.

(d) Sei $\mathscr{G}$ abelsch und $\mathscr{G}'$ eine Verfeinerung von $\mathscr{G}$, z.z. $\mathscr{G}'$ ist abelsch.

$$(\mathscr{G}' : \quad G'_0 = \{e\} \triangleleft G'_1 \triangleleft G'_2 \triangleleft \dots \triangleleft G'_{t'} = G)$$

Sei $j \in \{1,\dots,t'\}$, z.z. G'_j/G'_{j-1} ist abelsch. Finde zu $j, j-1$ ein $i \in \{1,\dots,t\}$, sodass

$$\begin{array}{cccccc}
G & \cdots & G_{i-1} & \triangleleft & G_i & \cdots \\
 & & \parallel & & \parallel & \\
 & & G'_\ell \leq & G'_{j-1} \triangleleft G_{j'} & \leq G'_m &
\end{array}$$

Wir wissen: $G_i/G_{i-1} = G'_m/G'_\ell$ ist eine abelsche Gruppe, wir wissen auch:

$$G'_\ell/G'_\ell \leq G'_{j-1}/G_\ell \leq G'_j/G_\ell \leq G'_m/G'_\ell$$

(2. Isomorphiesatz für $G'_m \to G'_m/G_\ell$) Beachte: G'_m/G'_ℓ ist abelsch $\implies$ $G'_{j-1}/G'_\ell, G'_j/G'_\ell$ sind abelsch, und (2. Isomorphiesatz)

$$G'_j/G'_{j-1} \cong \underbrace{\left(G'_j/G'_\ell\right)}_{\text{abelsch}} \Big/ \left(G'_{j-1}/G'_\ell\right) \implies G'_j/G'_{j-1} \text{ abelsch.} \qquad \square$$

Satz 2.45 (Satz von Jordan-Hölder). *Ist G endlich, so ist die Folge der Faktoren einer Zerlegungsreihe $\mathscr{G}$ von G bis auf Reihenfolge der Faktoren unabhängig von der Wahl der Zerlegungsreihe von G.*

Beweis. Siehe Jantzen Schwermer Satz II. 2.4 oder Jacobson §4.6 □

Korollar 2.46. *Sei G endlich, dann ist G auflösbar $\iff$ die Faktoren jeder Zerlegungsreihe sind abelsch und von Primzahlordnung.*

Beweis.
" $\implies$ ": Sei $\mathscr{G}$ eine abelsche Normalreihe $\underset{\text{Prop. 44}}{\implies}$ $\exists$ Zerlegungsreihe $\mathscr{G}'$ die $\mathscr{G}$ verfeinert, diese ist dann (stets) wieder abelsch. Ihre Faktoren sind einfach und ablesch (und endliche Gruppen), also zyklisch von Primzahlordnung. Wende nun Jordan-Hölder an.

" $\impliedby$ ": Hat man $\mathscr{G}$ wie angegeben (zu G), so ist $\mathscr{G}$ abelsch, also G auflösbar. □

Beispiel 2.47. Sei G eine p-Gruppe $\implies$ G ist auflösbar

Beweis. Sei $\mathscr{G}$ eine Zerlegungsreihe von G, dann sind die Faktoren H_i einfache p-Gruppen. Wir wissen, dass $Z(H_i) \supsetneq \{e\}$ nicht-trivial ist.

$$\overset{H_i \text{ einfach}}{\underset{Z(H_i) \trianglelefteq H_i}{\implies}} H_i = Z(H_i)$$

Da $Z(H_i)$ eine einfache abelsche p-Gruppe ist folgt $\mathscr{G}$ ist eine abelsche Normalreihe. Nach dem Satz von Cauchy finde $\mathbb{Z}/p$ als Untergruppe von $H_i \implies H_i$ einfach abelsch ($\mathbb{Z}/p \trianglelefteq H_i$). □

Beispiel 2.48. Gilt $\#G < 60$, so ist G auflösbar.

Beweis. Sei $\mathscr{G}$ eine Zerlegungsreihe mit einfachen Faktoren H_i mit $\#H_i < 60$. Nach Satz 42 sind H_i sind zyklisch von Primzahlordnung $\implies$ G auflösbar. □

Proposition 2.49 (übung)**.** *Sei G endlich, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe, dann:*

(a) G auflösbar $\iff$ N und G/N sind auflösbar.

(b) G auflösbar $\implies$ H auflösbar.

Wiederholung. Die Kommutatoruntergruppe von G ist

$$[G,G] = \langle [g,h] := ghg^{-1}h^{-1} \mid g,h \in G \rangle$$

Eigenschaften:

(a) $[G,H] \trianglelefteq G$

(b) $G/[G,G]$ ist abelsch

(c) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit G/N abelsch, so gilt $[G,G] \leq N$ ist Untergruppe.

(d) $H \leq G$ Untergruppe $\implies$ $[H,H] \leq [G,G]$ nach Definition.

(e) $\pi : G \to G'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, dann:

$$\pi([G,G]) = [G',G']$$

Denn:

Beweisskizze.

$\pi(\{[g,h] \mid g,h \in G\}) = \{[\pi(g),\pi(h)] \mid g,h \in G\} \underset{\pi \text{surj.}}{=} \{[g',h'] \mid g',h' \in G'\} \cdots$ □

Definition 2.50 (**Abgeleitete Reihe**)**.** Die abgeleitete Reihe von G ist definiert als die Folge

$$D^0(G) \geq D^1(G) \geq D^2(G) \geq \cdots$$

mit $D^0(G) := G$ und $D^{i+1}(G) := [D^i, D^i(G)]$ für $i \geq 0$

Bemerkung 2.51.

(a) Gilt $D^{i+1}(G) = D^i(G)$, so folgt $D^n(G) = D^i(G), \forall n \geq i$

(b) Nach Wiederholung (a) folgt: $D^i(G) \trianglelefteq D^{i-1}(G), \forall i \geq 1$. Es gilt sogar: (Übung 3) $D^i(G) \trianglelefteq G, \forall i \geq 0$

(c) $H \leq G \underset{\text{von Whg.}}{\overset{\text{vgl (d)}}{\Longrightarrow}} D^i(H) \leq D^i(G) \cap H$ (induktiv)

(d) $\pi : G \to G'$ surjektiv $\underset{\text{zu (e) Whg.}}{\overset{\text{Übung, Induktion}}{\Longrightarrow}} \pi(D^i(G)) = D^i(G')$

Satz 2.52 (**Auflösbarkeitskriterium**)**.** *Sei G endlich, dann ist G aufl¨* $\iff$ $\exists i : D^i(G) = \{e\}$.

Beweis.

"$\Longrightarrow$": Sei $G = G_t \triangleright G_{t-1} \triangleright G_{t-2} \triangleright \cdots \triangleright G_1 \triangleright G_0 = \{e\}$ eine abelsche Normalreihe. Dann folgt aus Wiederholung (c)

$$\forall i : [G_i, G_i] \leq G_{i-1} \quad (\text{da } {}^{G_i}\!/_{G_{i-1}} \text{ abelsch})$$

$$\Longrightarrow D^1(G) \leq G_{t-1} \Longrightarrow D^2(G) \leq D^1(G_{t-1}) \leq G_{t-2} \text{ etc.}$$

$$\underset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} D^t(G) = \{e\} \quad (D^i(G) \leq G_{t-i}, \forall i \in \{0,\dots,t\})$$

"$\Longleftarrow$": Trivial. Sei $t \geq 0$ minimal mit $D^t(G) = \{e\}$, dann gilt

$$G = D^0(G) \triangleright D^1(G) \triangleright D^2(G) \triangleright \cdots \triangleright D^{t-1}(G) \triangleright D^t(G) = \{e\}$$

(echte Normalteiler wegen Sylow I (a) und t minimal.) ist eine Normalreihe, Faktoren sind abelsch nach Definition der abgeleiteten Reihe (da ${}^{H}\!/_{[H,H]}$ abelsch). □

Beispiel 2.53.

(a) G abelsch $\Longrightarrow D^1(G) = \{e\}$

(b) (Übung) $D^1(D_n) \leq C_n$, wobei D_n die Diedergruppe bezeichnet.

(c) (Übung) Für $n \geq 5$ gezeigt $D^1(A_n) = A_n \implies A_n$ nicht auflösbar. (Wissen auch A_n ist einfach und nicht abelsch $\implies A_n$ ist nicht auflösbar.)

Definition 2.54 (**Perfekte Gruppe**)**.** Eine Gruppe G heißt perfekt $\iff G = [G, G] = G^1(G)$. Damit (Übung) ist A_n perfekt für $n \geq 5$.

Bemerkung (ohne Beweis)**.** $\mathrm{SL_n}(K)$ ist perfekt, falls $\#K \notin \{2, 3\}$

Kapitel 3

Ringe

3.1 Ringe

Wiederholung. $(R, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein **Ring** $\iff$ $(R, 0, +)$ ist eine Gruppe, $(R, 1, \cdot)$ ist ein Monoid und es gelten die Distributivgesetze.

$$R^\times = \{r \in R \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$$

ist die Einheitengruppe von R

Beispiel. (Übung) $\mathbb{Z}_n^\times = \{\overline{a} \mid \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}$, wobei $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(n)$

Definition 3.1 (Ringhomomorphismus). Seien R, R' Ringe, eine Abbildung $\varphi : R \to R'$ heißt Ringhomomorphismus wenn:

- $\varphi : (R, 0, +) \to (R', 0', +')$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- $\varphi : (R, 1, \cdot) \to (R', 1', \cdot')$ ist ein Monoidhomomorphismus.

φ ist ein Ringisomorphismus $\iff$ φ ist bijektiver Ringhomomorphismus $\underset{\text{Übung}}{\iff}$ $\exists \varphi' : R' \xrightarrow{\text{Ringhom.}} R$, sodass $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{R'}$ und $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_R$. In diesem Fall schreibe $R \cong R'$ (R isomorph zu R').

Beispiel. R heißt Nullring $\iff$ $0_R = 1_R$ $\underset{\text{Übung}}{\iff}$ $R = \{0_R\}$ (alle Nullringe sind isomorph.)

Beispiel. (Übung) Sei R beliebig $\implies$ $\exists!$ Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ nämlich

$$\varphi : \mathbb{Z} \to R, n \mapsto \varphi(n) = n \cdot 1_R$$

(wegen $\varphi(1) = 1_R$)

Definition 3.2 (Unterring). $S \subseteq R$ heißt Unterring, falls

- $1 \in S$
- $S - S = \{s_1 - s_2 \mid s_1, s_2 \in S\} \subseteq S$

- $S + S = \{s_1 + s_2 \mid s_1, s_2 \in S\} \subseteq S$

Definition (**Produkt von Ringen**)**.** Seien R_1, R_2 Ringe, dann ist $(R_1 \times R_2, (0,0), (1,1), +, \cdot)$ ein Ring mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

$$+ : (R_1 \times R_2)^2 \to R_1 \times R_2, (r_1, r_2) + (s_1, s_2) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$$

$$\cdot : (R_1 \times R_2)^2 \to R_1 \times R_2, (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) = (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2)$$

Bemerkung (Übung)**.**

(a) Sei R ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein Unterring, dann ist S kommutativ.

(b) Seien R_1, R_2 kommutative Ringe, so ist auch $R_1 \times R_2$ kommutativ.

Wiederholung. Seien I, X Mengen. Eine Folge/Familie in X über (Indexmenge) I, geschrieben $(x_i)_{i \in I}$ ist eine Abbildung $x : I \to X, i \mapsto x - I$. Schreibe X^I für die Menge aller Folgen in X über I $(= \mathrm{Abb}(I, X))$

Beispiel 3.3 (**Monoidring**)**.** Sei $R = (R, 0, 1, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $M = (M, e, \circ)$ ein Monoid. Definiere

(i) $R[M] := \{(a_m)_{m \in M} \in R^M \mid (E) : \#\{m \in M : a_m \neq 0\} < \infty\}$

(ii) $\underline{0} =$ die Abbildung $M \to \{0\} \subseteq R$

(iii) $\underline{1} =$ die Folge $(S_{em})_{m \in M}$ mit $S_{em} = \begin{cases} 1, & m = e, \\ 0, & m \neq e. \end{cases}$

(iv) Verknüpfungen $+, \cdot : R[M] \times R[M] \to R[M]$ durch:

$$(a_m)_{m \in M} + (b_m)_{m \in M} := (a_m + b_m)_{m \in M}$$

und

$$(a_m)_{m \in M} \cdot (b_m)_{m \in M} := (c_m)_{m \in M}$$

mit (Übung)

$$c_m := \sum_{\substack{(m', m'') \in M \times M \\ m' \cdot m'' = m}} a_{m'} \cdot b_{m''}$$

die Summe ist endlich wegen (E) und wegen (E) gilt: $\#\{m \mid c_{m \neq 0}\} < \infty$

Notation.

$$\sum_{m \in M} a_m \cdot m \text{ für } (a_m)_{m \in M} \in R[M]$$

Übung 3.4.

(a) $(R[M], \underline{0}, \underline{1}, +, \cdot)$ ist ein Ring, ($R[M]$ heißt **Monoidring** zu M über R)

(b) Ist M abelsch, so ist $R[M]$ kommutativ.

(c) Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\sigma : M \to (S, 1, \cdot)$ ein Monoidhomomorphismus, so $\exists!$ Ringhomomorphismus $\psi : R[M] \to S$ mit $\psi|_R = \varphi$ und $\psi_M = \sigma$. (dabei wir identifizieren R mit $R \cdot e = R \cdot 1$ (1-Folge) und M mit $1_R \cdot M$), nämlich:

$$\underbrace{\psi\left(\sum a_m \cdot m\right)}_{\text{in } R[M]} = \underbrace{\sum \varphi(a_m) \cdot \sigma(m)}_{\text{in } S}$$

Konveniton. Ab nun seien alle Ringe R, R', S, R_i kommutativ, (und es Seien in §3 stets Ringe)

3.2 Polynomringe

Beispiel 3.5. Die folgenden Strukturen sind abelsche Monoide:

(i) $(\mathbb{N}_0, 0, +) = \mathbb{N}_0$

(ii) $(\mathbb{N}_0^n, (0, ..., 0), +) = \bigtimes_{i \in \{1,...,n\}} \mathbb{N}_0$ (Komponentenweise Addition)

(iii) Für I eine beliebige Menge: $(\mathbb{N}_0^{(I)}, \underline{0}, \underline{+})$ mit

$$\mathbb{N}_0^{(I)} = \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}_0 \text{ Folgen über } I \mid \#\{i \in I : a_i \neq 0\} < \infty\}$$

$\underline{0} =$ 0-Folge und $\underline{+}$ komponentenweise Addition in $\mathbb{N}_0^{(I)}$.

Facts 3.6 (Übung)**.**

(i) $\mathbb{N}_0^n \cong \mathbb{N}_0^{(\{1,...,n\})}, (a_i)_{i \in \{1,...,n\}} \mapsto (a_i)_{i \in \{1,...,n\}}$

(ii) Für $i \in I$ sei $e_i \in \mathbb{N}_0^{(I)}$ die Folge mit $e_i(j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$

(betrachte $e_i : I \to \mathbb{N}_0$ als Abbildung) Damit ist jede Folge $\underline{a} = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}_0^{(I)}$ eindeutige Linearkombination mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$, nämlich:

$$\underline{a} = \sum_{i \in I} a_i \cdot e_i = \sum_{i \in I, a_i \neq 0} a_i \cdot e_i$$

Beachte: $\mathbb{N}_0^{(I)} \subseteq \mathbb{Q}^{(I)}$ (analog definiert, Folgen in $\mathbb{Q}$ über I) mit Endlichkeitsbedingung (E). Und $(e_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}^{(I)}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Man sagt auch $\mathbb{N}_0^{(I)}$ ist freies abelsches Monoid über der Basis $(e_i)_{i \in I}$.

(iii) Ist M ein abelsches Monoid und $(m_i)_{i \in I}$ eine Folge in M, so $\exists!$ Monoidhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{N}_0^{(I)} \to M, \varphi(e_i) = m_i$$

Wiederholung. $R[X]$ ist der Polynomring über R in Variablen X. Elemente sind $\sum_{n \geq 0} a_n X^n, (a_n \in R)$ nur endlich viele $a_n \neq 0$. $+, \cdot$ auf $R[X]$ sind definiert durch

$$\sum a_i X^i + \sum b_i x^i = \sum (a_i + b_i) X^i$$

$$\left(\sum a_i X^i\right)\left(\sum b_i X^i\right) = \sum_i \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) X^i$$

Proposition 3.7. *Die folgende Abbildung ist ein Ringisomorphismus.*

$$\psi : R[\mathbb{N}_0] \to R[X], \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i i \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i X^i$$

Beweis.

- ψ wohldefiniert und bijektiv:

$$R[\mathbb{N}_0] = \text{ Folgen } (r_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } \#\{i \mid r_i \neq 0\} < \infty$$

$$R[X] = \text{ analog}$$

- Ringstruktur:
  - Addition (Übung)
  - Multiplikation

$$\underbrace{\left(\sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i \cdot i\right)}_{f \in R[\mathbb{N}_0]} \underbrace{\left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} s_j \cdot j\right)}_{g} \underset{\text{Nach Def.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s_k \cdot k, \quad s_k$$

$$= \sum_{0 \leq i,j,i+j=k} r_i s_j = \sum_{j=0}^{k} r_j s_{k-j}$$

$$\implies \psi(f \cdot g) = \psi\left(\sum_k s_k \cdot k\right) = \sum_k g_k X^k$$

$$= \sum_i a_i \cdot \sum_j b_j X^j = \psi(f)\psi(g). \qquad \square$$

Formal: $\{0, 1, \cdots\} \to \{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

Proposition 3.8 (Universelle Eigenschaft von $K[X] \cong R[\mathbb{N}_0]$)**.** $\forall \psi : R \to S$ *Ringhomomorphismen und* $\forall s \in S \exists!$ *Ringhomomorphismus* $\widehat{\psi} : R[X] \to S$ *mit* $\widehat{\psi}|_R = \psi$ *und* $\widehat{\psi}(X) = s$

1. Beweis. Definiere $\widehat{\psi}(\sum_{i \geq 0} r_i X^i) := \sum_{i \geq 0} \underbrace{\psi(r_i)}_{\in S} s^i$. Dann die Behauptung nachprüfen. $\square$

2. Beweis. Facts 6(iii) $\exists!$ Monoidhomomorphismus $\sigma : \mathbb{N}_0 \to (S, 1, \cdot)$ mit $\sigma(1) = s$ und Übung 4(c) (universelle Eigenschaft des Monoidrings) $\exists!$ Ringhomomorphismus $\widehat{\psi} : R[\mathbb{N}_0] \to S$ mit $\widehat{\psi}|_R = \psi$ und $\widehat{\psi}|_{\mathbb{N}_0} = 0$. Dieser erfüllt die Aussagen in Prop 8, denn $\widehat{\psi}(X) = \widehat{\psi}(1) = s$, X entspricht $1 \in \mathbb{N}_0$ (Unter Isomorphismus von Proposition 7). Für $n \geq 1$ Variable: $(n \in \mathbb{N})$

$$R[X_1, \ldots, X_n] := (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n] = \cdots = (\cdots((R[X_1])[X_2]) \cdots)[X_n]$$

$\square$

Satz 3.9. *Sei $\varphi : \mathbb{N}_0^n \to (R[X_1, \dots X_n], 1, \cdot)$ der eindeutige Monoidhomomorphismus mit $\varphi(e_i) = X_i$, wobei $e_i = (\delta_{i,j})_j = (0, \cdots, 1, \cdots 0)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist (nach 4(c) eindeutige) Ringhomomorphismus $\widehat{\psi} : R[\mathbb{N}_0^n] \to R[X_1, \dots, X_n]$ mit $\widehat{\psi}|_R = \mathrm{id}_R$ und $\widehat{\psi}|_{\mathbb{N}_0^n} = \varphi$ ein Ringisomorphismus.*

Beweis. (Übung) Hierbei wird $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ identifiziert (unter $\widehat{\psi}$) mit $X_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{m_n}$ $\square$

Definition 3.10. Der Polynomring in den Variablen $(X_i)_{i \in I}$ (I beliebige Menge) ist definiert als

$$R[X_i \mid i \in I] := R[\mathbb{N}_0^{(I)}]$$

Elemente in diesem Ring sind

$$\sum_{a \in \mathbb{N}_0^{(I)}} r_a \cdot a$$

mit $r_a \in R$ und es gilt $\{a \in \mathbb{N}_0^{(I)} \mid r_a \neq 0\} \leq \infty$.

Notation. Andere Notation: Für $a \in \mathbb{N}_0^{(I)}$ schreibe für a

$$X^a \text{ oder } \prod_{i \in I, a_i \neq 0} X_i^{a_i}$$

Insbesondere ist $X^{e_i} = X_i$, wobei e_i die Folge in $\mathbb{N}_0^{(I)}$ mit $e_i(j) = \delta_{i,j}$ ist.

Monoidaddition $a + b$ entspricht

$$X^a \cdot X^b = X^{a+b}$$

(bilden $a + b$ in $(\mathbb{N}_0^{(I)}, \underline{0}, +)$ und $(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i +_{\mathbb{N}_0} b_i)_{i \in I}$) Also $+$ ist nicht die Addition im Ring.

Definition (Primitive Monomen)**.** Die Elemete in $R[\mathbb{N}_0^{(I)}]$ sind Summen

$$\sum_{a \in \mathbb{N}_0^{(I)}} r_a \cdot X^a$$

(Polynome wie gewohnt.) Die Elemente $X^a, a \in \mathbb{N}_0^{(I)}$ heißen primitive Monome. Jedes Element in $R[X_i \mid i \in I]$ ist eine eindeutige Linearkombination in den Monomen $X^a, a \in \mathbb{N}_0^{(I)}$, mit Koeffizienten r_a aus R, sodass $\# a \in \mathbb{N}_0^{(I)} \mid r_a \neq 0 \leq \infty$, d.h. als R-Modul ist $R[X_i \mid i \in I]$ frei über R mit Basis $X^a, a \in \mathbb{N}_0^{(I)}$

Beispiel. $(2, 5, 3) \in \mathbb{N}_0^3$ entspricht $X_1^2 X_2^5 X_3^3$

Satz 3.11 (Universelle Eigenschaft von $R[X_i \mid i \in I]$)**.** *Zu Ringhomomorphismus $\psi : R \to S$ und einer Folge $(s_i)_{i \in I}$ aus S über I $\exists!$ Ringhomomorphismus $\widehat{\psi} : T[X_i \mid i \in I] \to S$ mit $\widehat{\psi}|_R = \psi$ und $\widehat{\psi}(X_i) = s_i$*

Facts.

(a) Für $J \subseteq I$ existiert eindeutiger Monoidhomomorphismus $\mathbb{N}_0^{(J)} \to \mathbb{N}_0^{(I)}$ mit $e_j \mapsto e_j$ und ein induzierter Ringhomomorphismus (für $j \in J$)

$$\widehat{\psi} : R[\mathbb{N}_0^{(J)}] = R[X_j \mid j \in J] \to R[\mathbb{N}_0^{(I)}] = R[X_i \mid i \in I]$$

mit $\widehat{\psi}|_R = \mathrm{id}_R$ und $\widehat{\psi}(X_j) = X_j$ $(j \in J)$. Die Abbildung $\widehat{\psi}$ ist injektiv deswegen betrachten wir $R[X_j \mid j \in J]$ als Unterring von $R[X_i \mid i \in I]$

(b) Es gilt:

$$R[X_i \mid i \in I] = \bigcup_{J \subseteq I \text{ endl.}} R[X_j \mid j \in J]$$

d.h. jedes Polynom im Ring ist Polynom in nur endlich vielen Variablen.

Definition 3.12.

(a) $\mathrm{Grad} : R[X] \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ ist die eindeutige Abbildung mit

$$\mathrm{Grad}(f) = \mathrm{Grad}\left(\sum_{i \geq 0} r_i X^i\right) = \begin{cases} -\infty, & f = 0, \\ \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid r_i \neq 0\}, & f \neq 0 \end{cases}$$

(b) Der Leitkoeffizient von $f \neq 0$ ist $a_{\mathrm{Grad}(f)}$.

(c) $f \neq 0$ heißt normiert $\iff$ $a_{\mathrm{Grad}(f)} = 1$.

(d) Ist $R = K$ ein Körper, so gelten außerdem

$$\mathrm{Grad}(fg) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$$

wobei $-\infty + n = n + -\infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Genügt: R ist Integritätsbereich.

(e) Falls R ein Körper (oder Integritätsbereich), so gilt

$$(R[X])^\times = \{f \in R[X] \mid \exists g \in R[X] : fg = 1\}$$

$$\underset{\text{Übung}}{=} \{f \in R[X] \mid \mathrm{Grad}(f) = 0, \exists g \in R[X] : \mathrm{Grad}\, g = 0 : fg = 1\}$$

$$= \{f \in R \mid \exists g \in R : fg = 1\} = R^\times$$

3.3 Symmetrische Polynome

Sei R ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$ fest.

Bezeichnung. (a) Ein Monom in $R[X_1, ..., X_n]$ ist ein Polynom der Form $aX^m = aX_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{m_n}$ für $a \in R \setminus \{0\}$ und $m = (m_i)_{i \in \{1,...,n\}} \in \mathbb{N}_0^n$ und X^m (falls $a = 1$) heißt primitives Monom.

(b) Der (Total-)Grad des Monoms aX^m für $a \in R \setminus \{0\}$ und $m = (m_i)$ ist $|m| := \sum_i m_i$. Der (Total-)Grad von $f = \sum a_m X^m$ ist $\mathrm{Grad}(f) = \max\{|m| : a_m \neq 0\}$. $(\max(\emptyset) := -\infty)$

(c) $f \in R[X_1, \ldots X_n]$ heißt homogen vom Grad t $\iff$ f ist Summe von Monomen aX^m, die alle vom Grad $|m| = t$ sind.

Beispiel. (a) $f = X_1^3 X_2^2 X_3$ ist primitiver Monom mit $\mathrm{Grad}(f) = 11$

(b) $g = X_1^3 X_2^2 + X_1 X_2^4$ ist homogen vom Grad 5

Lemma 3.13. *(a) $\forall \sigma \in S_n \exists!$ Ringhomomorphismus $\widetilde{\sigma} : R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\widetilde{s}|_R = \mathrm{id}_R$ und $\widetilde{\sigma}(X_i) = X_{\sigma(i)}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$*

(b) $\widetilde{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{R[X_1,\ldots,X_n]}$ (für $\mathrm{id} \in S_n$ die Eins).

(c) $\forall \sigma, \tau \in S_n : \widetilde{\sigma \circ \tau} = \widetilde{\sigma} \circ \tau$ Ringhomomorphismen.

Beweis. (a) $\widetilde{\sigma}$ existiert und ist eindeutig nach universeller Eigenschaft (Satz 10) für $R[X_1, \ldots X_n]$.

(b) $\alpha := \mathrm{id}_{R[X_1,\ldots,X_n]}$ ist ein Ringhomomorphismus $R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\alpha|_R = \mathrm{id}_R$ und $\alpha(X_i) = X_i \overset{(a)}{\Longrightarrow} \alpha = \widetilde{\mathrm{id}}$.

(c) Wende universelle Eigenschaft von $R[X_1, \ldots, X_n]$ an. Wir haben:

$$\widetilde{\sigma \circ \tau}|_R \underset{\text{Def. in (a)}}{=} \mathrm{id}_R = \mathrm{id}_R \circ \mathrm{id}_R = \widetilde{\sigma}|_R \circ \widetilde{\tau}|_R = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\tau}|_R$$

und

$$\widetilde{\sigma \circ \tau}(X_i) = X_{\sigma \circ \tau(i)} = X_{\sigma(\tau(i))} = \widetilde{\sigma}(X_{\tau(i)}) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{\tau}(X_i)) = (\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\tau})(X_i)$$

$$\underset{\text{in (a)}}{\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow}} \widetilde{\sigma \circ \tau} = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\tau}.$$

□

Bemerkung (Übung)**.** Ist $\alpha : R \to R$ ein Ringhomomorphismus, so ist $R^\alpha := \{r \in R \mid \alpha(r) = r\}$ ein Unterring von R.

Korollar 3.14. *$R[X_1, \ldots, X_n]^{S_n} := \{f \in R[X_1, \ldots, X_n] \mid \widetilde{\sigma}(f) = f, \forall \sigma \in S_n\} = \bigcap_{\sigma \in S_n} R[X_1, \ldots, X_n]^{\widetilde{\sigma}}$ ist ein Unterring von $R[X_1, \ldots, X_n]$.*

Definition 3.15 (Symmetrische Polynom)**.** Die Elemente in $R[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$ heißen symmetrische Polynome.

Korollar 3.16. *Die Abbildung*

$$\widetilde{\cdot} : S_n \to \mathrm{Aut}(R[X_1, \ldots, X_n]), \sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$$

ist wohl-definiert und ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis.

1) $\widetilde{\cdot}$ wohl-definiert: Zu zeigen $\widetilde{\sigma}$ ist Automorphismus (bijektiver Ringhomomorphismus). Dazu beachte

$$\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\sigma^{-1}} \underset{12}{=} \widetilde{\sigma \circ \sigma^{-1}} = \widetilde{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{R[X_1,\ldots,X_n]} = \cdots = \widetilde{\sigma^{-1}} \circ \widetilde{\sigma}$$

folglich: $\widetilde{\sigma}$ ist Ringautomorphismus.

2) Gruppenhomomorphismus: folgt aus 12(c)

3) $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ injektiv: Denn verschiedene σ, τ wirken unterschiedlich auf $\{X_1, \ldots, X_n\}$

□

Bemerkung (Ziel von diesem Abschnitt)**.** Explizite Beschreibung von $R[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$

3.4 Elementar symmetrische Polynome

Proposition. *Zu $\sigma \in S_n$ erweitern $\widetilde{\sigma}$ zu σ' Ringautomorphismus von $R[X_1, \dots, X_n][X]$ durch*

$$\sigma'|_R = \mathrm{id}_R, \sigma'(X_i) = X_{\sigma(i)} \text{ und } \sigma'(X) := X$$

Behauptung: $g := \prod_{i=1}^n (X - X_i) \overset{!}{\in} R[X_1, \dots, X_n]^{S_n} \underset{\text{Übung}}{=} R[X_1, \dots, X_n]^{S_n}[X]$.

Beweis. $\sigma'(g) = \prod_{i=1}^n (\sigma'(X) - \sigma'(X_i)) = \prod_{i=1}^n (X - X_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (X - X_i) = g$ da $\widetilde{\sigma}$ eine Bijektion auf $\{X_1, ..., X_n\}$ definiert. □

Bemerkung. Schreibe g als Polynom in X mit Koeffizienten s_i in

$$R[X_1, \dots, X_n] \implies g = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} X^i s_{n-i}(X_1, ..., X_n)$$

$= X^n - s_1(X_1, ..., X_n)X^{n-1}i + s_2(X_1, ..., X_n)X^{n-2} \mp \cdots + (-1)^n s_n(X_1, ..., X_n)$

Das definiert $s_1, ..., s_n \in R[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$

Insbesondere:

(i) $s_1, ..., s_n \in R[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$

(ii) s_i ist homogen vom Grad i, denn g ist homogen vom Grad $n \implies$ Koeffizient von X^{n-i} in g ist homogen vom Grad i.

Übung 3.17. Es gelten:

$$s_1 = \sum_{i=1}^n X_i, \quad s_n \prod_{i=1}^n X_i$$

$$s_i(X_1, ..., X_n) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_i \le n} X_{j_1} X_{j_2} \cdots X_{j_i}$$

$(n = 3, i = 2 \rightsquigarrow s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3)$

Definition 3.18. Die Polynome $s_1, ..., s_n \in R[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$ sind die elementar symmetrischen Polynome in $X_1, ..., X_n$ (homogen vom Grad $1, 2, ..., n$) ($s_i = i$-tes elementar symmetrisches Polynom)

Satz 3.19. *Sei $\psi : R[Y_1, \dots, Y_n] \to R[X_1, \dots, X_n]$ der Ringhomomorphismus*

$$h(Y_1, ..., Y_n) \mapsto h(s_1, ..., s_n)$$

Dann ist

(a) ψ ist Ringhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\psi) \subseteq R[X_1, ..., X_n]^{S_n}$

(b) ψ ist ein Ringisomorphismus.

Beispiel. $n = 4, f = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$

$$(\underbrace{X_1 + \cdots + X_4}_{s_1})^2 - 2(\underbrace{X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_1X_4 + X_2X_4 + X_3X_4}_{s_2})$$

$$= s_1^2 - 2s^2 = h(s_1, s_2), h = Y_1^2 - 2Y_2$$