

0.1 Gruppen und Monoide

Notation.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\#X$ = die Kardinalität/Mächtigkeit einer Menge X

Definition 0.1 (Monoid). Ein Tripel (M, e, \circ) mit

- M einer Menge.
- e einem Element aus M ,
- $\circ : M \times M \rightarrow M$ einer zweistelligen Verknüpfung

heißt **Monoid** falls gilt

(M1) Assoziativität:

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(M2) Neutrales Element:

$$\forall a \in M : a \circ e = a = e \circ a$$

Wir nennen ein $a \in M$ **invertierbar**, falls

$$\exists b, b' \in M : b \circ a = e = a \circ b'$$

(b bzw. b' heißen dann Links- bzw. Rechtsinverse)

Bemerkung. $b = b'$, denn

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b$$

Definition 0.2 (Gruppe). Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem alle Elemente invertierbar sind.

Bemerkung 0.3 (zur Assoziativität). Seien $a_1, \dots, a_n \in M$, und setzt man in

$$a_1 \circ \dots \circ a_n$$

Klammern, sodass \circ jeweils 2 Elemente verknüpft, so ist wegen (M1) das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Klammerung, and also lässt man i.a. die Klammern weg. (Die Reihenfolge ist aber schon wichtig!)

Definition 0.4 (Abelsche Gruppe/Monoid). Ein Monoid bzw. eine Gruppe M heißt **abelsch** (oder kommutativ) : $\iff \forall a, b \in M :$

$$a \circ b = b \circ a$$

Proposition 0.5 (Eindeutigkeit des neutralen Elements bzw. der neutralen Elementen). *Sei M ein Monoid, dann*

(a) Erfüllt $e' \in M$ die Bedingung $e' \circ a = a \forall a \in M$, so gilt $e' = e$.

(b) Ist $a \in M$ invertierbar, so ist sein Inverses eindeutig.

Beweis.

(a) Nach Konstruktion $e = e' \circ e = e'$.

(b) Gelte $a \circ b' = e$ und b sei ein Inverses von a , dann:

$$b' = e \circ b' = (b \circ a) \circ b' = b \circ (a \circ b') = b \circ e = b.$$

□

Satz 0.6 (ohne Beweis). Sei (G, e, \circ) ein Tripel mit G eine Menge, $e \in G$, $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine assoziative Verknüpfung sodass:

- e ist Linkseins, d.h.

$$\forall g \in G : e \circ g = g$$

- jedes g hat ein Linksinverses

$$\forall g \in G \exists h \in G : h \circ g = e$$

So ist (G, e, \circ) eine Gruppe.

Hinweis (Nutzen von Satz 6). Es müssen weniger Axiome geprüft werden.

Notation.

(i) $ab := a \circ b$

(ii) $a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n a, n \in \mathbb{N}$

(iii) $a^n = (a^{-n})^{-1}, n < 0$

(iv) Ist \circ kommutativ, so schreibt man oft $+$

Übung (Rechenregeln).

(i) $a^n a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}, \forall m, n \in \mathbb{N}_0$

(ii) Ist a invertierbar, so gelten die Regeln $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Proposition 0.7 (Übung). Sei G eine Gruppe, seien $g, h \in G$, dann:

(a) Die Gleichung $xg = h$ besitzt genau eine Lösung (in G), nämlich $x = hg^{-1}$.

(b) Es gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

(c) Die Rechtstranslation (um g) $r_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg$ und die Linkstranslationen (um g) $\ell_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$ sind bijektiv.

Beispiel. 1) $(\mathbb{N}_0, 0, +), (\mathbb{N}_0, 1, \cdot)$ sind kommutative Monoide.

2) Jede Gruppe ist ein Monoid.

3) Ist X eine Menge, $\text{Abb}(X, X)$ bzw. $\text{Bij}(X, X)$ die Menge aller Abbildungen bzw. Bijektionen von X in sich, so gilt:

(a) $(\text{Abb}(X, X), \text{id}_X, \circ)$ ist ein Monoid.

(b) $(\text{Bij}(X, X), \text{id}_X, \circ)$ ist eine Gruppe.

Schreibe $S_n := \text{Bij}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\})$ für die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$.

4) Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum, so sind

(i) $O(V) := \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V) \mid \varphi \text{ orthogonal}\}$ und $SO(V) := \{\varphi \in O(V) \mid \det(\varphi) = 1\}$ Gruppen.

(ii) Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $P_n := \{\cos \frac{2\pi j}{n}, \sin \frac{2\pi j}{n} \mid j = 0, \dots, n-1\}$, dann ist

(a) $C_n := \{\varphi \in SO(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die Gruppe der Drehungen um 0 von Winkel $\frac{2\pi j}{n}, (j = 0, \dots, n-1)$ und

(b) $D_n := \{\varphi \in O(V) \mid \varphi(P_n) = P\}$ die [[Diedergruppe]] der Ordnung $2n$

(Übung) $\#C_n = n, \#D_n = 2n$.

Gruppen beschreiben oft Symmetrien eines geometrischen Objekts.

5) Ist M ein Monoid, so ist $M^\times := \{a \in M \mid a \text{ invertierbar}\}$ eine Gruppe, also (M^\times, e, \circ) .

Definition 0.8 (Ring). Ein [[Ring]] ist ein [[Tupel]] $(R, 0, 1, +, \cdot)$, sodass

(R1) $(R, 0, +)$ eine [[abelsche Gruppe]],

(R2) $(R, 1, \cdot)$ ein Monoid,

(R3) Es gelten die Distributivgesetze

Definition 0.9 (Ordnung einer Gruppe). Ist M ein Monoid oder eine Gruppe, so heißt

$$\text{ord}(M) := \#M$$

die Ordnung von M .

Definition 0.10 (Untermonoid/Untergruppe). Seien M ein Monoid, G eine Gruppe, dann

(a) $N \subseteq M$ heißt Untermonoid (UM) wenn:

- $e \in N$
- $\forall n, n' \in N : n \circ n' \in N$

(b) $H \subseteq G$ heißt Untergruppe (UG) wenn:

- $e \in H$
- $\forall h, h' \in H : h \circ h' \in H$

So schreiben wir $N \leq M, H \leq G$.

Übung 0.11. (i) $N \leq M \implies (N, e, \cdot|_{N \times N}: N \times N \rightarrow N)$ ist Monoid

(ii) $H \leq G \implies (H, e, \cdot \mid_{H \times H}: H \times H \rightarrow H)$ ist Monoid

Beispiel. Sei K ein Körper, dann ist

(i) $SL_n(K) \leq GL_n(K)$

(ii) $SO(V) \leq O(V) \leq \text{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$

Proposition 0.12 (Übung). Sind $(H_i)_{i \in I}$ Untergruppen von G , so ist

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G.$$

Beispiel. Sei G eine Gruppe, $g \in G, S \leq G$, dann:

(i) $C_G(g)$ **Zentralisator** von $g \in G$, also

$$C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\} \leq G$$

(ii) $C_G(S)$ **Zentralisator** von S , also

$$C_G(S) = \{h \in G \mid hs = sh \forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} C_G(s) \leq G$$

(iii) $Z(G)$ **Zentrum** von G , also

$$Z(G) = C_G(G) \underset{\text{komm.}}{\leq} G$$

(iv) (Übung) $Z(GL_n(K)) = K^\times \mathbf{1}_n$

Lemma 0.13. Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge, dann \exists kleinste Untergruppe $\langle S \rangle \leq G$, die S umfasst.

Beweis. Definiere

$$\langle S \rangle := \bigcap \{H \leq G \mid S \subseteq H\}.$$

□

Übung 0.14. Sei M ein Monoid, $S \subseteq M$ eine Teilmenge, ein Wort aus S ist ein Ausdruck

$$s_1 \cdot \dots \cdot s_n, s_i \in S, n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt: $\{\text{Worte in } S \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq M$ ist das kleinste Untermonoid von M , das S umfasst. Und ist G eine Gruppe, so gilt $\{\text{Worte in } S \cup S^{-1} \cup \{e\}\} = \langle S \rangle \leq G$ ist die kleinste Untergruppe von G , die S umfasst.

Definition 0.15 (Erzeugendensystem). Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge. S heißt Erzeugendensystem von $G \iff \langle S \rangle = G$.

Beispiel (Übung). Seien $E_{ij} \in M_{n \times n}(K)$ die Elementarmatrizen mit 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Dann ist

$$\{\mathbf{1}_n + aE_{ij} \mid a \in K, i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$$

ein Erzeugendensystem von $SL_n(K)$ (Gauß-Algorithmus)

Lemma 0.16. Sei G eine Gruppe, $g \in G$, dann gilt

$$\langle g \rangle = \langle \{g\} \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Beweis. (Nach Übung 14)

$$\begin{aligned} \langle \{g\} \rangle &= \{\text{Worte in } \{g, g^{-1}, e\}\} \\ &= \{g^{i_1}, \dots, g^{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^{i_1 + \dots + i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{0, \pm 1\}\} \\ &= \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. $\langle g \rangle$ ist abelsch.

Definition 0.17 (Ordnung eines Gruppenelements, Zyklische Gruppe).

Sei G eine Gruppe, $g \in G$

(a) Die Ordnung von g ist

$$\text{ord}(g) = \#\langle g \rangle = \#\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(b) g hat endliche Ordnung $\iff \text{ord}(g) \in \mathbb{N}$

(c) G ist zyklisch $\iff \exists g \in G : G = \langle g \rangle$

Proposition 0.18. Zyklische Gruppen sind abelsch.

Beweis. G zyklisch $\implies \exists g \in G : G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dann:

$$g^n g^m = g^{n+m} \stackrel{+ \text{ komm. in } \mathbb{Z}}{=} g^{m+n} = g^m g^n.$$

□

Proposition 0.19. Sei G eine Gruppe, $g \in G, n := \text{ord}(g)$ und

$$n' = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid e, g, g^2, \dots, g^{m-1} \text{ paarw. versch.}\}$$

Dann gelten:

(a) $n' = \infty = \sup \mathbb{N}$ oder $g^{n'} = e$ und $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n'-1}\}$. Insbesondere ist $n' = n$

(b) Falls $n = \text{ord}(g) < \infty$, so gilt für $m, m' \in \mathbb{Z}$:

$$g^m = g^{m'} \iff m \equiv m' \pmod{n}$$

Insbesondere ist $g^m = e \iff n \mid m$

(c) Für $s \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\text{ord}(g^s) = \frac{n}{\text{ggT}(n, s)}$$

Beweis.

(a) Gelte $n' < \infty$:

Definition von $n' \implies g^{n'} \in \{e, g, \dots, g^{n'-1}\}$ Annahme: $g^{n'} = g^i$ für ein $i \in \{1, \dots, n'-1\}$ Multipliziere mit $g^{-i} \implies g^{n'-i} = g^0 = e$ und $0 < n'-i < n'$, d.h. $g^{n'-i} \in \{e, \dots, g^{n'-1}\} \implies \{g^0, \dots, g^{n'-1}\}$ nicht paarweise verschieden (Widerspruch) Sei schließlich $m \in \mathbb{Z}$ beliebig, Division mit Rest:

$$m = qn' + r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1$$

$$\implies g^m = g^{qn'+r} = (g^{n'})^q g^r = g^r \in \{g^0, \dots, g^{n'-1}\}$$

Also: $\langle g \rangle = \{e, \dots, g^{n'-1}\}$ sind paarweise verschieden. $\implies \text{ord}(g) = \#\langle g \rangle = n'$

(b) Seien $m, m' \in \mathbb{Z}$, schreibe $m' - m = qn' + r, (q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n' - 1)$, dann:

$$g^{m'} = g^m \iff g^{m'-m} = g^0 = e \iff g^{qn'+r} = e$$

$$\iff g = e \xrightarrow[1. \text{ } n=n', \text{ paarw. versch.}]{e, \dots, g^{n'-1}} r = 0$$

$$\iff m' - m \text{ ist Vielfaches von } n = n' \iff m \equiv m' \pmod{n}$$

(c) Bestime die $m \in \mathbb{Z}$ mit $(g^s)^m = e$

$$(g^s)^m = e \iff g^{sm} = e \iff n \mid sm$$

$$\iff \frac{n}{\text{ggT}(n,s)} \mid \frac{s}{\text{ggT}(n,s)} m \iff \frac{n}{\text{ggT}(n,s)} \mid m$$

Da $\frac{n}{\text{ggT}(n,s)}, \frac{s}{\text{ggT}(n,s)}$ teilerfremd sind

$$\xrightarrow{2.} \text{ord}(g^s) = \frac{n}{\text{ggT}(n,s)} \square.$$

□

Beispiel.

$$\text{ord}(g) = 6 \implies \text{ord}(g^2) = 3 = 6/\text{ggT}(6,2) = 6/2$$

Korollar 0.20. Sei G eine Gruppe, dann

(a) Für $g \in G$ gilt:

$$\text{ord}(g) = \infty \iff g^n, n \in \mathbb{Z} \text{ sind paarw. verschieden}$$

(b) Ist G zyklisch und $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist H zyklisch.

Beweis.

(a) \Leftarrow vgl. 19(a) \implies wissen nach 19(a), dass e, g, \dots, g^n, \dots paarw. versch. sind. Multipliziere mit $g^{-m}, (m \in \mathbb{N}) \implies g^{-m}, g^{-m+1}, \dots, g^0, g^1, \dots$ sind paarw. versch.

- (b) Sei $g \in G$ ein Erzeuger von $G, H \leq G$ eine UG von G und ohne Einschränkung $H \supsetneq \{e\}$

$$\implies \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : g^m \in H \setminus \{e\}$$

$$H \text{ ist Gruppe} \implies g^m, (g^m)^{-1} = g^{-m} \in H$$

Sei $t \in \min\{m \in \mathbb{N} \mid g^m \in H\}$. Behauptung: $\langle g^t \rangle = H$.

- “ \subseteq ”: Klar, da $g^t \in H$ also auch $\langle g^t \rangle \subseteq H$ (H ist UG die t enthält)
- “ \supseteq ”: Sei $g^m \in H$, Division mit Rest: $m = tq + r : q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq t-1$

$$\implies H \ni g^m = g^{tq+r} = \underbrace{(g^t)^q}_{\in H} g^r \implies g^r = (g^m)((g^t)^q)^{-1} \in H$$

Nach Def von t muss gelten: $r = 0$, da $r = 1, \dots, t-1$ verboten. Also ist $g^m = (g^t)^q \in \langle g^t \rangle$. □

Korollar 0.21 (Übung). *Untergruppen von \mathbb{Z} sind die Mengen $\mathbb{Z}n = \{an \mid a \in \mathbb{Z}\}, (n \in \mathbb{N}_0)$*

Wiederholung (Vorbereitung).

- Äquivalenzrelationen
- Äquivalenzklassen
- Repräsentantensysteme

Bemerkung.

- $X = \bigsqcup_{r \in \mathcal{R}} [r]_{\sim}$
- Falls $\#X < \infty : \# = \sum_{r \in \mathcal{R}} \#[r]_{\sim}$

Satz 0.22 (Satz von Lagrange). *Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gilt $\#H \mid \#G$.*

Beweis.

- 1) Definiere \sim auf G durch $g \sim g' : \iff \exists h \in H : g' = gh$ ist eine Äquivalenzrelation:

- reflexiv: $g \sim g$ denn $g = ge, e \in H$
- symmetrisch: gelte $g' = gh$ für ein $h \in H$

$$\xRightarrow{-h^{-1}} g'h^{-1} = g \xRightarrow{H \text{ Gruppe}} h^{-1} \in H \implies g' \sim g$$

- transitiv: gelte $g \sim g', g' \sim g''$, d.h. $\exists h \in H : g' = gh, \exists h' \in H : g'' = g'h$

$$\implies g'' = g'h' = (gh)h' = g(hh') \implies g \sim g''$$

- 2) Äquivalenzklassen: Für $g \in G$ ist

$$[g]_{\sim} = \{g' \in G \mid \exists h \in H : g' = gh\} = \{gh \mid h \in H\} =: gH$$

- 3) Beachte G endlich $\implies H \subseteq G$ endlich (und ebenso jede Teilmenge von G)
 Behauptung: $\#gH = \#H \forall g \in G$ Grund: Die Abbildungen

$$\ell_g : H \rightarrow gH, h \mapsto gh, \ell_{g^{-1}} : gH \rightarrow H, x \mapsto g^{-1}x$$

sind zueinander invers (Übung) und also bijektiv. $\implies \#H = \#gH$.

- 4) Sei $\mathcal{R} \subseteq G$ ein Repräsentantensystem zu \sim

$$\begin{aligned} \implies \#G &= \sum_{g \in \mathcal{R}} \#[g]_{\sim} = \sum_{g \in \mathcal{R}} \#gH = \sum_{g \in \mathcal{R}} \#H \stackrel{3)}{=} \#\mathcal{R} \#H \\ \implies \#H &\text{ teilt } \#G. \end{aligned} \quad \square$$

Notation. Seien G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und \sim wie im Beweis vom Satz 22.

- Schreibe G/H für die Menge aller Äquivalenzklassen also für $\{gH \mid g \in G\}$
- Schreibe $[G : H] := \#G/H = \#\mathcal{R}$ (Index von H in G)

Lagrange sagt: $\#G = \#G/H \cdot \#H = [G : H] \cdot \#H$

Übung 0.23. Seien $H' \leq H \leq G$ Untergruppen, dann ist $H' \leq G$ und

$$[G : H'] = [G : H] \cdot [H : H']$$

Korollar 0.24. Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:

- (a) $\forall g \in G : \text{ord}(g) \mid \text{ord}(G) = \#G$
 (b) Ist $\text{ord}(G)$ eine Primzahl, so ist G zyklisch

Beweis.

- (a) $\langle g \rangle \leq G$ ist eine Untergruppe $\xRightarrow{\text{Lagrange}} \text{ord}(g) = \#\langle g \rangle \mid \#G = \text{ord}(G)$

- (b) Sei $p = \text{ord}(G) \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, sei $g \in G \setminus \{e\}$ ($\#G \geq 2$) Nach 1. gilt
 $\underbrace{\text{ord}(g)}_{\neq 1 \text{ da } g \neq e} \mid \text{ord}(G) = p$

Folglich: $p = \text{ord}(g) = \text{ord}(G)$, d.h. $\langle g \rangle \leq G$ ist Inklusion gleichmächtiger endlicher Mengen, also $\langle g \rangle = G$. \square

Definition 0.25 (Gruppenexponent). Sei G eine Gruppe, der Exponent von G ist $\exp(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g^n = e\}$ (wobei $\min \emptyset = \infty$).

Beispiel (Übung).

- (i) $\exp(C_n) = n$
- (ii) $\exp D_n = \text{kgV}(2, n)$
- (iii) $\exp(S_3) = 6$
- (iv) $\exp(S_4) = 12$
- (v) $\exp(G) = 2 \implies G$ abelsch

- (vi) \mathbb{F}_p Körper mit p Elementen und $0 \neq V$ ein \mathbb{F}_p -[[Vektorraum]], so gilt $\exp(V, 0, +) = p$

Satz 0.26. Sei G eine endliche Gruppe, es gelten

- (a) $\exp(G) \mid \text{card}(G)$
 (b) $\exp(G) = \text{kgV}(\{\text{ord}(g) \mid g \in G\})$

Beweis.

- (a) Folgt aus (b) und $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G) \forall g \in G$ nach Korollar 24.
 (b) $\text{ord}(g) \mid \exp(G), \forall g \in G$, denn nach Definition gilt:

$$g^{\exp(G)} = e \xrightarrow[19]{\implies} \text{ord}(g) \mid \exp(G)$$

folglich: $N := \text{kgV}(\{\text{ord}(g) \mid g \in G\})$ teilt $\exp G$.

Behauptung: $\exp G \leq N$, (dann fertig)

Wir zeigen: $g^N = e \implies \exp G \leq N$. Dies folgt aus $g^{\text{ord}(g)} = e$ und $\text{ord}(g) \mid N = \text{kgV}(\dots)$. \square

Übung 0.27. Sei G eine endliche Gruppe, dann gelten:

- (a) Sind $g, h \in G : gh = hg$ und gilt $\text{ggT}(\text{ord}(g), \text{ord}(h)) = 1$, so gilt

$$\text{ord}(gh) = \text{ord}(g)\text{ord}(h)$$

- (b) Gelte $p^f \mid \exp G$ für p eine Primzahl und $f \in \mathbb{N}$, dann $\exists g \in G : \text{ord}(g) = p^f$
 (c) Ist G abelsch, so $\exists g \in G : \exp(G) = \text{ord}(g)$

Satz 0.28. Sei G eine endliche abelsche Gruppe, dann ist G genau dann zyklisch, wenn $\text{ord}(G) = \exp(G)$

Beweis.

- “ \implies ”: Sei $g \in G$ Erzeuger $\xrightarrow[19]{\implies} \text{ord}(G) = \text{ord}(g)$

$$\text{ord}(g) \mid \exp G, \exp G \mid \text{ord}(G) \implies \exp G = \text{ord}(G)$$

- “ \impliedby ”: Wähle nach 27.3 ein $g \in G$ mit $\text{ord}(g) = \exp(G)$, nach Voraussetzung ist $\exp(G) = \text{ord}(g) \implies \text{ord}(g) = \text{ord}(G) \implies \langle g \rangle \subseteq G$ ist Gleichheit, d.h. $\langle g \rangle = G$. \square

0.2 Gruppenhomomorphismen

Seien im Weiteren M, M' Monoide und G, G' Gruppen.

Definition 0.29 (Monoid-/Gruppenhomomorphismus).

- (a) Eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow M'$ heißt **Monoidhomomorphismus**, falls

- (i) $\varphi(e) = e'$ und

$$(ii) \quad \forall m, \tilde{m} \in M : \varphi(m \circ \tilde{m}) = \varphi(m) \circ' \varphi(\tilde{m})$$

(b) Sind M, M' Gruppen, so heißt ein Gruppenhomomorphismus \iff (ii) gilt.

Bemerkung 0.30.

- (a) Ist $\varphi : M \rightarrow M'$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi(e) = e'$ und $\varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}, \forall m \in M$.
- (b) (Übung) Die Verkettung von Monoid- bzw. Gruppenhomomorphismen ist wieder ein solcher.

Beweis. Zu (a):

$$e' \circ' \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e \circ e) = \varphi(e) \circ' \varphi(e)$$

Kürzen $\implies e' = \varphi(e)$. Und

$$\varphi(m^{-1}) \circ' \varphi(m) = \varphi(m^{-1} \circ m) = \varphi(e) = e'$$

Eindeutigkeit des Inverses $\implies \varphi(m^{-1}) = \varphi(m)^{-1}$. □

Beispiel 0.31. (a) Für $g \in G$ ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Bild}(\varphi) = \langle g \rangle$.

- (b) Sei K ein Körper, V, W K -Vektorräume, $\varphi : V \rightarrow W$ ein Vektorraumhomomorphismus, dann ist

$$\varphi : (V, 0_V, +_V) \rightarrow (W, 0_W, +_W)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

- (c) Die Vorzeichenfunktion (Aus der linearen Algebra)

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 0.32 (Kern/Bild). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (a) Der Kern von φ ist $\text{Kern}(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$
- (b) Das Bild von φ ist $\text{Bild}(\varphi) := \{\varphi(g) \in G' \mid g \in G\}$

Proposition 0.33 (Übung). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann

- (a) Für $H \leq G$ eine Untergruppe ist $\varphi(H) \leq G'$ eine Untergruppe.
- (b) Für $H' \leq G'$ eine Untergruppe ist $\varphi^{-1}(H') \leq G$ eine Untergruppe.
Insbesondere sind $\text{Bild}(\varphi) \leq G', \text{Kern}(\varphi) \leq G$ Untergruppen.
- (c) φ ist injektiv (ein Gruppenmonomorphismus) $\iff \text{Kern}(\varphi) = \{e\}$.
- (d) φ ist surjektiv (ein Gruppenepimorphismus) $\iff \text{Bild}(\varphi) = G'$

Bemerkung. (a), (b) und (d) gelten auch für Monoide.

Definition 0.34 (Gruppenisomorphismus). Ein Gruppenhomomorphismus φ ist ein Gruppenisomorphismus, wenn φ bijektiv ist. ($\iff \text{Kern}(\varphi) = \{e\}$ und $\text{Bild}(\varphi) = G'$).

Bemerkung (Übung). Definiere ein Monoidhomomorphismus analog zu Definition 24.

Notation. Wir schreiben $G \cong G'$ (G ist isomorph zu G') wenn \exists Gruppenisomorphismus $\varphi : G \rightarrow G'$.

Definition 0.35 (Gruppenautomorphismus). (a) Ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G \rightarrow G$ heißt Gruppenautomorphismus.

(b) $\text{Aut}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ ist ein Gruppenautomorphismus}\}.$

Bemerkung 0.36 (Übung). (a) $\text{id}_G : G \rightarrow G \in \text{Aut}(G)$

(b) Verkettung von Gruppenisomorphismen (oder Automorphismen) ist wieder ein solcher.

(c) Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenisomorphismus, so gelten

(i) $\#G = \#G'.$

(ii) G abelsch $\iff G'$ abelsch.

(iii) $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem $\iff \varphi(S) \subseteq G'$ ein Erzeugendensystem.

Proposition 0.37. $(\text{Aut}(G), \text{id}_G, \circ)$ und $(\text{Aut}(M), \text{id}_M, \circ)$ sind Gruppen.

Beweis. (Übung) Zeige:

$$\text{Aut}(G) \leq \text{Bij}(G), \text{Aut}(M) \leq \text{Bij}(M)$$

sind Untergruppen. □

Beispiel 0.38 (Übung).

(a) $\text{Aut}((\mathbb{Z}, 0, +)) = \{\text{id}_{\mathbb{Z}}, -\text{id}_{\mathbb{Z}}\} \cong C_2$

(b) Für $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n)$ der Ring der Restklassen modulo n gilt

$$(\mathbb{Z}_n, \bar{0}, +) \cong C_n \text{ und } \text{Aut}(\mathbb{Z}_n, \bar{0}, +) \cong \mathbb{Z}_n^\times$$

z.B. Erzeuger von \mathbb{Z}_n sind Reste \bar{a} , sodass $\text{ggT}(a, n) = 1$

(c) Sei G beliebig, zu $g \in G$ definiere den **Konjugationsautomorphismus** (**Konjugation** mit g)

$$c_g : G \rightarrow G, h \mapsto g \circ h \circ g^{-1}$$

(i) $c_g \circ c_{g'} = c_{g \circ g'}, \forall g, g' \in G$

(ii) $c_e = \text{id}_G$ und $c_g \in \text{Aut}(G), \forall g \in G$

(iii) $c : G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(iv) $\text{Kern}(c.) = Z(G)$ (Zentrum von G).

Bemerkung. $\text{Bild}(c.) =: \text{Inn}(G)$ die Gruppe der **inneren Automorphismen** von G

Lemma 0.39. Seien $\varphi, \varphi' : G \rightarrow G'$ Gruppenhomomorphismen. Sei $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Dann gilt

$$\varphi(s) = \varphi'(s) \forall s \in S \iff \varphi = \varphi' \quad (*)$$

Analoge Aussage gilt für Monoide

Beweisskizze. (Übung)

- “ \Leftarrow ”: Klar.
- “ \Rightarrow ”:
 - 1) Zeige $H := \{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi'(g)\} \leq G$ ist eine Untergruppe.
 - 2) Da $S \subseteq H$ nach Definition von H und Voraussetzung von “ \Rightarrow ”, folgt $G = \langle S \rangle \subseteq H \leq G$

□

Normalteiler (Normal Subgroup)

Notation. Für $X \subseteq G$ und $g \in G$ setze

$$\ell_g(X) = \{gx \mid x \in X\} = gX \text{ und } r_g(X) = \{xg \mid x \in X\} = Xg$$

Gruppenverknüpfung assoziativ \implies

- (i) $c_g(X) = \{g x g^{-1} \mid x \in X\} = (gX)g^{-1} = g(Xg^{-1})$.
- (ii) $g(hX) = (gh)X$ und $(Xg)h = X(gh)$.

Bemerkung. Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, dann heißt gH **Linksnebenklasse** und Hg **Rechtsnebenklasse**.

Definition 0.40 (Normalteiler). Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt Normalteiler (N.T.) $\iff \forall g \in G : Ng = gN$. (Diese Definition ist auch für Monoide sinnvoll)

Lemma 0.41. Für eine Untergruppe $N \leq G$ sind äquivalent:

- (i) $\forall g \in G : gN = Ng$
- (ii) $\forall g \in G : gNg^{-1} = N$
- (iii) $\forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N$

Beweis. • “(ii) \implies (iii)”: Klar.

- “(iii) \implies (i)”: Rechtsmultiplikation mit g liefert aus (iii):

$$(gNg^{-1})g = gN(g^{-1}g) = gNe = gN \subseteq Ng$$

Für die andere Inklusion betrachte (iii) für g^{-1} :

$$g^{-1}Ng \subseteq N \xRightarrow{\text{Linksmult. mit } g} Ng \subseteq gN$$

- “(i) \implies (ii)”: Wende auf (i) Rechtsmultiplikation mit g^{-1} an. ($r_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ ist eine bijektive Abbildung.)

□

Notation.

$H \leq G$ bedeutet $H \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

$H \trianglelefteq G$ bedeutet $H \subseteq G$ ist ein Normalteiler.

Satz 0.42. Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig, zu zeigen ist $g \circ \text{Kern}(\varphi) \circ g^{-1} \subseteq \text{Kern}(\varphi)$

Sei $h \in \text{Kern}(\varphi)$, zu zeigen ist $ghg^{-1} \in \text{Kern}(\varphi)$. Damit:

$$\begin{aligned} \varphi(ghg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) \underset{h \in \text{Kern}(\varphi)}{=} \varphi(g) \circ e' \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = e'. \end{aligned}$$

$$\implies \text{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G.$$

□

Übung 0.43.

- Ist $N' \trianglelefteq G'$ und $\varphi : G \rightarrow G'$ Gruppenhomomorphismus, so gilt $\varphi^{-1}(N') \trianglelefteq G$.
- Ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $[G : H] = \#G/H = 2$, so folgt $H \trianglelefteq G$.
- Ist G abelsch, so ist jede Untergruppe $H \leq G$ ein Normalteiler.
- Der **Kommutator** zu $g, h \in G$ ist $ghg^{-1}h^{-1}$, die **Kommutatoruntergruppe** von G ist

$$[G, G] := \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$$

Es gilt $[G, G] \trianglelefteq G$.

Beispiel. Es gibt Beispiele für folgende Aussagen:

- $\exists H \leq G : H \not\trianglelefteq G$
- $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$ mit $\varphi(G) \not\trianglelefteq G'$
- $\exists N \trianglelefteq G$ und $H \trianglelefteq N$, so dass $H \not\trianglelefteq G$.

Beweis.

- (i) $G = S_3 = \text{Bij}(\{1, 2, 3\}) \supseteq H = \{\text{id}, \sigma\}$ mit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dann
 $H \leq G$ Klar, aber $H \not\trianglelefteq G$, denn für $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $\tau\sigma\tau^{-1}$ (Übung)
 $\implies \tau H \tau^{-1} \not\subseteq H$
- (ii) Betrachte $\varphi : H \rightarrow G$ Inklusion mit G, H aus (i), dann gilt $H \trianglelefteq H$ aber
 $\varphi(H) = H$ kein Nullteiler von $G = S_3$.
- (iii) Später. □

Satz 0.44. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, dann gelten:

- (a) Aus $gN = g'N$ und $hN = h'N$ für $g, g', h, h' \in G$ folgt $ghN = g'h'N$ und insbesondere ist die Verknüpfung

$$\circ : \underbrace{G/N \times G/N}_{\{gN | g \in G\}} \longrightarrow G/N, (gN, hN) \mapsto gN \circ hN = ghN$$

wohl-definiert.

- (b) $G/N, \underbrace{N}_{=eN}, \circ$ ist eine Gruppe.

- (c) $gN = g'N \iff g^{-1}g' \in N$.

- (d) $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\pi) = N$.

Beweis. (a) Es gelten (Formeln von Definition 40)

$$\begin{aligned} (gh)N &= g(hN) \stackrel{N \trianglelefteq G}{=} g(Nh) = (gN)h \\ &= (g'N)h = g'(Nh) = g'(hN) = g'(h'N) = (g'h')N \implies (a) \end{aligned}$$

- (b) Überlege Gruppenaxiome.

- Assoziativität (Übung)
- Linkseins ist $N = eN$, denn

$$N \circ (gN) = eN \circ gN \stackrel{\text{wohl-def.}}{=} (e \circ g)N = gN$$

- Linksinverses zu gN ist $g^{-1}N$, denn

$$(g^{-1}N) \circ gN \stackrel{\text{nach Def.}}{=} (g^{-1}g)N \stackrel{\text{Gruppe}}{=} eN = N$$

- (c) $gN = g'N \stackrel{g^{-1} \circ_-}{=} N = g^{-1}g'N \stackrel{e \in N}{\implies} N \ni g^{-1}g'e$, d.h. $g^{-1}g' \in G$.

$$g^{-1}g' \in N \stackrel{\ell_{g^{-1}g'} : N \rightarrow N \text{ ist bijektiv.}}{\implies} N = g^{-1}N \stackrel{g^{-1} \circ_-}{\implies} gN = g'N$$

(d) $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ ist Gruppenhomomorphismus, denn

$$\pi(gg') = gg'N \stackrel{\text{Def. von } \circ}{=} gN \circ g'N = \pi(g) \circ \pi(g')$$

$$g \in \text{Kern}(\pi) \iff gN = eN \stackrel{(c)}{\iff} e^{-1}g = g \in N$$

□

Bemerkung (Bezeichnung). G/N (bzw. $(G/N, eN, \circ)$) heißt **Faktorgruppe** von G modulo N .

Bemerkung (Übung). G abelsch $\implies G/N$ abelsch.

Satz 0.45 (Homomorphiesatz für Gruppen). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus mit $N = \text{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$, sodass

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ G/N & & \end{array}$$

kommutiert, d.h. $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. (wobei $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ aus Satz 44). Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist injektiv und $\bar{\varphi}$ bijektiv $\iff \varphi$ surjektiv.

Beweis. • Existenz von $\bar{\varphi}$: Definiere $\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g), \forall g \in G$.

- $\bar{\varphi}$ wohl-definiert: Es gilt: $gN = g'N \iff N = g^{-1}g'N \stackrel{44c}{\iff} g^{-1}g' \in N$.
Damit

$$\implies \varphi(g') = \varphi(gg^{-1}g') = \varphi(g)\varphi(\underbrace{g^{-1} \circ g'}_{\in N = \text{Kern}(\varphi)}) = \varphi(g)e = \varphi(g).$$

- $\bar{\varphi}$ Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(gN \circ g'N) &\stackrel{\text{Def. von } \circ}{=} \bar{\varphi}(gg'N) \stackrel{\text{Def. von } \bar{\varphi}}{=} \varphi(gg') \stackrel{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi(g)\varphi(g') \\ &\stackrel{\text{Def. von } \bar{\varphi}}{=} \bar{\varphi}(gN)\bar{\varphi}(g'N). \end{aligned}$$

- $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$: (Aus der Definition von $\bar{\varphi}$):

$$\underbrace{\bar{\varphi}(gN)}_{\bar{\varphi}(\pi(g))} = \varphi(g)$$

- $\bar{\varphi}$ injektiv: $\bar{\varphi}(gN) = e \iff \varphi(g) = e \iff g \in N = \text{Kern}(\varphi) \stackrel{44c}{\iff} gN = eN = N$.
- $\bar{\varphi}$ eindeutig: Folgt aus der Surjektivität von π .

- Zusatz φ surjektiv $\iff \bar{\varphi}$ Isomorphismus (Übung): Verwende $\text{Bild}(\varphi) = \text{Bild}(\bar{\varphi})$ und $\bar{\varphi}$ injektiv.

□

Satz 45' (Homomorphiesatz'). (Übung) Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$, so dass $N \subseteq \text{Kern}(\varphi)$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\bar{\varphi} : G/N \longrightarrow G' \text{ mit } \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi.$$

wobei $\pi : G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$

Notation. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Restklassenring. ($n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe)

Korollar 0.46. Sei G eine zyklische Gruppe,

(a) Falls $m := \text{ord}(G) \in \mathbb{N} \implies G \cong \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m)$.

(b) Falls $\text{ord}(G) = \infty \implies G \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $g \in G$ ein Erzeuger und betrachte

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$$

φ ist surjektiv, da $\text{Bild}(\varphi) = \langle g^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle = G$.

$$\xrightarrow[\text{Satz 45}]{\quad} \bar{\varphi} : \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m \xrightarrow{\cong} G$$

für $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $\text{Kern}(\varphi) = \mathbb{Z}m$.

- Fall (b): $\text{ord}(G) = \infty \implies \text{Kern}(\varphi) = \{0\} \implies \varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ist ein Isomorphismus.
- Fall (a): $\text{ord}(G) = m \in \mathbb{N}$ dann ist $\bar{\varphi}$ der gewünschte Isomorphismus.

□

Korollar 0.47. Für zyklische Gruppen G, H gilt $G = H \iff \#G = \#H$

Übung. (a) $G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Für $N \trianglelefteq G$ gilt:

$$G/N \text{ abelsch} \iff [G, G] \leq N$$

Einschub: Faktorringer

Definition 0.48 (Ideal). Sei R ein kommutativer Ring. $I \subseteq R$ heißt Ideal wenn

- I ist Untergruppe von $(R, 0, +)$
- $RI := \{ri \mid r \in R, i \in I\} \subseteq I$

Beispiel. 1) $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$ ist ein Ideal $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) $Ra \subseteq R$ für $a \in R$ ist ein Ideal von R .

Satz 0.49. Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, und $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ die Nebenklassenmenge von R modulo I (für die Gruppe $(R, 0, +)$). Dann:

(a) Die Verknüpfungen

$$+ : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, (r + I, s + I) \longmapsto (r + s) + I$$

$$\cdot : R/I \times R/I \longrightarrow R/I, (r + I, s + I) \longmapsto rs + I$$

sind wohl-definiert auf R/I

(b) $(R/I, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring ($\bar{r} := r + I$ Notation für die Klasse von r) der Restklassenring von R modulo I .

(c) $\pi : R \longrightarrow R/I, r \longmapsto r + I$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Beweis. (a) “+” wohl-definiert folgt aus Satz 44. ($I \subseteq (R, 0, +)$ Ideal!)

“ \cdot ” wohl-definiert: Gelte $a + I = a' + I$ und $b + I = b' + I$.

$$\implies a'b' + I = ab + aj + bi + ij + I = ab + I$$

(b) (Übung)

(c) Wie in 45 (d)

□

Die Isomorphiesätze

Satz 0.50 (Erster Isomorphiesatz). Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:

(a) $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\} \subseteq G$ ist ein Untergruppe.

(b) $H \cap N \subseteq H$ ist ein Normalteiler (und (Übung) $N \trianglelefteq HN$)

(c) Die folgende Abbildung ist wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus

$$H/H \cap N \longrightarrow HN/N, h(H \cap N) \longmapsto hN$$

Beweis. (a) Seien $hn, h'n' \in HN$, dann:

$$(h'n')(hn)^{-1} = h' \underbrace{n'n^{-1}h^{-1}}_{\substack{\in Nh^{-1} \\ N \trianglelefteq G} = h^{-1}N} = h'h^{-1}\tilde{n} \stackrel{H \text{ U.G.}}{=} (h'h^{-1})\tilde{n} \in HN$$

und $e = ee = HN$

(b) Zu zeigen: für $h \in H$ gilt $h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N$

Dazu:

$$\begin{aligned} h(H \cap N)h^{-1} &\subseteq hHh^{-1} = H \\ h(H \cap N)h^{-1} &\subseteq hNh^{-1} \stackrel{N \trianglelefteq G}{=} N \implies h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N. \end{aligned}$$

(c) Betrachte die Verkettung von Gruppenhomomorphismen

$$\varphi : H \xrightarrow[h \mapsto h]{\text{Inklusion}} HN \xrightarrow[x \mapsto xN]{} HN/N$$

dann ist φ ein Gruppenautomorphismus.

φ ist surjektiv: Jede Klasse in HN/N ist von der Form

$$hnN = \underbrace{hN}_{=\varphi(h)}$$

für ein $h \in H$. Nach Homomorphiesatz: nur noch zu zeigen $\text{Kern}(\varphi) = H \cap N$: für $h \in H$:

$$h \in \text{Kern}(\varphi) \iff \varphi(h) = eN \iff hN = eN \xrightarrow[44(c)]{\implies} h \in N \xrightarrow[h \in H]{\implies} h \in N \cap H$$

Umgekehrt: $h \in N \cap H \implies h \in N \implies hN = eN = N$.

□

Satz 0.51 (Zweiter Isomorphiesatz). Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, und sei $\pi : G \longrightarrow G/N, g \longmapsto \bar{g} = gN$ die Faktorabbildung.

(a) Sei $X := \{H \leq G \mid N \subseteq H\}$, und sei $\bar{X} := \{\bar{H} \leq G/N\}$, dann ist die Abbildung

$$\psi : X \longrightarrow \bar{X}, H \longmapsto \pi(H) = H/N =: \bar{H}$$

eine Bijektion mit inverser Abbildung

$$\nu : \bar{X} \longrightarrow X, \bar{H} \longmapsto \pi^{-1}(\bar{H}).$$

Dabei gilt:

$$X \ni H \trianglelefteq G \iff \bar{X} \ni \pi(H) \trianglelefteq G/N$$

(b) Ist $H \in X$ ein Normalteiler von G , so ist

$$G/H \longrightarrow (G/N) / (H/N), g \longmapsto \underbrace{\bar{g}}_{gN} \underbrace{\bar{H}}_{\pi(H)}$$

wohl-definiert und ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. (a) Nach Proposition 33 sind ψ und ν wohl-definiert.

- $\nu \circ \psi = \text{id}_X$: Sei $H \leq G$ mit $N \subseteq H$, zu zeigen ist $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$. Es gilt:

$$g \in \pi^{-1}(\pi(H)) \iff \pi(g) \in \pi(H) \iff gN \in \bigcup_{h \in H} hN$$

$$\iff \exists h \in H : gN = hN \xrightarrow[44(c)]{\implies} h^{-1}g \in N \subseteq H \implies g \in hH = H.$$

(“ \Leftarrow ” klar: $g \in H \implies g \in \pi^{-1}(\pi(H))$).

- $\psi \circ \nu = \text{id}_{\bar{X}}$: Für $\bar{H} \in \bar{X}$ (d.h. $\bar{H} \leq G/N$) ist zu zeigen $\pi(\pi^{-1}(\bar{H})) = \bar{H}$. Dies gilt, denn π ist surjektiv.
- Schließlich: Sei $H \in X$, zu zeigen ist $H \trianglelefteq G \iff \pi(H) \trianglelefteq G/N$

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$$

$$\xRightarrow{\pi: G \rightarrow G/N \text{ surj.}} \forall \bar{g} \in G/N : \bar{g}\pi(H)\bar{g} \subseteq \pi(H) \implies \pi(H) \trianglelefteq G/N$$

Umgekehrt: Falls $\pi(H) \trianglelefteq G/N$ und $g \in G$:

$$\begin{aligned} \pi(gHg^{-1}) &= \bar{g}\pi(H)\bar{g}^{-1} \subseteq \pi(H) \\ \implies gHg^{-1} &\subseteq \pi^{-1}(\pi(gHg^{-1})) \subseteq \pi^{-1}(\pi(H)) \stackrel{\nu \circ \psi = \text{id}_X}{=} H \end{aligned}$$

(b) Sei $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq H$, so dass nach (a)

$$\bar{H} = \underbrace{H/N}_{\pi(H)} \trianglelefteq \underbrace{G/N}_{\pi(G)}$$

ein Normalteiler ist. Betrachte den verketteten Gruppenautomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow[g \mapsto gN]{\pi} G/N \xrightarrow[\bar{g} \mapsto \bar{g}\bar{H}]{\pi'} (G/N)/(H/N)$$

π, π' sind surjektive Gruppenhomomorphismen nach Satz 44(d) \implies die Verkettung φ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Nach Homomorphiesatz für Gruppen bleibt zu zeigen: $\text{Kern}(\varphi) = H$:

$$\begin{aligned} g \in \text{Kern}(\varphi) &\iff_{\pi'(\pi(g))=e} \pi(g) \in \text{Kern}(\pi') \iff gN \in H/N \\ &\iff gN \subseteq H \iff_{N \subseteq H} g \in H. \end{aligned}$$

□

(Semi-)direkte Produkte

Lemma 0.52 (Übung). Seien (G_1, e_1, \circ_1) und (G_2, e_2, \circ_2) Gruppen, dann ist $G = (G_1 \times G_2, (e_1, e_2), \circ)$ eine Gruppe mit

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$$

Analog für $k \geq 2$ Faktoren. Dabei sind $G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G$ und $\{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G$ Normalteiler von G .

Definition 0.53 (Direktes Produkt). Die Gruppe G aus Lemma 52 heißt das direkte Produkt von G_1 und G_2 , Notation $G_1 \times G_2$.

Beispiel.

$$(\mathbb{R}^n, \underline{0}, +) = (\mathbb{R}, 0, +) \times \cdots \times (\mathbb{R}, 0, +) = \bigtimes_{i=1}^n (\mathbb{R}, 0, +)$$

Proposition 0.54. Sei G eine Gruppe, seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ Nullteiler mit $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, dann gelten:

- (a) $\forall n_1 \in N_1, n_2 \in N_2 : n_1 n_2 = n_2 n_1$
- (b) $N_1 N_2 \trianglelefteq G$ ist ein Normalteiler in G
- (c) $\psi : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1 N_2, (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$ ist ein Gruppenisomorphismus.
(Insbesondere gilt $\#N_1 N_2 = \#N_1 \#N_2$)

Zusatz: Gilt $G = N_1 N_2$, so folgt $G \cong N_1 \times N_2$ via ψ .

Beweis. (a) Seien $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$, setze $x = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}$. Nun:

$$x = (n_1 n_2 n_1^{-1}) n_2^{-1} \in (n_1 N_2 n_1^{-1}) N_2 \subseteq N_2 N_2 = N_2$$

analog

$$x = n_1 (n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}) \in N_1 (n_2 N_1 n_2^{-1}) \stackrel{N_2 \trianglelefteq G}{\subseteq} N_1 N_1 = N_1$$

damit ist $x \in N_1 \cap N_2 = \{e\} \implies x = e \implies n_1 n_2 = n_2 n_1$.

(b) Für $g \in G$:

$$g N_1 N_2 g^{-1} = g N_1 g^{-1} g N_2 g^{-1} \subseteq N_1 N_2$$

(c) ψ ist wohl-definiert: klar. ψ ein Gruppenhomomorphismus folgt aus (a)

$$\begin{aligned} \psi((n_1, n_2) \circ (n'_1, n'_2)) &= \psi((n_1 \circ n'_1, n_2 \circ n'_2)) = n_1 n'_1 n_2 n'_2 \\ &\stackrel{(a)}{=} n_1 n_2 n'_1 n'_2 = \psi(n_1, n_2) \circ \psi(n'_1, n'_2) \end{aligned}$$

$\{(e, e)\} = \text{Kern}(\psi)$:

$$\begin{aligned} \psi(n_1, n_2) = e &\iff n_1 n_2 = e \iff n_1 = n_2^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{e\} \\ &\iff n_1 = n_2 = e \end{aligned}$$

$\text{Bild}(\psi) = N_1 N_2$.

□

Korollar 0.55 (Übung). Sei G eine endliche Gruppe. Seien $N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$ Normalteiler von G und gelte:

$$(i) \forall i \neq j : \text{ggT}(\#N_i, \#N_j) = 1$$

$$(ii) \prod_{j=1}^k \#N_j = \#G$$

Dann ist

$$\psi : \bigtimes_{j=1}^k N_j \longrightarrow G, (n_1, \dots, n_k) \longmapsto n_1 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{j=1}^k n_j$$

ein Gruppenisomorphismus.

Übung. Spezialfall: $n = \prod_{i=1}^k p_i^{f_i}$ für p_1, \dots, p_k paarweise verschiedene Primzahlen, dann gilt:

$$\bigtimes_i^k \mathbb{Z}/(p_i^{f_i}) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

ist Folge von Korollar 55.

Lemma 0.56. Seien $H = (H, e_H, \circ_H), N = (N, e_N, \circ_N)$ Gruppen und sei $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Definiere

$$G := N \rtimes H := N \rtimes_{\varphi} H = (N \times H, \underbrace{(e_N, e_H)}_{=: e}, \circ)$$

mit \circ der Verknüpfung auf G definiert durch

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, h_2) = (n_1 \circ_N \varphi(h_1)(n_2), h_1 \circ_H h_2)$$

Dann ist G eine Gruppe und es gelten:

- $N' := \{(n, e_H) \mid n \in N\} \cong N$ ist ein Normalteiler in G ,
- $H' := \{(e_N, h) \mid h \in H\} \cong H$ ist eine Untergruppe von G ,
- $N'H' = G$ und $N' \cap H' = \{e\}$,
- $G \rightarrow H, (n, h) \mapsto h$ ist ein Gruppenepimorphismus (surj.) mit Kern N' .

Definition 0.57 (Semi-direktes Produkt). Die Gruppe $G = N \rtimes H$ heißt das semi-direkte Produkt von N mit H (bezüglich φ).

Satz 0.58. Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe, dann gelten:

(a) $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N), h \mapsto \underbrace{(c_h|_N : N \rightarrow N, n \mapsto hnh^{-1})}_{\text{Konjugation mit } h}$ ist wohl-definiert und ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Gelten zusätzlich (i) $NH = G$, (ii) $N \cap H = \{e\}$, so ist

$$\psi : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G, (n, h) \mapsto n \circ_G h$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Siehe Jantzen, Schwermer - Algebra. □

Beispiele.

1. Seien $A_n = \text{Kern}(\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\})$ die Untergruppe der geraden Permutationen und τ eine beliebige Transposition, dann gilt:

$$S_n \cong A_n \rtimes \{\text{id}, \tau\}$$

2. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\sigma \in O(V)$ eine Spiegelung, dann gilt

$$O(V) \cong SO(V) \rtimes \{\text{id}, \sigma\}$$

3. Sei K ein Körper, dann gilt

$$\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes H \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes K^\times$$

wobei

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^\times \right) \right\} \cong K^\times$$

4. Sei $\sigma \in A_4$ ein 3-Zykel, z.B. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, und V ist die kleinsche Vierergruppe

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \trianglelefteq A_4,$$

dann gilt

$$A_4 \cong V \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\}$$

Beweis. (Übung) eventuell noch 12 Tage warten. □