Aufg. 2)

Sei (V,β) sympl. K-VR mit $\dim = 2n$

a) Sei $v \in V\setminus\{0\}$

z.z. $\exists$ sympl. Basis $\underline{B} = (b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n)$ mit $b_1 = v$.

Bew.: Da $v \neq 0$: Wähle $v = b_1$ als ersten Basisvektoren:

$\underline{B}' = (v, b_2, \dots, c_1, \dots, c_n)$ Basis von V.

Die Matrixdarstellung von $Mat_{\underline{B}'}(\beta) = \beta(b_i, b_i)$ $\quad \begin{matrix} b_i \neq b_j \\ 1 \leq i,j \leq 2n \end{matrix}$

Da β symplektisch $\Rightarrow Mat_{\underline{B}'}(\beta) = J_{2n}$

$\Rightarrow$ Verwende Basis $\underline{B} = (v, b_2, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow Mat_{\underline{B}}(\beta) = J_n$

Da $Mat_{\underline{B}}\, T_v(\beta)$ symplektisch $\overset{1.5.25}{\Rightarrow} \det T_v = 1$ $\square$

b) $K = \mathbb{R}$, $V = V_4(\mathbb{R})$, β sympl. Bil.form

$$Mat_{\underline{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme sympl. Basis $\underline{B} = (b_1, b_2, c_1, c_2)$ mit $b_1 = e_1$ zu (V,β)

$b_1 = e_1$

Suche weiteren Vektor, sodass $\beta(e_1, e_2) \neq 0$

$\Rightarrow \beta(e_1, e_2) = -2 \neq 0$

$\Rightarrow b_2 = -\frac{1}{2} e_2$

Berechne c_1, c_2 aus Lösungsraum des LGS der ersten zwei Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

-1 Trick: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1'; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_2'$

$$c_1 = \frac{1}{\beta(c_1, c_2)} \cdot c_1' = \frac{1}{c_1'^T \cdot Mat_{\underline{\varepsilon}}(\beta) \cdot c_2'} \cdot c_1' = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$c_2 = c_2'$

$$\Rightarrow \underline{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$