(1.a) f, Drehung, dann $A := Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$

$\mathbb{1}_n \in O(n)$, $A \in O(n)$

$A = \mathbb{1}_n \cdot A$

definiere $\mathbb{1}_n^k = \left(\delta_{ij} \cancel{\delta_{ik}} (1 - 2\delta_{ik})\right)_{i,j \le n}$

$\cancel{\mathbb{1}_n^i}$ $\cancel{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}$ $\mathbb{1}_n^k = \left(\delta_{ij}(1 - \delta_{ik})\right)_{1 \le i,j \le n}$

z.B. $\mathbb{1}_n^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix}$

$\mathbb{1}_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix}$ ... usw

dann ist $\mathbb{1}_n^i \in O(n)$ $\forall i$

da $(\mathbb{1}_n^i)^T (\mathbb{1}_n^i) = \mathbb{1}_n^i \mathbb{1}_n^i = \mathbb{1}_n$

$\det(\mathbb{1}_n^i) = -1$

$\Rightarrow \mathbb{1}_n^i$ ist Spiegelung.

$(\mathbb{1}_n^i)^{-1} = \mathbb{1}_n^i$

$\cancel{\mathbb{1}_n^i A}$ $\mathbb{1}_n^i \in O(n)$, $A \in O(n)$

$\Rightarrow \mathbb{1}_n^i A \in O(n)$

$\det(\mathbb{1}_n^i A) = \underbrace{\det \mathbb{1}_n^i}_{-1} \underbrace{\det A}_{1} = -1$

$\Rightarrow$ def. $A' := \mathbb{1}_n^i A \in O(n)$

$\det A' = -1 \Rightarrow A'$ Spieg.

$\Rightarrow$ wir haben gefunden zwei Spiegelungen,
deren Produkt (Verkettung) ~~eine~~ A
ergibt.

Die sind offensichtlich nicht eindeutig.
da $\mathbb{1}_n^i$ und $\mathbb{1}_n^i A$ ergeben verschied.
Spieg. für verschied. $i \in \{1, \dots, n\}$

1b) $f \in Aut(V)$ orth., Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$l_A = f$, $\Rightarrow A \in O(n) := \{f \in Aut(V) : f \text{ orth}\}$
$\Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$

wegen (a) {ist f eine Drehung, d.h. A hat Determin. $\det A = +1$, dann lässt sich f als Verkettung von 2 Spiegelungen schreiben.

$2 = m \leq n$, $\forall n \geq 2$ (für $n=1$ gibt es keine Drehungen)

falls f keine Drehung ist, dann gilt $\det A = -1$,
$\Rightarrow f$ zerfällt in (ungerade) Faktoren in $O(n)$ mindestens 3.
$(S_1 S_2 S_3 \cdots S_{2K+1}) \in O(n)$
$\det(S_1 S_2 \cdots S_{2K+1}) = (-1)^{2K+1} = -1$

Es gibt nur n Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow m := 2k+1 \leq n$

1c) $\det f = 1 \Rightarrow f$ ist Drehung. und nach (1.b) und (1.a) ~~kann~~ lässt sich als Verkettung maximal $2k \leq n$ Spiegelungen schreiben, Jedes Paar davon wäre eine Drehung, wegen $\det(S_1 S_2) = (-1)^2 = 1$

$\Rightarrow$ $2k$ Spiegelungen lassen sich schreiben als k Drehungen

$$\Rightarrow 2k \leq n \Rightarrow k \leq \frac{n}{2}$$