1 Letztes Mal

Ableitung

Mittelwertsatz für Differenzialrechnung

Satz zur Monotonie

Zurück zu lokalen Extrema

Wir haben gesehen, dass für differenzierbare Funktionen auf offennen Intervallen gilt:

$$\{\text{Stellen lokaler Extrema von} f\} \subset \{\text{kritische Punkte von } f\}$$

Wir benötigen noch eine hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extrema.

Sei x_0 ein kritischer Punkt von f und sei f in x_0 2 mal differenzierbar. Dann gilt:

$$f''(x_0) > 0 \implies f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lok. Min.}$$
$$f''(x_0) < 0 \implies f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lok. Max.}$$

1.0.1 Beweis

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

Sei $f''(x_0) > 0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \forall x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x_0\}$$

für $x_0 < x : \implies x - x_0 > 0$

$$\implies f'(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

Satz zur Monotonie $\implies$ f ist streng monoton wachsend auf $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ für $x_0 > x \implies x - x_0 < 0$.

$$\implies f'(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

Satz zur Monotonie $\implies$ f ist streng monoton fallend auf $[x_0 - \varepsilon, x_0] \implies f$ besitzt ein lokales Min. in x_0.

Vorzeichenbedingungen an die 2. Ableitung haben die geometrische Interpretation von Konvexitätsbedingungen.

Konvexität

Def. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I, f heißt konvex auf I, wenn

$$\forall x, x' \in I, x < x', \forall t \in [0, 1] : (*) f(tx + (1 - t)x') \leq tf(x) + (1 - t)f(x')$$

f heißt konkav auf I, wenn ein $(*) \geq$ gefordert wird, Gemoetrich:

- Der Graph befindet sich immer unterhalb der Sekante (konvex).
- Der Graph befindet sich immer oberhalf der Sekante (konkav).

Satz zur Konvexität

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

$$f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \implies f \text{ ist konvex auf } (a, b)$$

$$f''(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \implies f \text{ ist konkav auf } (a, b)$$

Beweis: Sei $x < x', x, x' \in (a, b)$, es gelte $f'' \geq 0$ Zu zeigen ist die Ungleichung (*).

$$t \in [0, 1], x_0 := tx + (1 - t)x'$$

Mittelwertsatz

$$\implies \exists \xi \in (x, x_0) : f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$\exists \xi' \in (x_0, x') \implies f'(\xi') = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

$$f'' \geq 0 \implies f'$$

ist monoton wachsend.

$$\xi < \xi' \implies f'(\xi) \leq f'(\xi')$$

$$\implies \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

$$x_0 - x = tx + (1 - t)x' - x = (1 - t)(x' - x)$$

$$x' - x_0 = x' - tx - (1 - t)x' = x' - tx + tx' = t(x' - x).$$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{(1 - t)(x' - x)} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{t(x' - x)}$$

$$\implies \frac{f(x_0) - f(x)}{(1 - t)} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{t}$$

$$\implies tf(x_0) - tf(x) \leq (1 - t)f(x') - (1 - t)f(x_0)$$

Analog unter der Voraussetzung $f'' \leq 0$ Beispiel:

$$f(x) = \log x . f'(x) = \frac{1}{x} . f''(x) = -\frac{1}{x2} \leq 0$$

$\implies f$ ist konkav.

$$\implies \log(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{1}{2}(\log(x_1) + \log(x_2)) = \log((x_1 x_2)^{\frac{1}{2}})$$

exp monoton wachsend $\implies \frac{x_1+x_2}{2} \geq (x_1, x_2)^{\frac{1}{2}}$

Auch die allgemeninen Form der Ungleichung zwischen aritmetischen und geometrischen Mittel lässt sich mit Hilfe der Konkavität von log herleiten.

1.1 Die Regel von de l'Høpital

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\xi \in I$, I ein Invervall.

$$g(\xi \neq 0) \implies \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

$$g(\xi) = 0 \wedge f(\xi) \neq 0 \implies \nexists \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

Es gelte nun $f(\xi) = 0$ und $g(\xi) = 0$ Regel von de l'Høpital: Ist

- $g'(x) \neq 0 \forall x \in I - \{\xi\}$
- f, g differenzierbar auf $I - \{\xi\}$
- es existiere $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Gelten diese Bedingungen, dann gilt

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Beweisen