Grundkurs Mathematik

Die Reihe „Grundkurs Mathematik" ist die bekannte Lehrbuchreihe im handlichen kleinen Taschenbuch-Format passend zu den mathematischen Grundvorlesungen, vorwiegend im ersten Studienjahr. Die Bücher sind didaktisch gut aufbereitet, kompakt geschrieben und enthalten viele Beispiele und Übungsaufgaben.

In der Reihe werden Lehr- und Übungsbücher veröffentlicht, die bei der Klausurvorbereitung unterstützen. Zielgruppe sind Studierende der Mathematik aller Studiengänge, Studierende der Informatik, Naturwissenschaften und Technik, sowie interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II.

Die Reihe existiert seit 1975 und enthält die klassischen Bestseller von Otto Forster und Gerd Fischer zur Analysis und Linearen Algebra in aktualisierter Neuauflage.

Otto Forster · Thomas Szymczak

Übungsbuch zur Analysis 2

Aufgaben und Lösungen

8., aktualisierte Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Otto Forster
Ludwig-Maximilians-Universität
München, Deutschland
forster@mathematik.uni-muenchen.de

Dr. Thomas Szymczak
Ostfildern, Deutschland
szymczak@web.de

ISBN 978-3-658-00512-2
ISBN 978-3-658-00513-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00513-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Band stellt den zweiten Teil eines Übungsbuches zur Analysis dar.
Wie im ersten Band ist das Buch in einen Aufgaben– und Lösungsteil untergliedert. Die Aufgaben stammen vorwiegend aus dem Buch „Analysis 2“ von O. Forster, jedoch auch die zusätzlichen Aufgaben setzen stofflich nicht mehr Wissen voraus.
Die Lösungen zu den einzelnen Aufgaben sind weitgehend sehr ausführlich dargestellt und an die Bücher „Analysis 1“ und „Analysis 2“ (im folgenden mit An. 1 und An. 2 zitiert) von O. Forster angelehnt, so daß sie auch ohne zusätzliche Literatur zu verstehen sind. Ist zu einer Aufgabe keine Lösung enthalten, so wurde sie, je nach Schwierigkeitsgrad, mit einer ausführlichen Anleitung versehen.
Sicherlich wird dieses Buch nicht fehlerfrei sein und zu einigen Aufgaben gibt es kürzere bzw. elegantere Lösungen, doch ich hoffe, daß der Leser mit diesem Buch nicht den *Spaß* verliert, selbst mathematische Aufgaben zu lösen. Denn man sollte sich in der Regel, *bevor* man eine Lösung zu einer Aufgabe in einem Buch nachliest, ausgiebig mit ihr beschäftigt haben und versucht haben, selbst eine Lösung zu finden.
Schließlich möchte ich noch einige Danksagungen aussprechen:

- Herrn Professor O. Forster, der mit seinen Büchern zur Analysis dieses Buch erst möglich gemacht hat.
- Herrn Professor Dr. W. Kühnel, bei dem ich die Grundvorlesungen zur Analysis gehört habe.
- Für die Mithilfe beim Korrekturlesen danke ich Herrn Kühn und Herrn Westermann.
- Dem Vieweg–Verlag und insbesondere Frau Schmickler–Hirzebruch für die Herausgabe des Buches.

Dinslaken, Februar 1995 *Thomas Szymczak*

Vorwort zur 2. Auflage

In der vorliegenden zweiten Auflage wurden einige Lösungen vereinfacht. Weiter wurden diejenigen Aufgaben, zu denen Lösungen bzw. Hinweise im 2. Teil vorhanden sind, im Aufgabenteil mit einem Stern versehen.

Rostock, März 1997 *Thomas Szymczak*

Vorwort zur 4. Auflage

Nachdem der Band Analysis 2 mit der 6. Auflage eine umfassende Neubearbeitung erfahren hat, wurde auch das vorliegende Übungsbuch überarbeitet und der Neuauflage der Analysis 2 angepasst. Einige frühere Übungsaufgaben sind jetzt in den Haupttext der Analysis 2 aufgenommen; dafür kamen andere Aufgaben und Lösungen hinzu.

April 2005 *Otto Forster*
Thomas Szymczak

Vorwort zur 8. Auflage

Für die 8. Auflage wurden eine Reihe von Aufgaben überarbeitet, Lösungen vereinfacht und zum Teil alternative Lösungswege angegeben. Außerdem kamen einige neue Aufgaben und Lösungen hinzu.

Juli 2012 *Otto Forster*
Thomas Szymczak

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Aufgaben

§1. Topologie metrischer Räume

Aufgabe 1 A.* Auf $\mathbb{R}$ werde eine Metrik δ definiert durch

$$\delta(x,y) := \arctan|x-y|.$$

Man zeige, dass δ die Axiome einer Metrik erfüllt und dass die offenen Mengen bzgl. dieser Metrik dieselben sind wie bzgl. der üblichen Metrik

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Aufgabe 1 B. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Auf X werde eine neue Metrik δ definiert durch

$$\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Man zeige, dass δ die Axiome einer Metrik erfüllt und dass die offenen Mengen bzgl. der Metrik δ dieselben sind wie bzgl. der Ausgangs-Metrik d.

Aufgabe 1 C. Es sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $x_k \in X$, $k = 1,\ldots,4$, Punkte aus X. Man beweise:

a) $\quad |d(x_1,x_2) - d(x_2,x_3)| \le d(x_1,x_3)$,

b) $\quad |d(x_1,x_2) - d(x_3,x_4)| \le d(x_1,x_3) + d(x_2,x_4)$.

Aufgabe 1 D.* Seien A, $B \subset \mathbb{R}$ beliebige Teilmengen. Man zeige:

a) $\quad (A \times B)^{\circ} = \mathring{A} \times \mathring{B}$,

b) $\quad \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Aufgabe 1 E.* Seien A, $B \subset \mathbb{R}$ beliebige Teilmengen. Man zeige, dass für den Rand von $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B).$$

Aufgabe 1 F.* Man zeige, dass in einem metrischen (oder topologischen) Raum die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.

*Zu den mit einem Stern versehenen Aufgaben finden sich Lösungen im Lösungsteil

O. Forster, T. Szymczak, *Übungsbuch zur Analysis 2*, Grundkurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-658-00513-9_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Aufgabe 1 G.* Man beweise:

a) Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X ist genau dann offen, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$.

b) Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial Y \subset Y$.

Aufgabe 1 H.* Es sei X eine beliebige Menge. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

auf X eine Metrik definiert (d heißt *triviale Metrik* auf X). Man zeige, dass jede Teilmenge von X bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 1 I. Es sei X ein metrischer Raum und A, B zwei Teilmengen von X. Man zeige folgende Aussagen:

a) $\left(\mathring{A}\right)^{\circ} = \mathring{A} \subset A \subset \overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

b) Die Vereinigung aller offenen Teilmengen von X, die auch Teilmenge von A sind, ist gleich $\mathring{A}$. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, welche A umfassen, ist gleich $\overline{A}$.

c) Ist $A \subset B$, so auch $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.

d) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^{\circ}$, $\quad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

e) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$, $\quad \overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$. Gilt i.a. auch Gleichheit?

Aufgabe 1 J.* Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen werde folgende Topologie eingeführt: Offene Mengen sind außer $\emptyset$ und $\mathbb{Z}$ alle Teilmengen $U \subset \mathbb{Z}$, so dass $\mathbb{Z} \setminus U$ endlich ist. Man zeige, dass die Axiome einer Topologie erfüllt sind, aber das Hausdorffsche Trennungs-Axiom nicht gilt.

§2. Grenzwerte. Stetigkeit

Aufgabe 2 A.* Seien $f,\, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf dem metrischen Raum X. Für $x \in X$ werde definiert

$$\varphi(x) := \max(f(x), g(x)), \qquad \psi(x) := \min(f(x), g(x)).$$

Man zeige, dass die Funktionen $\varphi,\, \psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 2 B. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\[2ex] 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man prüfe, ob f in $(0,0)$ stetig ist.

Aufgabe 2 C.* Sei W der offene Würfel im $\mathbb{R}^n$,

$$W := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1 \text{ für } i = 1,\ldots,n\}$$

Man konstruiere einen Homöomorphismus von W auf die Einheitskugel

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

Aufgabe 2 D.* Man zeige, dass der Vektorraum $C[a,b]$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit der Supremums–Norm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$$

vollständig ist.

Aufgabe 2 E.* Auf dem Vektorraum $C^1[a,b]$ aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ werde folgende Norm eingeführt:

$$\|f\|_{C^1} := \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \ : \ x \in [a,b]\}.$$

a) Man zeige, dass $C^1[a,b]$ mit dieser Norm vollständig ist.

b) Man zeige: Die Abbildung

$$D : C^1[a,b] \longrightarrow C[a,b], \qquad f \longmapsto f',$$

wird stetig, wenn man $C^1[a,b]$ mit der $\|\ \|_{C^1}$–Norm und $C[a,b]$ mit der Supremums–Norm versieht.

Aufgabe 2 F.* Auf dem Vektorraum $C[0,\pi]$ aller stetigen Funktionen $f: [0,\pi] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremums-Norm (vgl. Aufgabe 2 D), werde folgende Abbildung

$$S : C[0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))dx$$

definiert. Man zeige, dass S stetig ist.

Aufgabe 2 G. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Man zeige: Y ist mit der induzierten Metrik genau dann vollständig, wenn Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 2 H.* Es sei ℓ^∞ der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$.

a) Man zeige, dass durch

$$\|(a_n)\|_{\ell^\infty} := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

eine Norm auf ℓ^∞ definiert wird, bzgl. der ℓ^∞ vollständig ist.

b) Sei $C \subset \ell^\infty$ der Untervektorraum aller konvergenten Zahlenfolgen. Man untersuche, ob C abgeschlossen in ℓ^∞ ist.

Aufgabe 2 I. Es sei X die Menge aller komplexer Zahlenfolgen, d.h.

$$X := \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}, \qquad ((a_n),(b_n) \in X),$$

eine Metrik auf X definiert wird.

b) Sei $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus X, d.h. eine Folge von Folgen

$$A_\nu = (a_{\nu 0}, a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \ldots, a_{\nu n}, a_{\nu n+1}, \ldots), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Man zeige: Die Folge $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann bzgl. der oben definierten Metrik gegen das Element

$$A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) \in X,$$

wenn für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ die Folge komplexer Zahlen $(a_{\nu n})_{\nu\in\mathbb{N}}$ gegen a_n konvergiert.

c) Man beweise: Der metrische Raum (X,d) ist vollständig.

§3. Kompaktheit

Aufgabe 3 A. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *lokal beschränkt*, d.h. zu jedem Punkt $p \in X$ gibt es eine Umgebung U von p, so dass $f \mid U$ beschränkt ist. Dann ist f auf ganz X beschränkt.

Aufgabe 3 B.* Man zeige, dass die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines Hausdorff-Raumes wieder kompakt ist.

Aufgabe 3 C.* Es sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten Teilmengen eines Hausdorff-Raumes. Man zeige, dass dann auch die Menge

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

nichtleer und kompakt ist.

Aufgabe 3 D.* Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *folgenkompakt*, wenn es zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in A$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert.
Man beweise: Jede folgenkompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Aufgabe 3 E.* Seien K und L kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man zeige, dass dann auch die Menge

$$K + L := \{x + y \,:\, x \in K,\ y \in L\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist.

Aufgabe 3 F. Man beweise: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Aufgabe 3 G.* (Lebesguesches Lemma).
Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K.
Man zeige: Es gibt eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ existiert ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$.

Aufgabe 3 H.* Man beweise: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgabe 3 I.* Seien X, Y Hausdorff-Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Man beweise: Die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \to X$ ist stetig, d.h. f ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3 J. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge und $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ein Punkt. Man zeige: Es gibt (mindestens) einen Punkt $q \in A$ mit

$$\|p - q\| = \operatorname{dist}(p, A) := \inf\{\|p - a\| : a \in A\}.$$

Dieser Punkt q ist ein Randpunkt von A.

Aufgabe 3 K.* Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x, y) \ : \ y \in J\}.$$

Man zeige, dass F stetig ist.

Aufgabe 3 L.* Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *halbstetig von unten* (bzw. *von oben*), wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{x \in X : f(x) > c\} \qquad (\text{bzw. } \{x \in X : f(x) < c\})$$

offen in X ist. Man beweise:

a) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn sie halbstetig von unten und halbstetig von oben ist.

b) Ist X kompakt, so nimmt jede von unten (oben) halbstetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ihr Minimum (Maximum) an.

Aufgabe 3 M. Auf der Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ werde wie folgt eine Topologie definiert: Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heiße offen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $U \cap \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$ im üblichen Sinn.

ii) Falls $\infty \in U$, existiert ein $r > 0$ mit $]r, \infty[\subset U$.

iii) Falls $-\infty \in U$, existiert ein $r > 0$ mit $]-\infty, -r[\subset U$.

Man zeige, dass dadurch eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert wird, mit der $\overline{\mathbb{R}}$ ein kompakter Hausdorff-Raum wird.

Aufgabe 3 N.* Im Banachraum $C[0,1]$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\| \;\; \|$, sei

$$K(1) := \{f \in C[0,1] : \|f\| \le 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel.

a) Man konstruiere eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in K(1)$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle n und

$$f_n f_m = 0 \quad \text{für alle } n \neq m.$$

b) Man zeige: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

Bemerkung. Damit ist gezeigt, dass $K(1)$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 3 O. Es sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ gibt, so dass

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x_i).$$

Man zeige: Eine abgeschlossene Teilmenge $K \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes X ist genau dann kompakt, wenn K total beschränkt ist.

Anleitung. Man imitiere den Beweis von An. 2, §3, Satz 2 über kompakte Quader.

§4. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 4 A.* Seien a, b, c, $r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $r > 0$. Man berechne die Bogenlänge der Kurve

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(t) := (r\cos t, r\sin t, ct).$$

Aufgabe 4 B.* Sei $c \in \mathbb{R}^*$ und

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(t) := (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t).$$

Die Kurve f heißt *logarithmische Spirale*.

a) Man skizziere die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \le t \le 2\pi$.

b) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f \mid [a,b]$. Man berechne $L_{a,b}$.

c) Existiert $\lim\limits_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

d) Man zeige, dass die logarithmische Spirale jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechne den Cosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 4 C. Es sei $f:\ [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) := (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin t).$$

Man skizziere die Kurve und zeige, dass $f \mid]0,\pi[$ injektiv und regulär ist.

Aufgabe 4 D.*

a) Man zeige, dass für jedes $k \in [0,1]$ das uneigentliche Integral

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

existiert. $E(k)$ heißt *vollständiges elliptisches Integral*.

b) Man drücke die Bogenlänge der Ellipse

$$f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \longmapsto (a\cos t, b\sin t),$$

mit den Halbachsen a, $b \in \mathbb{R}_+^*$ mit Hilfe von $E(k)$ aus.

Aufgabe 4 E. Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann existiert eine Parametertransformation

$$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b],$$

so dass die Kurve $g := f \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. für alle $t \in [\alpha,\beta]$ gilt

$$\|g'(t)\| = 1.$$

Aufgabe 4 F. Man zeige, dass $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} (t, t\cos(\pi/t)), & \text{falls } t \in]0,1], \\ (0,0), & \text{falls } t = 0, \end{cases}$$

eine stetige Kurve ist, die nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 4 G. Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$< x,y > := \{\lambda x + (1-\lambda)y \,:\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

die Verbindungsstrecke von x nach y. Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *Polygonzug*, wenn es Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$P = \bigcup_{i=1}^{k-1} < x_i, x_{i+1} > .$$

a) Man beweise: Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x(1-x)}\right), & \text{falls } x \in \,]0,1[, \\ 0, & \text{falls } x \in \{0,1\}, \end{cases}$$

ist in $[0,1]$ beliebig oft differenzierbar (in 0 und 1 einseitig differenzierbar), und es gilt

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

b) Es sei f die Funktion aus a) und

$$C := \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Dann ist $C > 0$. Wir definieren eine Funktion $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \frac{1}{C} \int_0^x f(\xi)\,d\xi.$$

Man zeige:

i) F ist streng monoton wachsend mit $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$.

ii) F ist in $[0,1]$ beliebig oft differenzierbar mit

$$F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0 \qquad \text{für alle } k \geq 1.$$

c) Man beweise mit b), dass jeder Polygonzug P die Bildmenge $c([a,b])$ einer beliebig oft differenzierbaren Kurve $c : \,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist.

§5. Partielle Ableitungen

Aufgabe 5 A.* Man untersuche, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto y\sqrt{2x^2+y^2}$$

(einmal) partiell differenzierbar ist und berechne dort ihre partiellen Ableitungen.

Aufgabe 5 B.* Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, dass F überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1D_2F(0,0) \neq D_2D_1F(0,0).$$

Ist F im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 5 C.* Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Man zeige, dass

$$\text{div rot } v = 0.$$

Aufgabe 5 D. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v = (v_1, v_2, v_3) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Man zeige, dass

$$\text{rot}\,(\text{rot } v) = \nabla(\text{div } v) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3).$$

Aufgabe 5 E.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f,\ g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen. Man zeige

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f.$$

Aufgabe 5 F.* Man zeige: Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x,t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right),$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Aufgabe 5 G.* Sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := \|k\| c$. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion. Man zeige: Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x,t) := f(\langle k, x\rangle - \omega t)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

§6. Totale Differenzierbarkeit

Aufgabe 6 A.* Man berechne die Jacobi–Matrix der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(r,\theta,\varphi) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Aufgabe 6 B.* Es sei p die wie folgt definierte Abbildung

$$p : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad p(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Man zeige: Ist $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, so gilt auf der Menge $p^{-1}(G)$ die Gleichung

$$(\Delta u)\circ p = \frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u\circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial\varphi^2}.$$

Aufgabe 6 C.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit beschränktem Differential, d.h. es gebe eine Konstante $K \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\|Df(x)\| \le K \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Man zeige, dass f in U gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 6 D.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) =: c$. Man zeige, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ auf der Niveaufläche

$$N_f(c) = \{z \in U \;:\; f(z) = c\}$$

senkrecht steht, d.h. folgendes gilt: Ist

$$\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\varepsilon > 0),$$

eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit

$$\varphi(0) = x \quad \text{und} \quad \varphi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset N_f(c),$$

so folgt

$$\langle \varphi'(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle = 0.$$

Aufgabe 6 E. Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Weiter sei $f : B_r(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.
Man zeige: Gilt

$$\nabla f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in B_r(x),$$

so ist f auf $B_r(x)$ konstant.

Aufgabe 6 F.* Es sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = y \text{ und } x \neq 0\}.$$

Weiter sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} e^x - 1, & \text{falls } (x, y) \in M, \\ 0, & \text{falls } (x, y) \notin M. \end{cases}$$

Man zeige:

a) f ist in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann partiell differenzierbar, wenn $(x, y) \notin M$ ist.

b) Die Richtungsableitung $D_v f(0)$ von f in 0 existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$.

c) Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ und

$$D_v f(0) \neq \langle v, \operatorname{grad} f(0) \rangle.$$

§7. Taylor–Formel. Lokale Extrema

Aufgabe 7 A.* Man bestimme die Taylor–Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x-y}{x+y},$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2.Ordnung.

Aufgabe 7 B.* Man bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2).$$

Aufgabe 7 C. Man bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y) := \sin x \sin y.$$

Aufgabe 7 D. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2–Matrix. Weiter sei D die Determinante von A, also $D = ac - b^2$.
Man beweise direkt ohne Benutzung des Determinantenkriteriums von Hurwitz/Jacobi (An. 2, §7):

a) A ist positiv definit, falls $a > 0$ und $D > 0$.

b) A ist negativ definit, falls $a < 0$ und $D > 0$.

c) A ist indefinit, falls $D < 0$.

Aufgabe 7 E.* Sei $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ das folgende homogene Polynom k–ten Grades

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha,$$

$c_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Man beweise:

a) Ist $\beta \in \mathbb{N}^n$ ein n–tupel mit $|\beta| = k$, so gilt
$$D^\beta P(x) = \beta!\, c_\beta.$$

b) Gilt $P(x) = 0$ für alle x aus einer gewissen Umgebung des Nullpunkts, so folgt $c_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$.

c) Es gilt $P(x) = o(\|x\|^m)$ für alle $m < k$.

d) Gilt $P(x) = o(\|x\|^k)$, so folgt $P(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 7 F.* Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$ ein Punkt. In einer Umgebung von x gebe es zwei Darstellungen
$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \xi^\alpha + \varphi(\xi)$$
und
$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} \widetilde{c}_\alpha \xi^\alpha + \widetilde{\varphi}(\xi)$$
mit $\varphi(\xi) = o(\|\xi\|^k)$ und $\widetilde{\varphi}(\xi) = o(\|\xi\|^k)$. Man zeige, dass dann bereits $c_\alpha = \widetilde{c}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$ gilt.

Aufgabe 7 G.* Seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $C_b^k(U)$ die Menge alle k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $D^\alpha f$ beschränkt in U ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$. Für $f \in C_b^k(U)$ werde definiert
$$\|f\|_k := \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup\{|D^\alpha f(x)| \;:\; x \in U\}.$$

Man beweise:

a) Die Abbildung
$$\|\;\|_k : C_b^k(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \|f\|_k$$
ist eine Norm auf dem Vektorraum $C_b^k(U)$.

b) Für $f, g \in C_b^k(U)$ gilt
$$\|fg\|_k \le \|f\|_k \|g\|_k.$$

c) Der normierte Vektorraum $(C_b^k(U), \|\;\|_k)$ ist vollständig.

§8. Implizite Funktionen

Aufgabe 8 A.* Es sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$F(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung. Man berechne die Funktional–Matrix von F und, wo sie existiert, ihre Inverse. Man zeige, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Aufgabe 8 B.* Man diskutiere die Höhenlinien der Funktion

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto xye^{-x-y}$$

und untersuche insbesondere, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sich die Mengen

$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ F(x,y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ y = \varphi(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,y) \in I \times J \ : \ x = \psi(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \longrightarrow J$ bzw. $\psi : J \longrightarrow I$ darstellen lassen.

Aufgabe 8 C.* Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x,y,z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

Man zeige, dass durch $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x,y) = (1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x,y)$ mit $\varphi(1,1) = 1$ implizit definiert ist und berechne die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ im Punkt $(1,1)$.

§9. Untermannigfaltigkeiten

Aufgabe 9 A.* Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x,y,z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parameterdarstellung von C ist.

Aufgabe 9 B.* Die Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_4) &= x_1 x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1, \ldots, x_4) &= x_2 x_4 - x_3^2 \\ f_3(x_1, \ldots, x_4) &= x_1 x_4 - x_2 x_3 \end{aligned}$$

Man zeige, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 9 C.* Die Menge $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ aller reellen 3×3-Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad x_{ij} \in \mathbb{R},$$

werde mit dem $\mathbb{R}^9$ mit Koordinaten $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{33}$ identifiziert. Es sei

$$O(3) = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) : A^\top A = E\}$$

die Menge aller orthogonalen 3×3-Matrizen. ($A^\top$ bezeichne die zu A transponierte Matrix.)
Man zeige, dass $O(3)$ eine 3-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 9 D.* Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x, y) := 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Anleitung. Man berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von K und dann auf dem Rand von K, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 9 E. Man bestimme den Abstand des Punktes $(1,-1,0)$ von dem Rotationshyperboloid

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-z^2 = 1\},$$

d.h.

$$\inf_{(x,y,z)\in H} d((x,y,z),(1,-1,0)).$$

§10. Integrale, die von einem Parameter abhängen

Aufgabe 10 A.* Man berechne das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$

durch Differenzieren des Parameter–abhängigen Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty}\,dt.$$

Aufgabe 10 B.*

a) Man beweise für $y > -1$ die Formel

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y}{1+y^2} + \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{1}{1+y^2} - \frac{\log(1+y)}{1+y^2}.$$

Anleitung. Man stelle eine Partialbruch-Zerlegung

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{\alpha+\beta x}{1+x^2} + \frac{\gamma}{1+xy}$$

her, wobei α,β,γ nur von y, aber nicht von x abhängige reelle Zahlen sind.

b) Man zeige:

$$Z := \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Anleitung. Man betrachte das vom Parameter $y > -1$ abhängige Integral

$$F(y) := \int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{1+x^2} dx.$$

Offenbar gilt $F(0) = 0$ und $F(1) = Z$.

Man berechne $F'(y)$ durch Differentiation unter dem Integral und Benutzung von Teil a). Schließlich erhält man $F(1)$ durch Integration von $F'(y)$.

Aufgabe 10 C.* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und

$$f : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto f(x,y),$$

eine stetige, nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige, dass die durch

$$F(y) := \int_a^y f(x,y)\, dx$$

definierte Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und dass für alle $y \in I$ gilt

$$F'(y) = f(y,y) + \int_a^y D_2 f(x,y)\, dx.$$

Anleitung. Man beweise, dass die durch

$$G(y,z) := \int_a^z f(x,y)\, dx$$

definierte Funktion $G : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.

Aufgabe 10 D.* Sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x,y)\,dx$$

wohldefiniert sind, und dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Aufgabe 10 E.* Es sei $f\colon [-r,r]^3 \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion dreier Variablen:

$$f(x_1,x_2,x_3) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man berechne das dreifache Integral

$$V := \int_{-r}^{r} \int_{-r}^{r} \int_{-r}^{r} f(x_1,x_2,x_3)dx_1 dx_2 dx_3.$$

Bemerkung. $2V$ ist das Volumen der 4-dimensionalen Kugel vom Radius r.

Aufgabe 10 F. Es sei $f :]0,1] \times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Man zeige, dass die folgenden Doppelintegrale

$$C_1 := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{und} \quad C_2 := \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

als uneigentliche Integrale existieren, aber $C_1 \neq C_2$ ist.

§11. Elementare Lösungsmethoden

Aufgabe 11 A.* In $G := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^2$ sei P_c, $c > 0$, die Schar der (Halb-)Parabeln

$$y = cx^2, \quad x > 0.$$

a) Man bestimme eine Differentialgleichung

$$y' = f(x,y), \qquad (x,y) \in G,$$

deren Lösungen genau die Parabeln P_c sind.
b) Man stelle die Differentialgleichung der Orthogonal-Trajektorien zur Schar P_c, $c > 0$, auf und löse sie.

Aufgabe 11 B.* Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d.h. die Lösung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

a) $y' = e^y \cos x$,

b) $y' = \sqrt{1-y^2}, \qquad (|y| < 1)$,

c) $y' = \dfrac{1}{y}\sqrt{1-y^2}, \qquad (0 < y < 1)$,

d) $y' = (a^2+x^2)(b^2+y^2), \qquad (a, b > 0)$,

e) $(1-x^2)y' - xy + 1 = 0, \qquad (|x| < 1)$.

Aufgabe 11 C.* Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = (x+y)^2$,

b) $(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0, \qquad (y > 0)$,

c) $y' + y + (\sin x + e^x)y^3 = 0, \qquad (y > 0)$.

Anleitung. Man verwende folgende Substitutionen:

$$\text{a) } z = x+y, \qquad \text{b) } z = \frac{1}{y}, \qquad \text{c) } z = \frac{1}{y^2}.$$

Aufgabe 11 D.* Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Differentialgleichungen (bei b) und c) in impliziter Form).

a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\sin\frac{y}{x}}, \qquad (x > 1, y \in \,]0, \pi[)$,

b) $y' = \dfrac{2y-x}{y}, \qquad (x \in \,]0,1[, y > 1),$

c) $y' = \dfrac{x+y}{x+2y}, \qquad (x > 0, y > 0).$

§12. Existenz– und Eindeutigkeitssatz

Aufgabe 12 A.* Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für die Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y), \qquad (x,y) \in I \times J,$$

beweise man:

a) Sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ mit $g(y_0) = 0$. Dann ist die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := y_0 \quad \text{für alle } x \in I$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

b) Sei $\psi : I_1 \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung auf einem Intervall $I_1 \subset I$. Gilt $g(\varphi(x_1)) \neq 0$ für ein $x_1 \in I_1$, so ist $g(\varphi(x)) \neq 0$ für alle $x \in I_1$.

Aufgabe 12 B. Man zeige, dass für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

der Eindeutigkeitssatz nicht gilt und bestimme alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.

Aufgabe 12 C.* Mit Hilfe des Picard–Lindelöfschen Iterationsverfahrens berechne man die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \binom{a}{b}$.

Aufgabe 12 D.* Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz–Bedingung genüge. Es gelte

$$f(-x,y) = -f(x,y) \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man beweise: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung

$$\varphi : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bei Spiegelung an der y–Achse in sich über.

Aufgabe 12 E.* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}^n$ global einer Lipschitz–Bedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genügt. Weiter seien φ, $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Sei $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a) - \psi(a)\|$. Man zeige

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \delta e^{L|x-a|} \qquad \text{für alle } x \in I.$$

§13. Lineare Differentialgleichungen

Aufgabe 13 A.* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \longrightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.
Man zeige: Man erhält eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x)\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

wobei u, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{cases} g' = \left(a_{22} - a_{12}\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) g, \\[2ex] u' = \dfrac{a_{12}}{\varphi_1} g. \end{cases}$$

Aufgabe 13 B.* Man bestimme alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \dfrac{1}{x} y_2 + \log x + \dfrac{1}{x}, \\ y_2' = (1-x)y_1 + y_2 + (x-1)\log x. \end{cases}$$

Anleitung. Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist $\varphi(x) = \binom{1}{x}$.

Aufgabe 13 C.* Sei $r > 0$, $I := \,]-r, r[$ und seien a, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. a sei ungerade und b sei gerade, d.h.

$$a(-x) = -a(x), \qquad b(-x) = b(x) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Man zeige: Die Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen, das aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.

Aufgabe 13 D.* Gegeben sei die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x)y = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten stetige Funktionen $a_i: I \to \mathbb{K}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ seien.
Man beweise: Die Wronski-Determinante $W: I \to \mathbb{K}$ eines Fundamentalsystems von Lösungen von (1) genügt der Differentialgleichung

$$W'(x) + a_{n-1}(x)W(x) = 0.$$

Anleitung. Man beweise dazu folgende Regel für die Differentiation einer Determinante:
Sei $\Phi = (\varphi_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, deren Koeffizienten differenzierbare Funktionen $\varphi_{ij}: I \to \mathbb{K}$ sind. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \det \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{i1}'(x) & \ldots & \varphi_{in}'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

wobei im i-ten Summanden nur die i-te Zeile der Matrix differenziert wird.

Aufgabe 13 E.* Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \longrightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$ eine matrixwertige Funktion, deren Komponenten beliebig oft differenzierbar seien. Man zeige, dass alle Lösungen $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ beliebig oft differenzierbar sind.

§14. Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 14 A.* Man löse die Differentialgleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\gamma}{r^2}, \qquad (r > 0),$$

mit der Anfangsbedingung

$$r(0) = r_0 > 0, \qquad \dot{r}(0) = v_0 > 0.$$

Dabei ist γ eine positive Konstante.
Man zeige: Es gibt ein $v^* > 0$, so dass für $v_0 \geq v^*$ die Lösung $r(t)$ für $t \to \infty$ unbegrenzt wächst, während für $v_0 < v^*$ ein $t_1 > 0$ so existiert, dass die Lösung $r(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ monoton wächst und für $t \geq t_1$ monoton fällt.

Bemerkung. Die Differentialgleichung beschreibt die radiale Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss der Schwerkraft eines anderen.
Man berechne die Geschwindigkeit v^* für die Erdanziehung und

$$r_0 = 6370 \text{ km} \quad \text{(Erdradius)}.$$

Für die Erde ist $\gamma = g r_0^2$, wobei

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{(Erdbeschleunigung)}.$$

Aufgabe 14 B.* Man bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = (6x^2 + x - 3)e^x, \quad (x > -\frac{1}{2}),$

b) $x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2, \quad (0 < x < 1).$

Anleitung. Die zugehörige homogene Gleichung besitzt eine spezielle Lösung der Gestalt $y = e^{\alpha x}$ im Fall a) und $y = x^{\beta}$ im Fall b) mit geeigneten Konstanten α, β. Eine weitere Lösung der homogenen Gleichung erhält man mit An. 2, §14, Satz 2. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimme man durch Zurückführung auf ein System 1.Ordnung und Variation der Konstanten.

Aufgabe 14 C.*
a) Man zeige, dass

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

ein Polynom n-ten Grades ist und die Hermitesche Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

löst.

b) Man zeige, dass für $n \neq m$ die Hermiteschen Polynome H_n und H_m orthogonal sind bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx.$$

Aufgabe 14 D. Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige, dass für die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + (2n + 1 - x^2) y = 0$$

gilt $y(x) = e^{-x^2/2} u(x)$, wobei u eine Lösung der Hermiteschen Differentialgleichung

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0$$

ist.

Aufgabe 14 E.* Man bestimme ein Lösungs–Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung für $p = \frac{1}{2}$,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0,$$

durch den Ansatz $z = \sqrt{x} y$.

Aufgabe 14 F.* Sei $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Lineare Abbildungen

$$T_p, S_p, B_p : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(T_p f)(x) &:= f'(x) + \frac{p}{x} f(x),\\ (S_p f)(x) &:= -f'(x) + \frac{p}{x} f(x),\\ (B_p f)(x) &:= f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) f(x).\end{aligned}$$

(Die Besselsche Differentialgleichung lässt sich dann schreiben als $B_p y = 0$.)

a) Man zeige: Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ gilt

   i) $T_{p+1} S_p f = f - B_p f$,
   ii) $S_{p-1} T_p f = f - B_p f$,
   iii) $T_p B_p f = B_{p-1} T_p f$,
   iv) $S_p B_p f = B_{p+1} S_p f$.

b) Sei $V_p := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \ : \ B_p f = 0\}$ der Vektorraum der Zylinderfunktionen der Ordnung p. Man zeige:

   i) $T_p(V_p) \subset V_{p-1}$, $S_p(V_p) \subset V_{p+1}$.
   ii) Die Abbildungen $S_p : V_p \longrightarrow V_{p+1}$ und $T_{p+1} : V_{p+1} \longrightarrow V_p$ sind Isomorphismen und Umkehrungen voneinander.

c) Man bestimme mittels b) und Aufgabe 14 E alle Zylinderfunktionen der Ordnungen $p = \frac{3}{2}$ und $p = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 14 G.*

a) Seien α, β, γ, p reelle Konstanten, $\beta > 0$, $\gamma \neq 0$. Man zeige, dass für die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left((\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2\gamma^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (x > 0),$$

gilt $y(x) = x^\alpha u(\beta x^\gamma)$, wobei u eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter p ist, d.h.

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0$$

b) Man drücke die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe von Zylinderfunktionen aus (a, b, $m \in \mathbb{R}$):

i) $y'' + a^2x^m y = 0, \quad (a \neq 0, m \neq -2),$

ii) $y'' + \left(1 - \dfrac{a(a+1)}{x^2}\right) y = 0,$

iii) $y'' + \dfrac{a}{x}y' + \dfrac{b^2}{4x}y = 0, \quad (b \neq 0).$

c) Man löse die beiden Differentialgleichungen i) und iii) in den Ausnahmefällen $m = -2$ und $b = 0$.

§15. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 15 A.* Man bestimme ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0,$

b) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0,$

c) $y''' - 2y'' + 2y' - y = 0,$

d) $y''' - y = 0,$

e) $y^{(4)} + y = 0,$

f) $y^{(8)} + 4y^{(6)} + 6y^{(4)} + 4y'' + y = 0.$

Aufgabe 15 B. Es seien a, $b \in \mathbb{R}$. Man bestimme ein reelles Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Hinweis. Man führe folgende Fallunterscheidung durch: $D > 0$, $D = 0$ und $D < 0$, wobei $D := a^2/4 - b$.

Aufgabe 15 C.* Man bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' + 3y' + 2y = 2$,

b) $y'' + y' - 12y = 1 + x^2$,

c) $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x - \sin x$,

d) $y''' - 2y'' + y' = 1 + e^x \cos(2x)$,

e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 25e^{2x}$,

f) $y^{(n)} = xe^x$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 15 D.* Man bestimme alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t),$$

ω_0, ω, $\mu, a \in \mathbb{R}_+^*$, und untersuche ihr asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$.

Aufgabe 15 E.* Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0, \qquad (x > 0), \tag{1}$$

wobei a, $b \in \mathbb{C}$ Konstanten seien.
Man zeige: Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$\psi(\xi) := \varphi(e^\xi),$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + (a-1)y' + by = 0 \tag{2}$$

ist. Man gebe ein Lösungs–Fundamentalsystem von (1) für alle möglichen Parameterwerte a, $b \in \mathbb{C}$ an.

§16. Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 16 A.* Man bestimme ein Fundamentalsystem $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ von Lösungen des Differentialgleichungs–Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi_k(0) = e_k$, $(k = 1,2,3)$, wobei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Aufgabe 16 B.* Man bestimme ein Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 16 C.* Sei $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$U(x_1, x_2) := \tfrac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\operatorname{grad} U(x), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16 D.* Man bestimme die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.

Aufgabe 16 E.* Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Man zeige: A ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn für jede Lösung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x := \varphi(t)$, der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

gilt $\|\varphi(t)\| = \text{const.}$, d.h. unabhängig von $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16 F.* Man bestimme ein reelles Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 16 G. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein reelles Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y' = Ay,$$

indem man zunächst die Jordansche Normalform von A berechne.

Teil II

Lösungen

§1. Topologie metrischer Räume

Aufgabe 1 A. Durch δ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert, denn:

(1) Die arctan-Funktion hat *genau eine* Nullstelle bei $x = 0$ (die arctan-Funktion ist streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei $x = 0$). Daher gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \arctan|x-y| = 0 \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

(2) (Symmetrie). Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta(x,y) = \arctan|x-y| = \arctan|y-x| = \delta(y,x).$$

(3) (Dreiecksungleichung). Zunächst zeigen wir, dass

$$\arctan(x+y) \le \arctan x + \arctan y \qquad \text{für alle } x,\ y \in \mathbb{R}_+ .$$

Man schließt mit Hilfe der Substitution $z := t - x$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\arctan(x+y) &= \int_0^{x+y} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_x^{x+y} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \arctan x + \int_0^{y} \frac{1}{1+(z+x)^2}\,dz \\
&\le \arctan x + \int_0^{y} \frac{1}{1+z^2}\,dz \\
&= \arctan x + \arctan y.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\delta(x,z) &= \arctan|(x-y)+(y-z)| \\
&\le \arctan(|x-y|+|y-z|) && \text{(Monotonie)} \\
&\le \arctan|x-y| + \arctan|y-z| \\
&= \delta(x,y) + \delta(y,z).
\end{aligned}$$

für alle $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ bewiesen.

O. Forster, T. Szymczak, *Übungsbuch zur Analysis 2*, Grundkurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-658-00513-9_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Nun zum Beweis, dass die offenen Mengen bzgl. der Metrik δ dieselben sind, wie bzgl. der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ und umgekehrt.
Mit $\widetilde{B}_r(\cdot)$ bezeichnen wir im folgenden eine offene Kugel bzgl. der Metrik δ und mit $B_r(\cdot)$ eine offene Kugel bzgl. der Metrik d.
Es sei U eine offene Menge bzgl. der Metrik δ und $x \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 \in]0,\pi/2[$ mit $\widetilde{B}_{\varepsilon_1}(x) \subset U$. Mit $\varepsilon_2 := \tan\varepsilon_1 > 0$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_2}(x) &= \{\xi \in \mathbb{R} : |x-\xi| < \tan\varepsilon_1\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : \arctan|x-\xi| < \varepsilon_1\} \\ &= \widetilde{B}_{\varepsilon_1}(x) \subset U, \end{aligned}$$

womit bewiesen ist, dass U auch bzgl. der Metrik d offen ist.
Es sei nun umgekehrt U eine offene Menge bzgl. der Metrik d und $x \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$. Wir setzen dann $\varepsilon_2 := \arctan\varepsilon_1 > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_{\varepsilon_2}(x) &= \{\xi \in \mathbb{R} : \arctan|x-\xi| < \arctan\varepsilon_1\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R} : |x-\xi| < \varepsilon_1\} \\ &= B_{\varepsilon_1}(x) \subset U. \end{aligned}$$

Folglich ist U auch offen bzgl. der Metrik δ.

Aufgabe 1 D. Wir beweisen nur a) und überlassen b) als Übung für den Leser.
„$\subset$“: Es sei $(x,y) \in \overset{\circ}{\overline{(A\times B)}}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon((x,y)) \subset A\times B$. Setzen wir $\varepsilon_1 := \varepsilon/\sqrt{2}$, so gilt

$$B_{\varepsilon_1}(x) \times B_{\varepsilon_1}(y) \subset B_\varepsilon((x,y)) \subset A\times B,$$

d.h. es ist $(x,y) \in \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
„$\supset$“: Ist $(x,y) \in \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$, so existieren ein $\varepsilon_1 > 0$ und ein $\varepsilon_2 > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \quad \text{und} \quad B_{\varepsilon_2}(y) \subset B.$$

Mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ erhalten wir

$$B_\varepsilon((x,y)) \subset B_{\varepsilon_1}(x) \times B_{\varepsilon_2}(y) \subset A\times B,$$

d.h. es ist $(x,y) \in \overset{\circ}{\overline{(A\times B)}}$.

Aufgabe 1 E. Es gilt nach Aufgabe 1 D

$$\begin{aligned}\partial(A\times B) &= \overline{A\times B}\setminus (A\times B)^{\circ}\\ &= (\overline{A}\times\overline{B})\setminus(\mathring{A}\times\mathring{B})\\ &= ((\overline{A}\setminus\mathring{A})\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times(\overline{B}\setminus\mathring{B}))\\ &= (\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B),\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt von der folgenden, einfach zu beweisenden Gleichung aus der Mengenlehre Gebrauch gemacht haben (vgl. auch Bild 1): Sind X und Y Mengen und $A, C \subset X$ bzw. $B, D \subset Y$, so gilt

$$(A\times B)\setminus(C\times D) = ((A\setminus C)\times B)\cup(A\times(B\setminus D)).$$

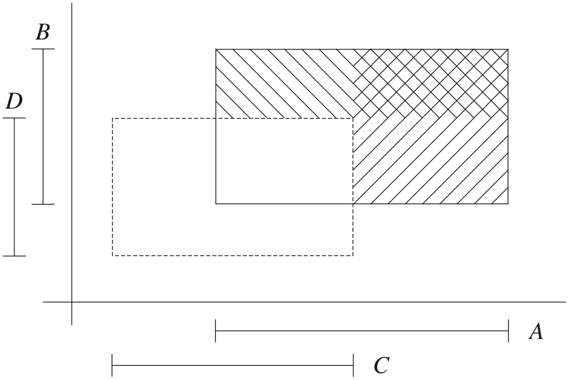

Bild 1

Aufgabe 1 F. Wir benutzen die *de Morganschen Regeln* aus der Mengenlehre: Sei $Y_i \subset X$, $i \in I$, eine beliebige (endliche oder unendliche) Familie von Teilmengen einer Menge X, so gilt

(i) $\displaystyle\bigcap_{i\in I}(X\setminus Y_i) = X\setminus\bigcup_{i\in I} Y_i\,,$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(X\setminus X_i) = X\setminus\bigcap_{i\in I} Y_i\,.$

Sei nun X ein topologischer Raum und es seien $A_1,\dots,A_n$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen von X. Nach Definition sind dann die Komplemente

$$X \smallsetminus A_1,\dots,X \smallsetminus A_n$$

offene Mengen. Da ein Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen wieder offen ist (An. 2, §1, Bemerkung zu Satz 3), ist auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X \smallsetminus A_i)$ eine offene Menge. Nach den de Morganschen Regeln gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n}(X \smallsetminus A_i) = X \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Da $X \smallsetminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ offen ist, folgt dass $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ eine abgeschlossene Menge ist.

Analog folgt aus der Tatsache, dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist und den de Morganschen Regeln, dass der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Aufgabe 1 G.

a) Aus An. 2, §1, Satz 5 a) folgt

$$Y \cap \partial Y = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad Y \smallsetminus \partial Y = Y \quad \Longrightarrow \quad Y \text{ ist offen.}$$

Sei umgekehrt Y offen und wir nehmen an, dass es ein $x \in Y$ mit $x \in \partial Y$ gibt. Dann gilt für jede Umgebung U von x, dass $U \smallsetminus Y \neq \emptyset$ und somit $U \not\subset Y$. Dies steht jedoch nach An. 2, §1, Satz 4, im Widerspruch dazu, dass Y eine offene Menge ist! Also $Y \cap \partial Y = \emptyset$ und damit

$$Y \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad Y \cap \partial Y = \emptyset.$$

b) Mit An. 2, §1, Satz 5 b) ergibt sich

$$\partial Y \subset Y \quad \Longrightarrow \quad Y \cup \partial Y = Y \quad \Longrightarrow \quad Y \text{ ist abgeschlossen.}$$

Aus a) folgt

$$\begin{aligned} Y \text{ abgeschlossen} &\Longrightarrow X \smallsetminus Y \text{ offen} \\ &\Longrightarrow (X \smallsetminus Y) \cap \partial (X \smallsetminus Y) = \emptyset \\ &\Longrightarrow (X \smallsetminus Y) \cap \partial Y = \emptyset \\ &\Longrightarrow \partial Y \subset Y. \end{aligned}$$

und damit

$$Y \text{ abgeschlossen} \iff \partial Y \subset Y.$$

Aufgabe 1 H. Es genügt zu zeigen, dass jede Teilmenge von X offen ist. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass für alle $x \in X$ gilt

$$B_{1/2}(x) = \{x\}.$$

Aufgabe 1 J.

1) Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{Z}$ offen, also $A_i := \mathbb{Z} \setminus U_i$ endlich. Für $U := U_1 \cap U_2$ gilt dann $\mathbb{Z} \setminus U = A_1 \cup A_2$. Da dies endlich ist, ist U nach Definition offen.

2) Sei I eine nicht-leere Indexmenge und seien $U_i \subset \mathbb{Z}$, $i \in I$, offene Mengen, also $A_i := \mathbb{Z} \setminus U_i$ endlich. Für die Vereinigung $V := \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt dann $\mathbb{Z} \setminus V = \bigcap_{i \in I} A_i$. Dies ist endlich, also V nach Definition offen.

Da auch $\mathbb{Z}$ und $\emptyset$ nach Definition offen sind, sind alle Axiome der Topologie erfüllt.

3) Wir zeigen jetzt, dass der dadurch definierte topologische Raum nicht Hausdorffsch ist. Seien $x_1 \neq x_2$ Elemente von $\mathbb{Z}$ und U_i beliebige Umgebungen von x_i, $i = 1, 2$. Da jede Umgebung eine offene Umgebung umfasst, sind die Komplemente $\mathbb{Z} \setminus U_i$ endlich (also die U_i selbst offen). Daraus folgt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Daher ist das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllt.

§2. Grenzwerte. Stetigkeit

Aufgabe 2 A. Nach An. 1, §3, Aufgabe 3.5, gilt für alle $x \in X$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|).$$

Daher folgt die Stetigkeit von φ und ψ unmittelbar aus der Stetigkeit der Betragsfunktion und den Sätzen 5 und 7 aus An. 2, §2.

Aufgabe 2 C. Nach An. 2, Beispiel (2.3) ist die Abbildung

$$\varphi : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \varphi(\xi) := \frac{\xi}{1 - |\xi|},$$

ein Homöomorphismus. Daraus folgt nach An. 2, §1, Satz 6, dass auch die Abbildung

$$\Phi : W =]-1,1[^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)),$$

ein Homöomorphismus ist. Andrerseits ist nach An. 2, Beispiel (2.3) die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow B_1(0), \quad x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|},$$

ein Homöomorphismus. Also liefert die Komposition

$$f \circ \Phi : W \longrightarrow B_1(0)$$

einen Homöomorphismus des Würfels auf die Einheitskugel.

Aufgabe 2 D. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C[a,b]$ bzgl. der Supremums-Norm $\|\ \ \|$. Für jeden Punkt $x \in [a,b]$ und alle $k,m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq \|f_k - f_m\|.$$

Daher ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, die wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gegen eine reelle Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dies definiert eine Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Es bleibt zu zeigen:

(i) f ist stetig, d.h. gehört zu $C[a,b]$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$

Wir beginnen mit dem Beweis von (ii). Da (f_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n,m \geq N.$$

Daraus folgt für jedes $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n,m \geq N,$$

also durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da dies für alle $x \in [a,b]$ gilt, heißt das

$$\|f_n - f\| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N,$$

d.h. die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f.

Daraus folgt auch Behauptung (i), denn ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Damit ist insgesamt bewiesen, dass jede Cauchyfolge (f_n) in $C[a,b]$ konvergiert, also $C[a,b]$ vollständig ist.

Aufgabe 2 E.

a) Bezeichnet $\|\ \|$ die Supremums-Norm für Funktionen auf $[a,b]$, so gilt für alle $f \in C^1[a,b]$ nach Definition der $\|\ \|_{C^1}$-Norm

$$\|f\| \le \|f\|_{C^1} \quad \text{und} \quad \|f'\| \le \|f\|_{C^1}.$$

Daraus folgt: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^1[a,b]$, so sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $C[a,b]$ bzgl. der Supremums-Norm. Da $C[a,b]$ vollständig ist (Aufgabe 2 C), konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C[a,b]$ und die Folge (f_n') gleichmäßig gegen eine Funktion $g \in C[a,b]$. Nach An. 1, §21, Satz 5, ist die Funktion f differenzierbar und es gilt $f' = g$, also liegt f in $C^1[a,b]$. Da

$$\|f_n - f\|_{C^1} \le \|f_n - f\| + \|f_n' - f'\|$$

konvergiert die Folge (f_n) in der $\|\ \|_{C^1}$-Norm gegen f. Dies beweist die Vollständigkeit von $C^1[a,b]$.

b) Es folgt unmittelbar aus den Ableitungsregeln, dass die Abbildung

$$D : C^1[a,b] \to C[a,b], \quad f \mapsto f'$$

linear ist. Da

$$\|D(f)\| = \|f'\| \le \|f\|_{C^1},$$

folgt aus An. 2, §2, Satz 11, dass D stetig ist.

Aufgabe 2 F. Die Stetigkeit der Abbildung

$$S : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))dx$$

bedeutet, dass $S(g)$ nahe bei $S(f)$ liegt, falls die Funktion g nahe bei f liegt (im Sinne der Supremums-Norm). Wir wollen daher $|S(g)-S(f)|$ als Funktion von $\|g-f\|$ abschätzen. Dazu verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion Cosinus. Zu $u,v \in \mathbb{R}$ gibt es ein ξ zwischen u und v, so dass

$$\cos(u)-\cos(v) = -\sin(\xi)\cdot(u-v).$$

Daraus folgt für alle $u,v \in \mathbb{R}$

$$|\cos(u)-\cos(v)| \le |u-v|.$$

Für zwei stetige Funktionen $f,g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gilt deshalb für alle $x \in [0,\pi]$

$$|\cos(g(x))-\cos(f(x))| \le |g(x)-f(x)| \le \|g-f\|.$$

Daraus erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |S(g)-S(f)| &= \left|\int_0^\pi (\cos(g(x))-\cos(f(x))dx\right| \\ &\le \int_0^\pi |\cos(g(x))-\cos((f(x))|dx \\ &\le \int_0^\pi \|g-f\|dx = \pi\|g-f\|. \end{aligned}$$

Aus $|S(g)-S(f)| \le \pi\|g-f\|$ folgt aber mit dem ε-δ-Kriterium unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung S.

Aufgabe 2 H.

a) (i) Die Axiome einer Norm für $\|\ \ \|_{\ell^\infty}$ sind leicht nachzuprüfen. Wir zeigen als Beispiel die Dreiecks-Ungleichung. Seien

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

zwei Elemente von ℓ^∞. Dann ist

$$\|a+b\|_{\ell^\infty} = \sup\{|a_n+b_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Da $|a_n+b_n| \le |a_n|+|b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\sup\{|a_n+b_n| : n \in \mathbb{N}\} \le \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\},$$

also $\|a+b\|_{\ell^\infty} \le \|a\|_{\ell^\infty} + \|b\|_{\ell^\infty}$, d.h. die Dreiecks-Ungleichung ist bewiesen.

(ii) Zum Beweis der Vollständigkeit von ℓ^∞ sei $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine vorgegebene Cauchyfolge in ℓ^∞,

$$a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes feste $i \in \mathbb{N}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq \|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty}.$$

Daraus ergibt sich, dass die Folge $(a_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist, also gegen eine Zahl $a_i^* \in \mathbb{C}$ konvergiert. Wir betrachten nun die Folge $a^* := (a_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$. Die Vollständigkeit von ℓ^∞ ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Folge a^* zu ℓ^∞ gehört, d.h. beschränkt ist, und dass a^* der Grenzwert von $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im Sinne der Norm $\| \ \|_{\ell^\infty}$ ist.

Zur Beschränktheit. Da $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty} \leq 1 \quad \text{für alle } n, m \geq N_1.$$

Daraus folgt

$$\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty} \leq \|a^{(N_1)}\|_{\ell^\infty} + 1 \quad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Mit $K := \max\{\|a^{(0)}\|_{\ell^\infty}, \|a^{(1)}\|_{\ell^\infty}, \ldots, \|a^{(N_1-1)}\|_{\ell^\infty}, \|a^{(N_1)}\|_{\ell^\infty} + 1\}$ ist deshalb

$$\|a^{(n)}\|_{\ell^\infty} \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \text{also} \quad |a_i^{(n)}| \leq K \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Da $a_i^* = \lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)}$, folgt $|a_i^*| \leq K$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge a^* ist beschränkt und liegt deshalb in ℓ^∞.

Zur Konvergenz. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist zu zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dies sieht man so:
Da $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Das bedeutet

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } i \in \mathbb{N}.$$

Da $a_i^* = \lim\limits_{m\to\infty} a_i^{(m)}$, folgt daraus

$$|a_i^{(n)} - a_i^*| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } i \in \mathbb{N},$$

d.h. $\|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$, q.e.d.

b) *Behauptung:* Die Teilmenge $C \subset \ell^\infty$ aller konvergenten Folgen $a = (a_i) \in \ell^\infty$ ist abgeschlossen.

Beweis. Nach An. 2, §2, Satz2, ist Folgendes zu zeigen: Seien $a^{(n)} \in C$, $n \in \mathbb{N}$, und $a^* \in \ell^\infty$ mit $\lim_{n\to\infty} \|a^{(n)} - a^*\|_{\ell^\infty} = 0$. Dann liegt auch a^* in C, d.h. a^* ist eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Da der Körper der komplexen Zahlen vollständig ist, muss nur gezeigt werden, dass $a^* = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|a^{(m)} - a^*\|_{\ell^\infty} < \varepsilon/3$. Da $a^{(m)}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen, d.h. eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_i^{(m)} - a_j^{(m)}| \le \varepsilon/3 \quad \text{für alle } i, j \ge N.$$

Aus $|a_k^{(m)} - a_k^*| \le \varepsilon/3$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt dann

$$|a_i^* - a_j^*| \le |a_i^* - a_i^{(m)}| + |a_i^{(m)} - a_j^{(m)}| + |a_j^{(m)} - a_j^*| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

für alle $i, j \ge N$, d.h. a^* ist eine Cauchyfolge, q.e.d.

§3. Kompaktheit

Aufgabe 3 B. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Es genügt zu zeigen, dass die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen $K_1, K_2 \subset X$ kompakt ist. Denn dann folgt durch Induktion, dass jede endliche Vereinigung von kompakten Teilmengen von X wieder kompakt ist.

Sei $K := K_1 \cup K_2$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von K. Da

$$K_\nu \subset K \subset \bigcup_{i\in I} U_i \qquad \text{für } \nu = 1, 2,$$

ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K_ν, es gibt also wegen der Kompaktheit von K_ν endliche Teilmengen $I_1, I_2 \subset I$ mit

$$K_1 \subset \bigcup_{i\in I_1} U_i \quad \text{und} \quad K_2 \subset \bigcup_{i\in I_2} U_i.$$

Daraus folgt

$$K \subset \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} U_i.$$

Wir haben somit eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i\in I_1\cup I_2}$ von K gefunden, was zeigt, dass $K = K_1 \cup K_2$ kompakt ist.

Bemerkung. Man beachte, dass die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen eines Hausdorff-Raumes i.Allg. nicht wieder kompakt zu sein braucht. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $K_n := [0, 1-1/n]$, $n \geq 1$. Dann ist K_n für jedes $n \geq 1$ kompakt, aber

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1-\tfrac{1}{n}\right] = [0,1[$$

ist nicht kompakt.

Aufgabe 3 C. Nach An. 2, §3, Satz 4, sind alle A_n abgeschlossen. Da der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist, ist auch

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

abgeschlossen. Nach demselben Satz ist A als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A_0 selbst kompakt. Es ist also nur noch zu beweisen, dass A nichtleer ist. Dies beweisen wir durch Widerspruch.
Annahme: Der Durchschnitt A ist leer. Die Komplemente $U_n := X \setminus A_n$ sind offen und aus der Annahme folgt, dass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = X \supset A_0.$$

Wegen der Kompaktheit von A_0 genügen endlich viele der U_n, um A_0 zu überdecken, es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} U_N \supset A_0 \quad &\Longrightarrow \quad X \setminus A_N \supset A_0 \\ &\Longrightarrow \quad A_N \subset X \setminus A_0 \\ &\Longrightarrow \quad A_N \cap A_0 = A_N = \emptyset. \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $A_N \neq \emptyset$. Also ist die Annahme falsch und A nichtleer, q.e.d.

Aufgabe 3 D. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine folgenkompakte Teilmenge. Um zu zeigen, dass A kompakt ist, genügt es nach dem Satz von Heine-Borel (An. 2, §3, Satz 5) zu zeigen:

(1) A ist abgeschlossen.

(2) A ist beschränkt.

Zu (1): Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_k \in A$, die gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiere. Da dann auch jede Teilfolge von (x_k) gegen x konvergiert, gilt nach Voraussetzung $x \in A$. Nach An. 2, §2, Satz 2, ist A dann abgeschlossen.

Zu (2): *Angenommen*, A ist nicht beschränkt.

Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in A$ mit $\|x_n\| > n$. Wegen der Folgenkompaktheit von A existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Diese ist nach An. 2, §3, Corollar zu Satz 3, beschränkt. Da aber $\|x_{n_k}\| > n_k$, ist dies ein Widerspruch. Also ist A doch beschränkt.

Bemerkung. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) ist jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes folgenkompakt. Die Aufgabe zeigt also, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist. Man kann beweisen, dass dies sogar für Teilmengen beliebiger metrischer Räume gilt. Dagegen ist die Aussage in beliebigen topologischen Räumen nicht mehr gültig.

Aufgabe 3 E. Es seien K und L kompakte, insbesondere abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Nach An. 2, Beispiel (1.14), ist dann das Produkt $K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ abgeschlossen. Da $K \times L$ auch beschränkt ist, ist es kompakt. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x,y) \mapsto x+y.$$

Diese Abbildung ist stetig (vgl. An. 2, §2, Satz 7) und es gilt

$$\alpha(K \times L) = K + L.$$

Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt ist (An. 2, §3, Satz 6), folgt dass $K+L$ kompakt ist, q.e.d.

Wir geben noch einen zweiten Beweis für die Kompaktheit von $K+L$.

Nach Aufgabe 3 D genügt es zu zeigen, das $K+L$ folgenkompakt ist, d.h. dass jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $K+L$ eine Teilfolge $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen ein $c \in K+L$ konvergiert.
Sei also $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $K+L$. Jedes x_i lässt sich folgendermaßen darstellen

$$x_i = a_i + b_i, \quad \text{wobei } a_i \in K \text{ und } b_i \in L.$$

Dann ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus K und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus L. Da K kompakt ist, gibt es nach An. 2, §3, Satz 8, eine Teilfolge $(a_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_i), die gegen ein $a \in K$ konvergiert. Nun ist auch $(b_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus L, und da L kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(b_{i_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von (b_{i_k}), die gegen ein $b \in L$ konvergiert. Also:

(1) $(b_{i_{k_l}})$ ist eine Teilfolge von (b_i), die gegen ein $b \in L$ konvergiert.

(2) (a_{i_k}) ist eine Teilfolge von (a_i), die gegen ein $a \in K$ konvergiert, und damit ist auch $(a_{i_{k_l}})$ eine Teilfolge von (a_i), die gegen a konvergiert.

Für die Teilfolge $(x_{i_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}} = (a_{i_{k_l}} + b_{i_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von (x_i) gilt dann nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{l\to\infty} x_{i_{k_l}} = \lim_{l\to\infty}\left(a_{i_{k_l}} + b_{i_{k_l}}\right) = \lim_{l\to\infty} a_{i_{k_l}} + \lim_{l\to\infty} b_{i_{k_l}} = a+b \in A+B.$$

Damit haben wir eine konvergente Teilfolge gefunden, also ist $K+L$ folgenkompakt, q.e.d.

Aufgabe 3 G. Da $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ einen Index $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$. Da $U_{i(x)}$ offen ist, gibt es sogar ein $r(x) > 0$, so dass

$$x \in B_{r(x)}(x) \subset U_{i(x)}.$$

Trivialerweise gilt

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B_{r(x)/2}(x).$$

Somit ist $(B_{r(x/2)}(x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K, und da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existieren $x_1,\dots,x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$K \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} B_{r(x_\nu)/2}(x_\nu).$$

Als “Lebesguesche Konstante” kann man nun wählen

$$\lambda := \min\left\{\frac{r(x_1)}{2},\dots,\frac{r(x_n)}{2}\right\}.$$

Wir zeigen jetzt, dass λ die geforderten Eigenschaften hat. Sei dazu $A \subset K$ eine Teilmenge mit $\operatorname{diam}(A) \le \lambda$. O.B.d.A. ist A nicht leer. Wir wählen einen beliebigen Punkt $a \in A \subset K$. Dann gibt es ein $\nu \in \{1,\dots,n\}$ mit

$$a \in B_{r(x_\nu)/2}(x_\nu) \subset B_{r(x_\nu)}(x_\nu) \subset U_{i(x_\nu)}.$$

Wegen $\operatorname{diam}(A) \le r(x_\nu)/2$ folgt offenbar

$$A \subset B_{r(x_\nu)}(x_\nu) \subset U_{i(x_\nu)},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 3 H. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Es ist zu zeigen, dass jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X konvergiert.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n), die gegen einen Punkt $a \in X$ konvergiert. Wir zeigen jetzt, dass die Gesamtfolge (x_n) ebenfalls gegen a konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Cauchyfolge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|x_n, x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n, m \ge n_0.$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|x_{n_k}, a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \ge k_0.$$

Dann gilt für alle $n \ge N := \max(n_0, n_{k_0})$

$$\|x_n, a\| \le \|x_n, x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}}, a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also konvergiert (x_n) gegen $a \in X$, q.e.d.

Aufgabe 3 I. Sei $g := f^{-1} : Y \to X$ die Umkehrabbildung von f. Zum Beweis der Stetigkeit von g benützen wir das Kriterium im Anschluss an An. 2, §2, Satz 9: g ist genau dann stetig, wenn das Urbild $g^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen in Y ist. Nach An. 2, §3, Satz 4, ist A kompakt. Nach §3, Satz 6, ist $g^{-1}(A) = f(A)$ kompakt in Y, also (wieder nach §3, Satz 4) auch abgeschlossen, q.e.d.

Aufgabe 3 K. Da das Intervall $J \subset \mathbb{R}$ kompakt ist und für festes $x \in I$ die Funktion

$$J \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(x,y),$$

stetig ist, nimmt die Funktion ihr Supremum an, es gibt also ein $y(x) \in J$, so dass

$$F(x) := \sup\{f(x,y) : y \in J\} = f(x, y(x)).$$

(Man beachte: $y(x)$ braucht nicht stetig von x abzuhängen.)

Die Funktion $f : I \times J \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig (An. 2, §3, Satz 10). Zu beliebig vorgebenem $\varepsilon > 0$ gibt es deshalb ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$$

für alle $(x,y),(x',y') \in I \times J$ mit $\|(x,y) - (x',y')\| < \delta$.
Wir zeigen nun:

$(*)$ Für alle $x,x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$.

Dies bedeutet die dann die behauptete Stetigkeit von F.

Beweis von $(*)$. Sei $|x - x'| < \delta$. Dann ist auch $\|(x,y(x)) - (x',y(x))\| < \delta$, also

$$f(x,y(x)) - f(x',y(x)) < \varepsilon$$

Andrerseits gilt nach Definition von $y(x')$

$$f(x',y(x)) \le f(x',y(x')).$$

Zusammen genommen erhalten wir

$$f(x,y(x)) - f(x',y(x')) < \varepsilon$$

Da die analoge Ungleichung auch mit vertauschten Rollen von x und x' gilt, erhält man

$$|F(x) - F(x')| = |f(x,y(x)) - f(x',y(x'))| < \varepsilon, \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 3 L. Wir beweisen hier nur Teil b).

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ halbstetig von unten. Für jede natürliche Zahl n ist dann die Menge

$$U_n := \{x \in X : f(x) > -n\}$$

offen in X und es gilt $U_1 \subset \ldots \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \ldots$ sowie $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$. Da X kompakt ist, wird es von endlich vielen der U_n überdeckt; es gibt also eine natürliche Zahl N mit $X = U_N$. Daraus folgt, dass die Menge

$$A := f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset \mathbb{R}$$

durch $-N$ nach unten beschränkt ist. Sei

$$a := \inf(A) \in \mathbb{R}.$$

i) Falls $a \in A$, gibt es ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = a$, d.h. f nimmt in x_0 sein Minimum an und wir sind fertig.

ii) Falls $a \notin A$, gilt $f(x) > a$ für alle $x \in X$ und es folgt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{mit} \quad V_n := \{x \in X : f(x) > a + \frac{1}{n}\}.$$

Alle V_n sind offen und aus der Kompaktheit von X folgt, dass $X = V_m$ für ein $m \geq 1$. Das heißt aber, dass

$$f(x) > a + \frac{1}{m} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dies steht im Widerspruch zu $a = \inf(f(X))$. Also kann Fall ii) nicht auftreten und wir haben bewiesen, dass f sein Minimum annimmt.

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ von oben halbstetig, so wende man den obigen Beweis auf die Funktion $-f$ an, die von unten halbstetig ist.

Aufgabe 3 N.

a) Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x - 2, & \text{falls } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -4x + 4, & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ 0, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Für $n \geq 0$ setzen wir $f_n(x) := f(2^n x)$, $0 \leq x \leq 1$, siehe Bild 2.

Offenbar gilt $\|f_n\| = 1$ für alle $n \geq 0$. Da die Funktion f_n nur im offenen Intervall $\left]2^{-n-1}, 2^{-n}\right[$ von 0 verschiedene Werte annimmt, folgt $f_n f_m = 0$ für alle $n \neq m$.

b) *Behauptung:* Ist $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, irgend eine Folge von Funktionen mit den Eigenschaften in a), so folgt

$$\|f_n - f_m\| \geq 1 \quad \text{für alle } n \neq m.$$

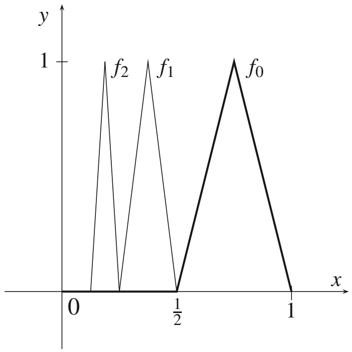

Bild 2

Da f_n stetig und $[0,1]$ kompakt ist, nimmt f_n das Maximum seines Betrages an, es gibt also einen Punkt $a \in [0,1]$ mit $|f_n(a)| = \|f_n\| = 1$. Aus $f_n f_m = 0$ folgt nun $f_m(a) = 0$, also

$$\|f_n - f_m\| \geq |f_n(a) - f_m(a)| = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Daraus folgt aber, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ besitzen kann, denn eine solche Teilfolge wäre eine Cauchyfolge und die Normen $\|f_{n_i} - f_{n_j}\|$ müssten für $i, j \to \infty$ beliebig klein werden, was hier nicht der Fall ist.

Insgesamt haben wir also bewiesen, dass es in der abgeschlossenen Einheitskugel $K(1)$ des normierten Vektorraums $C[0,1]$ eine Folge gibt, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (An. 2, §3, Satz 9) ist daher $K(1)$ nicht kompakt.

Bemerkung. Die gerade bewiesene Aussage steht im Kontrast zur Tatsache, dass die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ kompakt ist. Das unterschiedliche Verhalten ist durch die Dimension begründet, man kann nämlich beweisen: In einem normierten Vektorraum V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist die abgeschlossene Einheitskugel genau dann kompakt, wenn V endlich-dimensional ist.

§4. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 4 A. Die Kurve f ist trivialerweise stetig differenzierbar, daher erhält man für die Bogenlänge L der Kurve f nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|f'(t)\|\,dt \\ &= \int_a^b \|(-r\sin t, r\cos t, c)\|\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2}\,dt \\ &= (b-a)\sqrt{r^2+c^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 B.

a) Bild 3 zeigt eine Skizze von f für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \le t \le 2\pi$.

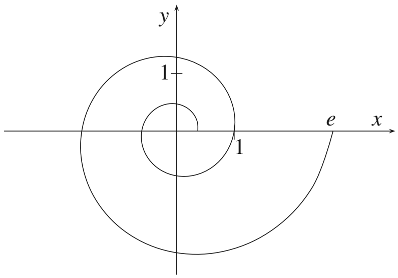

Bild 3

b) f ist eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$f'(t) = (ce^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t, ce^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Daher gilt nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned}
L_{a,b} &= \int_a^b \|f'(t)\|\,dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(ce^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t)^2 + (ce^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t)^2}\,dt \\
&= \int_a^b \sqrt{e^{2ct}((c\cos t - \sin t)^2 + (c\sin t + \cos t)^2)}\,dt \\
&= \int_a^b e^{ct}\sqrt{c^2+1}\,dt \\
&= \sqrt{c^2+1}\cdot \frac{1}{c}e^{ct}\,\Big|_a^b \\
&= \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(e^{cb}-e^{ca}).
\end{aligned}$$

c) Nach b) erhält man $L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(1-e^{ca})$. Also gilt:
Für $c > 0$ ist $\lim\limits_{a\to-\infty} e^{ca} = 0$, also $\lim\limits_{a\to-\infty} L_{a,0} = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}$.
Für $c < 0$ existiert der Grenzwert nicht.

d) Ein Kreis K_r vom Radius r um den Nullpunkt hat nach An. 2, §4, Beispiel (4.1) die Darstellung

$$K_r : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad K_r(t) := (r\cos t, r\sin t).$$

Nun ist zu zeigen, dass es für jedes $r > 0$ genau ein $t_1 \in [0,2\pi[$ und genau ein $t_2 \in \mathbb{R}$ mit $K_r(t_1) = f(t_2)$ gibt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& K_r(t_1) = f(t_2) \\
\Longleftrightarrow\ & (r\cos t_1, r\sin t_1) = (e^{ct_2}\cos t_2, e^{ct_2}\sin t_2) \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} r\cos t_1 = e^{ct_2}\cos t_2 \\ r\sin t_1 = e^{ct_2}\sin t_2 \end{cases} \\
\Longrightarrow\ & (r\cos t_1)^2 + (r\sin t_1)^2 = (e^{ct_2}\cos t_2)^2 + (e^{ct_2}\sin t_2)^2 \\
\Longrightarrow\ & r^2 = e^{2ct_2} \\
\Longrightarrow\ & t_2 = \frac{1}{2c}\log r^2 = \frac{1}{c}\log r
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhält man

$$\cos t_1 = \cos t_2, \qquad \sin t_1 = \sin t_2$$

d.h. für t_1 muss gelten:

$$t_1 = t_2 \bmod 2\pi.$$

Die mod-Funktion ist dabei für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ wie folgt zu verstehen:

$$x \bmod 2\pi := x - \lfloor x/2\pi \rfloor \cdot 2\pi,$$

wobei $\lfloor x/2\pi \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x/2\pi$ ist.

Eine leichte Probe zeigt, dass sie oben berechneten Werte für t_1, t_2 tatsächlich $K_r(t_1) = f(t_2)$ erfüllen.

Für den Cosinus des Schnittwinkels γ erhält man dann

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\langle f'(t_2), K_r'(t_1)\rangle}{\|f'(t_2)\| \cdot \|K_r'(t_1)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere, dass γ unabhängig vom Radius des Kreises ist.

Aufgabe 4 D.

a) Für alle $k \in [0,1]$ und alle $a \in]0,1[$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt && (\text{Substitution: } t = \sin z) \\ = &\int_0^{\arcsin a} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \cos z\,dz \\ = &\int_0^{\arcsin a} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}{\sqrt{\cos^2 z}} \cos z\,dz && (\text{da } \sin^2 z + \cos^2 z = 1) \\ = &\int_0^{\arcsin a} \sqrt{1-k^2\sin^2 z}\,dz && (\text{da } \cos z > 0 \text{ in } [0, \arcsin a]). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der arcsin–Funktion gilt

$$\lim_{a\to 1} \int_0^{\arcsin a} \sqrt{1-k^2\sin^2 z}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 z}\,dz.$$

Die Funktion $z \longmapsto \sqrt{1-k^2\sin^2 z}$ ist in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ stetig, daher existiert nach An. 1, §18, Satz 3, das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 z}\,dz$$

und damit auch für alle $k \in [0,1]$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

und es gilt

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 z}\,dz.$$

b) Da f eine stetig differenzierbare Kurve ist gilt für die Bogenlänge L der Kurve f nach An. 2, §4, Satz 1:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \|(-a\sin t, b\cos t)\|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= b\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{b^2}\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt \end{aligned}$$

$$= b\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\sin^2 t}\,dt$$

$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\sin^2 t}\,dt$$

(nach An. 1, §14, Satz 1 und Corollar 1)

$$\overset{\text{a)}}{=} 4b\cdot E\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right),$$

falls $a^2 \le b^2$. Analog erhält man, falls $a^2 > b^2$:

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

$(\text{Substitution: } z = \cos t)$

$$= 4a\cdot E\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right),$$

also

$$L = \begin{cases} 4b\cdot E\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right), & \text{falls } a^2 \le b^2,\\[2ex] 4a\cdot E\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right), & \text{falls } a^2 > b^2.\end{cases}$$

§5. Partielle Ableitungen

Aufgabe 5 A. f ist für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ einmal partiell differenzierbar und man erhält für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{2x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{2x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aufgabe 5 B. Die partielle Differenzierbarkeit von F außerhalb des Nullpunkts ist klar.

Wir setzen für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\Phi(x,y) := \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

und $\Phi_x := \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$. Analog sei Φ_y definiert.
Da $F(x,y) = xy\Phi(x,y)$, gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\Phi(x,y) + xy\Phi_x(x,y)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\Phi(x,y) + xy\Phi_y(x,y).$$

Daraus folgt für $h \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,h) = h\Phi(0,h) = -h$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(h,0) = h\Phi(h,0) = h.$$

Da F auf der x-Achse und der y-Achse identisch 0 ist, gilt außerdem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(-h) = -1$$

und analog

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h = +1.$$

Damit ist gezeigt, dass $D_1 D_2 F(0,0) \neq D_2 D_1 F(0,0)$.

Wir beweisen jetzt, dass F in $(0,0)$ stetig ist. Da $|x^2 - y^2| \leq |x^2 + y^2|$, folgt

$$|\Phi(x,y)| \leq 1 \quad \text{für alle } (x,y) \neq (0,0).$$

Daraus folgt $|F(x,y)| \leq |xy|$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, folgt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 0 = F(0,0),$$

d.h. die Stetigkeit von F in $(0,0)$.

Aufgabe 5 C. Man erhält mit An. 2, §5, Satz 1:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\operatorname{rot} v)\\
&= \operatorname{div}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 E. Es folgt unmittelbar aus An. 2, §5, Beispiel (5.6) und der Bemerkung zur Definition der Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \operatorname{div}\nabla(fg)\\
&= \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g)\\
&= \operatorname{div}(g\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla g)\\
&= \langle \nabla g, \nabla f\rangle + g\cdot \operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\cdot \operatorname{div}(\nabla g)\\
&= f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 F. Unter Verwendung der Produkt– und Kettenregel schließt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2} \underbrace{\left(t^{-n/2} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot \frac{1}{4t} \right) \right)}_{=F(x,t)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(F(x,t) \cdot \frac{-x_i}{2t} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(F(x,t) \left(\frac{-x_i}{2t} \right)^2 + F(x,t) \cdot \frac{-1}{2t} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F(x,t) \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) \\
&= F(x,t) \left(\frac{1}{4t^2}\, \|x\|^2 - \frac{n}{2t} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(t^{-n/2} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot \frac{1}{4t} \right) \right)}_{=F(x,t)} \\
&= \frac{-n}{2t} F(x,t) + \frac{1}{4t^2} \|x\|^2 F(x,t) \\
&= F(x,t) \left(\frac{1}{4t^2}\, \|x\|^2 - \frac{n}{2t} \right) \\
&= \Delta F(x,t),
\end{aligned}$$

also

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Aufgabe 5 G. Setzen wir $k = (k_1, \ldots, k_n)$, so lautet F ausgeschrieben

$$F(x,t) = f(\langle k,x \rangle - \omega t) = f(\langle k,x \rangle - \|k\| ct) = f\left(\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu x_\nu - \|k\| ct \right).$$

Für $i = 1, \dots, n$ gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t) = f'(\langle k,x\rangle - \|k\|ct) \cdot k_i,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) = f''(\langle k,x\rangle - \|k\|ct) \cdot k_i^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t) = f''(\langle k,x\rangle - \|k\|ct) \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \\ &= \|k\|^2 \cdot f''(\langle k,x\rangle - \|k\|ct). \end{aligned}$$

Ferner erhält man für die partiellen Ableitungen nach t mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f'(\langle k,x\rangle - \|k\|ct) \cdot (-\|k\|c),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) = f''(\langle k,x\rangle - \|k\|ct) \cdot (-\|k\|c)^2 = \|k\|^2 c^2 \cdot f''(\langle k,x\rangle - \|k\|ct).$$

Damit ist

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

bewiesen.

§6. Totale Differenzierbarkeit

Aufgabe 6 A. Man erhält für alle $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3$

$$DF(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 B. Mit der Kettenregel und der Schwarzschen Regel schließt man folgendermaßen:

$$\frac{\partial(u \circ p)}{\partial r}(r,\varphi) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r,\varphi)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi)) \cdot \sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial r^2}(r,\varphi) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi)) \cdot \sin\varphi\right)\\
&= \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi))\right) + \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi))\right)\\
&= \cos\varphi \cdot \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_j}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r,\varphi)\\
&\quad + \sin\varphi \cdot \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_j}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial r}(r,\varphi)\\
&= \cos\varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r}(r,\varphi)\right)\\
&\quad + \sin\varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r}(r,\varphi)\right)\\
&= \cos^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r,\varphi)) + 2\cos\varphi\sin\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r,\varphi))\\
&\quad + \sin^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r,\varphi)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u\circ p)}{\partial\varphi}(r,\varphi) &= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial\varphi}(r,\varphi)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) \cdot ((-r)\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi)) \cdot r\cos\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial\varphi^2}(r,\varphi) &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) \cdot ((-r)\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi)) \cdot r\cos\varphi\right)\\
&= -r\left(\cos\varphi \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi))\right)\right)\\
&\quad + r\left(-\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi)) + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi))\right)\right)\\
&= -r\left(\cos\varphi \frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi)) + \sin\varphi \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_j}(p(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial\varphi}(r,\varphi)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+r\left(-\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi))+\cos\varphi\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_j}(p(r,\varphi))\cdot\frac{\partial p_j}{\partial\varphi}(r,\varphi)\right)\\
=\ &-r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x_1}(p(r,\varphi))-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x_2}(p(r,\varphi))\\
&+r^2\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r,\varphi))-2r^2\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(p(r,\varphi))\\
&+r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r,\varphi)).
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial r^2}(r,\varphi)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(u\circ p)}{\partial r}(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2(u\circ p)}{\partial\varphi^2}(r,\varphi)\\
&\quad=\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(p(r,\varphi))+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(p(r,\varphi))\\
&\quad=\ ((\Delta u)\circ p)(r,\varphi).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 C. Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Setze $\delta:=\varepsilon/K$, dann gilt für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|<\delta$ und alle $x\in U$ mit $\xi+x\in U$ unter Anwendung von An. 2, §6, Satz 5 und dem Hilfssatz zum Corollar zu Satz 5:

$$
\begin{aligned}
\|f(x+\xi)-f(x)\| &= \left\|\left(\int_0^1 Df(x+t\xi)\,dt\right)\cdot\xi\right\|\\
&\le \|\xi\|\cdot\int_0^1\|Df(x+t\xi)\|\,dt\\
&\le \|\xi\|\cdot\int_0^1 K\,dt\\
&= \|\xi\|\cdot K\\
&< \delta\cdot K\\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

und damit ist f in U gleichmäßig stetig.

An. 2, §6, Satz 5, darf hier angewendet werden, denn U ist eine offene Kugel, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{R}^n$ und ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $U = B_r(m)$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$ und alle x, $x+\xi \in U$ unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x+t\xi-m\| &= \|t(x+\xi-m)+(1-t)(x-m)\| \\
&\leq \|t(x+\xi-m)\|+\|(1-t)(x-m)\| \\
&= t\|x+\xi-m\|+(1-t)\|x-m\| \\
&< tr+(1-t)r \\
&= r,
\end{aligned}$$

d.h. $x+t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 6 D. Es gilt $(f \circ \varphi) :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(f \circ \varphi)(x) = c \qquad \text{für alle } x \in]-\varepsilon,\varepsilon[,$$

da $\varphi(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset N_f(c)$ nach Voraussetzung. Also ist $(f \circ \varphi)'(0) = 0$. Damit gilt nach der Kettenregel

$$0 = (f \circ \varphi)'(0) = Df(\varphi(0)) \cdot D\varphi(0) = \langle \varphi'(0), \operatorname{grad} f(x) \rangle.$$

Aufgabe 6 F.

a) Da $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y\}$, vgl. Bild 4, ist f in $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$ (total) differenzierbar (denn $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{M}$ ist offen und $f \mid \mathbb{R}^2 \setminus \overline{M} = 0$) und damit insbesondere partiell differenzierbar.

Im Nullpunkt ist f partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0.$$

Ist $(x,y) \in M$, so gilt $f(x,y) \neq 0$ und die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((x,y)+he_i)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x,y)}{h}$$

existieren für $i = 1,2$ nicht, d.h. f ist in M nicht partiell differenzierbar.

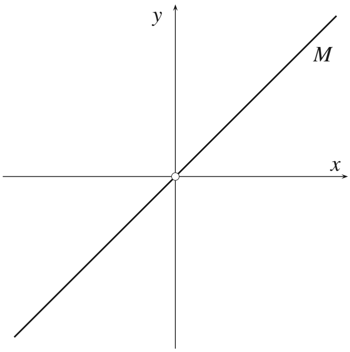

Bild 4

b) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$. Sind v und $(1,1)$ linear unabhängig, so ist

$$tv \notin M \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^*$$

und somit

$$D_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Sind v und $(1,1)$ linear abhängig, so folgt

$$D_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tv_1} - 1}{t} = 1.$$

c) Für $v := \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ gilt $\|v\| = 1$ und nach a) und b)

$$D_v f(0) = 1 \neq 0 = \langle v, (0,0)\rangle = \langle v, \operatorname{grad} f(0)\rangle.$$

§7. Taylor–Formel. Lokale Extrema

Aufgabe 7 A. Die Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ ist in ganz $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Für die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3},$$

Daher gilt nach An. 2, §7, Corollar 1 zu Satz 2, für $(\xi,\eta) \to (0,0)$

$$\begin{aligned} f(1+\xi,1+\eta) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\eta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\frac{\xi^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\frac{\eta^2}{2} \\ &\quad + o(\|(\xi,\eta)\|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{4}\xi^2 + \tfrac{1}{4}\eta^2 + o(\|(\xi,\eta)\|^2). \end{aligned}$$

Aufgabe 7 B. f ist in $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbar, und es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= e^{-x^2-4y^2}\left(x(-8x^2-2y^2+8),\ y(-8y^2-32x^2+2)\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (16x^4-40x^2+4x^2y^2+8-2y^2)e^{-x^2-4y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= (64x^3y-68xy+16xy^3)e^{-x^2-4y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (64y^4-40y^2+256x^2y^2-32x^2+2)e^{-x^2-4y^2}. \end{aligned}$$

Notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremums in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist nach An. 2, §7, Satz 3,

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} x(-8x^2-2y^2+8) = 0, \\ y(-8y^2-32x^2+2) = 0. \end{cases}$$

Dies Gleichungssystem ist genau dann erfüllt, wenn eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist:

(i) $x = 0$ und $y = 0$;

(ii) $x = 0$ und $8y^2 + 32x^2 = 2$;

(iii) $y = 0$ und $8x^2 + 2y^2 = 8$;

(iv) $8x^2 + 2y^2 = 8$ und $8y^2 + 32x^2 = 2$.

Die Bedingung (iv) ist unerfüllbar. Also können nur in den folgenden Punkten lokale Extrema vorliegen:

$$(0,0), \quad \left(0, \tfrac{1}{2}\right), \quad \left(0, -\tfrac{1}{2}\right), \quad (1,0), \quad (-1,0).$$

Für die Hesse-Matrizen an diesen Stellen gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hess} f)(0,0) &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit,} \\
(\mathrm{Hess} f)(1,0) &= (\mathrm{Hess} f)(-1,0) \\
&= \begin{pmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -30e^{-1} \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit,} \\
(\mathrm{Hess} f)\left(0, \tfrac{1}{2}\right) &= (\mathrm{Hess} f)\left(0, -\tfrac{1}{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \tfrac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix} \text{ ist indefinit.}
\end{aligned}$$

Nach An. 2, §7, Satz 4, folgt dann für die lokalen Extrema von f:

- f hat in $(0,0)$ ein lokales Minimum,
- f hat in $(1,0)$ und $(-1,0)$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 7 E.

a) Sei $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| = k$, also $\beta_1 + \dots + \beta_n = k$. P ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
D^\beta P(x) &= \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \left(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} x^\alpha \right)}_{=0, \text{ falls } |\alpha|=k \text{ mit } \alpha \neq \beta} \\
&= c_\beta \left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} x^\beta \right) \\
&= c_\beta \left(\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} \left(x^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x^{\beta_n} \right) \right) \\
&= c_\beta \cdot \beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n! \\
&= \beta! \cdot c_\beta .
\end{aligned}$$

b) Da $P(x) = 0$ für alle x aus einer Umgebung um den Nullpunkt, die wir im Folgenden mit U bezeichnen, gilt

$$D^\alpha P(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k.$$

Unter Benutzung von a) ergibt sich dann

$$\alpha!\, c_\alpha = 0 \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k,$$

und somit

$$c_\alpha = 0 \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| = k.$$

c) Da P ein homogenes Polynom vom Grad k ist, gilt

$$P(tx) = t^k P(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } t \in \mathbb{R}_+ .$$

Weil P stetig und die Einheits-Sphäre im $\mathbb{R}^n$ kompakt ist, folgt

$$M := \sup\{|P(x)| : \|x\| = 1\} < \infty.$$

Zusammen mit der Homogenitäts-Bedingung folgt daraus

$$|P(x)| \le M\|x\|^k,$$

also

$$P(x) = O(\|x\|^k) = o(\|x\|^m) \quad \text{für alle } m < k.$$

d) Das Supremum M von $|P(x)|$ auf der Einheits-Sphäre (vgl. Teil c) wird in einem gewissen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\| = 1$ angenommen. Daraus folgt

$$|P(tx_0)| = Mt^k \quad \text{für alle } t > 0.$$

Aus der Voraussetzung $|P(x)| = o(\|x\|^k)$ folgt andrerseits

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{|P(tx_0)|}{t^k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0,$$

d.h. $P(x)$ ist identisch Null, q.e.d.

Aufgabe 7 F. In einer Umgebung von x gilt

$$\begin{aligned} 0 = f(x+\xi) - f(x+\xi) &= \sum_{|\alpha| \le k} (c_\alpha - \widetilde{c}_\alpha)\xi^\alpha + \underbrace{(\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}(\xi))}_{=:\psi(\xi)} \\ &= \sum_{|\alpha| \le k} (c_\alpha - \widetilde{c}_\alpha)\xi^\alpha + \psi(\xi), \end{aligned}$$

wobei $\psi(\xi) = \mathrm{o}(\|\xi\|^k)$ ist.

Wir setzen zur Abkürzung $b_\alpha := c_\alpha - \widetilde{c}_\alpha$ und müssen also zeigen, dass aus

$$(*) \qquad \sum_{|\alpha| \le k} b_\alpha \xi^\alpha = o(\|\xi\|^k) \quad \text{für } \xi \to 0$$

folgt, dass $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$.

Dies beweisen wir durch Induktion über k.

Induktionsanfang $k = 0$.

Es gibt nur ein n-tupel $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = 0$, nämlich den Nullvektor $\alpha = (0, \ldots, 0) =: 0$. Die Voraussetzung $(*)$ lautet in diesem Fall

$$b_0 = o(1).$$

Daraus folgt aber $b_0 = 0$.

Induktionsschritt $k-1 \to k$.
Wir schreiben $(*)$ als

$$\sum_{|\alpha|\le k} b_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|\le k-1} b_\alpha \xi^\alpha + P(\xi) = o(\|\xi\|^k)$$

mit $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha \xi^\alpha$. Da

$$P(\xi) + o(\|\xi\|^k) = O(\|\xi\|^k) + o(\|\xi\|^k) = o(\|\xi\|^{k-1}),$$

folgt

$$\sum_{|\alpha|\le k-1} b_\alpha \xi^\alpha = o(\|\xi\|^{k-1}),$$

also nach Induktions-Voraussetzung $b_\alpha = 0$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Daraus ergibt sich weiter

$$P(\xi) = o(\|\xi\|^k).$$

Nach Aufgabe 7 E d) ist deshalb $P(x)$ identisch Null, also $b_\alpha = 0$ für alle $|\alpha| = k$. Damit ist die Induktions-Behauptung vollständig bewiesen.

Aufgabe 7 G.

a) Da für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$ die Funktion $D^\alpha f$ in U beschränkt ist, existiert

$$\sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| \in \mathbb{R}$$

und somit ist auch $\|f\|_k \in \mathbb{R}$. Zu bestätigen bleiben noch die drei Normaxiome.

i) Sei $f \in C_b^k(U)$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \|f\|_k = 0 \\
\iff & \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| = 0 \\
\iff & D^\alpha f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } |\alpha| \le k \\
\iff & f(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in U \\
\iff & f = 0.
\end{aligned}$$

ii) Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $f \in C_b^k(U)$

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot f\|_k &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha(\lambda f)(x)| \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |\lambda D^\alpha f(x)| \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |\lambda| \cdot |D^\alpha f(x)| \\
&= |\lambda| \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| \\
&= |\lambda| \cdot \|f\|_k.
\end{aligned}$$

iii) Es gilt für alle $f, g \in C_b^k(U)$

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_k \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha (f+g)(x)| \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x) + D^\alpha g(x)| \\
&\le \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} (|D^\alpha f(x)| + |D^\alpha g(x)|) \\
&\le \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \left(\sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| + \sup_{x\in U} |D^\alpha g(x)| \right) \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha g(x)| \\
&= \|f\|_k + \|g\|_k.
\end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir $D^\alpha(f \cdot g)(x)$ für jedes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$. Unter Benutzung von An. 1, Aufgabe 15.7 i) (Leibnizsche Formel) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&D^\alpha(f\cdot g)(x) \\
&= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} (f \cdot g)(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{|\alpha|-\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\partial^{\alpha_1-\beta_1}f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}}(x)\frac{\partial^{\beta_1}g}{\partial x_1^{\beta_1}}(x)\right)\\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-\beta_1-\ldots-\beta_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}(x)\\
&\quad\cdot\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_n}g}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}(x)\\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|-|\beta|}f}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}(x)\\
&\quad\cdot\frac{\partial^{|\beta|}g}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}(x)\\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\cdot D^{\alpha-\beta}f(x)D^{\beta}g(x).
\end{aligned}
$$

Setzt man $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, so lässt sich obige Gleichung auch in der Form

$$
D^{\alpha}(f\cdot g)(x) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\alpha-\beta|\le k}}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}f(x)D^{\beta}g(x)
$$

schreiben. Dann wird die Ähnlichkeit zur Leibnizschen Formel noch deutlicher. (Man beachte, dass $|\alpha-\beta|\le k$ insbesondere $\alpha-\beta\in\mathbb{N}^n$ fordert.) Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&\|f\cdot g\|_k\\
&= \sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in U}|D^{\alpha}(f\cdot g)(x)|\\
&\le \sum_{|\alpha|\le k}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\alpha-\beta|\le k}}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\sup_{x\in U}\left|D^{\alpha-\beta}f(x)D^{\beta}g(x)\right|\\
&\le \sum_{|\alpha|\le k}\sum_{|\beta|\le k}\frac{1}{\beta!\alpha!}\sup_{x\in U}\left|D^{\alpha}f(x)D^{\beta}g(x)\right|\\
&\le \sum_{|\alpha|\le k}\sum_{|\beta|\le k}\frac{1}{\alpha!\beta!}\sup_{x\in U}|D^{\alpha}f(x)|\cdot\sup_{x\in U}|D^{\beta}g(x)|
\end{aligned}
$$

$$= \left(\sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha f(x)| \right) \cdot \left(\sum_{|\beta| \le k} \frac{1}{\beta!} \sup_{x \in U} |D^\beta g(x)| \right)$$
$$= \|f\|_k \cdot \|g\|_k,$$

also

$$\|f \cdot g\|_k \le \|f\|_k \cdot \|g\|_k.$$

c) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C_b^k(U), \| \ \|_k)$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f_m\|_k < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \ge N.$$

Also gilt für alle $n, m \ge N$

$$\sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha (f_n - f_m)(x)| < \varepsilon,$$

d.h.

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha (f_n - f_m)(x)| < \varepsilon$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$ und somit

$$\frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_m(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$. Aus der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, | \ |)$ folgt dann, dass $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist (vgl. Aufgabe 2 C). Setze

$$f_\alpha := \lim_{n \to \infty} D^\alpha f_n$$

und $f := f_{(0,\ldots,0)}$. Im Folgenden zeigen wir, dass

$$f_\alpha = D^\alpha f$$

erfüllt ist. Diese Aussage reduziert sich darauf,

$$f_{(1,0,\ldots,0)} = D^{(1,0,\ldots,0)} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

zu bestätigen (die allgemeine Aussage folgt dann induktiv und aus Symmetriegründen). Wir setzen nun für jedes $x_0 \in U$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \varphi_n^{(x_0)} : [-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_n^{(x_0)}(t) := f_n(x_0 + te_1), \end{cases}$$

wobei $\varepsilon_{x_0} > 0$ so gewählt ist, dass $x_0 + te_1 \in U$ für alle $t \in [-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}]$ (dies ist möglich, da U eine offene Menge ist). Dann sind $\varphi_n^{(x_0)}$ stetig differenzierbare Funktionen, welche punktweise gegen $t \longmapsto f(x_0 + te_1)$ konvergieren. Außerdem konvergiert

$$t \longmapsto \frac{d}{dt}\varphi_n^{(x_0)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_n(x_0 + te_1) = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0 + te_1)$$

gleichmäßig auf $[-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}]$ gegen $t \longmapsto f_{(1,0,\ldots,0)}(x_0 + te_1)$ (s.o.). Deshalb gilt nach An. 1, §21, Satz 5,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + te_1) = f_{(1,0,\ldots,0)}(x_0 + te_1)$$

und damit, indem man $t = 0$ setzt,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{(1,0,\ldots,0)},$$

unter der Berücksichtigung, dass $x_0 \in U$ beliebig vorausgesetzt war. Es gilt also

- $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine k–mal stetig differenzierbare Funktion, da

  $$f_\alpha = D^\alpha f$$

  und f_α für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ stetig ist (gleichmäßige Konvergenz).
- $D^\alpha f = f_\alpha$ ist beschränkt in U für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$, da $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f_α konvergiert und $D^\alpha f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung beschränkt ist.

Es bleibt also offenbar nur noch zu bestätigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_n - f\|_k < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N'.$$

Setze

$$M := |\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq k\}| .$$

Da $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $D^\alpha f$ konvergiert, gibt es für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ ein $N_\alpha \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in U} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \text{für alle } n \geq N_\alpha.$$

Also gilt für alle $n \geq \max\{N_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$

$$\begin{aligned} &\|f_n - f\|_k \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| \\ &< \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{\varepsilon}{M} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

§8. Implizite Funktionen

Aufgabe 8 A. Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich

$$DF(x,y) \text{ invertierbar} \iff \det(DF(x,y)) \neq 0$$

und $\det(DF(x,y)) = 4x^2 + 4y^2$, existiert $DF^{-1}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, und es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} DF^{-1}(x,y) &= \frac{1}{\det(DF(x,y))} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2+y^2)} & \frac{y}{2(x^2+y^2)} \\ \frac{-y}{2(x^2+y^2)} & \frac{x}{2(x^2+y^2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $f(0,0)=(0,0)$ ist nur zu zeigen, dass jeder Punkt $(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Dies kann man direkt durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2-y^2=u, \\ \quad 2xy \quad = v, \end{cases}$$

zeigen, wobei eine Fallunterscheidung $v=0$ und $v\neq 0$ nützlich ist.

Eine elegantere Möglichkeit ergibt sich durch Benutzung von komplexen Zahlen. Setzt man nämlich $z=x+iy$ und $w=u+iv$, so ist

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy=u+iv=w.$$

Die gegebene Abbildung $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist also, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ identifiziert, nichts anderes als die Abbildung

$$\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto w=z^2.$$

Nun hat bekanntlich jede komplexe Zahl $w\neq 0$ genau zwei Quadratwurzeln. Ist $w=re^{i\varphi}$, $r>0$, $0\leq\varphi<2\pi$, so sind die beiden Lösungen der Gleichung $z^2=w$

$$z_{1/2}=\pm\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}.$$

Aufgabe 8 B. Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$

$$\operatorname{grad} F(x,y)=\left((y-xy)e^{-x-y},(x-xy)e^{-x-y}\right),$$

daher verschwindet der Gradient nur, falls

$$(y-xy,x-xy)=(0,0)\iff(x,y)=(1,1).$$

Somit kann nur in $(1,1)$ ein lokales Extremum vorliegen. Weiter ist

$$\operatorname{Hess} F(x,y)=e^{-x-y}\begin{pmatrix} -2y+xy & 1-x-y+xy \\ 1-x-y+xy & -2x+xy \end{pmatrix}$$

und daher

$$\operatorname{Hess} F(1,1)=e^{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine negativ definite Matrix (denn alle Eigenwerte sind negativ, vgl. An. 2, §7, Bemerkung im Anschluss an die Definition der Definitheit). Daher besitzt F in $(1,1)$ nach An. 2, §7, Satz 4 b), ein isoliertes lokales Maximum, welches sogar ein absolutes Maximum ist, wie man leicht bestätigt.
Einfacher ist es die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := xe^{-x}$$

zu untersuchen, da

$$F(x,y) = xye^{-x-y} = (xe^{-x})(ye^{-y}).$$

Da

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

besitzt f folgende Eigenschaften:

- f hat in 1 ein isoliertes Maximum.
- f ist in $]0,1]$ streng monoton wachsend.
- f ist in $[1,\infty[$ streng monoton fallend.
- Nach An. 1, §12, Beispiel (12.2) gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass F in $(1,1)$ ein absolutes Maximum besitzt und

$$F((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \{(1,1)\}) \subset]0,e^{-2}[.$$

Also besteht die Höhenlinie durch $(1,1)$ nur aus einem Punkt, d.h.

$$N_F(e^{-2}) = \{(1,1)\}.$$

Weiter gilt

$$N_F(c) = \emptyset, \qquad \text{falls } c > e^{-2} \text{ oder } c \leq 0.$$

Da

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y - xy = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x - xy = 0 \Longleftrightarrow y = 1$$

lässt sich über die Darstellung der Höhenlinien mittels differenzierbarer Funktionen für $c \in]0,e^{-2}[$ folgende Aussage machen:

(1) Eine Menge
$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ F(x,y) = c\}$$
lässt sich in der Form
$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ y = \varphi(x)\}$$
mit einer differenzierbaren Funktion $\varphi : I \longrightarrow J$ darstellen, wenn $1 \notin J$ und für alle $x \in I$ ein $y \in J$ mit $F(x,y) = c$ existiert.

(2) Eine Menge
$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ F(x,y) = c\}$$
lässt sich in der Form
$$\{(x,y) \in I \times J \ : \ x = \psi(y)\}$$
mit einer differenzierbaren Funktion $\psi : J \longrightarrow I$ darstellen, wenn $1 \notin I$ und für alle $y \in J$ ein $x \in I$ mit $F(x,y) = c$ existiert.

(wobei $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ein Rechteck ist, d.h. I und J sind offene Intervalle). Eine genauere Charakterisierung der Rechtecke mittels differenzierbarer Funktionen würde mehrfache Fallunterscheidungen fordern, deshalb geben wir hier nur noch ein Skizze der Höhenlinien von f im Bereich $]0,3]^2$ an, siehe Bild 5.

Aufgabe 8 C. Für die Funktion $F(x,y,z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$ gilt
$$F(1,1,1) = 0$$
und
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 - 4x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = -1 \neq 0.$$
Nach An. 2, §8, Satz 2, lässt sich die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ also in einer Umgebung von $(1,1,1)$ nach z aulösen, d.h. es gibt eine in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$ definierte stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(1,1) = 1$ und
$$F(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$
Differentiation dieser Gleichung nach x und y ergibt unter Benutzung der Kettenregel
$$\begin{aligned}(D_1F)(x,y,\varphi(x,y)) + (D_3F)(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= 0,\\ (D_2F)(x,y,\varphi(x,y)) + (D_3F)(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

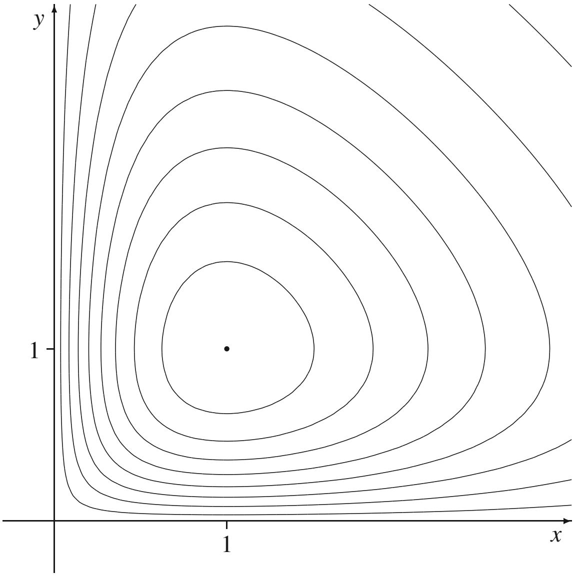

Bild 5

Da

$$\begin{aligned}(D_1F)(x,y,z) &= 2y-4z \quad \Longrightarrow \quad D_1F(1,1,1)=-2,\\ (D_2F)(x,y,z) &= 2x+2 \quad \Longrightarrow \quad D_2F(1,1,1)=4,\end{aligned}$$

wird aus dem obigen Gleichungssystem an der Stelle $(x,y)=(1,1)$

$$\begin{aligned}-2-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1) &= 0,\\ 4-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1) &= 0,\end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)=-2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)=4.$$

§9. Untermannigfaltigkeiten

Aufgabe 9 A. Wir setzen

$$C_1 := \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Da $f(t, t^2, t^3) = 0$ und $g(t, t^2, t^3) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt

$$C_1 \subset C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}.$$

Zum Beweis der umgekehrten Implikation $C \subset C_1$ stellen wir fest, dass

$$3f(x, y, z) - g(x, y, z) = x^2 - y$$

und

$$2f(x, y, z) - g(x, y, z) = -xy + z.$$

Für jeden Punkt $(x, y, z) \in C$ gilt also $y = x^2$ und $z = xy = x^3$, der Punkt hat also die Gestalt (x, x^2, x^3), d.h. er liegt auf C_1. Damit ist bewiesen, dass $C = C_1$.

Die Gradienten

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y, z) &= (2x + y, x - 1, -1) \\ \operatorname{grad} g(x, y, z) &= (4x + 3y, 3x - 2, -3) \end{aligned}$$

sind in jedem Punkt $(x, y, z) \in C$ linear unabhängig, also ist C eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9 B. Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$. Mindestens eine der Koordinaten x_i ist nach Definition ungleich 0. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $x_1 \neq 0$. Dann gilt

$$f_1(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{x_2^2}{x_1}$$

und

$$f_3(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \frac{x_2 x_3}{x_1}.$$

Daraus folgt

$$x_2 x_4 = \frac{x_2^2 x_3}{x_1} = x_3^2 \quad \Longrightarrow \quad f_2(x) = 0.$$

Definieren wir also $U_1 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 \neq 0\}$, so gilt

$$M \cap U_1 = \{x \in U_1 : f_1(x) = f_3(x) = 0\}.$$

Nun ist

$$\operatorname{grad} f_1(x) = (x_3, -2x_2, x_1, 0), \qquad \operatorname{grad} f_3(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1).$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1^2 \neq 0,$$

sind diese Vektoren linear unabhängig und daher M in einer Umgebung von x eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

2. Fall: $x_2 \neq 0$. Wegen $f_1(x) = x_1x_3 - x_2^2 = 0$ folgt dann $x_1 \neq 0$ und wir sind im 1. Fall.

3. Fall: $x_3 \neq 0$. Wegen $f_2(x) = x_2x_4 - x_3^2 = 0$ folgt dann $x_2 \neq 0$, also (Fall 2) auch $x_1 = 0$ und wir sind wieder im 1. Fall.

4. Fall: $x_4 \neq 0$. Dann gilt

$$f_2(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{x_3^2}{x_4}$$

und

$$f_3(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{x_2x_3}{x_4}.$$

Daraus folgt

$$x_1x_3 = \frac{x_2x_3x_3}{x_4} = x_2^2 \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) = 0.$$

Definieren wir also $U_4 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_4 \neq 0\}$, so gilt

$$M \cap U_4 = \{x \in U_4 : f_2(x) = f_3(x) = 0\}.$$

Die Gradienten

$$\operatorname{grad} f_2(x) = (0, x_4, -2x_3, x_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} f_3(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)$$

sind wegen

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_4 \\ x_4 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_4^2 \neq 0$$

linear unabhängig und daher M in einer Umgebung von x eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, q.e.d.

Aufgabe 9 C. Um weniger Indizes schreiben zu müssen, bezeichnen wir die drei Spalten der Matrix X mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Matrix $X = (x, y, z)$ zu $O(3)$ gehört, sind dann die 6 Gleichungen

$$\|x\|^2 = 1, \quad \|y\|^2 = 1, \quad \|z\|^2 = 1, \quad \langle x, y\rangle = 0, \quad \langle x, z\rangle = 0, \quad \langle y, z\rangle = 0,$$

wobei $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_2^2$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, usw. Um zu zeigen, dass $O(3)$ eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^9$ bildet, müssen wir die Gradienten dieser Funktionen in bezug auf die 9 Koordinaten

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^9$$

bilden. Z.B. ergibt sich für die erste Funktion $F_1(x, y, z) := \|x\|^2 - 1$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z_i} = 0.$$

Schreibt man alle Gradienten als Zeilen einer 6×9-Matrix, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Es ist zu zeigen, dass der Rang dieser Matrix in jedem Punkt $X \in O(3)$ den Wert 6 hat. Dazu multiplizieren wir die ersten drei Zeilen der Matrix mit $1/2$ und permutieren die Zeilen zu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

Seien $a_1, \dots, a_6$ die Zeilen dieser Matrix und seien λ_i irgend welche reelle Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i a_i = 0.$$

Betrachten wir nur die ersten drei Komponenten dieser Gleichung, so ergibt sich $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$. Da aber x, y, z in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Jetzt betrachten wir die Komponenten 4 bis 6 und erhalten $\lambda_4 y + \lambda_5 z = 0$, also $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Jetzt bleibt nur noch die Gleichung $\lambda_6 z = 0$ übrig, woraus folgt $\lambda_6 = 0$. Damit haben wir bewiesen, dass die Zeilen $(a_1, \dots, a_6)$ der Matrix linear unabhängig sind. Also hat die Matrix den Rang 6, q.e.d.

Aufgabe 9 D.

a) Bestimmung der lokalen Extrema von f im Inneren von K, d.h. in

$$\mathring{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} :$$

f ist in $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar mit

$$\nabla f(x,y) = (8x - 3y, -3x),$$

daher ist nach An. 2, §7, Satz 3, *notwendig* für das Vorliegen eines lokalen Extremum von f in $(x,y) \in \mathring{K}$:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (8x - 3y, -3x) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Ein hinreichendes Kriterium gibt An. 2, §7, Satz 4, an. Es gilt

$$(\text{Hess } f)(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = (\text{Hess } f)(0,0).$$

$(\text{Hess } f)(0,0)$ ist aber indefinit, denn

$$\begin{vmatrix} 8-t & -3 \\ -3 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 8t - 9 = 0 \Longleftrightarrow t = -1 \vee t = 9$$

($(\text{Hess } f)(0,0)$ hat einen positiven und einen negativen Eigenwert). f besitzt also keine lokalen Extrema in $\mathring{K}$.

b) Bestimmung der lokalen Extrema von f auf dem Rand von K, d.h. auf

$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Man bestimmt also die Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Dazu ist nach An. 2, §9, Satz 4, *notwendig*:

$$\begin{aligned}
& \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\
\Longleftrightarrow\ & (8x - 3y, -3x) = \lambda(2x, 2y) \\
\Longleftrightarrow\ & (8x - 3y = 2\lambda x) \wedge (-3x = 2\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & ((8 - 2\lambda)x - 3y = 0) \wedge (x = -\tfrac{2}{3}\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & ((8 - 2\lambda)\left(-\tfrac{2}{3}\lambda y\right) - 3y = 0) \wedge (x = -\tfrac{2}{3}\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & (\left(\tfrac{4}{3}\lambda^2 - \tfrac{16}{3}\lambda - 3\right) y = 0) \wedge (x = -\tfrac{2}{3}\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\left(\tfrac{4}{3}\lambda^2 - \tfrac{16}{3}\lambda - 3 = 0\right) \vee (y = 0)\right) \wedge (x = -\tfrac{2}{3}\lambda y)
\end{aligned}$$

I.) $y = 0$: Dann ist auch $x = 0$. Da aber $g(0,0) \neq 0$ ist dieser Fall für uns belanglos.

II.) $y \neq 0$:

$$\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\lambda = \frac{9}{2}\right).$$

Also nur Punkte der folgenden Form können Extrema sein:

$$\left(\frac{1}{3}y, y\right) \quad \text{bzw.} \quad (-3y, y).$$

Nun gilt weiter:

$$g\left(\frac{1}{3}y, y\right) = \frac{10}{9}y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(y = -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$g(-3y, y) = 10y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(y = -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \vee \left(y = \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Also nur die vier folgenden Punkte können Extrema sein

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$
$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \qquad \left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Durch Einsetzen der Punkte in f erhält man:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{9}{2}.$$

Da ∂K kompakt und f stetig ist, nimmt f nach An. 2, §3, Satz 7, auf ∂K Minimum und Maximum an. Da in $\overset{\circ}{K}$ keine Extrema liegen, gilt:

$$\text{Minima von } f \text{ auf } K: \left(-\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$\text{Maxima von } f \text{ auf } K: \left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } \left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

§10. Integrale, die von einem Parameter abhängen

Aufgabe 10 A. Da $f:[0,x]\times[\frac{1}{2},2]\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $f(t,y):=e^{-ty}$ eine stetige, nach der zweiten Variablen beliebig oft stetig partiell differenzierbare Funktion ist, lässt sich auf das Integral

$$F(y)=\int_0^x f(t,y)dt$$

n–mal An. 2, §10, Satz 2, anwenden, und man erhält

$$F^{(n)}(y)=\int_0^x \frac{\partial^n}{\partial y^n}f(t,y)\,dt=\int_0^x (-t)^n\cdot e^{-ty}\,dt$$

und somit

$$\int_0^x t^n \cdot e^{-t}\,dt = (-1)^n F^{(n)}(1).$$

Andrerseits lässt sich das Integral direkt berechnen:

$$F(y) = \int_0^x e^{-ty}\,dt = -\frac{1}{y}e^{-ty}\Big|_{t=0}^{t=x} = -\frac{e^{-xy}-1}{y}.$$

Es müssen noch die Ableitungen von F berechnet werden.

Behauptung. Es gilt für alle $n \geq 0$

$$F^{(n)}(y) = \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}\left(1 - e^{-xy}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!}\right) \qquad \text{für alle } y \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar.

Induktionsschritt $n \longrightarrow (n+1)$.

$$\begin{aligned}
F^{(n+1)}(y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(F^{(n)}(y)\right) \\
&\overset{(\mathrm{IV})}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}\left(1 - e^{-xy}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{y^{n+2}}\left(1 - e^{-xy}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!}\right) \\
&\quad + \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}\left(xe^{-xy}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!} - e^{-xy}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(xy)^{k-1}x}{k!}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{y^{n+2}}\left(1 - e^{-xy}\Theta(y)\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Theta(y) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^{k+1}}{k!(n+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(xy)^k}{(k-1)!(n+1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k!} + \frac{(xy)^{n+1}}{n!(n+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(xy)^k}{k!}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Somit gilt insbesondere

$$F^{(n)}(1) = (-1)^n n! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

und damit

$$\int_0^x t^n \cdot e^{-t}\, dt = n! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Aufgabe 10 B. a) Als Partialbruch-Zerlegung erhält man

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{y+x}{1+x^2} - \frac{y}{1+xy}\right).$$

Daraus ergibt sich mit den Integrations-Techniken aus der Analysis 1

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+xy)} &= \frac{1}{1+y^2}\left(y\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{y\,dx}{1+xy}\right) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\left[y \arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \log(1+xy)\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{1+y^2}\left(y \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} - \log(1+y)\right).
\end{aligned}$$

b) Nach An. 2, §10, Satz 2, ist

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\log(1+xy)}{1+x^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx.$$

Nach Teil a) ist deshalb

$$F'(y) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y}{1+y^2} + \frac{\log 2}{2} \cdot \frac{1}{1+y^2} - \frac{\log(1+y)}{1+y^2}.$$

Wegen $F(0) = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} Z = F(1) &= \int_0^1 F'(y)dy \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{ydy}{1+y^2} + \frac{\log 2}{2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^1 \frac{\log(1+y)}{1+y^2}dy \\ &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - Z, \end{aligned}$$

und nach Addition von Z auf beiden Seiten, $2Z = 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\log 2}{2}$, d.h.

$$Z = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2, \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir geben noch einen zweiten Beweis der Formel $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2$, den wir einer Mitteilung von Herrn Sven Krempe verdanken. Dieser Beweis verläuft ganz im Rahmen der Analysis einer Veränderlichen.

Mit der Substitution

$$x = \tan t, \quad t = \arctan x, \quad dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

wird

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan t)\,dt.$$

Wir formen nun den Ausdruck $1+\tan t$ um.

$$1+\tan t = 1+\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t+\cos t}{\cos t}.$$

Nun ist

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\cos\left(t-\tfrac{\pi}{4}\right),$$

denn aus dem Additionstheorem für den Cosinus folgt

$$\cos(t-\tfrac{\pi}{4}) = \cos t\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin t\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t).$$

Damit hat man folgende Produktzerlegung von $1+\tan t$

$$1+\tan t = \sqrt{2}\cdot\frac{\cos(t-\frac{\pi}{4})}{\cos t}$$

und man erhält

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan t)dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \log(\sqrt{2})dt + \int_0^{\pi/4} \log\left(\cos(t-\tfrac{\pi}{4})\right)\,dt - \int_0^{\pi/4} \log(\cos t)\,dt. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale sind aber gleich, wie man durch die Substitution $t \mapsto \frac{\pi}{4} - t$ erkennt. Daher ist

$$Z = \int_0^{\pi/4} \log(\sqrt{2})dt = \frac{\pi}{8}\log 2, \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 10 C. Es sei $G : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(y,z) := \int_a^z f(x,y)\,dx.$$

Nach An. 2, §10, Satz 2, ist G nach y stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(y,z) = \int_a^z \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int_a^z D_2 f(x,y)\,dx.$$

Nach An. 1, §19, Satz 1, ist G nach z stetig partiell differenzierbar (da f stetig ist), und es gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial z}(y,z) = f(z,y).$$

Also ist G stetig partiell differenzierbar. Definiere nun $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y)) := (y,y)$. Dann ist $F = G \circ \varphi$, und man schließt mit Hilfe der Kettenregel nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy} G(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \\ &= \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi_1(y), \varphi_2(y))\varphi_1'(y) + \frac{\partial G}{\partial z}(\varphi_1(y), \varphi_2(y))\varphi_2'(y) \\ &= \int_a^y D_2 f(x,y)dx + f(y,y), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aufgabe 10 D. Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir unter Benutzung der Quotientenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}g(0,h) = 0.$$

Also gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D_2 g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Für $y \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 g(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \left(-\frac{y^3}{2(x^2+y^2)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{y^3}{2y^2} - \frac{y^3}{2(1+y^2)} = \frac{y}{2(1+y^2)}, \\ f(0) &= \int_0^1 g(x,0)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0, \end{aligned}$$

also

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2(y^2+1)}, & \text{falls } y \neq 0 \\ 0, & \text{falls } y = 0 \end{cases}.$$

Für $y \neq 0$ ist f trivialerweise differenzierbar, für $y = 0$ erhält man für f':

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2(h^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Für $y \neq 0$ ist f^* differenzierbar, denn

$$f^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3}\,dx$$

existiert, da der Integrand stetig ist (rationale Funktion, die in ganz $[0,1]$ definiert ist). Damit ist

$$f^*(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(x,0)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

und folglich

$$\frac{1}{2} = f'(0) \neq f^*(0) = 0.$$

Aufgabe 10 E. Aus Symmetriegründen ist

$$V = 8\int_0^r \int_0^r \int_0^r f(x)dx_1dx_2dx_3.$$

1) Wir berechnen zuerst für festes $(x_2,x_3) \in [0,r]^2$ das innerste Integral

$$F_1(x_2,x_3) := \int_0^r f(x_1,x_2,x_3)dx_1.$$

Falls $x_2^2 + x_3^2 > r^2$ ist $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ für alle $x_1 \in [0,r]$, also $F_1(x_2,x_3) = 0$; für $x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$ ist

$$F_1(x_2,x_3) = \int_0^{\rho_1} \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,dx_1 \quad \text{mit } \rho_1 := \sqrt{r^2 - x_2^2 - x_3^3}.$$

Damit wird

$$F_1(x_2,x_3) = \int_0^{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - x_1^2}\,dx_1 = \rho_1^2\frac{\pi}{4} = (r^2 - x_2^2 - x_3^2)\frac{\pi}{4},$$

vgl. An. 2, Beispiel (10.2).

2) Bei festgehaltenem $x_3 \in [0,r]$ wird nun das Integral

$$F_2(x_3) := \int_0^r F_1(x_2,x_3)\,dx_2$$

berechnet. Wir erhalten mit $\rho_2 := \sqrt{r^2 - x_3^2}$

$$F_2(x_3) = \frac{\pi}{4}\int_0^{\rho_2} (\rho_2^2 - x_2^2)dx_2 = \frac{\pi}{4}(\rho_2^3 - \tfrac{1}{3}\rho_2^3) = \frac{\pi}{6}\rho_2^3 = \frac{\pi}{6}(r^2 - x_3^2)^{3/2}.$$

3) Das gesuchte dreifache Integral wird schließlich

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^r F_2(x_3)dx_3 = \frac{4\pi}{3}\int_0^r (r^2-x_3^2)^{3/2}dx_3 = \quad [\text{Subst. } x_3 = r\xi] \\ &= \frac{4\pi}{3}r^4\int_0^1 (1-\xi^2)^{3/2}d\xi = \quad [\text{Subst. } \xi = \sin t] \\ &= \frac{4\pi}{3}r^4\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \cos^4 t &= \tfrac{1}{16}(e^{it}+e^{-it})^4 \\ &= \tfrac{1}{16}(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{4it}) \\ &= \tfrac{1}{16}(2\cos 4t+8\cos 2t+6) \\ &= \tfrac{1}{8}\cos 4t+\tfrac{1}{2}\cos 2t+\tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{\pi/2}\cos 4t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos u\,du = 0$$

und

$$\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\,du = 0$$

wird

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}dt = \frac{3\pi}{16},$$

also

$$V = \frac{\pi^2}{4}r^4.$$

Somit ist das Volumen der 4-dimensionalen Kugel

$$K_4(r) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| \le r\}$$

vom Radius r gleich

$$\mathrm{Vol}(K_4(r)) = \frac{\pi^2 r^4}{2}.$$

§11. Elementare Lösungsmethoden

Aufgabe 11 A.

a) Zu einem vorgegebenen Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sei

$$c := \frac{y}{x^2}.$$

Die Parabel

$$P_c : \quad y = cx^2$$

geht dann durch den Punkt (x,y) und hat dort die Steigung

$$y' = 2cx = \frac{2y}{x}.$$

Deshalb ist die gesuchte Differentialgleichung

$$y' = f(x,y) = \frac{2y}{x}.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass die Parabeln P_c die Differentialgleichung lösen.

b) Die zu $f(x,y)$ orthogonale Steigung ist

$$g(x,y) = -\frac{1}{f(x,y)} = -\frac{x}{2y}.$$

Die Differentialgleichung der Orthogonal-Trajektorien lautet daher

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Eine Lösung durch den Punkt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 2y\,dy &= -x\,dx, \\ \int_{y_0}^{y} 2\eta\,d\eta &= -\int_{x_0}^{x} \xi\,d\xi, \\ y^2 - y_0^2 &= \tfrac{1}{2}(-x^2 + x_0^2), \end{aligned}$$

also

$$y = \sqrt{c - \tfrac{1}{2}x^2} \qquad \text{mit } c = y_0^2 + \tfrac{1}{2}x_0^2$$

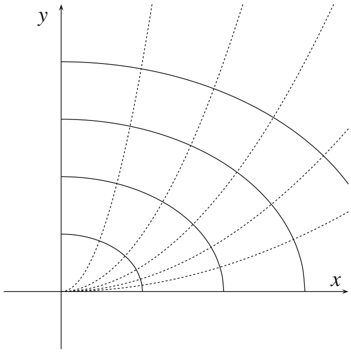

Bild 6

Diese Lösungen sind definiert für $0 < x < \sqrt{2c}$ und stellen Ellipsen-Viertelbögen dar, die die Parabeln P_c senkrecht schneiden, siehe Bild 6.

Aufgabe 11 B.

a) Wir definieren $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \cos x, \qquad g(y) := e^y,$$

dann sind f und g stetig, und es gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung $y' = e^y \cos x$ lässt sich unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 1, wie folgt lösen. Es gilt für $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \cos t\,dt = \sin x - \sin x_0,$$

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_{y_0}^{y} e^{-t}\,dt = e^{-y_0} - e^{-y}.$$

Da $G(\mathbb{R}) =]-\infty, e^{-y_0}[$, sei $I' \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subset]-\infty, e^{-y_0}[$, d.h.

$$I' \subset \{x \in \mathbb{R} : \sin x < e^{-y_0} + \sin x_0\},$$

dann gilt für die Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} & G(\varphi(x)) = F(x) \\ \iff & e^{-y_0} - e^{-\varphi(x)} = \sin x - \sin x_0 \\ \iff & e^{-\varphi(x)} = e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x \\ \iff & \varphi(x) = -\log\left(e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in I'$.

b) Löst man analog wie a). Man erhält für die Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit $\varphi(x_0) = y_0$

$$\varphi(x) = \sin(x - x_0 + \arcsin y_0),$$

wobei I' ein Intervall mit $x_0 \in I$ und

$$I' \subset \left] -\frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + x_0, \frac{\pi}{2} - \arcsin y_0 + x_0 \right[.$$

c) Löst man analog wie a). Man erhält für die Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit $\varphi(x_0) = y_0$

$$\varphi(x) = \sqrt{y_0^2 - 2(x_0 - x)\sqrt{1 - y_0^2} - (x_0 - x)^2},$$

wobei I' ein Intervall mit $x_0 \in I$ und

$$I' \subset \left] \sqrt{1 - y_0^2} - 1 + x_0, \sqrt{1 - y_0^2} + x_0 \right[.$$

d) Die Gleichung

$$y' = (a^2 + x^2) \cdot (b^2 + y^2)$$

ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Die Lösung lässt sich mittels An. 2, §11, Satz 1, leicht bestimmen. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) := a^2 + x^2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ g(y) := b^2 + y^2. \end{cases}$$

Dann ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und für $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (a^2+t^2)\,dt \\ &= a^2x + \frac{x^3}{3} - a^2x_0 - \frac{x_0^3}{3}, \\ G(y) &:= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b^2+t^2}\,dt = \left(\frac{1}{b}\arctan\frac{t}{b}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} \\ &= \frac{1}{b}\left(\arctan\frac{y}{b} - \arctan\frac{y_0}{b}\right). \end{aligned}$$

Für die Lösung φ der obigen Differentialgleichung gilt dann

$$\begin{aligned} & G(\varphi(x)) = F(x) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{b}\left(\arctan\frac{\varphi(x)}{b} - \arctan\frac{y_0}{b}\right) = a^2x + \frac{x^3}{3} - a^2x_0 - \frac{x_0^3}{3} \\ \Longleftrightarrow\ & \arctan\frac{\varphi(x)}{b} = a^2bx + \frac{bx^3}{3} - a^2bx_0 - \frac{bx_0^3}{3} + \arctan\frac{y_0}{b} \\ \Longleftrightarrow\ & \varphi(x) = b\tan\left(a^2bx + \frac{bx^3}{3} - a^2bx_0 - \frac{bx_0^3}{3} + \arctan\frac{y_0}{b}\right) \end{aligned}$$

für alle x aus einer kleinen Umgebung um x_0.

e) Die Differentialgleichung lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$y' = \frac{xy-1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}y + \frac{-1}{1-x^2},$$

da $x \in]-1,1[$ ist. Wir definieren nun

$$\begin{cases} a :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := \dfrac{x}{1-x^2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := \dfrac{-1}{1-x^2}, \end{cases}$$

dann sind a und b stetig und die obige Differentialgleichung lässt sich dann unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 3, wie folgt lösen. Man erhält für $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \\
&= \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{t}{1-t^2}\,dt\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{-2t}{1-t^2}\,dt\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\log(1-t^2)\right)\Big|_{x_0}^{x}\right) \\
&= \exp\left(\log\sqrt{1-x_0^2} - \log\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Lösung $\psi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ der obigen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = y_0$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{-\sqrt{1-t^2}}{(1-t^2)\sqrt{1-x_0^2}}\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 - \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 - \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 C.

a) Durch die Substitution $z := x + y$ geht die Differentialgleichung

$$y' = (x+y)^2$$

über in

$$z' = 1 + y' = 1 + z^2.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich nun mit An. 2, §11, Satz 1, lösen. Dazu definieren wir $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := 1, \qquad g(z) := 1 + z^2,$$

dann sind f und g stetig und es gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung $z' = 1 + z^2$ lässt sich dann unter Verwendung der Bezeichnungen von An. 2, §11, Satz 1, wie folgt lösen. Es gilt für $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} 1\,dt = x - x_0,$$

$$G(y) := \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan z - \arctan z_0.$$

Dann gilt für die Lösung φ der Differentialgleichung $z' = 1 + z^2$ mit $\varphi(x_0) = z_0$

$$\begin{aligned} & G(\varphi(x)) = F(x) \\ \iff & \arctan \varphi(x) - \arctan z_0 = x - x_0 \\ \iff & \varphi(x) = \tan(x - x_0 + \arctan z_0) \end{aligned}$$

für alle x in einer kleinen Umgebung von x_0. Daher erhält man für die Lösung ψ der Differentialgleichung $y' = (x+y)^2$ mit $\psi(x_0) = y_0$

$$\psi(x) = \tan(x - x_0 + \arctan(x_0 + y_0)) - x,$$

wobei ψ in einer kleinen Umgebung von x_0 definiert ist.

b) Die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{xy^2 - xy}{1+x^2}$$

geht mit der Substitution $z = \frac{1}{y}$ über in

$$z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{xz - x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\,z + \frac{-x}{1+x^2}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Sie lässt sich nun mittels An. 2, §11, Satz 3, lösen. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := \dfrac{x}{1+x^2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := \dfrac{-x}{1+x^2}, \end{cases} .$$

Dann sind a und b stetige Funktionen und man erhält für $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus An. 2, §11, Satz 3:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{2t}{1+t^2}\,dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\log(1+t^2)\right)\Big|_{x_0}^{x}\right) \\ &= \exp\left(\log\sqrt{1+x^2} - \log\sqrt{1+x_0^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x)\left(z_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}}\left(z_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{-t\sqrt{1+x_0^2}}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\,dt\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left(z_0 - \sqrt{1+x_0^2} \int_{x_0}^{x} \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\, dt \right) \\
&\quad \text{(Substitution: } s := t^2\text{)} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left(z_0 - \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{2} \int_{x_0^2}^{x^2} (1+s)^{-\frac{3}{2}}\, ds \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left(z_0 - \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{2} \left[\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right] \Bigg|_{x_0^2}^{x^2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left(z_0 + \sqrt{1+x_0^2} \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+x_0^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} \left(z_0 + \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \\
&= \frac{(z_0-1)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} + 1.
\end{aligned}
$$

Für χ erhält man dann, unter Berücksichtigung, dass $z_0 = \frac{1}{y_0}$ und $\chi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$,

$$
\chi(x) = \frac{1}{\frac{(\frac{1}{y_0}-1)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_0^2}} + 1} = \frac{\sqrt{1+x_0^2}}{(\frac{1}{y_0}-1)\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x_0^2}}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Mit der Substitution $z = \frac{1}{y^2}$ geht die Differentialgleichung

$$
y' + y + (\sin x + e^x) y^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -y - (\sin x + e^x) y^3
$$

über in

$$
z' = \frac{-2y'}{y^3} = 2z + 2(\sin x + e^x).
$$

Dies ist wieder eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Sie lässt sich mittels An. 2, §11, Satz 3, lösen, dazu definieren wir

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a(x) := 2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(x) := 2(\sin x + e^x), \end{cases}$$

dann sind a und b stetige Funktionen und man erhält für $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus An. 2, §11, Satz 3:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \Big) \\
&= \exp\Big(\int_{x_0}^{x} 2\, dt \Big) \\
&= e^{2x-2x_0}, \\
\psi(x) &= \varphi(x) \left(z_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\, dt \right) \\
&= e^{2x-2x_0} \left(z_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{2(\sin t + e^t)e^{2x_0}}{e^{2t}}\, dt \right) \\
&= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\sin t}{e^{2t}} + e^{-t} \right) dt \\
&= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{\sin t}{e^{2t}}\, dt + \int_{x_0}^{x} e^{-t}\, dt \right) \\
&= z_0 e^{2x-2x_0} + 2e^{2x} \left(\left[-\frac{\cos t + 2\sin t}{5e^{2t}} \right] \Big|_{x_0}^{x} + \left[-e^{-t} \right] \Big|_{x_0}^{x} \right) \\
&= z_0 e^{2x-2x_0} - \frac{2}{5}(\cos x + 2\sin x) \\
&\quad + \frac{2}{5} e^{2x-2x_0}(\cos x_0 + 2\sin x_0) - 2e^x + 2e^{2x-x_0},
\end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\int \frac{\sin t}{e^{2t}}\, dt = \int \underbrace{\sin t}_{=:f'} \underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{=:g}\, dt$$

$$\begin{aligned}
&\text{(partielle Integration)}\\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - \int \frac{2\cos t}{e^{2t}}\,dt\\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - 2\int \underbrace{\cos t}_{=:f'}\,\underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{=:g}\,dt\\
&\text{(partielle Integration)}\\
&= \frac{-\cos t}{e^{2t}} - 2\left(\frac{\sin t}{e^{2t}} + 2\int \frac{\sin t}{e^{2t}}\,dt\right)\\
&= \frac{-\cos t - 2\sin t}{e^{2t}} - 4\int \frac{\sin t}{e^{2t}}\,dt\\
\Longrightarrow \quad & \int \frac{\sin t}{e^{2t}}\,dt = \frac{-\cos t - 2\sin t}{5e^{2t}}.
\end{aligned}$$

Ist χ die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, so erhält man dann also wegen $z = \frac{1}{y^2}$ mit $z_0 := \frac{1}{y_0^2}$:

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Aufgabe 11 D.

c) Da

$$y' = \frac{x+y}{x+2y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}} =: f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f(z) = \frac{1+z}{1+2z} \tag{1}$$

und $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, genügt es nach An. 2, §11, Satz 4, die Lösung(en) der folgenden Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z}{1+2z} - z\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-2z^2}{1+2z}, \tag{2}$$

zu bestimmen, wobei $x,\ z \in \mathbb{R}_+^*$. Um die Lösung ψ von (2) unter der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0} =: z_0\,;\, x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ zu bestimmen, nehmen wir folgende Fallunterscheidung vor:

I) $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Dann ist die konstante Funktion $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ trivialerweise eine Lösung von (2). Zur Eindeutigkeit vgl. Aufgabe 12A.

II) $\psi(x_0) = z_0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$: Wegen der Stetigkeit von ψ ist dann $\psi(x) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle x aus einer Umgebung von x_0 und wir können nach An. 2, §11, Satz 1, die Lösung von (2) berechnen. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) := \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} g : J \longrightarrow \mathbb{R}, \\ g(z) := \dfrac{1-2z^2}{1+2z}, \end{cases}$$

wobei $J =]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ oder $J =]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$, je nachdem ob $z_0 \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ oder $z_0 \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$. Dann sind f und g stetig, und es gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in J$. Weiter erhalten wir für $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ aus An. 2, §11, Satz 1, Folgendes:

$$\begin{aligned}
F(x) &:= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \log x - \log x_0, \\
G(z) &:= \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(t)}\,dt \\
&= \int_{z_0}^{z} \frac{1+2t}{1-2t^2}\,dt \\
&= \int_{z_0}^{z} \frac{1}{1-2t^2}\,dt + \int_{z_0}^{z} \frac{2t}{1-2t^2}\,dt \\
&= \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}t} \right) dt - \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z} \frac{-4t}{1-2t^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{z_0}^{z} \left(\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t} \right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\log|1-2t^2| \right) \Big|_{z_0}^{z} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\log|1-\sqrt{2}t| - \log(1+\sqrt{2}t) \right) \Big|_{z_0}^{z} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\log|1-2t^2| \right) \Big|_{z_0}^{z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{|1-\sqrt{2}z|}{1+\sqrt{2}z} - \log\frac{|1-\sqrt{2}z_0|}{1+\sqrt{2}z_0}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\log|1-2z^2| + \frac{1}{2}\log|1-2z_0^2| \\
&= \log\frac{(1+\sqrt{2}z)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{|1-\sqrt{2}z|^{\frac{\sqrt{2}}{4}}} + \log\frac{|1-\sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{(1+\sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}} \\
&\quad -\frac{1}{2}\log|1-2z^2| + \frac{1}{2}\log|1-2z_0^2| \\
&= \log\frac{(1+\sqrt{2}z)^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}z|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} + \log\frac{|1-\sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
& G(\psi(x)) = F(x) \\
\Longleftrightarrow\ & \log\frac{(1+\sqrt{2}\psi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}\psi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} + \log\frac{|1-\sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}} = \log\frac{x}{x_0} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{(1+\sqrt{2}\psi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}\psi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} = \frac{x}{x_0}\cdot\frac{(1+\sqrt{2}z_0)^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}z_0|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Für die Lösung φ von (1) unter der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ gilt somit

I) $\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Dann ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ die Lösung von (1).

II) $\frac{y_0}{x_0} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$: Mit §11, Satz 4, und den obigen Vorbetrachtungen ist dann die Lösung φ von (2) implizit gegeben durch

$$
\begin{aligned}
& \frac{(1+\sqrt{2}\frac{\varphi(x)}{x})^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}\frac{\varphi(x)}{x}|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} = \frac{x}{x_0}\cdot\frac{(1+\sqrt{2}\frac{y_0}{x_0})^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}\frac{y_0}{x_0}|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{(x+\sqrt{2}\varphi(x))^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|x-\sqrt{2}\varphi(x)|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x_0}\cdot\frac{(1+\sqrt{2}\frac{y_0}{x_0})^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}}}{|1-\sqrt{2}\frac{y_0}{x_0}|^{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

wobei φ in einer kleinen Umgebung um x_0 definiert ist.

§12. Existenz– und Eindeutigkeitssatz

Aufgabe 12 A. Die Funktion

$$I \times J \ni (x,y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{R}$$

ist nach y stetig partiell differenzierbar, erfüllt also lokal eine Lipschitz-Bedingung. Daher gilt der Eindeutigkeitssatz (An. 2, §12, Satz 3).

a) Falls $g(y_0) = 0$, ist offensichtlich die konstante Funktion $\varphi(x) = y_0$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$, und daher die einzige mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$.

b) Ist andrerseits $\psi : I_1 \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit $\psi(x_1) = y_1$ und $g(y_1) \neq 0$, so kann es kein $x \in I_1$ geben mit $g(\psi(x)) = 0$, denn sonst wäre nach a) auch $g(\psi(\xi)) = 0$ für alle $\xi \in I_1$.

Aufgabe 12 C. Setze

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := Jy \quad \text{mit } J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $y := (y_1, y_2)$ gilt dann

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

f ist stetig und genügt global einer Lipschitz–Bedingung, denn es gilt für alle $(x,y), (x,\tilde{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ mit $y := (y_1, y_2)$ und $\tilde{y} := (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

$$\begin{aligned} \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| &= \|(y_2, y_1) - (\tilde{y}_2, \tilde{y}_1)\| \\ &= \sqrt{(\tilde{y}_2 - y_2)^2 + (\tilde{y}_1 - y_1)^2} \\ &= 1 \cdot \|y - \tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Also lässt sich das Verfahren von Picard–Lindelöf auf $y' = f(x,y)$ anwenden. Wir kommen nun zur Berechnung der Lösung φ. Es gilt $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \binom{a}{b} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_{n+1}(x) &= \binom{a}{b} + \int_0^x f(t, \varphi_n(t))dt = \binom{a}{b} + \int_0^x J\varphi_n(t)dt \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Man berechnet

$$\varphi_1(x) = \binom{a}{b} + \int_0^x J\binom{a}{b}dt = (E+Jx)\binom{a}{b},$$

wobei E die zweireihige Einheitsmatrix bezeichnet. Wir zeigen nun durch Induktion nach n, dass

$$\varphi_n(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{J^k x^k}{k!}\Big)\binom{a}{b} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Die Fälle $n = 0, 1$ wurden schon gezeigt.
Induktionsschritt $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) &= \binom{a}{b} + \int_0^x J\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{J^k t^k}{k!}\Big)\binom{a}{b}dt \\
&= \binom{a}{b} + \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{J^{k+1} x^{k+1}}{(k+1)!}\Big)\binom{a}{b} \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{J^k x^k}{k!}\Big)\binom{a}{b}, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Nun ist $J^2 = E$, also ergibt sich

$$\varphi_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\binom{a}{b} + J\sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\binom{a}{b}$$

Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x,$$

erhält man schließlich

$$\varphi(x) = (E\cosh x + J\sinh x)\binom{a}{b} = \begin{pmatrix} a\cosh x + b\sinh x \\ a\sinh x + b\cosh x \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass φ das vorgegebene Differentialgleichungs-System tatsächlich löst und die Anfangsbedingung $\varphi(0) = \binom{a}{b}$ erfüllt.

Aufgabe 12 D. Es sei $\varphi : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$, $r > 0$, eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und $\psi : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) := \varphi(-x) \quad \text{für alle } x \in [-r, r].$$

Dann ist auch ψ eine Lösung der Differentialgleichung, denn

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) = -f(-x,\varphi(-x)) \\ &\overset{(\text{Vor.})}{=} f(x,\varphi(-x)) = f(x,\psi(x)).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist f stetig und genügt lokal einer Lipschitz–Bedingung. Da $\psi(0) = \varphi(0)$, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz (An. 2, §12, Satz 3), dass $\psi(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in [-r,r]$.

Aufgabe 12 E. Da f stetig ist und global einer Lipschitz–Bedingung genügt, genügt f erst recht lokal einer Lipschitz–Bedingung. Daher gelten die Voraussetzungen von An. 2, §12, Satz 3 (Eindeutigkeitssatz) und Satz 4 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf). Insbesondere gilt:

$$\begin{cases} \varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n, \text{ wobei } \varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \varphi_0(x) := \varphi(a), \\ \varphi_{n+1}(x) := \varphi(a) + \int\limits_a^x f(t,\varphi_n(t))\,dt \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \psi = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n, \text{ wobei } \psi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \psi_0(x) := \psi(a), \\ \psi_{n+1}(x) := \psi(a) + \int\limits_a^x f(t,\psi_n(t))\,dt \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Bemerkung. Falls $\varphi(a) = \psi(a)$, ist nach dem Eindeutigkeitssatz $\varphi = \psi$, und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt.
Zunächst beweisen wir durch Induktion, dass

$$\|\varphi_n(x) - \psi_n(x)\| \le \delta \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(L\cdot|x-a|)^k}{k!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

i) Induktionsanfang: $n = 0$.

$$\|\varphi_0(x) - \psi_0(x)\| = \|\varphi(a) - \psi(a)\| = \delta \le \delta \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{0} \frac{(L\cdot|x-a|)^k}{k!}}_{=1}.$$

ii) Induktionsschritt : $n \longrightarrow (n+1)$.
Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist zu zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt, wie man mit Hilfe von An. 2, §6, Hilfssatz, folgendermaßen bestätigt:

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(x)\| \\
&= \left\| \varphi(a) + \int_a^x f(t,\varphi_n(t))\,dt - \psi(a) - \int_a^x f(t,\psi_n(t))\,dt \right\| \\
&\leq \|\varphi(a) - \psi(a)\| + \left\| \int_a^x (f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\psi_n(t)))\,dt \right\| \\
&\leq \delta + \int_a^x \|f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\psi_n(t))\|\,dt \\
&\leq \delta + \int_a^x L \cdot \|\varphi_n(t) - \psi_n(t)\|\,dt \\
&\quad \text{(globale Lipschitz–Bedingung)} \\
&\leq \delta + \int_a^x L \cdot \delta \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(L \cdot |t-a|)^k}{k!}\,dt \\
&\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \delta + \sum_{k=0}^{n} \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \int_a^x |t-a|^k\,dt \\
&= \delta + \sum_{k=0}^{n} \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \left(\frac{|t-a|^{k+1}}{(k+1)!} \right) \Bigg|_a^x \\
&= \delta + \sum_{k=0}^{n} \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \delta \cdot \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \delta + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{L^k}{k!} \cdot \delta \cdot |x-a|^k \\
&= \delta \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(L \cdot |x-a|)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Nun gilt unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Normfunktion:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)-\psi(x)\| &= \|\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)-\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\| \\
&= \|\lim_{n\to\infty}(\varphi_n(x)-\psi_n(x))\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(x)-\psi_n(x)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left(\delta\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(L\cdot|x-a|)^k}{k!}\right) \\
&\leq \delta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L\cdot|x-a|)^k}{k!} \\
&= \delta\cdot e^{L\cdot|x-a|},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

§13. Lineare Differentialgleichungen

Aufgabe 13 A. Zunächst zeigen wir, dass

$$\psi = u\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$ ist. Man erhält für ψ' unter Benutzung der Produktregel

$$\psi' = \begin{pmatrix}u'\varphi_1+u\varphi_1'\\ u'\varphi_2+u\varphi_2'+g'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}g+u\varphi_1'\\ u\varphi_2'+a_{22}g\end{pmatrix}.$$

Da φ eine Lösung von $y' = Ay$ ist, gilt

$$\begin{pmatrix}\varphi_1'\\ \varphi_2'\end{pmatrix} = \varphi' = A\varphi = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2\\ a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2\end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
A\psi &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\varphi_1\\ u\varphi_2+g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u(a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2)+a_{12}g\\ u(a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2)+a_{22}g\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}u\varphi_1'+a_{12}g\\ u\varphi_2'+a_{22}g\end{pmatrix} = \psi'.
\end{aligned}$$

Also erfüllt auch ψ die Differentialgleichung $y' = Ay$. Da

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) g$$

nach An. 2, §11, Satz 2, auf J eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung besitzt, gelte o.B.d.A. $g(x_0) \neq 0$ in einer Stelle $x_0 \in J$. Um die lineare Unabhängigkeit von φ und ψ zu bestätigen, brauchen wir nach An. 2, §13, Satz 2, nur die lineare Unabhängigkeit an der Stelle x_0 zu beweisen.

Annahme: $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ sind linear abhängig. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0) = \lambda \cdot \psi(x_0) \iff & \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u(x_0)\varphi_1(x_0) \\ \lambda u(x_0)\varphi_2(x_0) + \lambda g(x_0) \end{pmatrix} \\
\iff & (\lambda \cdot u(x_0) = 1) \\
& \wedge ((1 - \lambda \cdot u(x_0))\varphi_2(x_0) = \lambda \cdot g(x_0)) \\
\implies & \lambda \cdot g(x_0) = 0 \\
\implies & \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Widerspruch, da $\varphi_1(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung (da $x_0 \in J$)!

Aufgabe 13 B. Das Differentialgleichungssystem lautet in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x} \\ 1-x & 1 \end{pmatrix}}_{=: A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log x + \frac{1}{x} \\ (x-1)\log x \end{pmatrix}.$$

Zunächst verifizieren wir, dass $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1(x) := \binom{1}{x}$ tatsächlich eine Lösung des homogenen Systems ist:

$$A(x) \cdot \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x} \\ 1-x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}' = \varphi_1(x)'.$$

Um eine zweite, von φ_1 linear unabhängige Lösung $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ des homogenen Systems zu berechnen, verwenden wir Aufgabe 13 A. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen müssen wir differenzierbare Funktionen u, $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ finden, die

$$\begin{cases} g' = 0 \cdot g, \\ u' = \dfrac{1}{x} \cdot g \end{cases}$$

genügen. Offensichtlich sind $g(x) = 1$ und $u(x) = \log x$ geeignete Funktionen hierfür. Damit erhält man für φ_2:

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \log x \\ x\log x + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Also ist $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems. Im folgenden brauchen wir nur noch eine Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Dazu benutzen wir An. 2, §13, Satz 4. Es ergibt sich für $u : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_1^x \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt \\
&= \int_1^x \begin{pmatrix} 1 & \log t \\ t & t\log t + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \log t + \frac{1}{t} \\ (t-1)\log t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^x \frac{1}{t\log t + 1 - t\log t} \begin{pmatrix} t\log t + 1 & -\log t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log t + \frac{1}{t} \\ (t-1)\log t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^x \begin{pmatrix} 2\log t + (\log t)^2 + \frac{1}{t} \\ -1 - \log t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^x \begin{pmatrix} (\log t + t(\log t)^2)' \\ (-t\log t)' \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} \log x + x(\log x)^2 \\ -x\log x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eine Lösung $\psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ des inhomogenen Systems ist damit

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot u(x) = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ x & x\log x + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log x + x(\log x)^2 \\ -x\log x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen des inhomogenen Systems lautet daher

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 13 C. Für eine Lösung $\varphi :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

werde definiert

$$\widetilde{\varphi} :]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \widetilde{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

Da $\widetilde{\varphi}'(x) = -\varphi(-x)$ und $\widetilde{\varphi}''(x) = \varphi(-x)$, ist wegen $a(-x) = -a(x)$ und $b(-x) = b(x)$ auch $\widetilde{\varphi}$ eine Lösung der Differentialgleichung.
Es gibt eine Lösung φ mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = 1.$$

Die Funktionen φ_1, φ_2 seien definiert durch

$$\varphi_1 := \tfrac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi}), \qquad \varphi_2 := \tfrac{1}{2}(\varphi - \widetilde{\varphi}).$$

Dann ist φ_1 eine gerade und φ_2 eine ungerade Lösung der Differentialgleichung. Da

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, \qquad & \varphi_1'(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, \qquad & \varphi_2'(0) &= 1, \end{aligned}$$

sind φ_1 und φ_2 linear unabhängig, bilden also ein Lösungs-Fundamentalsystem.

Aufgabe 13 D.

1) Wir beweisen zuerst die Aussage über die Differentiation der Determinante. Sei also $\Phi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ eine $n \times n$-Matrix mit differenzierbaren Koeffizienten $\varphi_{ij}(x)$. Es gilt

$$\det \Phi(x) = \sum_{\sigma} \varphi_{1,\sigma(1)}(x)\varphi_{2,\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n,\sigma(n)}(x),$$

wobei über alle Permutationen $\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ summiert wird. Die Differentiation eines einzelnen Summanden ergibt nach der Produktregel

$$\frac{d}{dx}\varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n,\sigma(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi'_{k,\sigma(k)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n,\sigma(n)}(x),$$

also nach Summation über alle Permutationen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\det \Phi(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma} \varphi_{1,\sigma(1)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi'_{k,\sigma(k)}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n,\sigma(n)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi'_{k1}(x) & \ldots & \varphi'_{kn}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2) Wir differenzieren jetzt die Wronski-Determinante W eines Lösungs-Fundamentalsystems $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ der Differentialgleichung

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x)y = 0.$$

Mit der Bezeichnung $w(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} w(x) \\ w'(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Nach der gerade bewiesenen Differentiationsregel ist

$$\begin{aligned} W'(x) \;=\; & \det \begin{pmatrix} w'(x) \\ w'(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ w''(x) \\ w''(x) \\ \vdots \end{pmatrix} + \ldots \\ & \ldots + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-1)}(x) \\ w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-2)}(x) \\ w^{(n)}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alle Summanden der rechten Seite bis auf den letzten bestehen aus einer Determinante mit zwei gleichen Zeilen, sind also gleich null. In der letzten Determinante ersetzen wir die letzte Zeile durch

$$w^{(n)}(x) = -a_{n-1}(x)w^{(n-1)}(x) - a_{n-2}(x)w^{(n-2)}(x) - \ldots - a_0(x)w(x)$$

und erhalten

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} w(x) \\ \vdots \\ w^{(n-2)}(x) \\ -a_{n-1}(x)w^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = -a_{n-1}(x)W(x),$$

d.h. $W'(x) + a_{n-1}(x)W(x) = 0$, q.e.d..

Aufgabe 13 E. Es sei

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = A(x)y$. Setze außerdem $A =: (a_{ij})$, dann ist $a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Nun beweisen wir induktiv, dass auch φ beliebig oft differenzierbar ist.

i) Induktionsanfang: $m = 1$.
Die Existenz von φ' folgt unmittelbar daraus, dass φ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ ist.

ii) Induktionsschritt: $(m+1) \longrightarrow (m+2)$.
Es existiere $\varphi^{(m+1)}$, $m \in \mathbb{N}$, und damit existieren auch $\varphi^{(k)}$, $(k = 1,\dots,m)$. Zu zeigen ist nun, dass auch $\varphi^{(m+2)}$ existiert. Da

$$\varphi' = A\varphi = (a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j \right)_{i=1,\dots,n},$$

ist unter Benutzung von An. 1, Aufgabe 15.6 i) (Leibnizsche Formel)

$$\varphi^{(m+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k)} \right)_{i=1,\dots,n}.$$

Da $\varphi^{(m+1)}$ existiert, d.h. es existieren $\varphi_l^{(m+1)}$ für alle $l \in \{1,\dots n\}$, gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k)} \right)'_{i=1,\dots,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(a_{ij}^{(m+1-k)} \varphi_j^{(k)} + a_{ij}^{(m-k)} \varphi_j^{(k+1)} \right) \right)_{i=1,\dots,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a_{ij}^{(m+1-k)} \varphi_j^{(k)} \right)_{i=1,\dots,n},
\end{aligned}$$

und damit existiert also auch $\varphi^{(m+2)}$.

§14. Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 14 A. Zunächst beweisen wir zwei Lemmata.

Lemma 1. Sei $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, in $]0,\infty[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geq C$ für alle $x \in]0,\infty[$, wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem $x \in]0,\infty[$ ein $\xi_x \in]0,x[$ mit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi_x) \Longrightarrow f(x) = f(0) + f'(\xi_x)\cdot x \geq f(0) + C\cdot x.$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} (f(0) + C\cdot x) = +\infty$$

ist Lemma 1 bewiesen. □

Lemma 2. Es seien $r_0 > 0$, $C > 0$ mit $\frac{1}{C} > r_0$ gegeben. Dann existiert das uneigentliche Riemann–Integral

$$\int_{r_0}^{1/C} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - C}} = \lim_{x \nearrow \frac{1}{C}} \int_{r_0}^{x} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - C}}.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $C = 1$ (sonst Subst. $\tilde{r} = Cr$). Für $r_0 < x < 1$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{x} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1}} &= \int_{r_0}^{x} \sqrt{\frac{r}{1-r}}\,dr \\ &= -\left[\sqrt{r(1-r)} + \arctan\sqrt{\frac{1-r}{r}}\,\right]_{r_0}^{x},\end{aligned}$$

wie man leicht durch Differenzieren bestätigt (vgl. auch [7], Abschnitt 1.1.3.3, Formel 151). Da

$$\lim_{x\nearrow 1}\left(\sqrt{x(1-x)} + \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = 0,$$

folgt Lemma 2 unmittelbar. □

Zur Lösung der Differentialgleichung gehen wir nun wie in An. 2, §14, Abschnitt ‘Eindimensionale Bewegung’ vor:
Setze $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(r) = -\frac{\gamma}{r^2}$, dann ist f stetig. Weiter erhalten wir für $U : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(\xi)\,d\xi = \gamma\int_{r_0}^{r} \frac{1}{\xi^2}\,d\xi = \gamma\left[-\frac{1}{\xi}\right]_{r_0}^{r} = \frac{\gamma}{r_0} - \frac{\gamma}{r}.$$

Für die Gesamtenergie E ergibt sich dann

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}(0)^2 + U(r(0)) = \frac{1}{2}v_0^2.$$

Die Bewegung verläuft daher in

$$\begin{aligned}\{r \in \mathbb{R}_+^* \mid U(r) \le E\} &= \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \frac{\gamma}{r_0} - \frac{\gamma}{r} \le \frac{1}{2}v_0^2 \right\} \\ &= \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; r\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2\gamma}v_0^2\right) \le 1 \right\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{R}_+^*, & \text{falls } \theta \le 0 \\ \left]0, \frac{1}{\theta}\right], & \text{falls } \theta > 0 \end{cases},\end{aligned}$$

wobei $\quad \theta := \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2\gamma}v_0^2\right)$, vgl. Bild 7

Die zu lösende Differentialgleichung wird

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2(E - U(r)) = \frac{2\gamma}{r} + C$$

mit $C := v_0^2 - \frac{2\gamma}{r_0}$. Nun führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

1. Fall. $C > 0$:
Dann folgt aus Stetigkeitsgründen entweder $\dot{r}(t) \ge \sqrt{C}$ für alle $t \in [0, \infty[$ oder $\dot{r}(t) \le -\sqrt{C}$ für alle $t \in [0, \infty[$. Da aber $\dot{r}(0) = v_0 > 0$, gilt $\dot{r}(t) \ge \sqrt{C}$ für alle $t \in [0, \infty[$ und somit nach Lemma 1

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = +\infty.$$

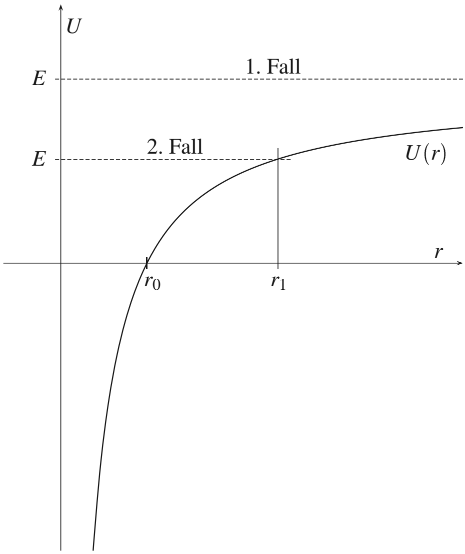

Bild 7

2. Fall. $C < 0$:
Dann gibt es genau ein $r_1 > r_0$ mit $\frac{2\gamma}{r_1} + C = 0$. Nach Lemma 2 existiert das uneigentliche Riemann–Integral

$$G(r_1) := \int_{r_0}^{r_1} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\gamma}{r} + C}}.$$

Wir setzen $t_1 := G(r_1)$. Für $t \in [0, t_1]$ ist dann r monoton wachsend und in $[t_1, \infty[$ monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} & \ddot{r}(t) < 0 \text{ für alle } t \in [t_1, \infty[\\ \Longrightarrow\ & \dot{r}(t) < 0 \text{ für alle } t \in]t_1, \infty[, \text{ da } \dot{r}(t_1) = 0 \\ \Longrightarrow\ & r \text{ ist in } [t_1, \infty[\text{ (streng) monoton fallend.} \end{aligned}$$

Für das gesuchte $v^* > 0$ erhalten wir also (v^* ist das v_0, falls $C = 0$ ist)

$$(v^*)^2 - \frac{2\gamma}{r_0} = 0 \Longrightarrow v^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{r_0}}.$$

Für die Erdanziehung erhält man wegen $\gamma = gr_0^2$

$$v^* = \sqrt{2gr_0} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6370 \cdot 10^3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \approx 11179\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \approx 11.18\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}.$$

Zur Lösung der Differentialgleichung lässt sich abschließend Folgendes sagen: Mit

$$G(x) := \int_{r_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}}$$

ist die Lösung $r(t)$ implizit wie folgt gegeben:
Im 1. Fall ist $G(r(t)) = t$ für alle $t \in [0,\infty[$.
Im 2. Fall ist $G(r(t)) = t$ für alle $t \in [0,t_1]$ und

$$\int_{r_1}^{r(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}} = t_1 - t$$

für alle $t \in [t_1,\infty[$.

Aufgabe 14 B.
a) Zunächst suchen wir eine Konstante α, so dass

$$\varphi_1 :]-\tfrac{1}{2},\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi_1(x) = e^{\alpha x},$$

eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

ist. Setzt man $y = e^{\alpha x}$ in diese Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} &((2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8)e^{\alpha x} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &(2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &2x(\alpha^2 + 2\alpha) + (\alpha^2 - 2\alpha - 8) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird erfüllt durch $\alpha = -2$. Damit haben wir also mit $\varphi_1 :]-\frac{1}{2},\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = e^{-2x}$, eine Lösung der homogenen Gleichung gefunden. Um eine zweite Lösung $\varphi_2 :]-\frac{1}{2},\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ der homogenen Gleichung zu bestimmen, wenden wir An. 2, §14, Satz 2, an:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{1}{\varphi_1(x)^2}\exp\left(-\int_0^x \frac{4t-2}{2t+1}\,dt\right)\\
&= e^{4x}\exp\left(\int_0^x \left(-2+\frac{4}{2t+1}\right)dt\right)\\
&= e^{4x}\exp\left(-2x+\log(2x+1)^2\right)\\
&= (2x+1)^2e^{2x}.
\end{aligned}$$

Mittels zweimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(2x+1)^2}_{=f}\underbrace{e^{2x}}_{=g'}dx &= \frac{(2x+1)^2}{2}e^{2x}-2\int \underbrace{(2x+1)}_{=f}\underbrace{e^{2x}}_{=g'}dx\\
&= \frac{(2x+1)^2}{2}e^{2x}-2\left(\frac{(2x+1)}{2}e^{2x}-\int e^{2x}\,dx\right)\\
&= \frac{(2x+1)^2}{2}e^{2x}-(2x+1)e^{2x}+e^{2x}\\
&= \left(2x^2+\frac{1}{2}\right)e^{2x},
\end{aligned}$$

also

$$u(x) = \left(2x^2+\frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

und damit ist

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\cdot u(x) = 2x^2+\frac{1}{2}$$

eine zweite Lösung der homogenen Gleichung. Wir brauchen im Folgenden also nur noch eine Lösung $\psi :]-\frac{1}{2},\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, dazu führen wir die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System 1. Ordnung zurück (vgl. An. 2, Beweis zu §13, Satz 5). Für dieses System 1. Ordnung erhält man dann

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = \dfrac{8}{2x+1}y_0 - \dfrac{4x-2}{2x+1}y_1 + \dfrac{6x^2+x-3}{2x+1}e^x \end{cases}$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{8}{2x+1} & \dfrac{2-4x}{2x+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{6x^2+x-3}{2x+1} e^x \end{pmatrix}.$$

Ein Lösungs–Fundamentalsystem dafür bildet dann $\Phi = (\tau_1, \tau_2)$, wobei die Funktionen τ_1, $\tau_2 :]-\frac{1}{2}, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben sind durch

$$\tau_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\tau_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 + \frac{1}{2} \\ 4x \end{pmatrix}.$$

Mit "Variation der Konstanten" lässt sich nun eine Lösung des inhomogenen Systems 1.Ordnung und damit eine Lösung der inhomogenen Gleichung 2.Ordnung berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2t^2 + \frac{1}{2} \\ -2e^{-2t} & 4t \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(4t^2+4t+1)e^{-2t}} \begin{pmatrix} 4t & -2t^2 - \frac{1}{2} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(2t+1)^2} \begin{pmatrix} 4te^{2t} & (-2t^2 - \frac{1}{2})e^{2t} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \Phi(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{6t^2+t-3}{2t+1} e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} \dfrac{(6t^2+t-3)(-2t^2-\frac{1}{2})}{(2t+1)^3} e^{3t} \\ \dfrac{6t^2+t-3}{(2t+1)^3} e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \left[\begin{pmatrix} \dfrac{-12t^3+8t^2+5t-4}{6(2t+1)^2} e^{3t} \\ \dfrac{3t+2}{(2t+1)^2} e^t \end{pmatrix} \right]_0^x \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-12x^3+8x^2+5x-4}{6(2x+1)^2}e^{3x}+\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3x+2}{(2x+1)^2}e^{x}-2 \end{pmatrix}.$$

Da nun

$$\Phi(x)\cdot u(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix},$$

erhält man

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-2x}\cdot\left(\frac{-12x^3+8x^2+5x-4}{6(2x+1)^2}e^{3x}+\frac{2}{3}\right) \\ &\quad+\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3x+2}{(2x+1)^2}e^{x}-2\right) \\ &= \frac{-12x^3+8x^2+5x-4}{6(2x+1)^2}e^{x}+\frac{2}{3}e^{-2x} \\ &\quad+\frac{(3x+2)\cdot\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)^2}e^{x}-4x^2-1 \\ &= \frac{3x+1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{-2x}-4x^2-1. \end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat dann nach An. 2, §13, Satz 5, folgende Gestalt:

$$\mathcal{M} = \{\psi+\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2 \;:\; \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 14 C.

a) i) Wir zeigen zunächst durch Induktion nach $n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = F_n(x)e^{-x^2} \tag{1}$$

mit einem Polynom F_n vom Grad n. Der Induktionsanfang $n=0$ ist trivial.

Induktionsschritt $n \to n+1$. Wir setzen zur Abkürzung $D = \frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}e^{-x^2} &= D\big(D^n e^{-x^2}\big) = D(F_n(x)e^{-x^2}) \\ &= F_n'(x)e^{-x^2} - F_n(x)\cdot 2xe^{-x^2} \\ &= (-2xF_n(x)+F_n'(x))e^{-x^2} =: F_{n+1}(x)e^{-x^2}, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt nun, dass

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} = (-1)^n F_n(x)$$

ein Polynom n-ten Grades ist.
ii) Wir zeigen jetzt, dass H_n die Hermitesche Differentialgleichung löst. Es genügt offenbar, die Gleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

für die Funktion $y = e^{x^2} D^n e^{-x^2}$ nachzuweisen. Es gilt $e^{-x^2} y = D^n e^{-x^2}$. Nun ist

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2} y) &= D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(De^{-x^2}) \\ &= D^{n+1}(-2xe^{-x^2}) \\ &\stackrel{(*)}{=} -2xD^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2} \\ &= -2xD(e^{-x^2} y) - 2(n+1) e^{-x^2} y \\ &= e^{-x^2}(4x^2 y - 2xy' - 2(n+1)y), \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $\stackrel{(*)}{=}$ die Rechenregel

$$D^{n+1}(xf) = xD^{n+1} f + (n+1) D^n f$$

benutzt wurde, die aus der Leibnizschen Formel für die Differentiation eines Produkts folgt. Andrerseits gilt

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2} y) &= e^{-x^2} y'' + 2(De^{-x^2}) y' + (D^2 e^{-x^2}) y \\ &= e^{-x^2}(y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y). \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Es genügt, Folgendes zu beweisen:
Seien $n > m \geq 0$ natürliche Zahlen und P_m ein Polynom vom Grad m, dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{x^2} D^n e^{-x^2}) P_m(x) e^{-x^2} dx = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{-\infty}^{\infty}(D^n e^{-x^2})P_m(x)dx = 0.$$

Man beachte, dass der Integrand von der Form $P_{n+m}(x)e^{-x^2}$ ist, was für $|x| \to \infty$ schneller als $1/|x|^2$ gegen null strebt, das uneigentliche Integral also existiert.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach m.

Induktionsanfang $m = 0$. Dann ist $P_m(x)$ eine Konstante, die wir o.B.d.A. gleich 1 annehmen dürfen. Wir müssen also zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^n e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} D^n e^{-x^2} dx = 0.$$

Dies sieht man so: Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-R}^{R} D^n e^{-x^2} dx = (D^{n-1}e^{-x^2})\Big|_{-R}^{R} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Induktionsschritt $m \to m+1$. Sei $n > m+1$. Wir wenden wieder partielle Integration an:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}(D^n e^{-x^2})P_{m+1}(x)dx &= (D^{n-1}e^{-x^2})P_{m+1}(x)\Big|_{-R}^{R} \\ &\quad - \int_{-R}^{R}(D^{n-1}e^{-x^2})P'_{m+1}(x)dx\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty}(D^n e^{-x^2})P_{m+1}(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(D^{n-1}e^{-x^2})P'_{m+1}(x)dx$$

Da P'_{m+1} ein Polynom vom Grad m ist, ist das letzte Integral nach Induktions-Voraussetzung gleich 0, q.e.d.

Aufgabe 14 E. Setzt man $z = \sqrt{x}y$, so gilt

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}y + \sqrt{x}y', \\ z'' &= \frac{2\sqrt{x}y' - y\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} + \sqrt{x}y'' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y + \sqrt{x}y'' \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y + \sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}y' - \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y\right) \\
&= -\sqrt{x}y \\
&= -z.
\end{aligned}
$$

Für die Differentialgleichung $z'' + z = 0$ sind

$$
\begin{cases} \tau_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tau_1(x) = \cos x \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \tau_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tau_2(x) = \sin x \end{cases}
$$

Lösungen, die man direkt ablesen kann. Damit lösen

$$
\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{cases}
$$

die Besselsche Differentialgleichung für $p = \frac{1}{2}$.
Da die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ linear unabhängig sind, sind auch $\varphi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ und $\varphi_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ linear unabhängig, bilden also ein Lösungs-Fundamentalsystem.

Aufgabe 14 F.

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ beliebig.

i) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$
\begin{aligned}
&(T_{p+1}S_p f)(x) \\
&= \left(-f'(x) + \frac{p}{x}f(x)\right)' + \frac{p+1}{x}\left(-f'(x) + \frac{p}{x}f(x)\right) \\
&= -f''(x) + \frac{p}{x}f'(x) - \frac{p}{x^2}f(x) - \frac{p+1}{x}f'(x) + \frac{p(p+1)}{x^2}f(x) \\
&= -\left(f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) - \frac{p^2}{x^2}f(x)\right) \\
&= f(x) - \left(f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)f(x)\right) \\
&= f(x) - (B_p f)(x)
\end{aligned}
$$

und damit $T_{p+1}S_p f = f - B_p f$.

ii) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&(S_{p-1}T_pf)(x)\\
&= -\left(f'(x)+\frac{p}{x}f(x)\right)' + \frac{p-1}{x}\left(f'(x)+\frac{p}{x}f(x)\right)\\
&= -f''(x)-\frac{p}{x}f'(x)+\frac{p}{x^2}f(x)+\frac{p-1}{x}f'(x)+\frac{p(p-1)}{x^2}f(x)\\
&= -\left(f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)-\frac{p^2}{x^2}f(x)\right)\\
&= f(x)-\left(f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)f(x)\right)\\
&= f(x)-(B_pf)(x)
\end{aligned}$$

und damit $S_{p-1}T_pf = f - B_pf$.

iii) Nach i) gilt $T_pS_{p-1}f = f - B_{p-1}f$ und damit

$$T_pS_{p-1}T_pf = T_pf - B_{p-1}T_pf.$$

Nach ii) gilt dann $T_p(f-B_pf) = T_pf - B_{p-1}T_pf$ und unter Berücksichtigung der Linearität von T_p folgt somit

$$T_pf - T_pB_pf = T_pf - B_{p-1}T_pf \Longleftrightarrow T_pB_pf = B_{p-1}T_pf.$$

iv) Nach ii) gilt $S_pT_{p+1}f = f - B_{p+1}f$ und damit

$$S_pT_{p+1}(S_pf) = S_pf - B_{p+1}S_pf.$$

Nach i) gilt dann $S_p(f-B_pf) = S_pf - B_{p+1}S_pf$ und unter Berücksichtigung der Linearität von S_p folgt somit

$$S_pf - S_pB_pf = S_pf - B_{p+1}S_pf \Longleftrightarrow S_pB_pf = B_{p+1}S_pf.$$

b) i) Es sei $f \in V_p$ beliebig, dann ist $T_pf \in V_{p-1}$ und $S_pf \in V_{p+1}$ zu zeigen. Nach iii) aus Aufgabenteil a) gilt dann unter Berücksichtigung der Linearität von T_p ($\Longrightarrow T_p0 = 0$):

$$T_p\underbrace{B_pf}_{=0} = B_{p-1}T_pf \Longleftrightarrow 0 = B_{p-1}T_pf \Longleftrightarrow T_pf \in V_{p-1}.$$

Analog zeigt man mit iv) aus Aufgabenteil a) unter Berücksichtigung der Linearität von S_p ($\Longrightarrow S_p0 = 0$):

$$S_p\underbrace{B_pf}_{=0} = B_{p+1}S_pf \Longleftrightarrow 0 = B_{p+1}S_pf \Longleftrightarrow S_pf \in V_{p+1}.$$

ii) Nach Aufgabenteil i) sind $S_p : V_p \longrightarrow V_{p+1}$ und $T_{p+1} : V_{p+1} \longrightarrow V_p$ wohldefiniert und die Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität von $S_p : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ und $V_{p+1} : C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $S_p : V_p \longrightarrow V_{p+1}$ und $T_{p+1} : V_{p+1} \longrightarrow V_p$ bijektiv und Umkehrungen voneinander sind. Nach Ergebnissen aus der linearen Algebra (vgl. z.B. [5], Lemma 1.1.7) genügt es,

$$(*) \qquad \begin{cases} S_p T_{p+1} f = f \text{ für alle } f \in V_{p+1}, \\ T_{p+1} S_p f = f \text{ für alle } f \in V_p \end{cases}$$

zu verifizieren. Mit i) und ii) aus a) gilt aber

$$S_p T_{p+1} f = f - B_{p+1} f = f \qquad \text{für alle } f \in V_{p+1}$$

und

$$T_{p+1} S_p f = f - B_p f = f \qquad \text{für alle } f \in V_p,$$

womit $(*)$ gezeigt ist.

c) Da

$$\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi_2(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

nach Aufgabe 14 E Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{1}{2}$ sind, sind nach b)

$$\varphi_3 := S_{\frac{1}{2}} \varphi_1 \quad \text{und} \quad \varphi_4 := S_{\frac{1}{2}} \varphi_2$$

Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{3}{2}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= -\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)' + \frac{1}{2x} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{2\sin x - 2x\cos x}{2x\sqrt{x}}, \\ \varphi_4(x) &= -\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)' + \frac{1}{2x} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sin x + 2\cos x}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Da außerdem, wie man durch Nachrechnen bestätigt,

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0$$

gilt, ist

$$\mathcal{M} = \{\lambda\varphi_3 + \mu\varphi_4 \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{3}{2}$.

Die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{5}{2}$ lassen sich analog berechnen. Nach b) sind

$$\varphi_5 := S_{\frac{3}{2}}\varphi_3 \quad \text{und} \quad \varphi_6 := S_{\frac{3}{2}}\varphi_4$$

Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{5}{2}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_5(x) &= -\left(\frac{2\sin x - 2x\cos x}{2x\sqrt{x}}\right)' + \frac{3}{2x}\cdot\frac{2\sin x - 2x\cos x}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^2\sqrt{x}}, \\
\varphi_6(x) &= -\left(\frac{2x\sin x + 2\cos x}{2x\sqrt{x}}\right)' + \frac{3}{2x}\cdot\frac{2x\sin x + 2\cos x}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{3x\sin x + (3-x^2)\cos x}{x^2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Da außerdem

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_5(x) & \varphi_6(x) \\ \varphi_5'(x) & \varphi_6'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0,$$

ist

$$\mathcal{M} = \{\lambda\varphi_5 + \mu\varphi_6 \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Zylinderfunktionen der Ordnung $p = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 14 G.

a) Wir gehen in mehreren Schritten vor.
Ausgehend von einer Lösung $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ der Besselschen Differentialgleichung

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right)u(x) = 0$$

definieren wir Funktionen

$$\begin{aligned}
w(x) &:= u(\beta x), \\
z(x) &:= w(x^\gamma) = w(\beta x^\gamma), \\
y(x) &:= x^\alpha z(x) = x^\alpha u(\beta x^\gamma).
\end{aligned}$$

Ersetzt man in der Besselschen Differentialgleichung x durch βx und multipliziert die Gleichung mit β^2, erhält man

$$\beta^2 u''(\beta x) + \frac{\beta}{x} u'(\beta x) + \left(\beta^2 + \frac{p^2}{x^2}\right) u(\beta x) = 0$$

Da $w'(x) = \beta u(\beta x)$ und $w''(x) = \beta^2 u(\beta x)$, genügt w der Differentialgleichung

$$w''(x) + \frac{1}{x} w'(x) + \left(\beta^2 + \frac{p^2}{x^2}\right) w(x) = 0 \tag{1}$$

Ersetzen wir darin x durch x^γ, so kommt

$$w''(x^\gamma) + \frac{1}{x^\gamma} w'(x^\gamma) + \left(\beta^2 + \frac{p^2}{x^{2\gamma}}\right) w(x^\gamma) = 0 \tag{2}$$

Nun ist $z'(x) = \gamma x^{\gamma-1} w'(x^\gamma)$ und

$$z''(x) = \gamma x^{\gamma-1} w''(x^\gamma) + \gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} w'(x^\gamma).$$

Darmit ergibt sich aus (2) folgende Differentialgleichung für z

$$z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) + \left((\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 - \frac{p^2\gamma^2}{x^2}\right) z(x) = 0. \tag{3}$$

Schließlich ist $y(x) = x^\alpha z(x)$, also

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^\alpha \left(z'(x) + \frac{\alpha}{x} z(x)\right), \\ y''(x) &= x^\alpha \left(z''(x) + \frac{2\alpha}{x} z'(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} z(x)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt als Differentialgleichung für die Funktion y

$$y''(x) + \frac{1-2\alpha}{x} y'(x) + \left((\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2\gamma^2}{x^2}\right) y(x). \tag{4}$$

Um nun zu zeigen, dass sich jede Lösung y der Differentialgleichung (4) in der Form $y(x) = x^\alpha u(\beta x^\gamma)$ darstellen lässt, wobei u eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter p ist, genügt es Folgendes zu bestätigen (vgl. An. 2, §13, Satz 5):

Für je zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter p sind auch die beiden Funktionen y_1, y_2, definiert durch $y_i(x) = x^\alpha u_i(\beta x^\gamma)$, $i = 1, 2$, linear unabhängig.

Angenommen, y_1 und y_2 wären linear abhängig. Dann gibt es Konstanten $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, so dass

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x > 0.$$

Daraus würde folgen

$$\lambda_1 u_1(\beta x^\gamma) + \lambda_2 u_2(\beta x^\gamma) = 0 \quad \text{für alle } x > 0,$$

also auch

$$\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x > 0,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von u_1 und u_2. Also sind y_1 und y_2 linear unabhängig.

b) Man braucht nur die Konstanten aus Teil a) zu berechnen. (Es sei $x > 0$ für die Differentialgleichungen vorausgesetzt.)

i) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2\gamma^2 = 0, \\ (\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 = a^2 x^m \Longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{m+2}{2} \neq 0} \quad \wedge \quad \beta^2\gamma^2 = a^2 \end{cases}$$

gelten und daher $\boxed{\beta = \frac{2|a|}{|m+2|} > 0}$ und $\boxed{p = \frac{1}{m+2}}$ oder $p = -\frac{1}{m+2}$.

Jede Lösung y der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = \sqrt{x}\, u\left(\frac{2|a|}{|m+2|} x^{(m+2)/2}\right)$$

schreiben, wobei u eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter $\frac{1}{m+2}$ ist.

ii) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2\gamma^2 = -a(a+1), \\ (\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{\gamma = 1 \neq 0} \quad \wedge \quad \boxed{\beta = 1 > 0} \end{cases}$$

gelten und daher $\boxed{p = a + \frac{1}{2}}$ oder $p = -a - \frac{1}{2}$.

Jede Lösung y der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = \sqrt{x}u(x)$$

schreiben, wobei u eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter $a + \frac{1}{2}$ ist.

iii) Es muss

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha = a \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{1-a}{2}}, \\ \alpha^2 - p^2\gamma^2 = 0, \\ (\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 = \dfrac{b^2}{4}x^{-1} \Longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2} \neq 0} \quad \wedge \quad \boxed{\beta = |b| > 0} \end{cases}$$

gelten und daher $\boxed{p = 1 - a}$ oder $p = a - 1$.

Jede Lösung y der Differentialgleichung lässt sich also als

$$y(x) = x^{(1-a)/2}u(|b|\sqrt{x})$$

schreiben, wobei u eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung zum Parameter $1 - a$ ist.

c) Die Differentialgleichung i) im Ausnahmefall $m = -2$ lautet:

$$y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0, \qquad (a \neq 0,\ x > 0).$$

Um eine Lösung $\tau : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ zu finden setzen wir

$$\tau(x) = x^c, \qquad c \in \mathbb{C},$$

an. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \tau''(x) + \frac{a^2}{x^2}\tau = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & c(c-1)x^{c-2} + \frac{a^2}{x^2}x^c = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (c(c-1) + a^2)x^{c-2} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & c^2 - c + a^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & c = \frac{1 + \sqrt{1-4a^2}}{2} \quad \vee \quad c = \frac{1 - \sqrt{1-4a^2}}{2}. \end{aligned}$$

Setze

$$\lambda_1 := \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2}, \quad \lambda_2 := \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2}.$$

Nun nehmen wir folgende Fallunterscheidung vor:

I) $1-4a^2 \neq 0$, d.h. $a \neq \frac{1}{2}$ und $a \neq -\frac{1}{2}$.

Dann bilden $\varphi_k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k=1,2)$ mit

$$\varphi_1(x) = x^{\lambda_1}, \quad \varphi_2(x) = x^{\lambda_2}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung, denn

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1 - 1} & \lambda_2 x^{\lambda_2 - 1} \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

II) $1-4a^2 = 0$, d.h. $a = \frac{1}{2}$ oder $a = -\frac{1}{2}$.

Dann ist $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Eine weitere, von φ_1 unabhängige, Lösung $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimmt man dann mittels An. 2, §14, Satz 2. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{\varphi_1(x)^2} \exp\left(-\int_1^x 0\,dt\right) = \frac{1}{x}, \\ u(x) &= \int u'(x)\,dx = \log x, \\ \varphi_2(x) &= \varphi_1(x) \cdot u(x) = \sqrt{x}\log x. \end{aligned}$$

Damit bildet (φ_1, φ_2) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung iii) im Ausnahmefall $b=0$ lautet:

$$\begin{aligned} & y'' + \frac{a}{x}y' = 0, \qquad (a \in \mathbb{R},\ x > 0) \\ \iff & y'' = -\frac{a}{x}y'. \end{aligned}$$

Trivialerweise ist $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(x) = 1 \quad \text{für alle } x > 0$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung.
Eine weitere, von φ_1 linear unabhängige Lösung $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich leicht mittels An. 2, §11, Satz 2, bestimmen. Es gilt

$$\varphi_2'(x) = \exp\left(\int_1^x -\frac{a}{t}\,dt\right) = \exp(-\log x^a) = x^{-a}$$

und damit

$$\varphi_2(x) = \int \varphi_2'(x)\,dx = \begin{cases} \log x, & \text{falls } a = 1, \\ \dfrac{x^{1-a}}{1-a}, & \text{falls } a \neq 1. \end{cases}$$

Bemerkung. Die beiden in c) behandelten Differentialgleichungen sind Spezialfälle der in Aufgabe 15 E gegebenen Differentialgleichung, lassen sich daher auch mit der dort angegebenen Methode lösen.

§15. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 15 A.

a) Die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^2 - 4D + 4$. Das Polynom

$$P(T) = T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2$$

hat $\lambda = 2$ als einzige Nullstelle mit der Vielfachheit 2. Daher bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2)$,

$$\varphi_1(x) := e^{2x}, \qquad \varphi_2(x) := xe^{2x}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung.

c) Die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 2y' - y = 0$$

lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^3 - 2D^2 + 2D - 1$. Das Polynom

$$P(T) = T^3 - 2T^2 + 2T - 1 = (T-1)(T^2 - T + 1)$$

hat folgende (einfache) Nullstellen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Deshalb bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1,2,3)$,

$$\varphi_1(x) := e^x, \qquad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}, \qquad \varphi_3(x) := e^{\lambda_3 x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &:= \varphi_1(x) = e^x, \\
\psi_2(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_2(x) + \varphi_3(x)) = e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \\
\psi_3(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_2(x) - \varphi_3(x)) = e^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,
\end{aligned}$$

dann bilden $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1,2,3)$ ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen (vgl. An. 2, §15, Beispiel (15.1)).

e) Die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y = 0$$

lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^4 + 1$. Für die Nullstellen des Polynoms

$$P(T) = T^4 + 1$$

erhält man unter Benutzung, dass u.a. $\frac{1}{2}(1+i)^2 = i$ gilt:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2},$$
$$\lambda_4 = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2}.$$

Deshalb bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1,2,3,4)$,

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}, \quad \varphi_3(x) := e^{\lambda_3 x},$$
$$\varphi_4(x) := e^{\lambda_4 x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der obigen Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = e^{\sqrt{2}/2x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x,\\
\psi_2(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = e^{\sqrt{2}/2x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x,\\
\psi_3(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_3(x) + \varphi_4(x)) = e^{-\sqrt{2}/2x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x,\\
\psi_4(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_3(x) - \varphi_4(x)) = e^{-\sqrt{2}/2x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x,
\end{aligned}$$

dann bilden $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1,2,3,4)$ ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen.

Aufgabe 15 C.

a) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung
$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$
Sie lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^2 + 3D + 2$. Das Polynom
$$P(T) = T^2 + 3T + 2$$
hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$.
Daher bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1,2)$,
$$\varphi_1(x) := e^{-x}, \qquad \varphi_2(x) := e^{-2x},$$
nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung von
$$y'' + 3y' + 2y = 2 = 2e^{0x}$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da $P(0) = 2 \neq 0$, ist $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) = \frac{2}{P(0)} e^{0x} = 1$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhält man für die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \; : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

c) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Sie lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^2 - 5D + 6$. Das Polynom

$$P(T) = T^2 - 5T + 6$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.
Daher bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2)$,

$$\varphi_1(x) := e^{2x}, \qquad \varphi_2(x) := e^{3x},$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung von

$$y'' - 5y' + 6y = 4xe^x - \sin x$$

zu bestimmen, suchen wir zunächst je eine Lösung der beiden folgenden Gleichungen

(1) $P(D)y = 4xe^x$

(2) $P(D)y = -\sin x$.

Da 1 eine Nullstelle 0.Ordnung des Polynoms P ist, besitzt (1) eine spezielle Lösung der Form

$$\psi_1(x) = f(x)e^x,$$

wobei f ein Polynom 1. Grades ist. Wir setzen also

$$f(x) = c_1 x + c_2$$

an. Nun ist

$$\begin{aligned} & P(D)((c_1x+c_2)e^x) \\ = \; & (c_1x+c_2+2c_1)e^x-5(c_1x+c_2+c_1)e^x+6(c_1x+c_2)e^x \\ = \; & (2c_1x+2c_2-3c_1)e^x, \end{aligned}$$

woraus wir $c_1 = 2$ und $c_2 = 3$ schließen. Damit ist

$$\psi_1(x) = (2x+3)e^x$$

eine spezielle Lösung von (1). Um eine Lösung von (2) zu bestimmen, lösen wir zunächst

$$P(D)y = ie^{ix},$$

da $-\sin x = \operatorname{Re}\left(ie^{ix}\right)$ ist. Da außerdem

$$P(i) = -1-5i+6 = 5-5i \neq 0$$

ist nach An. 2, §15, Satz 3,

$$\tau(x) = \frac{i}{P(i)}e^{ix} = \frac{i}{5-5i}e^{ix} = \frac{i(5+5i)}{25+25}e^{ix} = \frac{i-1}{10}e^{ix}$$

eine spezielle Lösung von $P(D)y = ie^{ix}$, und da alle Koeffizienten von $P(D)$ reell sind, gilt

$$\operatorname{Re}(P(D)\tau(x)) = P(D)(\operatorname{Re}\tau(x)),$$

und somit hat (2) die spezielle Lösung

$$\psi_2(x) := \operatorname{Re}\tau(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x = -\frac{1}{10}(\sin x+\cos x).$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist somit die Funktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) = \psi_1(x)+\psi_2(x) = (2x+3)e^x - \frac{1}{10}(\sin x+\cos x).$$

Damit erhält man für die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi+\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2 \;:\; \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

d) Man geht analog wie in c) vor und erhält für die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \{\psi + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 \ : \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei φ_1, φ_2, φ_3, $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$\varphi_1(x) := 1, \quad \varphi_2(x) := e^x, \quad \varphi_3(x) := xe^x,$$
$$\psi(x) := x + \left(-\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x\right) e^x.$$

e) Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Sie lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit $P(D) = D^4 + 2D^2 + 1$. Das Polynom

$$P(T) = T^4 + 2T^2 + 1 = (T-i)^2(T+i)^2$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ mit jeweils der Vielfachheit 2. Daher bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1,2,3,4)$,

$$\varphi_1(x) := e^{ix}, \quad \varphi_2(x) := e^{-ix}, \quad \varphi_3(x) := xe^{ix}, \quad \varphi_4(x) := xe^{-ix}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten, setzen wir

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \cos x,\\
\psi_2(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \sin x,\\
\psi_3(x) &:= \frac{1}{2}(\varphi_3(x) + \varphi_4(x)) = x\cos x,\\
\psi_4(x) &:= \frac{1}{2i}(\varphi_3(x) - \varphi_4(x)) = x\sin x,
\end{aligned}$$

dann bilden $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1,2,3,4)$ ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen. Um eine spezielle Lösung von

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 25e^{2x}$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da $P(2) = 2^4 + 2^3 + 1 = 25$ ist $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) = \frac{25}{P(0)} e^{2x} = e^{2x}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit erhält man für die Menge $\mathcal{M}$ aller Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi + \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \psi_k \ : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 15 D. Die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

wurden schon in An. 2, §14, im Abschnitt "Gedämpfte Schwingung" berechnet. Es sind dies:

1) Falls $0 < \mu < \omega_0$:

$$\varphi(t) = e^{-\mu t}(c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t), \qquad \text{mit} \quad \omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2};$$

2) falls $\mu = \omega_0$:

$$\varphi(t) = e^{-\mu t}(c_1 + c_2 t);$$

3) falls $\mu > \omega_0$:

$$\varphi(t) = c_1 e^{-(\mu-\kappa)t} + c_2 e^{-(\mu+\kappa)t} \qquad \text{mit} \quad \kappa := \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Dabei sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

Es ist also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Dazu benutzen wir An. 2, §15, Satz 3. Da

$$a \cos\omega t = \operatorname{Re}\left(a e^{i\omega t}\right),$$

bestimmen wir zunächst eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\omega t}.$$

Nun ist

$$P(i\omega) = -\omega^2 + 2\mu i\omega + \omega_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i \neq 0,$$

und damit

$$\psi(t) = \frac{a}{P(i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i} e^{i\omega t}$$

Der Nenner lässt sich schreiben als

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mu\omega i = re^{i\delta}$$

mit

$$r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}$$

und

$$\delta = \begin{cases} \arctan \dfrac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, & \text{falls } \omega \neq \omega_0 \\ \pi/2, & \text{falls } \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

$$\psi(t) = \frac{a}{r} e^{i(\omega t - \delta)}$$

Da alle Koeffizienten von $P(D)$ reell sind, hat die inhomogene Gleichung

$$P(D)y = \mathrm{Re}(ae^{i\omega t})$$

die spezielle Lösung

$$\psi_0(t) = \mathrm{Re}\,\psi(t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - \delta).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \psi_0(t),$$

wobei $\varphi_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung ist. Da für jede Lösung der homogenen Gleichung gilt $\lim_{t\to\infty} \varphi_H(t) = 0$, verhalten sich alle Lösungen der inhomogenen Gleichung asymptotisch wie $\psi_0(t)$. Die Funktion $\psi_0(t)$ stellt eine Schwingung mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft $a\cos(\omega t)$ dar mit der Amplitude

$$A = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}},$$

die im Vergleich zur äußeren Kraft mit dem Faktor

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}$$

multipliziert wurde. Etwa für $\omega = \omega_0$ ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{2\mu\omega}$. Man sieht, dass dieser Faktor umso größer wird, je kleiner die Reibung ist. Man vergleiche dies mit An. 2, Beispiel (15.5).

Aufgabe 15 E. Es sei $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ Lösung von (1), dann gilt $e^\xi \in \mathbb{R}_+^*$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und somit

$$\varphi''(e^\xi) + \frac{a}{e^\xi}\varphi'(e^\xi) + \frac{b}{e^{2\xi}}\varphi(e^\xi) = 0.$$

Da

$$\begin{aligned}
& \psi''(\xi) + (a-1)\psi'(\xi) + b\psi(\xi) \\
= \; & (\varphi(e^\xi))'' + (a-1)(\varphi(e^\xi))' + b\varphi(e^\xi) \\
= \; & (e^\xi\varphi'(e^\xi))' + (a-1)(e^\xi\varphi'(e^\xi)) + b\varphi(e^\xi) \\
= \; & e^{2\xi}\varphi''(e^\xi) + ae^\xi\varphi'(e^\xi) + b\varphi(e^\xi) \\
= \; & e^{2\xi}\left(\varphi''(e^\xi) + \frac{a}{e^\xi}\varphi'(e^\xi) + \frac{b}{e^{2\xi}}\varphi(e^\xi)\right) \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

ist $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von (2). Ist umgekehrt $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von (2), dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\psi''(\log x) + (a-1)\psi'(\log x) + b\psi(\log x).$$

Da

$$\begin{aligned}
& \varphi''(x) + \frac{a}{x}\varphi'(x) + \frac{b}{x^2}\varphi(x) \\
= \; & (\psi(\log x))'' + \frac{a}{x}(\psi(\log x))' + \frac{b}{x^2}\psi(\log x) \\
= \; & \frac{1}{x^2}\psi''(\log x) - \frac{1}{x^2}\psi'(\log x) + \frac{a}{x^2}\psi'(\log x) + \frac{b}{x^2}\psi(\log x) \\
= \; & \frac{1}{x^2}\big(\psi''(\log x) + (a-1)\psi'(\log x) + b\psi(\log x)\big) \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

ist $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ somit eine Lösung von (1).

Nun zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lösungen der Differentialgleichung (1). Dazu bestimmen wir erst einmal ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Die Differentialgleichung (2) lässt sich schreiben als $P(D)y = 0$ mit

$$P(D) = D^2 + (a-1)D + b.$$

Für die Nullstellen des Polynoms

$$P(T) = T^2 + (a-1)T + b$$

erhält man dann

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 - a \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}.$$

Nun müssen wir folgende Fallunterscheidung vornehmen:

I) $(a-1)^2 - 4b \neq 0.$

Dann bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$,

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1 x}, \qquad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 x}$$

nach An. 2, §15, Satz 1, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Nach dem oben Gezeigten wissen wir ferner, dass $\psi_k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$,

$$\psi_1(x) := e^{\lambda_1 \log x} = x^{\lambda_1}, \qquad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2 \log x} = x^{\lambda_2}$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind. Da außerdem für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1 - 1} & \lambda_2 x^{\lambda_2 - 1} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) x^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} \neq 0,$$

bildet (ψ_1, ψ_2) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1).

II) $(a-1)^2 - 4b = 0.$

Dann gilt $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ und es bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$,

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda x}, \qquad \varphi_2(x) := x e^{\lambda x}$$

nach An. 2, §15, Satz 2, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (2). Nach dem oben Gezeigten wissen wir ferner, dass $\psi_k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C} \quad (k = 1, 2)$,

$$\psi_1(x) := e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \qquad \varphi_2(x) := \log x e^{\lambda \log x} = x^\lambda \log x$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind. Da außerdem für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt

$$\begin{vmatrix} x^\lambda & x^\lambda \log x \\ \lambda x^{\lambda-1} & \lambda x^{\lambda-1} \log x + x^{\lambda-1} \end{vmatrix} = x^{2\lambda-1} \neq 0,$$

bildet (ψ_1, ψ_2) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1).

§16. Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 16 A. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot y$$

gehen wir vor wie in An. 2, §16 bei der Behandlung eines Systems in Jordanscher Normalform. Wir machen den Ansatz $y(x) = e^x z(x)$. Es ist

$$y'(x) = e^x z(x) + e^x z'(x).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} y'(x) = Ay(x) &\iff e^x z(x) + e^x z'(x) = A e^x z(x) \\ &\iff z'(x) = (A - E) z(x) \\ &\iff \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} z_1'(x) = 2z_2(x) + 3z_3(x), & (1) \\ z_2'(x) = 2z_3(x), & (2) \\ z_3'(x) = 0. & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Wir bestimmen eine Lösung mit der Anfangsbedingung

$$z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c \in \mathbb{R}^3$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$z_3(x) = c_3.$$

Dies wird in die zweite Gleichung eingesetzt. Man erhält

$$z_2(x) = c_2 + 2c_3 x.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, ergibt sich die Gleichung

$$z_1'(x) = 2(c_2 + 2c_3 x) + 3c_3$$

mit der Lösung

$$z_1(x) = c_1 + (2c_2 + 3c_3)x + 2c_3 x^2.$$

Ein Lösungs-Fundamentalsystem erhält man, indem man die speziellen Anfangsbedingungen $c = e_k \in \mathbb{R}^k$, $k = 1,2,3$, (wobei e_k der k-te Einheitsvektor ist) wählt. Dies liefert die Matrix

$$Z(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x+2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist ein Lösungs-Fundamentalsystem der ursprünglichen Differentialgleichung $y' = Ay$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x+2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^x$$

Die Probe ergibt tatsächlich

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y(x).$$

Aufgabe 16 B. Um ein Lösungs–Fundamentalsystem von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot y$$

zu bestimmen, benutzen wir An. 2, §16, Satz 2, denn da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Wie man leicht mit Mitteln der linearen Algebra errechnet (vgl. z.B. [5], Beispiel 5.3.5), gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=: B} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= S^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=: S},$$

somit bestimmen wir zunächst die Lösungen der Differentialgleichung

$$z' = B \cdot z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} z.$$

Trivialerweise sind

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \qquad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \qquad \psi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Lösungen von $z' = B \cdot z$ und somit

$$\varphi_1(x) = S \cdot \psi_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x}}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} \\ \frac{e^{3x}}{3} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = S \cdot \psi_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x}-1}{3} \\ \frac{e^{3x}+2}{3} \\ \frac{e^{3x}-1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x) = S \cdot \psi_3(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3x}-1}{3} \\ \dfrac{e^{3x}-1}{3} \\ \dfrac{e^{3x}+2}{3} \end{pmatrix}$$

Lösungen von $y' = A \cdot y$. Nun bilden $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ auch ein Fundamentalsystem zu $y' = A \cdot y$, denn

$$\begin{vmatrix} \dfrac{e^{3x}}{3} & \dfrac{e^{3x}-1}{3} & \dfrac{e^{3x}-1}{3} \\ \dfrac{e^{3x}}{3} & \dfrac{e^{3x}+2}{3} & \dfrac{e^{3x}-1}{3} \\ \dfrac{e^{3x}}{3} & \dfrac{e^{3x}-1}{3} & \dfrac{e^{3x}+2}{3} \end{vmatrix} = \frac{e^{3x}}{3} \neq 0.$$

Aufgabe 16 C. Da

$$\operatorname{grad} U(x_1, x_2) = (5x_1 + 2x_2, 2x_1 + 8x_2)$$

gilt

$$\operatorname{grad} U(x_1, x_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}_{=:\, A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Also lässt sich die Differentialgleichung folgendermaßen schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Ax.$$

Außerdem ist A eine symmetrische Matrix und damit diagonalisierbar, genauer errechnet man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{= S^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{4}{5} \end{pmatrix}}_{=:\, S} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=:\, B}.$$

Mit der Koordinaten–Transformation $y = S^{-1}x$ geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -By,$$

oder anders geschrieben

$$\ddot{y}_1 = -4y_1, \qquad \ddot{y}_2 = -9y_2.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für $\ddot{y} = -By$ (vgl. An. 2, Beispiel (16.1))

$$y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t \\ \alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{grad}\, U(x)$$

gilt dann

$$\begin{aligned} x(t) &= S \cdot y(x) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t \\ \alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(\alpha_2 \cos 3t + \beta_2 \sin 3t - \alpha_1 \cos 2t - \beta_1 \sin 2t) \\ \frac{1}{5}(\alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t + 4\alpha_2 \cos 3t + 4\beta_2 \sin 3t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\left[\alpha_1 \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}\right. \\ &\qquad \left. + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ 4\cos 3t \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ 4\sin 3t \end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Aufgabe 16 D. Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{=:\,A} y.$$

Da

$$\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 6-t \end{vmatrix} = t^2 - 7t = t(t-7)$$

hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 7$. Ohne Mühe bestimmt man einen Eigenvektor $a \in \mathbb{R}^2$ zu λ_1 und einen Eigenvektor $b \in \mathbb{R}^2$ zu λ_2:

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach An. 2, §16, Corollar zu Satz 1, können wir nun sofort ein Lösungs–Fundamentalsystem (φ_1, φ_2) für die homogene Gleichung angeben:

$$\begin{cases} \varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{0x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{7x} = \begin{pmatrix} e^{7x} \\ 3e^{7x} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Mittels An. 2, §13, Satz 4, lässt sich eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen. Mit den dortigen Bezeichnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} 3e^{7t} & -e^{7t} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} e^{-7t} & \frac{2}{7} e^{-7t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} e^{-7t} & \frac{2}{7} e^{-7t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} t + \frac{1}{7} \sin t \\ \frac{1}{7} t e^{-7t} + \frac{2}{7} e^{-7t} \sin t \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der partiellen Integration erhält man weiter

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t}_{=f} \cdot \underbrace{e^{-7t}}_{=g'} \, dt &= -\frac{1}{7} t e^{-7t} + \frac{1}{7} \int e^{-7t} \, dt \\ &= -\frac{1}{7} t e^{-7t} - \frac{1}{49} e^{-7t} = -\frac{7t+1}{49} e^{-7t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^{-7t}}_{=f} \cdot \underbrace{\sin t}_{=g'} \, dt &= -e^{-7t}\cos t - 7\int \underbrace{e^{-7t}}_{=f} \cdot \underbrace{\cos t}_{=g'} \, dt \\
&= -e^{-7t}\cos t - 7\left(e^{-7t}\sin t + 7\int e^{-7t}\sin t \, dt\right) \\
&= -e^{-7t}\cos t - 7e^{-7t}\sin t - 49\int e^{-7t}\sin t \, dt.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int e^{-7t}\sin t\,dt = \frac{1}{50}\left(-e^{-7t}\cos t - 7e^{-7t}\sin t\right).$$

Also

$$\begin{aligned}
u(x) &= \left[\begin{pmatrix} -\frac{3}{14}t^2 - \frac{1}{7}\cos t \\ -\frac{7t+1}{343}e^{-7t} - \frac{1}{175}(e^{-7t}\cos t + 7e^{-7t}\sin t) \end{pmatrix}\right]_0^x \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}x^2 - \frac{1}{7}\cos x + \frac{1}{7} \\ \frac{-175x - 25 - 49\cos x - 343\sin x}{8575}e^{-7x} + \frac{74}{8575} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und damit ist eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \Phi(x)u(x) \\
&= \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix} \cdot u(x) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x^2 - \frac{1}{49}x - \frac{99}{343} + \frac{7}{25}\cos x - \frac{1}{25}\sin x + \frac{74}{8575}e^{7x} \\ -\frac{3}{14}x^2 - \frac{3}{49}x + \frac{46}{343} - \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x + \frac{222}{8575}e^{7x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da $\varphi(0) = 0$, wie man durch Nachrechnen bestätigt, ist φ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 16 E. Zum Beweis verwenden wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien

$$f, g : I \to \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare vektorwertige Funktionen. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.$$

Dabei bezeichnet $\langle x, y\rangle$ das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sind f_i bzw. g_i die Komponenten von f und g, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} f_i(t)g_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)\right)\\ &= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Folgerung. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so gilt

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2 = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t)\rangle.$$

Hilfssatz 2. Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn

$$\langle x, Ax\rangle = 0 \quad \text{für alle Vektoren } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. a) Sei zunächst A als schiefsymmetrisch vorausgesetzt. Für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, Ax\rangle = \langle A^\top x, x\rangle = -\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle x, Ax\rangle = 0.$$

Dabei wurde die wohlbekannte Regel $\langle x, Ay\rangle = \langle A^\top x, y\rangle$ für alle Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ benutzt.

b) Sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass $\langle x, Ax\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und sei $A = (a_{ij})$ die Komponenten-Darstellung von A. Speziell für den i-ten Einheitsvektor $e_i \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$0 = \langle e_i, Ae_i\rangle = a_{ii}.$$

Somit verschwinden alle Diagonalelemente von A. Für $i \neq j$ ist

$$\begin{aligned}0 &= \langle (e_i + e_j), A(e_i + e_j)\rangle\\ &= \langle e_i, Ae_i\rangle + \langle e_i, Ae_j\rangle + \langle e_j, Ae_i\rangle + \langle e_j, Ae_j\rangle\\ &= \langle e_i, Ae_j\rangle + \langle e_j, Ae_i\rangle = a_{ij} + a_{ji},\end{aligned}$$

also $a_{ij} = -a_{ji}$, d.h. A ist schiefsymmetrisch, q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen ist die Behauptung von Aufgabe 16 E leicht zu beweisen.

1) Sei zunächst $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ als schiefsymmetrisch vorausgesetzt und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi' = A\varphi$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2 = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t)\rangle = 2\langle \varphi(t), A\varphi(t)\rangle = 0,$$

wobei für die letzte Gleichung Hilfssatz 2 benutzt wurde. Da die Ableitung von $\|\varphi(t)\|^2$ verschwindet, muss $\|\varphi(t)\|$ konstant sein.

2) Sei jetzt vorausgesetzt, dass alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung $\varphi' = A\varphi$ konstanten Betrag haben. Für einen beliebig vorgegebenen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine Lösung φ mit $\varphi(0) = u$. Da

$$0 = \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2 = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t)\rangle = 2\langle \varphi(t), A\varphi(t)\rangle$$

folgt für $t = 0$, dass $\langle u, Au\rangle = 0$. Da $u \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, folgt aus Hilfssatz 2, dass A schiefsymmetrisch ist, q.e.d.

Aufgabe 16 F. Setze

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann lautet das charakteristische Polynom $P(T)$ von A

$$\begin{aligned} P(T) &= \begin{vmatrix} -T & -3 & 2 \\ 3 & -T & -1 \\ -2 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 - 14T = -T(T^2 + 14) \\ &= -T(T + \sqrt{14}i)(T - \sqrt{14}i), \end{aligned}$$

und damit lauten die Eigenwerte von A

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{14}i, \quad \lambda_3 = -\sqrt{14}i.$$

Mit Hilfe von Methoden aus der linearen Algebra bestimmt man für $k = 1, 2, 3$ zu jedem Eigenwert λ_k einen zugehörigen Eigenvektor x_k (vgl. etwa [5], Bemerkung 5.2.6). Man erhält z.B.:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{14}i \\ -6 + \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -3 + 2\sqrt{14}i \\ -6 - \sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit bilden $\psi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^3, (k = 1,2,3)$,

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{0x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
\psi_2(x) &:= \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{14}i \\ -6+\sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix} e^{\sqrt{14}ix}, \\
\psi_3(x) &:= \begin{pmatrix} -3+2\sqrt{14}i \\ -6-\sqrt{14}i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{14}ix},
\end{aligned}$$

nach An. 2, §16, Corollar zu Satz 1, ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Um ein reelles Fundamentalsystem $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (k = 1,2,3)$ zu erhalten, setzen wir analog wie in An. 2, §16, Beispiel (16.2) ii),

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &:= \psi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
\varphi_2(x) &:= \frac{1}{2}(\psi_2(x) + \psi_3(x)) \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \cos\sqrt{14}x - \begin{pmatrix} -2\sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \sin\sqrt{14}x, \\
\varphi_3(x) &:= \frac{1}{2i}(\psi_2(x) - \psi_3(x)) \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \sin\sqrt{14}x + \begin{pmatrix} -2\sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \cos\sqrt{14}x.
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] *Otto Forster,* Analysis 1, Springer Spektrum. 11. Auflage 2013.

[2] *Otto Forster,* Analysis 2, Vieweg+Teubner. 9. Auflage 2011.

[3] *Harro Heuser,* Lehrbuch der Analysis Teil 1, Vieweg+Teubner. 17. Auflage 2009.

[4] *Harro Heuser,* Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Vieweg+Teubner. 14. Auflage 2008.

[5] *Gerd Fischer,* Lineare Algebra, Vieweg+Teubner. 17. Auflage 2009.

[6] *Hans–Joachim Kowalsky und Gerhard O. Michler,* Lineare Algebra, Walter de Gruyter. 12. Auflage 2003.

[7] Springer-Taschenbuch der Mathematik, Springer Spektrum. 3. Auflage 2013.

[8] *Albrecht Beutelspacher,* Das ist o.B.d.A. trivial! Vieweg+Teubner. 9. Auflage 2009.

O. Forster, T. Szymczak, *Übungsbuch zur Analysis 2*, Grundkurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-658-00513-9, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013