

Aufg. 3)

Sei K Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und $\beta \neq 0$ Bil.-form auf endlich-dim. K -VR V .

a) Sei $V = W \oplus W'$ s.d.:

i) $\dim W = 1$ und $\beta|_{W \times W} \neq 0$

ii) $\dim W' = 2$ und $\beta|_{W' \times W'} \neq 0$ ist alternierend

iii) $W = (W')^\perp$ und $W' = W^{\perp\perp}$

z.z. $\exists v, w \in V: \beta(v, w) = 0 \wedge \beta(w, v) \neq 0$

Bew.: Seien $v, w \in V$

i) $\beta|_{W \times W} \neq 0 \Rightarrow \beta(w_1, w_2) \neq 0 \quad \forall w_1, w_2 \in W$

ii) $\beta|_{W' \times W'} \neq 0 \Rightarrow \beta(w'_1, w'_2) \neq 0 \quad \forall w'_1, w'_2 \in W'$

iii) $\beta(w', w) = 0$ und $\beta(w, w') = 0$

aus i) folgt mit 15.13, dass $\beta|_{W \times W}$ nicht ausgeartet ist.

$\Rightarrow \beta(w_1, w_2) \neq 0 \quad w_1, w_2 \in W \setminus \{0\}$

Wähle: $w_1 = v$ und $w_2 = w = 0: \beta(v, 0) \neq 0$

\Rightarrow existent, da $\beta|_{W \times W}$ nicht ausgeartet

Aber: $\beta(0, v) \neq 0$ ist nicht existent, da für nicht ausgeartet, der erste Vektor $\neq 0$ sein muss. □

(4) $\forall v, w \in V: \beta(v, w) = 0 \Leftrightarrow \beta(w, v) = 0$

z.z.: b) \exists UVR $U \subseteq V$ mit

i) $\beta|_{U \times U}$ ist symmetrisch und nicht ausgeartet

ii) $\beta|_{U^{\perp} \times U^{\perp}}$ ist alternierend

Bew.:

Gelte (*). Sei U UVR, $\beta|_{U \times U}$ symm. und nicht ausgeartet

Seien $v_1, v_2 \in U$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} \beta|_{U \times U}(v_1, v_2) = \beta|_{U \times U}(v_2, v_1) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kern } \beta \in U$$

Sei $U \perp U^\perp$ und $u_1, u_2 \in U^\perp$

Angen. $\beta|_{U^\perp \times U^\perp}$ sei Symmetrisch,

$$\Rightarrow \beta|_{U^\perp \times U^\perp}(u_1, u_2) = \beta|_{U^\perp \times U^\perp}(u_2, u_1)$$

$$\Rightarrow \text{Kern } \beta \in U^\perp \quad \hat{=} \quad \text{Kern } \beta \in U$$

$$\Rightarrow \beta|_{U^\perp \times U^\perp} \text{ symmetrisch oder alternierend}$$

$$\Rightarrow \beta|_{U^\perp \times U^\perp} \text{ alternierend}$$



c) z.z.: β alternierend oder symmetrisch

Bew.: mit (*) $\Rightarrow \beta$ links- und rechtsorthog. $\Rightarrow \beta$ orthog.

$$\stackrel{15.15}{\Rightarrow} \beta \text{ alternierend od. symmetrisch}$$

