

# LINEARE ALGEBRA 2

Wolfgang Soergel

1. Oktober 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Skalarprodukt und Geometrie</b>	<b>4</b>
1.1	Skalarprodukt und Ebene von Euklid . . . . .	4
1.2	Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen . . . . .	11
1.3	Geometrie von Skalarprodukträumen . . . . .	16
1.4	Orthogonale und unitäre Abbildungen . . . . .	25
1.5	Euklidische Räume . . . . .	29
1.6	Euklidischer Raum und Anschauung* . . . . .	33
1.7	Zweistrahlen und Winkel . . . . .	38
1.8	Winkelmaße und Winkel im Dreieck . . . . .	43
1.9	Kreuzprodukt und Spatprodukt . . . . .	50
1.10	Abstandserhaltende Abbildungen . . . . .	52
1.11	Normalformen und Matrixzerlegungen . . . . .	58
1.12	Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	65
<b>2</b>	<b>Allgemeine Bilinearformen</b>	<b>81</b>
2.1	Fundamentalmatrix . . . . .	81
2.2	Hauptachsentransformation . . . . .	84
2.3	Klassifikation symmetrischer Bilinearformen . . . . .	87
2.4	Satz von Witt* . . . . .	98
2.5	Alternierende Bilinearformen . . . . .	100
2.6	Relativistische Raumzeit* . . . . .	102
2.7	Relativistische Längeneinheiten* . . . . .	107
2.8	Affine Struktur durch Lichtkegel* . . . . .	110
<b>3</b>	<b>Hauptraumzerlegung und Jordanzerlegung</b>	<b>115</b>
3.1	Motivation durch Differentialgleichungen* . . . . .	115
3.2	Hauptraumzerlegung . . . . .	116
3.3	Jordanzerlegung . . . . .	122
3.4	Jordan'sche Normalform . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Quotienten</b>	<b>135</b>
4.1	Nebenklassen . . . . .	135
4.2	Normalteiler und Nebenklassengruppen . . . . .	138
4.3	Zyklische Gruppen . . . . .	143
4.4	Endlich erzeugte abelsche Gruppen . . . . .	149
4.5	Quotientenvektorräume . . . . .	160
4.6	Exakte Sequenzen . . . . .	163
4.7	Mehr zu exakten Sequenzen* . . . . .	166

<b>5</b>	<b>Symmetrie*</b>	<b>169</b>
5.1	Gruppenwirkungen . . . . .	169
5.2	Bahnformel . . . . .	179
5.3	Konjugationsklassen . . . . .	181
5.4	Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen . . . . .	183
5.5	Diskussion der Eulerformel* . . . . .	199
5.6	Bruhatzerlegung* . . . . .	201
<b>6</b>	<b>Multilineare Algebra</b>	<b>205</b>
6.1	Tensorprodukte . . . . .	205
6.2	Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen* . . . . .	217
6.3	Bezug zur physikalischen Terminologie* . . . . .	219
6.4	Geometrie in euklidischen Vektorräumen . . . . .	222
6.5	Alternierende Tensoren und äußere Potenzen . . . . .	228
<b>7</b>	<b>Kategorien und Funktoren*</b>	<b>238</b>
7.1	Kategorien . . . . .	238
7.2	Funktoren . . . . .	245
7.3	Objekte mit Zusatzstrukturen* . . . . .	250
7.4	Transformationen . . . . .	253
7.5	Natürliche Konstruktionen in der Geometrie . . . . .	260
7.6	Köcher* . . . . .	262
7.7	Produkte und Koprodukte in Kategorien . . . . .	266
7.8	Produkte und Summen von Vektorräumen* . . . . .	271
7.9	Algebren* . . . . .	274
7.10	Yonedalemma* . . . . .	277
7.11	Universen* . . . . .	281
<b>8</b>	<b>Danksagung</b>	<b>283</b>
<b>9</b>	<b>Die Vorlesung LA2 im Sommersemester 2015</b>	<b>284</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>287</b>
	<b>Indexvorwort</b>	<b>289</b>
	<b>Index</b>	<b>290</b>

# 1 Skalarprodukt und Geometrie

## 1.1 Skalarprodukt und Ebene von Euklid

1.1.1. Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Ich erinnere daran, daß man unter einer **Bilinearform auf  $V$**  eine bilineare Abbildung  $s : V \times V \rightarrow K$  versteht. Ich erinnere weiter daran, daß eine Bilinearform **symmetrisch** heißt, wenn gilt

$$s(v, w) = s(w, v) \quad \forall v, w \in V$$

**Definition 1.1.2.** Eine symmetrische Bilinearform  $s$  auf einem reellen Vektorraum  $V$  heißt **positiv definit**, wenn gilt

$$v \neq 0 \Rightarrow s(v, v) > 0$$

Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Ein reeller Vektorraum mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt heißt ein **Skalarproduktraum**. Die **Norm** eines Vektors  $v$  in einem Skalarproduktraum  $(V, s)$  erklärt man als die nichtnegative reelle Zahl

$$\|v\| = \|v\|_s := \sqrt{s(v, v)}$$

1.1.3 (**Diskussion der Terminologie**). Das Skalarprodukt trägt seinen Namen, da es aus zwei Vektoren einen Skalar macht. Es darf nicht verwechselt werden mit der „Multiplikation mit Skalaren“ aus der Axiomatik eines Vektorraums, die aus einem Skalar und einem Vektor einen Vektor macht. Für Skalarprodukte sind auch die Notationen  $s(v, w) = \langle v, w \rangle = v \cdot w = vw$  gebräuchlich.

*Beispiel 1.1.4.* Auf  $V = \mathbb{R}^n$  erklärt man das **Standard-Skalarprodukt** durch die Vorschrift

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

für  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ . Im Formalismus der Matrixmultiplikation und mit unserer Interpretation von Elementen des  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren und Elementen von  $\mathbb{R}$  als  $(1 \times 1)$ -Matrizen können wir das Standardskalarprodukt auch schreiben als das Produkt  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^T \circ \vec{w}$  eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor.

1.1.5. Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Gegeben ein Skalarprodukt  $s$  auf  $V$  und ein Automorphismus  $g \in \text{GL}(V)$  von  $V$  heißt unser Skalarprodukt  $s$  **invariant unter  $g$**  und unser Automorphismus  $g$  **orthogonal für  $s$** , wenn gilt

$$s(gv, gw) = s(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

Ist  $G \subset \text{GL}(V)$  eine Untergruppe, so heißt ein Skalarprodukt  **$G$ -invariant**, wenn es unter allen Elementen  $g \in G$  invariant ist. Die Gruppe aller orthogonalen Automorphismen eines reellen Skalarproduktraums  $V$  notiert man

$$\text{O}(V) = \text{O}(V, s) := \{g \in \text{GL}(V) \mid s(gv, gw) = s(v, w) \forall v, w \in V\}$$

und nennt sie die **orthogonale Gruppe von  $V$** . Im Fall des  $\mathbb{R}^n$  mit seinem Standardskalarprodukt schreibt man auch  $\text{O}(n) := \{[g] \mid g \in \text{O}(\mathbb{R}^n)\}$  für die Menge aller Matrizen orthogonaler Automorphismen, der **orthogonalen Matrizen**.

*Beispiel 1.1.6.* Die einzigen orthogonalen Automorphismen von  $\mathbb{R}$  mit seinem Standardskalarprodukt sind die Identität und die Multiplikation mit  $(-1)$ . In Formeln haben wir also  $\text{O}(1) = \{1, -1\}$ .

*Beispiel 1.1.7.* Wir zeigen

$$\text{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \mid c^2 + d^2 = 1 \right\}$$

Man kann das ohne alle Theorie mühelos nachrechnen. Etwas konzeptueller mag man bemerken, daß für  $g \in \text{O}(\mathbb{R}^2)$  ja gelten muß  $\langle g(e_1), g(e_1) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$  und folglich  $g(e_1) = (c, d)^\top$  mit  $c^2 + d^2 = 1$  in der ersten Spalte unserer Matrix  $[g]$ . Ebenso muß gelten  $g(e_2) = (a, b)^\top$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ . Und da schließlich auch gelten muß  $\langle g(e_1), g(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ , folgt zusätzlich  $ca + db = 0$ . Das läßt für die zweite Spalte unserer Matrix  $[g]$  nur noch die beiden Möglichkeiten  $\pm(-d, c)^\top$  offen. Da es umgekehrt ausreicht, die Bedingung  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g\vec{v}, g\vec{w} \rangle$  für  $\vec{v}, \vec{w}$  aus einem Erzeugendensystem zu prüfen, sagen wir dem Erzeugendensystem der beiden Vektoren der Standardbasis, folgt die Behauptung. Anschaulich mag man sich die Elemente der orthogonalen Gruppe  $\text{O}(2) \cong \text{O}(\mathbb{R}^2)$  als „Drehungen“ und „Spiegelungen“ der Ebene  $\mathbb{R}^2$  vorstellen, die den Ursprung festhalten. Wir diskutieren das später noch ausführlich.

**1.1.8 (Geometrie durch Symmetrie).** Ich erwarte, daß Sie aus der Schule eine gewisse Vertrautheit mit dem Standardskalarprodukt mitbringen und wissen, daß salopp gesprochen „Senkrechtstehen Skalarprodukt Null bedeutet“ und daß „die Norm eines Vektors seine Länge bedeutet“. Das kann man sich, wenn man auf der Papierebene eine Längeneinheit und ein Paar von aufeinander senkrecht stehenden und orientierten Geraden wählt und die Papierebene darüber mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifiziert, auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras leicht klarmachen. Mir scheint jedoch eine andere Modellierung der Papierebene sinnvoller und unserer Anschauung besser zugänglich, bei der man stattdessen von der Vorgabe einer ausgezeichneten Gruppe von „Kongruenzen“ ausgeht und die Begriffe Senkrechtstehen, Skalarprodukt und Länge sowie ihre Beziehungen untereinander daraus entwickelt. Das mag auch gleich als eine erste Illustration für die Bedeutung

von „Symmetrien“ alias „strukturerhaltenden Selbstabbildungen“ in der Geometrie dienen. Wir werden im folgenden, von diesen Symmetrien oder in unserem Fall Kongruenzen ausgehend, sogar den Satz des Pythagoras selbst noch einmal in der Sprache der Mengenlehre herleiten.

**Definition 1.1.9.** Eine Teilmenge  $A$  eines reellen affinen Raums  $E$  heißt eine **Halbgerade**, wenn es einen Punkt  $p \in E$  und einen von Null verschiedenen Richtungsvektor  $\vec{v} \in \vec{E} \setminus 0$  gibt mit

$$A = p + \mathbb{R}_{\geq 0} \vec{v}$$

**Definition 1.1.10.** Eine Untergruppe  $K \subset \text{Aff}^\times(E)$  der Automorphismengruppe einer reellen affinen Ebene  $E$  heißt eine **Kongruenzgruppe**, wenn sie alle Translationen enthält, in Formeln  $\vec{E} \subset K$ , und wenn es für je zwei Halbgeraden  $A, B \subset E$  genau zwei Elemente  $k, h \in K$  gibt mit

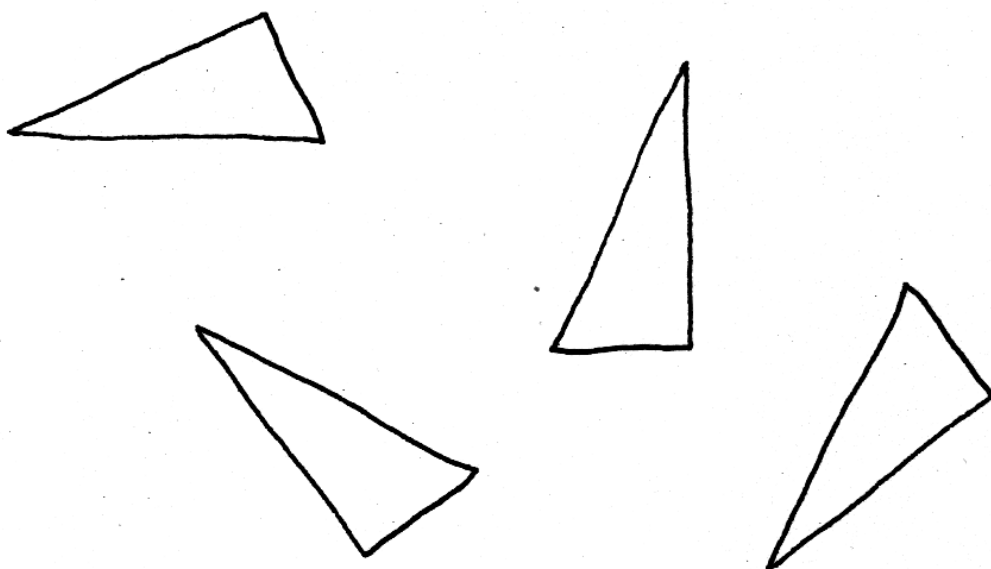
$$k(A) = B = h(A)$$

Eine **Kongruenzebene**  $(E, K)$  ist ein zweidimensionaler reeller affiner Raum  $E$  mit einer ausgezeichneten Kongruenzgruppe  $K$ . Die Elemente unserer Kongruenzgruppe nennen wir die **Kongruenzen** unserer Kongruenzebene.

1.1.11. Unter einem **invarianten Skalarprodukt** einer **Kongruenzebene**  $(E, K)$  verstehen wir ein unter der Gruppe  $\vec{K}$  der linearen Anteile aller **Kongruenzen** invariantes Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum  $\vec{E}$ .

1.1.12 (**Diskussion der Terminologie**). Unsere Kongruenzebenen sind unsere erste axiomatische Beschreibung der schmutzigen Papierebene. Wir werden noch zwei weitere axiomatische Beschreibungen dieser Struktur einführen, die eher algebraischen „euklidischen Ebenen“ alias „zweidimensionalen euklidischen Räume“ aus 1.5.1 und besonders nah an der geometrischen Anschauung und der Axiomatik von Euklid selbst die „fasteuklidischen Ebenen mit Parallelenaxiom“ aus [EL] 1.1.17.

*Vorschau* 1.1.13. In 1.2.9 zeigen wir, daß es zu jeder **Kongruenzebene**  $(E, K)$  ein invariantes Skalarprodukt  $s$  gibt und daß sich je zwei invariante Skalarprodukte zu ein- und derselben Kongruenzebene höchstens um eine positive multiplikative Konstante unterscheiden. In 1.2.11 zeigen wir, daß die Kongruenzen sich dann umgekehrt charakterisieren lassen als alle Affinitäten, deren linearer Anteil in Bezug auf dieses Skalarprodukt  $s$  orthogonal ist. Daraus mögen Sie in Übung 1.2.13 folgern, daß je zwei Kongruenzebenen in einer dort genauer präzisierten Weise isomorph sind.



Einige Dreiecke in der Papierebene, die durch Kongruenzen ineinander überführt werden können. Man nennt sie deshalb auch **kongruente Dreiecke**.

1.1.14. Orientierungserhaltende Kongruenzen einer beliebig vorgegebenen Kongruenzebene heißen **gleichsinnige Kongruenzen** und orientierungsumkehrende Kongruenzen **gegensinnige Kongruenzen**. Sie werden in 1.2.14 zeigen, daß jede gleichsinnige Kongruenz entweder eine Translation ist oder genau einen Fixpunkt hat. Sie werden dort auch zeigen, inwiefern man sie sich im letzteren Fall als eine „Drehung“ vorstellen darf. Andererseits werden sie in 1.2.15 zeigen, daß jede gegensinnige Kongruenz genau eine affine Gerade stabilisiert, und werden erklären, inwiefern man sie sich als eine „Gleitspiegelung“ vorstellen darf. Spiegelungen fassen wir dabei als spezielle Gleitspiegelungen auf.

1.1.15 (**Die schmutzige Anschauung**). Man mag bei einer Kongruenzebene an eine unendlich ausgedehnte Pappe denken und bei einer Kongruenz an eine anschauliche Bewegung im Raum, die diese Pappe in sich selber überführt. Gleichsinnige Kongruenzen erhält man, indem man sich die Pappe als auf einem Tisch liegend denkt und sie auf dem Tisch verschiebt oder dreht, ohne sie dabei vom Tisch hochzuheben. Gegensinnige Kongruenzen erhält man, indem man die Pappe auf irgendeine Weise umdreht. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist.

1.1.16 (**Norm als Länge**). Gegeben eine Kongruenzebene  $(E, K)$  mit invariantem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gilt für die zugehörige Norm  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$  offensichtlich

$$\|p - q\| = \|k(p) - k(q)\| \quad \forall p, q \in E, k \in K$$

sowie  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  für jeden reellen Skalar  $\lambda$ . In der schmutzigen Papierebene entspricht folglich  $\|p - q\|$  der Zahl, die wir als Abstand zwischen den Punkten  $p$  und  $q$  messen, wenn wir ein Lineal anlegen alias mit einer Kongruenzabbildung entsprechend bewegen, und wenn wir zusätzlich unser Lineal dadurch eichen, daß wir damit für einen fest vorgegebenen Richtungsvektor  $m \neq 0$  die Länge  $\|m\| = 1$  messen.

**Satz 1.1.17 (Senkrechtstehen und Skalarprodukt).** *Gegeben eine Kongruenzebene  $(E, K)$  mit invariantem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Richtungsvektoren  $v, w \in \vec{E}$  sind gleichbedeutend:*

1. *Es gibt eine Kongruenz  $\varphi \in K$  mit  $\vec{\varphi}(v) = -v$  und  $\vec{\varphi}(w) = w$ ;*
2. *Es gilt  $\langle v, w \rangle = 0$ .*

1.1.18. Die erste dieser Bedingungen knüpft an unsere geometrische Anschauung an. Wir nennen im folgenden zwei Richtungsvektoren **geometrisch senkrecht**, wenn sie diese Bedingung erfüllen. Die zweite dieser Bedingungen ist Ihnen vermutlich bereits aus der Schule vertraut. Wir formulieren sie gleich als Definition und nennen Vektoren  $v, w$  in einem Skalarproduktraum **algebraisch senkrecht** oder gleichbedeutend **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.



**1.1.19 (Ursprung der Terminologie).** Das Wort „senkrecht“ kommt her von „senken“, speziell dem Hinablassen eines Gewichts oder „Senkbleis“ an einem Faden, um die Vertikale zu bestimmen. Vom Begriff des „senkrecht Stehens einer Säule auf dem Boden“ zum „senkrecht Stehen eines Vektors auf einem anderen“ ist es dann nur noch ein kleiner Schritt. Das Wort „orthogonal“ ist griechisch für „rechtwinklig“, und zwar ist „gon“ derselbe Wortstamm wie „Knie“ und meint hier „Winkel“, wohingegen „ortho“ für „recht, richtig“ steht wie etwa in „Orthographie“ für „Rechtschreibung“.

*Beweis.* Gibt es eine Kongruenz  $\varphi$  mit  $\vec{\varphi}(v) = -v$  und  $\vec{\varphi}(w) = w$ , so folgt für unser invariantes Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = \langle \vec{\varphi}(v), \vec{\varphi}(w) \rangle = \langle -v, w \rangle$$

und damit  $\langle v, w \rangle = 0$ . Im Fall  $w \neq 0$  gibt es umgekehrt für alle  $p \in E$  genau eine nichttriviale Kongruenz  $\varphi \in K \setminus \text{id}$ , die die Halbgerade  $p + \mathbb{R}_{\geq 0}w$  festhält. Aus  $\varphi(p) = p$  folgt  $\vec{\varphi} \neq \text{id}$ . Andererseits gilt notwendig  $\varphi^2 = \text{id}$  und folglich  $(\vec{\varphi})^2 = \text{id}$ . Nach [LA1] 6.6.29 hat  $\vec{\varphi}$  also die Eigenwerte 1 und  $(-1)$  und beide Eigenräume sind eindimensional. Nach der bereits bewiesenen Implikation umfaßt der  $(-1)$ -Eigenraum den Untervektorraum  $\{v \in \vec{E} \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ . Aus Dimensionsgründen muß er dann bereits mit diesem Untervektorraum zusammenfallen und wir haben für alle  $v, w \in \vec{E}$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  und  $w \neq 0$  eine Kongruenz  $\varphi$  gefunden mit  $\vec{\varphi}(v) = -v$  und  $\vec{\varphi}(w) = w$ . Im Fall  $w = 0$  können wir dasselbe Argument für irgendeinen Vektor  $w_1 \in \vec{E} \setminus 0$  mit  $\langle v, w_1 \rangle = 0$  anwenden und das so konstruierte  $\varphi$  erfüllt dann natürlich auch  $\vec{\varphi}(w) = 0 = w$ .  $\square$

**Satz 1.1.20 (Pythagoras).** *Zwei Vektoren  $v, w$  des Richtungsraums einer Kongruenzebene mit invariantem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stehen genau dann aufeinander geometrisch senkrecht, wenn für die zugehörige Norm  $\| \cdot \|$  gilt*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

*Beweis.* Per definitionem gilt  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ . Aus der Bilinearität und Symmetrie des Skalarprodukts folgern wir für beliebige Richtungsvektoren  $v, w$  die Identität

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

Aus 1.1.17 wissen wir bereits, daß das geometrische Senkrechtstehen gleichbedeutend ist zum algebraischen Senkrechtstehen alias dem Verschwinden des Skalarprodukts. Der Satz folgt.  $\square$

*Ergänzung 1.1.21 (Bezug zum geometrischen Beweis).* Der auf der Schule übliche geometrische Zugang zum Satz von Pythagoras durch Flächenvergleich ist

uns dadurch verbaut, daß in unserem formalen Aufbau das Konzept einer Fläche noch gar nicht zur Verfügung steht. In der schmutzigen Anschauung mag man jedoch  $\langle v, w \rangle$  verstehen als die „orientierte Fläche  $\langle v, w \rangle = \text{vol}(v, w')$  des Parallelogramms mit den Kantenvektoren  $v, w'$  für  $w'$  den Vektor, der aus  $w$  durch Drehung um einen rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn entsteht“. In dieser Anschauung bedeutet die Bilinearität des Skalarprodukts dann insbesondere die „Invarianz von Flächen unter Scherungen“. So erweist sich unsere algebraische Rechnung als eine Übersetzung der in der Schule üblichen und adäquaten anschaulichen Argumentation in den hier entwickelten Formalismus.

*Ergänzung 1.1.22.* Ich will kurz auf die naheliegende Frage eingehen, warum man nicht anstelle des Skalarprodukts einfacher die Zuordnung betrachten sollte, die je zwei Vektoren einer euklidischen Ebene die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet. Die Schwierigkeit dabei ist, daß diese Zuordnung nicht bilinear wäre, man kann also nur schöne algebraische Formeln erwarten für die Zuordnung, die je zwei Vektoren einer euklidischen Ebene die „orientierte Fläche“ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet. Diese Zuordnung kann durchaus durch einen einfachen algebraischen Ausdruck beschrieben werden, sie hängt aber von der Wahl einer Orientierung ab und ist nicht symmetrisch, sondern vielmehr schief-symmetrisch. Bei der zuvor beschriebenen geometrischen Bedeutung des Skalarprodukts geht dahingegen die Wahl einer Orientierung zweimal ein und kürzt sich weg, so daß es im Endeffekt von dieser Wahl doch nicht abhängt.

*Ergänzung 1.1.23 (Allgemeinere Grundkörper als die reellen Zahlen).* Bei den hier und im folgenden ausgeführten Überlegungen mag man ein tieferes Verständnis aus der Frage gewinnen, inwieweit sie sich auch über allgemeineren angeordneten Körpern durchführen lassen. Für die meisten Resultate müssen wir nur fordern, daß alle nichtnegativen Elemente des fraglichen angeordneten Körpers Quadrate sind. Sobald es aber um Winkelmaße gehen wird, benötigen wir analytische Hilfsmittel und müssen mit dem Körper der reellen Zahlen arbeiten oder eine große Künstlichkeit der Konstruktionen und Argumente in Kauf nehmen.

## Übungen

*Übung 1.1.24 (Die komplexe Zahlenebene als Kongruenzebene).* Man zeige, daß die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  zu einer Kongruenzebene werden, wenn wir als Kongruenzen diejenigen Abbildungen auszeichnen, die eine der beiden Gestalten  $z \mapsto az + b$  oder  $z \mapsto a\bar{z} + b$  haben mit  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $|a| = 1$ . Man zeige, daß die Formel  $\langle z, w \rangle := \text{Re } \bar{z}w$  ein invariantes Skalarprodukt auf  $\vec{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$  liefert, für dessen Norm gilt  $\|z\| = |z|$ . Man mag mit mehr Mut weiter zeigen, daß unsere Kongruenzen genau alle Abbildungen  $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind mit

$$|k(p) - k(q)| = |p - q| \quad \forall p, q \in \mathbb{C}.$$

**Übung 1.1.25.** Gegeben ein reeller Skalarproduktraum  $V$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  verwendet man üblicherweise die Notation  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Man zeige in einem reellen Skalarproduktraum die Äquivalenz

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0$$

Man zeige weiter in einem reellen Skalarproduktraum die **Parallelogrammregel**, nach der die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen ist, in Formeln

$$2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2$$

**Übung 1.1.26 (Rechtfertigung der Konstruktion der Mittelsenkrechte).** Seien  $E$  eine reelle affine Ebene und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum. Gegeben paarweise verschiedene Punkte  $a, b, c, d \in E$  mit  $\|a - c\| = \|a - d\|$  und  $\|b - c\| = \|b - d\|$  zeige man, daß  $(a - b)$  senkrecht steht auf  $(c - d)$ . Gilt hier sogar  $\|a - c\| = \|a - d\| = \|b - c\| = \|b - d\|$ , so zeige man, daß der Schnittpunkt  $p$  der Geraden  $\overline{ab}$  und  $\overline{cd}$  durch  $a$  und  $b$  beziehungsweise  $c$  und  $d$  denselben Abstand zu allen unseren vier Punkten  $a, b, c, d$  hat, in Formeln  $\|a - p\| = \|b - p\| = \|c - p\| = \|d - p\|$ .

## 1.2 Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen

**Definition 1.2.1.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge  $A \subset V$  heißt ein **Strahl**, wenn es einen Vektor  $v \in V \setminus 0$  gibt mit  $A = \mathbb{R}_{\geq 0}v$ .

**Definition 1.2.2.** Gegeben ein zweidimensionaler reeller Vektorraum  $Z$  heiße eine Untergruppe  $O \subset \text{GL}(Z)$  eine **Drehspiegelgruppe**, wenn es für je zwei Strahlen  $A, B \subset Z$  genau zwei Elemente  $k, h \in O$  gibt mit  $k(A) = B = h(A)$ . Die Elemente einer ausgezeichneten Drehspiegelgruppe nennen wir im folgenden **Drehspiegelungen**.

**Beispiel 1.2.3.** Gegeben ein zweidimensionaler reeller Vektorraum  $Z$  mit Skalarprodukt  $s$  ist die orthogonale Gruppe  $O(Z, s)$  eine Drehspiegelgruppe. Ich überlasse es dem Leser, dafür einen Beweis auszuschreiben.

1.2.4. Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe. Für alle  $v \in Z \setminus 0$  gibt es dann nach Annahme genau ein nicht-triviales Element  $r_v \in O \setminus \text{id}$  mit  $r_v(\mathbb{R}_{\geq 0}v) = \mathbb{R}_{\geq 0}v$ . Es folgt erst  $r_v^2 = \text{id}$  und dann  $r_v(v) = v$ . Aus  $r_v^2 = \text{id}$  folgt andererseits, daß  $r_v$  die Eigenwerte 1 und  $(-1)$  hat. Wir nennen  $r_v$  die **Spiegelung zu  $v$** . Die Notation mag an „Reflektion“ erinnern, der Buchstabe  $s$  ist schon für Skalarprodukte vergeben.

**Lemma 1.2.5 (Drehspiegelungen mit negativer Determinante).** Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe. So sind die Drehspiegelungen mit negativer Determinante genau die Spiegelungen, in Formeln

$$\{k \in O \mid \det(k) < 0\} = \{r_v \mid v \in Z \setminus 0\}$$

*Beweis.* Ein Automorphismus  $r$  eines zweidimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante muß nach [LA1] 6.6.24 einen positiven und einen negativen Eigenwert haben. Ist  $r$  unsere Drehspiegelung und  $v$  ein Eigenvektor von  $r$  zum positiven Eigenwert, so muß  $r$  die einzige nichttriviale Drehspiegelung sein, die den Strahl  $\mathbb{R}_{\geq 0}v$  festhält.  $\square$

**Lemma 1.2.6.** Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe. So werden je zwei Strahlen  $A, B \subset Z$  durch genau eine Spiegelung aus  $O$  miteinander vertauscht.

*Beweis.* Sicher gibt es stets eine Drehspiegelung  $k$ , die  $A$  in  $B$  überführt, und eine Spiegelung  $r$ , die  $A$  festhält. Dann hat von den beiden Drehspiegelungen  $r$  und  $kr$ , die  $A$  in  $B$  überführen, genau eine negative Determinante, und die ist nach 1.2.5 die gesuchte Spiegelung.  $\square$

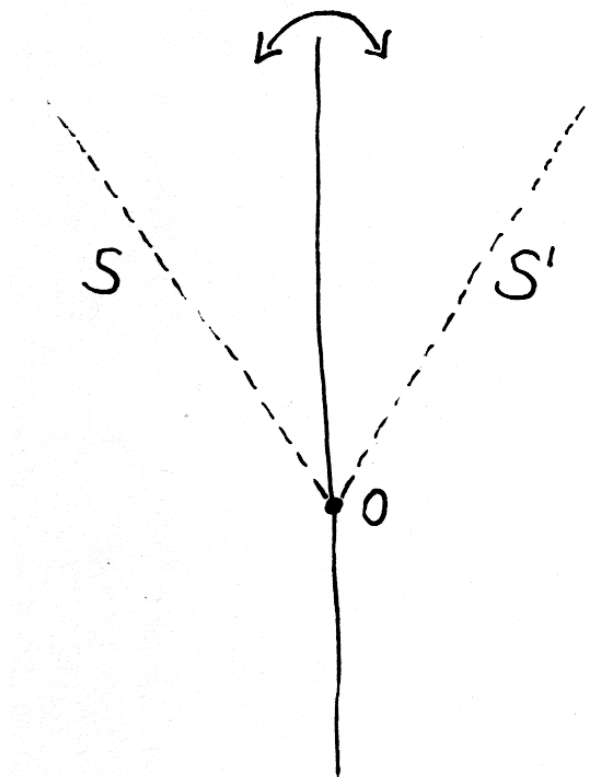
**1.2.7 (Einführen einer Norm).** Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe. Sei  $m \in Z \setminus 0$  ein fest gewählter von Null verschiedener Vektor. Für jeden weiteren von Null verschiedenen Vektor  $v \in Z \setminus 0$  gibt es offensichtlich genau eine Drehspiegelung  $d \in O$  mit positiver Determinante, die den Strahl  $\mathbb{R}_{\geq 0}v$  auf den Strahl  $\mathbb{R}_{\geq 0}m$  abbildet. Wir können also eine positive reelle Zahl  $\|v\|_m = \|v\|$  definieren durch die Forderung

$$d(v) = \|v\|_m m$$

Wir nennen diese positive reelle Zahl die **durch  $m$  bestimmte Norm** oder kurz die  **$m$ -Norm von  $v$** . Vereinbaren wir zusätzlich  $\|0\| = 0$ , so gilt offensichtlich  $\|\mu v\| = \mu\|v\|$  für alle Vektoren  $v \in Z$  und alle nichtnegativen reellen Zahlen  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Offensichtlich gilt auch  $\|kv\| = \|v\|$  für alle Drehspiegelungen  $k \in O$  und wir haben für  $v, w \in Z$  sogar

$$\|v\| = \|w\| \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in O \text{ mit } k(v) = w.$$

**Satz 1.2.8 (Invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen).** Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe. So gibt es auf  $Z$  ein  $O$ -invariantes Skalarprodukt und je zwei  $O$ -invariante Skalarprodukte unterscheiden sich höchstens um eine positive multiplikative Konstante.



Je zwei Strahlen in einem zweidimensionalen reellen Vektorraum mit  
ausgezeichneter Drehspiegelgruppe werden durch eine Spiegelung vertauscht.  
Der ausgezeichnete Punkt stellt den Ursprung dar.

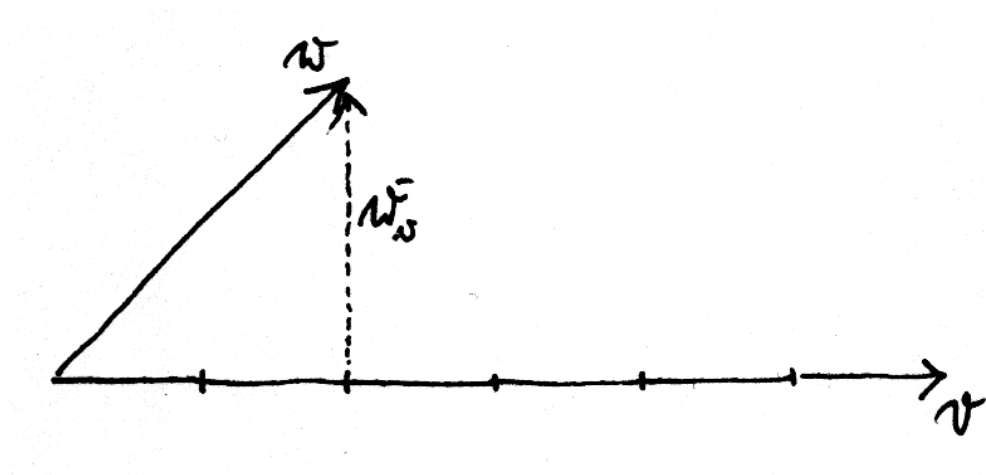


Illustration der Definition von  $\alpha_v(w)$ . Im Bild hätten wir etwa  $\alpha_v(w) = 1/3$ .

*Beweis.* Gegeben Vektoren  $v, w \in Z$  mit  $v \neq 0$  erklären wir einen Skalar  $\alpha_v(w) \in \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$\alpha_v(w)v = (w + r_v w)/2$$

Das ist sinnvoll, da die rechte Seite offensichtlich ein Fixpunkt der Spiegelung  $r_v$  ist und folglich ein Vielfaches von  $v$  sein muß. Die rechte Seite ist genauer der Fixpunktanteil von  $w$  bei seiner Zerlegung  $w = w_v^+ + w_v^-$  in Eigenvektoren von  $r_v$  zu den Eigenwerten  $\pm 1$ . Mit dieser Notation gilt also

$$\alpha_v(w)v = w_v^+$$

In der schmutzigen Anschauung mag man sich  $w_v^+$  als das Bild von  $w$  unter der „orthogonalen Projektion auf die Gerade  $\mathbb{R}v$ “ vorstellen, wie Sie sie möglicherweise in der Schule bereits kennengelernt haben. Jetzt halten wir einen Vektor  $m \in Z \setminus 0$  fest und erklären eine Abbildung  $Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$  durch die Vorschrift

$$\langle v, w \rangle := \begin{cases} \|v\|^2 \alpha_v(w) & v \neq 0; \\ 0 & v = 0. \end{cases}$$

Wir zeigen im folgenden, daß das ein invariantes Skalarprodukt ist. Offensichtlich gilt  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$  und  $w \mapsto \langle v, w \rangle$  ist linear für alle  $v$ . Ist weiter  $k \in O$  eine Drehspiegelung, so gilt  $kr_v = r_{kv}k$ , denn beide Abbildungen haben dieselbe Determinante und bilden  $v$  auf  $kv$  ab. Daraus folgt  $\alpha_v(w) = \alpha_{kv}(kw)$  mittels der Umformungen

$$\alpha_v(w)kv = (kw + kr_v w)/2 = (kw + r_{kv} kw)/2 = \alpha_{kv}(kw)kv$$

Es folgt die Invarianz  $\langle v, w \rangle = \langle kv, kw \rangle$  für alle  $k \in O$ . Um schließlich zu zeigen, daß auch  $v \mapsto \langle v, w \rangle$  linear ist für alle  $w$ , reicht es, die Symmetrie  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  zu prüfen. Es reicht, das für  $v \neq 0 \neq w$  zu prüfen. Es reicht sogar, das unter der zusätzlichen Voraussetzung  $\|v\| = \|w\|$  zu prüfen, denn offensichtlich gilt stets  $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle$ . Damit dürfen wir nach 1.2.6 annehmen, daß es eine Spiegelung  $r \in O$  gibt mit  $rv = w$  und  $r^2 = \text{id}$ . Es folgt  $rw = v$  und so die gewünschte Symmetrie  $\langle v, w \rangle = \langle rv, rw \rangle = \langle w, v \rangle$ . Damit liefert unsere Konstruktion in der Tat das gesuchte invariante Skalarprodukt. Um die Eindeutigkeit bis auf Skalar zu zeigen, wählen wir  $v \in Z \setminus 0$  und einen Eigenvektor  $w$  von  $r_v$  zum Eigenwert  $-1$  derart, daß es eine Drehspiegelung  $d \in O$  gibt mit  $dv = w$ . Für jedes invariante Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gilt dann

$$\langle v, w \rangle = \langle r_v v, r_v w \rangle = \langle v, -w \rangle = -\langle v, w \rangle$$

und damit  $\langle v, w \rangle = 0$ . Weiter gilt  $\langle v, v \rangle = \langle dv, dv \rangle = \langle w, w \rangle$  und so

$$\langle av + bw, xv + yw \rangle = (ax + by)\langle v, v \rangle$$

Das zeigt die behauptete Eindeutigkeit bis auf Skalar. □

**Korollar 1.2.9 (Invariante Skalarprodukte zu Kongruenzebenen).** *Zu jeder Kongruenzebene gibt es ein invariantes Skalarprodukt und je zwei invariante Skalarprodukte unterscheiden sich um eine positive multiplikative Konstante.*

*Beweis.* Gegeben eine Kongruenzebene  $(E, K)$  ist offensichtlich  $\vec{K} \subset \text{GL}(\vec{E})$  eine Drehspiegelgruppe. Damit folgt die Behauptung aus unserem Satz 1.2.8 über invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen.  $\square$

**Proposition 1.2.10 (Drehspiegelgruppe als orthogonale Gruppe).** *Sei  $(Z, O)$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichnete Drehspiegelgruppe und  $s$  ein  $O$ -invariantes Skalarprodukt. So ist unsere Drehspiegelgruppe die orthogonale Gruppe zu  $s$ , in Formeln*

$$O = O(Z, s)$$

*Beweis.* Per definitionem haben wir  $O \subset O(Z, s)$  und nach 1.2.3 ist auch  $O(Z, s)$  eine Drehspiegelgruppe. Beide Gruppen haben also dieselben Elemente mit negativer Determinante, nämlich unsere Spiegelungen  $r_v$  mit  $v \in Z \setminus 0$ . Sie mögen als Übung 1.2.12 zeigen, daß jede Drehspiegelgruppe von ihren Spiegelungen erzeugt wird. Das beendet dann den Beweis.  $\square$

**Korollar 1.2.11 (Kongruenzgruppe als orthogonalaffine Gruppe).** *Gegeben ein invariantes Skalarprodukt  $s$  zu einer Kongruenzebene  $(E, K)$  sind die Kongruenzen genau alle Affinitäten mit  $s$ -orthogonalem linearen Anteil, in Formeln*

$$K = \{\varphi \in \text{Aff } E \mid \vec{\varphi} \in O(s)\}$$

*Beweis.* Weil unsere Kongruenzgruppe nach Annahme alle Richtungsvektoren enthält, haben wir schon mal  $K = \{\varphi \in \text{Aff } E \mid \vec{\varphi} \in \vec{K}\}$ . Damit folgt das Korollar direkt aus unserer Proposition 1.2.10.  $\square$

## Übungen

*Übung 1.2.12.* Jede Drehspiegelgruppe wird von ihren Spiegelungen erzeugt.

*Übung 1.2.13 (Eindeutigkeit von Kongruenzebenen).* Ein **Isomorphismus von Kongruenzebenen**  $(E, K)$  und  $(F, L)$  ist ein Isomorphismus  $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$  von affinen Räumen, unter dem sich die jeweils ausgezeichneten Kongruenzgruppen entsprechen, in Formeln  $L = \varphi K \varphi^{-1}$ . Man zeige, daß je zwei Kongruenzebenen  $E, F$  isomorph sind. Man zeige genauer, daß es für beliebige Paare von je zwei verschiedenen Punkten  $(p, q) \in E \times E$  sowie  $(b, d) \in F \times F$  genau zwei Isomorphismen  $\phi, \psi : E \xrightarrow{\sim} F$  von Kongruenzebenen gibt, die  $(p, q)$  in  $(b, d)$  überführen. Man mag etwa zeigen, daß jedes Beispiel zu dem in 1.1.24 gegebenen Beispiel isomorph sein muß.

**Übung 1.2.14 (Gleichsinnige Kongruenzen).** Die einzige gleichsinnige Kongruenz einer Kongruenzebene mit mehr als einem Fixpunkt ist die Identität. Jede gleichsinnige Kongruenz einer Kongruenzebene ohne Fixpunkt ist eine Translation. Jede gleichsinnige Kongruenz unserer Kongruenzebene  $\mathbb{C}$  aus 1.1.24 mit Fixpunkt  $p$  hat die Gestalt  $p + z \mapsto p + \lambda z$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| = 1$ .

**Übung 1.2.15 (Gegensinnige Kongruenzen).** Jede gegensinnige Kongruenz einer Kongruenzebene stabilisiert genau eine reelle affine Gerade. Jede gegensinnige Kongruenz unserer Kongruenzebene  $\mathbb{C}$  aus 1.1.24, die  $\mathbb{R}$  stabilisiert, hat die Gestalt  $z \mapsto a + \bar{z}$  für  $a \in \mathbb{R}$ .

**Übung 1.2.16 (Ähnlichkeiten).** Ein Isomorphismus einer Kongruenzebene mit sich selber heißt eine **Ähnlichkeitsabbildung** oder **Ähnlichkeit**. Man zeige, daß die Ähnlichkeiten unserer Kongruenzebene  $\mathbb{C}$  aus 1.1.24 genau alle Abbildungen sind, die eine der beiden Gestalten  $z \mapsto az + b$  oder  $z \mapsto a\bar{z} + b$  haben mit  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$ . Man folgere, daß alle Ähnlichkeiten einer Kongruenzebene, die keine Kongruenzen sind, genau einen Fixpunkt haben müssen, und argumentiere heuristisch, daß sie entweder „Drehstreckungen“ oder „Spiegelstreckungen“ sein müssen.

## 1.3 Geometrie von Skalarprodukträumen

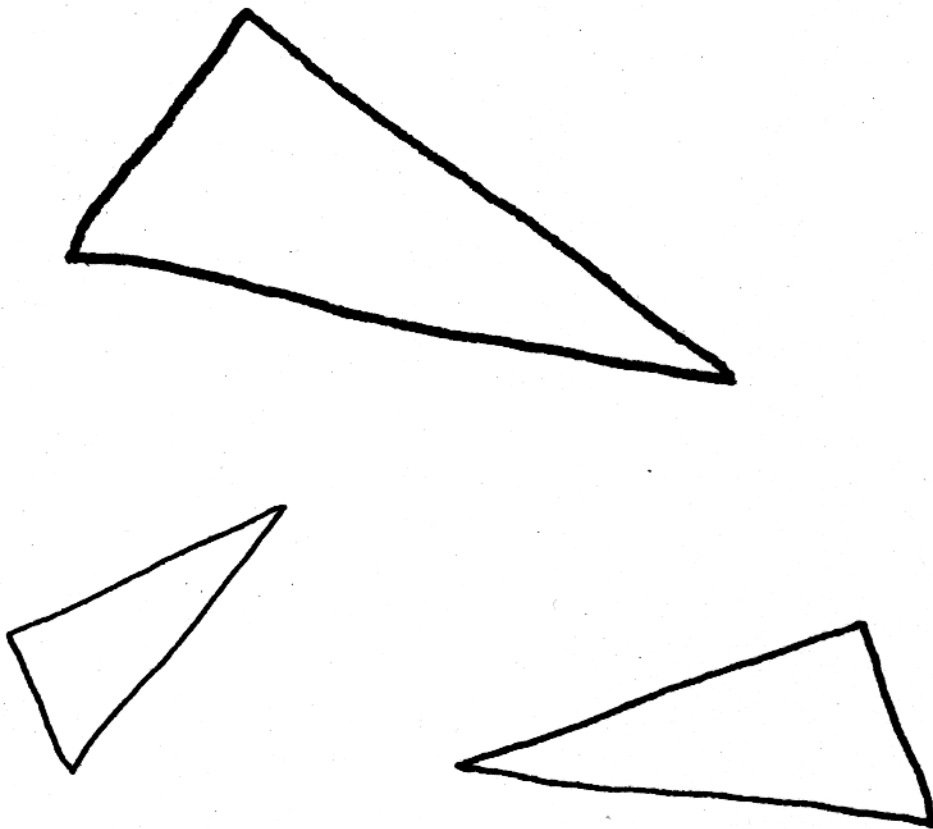
1.3.1. Im Vorhergehenden haben wir aus der räumlichen Anschauung heraus den Begriff des Skalarprodukts entwickelt. Im folgenden bauen wir umgekehrt für allgemeine Vektorräume mit Skalarprodukt eine sich an dieser räumlichen Anschauung orientierende Begrifflichkeit auf und zeigen, wie sich viele im Raum unserer Anschauung offensichtliche Tatsachen algebraisch formalisieren und auf diesen Kontext verallgemeinern lassen. Ich schreibe eine Weile wieder Vektoren mit Pfeil, damit man die  $i$ -te Komponente  $v_i$  eines Vektors  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  und den  $i$ -ten Vektor  $\vec{v}_i$  einer Familie  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  von Vektoren besser auseinanderhalten kann.

1.3.2. Ich beginne mit Erinnerungen einiger grundlegender Begriffe. Gegeben ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$  heißt eine bilineare Abbildung  $b : V \times V \rightarrow K$  wie in [LA1] 2.3.8 eine **Bilinearform auf  $V$** . Wie in [LA1] 6.3.1 heißt eine Bilinearform  $b$  **symmetrisch**, wenn gilt  $b(\vec{v}, \vec{w}) = b(\vec{w}, \vec{v})$  für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in V$ . Ist  $K$  ein angeordneter Körper, so heißt eine Bilinearform  $b$  wie in 1.1.2 **positiv definit**, wenn gilt  $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow b(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ . Ein **Skalarprodukt** auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper ist wie in 1.1.2 eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

**Beispiel 1.3.3.** Auf  $V = \mathbb{R}^n$  erhält man ein Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$





Einige Dreiecke, die durch Ähnlichkeiten im Sinne von ?? ineinander überführt werden können. Man nennt sie deshalb auch **ähnliche Dreiecke**.

für  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ . Es heißt das **Standard-Skalarprodukt**. Man findet für das Standardskalarprodukt oft die alternative Notation  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ . Im Formalismus der Matrixmultiplikation und mit unserer Interpretation von Elementen des  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren und Elementen von  $\mathbb{R}$  als reellen  $(1 \times 1)$ -Matrizen können wir es auch schreiben als Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \vec{v}^\top \circ \vec{w}$ .

**1.3.4 (Motivation für Skalarprodukte im Komplexen).** Für die nun folgende Erweiterung des Begriffs eines Skalarprodukts ins Komplexe kenne ich keine anschauliche Begründung. Es wird sich jedoch erweisen, daß das Zusammenwirken der algebraischen Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen mit den Positivitätseigenschaften eines Skalarprodukts Resultate liefert, die auch interessante Konsequenzen für reelle Vektorräume haben. Beispiele dafür sind die Sätze über die Normalform orthogonaler Matrizen 1.11.3 oder über die Hauptachsentransformation 2.2.7.

**Definition 1.3.5.** Ein **Skalarprodukt** auf einem komplexen Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  derart, daß für alle  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt:

1.  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  und  $\langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ;
2.  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  und  $\langle \mu \vec{v}, \vec{w} \rangle = \bar{\mu} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ . Bei Herausziehen eines Skalars  $\mu$  im ersten Eintrag muß also besagter Skalar konjugiert werden;
3.  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}$ , insbesondere also  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ .

**1.3.6.** Nebenbei bemerkt folgt hier 2 schon aus 1 und 3, aber es kann auch nicht schaden, diese Formeln nochmal explizit hinzuschreiben. Ganz allgemein heißt eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von komplexen Vektorräumen **schieflinear**, wenn gilt  $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$  und  $f(\mu \vec{v}) = \bar{\mu} f(\vec{v})$  für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  und  $\mu \in \mathbb{C}$ . Die ersten beiden Teile unserer Definition können also dahingehend zusammengefaßt werden, daß unser Skalarprodukt schieflinear ist im ersten Eintrag und linear im zweiten. Eine Abbildung  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , die nur diese beiden Bedingungen 1 und 2 erfüllt, nennt man eine **Sesquilinearform**. Gilt zusätzlich 3, so heißt die Sesquilinearform **hermitesch** nach dem französischen Mathematiker Hermite. Das Standardbeispiel ist  $V = \mathbb{C}^n$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \bar{v}_1 w_1 + \dots + \bar{v}_n w_n$  für  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ . Mithilfe der Matrixmultiplikation kann dies Skalarprodukt auch geschrieben werden als

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^\top \circ \vec{w}$$

Der Strich über einer Matrix mit komplexen Einträgen meint dabei das komplexe Konjugieren aller Einträge.

1.3.7 (**Diskussion der Terminologie**). Viele Autoren verwenden die abweichende Konvention, nach der im komplexen Fall ein Skalarprodukt linear im ersten und schieflinear im zweiten Eintrag sein soll. Ich ziehe die hier gegebene Konvention vor, da dann bei der Interpretation von  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  als „ $\vec{v}$  auf  $\vec{w}$  angewendet“ dieses Anwenden von  $\vec{v}$  linear ist. In der physikalischen Literatur findet man meist die abweichende Notation  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ .

**Definition 1.3.8.** Einen reellen beziehungsweise komplexen Vektorraum mit Skalarprodukt nennen wir einen reellen beziehungsweise komplexen **Skalarprodukt-raum**. In einem reellen oder komplexen Skalarproduktraum definiert man die **Skalarproduktnorm** oder kurz **Norm**  $\|\vec{v}\| \in \mathbb{R}$  eines Vektors  $\vec{v}$  durch die Formel

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Vektoren  $\vec{v}$  der Norm  $\|\vec{v}\| = 1$  heißen **normal**. Mit dem **Abstand** zwischen zwei Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  meinen wir die Norm  $\|\vec{v} - \vec{w}\|$  ihrer Differenz. Zwei Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  heißen **orthogonal** und man schreibt  $\vec{v} \perp \vec{w}$ , wenn gilt  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ . Man sagt dann auch,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  **stehen senkrecht aufeinander**. Manchmal verwendet man das Symbol  $\perp$  auch für allgemeinere Teilmengen  $A, B$  eines Skalarproduktraums und schreibt  $A \perp B$  als Abkürzung für die Aussage  $(\vec{v} \perp \vec{w} \ \forall \vec{v} \in A, \vec{w} \in B)$ .

1.3.9. In einem reellen oder komplexen Skalarproduktraum gilt  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$  für alle Vektoren  $\vec{v}$  und alle Skalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  beziehungsweise  $\lambda \in \mathbb{C}$ . In der Tat haben wir ja

$$\|\lambda \vec{v}\|^2 = \langle \lambda \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\lambda|^2 \|\vec{v}\|^2$$

1.3.10. Einen komplexen Skalarproduktraum nennt man einen **unitären Raum** und im Kontext der Definition allgemeiner Hilberträume auch einen **Prä-Hilbert-raum** oder im endlichdimensionalen Fall einen **endlichdimensionalen Hilbert-raum**.

*Vorschau* 1.3.11 (**Diskussion der Terminologie**). Einen reellen Skalarproduktraum nennt man vielfach einen „euklidischen Vektorraum“. Ich schließe mich dieser Terminologie nicht an und erkläre stattdessen einen euklidischen Vektorraum in 1.5.1 als einen reellen Vektorraum mit einem „nur bis auf einen Skalar eindeutig bestimmten Skalarprodukt“.

1.3.12. Stehen zwei Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eines Skalarproduktraums senkrecht aufeinander, so gilt der **Satz des Pythagoras**

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

In der Tat folgt ja aus  $\vec{v} \perp \vec{w}$  schon

$$\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

Im Reellen gilt hier auch die Umkehrung. Im Komplexen ist dahingegen die Identität  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$  gleichbedeutend zu  $\operatorname{Re}\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$ .

**Definition 1.3.13.** Eine Familie  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  von Vektoren eines Skalarproduktraums heißt ein **Orthonormalsystem**, wenn die Vektoren  $\vec{v}_i$  alle die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, wenn also in Formeln mit dem Kroneckerdelta aus [LA1] 2.4.2 gilt

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ein Orthonormalsystem, das eine Basis ist, heißt eine **Orthonormalbasis**.

1.3.14. Ist  $V$  ein Skalarproduktraum und  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem und  $\vec{w} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$  die Darstellung eines Vektors  $\vec{w} \in V$ , so erhalten wir durch Davormultiplizieren von  $\vec{v}_j$  sofort  $\lambda_j = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle$ . Insbesondere ist jedes Orthonormalsystem linear unabhängig.

**Proposition 1.3.15.** *Jeder endlichdimensionale reelle oder komplexe Skalarproduktraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

*Beweis.* Ist unser Raum der Nullraum, so tut es die leere Menge. Sonst finden wir einen von Null verschiedenen Vektor und erhalten, indem wir ihn mit dem Kehrwert seiner Norm multiplizieren, sogar einen Vektor  $\vec{v}_1$  der Norm Eins. Die lineare Abbildung  $\langle \vec{v}_1, \cdot \rangle$  ist nicht die Nullabbildung und hat folglich nach der Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 als Kern einen Untervektorraum einer um Eins kleineren Dimension. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis.  $\square$

1.3.16. Gegeben ein Skalarproduktraum  $V$  und eine Teilmenge  $T \subset V$  setzen wir

$$T^\perp := \{v \in V \mid v \perp t \quad \forall t \in T\}$$

und nennen diese Menge den **Orthogonalraum** von  $T$  in  $V$ . Offensichtlich ist der Orthogonalraum einer beliebigen Teilmenge  $T \subset V$  ein Untervektorraum von  $V$ .

**Proposition 1.3.17 (Orthogonales Komplement).** *Gegeben ein Skalarproduktraum  $V$  und ein endlichdimensionaler Untervektorraum  $U \subset V$  ist der Orthogonalraum von  $U$  in  $V$  auch ein Vektorraumkomplement, in Formeln*

$$V = U \oplus U^\perp$$

*Ergänzung 1.3.18.* Die Proposition gilt auch für Skalarprodukträume über einem beliebigen angeordneten Körper. Der Beweis muß für diesen Fall allerdings umgeschrieben werden, da in dieser Allgemeinheit auch ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum nicht notwendig eine Orthonormalbasis hat.

*Beweis.* Natürlich gilt  $U \cap U^\perp = \{0\}$ . Es reicht also zu zeigen, daß jeder Vektor  $\vec{w} \in V$  dargestellt werden kann als

$$\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$$

mit  $\vec{p} \in U$  und  $\vec{r} \in U^\perp$ . Nach 1.3.15 besitzt nun  $U$  eine Orthonormalbasis  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . Machen wir den Ansatz  $\vec{p} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$ , so folgt  $\langle \vec{v}_i, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{p} \rangle = \lambda_i$  und damit die Eindeutigkeit von  $\vec{p}$ . Andererseits steht aber mit diesen  $\lambda_i$  der Vektor  $\vec{r} = \vec{w} - \sum \lambda_i \vec{v}_i$  auch tatsächlich senkrecht auf allen  $\vec{v}_i$ , denn wir finden

$$\langle \vec{v}_j, \vec{r} \rangle = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle - \sum \lambda_i \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{v}_j, \vec{w} \rangle - \lambda_j = 0 \quad \square$$

1.3.19. Sagen wir von zwei Untervektorräumen eines Skalarproduktraums, sie seien **orthogonal**, so ist gemeint, daß jeder Vektor des einen Teilraums zu jedem Vektor des anderen Teilraums orthogonal ist.

1.3.20. Gegeben  $U \subset V$  ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums verstehen wir unter einem **orthogonalen Komplement** von  $U$  in  $V$  einen Untervektorraum  $W \subset V$ , der sowohl ein Vektorraumkomplement ist als auch orthogonal zu  $U$ . Wenn es ein derartiges orthogonales Komplement gibt, muß es offensichtlich der Orthogonalraum  $W = U^\perp$  sein. Es kann aber im Fall unendlichdimensionaler Skalarprodukträume durchaus vorkommen, daß der Orthogonalraum von  $U$  kein Vektorraumkomplement ist und daß damit der Untervektorraum  $U$  kein orthogonales Komplement besitzt. Ein Beispiel dafür gibt Übung 1.3.28.

1.3.21. Besitzt ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums  $U \subset V$  ein orthogonales Komplement, haben wir also  $V = U \oplus U^\perp$ , so kann jeder Vektor  $\vec{w} \in V$  eindeutig geschrieben werden als  $\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$  mit  $\vec{p} \in U$  und  $\vec{r} \in U^\perp$ . Die Abbildung  $\vec{w} \mapsto \vec{p}$  ist dann offensichtlich linear und heißt die **orthogonale Projektion** auf den Untervektorraum  $U$ . Sie ist in der Terminologie von [LA1] 2.2.19 die Projektion auf  $U$  längs  $U^\perp$ . Man beachte, daß die orthogonale Projektion von  $\vec{w}$  auf  $U$  genau derjenige Punkt  $\vec{p}$  unseres Untervektorraums  $U$  ist, der den kleinsten Abstand zu  $\vec{w}$  hat. Für jeden Vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  aus unserem Untervektorraum gilt nämlich nach Pythagoras

$$\|(\vec{p} + \vec{v}) - \vec{w}\|^2 = \|\vec{p} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 > \|\vec{p} - \vec{w}\|^2$$

*Vorschau* 1.3.22. Man beachte, daß unsere orthogonale Projektion mit Ausnahme des Extremfalls  $U = V$  keineswegs eine orthogonale Abbildung im Sinne von 1.4.1 ist.

**Satz 1.3.23.** 1. Für beliebige Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear abhängig sind;

2. Für beliebige Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn einer unserer Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist, in Formeln  $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \vec{w}$  oder  $\vec{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \vec{v}$ .

*Ergänzung 1.3.24.* Dieser Satz zeigt insbesondere, daß unsere Skalarproduktnorm auch im Sinne der Analysis [AN1] 7.4.2 eine Norm ist.

**1.3.25 (Verschiedene Ansätze zum Beweis der Dreiecksungleichung).** Man mag versucht sein, die Dreiecksungleichung zu beweisen, indem man eine Ecke des Dreiecks orthogonal auf die gegenüberliegende Kante projiziert und bemerkt, daß die beiden anderen Kanten dabei nach Pythagoras nur kürzer werden können. Leider führt diese anschaulich besonders überzeugende Beweisidee bei der Ausformulierung in ein unangenehmes Dickicht von Fallunterscheidungen, so daß ich die im folgenden gegebene weniger anschauliche Darstellung vorgezogen habe.

*Beweis.* Um Teil 1 zu zeigen, nehmen wir zunächst  $\|\vec{v}\| = 1$  an. Das Bild  $\vec{p}$  eines weiteren Vektors  $\vec{w}$  unter der orthogonalen Projektion auf die Gerade  $\mathbb{R}\vec{v}$  wird dann nach 1.3.17 oder genauer seinem Beweis gegeben durch die Formel  $\vec{p} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{v}$ . Erklären wir  $\vec{r}$  durch  $\vec{w} = \vec{p} + \vec{r}$ , so steht demnach oder auch nach elementarer Rechnung  $\vec{r}$  senkrecht auf  $\vec{v}$  und wir erhalten unter Zuhilfenahme des Pythagoras

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|^2 = \|\vec{p}\|^2 \leq \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{r}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$$

Das zeigt die Ungleichung  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$  mit Gleichheit genau dann, wenn gilt  $\vec{r} = \vec{0}$  alias wenn  $\vec{w}$  ein Vielfaches von  $\vec{v}$  ist. Diese Ungleichung muß aber offensichtlich erhalten bleiben, wenn wir darin  $\vec{v}$  durch ein Vielfaches ersetzen, und so erhalten wir dann für beliebige Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eines beliebigen Skalarproduktraums die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear abhängig sind. Daraus hinwiederum ergibt sich, indem man beide Seiten quadriert, sofort die Dreiecksungleichung  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ . Der Beweis der letzten Aussage von Teil 2 sei dem Leser zur Übung überlassen.  $\square$

*Alternativer Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.* Man findet

$$f(t) := \langle \vec{v} + t\vec{w}, \vec{v} + t\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + t^2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Aus  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$  folgt  $\operatorname{Re} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$  für alle  $\vec{v}$ . Haben wir  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \neq 0$ , so findet man das Minimum unserer Funktion von  $t$  mit Hilfe der Bedingung  $f'(t_0) = 0$

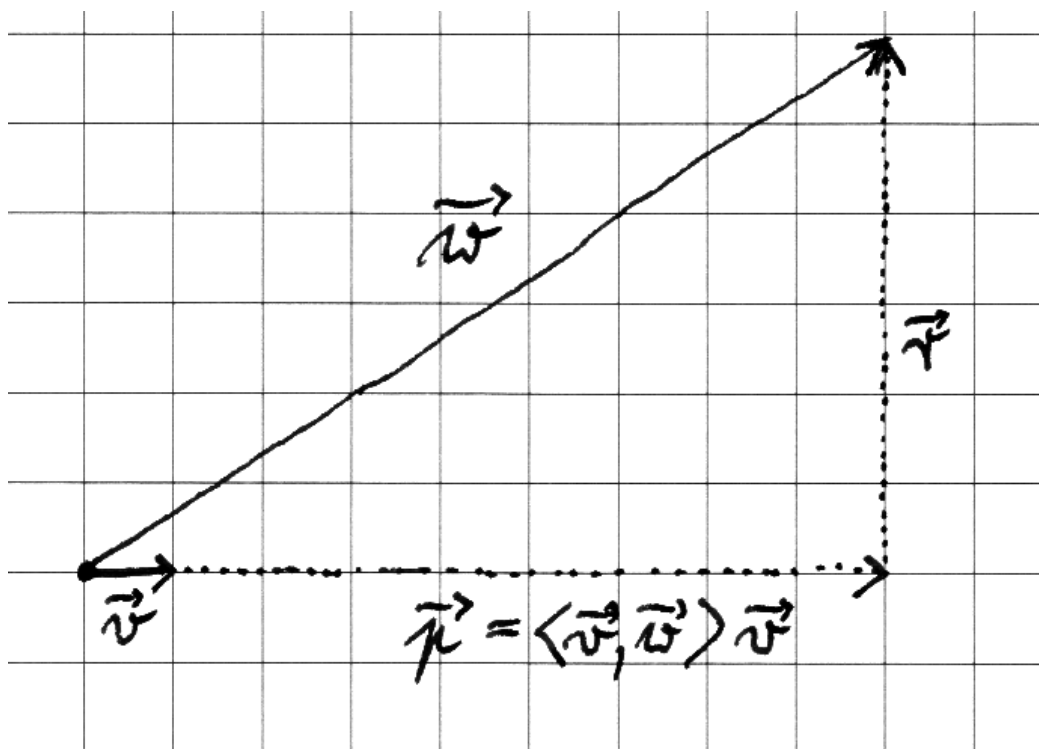


Illustration zum Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Wir haben  
 darin  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (9, 6)$ ,  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 9$ ,  $\vec{p} = (9, 0)$ ,  $\vec{r} = (0, 6)$ .

bei  $t_0 = -\operatorname{Re}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle / \|\vec{w}\|^2$ . Aus  $f(t_0) \geq 0$  folgt dann unmittelbar die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung. Ich selbst ziehe den anderen Beweis vor, weil er meine Anschauung mehr anspricht und ähnlich für alle angeordneten Grundkörper funktioniert. Der zweite Beweis läßt sich dahingegen leichter auf „positiv semi-definite hermitesche Formen“ verallgemeinern.  $\square$

1.3.26. Ist  $V$  ein Skalarproduktraum und  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  ein endliches Orthonormalsystem, so gilt für jeden Vektor  $\vec{w} \in V$  die sogenannte **Bessel'sche Ungleichung**

$$\|\vec{w}\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle \vec{v}_i, \vec{w} \rangle|^2$$

In der Tat ist nach Pythagoras für jeden Vektor  $\vec{w} \in V$  seine orthogonale Projektion  $\vec{p}$  auf den von unserem Orthonormalsystem erzeugten Teilraum höchstens so lang wie der Vektor selbst, in Formeln  $\|\vec{w}\| \geq \|\vec{p}\|$  alias  $\|\vec{w}\|^2 \geq \|\vec{p}\|^2$ . Setzen wir in diese Erkenntnis unsere Darstellung  $\vec{p} = \sum \langle \vec{v}_i, \vec{w} \rangle \vec{v}_i$  der orthogonalen Projektion aus dem Beweis von 1.3.17 ein, so ergibt sich unsere Ungleichung.

## Übungen

*Übung 1.3.27.* Gegeben ein Skalarproduktraum  $V$  mit einem endlichdimensionalen Untervektorraum  $U \subset V$  gilt  $U = (U^\perp)^\perp$ .

*Ergänzende Übung 1.3.28 (Schwierigkeiten mit orthogonalen Projektionen).* Man zeige, daß die Menge  $L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N}) \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  aller reellen Folgen  $a_0, a_1, \dots$  mit  $\sum a_i^2 < \infty$  im Raum aller Folgen einen Untervektorraum bildet und daß wir auf diesem Untervektorraum durch die Vorschrift  $\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sum a_i b_i$  ein Skalarprodukt einführen können. Dann betrachte man in  $L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$  den Untervektorraum  $U$  aller Folgen mit höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Folgengliedern und zeige  $U^\perp = 0$ . Insbesondere ist in diesem Fall  $U^\perp$  kein orthogonales Komplement zu  $U$ . Proposition 1.3.17 gilt also im allgemeinen nicht mehr, wenn wir unendlichdimensionale Untervektorräume  $U$  betrachten. Sie gilt jedoch wieder und sogar genau dann, wenn besagte Untervektorräume  $U$  zusätzlich „vollständig“ sind, vergleiche [AN3] 2.8.3.

*Übung 1.3.29.* Man zeige, daß die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung allgemeiner für jede hermitesche Sesquilinearform gilt, bei der das Produkt eines Vektors mit sich selbst nie negativ ist.

*Übung 1.3.30.* Ist  $V$  ein reeller Skalarproduktraum und  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  eine Orthonormalbasis und  $\Phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$  der zugehörige Vektorraumisomorphismus nach [LA1] 1.6.13, so entspricht unter  $\Phi$  das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  dem vorgegebenen Skalarprodukt auf  $V$ , in Formeln  $\langle x, y \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$



für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dasselbe gilt entsprechend im Komplexen und auch allgemeiner für Orthonormalsysteme, bei denen  $\Phi$  dann den Homomorphismus  $x \mapsto x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_n \vec{v}_n$  meint und kein Isomorphismus zu sein braucht.

*Übung 1.3.31.* Man zeige, daß für einen Skalarproduktraum über einem beliebigen angeordneten Körper immer noch die Variante

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt mit Gleichheit genau dann, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear abhängig sind.

## 1.4 Orthogonale und unitäre Abbildungen

**Definition 1.4.1.** Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von Skalarprodukträumen heißt **skalarproduktverträglich** oder **orthogonal** im Reellen und **unitär** im Komplexen, wenn sie linear ist und das Skalarprodukt erhält, in Formeln

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

1.4.2. Bisher hatten wir die Orthogonalität linearer Abbildungen nur im Fall von Automorphismen von Skalarprodukträumen eingeführt. In der vorgehenden Definition dehnen wir diesen Begriff auf den Fall von Homomorphismen zwischen Skalarprodukträumen aus.

**Lemma 1.4.3 (Kriterien für die Orthogonalität einer linearen Abbildung).**  
*Für eine lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarproduktraum in einen weiteren Skalarproduktraum über demselben Grundkörper sind gleichbedeutend:*

1. *Unsere Abbildung überführt eine Orthonormalbasis des Ausgangsraums in eine Orthonormalbasis;*
2. *Unsere Abbildung überführt jede Orthonormalbasis des Ausgangsraums in eine Orthonormalbasis;*
3. *Unsere Abbildung ist orthogonal beziehungsweise unitär.*

*Beweis.*  $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$  sind offensichtlich und wir müssen nur noch  $1 \Rightarrow 3$  zeigen. Bezeichne dazu  $f : V \rightarrow W$  unsere Abbildung und  $B \subset V$  eine Orthonormalbasis, die es nach 1.3.15 geben muß, da wir den Ausgangsraum unserer Abbildung endlichdimensional angenommen hatten. Es gilt zu zeigen  $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$ . Wir wissen nach Annahme bereits, daß das gilt für alle  $v, w \in B$ . Da beide Seiten bilinear beziehungsweise sesquilinear sind als Abbildungen  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  beziehungsweise  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , folgt es dann jedoch leicht für alle  $v, w \in V$ .  $\square$

**Definition 1.4.4.** Gegeben ein reeller Skalarproduktraum  $V$  bilden die orthogonalen Automorphismen von  $V$  eine Untergruppe der  $GL(V)$ , die wir  $O(V)$  notieren. Gegeben ein komplexer Skalarproduktraum  $V$  bilden die unitären Automorphismen von  $V$  eine Untergruppe der  $GL(V)$ , die wir  $U(V)$  notieren.

**Definition 1.4.5.** Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  bilden die Automorphismen von  $V$  mit Determinante Eins eine Untergruppe der Gruppe aller Automorphismen von  $V$ . Sie heißt die **spezielle lineare Gruppe** zu  $V$  und wird

$$SL(V) \subset GL(V)$$

notiert. Im Fall  $V = K^n$  schreibt man auch  $SL(n; K) \subset GL(n; K)$ .

**Definition 1.4.6.** Für jeden endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraum  $V$  bezeichne  $SO(V) \subset GL(V)$  die Untergruppe aller orthogonalen Automorphismen mit Determinante Eins. Sie heißt die **spezielle orthogonale Gruppe von  $V$** .

**Definition 1.4.7.** Für einen endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraum  $V$  bezeichnet  $SU(V) \subset GL(V)$  die Untergruppe aller unitären Automorphismen mit Determinante Eins. Sie heißt die **spezielle unitäre Gruppe von  $V$** .

**Satz 1.4.8 (Klassifikation endlichdimensionaler Skalarprodukträume).** 1.

*Zwischen je zwei reellen Skalarprodukträumen derselben endlichen Dimension gibt es einen orthogonalen Isomorphismus. Zu jeder Dimension gibt es einen reellen Skalarproduktraum;*

2. *Zwischen je zwei komplexen Skalarprodukträumen derselben endlichen Dimension gibt es einen unitären Isomorphismus. Zu jeder Dimension gibt es einen komplexen Skalarproduktraum.*

*Beweis.* Wir wählen mit 1.3.15 in beiden Räumen jeweils eine Orthonormalbasis und erklären unseren Isomorphismus durch die Vorschrift, daß er von einer beliebig gewählten Bijektion zwischen den entsprechenden Basen herkommen soll. Nach 1.4.3 ist er dann orthogonal beziehungsweise unitär.  $\square$

**Satz 1.4.9.** 1. **(Matrizen orthogonaler Endomorphismen).** Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  beschreibt einen orthogonalen Endomorphismus des  $\mathbb{R}^n$  mit seinem Standardskalarprodukt genau dann, wenn ihre Transponierte ihre Inverse ist. In Formeln gilt also

$$(A \circ) \in O(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A^T A = I$$

2. (**Matrizen unitärer Endomorphismen**). Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  beschreibt einen unitären Endomorphismus des  $\mathbb{C}^n$  mit seinem Standardskalarprodukt genau dann, wenn die Konjugierte ihrer Transponierten ihre Inverse ist. In Formeln gilt also

$$(A \circ) \in \text{U}(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow \bar{A}^\top A = I$$

*Beispiel 1.4.10.* Eine komplexe  $(1 \times 1)$ -Matrix ist unitär genau dann, wenn ihr einziger Eintrag eine komplexe Zahl vom Absolutbetrag Eins ist, also in der komplexen Zahlenebene auf dem Einheitskreis liegt.

*Beweis.* Wir zeigen gleich den komplexen Fall. Die Identität  $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$  ist nach unserer Interpretation des Skalarprodukts in Termen der Matrixmultiplikation in 1.3.6 gleichbedeutend zu  $(\bar{A}v)^\top (Aw) = \bar{v}^\top w$  alias zu  $\bar{v}^\top \bar{A}^\top Aw = \bar{v}^\top w$ . Gilt  $\bar{A}^\top A = I$ , so stimmt das natürlich für alle  $v, w \in \mathbb{C}^n$ . Stimmt es umgekehrt für alle  $v, w \in \mathbb{C}^n$ , so insbesondere auch für die Vektoren der Standardbasis  $e_i, e_j$ . Damit erhalten wir von der Mitte ausgehend die Gleichungskette  $(\bar{A}^\top A)_{ij} = e_i^\top \bar{A}^\top A e_j = e_i^\top e_j = \delta_{ij} \forall i, j$  alias  $\bar{A}^\top A = I$ .  $\square$

**Definition 1.4.11.** Eine reelle Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  heißt **orthogonal**, wenn gilt  $A^\top A = I$ . Eine komplexe Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  heißt **unitär**, wenn gilt  $\bar{A}^\top A = I$ . Der vorhergehende Satz 1.4.9 oder auch direkte Rechnung zeigen, daß diese Matrizen Untergruppen von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  beziehungsweise  $\text{GL}(n; \mathbb{C})$  bilden. Sie heißen die **orthogonale Gruppe** beziehungsweise die **unitäre Gruppe**. Man notiert sie

$$\text{O}(n) := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) \mid A^\top A = I\}$$

$$\text{U}(n) := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{C}) \mid \bar{A}^\top A = I\}$$

Die Notation  $\text{O}(n)$  kennen wir bereits aus 1.1.5. Die Elemente der orthogonalen beziehungsweise unitären Gruppen mit Determinante Eins bilden jeweils Untergruppen. Sie heißen die **spezielle orthogonale Gruppe** beziehungsweise die **spezielle unitäre Gruppe**. Man notiert sie

$$\text{SO}(n) := \{A \in \text{O}(n) \mid \det A = 1\}$$

$$\text{SU}(n) := \{A \in \text{U}(n) \mid \det A = 1\}$$

Die Gruppe  $\text{SU}(2)$  heißt auch die **Spingruppe**.

1.4.12 (**Betrag der Determinante orthogonaler oder unitärer Matrizen**). Die Determinante einer unitären oder orthogonalen Matrix hat stets den Betrag Eins. In der Tat folgt aus  $\bar{A}^\top A = I$  unmittelbar

$$1 = \det(\bar{A}^\top A) = \det(\bar{A}^\top) \det(A) = \det(\bar{A}) \det(A) = \overline{\det(A)} \det(A)$$

Wir können insbesondere  $\text{SO}(n)$  auch als die Gruppe aller orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismen des  $\mathbb{R}^n$  beschreiben.

1.4.13 (**Eigenwerte orthogonaler oder unitärer Matrizen**). Jeder Eigenwert eines unitären oder orthogonalen Endomorphismus eines Skalarproduktraums hat den Betrag Eins, da derartige Abbildungen die Normen von Vektoren erhalten.

**Satz 1.4.14 (Satz vom Fußball).** *Jede orthogonale Selbstabbildung eines dreidimensionalen reellen euklidischen Vektorraums, die die Orientierung erhält, hat mindestens einen von Null verschiedenen Fixvektor.*

1.4.15. Anschaulich gesprochen ist unsere Abbildung demnach eine Drehung um eine Drehachse, eben um die von einem Fixvektor erzeugte Gerade. Wird bei einem Fußballspiel der Ball also vor dem Anpfiff zur zweiten Halbzeit wieder in die Mitte gelegt, so befinden sich zwei gegenüberliegende Punkte auf dem Ball jeweils an genau derselben Stelle wie vor dem Anpfiff zur ersten Halbzeit.

*Beweis.* Sei  $D : V \rightarrow V$  unsere Abbildung. Das charakteristische Polynom von  $D$  hat den Leitterm  $-\lambda^3$  und den konstanten Term  $\det(D) = 1$ . Nach dem Zwischenwertsatz hat es also mindestens eine positive reelle Nullstelle. Da nach 1.4.13 als reelle Eigenwerte einer orthogonalen Abbildung nur  $\pm 1$  in Frage kommen, muß diese positive reelle Nullstelle bei 1 liegen. Also ist 1 ein Eigenwert von  $D$  und  $D$  hat einen Fixvektor.  $\square$

## Übungen

*Übung 1.4.16 (Variante zum Satz vom Fußball).* Jede orthogonale Selbstabbildung eines dreidimensionalen reellen Skalarproduktraums, die die Orientierung nicht erhält, besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert  $(-1)$ . Hinweis: Man erinnere den Beweis des Satzes vom Fußball 1.4.14.

*Übung 1.4.17.* Die von den speziellen Elementarmatrizen in  $GL(n; \mathbb{R})$  erzeugte Untergruppe ist die spezielle lineare Gruppe  $SL(n; \mathbb{R})$ . Hinweis: Im Fall  $n = 2$  ist etwas Arbeit nötig, der allgemeine Fall ist dann nicht mehr schwer.

*Übung 1.4.18 (Orthogonale Endomorphismen des  $\mathbb{R}^3$ ).* Die Gruppe  $SO(3)$  besteht anschaulich gesprochen aus allen Drehungen des „Koordinatenraums“ um den Ursprung. Ist genauer  $V$  ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum, so hat jedes  $U \in SO(V)$  in einer geeigneten Orthonormalbasis eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

mit  $s^2 + c^2 = 1$ . Hinweis: Satz vom Fußball 1.4.14. Man zeige weiter, etwa mit Hilfe von 1.4.16: Nicht orientierungstreue orthogonale Selbstabbildungen des  $\mathbb{R}^3$  können stets dargestellt werden als eine Drehung gefolgt von einer Spiegelung

an der zur Drehachse senkrechten Ebene. In anderen Worten haben sie in einer geeigneten Orthonormalbasis für geeignete  $s, c$  mit  $s^2 + c^2 = 1$  eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

*Übung 1.4.19.* Man zeige, daß wir einen Isomorphismus  $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(2)$  erhalten durch die Abbildungsvorschrift  $z \mapsto {}_{(1,i)}[z \cdot]_{(1,i)}$  alias die Abbildung, die  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$  die Matrix der  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $(z \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  bezüglich der angeordneten  $\mathbb{R}$ -Basis  $(1, i)$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  zuordnet.

*Übung 1.4.20.* Gegeben ein zweidimensionaler reeller Skalarproduktraum  $Z$  ist die Gruppe  $\mathrm{SO}(Z)$  kommutativ und für  $s \in \mathrm{O}(Z) \setminus \mathrm{SO}(Z)$  gilt  $s^2 = 1$  sowie  $sr s^{-1} = r^{-1} \forall r \in \mathrm{SO}(Z)$ . Hinweis: Wenn man eine geometrische Argumentation sucht, mag es geschickt sein, mit dem Beweis der letzteren Aussagen zu beginnen.

*Übung 1.4.21.* Gegeben zwei Strahlen in einem reellen Skalarproduktraum gibt es stets einen orthogonalen Automorphismus unseres Raums, der den einen Strahl in den anderen überführt.

## 1.5 Euklidische Räume

1.5.1. Eine **euklidische Struktur** auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine Menge von Skalarprodukten  $S \subset \mathrm{Bil}(V)$ , die sich in der Gestalt

$$S = \mathbb{R}_{>0} s$$

schreiben läßt für ein Skalarprodukt  $s$ . Einen **euklidischen Vektorraum** erklären wir als einen reellen Vektorraum mit einer ausgezeichneten euklidischen Struktur. Unter einem **euklidischen Raum** verstehen wir einen reellen affinen Raum mit einer ausgezeichneten euklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum. Eine **euklidische Ebene**  $(E, S)$  ist ein zweidimensionaler euklidischer Raum.

1.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur versteht man unter einem „euklidischen Vektorraum“ für gewöhnlich das, was wir einen Skalarproduktraum nennen, also einen reellen Vektorraum mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt. Ich denke jedoch, daß die hier gewählte Terminologie Euklid besser gerecht wird, in dessen wegweisender geometrisch-axiomatischer Modellierung der Ebene keine „Strecke der Länge Eins“ vorkommt.

*Vorschau 1.5.3.* Im Zusammenhang mit Spiegelungsgruppen werden wir auch euklidische Räume über beliebigen angeordneten Körpern betrachten. In der linearen Algebra will ich diesen Begriff jedoch auf den Fall des Grundkörpers der reellen Zahlen beschränken. Wenn das besonders betont werden soll, rede ich von einem „reellen euklidischen Raum“.

1.5.4. Gegeben ein euklidischer Vektorraum  $(V, S)$  setzen wir ganz allgemein  $O(V, S) = O(V, s)$  für ein und jedes Skalarprodukt  $s \in S$  und nennen diese Gruppe die **orthogonale Gruppe** unseres euklidischen Vektorraums. Die Elemente dieser Gruppe nennen wir die **orthogonalen Automorphismen von  $V$** . Gegeben ein euklidischer Raum  $(E, S)$  verstehen wir unter einem **orthogonalaffinen Automorphismus von  $E$**  eine Affinität mit orthogonalem linearen Anteil und notieren die Gruppe aller orthogonalaffinen Automorphismen  $O_{\text{aff}}(E, S)$ .

*Beispiele* 1.5.5. Jeder nulldimensionale oder eindimensionale reelle Vektorraum besitzt nur genau eine euklidische Struktur. Zweidimensionale euklidische Räume diskutieren wir gleich in 1.5.7. Ein besonders relevantes schmutziges Beispiel für einen dreidimensionalen euklidischen Raum ist der „Raum unserer Anschauung“ mit der in 1.6 konstruierten euklidischen Struktur der „unter allen Bewegungen invarianten Skalarprodukte“. Die Vorgabe einer euklidischen Struktur erlaubt die Definition von Winkeln und von „orthogonalen Projektionen“. Sie erlaubt es jedoch nicht, Vektoren in natürlicher Weise eine reelle Zahl als Norm zuzuordnen. Vielmehr muß dazu erst eine „Längeneinheit“ gewählt werden, wie in 1.5.11 genauer diskutiert wird.

1.5.6 (**Drehspiegelgruppen und euklidische Strukturen**). Für jeden zweidimensionalen reellen Vektorraum  $Z$  erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \text{Bil}(Z)\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Drehspiegelgruppen } O \subset \text{GL}(Z)\}$$

dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur  $S$  ihre **orthogonale Gruppe**  $O(Z, S)$  zuordnen und umgekehrt jeder Drehspiegelgruppe  $O$  die Menge  $S_O$  der unter allen Gruppenelementen invarianten Skalarprodukte. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von Satz 1.2.8 über invariante Skalarprodukte zu Drehspiegelgruppen und Proposition 1.2.10 von Drehspiegelgruppen als orthogonale Gruppen in unsere neue Terminologie der euklidischen Strukturen.

1.5.7 (**Kongruenzebenen und euklidische Ebenen**). Für jeden zweidimensionalen reellen affinen Raum  $E$  erhalten wir zueinander inverse Bijektionen

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \text{Bil}(\vec{E})\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Kongruenzgruppen } K \subset \text{Aff}^\times(E)\}$$

dadurch, daß wir jeder Struktur  $S$  ihre **orthogonalaffine Gruppe**  $O_{\text{aff}}(E, S)$  zuordnen und umgekehrt jeder Kongruenzgruppe  $K$  die Menge  $S_K$  der unter ihren linearen Anteilen invarianten Skalarprodukte. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von Korollar 1.2.9 über invariante Skalarprodukte zu Kongruenzgruppen und Korollar 1.2.11 von Kongruenzgruppen als orthogonalaffine Gruppen in unsere neue Terminologie der euklidischen Strukturen. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte also zwei Seiten derselben Medaille. Die eine ist algebraischen Rechnungen besser zugänglich, die andere spricht eher die geometrische Anschauung an.

1.5.8. Eine lineare Abbildung von **euklidischen Vektorräumen** heißt **euklidisch**, wenn jedes Skalarprodukt der euklidischen Struktur des Zielraums zu einem Skalarprodukt der euklidischen Struktur des Ausgangsraums einschränkt. Eine euklidische Abbildung muß insbesondere stets injektiv sein. Jeder Teilraum eines euklidischen Vektorraums besitzt genau eine euklidische Struktur, für die die Einbettung eine euklidische Abbildung wird. Sie heißt die auf unserem Teilraum **induzierte euklidische Struktur**. Einen euklidischen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums nennen wir eine **lineare Ähnlichkeitsabbildung**.

1.5.9. Unter einem **Morphismus von euklidischen Räumen** verstehen wir eine affine Abbildung, deren linearer Anteil **euklidisch** ist. Einen Automorphismus eines euklidischen Raums nennen wir eine **Ähnlichkeitsabbildung** oder kurz eine **Ähnlichkeit**.

1.5.10 (**Wurzel eines orientierten eindimensionalen reellen Vektorraums**). Eine **Wurzel** aus einem eindimensionalen reellen orientierten Vektorraum  $F$  ist ein Paar  $(L, q)$  aus einem eindimensionalen reellen orientierten Vektorraum  $L$  und einer bilinearen Abbildung  $q : L \times L \rightarrow F$  mit  $l \neq 0 \Rightarrow q(l, l) \in F_{>0}$ . So eine Wurzel ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ist genauer  $(L', q')$  ein zweites Paar wie oben, so gibt es genau einen orientierungsverträglichen Isomorphismus  $i : L \xrightarrow{\sim} L'$  mit  $q'(il, il) = q(l, l)$  für alle  $l \in L$ . Unsere Wurzel verdient mithin einen bestimmten Artikel und eine Notation. Ich verwende dafür die Notation

$$L := \sqrt{F}$$

Die Abbildung  $F_{\geq 0} \rightarrow L_{\geq 0}$ , die jedem  $f \in F_{\geq 0}$  das eindeutig bestimmte  $l \in L_{\geq 0}$  mit  $q(l, l) = f$  zuordnet, notieren wir  $l = \sqrt{f}$  und nennen  $l$  die **Wurzel von  $f$** .

1.5.11 (**Längen von Vektoren in euklidischen Vektorräumen**). Gegeben eine euklidische Struktur  $S$  auf einem reellen Vektorraum  $V \neq 0$  betrachten wir in  $\text{Bil}(V)$  die durch  $S$  erzeugte Ursprungsgerade  $\mathbb{R}S$  mit der durch  $(\mathbb{R}S)_{>0} = S$  festgelegten Orientierung. Die Wurzel ihres Dualraums notieren wir

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(V) = \mathbb{L}(V, S) := \sqrt{\mathbb{R}S^\top}$$

und nennen sie die **Längengerade** unseres euklidischen Vektorraums  $V$ . Jeder Vektor  $v \in V$  liefert ein nichtnegatives Element  $f_v$  unseres Dualraums durch die Vorschrift  $f_v(s) := s(v, v)$ . Dessen Wurzel nennen wir die **Länge**  $\|v\| \in \mathbb{L}_{\geq 0}$  von  $v$  und setzen also in Formeln

$$\|v\| := \sqrt{f_v}$$

Damit gilt offensichtlich  $\|gv\| = \|v\| \ \forall g \in \text{O}(V, S)$  und  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , folglich ist unser Längenbegriff vernünftig.

1.5.12. Ist  $V$  der Nullraum, so nehmen wir als Längengerade den Nullraum mit seiner Standardorientierung und nehmen die terminologische Inkonsistenz in Kauf, daß in diesem Sonderfall die Längengerade keine Gerade ist. Für jede euklidische lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von von Null verschiedenen euklidischen Vektorräumen gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(V) \rightarrow \mathbb{L}(W)$$

mit  $\|v\| \mapsto \|f(v)\| \quad \forall v \in V$ . Sie ist stets eine Injektion, die wir insbesondere verwenden, um die Längengerade jedes von Null verschiedenen Untervektorraums eines euklidischen Vektorraums stillschweigend mit der Längengerade des ursprünglichen Vektorraums zu identifizieren. Mit der **Längengerade eines euklidischen Raums** meinen wir die Längengerade seines Richtungsraums.

*Beispiel* 1.5.13. Ist  $Z$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum und  $m \in Z \setminus 0$  ein fester von Null verschiedener Vektor, so gilt für unsere Norm  $\|v\|_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  aus 1.2.7 in der zugehörigen Längengerade  $\mathbb{L}(Z)$  per definitionem die Identität

$$\|v\| = \|v\|_m \|m\|$$

1.5.14 (**Terminologisches zum Begriff einer Drehung**). Wir vereinbaren, daß wir von nun an unter einer **Drehung** einen orientierungserhaltenden orthogonalaffinen Automorphismus eines euklidischen Raums der Dimension Zwei oder Drei verstehen wollen, der mindestens einen Fixpunkt hat. Unter einer **linearen Drehung** oder auch kurz **Drehung** verstehen wir einen orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismus eines euklidischen Vektorraums  $V$  der Dimension Zwei oder Drei alias in der in 1.4.6 eingeführten Terminologie und Notation ein Element seiner speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(V)$ . Im dreidimensionalen Fall nennen wir jede von einer Drehung punktweise festgehaltene Gerade eine **Drehachse** unserer Drehung. Im zweidimensionalen Fall nennen wir jeden von einer Drehung festgehaltenen Punkt ein **Drehzentrum** unserer Drehung und wissen aus 1.2.14, daß jede gleichsinnige Kongruenz eine Drehung oder eine Verschiebung sein muß.

## Übungen

*Übung* 1.5.15 (**Vorbereitung für Winkel**). Gegeben ein euklidischer Isomorphismus  $\varphi : Y \xrightarrow{\sim} Z$  von zweidimensionalen euklidischen Vektorräumen betrachten wir den induzierten Gruppenisomorphismus  $O(\varphi) : O(Y) \xrightarrow{\sim} O(Z)$  gegeben durch  $r \mapsto \varphi \circ r \circ \varphi^{-1}$ . Gegeben zwei Isomorphismen  $\varphi, \psi : Y \xrightarrow{\sim} Z$  mit orientierungserhaltender Verknüpfung  $\varphi \circ \psi^{-1} : Z \xrightarrow{\sim} Z$  zeige man, daß sie denselben Isomorphismus

$$O(\varphi) = O(\psi) : SO(Y) \xrightarrow{\sim} SO(Z)$$



zwischen den jeweiligen Drehgruppen induzieren. Andernfalls zeige man  $O(\varphi) = O(\psi) \circ \text{inv}$  für  $\text{inv} : SO(Z) \xrightarrow{\sim} SO(Z)$  das Invertieren. Hinweis: 1.4.20.

**Übung 1.5.16.** Gegeben ein endlichdimensionaler euklidischer Raum  $E$  und darin eine affine Hyperebene  $H \subset V$  gibt es genau einen orthogonalen Automorphismus  $s : E \rightarrow E$  mit unserer Hyperebene als Fixpunktmenge, in Formeln mit  $H = E^s$ . Diese Abbildung  $s$  heißt die **orthogonale Spiegelung an der Hyperebene  $H$**  oder kürzer die **Spiegelung an  $H$** .

## 1.6 Euklidischer Raum und Anschauung\*

1.6.1. Ich erinnere an die Begriffsbildung einer Kongruenzebene 1.1.10. Im folgenden will ich erklären, wie man in ähnlicher Weise eine Modellierung des schmutzigen Raums unserer Anschauung aus dem Bewegungsbegriff heraus entwickeln kann.

**Definition 1.6.2.** Unter einer **Bewegungsgruppe** eines dreidimensionalen reellen affinen Raums  $R$  verstehen wir eine alle Translationen umfassende Untergruppe  $B$  seiner Automorphismengruppe, in Formeln

$$\vec{R} \subset B \subset \text{Aff}^\times R$$

derart, daß es für je zwei Paare  $(F, H)$  und  $(F', H')$  von Teilmengen von  $R$  bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgerade auf ihrem Rand genau einen Automorphismus  $b \in B$  gibt, der sie ineinander überführt, also mit  $bF = F'$  und  $bH = H'$ . In Formeln meinen wir hier Paare  $(F, H)$  von Teilmengen  $H \subset F \subset R$ , die in der Gestalt  $H = p + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{v}$  und  $F = p + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{w}$  geschrieben werden können, mit  $p \in R$  einem Punkt und  $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{R}$  linear unabhängigen Richtungsvektoren. Die Elemente einer Bewegungsgruppe nennen wir **Bewegungen**. Unter einem **Bewegungsraum** verstehen wir ein Paar  $(R, B)$  bestehend aus einem dreidimensionalen reellen affinen Raum  $R$  und einer ausgezeichneten Bewegungsgruppe  $B \subset \text{Aff}^\times R$ .

1.6.3 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur wird der Begriff einer „Bewegung“ vielfach auch verwendet für gewisse Selbstabbildungen von euklidischen Räumen, die die Orientierung nicht erhalten. Unsere Bewegungen werden in dieser Terminologie als „eigentliche Bewegungen“ bezeichnet.

1.6.4 (**Bezug zur Anschauung**). Man mag sich den „schmutzigen Raum  $\mathbb{E}$  unserer Anschauung“ als einen Bewegungsraum denken. Die Elemente von  $\mathbb{E}$  sind dabei „alle möglichen Orte im Raum“. Manche dieser Orte können direkt als Kirchturmspitzen, Zimmerecken und dergleichen angegeben werden, die Übrigen gilt es sich vorzustellen. Affine Geraden in  $\mathbb{E}$  denke man sich als Sichtlinien, wie in

[LA1] 3.1.9 und [LA1] 3.3.3 besprochen. Bei Bewegungen denke man an, nun, eben anschauliche Bewegungen. Kippen wir etwa einen Stuhl um, so werden die Enden der Stuhlbeine, die Ecken der Sitzfläche, ja überhaupt alle seine Punkte jeweils in andere Punkte des Raums unserer Anschauung überführt, und diese Abbildung läßt sich, das entspricht zumindest unserer Erfahrung, zu einer bijektiven Selbstabbildung des Raums unserer Anschauung fortsetzen, die Sichtlinien in Sichtlinien überführt und die nach [LA1] 3.3.1 folglich einer affinen Abbildung  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  entsprechen muß. Unsere ausgezeichnete Bewegungsgruppe  $B$  modelliert die Menge aller derartigen Selbstabbildungen des Raums unserer Anschauung. Unsere Bedingung an eine Bewegungsgruppe aus 1.6.2 bedeutet anschaulich, daß man etwa jedes Messer aus einer festen Position heraus durch genau eine Bewegung in eine Position bringen kann, in der der Übergang vom Griff zur Klinge an einer vorgegebenen Stelle stattfindet, die Messerspitze in eine vorgegebene Richtung zeigt und der Schnitt den Raum entlang einer vorgegebenen Halbebene zerteilen würde. An dieser Stelle möchte ich Sie am liebsten wieder einmal davon überzeugen, daß das Abstrakte das eigentlich Konkrete ist und daß der in der Schule erlernte Koordinatenzirkus von der Realität viel weiter entfernt ist.

*Ergänzung 1.6.5.* Ich wage die Vermutung, daß Säuglinge nicht zuletzt deshalb so gerne herumgetragen und herumgefahren werden, weil ihnen das eine genauere Untersuchung dieser bemerkenswerten mathematischen Struktur ermöglicht, die der Raum unserer Anschauung nun einmal ist. Bewegen Sie nur einmal selbst den Kopf hin und her und versuchen Sie, von Ihrer jahrelangen Erfahrung zu abstrahieren und neu zu entdecken, in wie interessanter Weise sich dabei die Sinnesindrücke im Auge ändern!

**Satz 1.6.6 (Euklidische Strukturen und Bewegungsgruppen).** *Gegeben ein dreidimensionaler reeller affiner Raum  $R$  erhalten wir zueinander inverse Bijektionen*

$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \text{Bil}(\vec{R})\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Bewegungsgruppen } B \subset \text{Aff}^\times(R)\}$$

*dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur  $S$  auf  $\vec{R}$  als Bewegungsgruppe die Gruppe  $B_S := \text{SO}_{\text{aff}}(R, S)$  aller Orientierungserhaltenden orthogonalaffinen Affinitäten von  $R$  zuordnen und umgekehrt jeder Bewegungsgruppe  $B$  die Menge  $S$  aller darunter invarianten Skalarprodukte auf dem Richtungsraum.*

*Beweis.* Daß unsere Konstruktion jeder euklidischen Struktur auf  $\vec{R}$  eine Bewegungsgruppe zuordnet, scheint mir offensichtlich. Daß man aus dieser Bewegungsgruppe die euklidische Struktur zurückgewinnen kann, daß also unsere Abbildung von links nach rechts injektiv ist, mag man daraus erkennen, daß die Restriktionen aller Bewegungen, die eine vorgegebene affine Ebene stabilisieren, auf besagte Ebene notwendig eine Kongruenzgruppe der besagten affinen Ebene bilden und so auf dem Richtungsraum dieser affinen Ebene nach 1.5.7 eine euklidische Struktur induzieren. Eine euklidische Struktur auf einem reellen Vektorraum

der Dimension mindestens Zwei wird aber offensichtlich durch ihre Restriktionen auf alle zweidimensionalen Untervektorräume bereits eindeutig festgelegt. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß unsere Abbildung surjektiv ist. Das leistet der im Anschluß bewiesene Satz 1.6.9.  $\square$

**Definition 1.6.7.** Sei  $V$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Eine **Halbraumfahne** in  $V$  ist ein Paar  $(H, A)$  von Teilmengen bestehend aus einer Halbebene und einem Strahl auf ihrem Rand. In Formeln ausgedrückt soll es also linear unabhängige Vektoren  $v, w \in V$  geben mit  $H = \mathbb{R}_{\geq 0}v + \mathbb{R}w$  und  $A = \mathbb{R}_{\geq 0}w$ .

**Definition 1.6.8.** Sei  $V$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Eine Untergruppe  $D \subset \text{GL}(V)$  heiße eine **Drehungsgruppe**, wenn es für je zwei Halbraumfahnen in  $V$  genau ein Element  $d \in D$  gibt, das sie ineinander überführt. Die Elemente einer ausgezeichneten Drehungsgruppe sprechen wir im folgenden als **Drehungen** an.

**Satz 1.6.9 (Drehungsgruppen und euklidische Strukturen).** *Gegeben ein dreidimensionaler reeller Vektorraum  $V$  erhalten wir zueinander inverse Bijektionen*

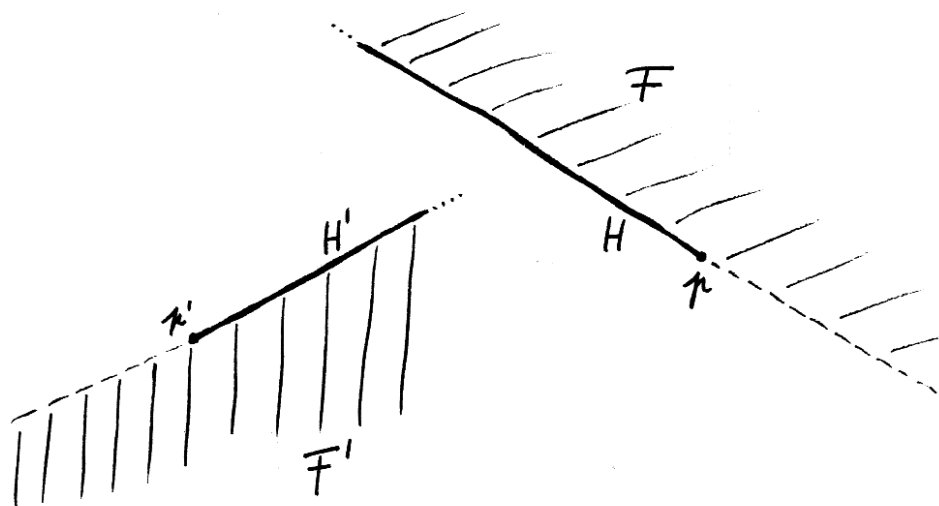
$$\{\text{Euklidische Strukturen } S \subset \text{Bil}(V)\} \xleftrightarrow{\sim} \{\text{Drehungsgruppen } D \subset \text{GL}(V)\}$$

*dadurch, daß wir jeder euklidischen Struktur  $S$  ihre spezielle orthogonale Gruppe  $\text{SO}(V, S)$  zuordnen und umgekehrt jeder Drehungsgruppe  $D$  die Menge  $S_D$  der unter allen ihren Elementen invarianten Skalarprodukte.*

*Beweis.* Der Nachweis, daß  $\text{SO}(V, S)$  in der Tat eine Drehungsgruppe ist, bleibe dem Leser überlassen. Um zu sehen, daß je zwei unter einer Drehungsgruppe invariante Skalarprodukte sich höchstens um einen positiven Faktor unterscheiden, muß man nur bemerken, daß die einen zweidimensionalen Teilraum stabilisierenden Elemente einer Drehungsgruppe auf diesem Teilraum eine Drehspiegelgruppe induzieren und nach 1.5.6 folglich die Restriktion eines invarianten Skalarprodukts auf jeden zweidimensionalen Teilraum wohlbestimmt ist bis auf einen positiven Faktor. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß es für jede Drehungsgruppe mindestens ein invariantes Skalarprodukt gibt. Das zeigen wir nach einigen Vorbereitungen in 1.6.14.  $\square$

**Lemma 1.6.10.** *Sei  $(V, D)$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehungsgruppe. Gegeben ein Vektor  $v \in V \setminus 0$  gibt es genau eine nichttriviale Drehung  $r_v \in D \setminus \text{id}$  mit  $r_v(v) = v$  und  $r_v^2 = \text{id}$ , und diese Drehung hat einen zweidimensionalen Eigenraum zum Eigenwert  $(-1)$ . Wir nennen  $r_v$  die **Achsenspiegelung an der Ursprungsgerade  $\mathbb{R}v$ .***

1.6.11. In der schmutzigen Anschauung kann  $r_v$  beschrieben werden als die Drehung um die von  $v$  erzeugte Gerade mit dem Winkel  $180^\circ$ .



Zwei Paare von Teilmengen des Raums bestehend aus je einer Halbebene und einer Halbgerade auf ihrem Rand.

*Beweis.* Wie bereits erwähnt ist es klar, daß alle Drehungen, die einen zweidimensionalen Teilraum  $Z \subset V$  stabilisieren, auf  $Z$  eine Drehspiegelgruppe im Sinne von 1.2.2 induzieren. Sei nun  $r$  eine nichttriviale Drehung mit  $r(v) = v$  und  $r^2 = \text{id}$ . Nach [LA1] 6.6.29 ist  $r$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\pm 1$ . Da  $r$  nichttrivial ist mit positiver Determinante, müssen seine Eigenwerte mit Multiplizitäten  $1, -1, -1$  sein. Folglich ist  $\mathbb{R}v$  der Eigenraum von  $r$  zum Eigenwert Eins und in jedem zweidimensionalen Teilraum, der  $v$  enthält, muß auch ein Eigenvektor zum Eigenwert  $(-1)$  liegen. Damit muß  $r$  jede derartige Ebene auf sich selbst abbilden und darauf unsere Spiegelung aus dem Beweis von 1.5.6 induzieren, die wir dort  $r_v$  notiert hatten. Das zeigt die Eindeutigkeit von  $r$  und unsere Behauptung über den  $(-1)$ -Eigenraum. Um die Existenz zu zeigen, wählen wir  $w \in V$  linear unabhängig zu  $v$  und betrachten die Drehung  $r = r_{v,w}$ , die die Halbraumfahne  $(\mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w, \mathbb{R}_{\geq 0}v)$  in die Halbraumfahne  $(\mathbb{R}v - \mathbb{R}_{\geq 0}w, \mathbb{R}_{\geq 0}v)$  überführt. Offensichtlich gilt  $r^2 = \text{id}$  und nach [LA1] 6.6.29 ist dann  $r$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\pm 1$ . Sicher ist  $v$  ein Eigenvektor von  $r$  zu einem positiven Eigenwert, also zum Eigenwert Eins, also ein Fixvektor. Das zeigt dann auch die in unserem Lemma behauptete Existenz der Achsenspiegelung  $r_v$ .  $\square$

**Lemma 1.6.12.** *Sei  $(V, D)$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneten Drehungsgruppe. Gegeben  $t \in D$  und  $m \in V$  folgt aus  $tm \in \mathbb{R}_{\geq 0}m$  dann bereits  $tm = m$ .*

1.6.13. In der schmutzigen Anschauung entspricht das der Erkenntnis, daß beim Drehen um eine Achse besagte Achse weder gestreckt noch gestaucht wird.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $m \neq 0$  annehmen. Dann betrachten wir die Achsenspiegelung  $r_m$  nach 1.6.10 und wählen im zweidimensionalen Teilraum  $Z$  der Fixpunkte von  $(-r_m)$  einen Vektor  $w \neq 0$ . Wegen  $tr_m = r_mt$  gilt dann auch  $tw \in Z$ . Nach 1.2.6 werden je zwei Strahlen in einem zweidimensionalen Vektorraum mit ausgezeichneten Drehspiegelgruppe durch eine Spiegelung vertauscht, es gibt also  $u \in Z \setminus 0$  mit  $r_u(\mathbb{R}_{\geq 0}w) = \mathbb{R}_{\geq 0}tw$ . Andererseits zeigt unsere Diskussion des Senkrechtstehens in Kongruenzebenen 1.1.17 bereits  $r_u(m) = -m$  und  $r_w(m) = -m$ . Es folgt  $r_ur_w = t$ , da beide Abbildungen  $\mathbb{R}_{\geq 0}m$  festhalten und  $\mathbb{R}_{\geq 0}w$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}tw$  überführen. So erhalten wir schließlich  $tm = r_ur_wm = m$ .  $\square$

**Lemma 1.6.14 (Existenz invarianter Skalarprodukte).** *Sei  $(V, D)$  ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneten Drehungsgruppe. So gibt es auf  $V$  ein  $D$ -invariantes Skalarprodukt.*

*Beweis.* Wir wählen einen Vektor  $m \in V \setminus 0$ . Für jeden zweidimensionalen Teilraum  $Z \subset V$  und jede Drehung  $d \in D$  mit  $d(m) \in Z$  gibt es nach 1.5.6 genau ein Skalarprodukt auf  $Z$ , das invariant ist unter allen Drehungen, die  $Z$  stabilisieren,

und das  $d(m)$  die Norm Eins gibt. Lemma 1.6.12 zeigt, daß dies Skalarprodukt auf  $Z$  nicht von der Wahl von  $d$  abhängt. Folglich sind alle diese Skalarprodukte Einschränkungen eines wohldefinierten Skalarprodukts auf  $V$ . Die Konstruktion zeigt weiter, daß für jede Drehung  $d \in D$  und jeden zweidimensionalen Teilraum  $Z \subset V$  die Abbildung  $d : Z \xrightarrow{\sim} d(Z)$  verträglich ist mit den jeweiligen Skalarprodukten. Folglich ist unser Skalarprodukt auf  $V$  invariant unter  $D$ .  $\square$

**Ergänzung 1.6.15 (Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen).** Ich skizziere Analoga unserer Sätze 1.5.6 und 1.6.9 für reelle Vektorräume beliebiger endlicher Dimension. Man mag für jeden reellen Vektorraum  $V$  endlicher Dimension  $n$  eine **vollständige Halbraumfahne** erklären als eine Folge von Teilmengen  $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset V$  derart, daß es linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  gibt mit  $F_i = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ . Eine Untergruppe  $O \subset \mathrm{GL}(V)$  mag man dann eine **Drehspiegelgruppe** nennen, wenn es für je zwei vollständige Halbraumfahnen genau ein  $k \in O$  gibt, das die eine Fahne in die andere überführt. Man mag weiter eine **fastvollständige Halbraumfahne** erklären als eine Folge von Teilmengen  $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset V$  derart, daß es linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$  gibt mit  $F_i = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ . Eine Untergruppe  $D \subset \mathrm{GL}(V)$  mag man weiter eine **Drehungsgruppe** nennen, wenn es für je zwei fastvollständige Halbraumfahnen genau ein Element  $d \in D$  gibt, die die eine Fahne in die andere überführt. In dieser Allgemeinheit zeigen unsere Argumente, daß es für jede Drehspiegelgruppe bis auf konstante Vielfache genau ein invariantes Skalarprodukt gibt, und daß im Fall einer von Zwei verschiedenen Dimension dasselbe auch für jede Drehungsgruppe gilt. Im ebenen Fall gilt das jedoch nur unter der zusätzlichen Annahme, daß unsere Drehungsgruppe eine im Sinne der Topologie „abgeschlossene“ Untergruppe ist. Wählen wir genauer ein Komplement  $V \subset \mathbb{R}$  des  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraums  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , so finden wir einen Gruppenisomorphismus  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong V \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  und dann auch einen Gruppenisomorphismus  $S^1 \cong V \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Es gibt mithin durchaus unstetige nichttriviale Gruppenhomomorphismen  $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  für  $S^1$  die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag Eins, und dann bilden alle Abbildungen der Gestalt  $z \mapsto \psi(a)z$  mit  $a \in S^1$  eine Drehungsgruppe in  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  im Sinne der obigen Definition, für die kein invariantes Skalarprodukt existiert. Mehr dazu findet man in [Pic49, Bae50] und unter dem Stichwort des **Helmholtz’schen Raumproblems**.

## 1.7 Zweistrahlen und Winkel

1.7.1. Unter einem **Zweistrahl** in einem Vektorraum  $V$  über einem angeordneten Körper verstehen wir ein ungeordnetes Paar alias eine zweielementige Multimenge  ${}_{\mu}\{A, B\}$  von Strahlen. Unter einem **angeordneten Zweistrahl** verstehen wir ein Paar  $(A, B)$  von Strahlen.

1.7.2. Gegeben ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum  $Z$  ist die Gruppe seiner orientierungserhaltenden orthogonalen Selbstabbildungen alias linearen Drehungen  $SO(Z)$  nach 1.4.20 kommutativ und für jeden angeordneten Zweistrahl  $(A, B)$  in  $Z$  gibt es genau ein Element  $d \in SO(Z)$  mit  $d(A) = B$ .

1.7.3. Wir betrachten die Zuordnung  $W$ , die jedem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum  $(Z, \varepsilon)$  die Gruppe seiner linearen Drehungen zuordnet. Wir nennen diese Gruppe die **Winkelgruppe von**  $(Z, \varepsilon)$  und notieren sie

$$W(Z, \varepsilon) := SO(Z)$$

Wir notieren  $W(Z, \varepsilon)$  im Gegensatz zu  $SO(Z)$  additiv. Wir bezeichnen die Elemente unserer Gruppen je nachdem, ob wir ihre Verknüpfung multiplikativ oder additiv notieren, als **Drehungen** oder als **Winkel** und noch genauer als **konkrete Winkel**. Einen Winkel  $k \in W(Z, \varepsilon)$  nennen wir **positiv** beziehungsweise **negativ**, wenn für ein und jedes  $v \in Z \setminus 0$  das Paar  $(v, k(v))$  in Bezug auf die Orientierung  $\varepsilon$  eine positiv orientierte beziehungsweise eine negativ orientierte Basis von  $Z$  ist. Wir bezeichnen die Menge der nicht negativen Winkel mit

$$W(Z, \varepsilon)^+ \subset W(Z, \varepsilon)$$

Es gibt zwei Winkel, die weder negativ noch positiv sind, nämlich den Nullwinkel und einen weiteren Winkel, den wir später genauer diskutieren und den „gestreckten Winkel“ nennen werden.

**Beispiel 1.7.4 (Winkelgruppe der Zahlenebene).** Wir erinnern den Körper der komplexen Zahlen und genauer das bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmte Tripel  $(\mathbb{C}, i, \kappa)$  aus [LA1] 2.7.4 mit  $\kappa : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ . Wir erinnern auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}$  das Skalarprodukt  $\langle z, w \rangle := \operatorname{Re} \bar{z}w$  und versehen  $\mathbb{C}$  mit der dadurch bestimmten euklidischen Struktur. Wir versehen den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}$  mit seiner **Standardorientierung**  $\operatorname{st}$ , für die  $(1, i)$  eine positiv orientierte angeordnete Basis ist. Die Abbildung, die jedem  $z \in S^1$  die Multiplikation  $(z \cdot)$  zuordnet, liefert dann einen Isomorphismus  $S^1 \xrightarrow{\sim} W(\mathbb{C}, \operatorname{st})$  der Kreisgruppe mit der Winkelgruppe von  $\mathbb{C}$  und eine Bijektion

$$\{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \xrightarrow{\sim} W(\mathbb{C}, \operatorname{st})^+$$

zwischen dem „abgeschlossenen oberen Halbkreis“ und der Menge der nichtnegativen Winkel von  $(\mathbb{C}, \operatorname{st})$ .

1.7.5 (**Abstrakte Winkel**). Nach 1.5.15 induzieren je zwei orientierungserhaltende mit den euklidischen Strukturen verträgliche Isomorphismen zwischen zweidimensionalen orientierten euklidischen Vektorräumen  $(Y, \eta)$  und  $(Z, \varepsilon)$  denselben Isomorphismus  $W(Y, \eta) \xrightarrow{\sim} W(Z, \varepsilon)$  zwischen ihren Winkelgruppen. Dieser

Isomorphismus induziert darüber hinaus eine Bijektion  $W(Y, \eta)^+ \xrightarrow{\sim} W(Z, \varepsilon)^+$  zwischen den jeweiligen Teilmengen nichtnegativer Winkel. Das Datum aus einer Gruppe mit ausgezeichnete Teilmenge  $W(Z, \varepsilon)^+ \subset W(Z, \varepsilon)$  ist folglich eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Es verdient damit eine Notation und einen Namen. Ich schlage dafür die Notationen

$$\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{W}$$

vor und nenne  $\mathbb{W}$  die **abstrakte Winkelgruppe** und  $\mathbb{W}^+$  die **abstrakte Winkelmenge**. Elemente von  $\mathbb{W}$  heißen **Winkel**, Elemente von  $\mathbb{W}^+$  **nichtnegative Winkel** und Elemente von  $\mathbb{W} \setminus \mathbb{W}^+$  **negative Winkel**. Das einem abstrakten Winkel  $\vartheta \in \mathbb{W}$  durch die Wahl einer Orientierung  $\varepsilon$  von  $Z$  zugeordnete Element von  $SO(Z)$  nenne ich die **Drehung um den Winkel  $\vartheta$**  und notiere es  $R_\vartheta = R_\vartheta^{(\varepsilon)}$  mit einem  $R$  für „Rotation“. Jedem angeordneten Zweistrahl  $(A, B)$  in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum  $(Z, \varepsilon)$  ordnen wir dann ein wohlbestimmtes Element

$$\vartheta = \angle(A, B) \in \mathbb{W}$$

der abstrakten Winkelgruppe zu als dasjenige  $\vartheta \in \mathbb{W}$  mit  $R_\vartheta(A) = B$ . Wir nennen diesen Winkel  $\vartheta$  den **gerichteten Winkel von  $A$  nach  $B$** . Jedem Zweistrahl  ${}_\mu\{A, B\}$  in einem beliebigen euklidischen Vektorraum ordnen wir weiter ein wohlbestimmtes Element

$$\vartheta = \angle(A, B) \in \mathbb{W}^+$$

der Winkelmenge zu als denjenigen eindeutig bestimmten nichtnegativen Winkel  $\vartheta \in \mathbb{W}^+$ , für den es einen zweidimensionalen Teilraum  $Z$  und eine Orientierung  $\varepsilon$  von  $Z$  gibt mit  $A, B \subset Z$  und  $R_\vartheta^{(\varepsilon)}(A) = B$ . Wir nennen dies Element  $\vartheta$  der Winkelmenge den **von den Strahlen  $A$  und  $B$  eingeschlossenen Winkel**.

1.7.6. Die Zuordnung, die jedem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum  $Z$  die Gruppe  $SO(Z)$  seiner orientierungserhaltenden Automorphismen zuordnet, liefert keine bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmte Gruppe  $\mathbb{SO}$ , weil manche euklidischen Isomorphismen von  $Z$  zu sich selber, genauer die orientierungsumkehrenden Isomorphismen, das Invertieren  $\text{inv} : SO(Z) \xrightarrow{\sim} SO(Z)$  induzieren.

1.7.7. Wir erklären eine Abbildung  $|\cdot| : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^+$  durch die Vorschrift

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \alpha \in \mathbb{W}^+; \\ -\alpha & \alpha \notin \mathbb{W}^+, \end{cases}$$

und nennen  $|\alpha|$  den **Betrag des Winkels  $\alpha$** . Für jeden angeordneten Zweistrahl  $(A, B)$  in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum gilt dann

$$\angle(A, B) = |\angle(A, B)|$$



**1.7.8 (Additivität von Winkeln).** Gegeben Strahlen  $A, B, C$  in einem zweidimensionalen orientierten euklidischen Vektorraum gilt in der Winkelgruppe  $\mathbb{W}$  offensichtlich die Identität

$$\angle(A, B) + \angle(B, C) = \angle(A, C)$$

**1.7.9.** Mit unserer Standardorientierung auf  $\mathbb{C}$  liefern unsere Konstruktionen aus 1.7.4 unmittelbar einen Isomorphismus  $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ , den **Standardisomorphismus** zwischen der Kreisgruppe und der Winkelgruppe, und dieser induziert eine Bijektion  $\{z \in S^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}^+$ , die **Standardbijektion**. Unsere allgemeinen Erkenntnisse [LA1] 5.3.19 über Nullstellen von Polynomen zeigen, daß es für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  höchstens  $n$  Winkel  $\vartheta \in \mathbb{W}$  gibt mit  $n\vartheta = 0$ . Eine genauere Untersuchung des Körpers der komplexen Zahlen zeigt, daß es sogar stets genau  $n$  derartige Winkel gibt.

**1.7.10 (Einige spezielle Winkel).** Wir diskutieren nun die wichtigsten Winkel und die zugehörigen Elemente der Kreisgruppe.

1. Das neutrale Element der Winkelgruppe nennen wir den **Nullwinkel**  $0 \in \mathbb{W}$ . Es gehört zur Menge  $\mathbb{W}^+$  der nichtnegativen Winkel. Unter unserem Standardisomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  entspricht dies Element der komplexen Zahl 1. Für einen Zweistrahle  ${}_{\mu}\{A, B\}$  in einem euklidischen Vektorraum ist  $\angle(A, B) = 0$  gleichbedeutend zu  $A = B$ .
2. Man sieht mithilfe unseres Isomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  aus 1.7.9, daß es in der Winkelgruppe genau ein Element  $\vartheta$  gibt mit  $2\vartheta = 0$  aber  $\vartheta \neq 0$ . Es heißt der **gestreckte Winkel**  $\gamma$  und gehört auch zur Menge  $\mathbb{W}^+$  der nichtnegativen Winkel. Unter unserem Standardisomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  entspricht dies Element der komplexen Zahl  $-1$ . Für einen Zweistrahle  ${}_{\mu}\{A, B\}$  in einem euklidischen Vektorraum ist  $\angle(A, B)$  der gestreckte Winkel genau dann, wenn gilt  $A = -B$ .
3. Man sieht mithilfe unseres Isomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  aus 1.7.9, daß es in der Winkelgruppe genau zwei Elemente  $\alpha$  gibt mit  $4\alpha = 0$  aber  $2\alpha \neq 0$ , und daß genau Eines davon in der Winkelmenge liegt. Dies Element der Winkelmenge  $\rho \in \mathbb{W}^+$  heißt der **rechte Winkel**. Unter unserem Standardisomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  entspricht es der komplexen Zahl  $i$ . Für einen Zweistrahle  ${}_{\mu}\{A, B\}$  in einem euklidischen Vektorraum ist  $\angle(A, B)$  der rechte Winkel genau dann, wenn gilt  $A \perp B$  alias  $v \perp w \ \forall v \in A, w \in B$  im Sinne von 1.5.1.

**1.7.11 (Sinus und Cosinus).** Für den  $\mathbb{R}^2$  mit seiner Standardorientierung und seinem Standardskalarprodukt erhalten wir per definitionem einen kanonischen

Isomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\vartheta \mapsto R_\vartheta$ . Wir erklären Abbildungen **Sinus** und **Cosinus**  $\sin, \cos : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$R_\vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

1.7.12. Der Cosinus induziert offensichtlich eine Bijektion  $\cos : \mathbb{W}^+ \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$  zwischen unserer Winkelmenge und dem reellen Intervall  $[-1, 1]$ . Der rechte Winkel hat offensichtlich  $\cos(\rho) = 0$  als Cosinus, der Nullwinkel  $\cos(0) = 1$  und der gestreckte Winkel  $\cos(\gamma) = -1$ . Für alle Winkel  $\vartheta \in \mathbb{W}$  gilt  $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$  und für alle nichtnegativen Winkel  $\vartheta \in \mathbb{W}^+$  gilt  $\sin \vartheta \geq 0$  und mithin  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$ .

1.7.13. Unser kanonischer Isomorphismus  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\vartheta \mapsto R_\vartheta$  wird in diesen Notationen gegeben durch die Vorschrift

$$\vartheta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Unser Standardisomorphismus mit der Kreisgruppe  $\mathbb{W} \xrightarrow{\sim} S^1$  wird in diesen Notationen gegeben durch die Vorschrift  $\vartheta \mapsto \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ .

**Vorschau 1.7.14 (Bezug zur Analysis).** In der Analysis [AN1] 3.4.9 führt man Sinus und Cosinus meist als Funktionen  $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein. Wenn ich auf dem Unterschied zu unseren hier erklärten Funktionen  $\sin, \cos : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$  bestehen will, unterscheide ich zwischen dem „analytischen“ und dem „geometrischen“ Sinus beziehungsweise Cosinus und notiere erstere Abbildungen  $\sin_a, \cos_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und letztere Abbildungen  $\sin_g, \cos_g : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ . Per definitionem gilt dann für die „Aufwickelabbildung“  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W}$ , die wir als die Komposition der Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto \exp it$  mit unserem Standardisomorphismus  $S^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$  aus 1.7.9 erhalten, die Beziehung  $\sin_a = \sin_g \circ u$  und  $\cos_a = \cos_g \circ u$ . Mehr dazu besprechen wir in 1.8.1 im Zusammenhang mit Winkelmaßen.

1.7.15 (**Winkel zwischen Vektoren**). Wir erklären den **Winkel**

$$\angle(v, w) \in \mathbb{W}^+$$

zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren  $v \neq 0 \neq w$  eines euklidischen Vektorraums als den von den zugehörigen Strahlen  $\mathbb{R}_{\geq 0}v$  und  $\mathbb{R}_{\geq 0}w$  im Sinne von 1.7.5 eingeschlossenen Winkel. Wir zeigen nun für diesen Winkel und ein beliebiges Skalarprodukt der vorgegebenen euklidischen Struktur die Formel

$$\cos_g(\angle(v, w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

Per definitionem reicht es, sie für zweidimensionale Skalarprodukträume zu zeigen. Weiter reicht es, sie für Vektoren der Norm Eins zu zeigen. Da beide Seiten gleich bleiben, wenn wir unsere Vektoren durch ihre Bilder unter einem Isomorphismus von Skalarprodukträumen ersetzen, dürfen wir sogar annehmen, daß unser Skalarproduktraum die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  ist mit  $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}w)$  und daß gilt  $z = 1$ . In diesem Fall ist die Behauptung jedoch offensichtlich.

*Vorschau 1.7.16.* In 6.4.6 werden wir das kanonische „flächenwertige Skalarprodukt“ eines euklidischen Vektorraums kennenlernen und sehen, wie man die reelle Zahl  $\langle v, w \rangle / (\|v\| \|w\|)$  aus 1.7.15 auch und in besonders natürlicher Weise als einen „Quotient von zwei Flächen“ verstehen kann.

## Übungen

*Übung 1.7.17 (Ähnliche Zweistrahlen und Winkel).* Zwei angeordnete Zweistrahlen  $(A, B)$  und  $(A', B')$  in orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorräumen  $Z, Z'$  lassen sich genau dann durch einen orientierungserhaltenden Isomorphismus euklidischer Vektorräume ineinander überführen, wenn sie denselben gerichteten Winkel einschließen, wenn also gilt

$$\angle(A, B) = \angle(A', B')$$

Von zwei Zweistrahlen  ${}_{\mu}\{A, B\}$  und  ${}_{\mu}\{A', B'\}$  in endlichdimensionalen euklidischen Vektorräumen  $Z, Z'$  läßt sich genau dann einer der beiden durch eine euklidische lineare Abbildung in den anderen überführen, wenn sie denselben ungerichteten Winkel einschließen, wenn also gilt

$$\angle(A, B) = \angle(A', B')$$

## 1.8 Winkelmaße und Winkel im Dreieck

1.8.1 (**Allgemeine Winkelmaße**). Wir versehen die Winkelgruppe  $\mathbb{W}$  mit der induzierten Topologie [AN1] 6.6.2 zur natürlichen Topologie [AN1] 7.4.14 auf dem Endomorphismenraum eines zweidimensionalen reellen Vektorraums. Aus der Analysis [AN1] 3.4.5 wissen wir, daß es stetige nichtkonstante Gruppenhomomorphismen

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W}$$

von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die Winkelgruppe gibt, daß alle derartigen Gruppenhomomorphismen surjektiv sind, und daß sich je Zwei von ihnen nur um das Vorschalten der Multiplikation mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl unterscheiden. Jeder derartige Gruppenhomomorphismus hat weiter, immer nach [AN1] 3.4.5, einen Kern der Gestalt  $\mathbb{Z}b$  für wohlbestimmtes

$b > 0$  und induziert mithin Bijektionen  $[0, b) \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$  sowie  $(-b/2, b/2] \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ , die man verwenden kann, um Elemente der Winkelgruppe durch reelle Zahlen zu beschreiben. Man beschränkt sich hierbei in der Mathematik meist auf Gruppenhomomorphismen  $u$  mit der Eigenschaft, daß für einen orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum  $V$  und einen Vektor  $v \in V$  ungleich Null und hinreichend kleines  $t > 0$  das Paar  $(v, u(t)(v))$  eine positiv orientierte Basis ist. Derartige Gruppenhomomorphismen werden durch obiges  $b$  bereits eindeutig festgelegt und führen zu verschiedenen Winkelmaßen.

- 1.8.2 (Gebräuchliche Winkelmaße).**
1. Auf der Schule wird der Gruppenhomomorphismus  $u$  meist so gewählt, daß  $b = 360$  die kleinste positive Zahl ist, die auf die Identität abgebildet wird. Das hat den Vorteil, daß alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq n \leq 6$  Teiler von 360 sind, so daß die Winkelmaße vieler Winkel in einfachen geometrischen Figuren natürliche Zahlen werden. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein hochgestelltes  $^\circ$  an, also etwa  $u : 45 \mapsto 45^\circ$ , und spricht von **Grad**. Die Umkehrabbildung notieren wir  $\text{Grad} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} [0, 360)$ .
  2. Bei Vermessungsarbeiten wird der Gruppenhomomorphismus  $u$  meist so gewählt, daß  $b = 400$  die kleinste positive Zahl ist, die auf die Identität abgebildet wird. Dabei wird üblicherweise „im Uhrzeigersinn“ gemessen, als da heißt, wenn man eine Uhr so auf die Erde legt, daß man sie von oben lesen kann, hat der Winkel von zwölf Uhr nach drei Uhr in dieser Konvention das Winkelmaß 100. Die Wahl 400 hat den Vorteil, daß einem rechten Winkel als Winkelmaß die Zahl 100 entspricht. Das ist beim Arbeiten mit Digitalanzeigen besonders praktisch. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein nachgestelltes gon an, und spricht von **Neugrad** oder **Gon**.
  3. Beim Bedienen eines Taschenrechners arbeitet man oft mit einer Wahl des Gruppenhomomorphismus  $u$ , die zusätzlich zu ihrer Verträglichkeit mit der Orientierung dadurch ausgezeichnet ist, daß der „Geschwindigkeitsvektor“ von  $t \mapsto u(t)(v)$  für alle  $t$  und  $v$  dieselbe Länge hat wie  $v$ . Das bedeutet dann die Wahl  $b = 2\pi$ , und hier ist das  $\pi = 3,1415\dots$  aus der Analysis gemeint, also das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser einer Kreislinie nach [AN1] 2.5.1. Für diese Wahl gilt die Beziehung  $\cos_g \circ u = \cos_a$  zwischen geometrischem und analytischem Cosinus und die analoge Beziehung für den Sinus. Man deutet das Anwenden dieses Gruppenhomomorphismus durch ein nachgestelltes rad an und spricht von **Radian** oder deutsch **Bogenmaß**.
  4. In der Mathematik ist es üblich, zwar mit der Wahl  $b = 2\pi$  zu arbeiten, also im eben eingeführten Bogenmaß, informell aber zu tun, als ob man die

Wahl  $b = 2$  getroffen habe und dies durch das Symbol  $\pi$  andeute. Die dabei entstehenden Ausdrücke haben den Vorteil, daß sie informell besonders gut verständlich sind. Sie haben den Nachteil, daß man aus dem Kontext erschließen muß, ob ein Winkel  $\alpha \in \mathbb{W}$  oder vielmehr eine reelle Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  gemeint ist.

5. Es gibt Bestrebungen, eine neue Konvention einzuführen, bei der man ähnlich wie im vorhergehenden Punkt vorgeht, dabei jedoch statt mit  $\pi$  mit  $\tau := 2\pi$  arbeitet.

Zum Beispiel sind die Bezeichnungen für einen positiv orientierten rechten Winkel in den verschiedenen Notationssystemen

$$90^\circ = -100 \text{ gon} = \pi/2 = \tau/4 \approx 1,5708 \text{ rad}$$

**1.8.3 (Unsere Konventionen).** Wir arbeiten im folgenden mit  $b = 2\pi$  und verwenden die Bijektion  $u : (-\pi, \pi] \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}$ , die von unserem Gruppenhomomorphismus  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W}$  aus 1.7.14 induziert wird, also  $\cos_g \circ u = \cos_a$  und  $\sin_g \circ u = \sin_a$  wie in 1.7.14 erklärt. Die Umkehrabbildung notieren wir

$$\text{Rad} : \mathbb{W} \xrightarrow{\sim} (-\pi, \pi]$$

mit Rad als Abkürzung für **Radian**, also  $\cos_a \circ \text{Rad} = \cos_g$  und  $\sin_a \circ \text{Rad} = \sin_g$  und  $\text{Rad}(0,56 \text{ rad}) = 0,56$ . Gegeben ein angeordneter Zweistrah  $(A, B)$  bezeichnet mithin

$$\text{Rad} \angle(A, B) \in (-\pi, \pi]$$

das Bogenmaß des zugehörigen Elements der Winkelgruppe. Gegeben linear unabhängige Vektoren  $v, w$  ist ihr Winkelmaß  $\text{Rad} \angle(v, w)$  positiv genau dann, wenn sie eine positiv orientierte Basis bilden, und für  $v \neq 0$  haben wir  $\text{Rad} \angle(v, -v) = \pi$ . Schließlich gilt in unseren Konventionen für jeden Winkel  $\alpha \in \mathbb{W}$  auch noch die Beziehung  $\text{Rad} |\alpha| = |\text{Rad} \alpha|$ .

**1.8.4 (Terminologie).** Im folgenden werden wir oft einfach nur **Winkel** sagen und es dem Leser überlassen, aus dem Kontext zu erschließen, ob damit Zweistrahlen, angeordnete Zweistrahlen, Elemente von Winkelgruppen, Elemente von Winkelmengen oder auch eines der üblichen Winkelmaße gemeint sind. Oft läßt man auch die Spezifizierung des Winkelmaßes aus der Notation weg und hofft, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, ob ein abstrakter Winkel oder sein Maß gemeint ist, und in letzterem Fall, nach welcher Konvention besagter Winkel nun gemessen werden soll.

*Beispiel 1.8.5.* Die drei Vektoren der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  bilden ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel an jeder Ecke sollte folglich das Bogenmaß  $\pi/3$

haben. In der Tat finden wir für  $v = e_3 - e_1$  und  $w = e_2 - e_1$  als Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle = 1$  und wegen  $\|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$  ergibt sich für den Winkel in der Tat  $\cos \angle(v, w) = 1/2$  und  $\text{Rad } \angle(v, w) = \pi/3$ .

1.8.6. Unter einem **Dreieck** in einem affinen Raum verstehen wir eine Menge von drei nicht kollinearen Punkten. Standardmäßig bezeichnen man diese Punkte mit  $A, B, C$  und nennt sie die **Ecken** des Dreiecks. Für ein Dreieck in einer euklidischen Ebene  $E$  notieren wir

$$\alpha := \angle(B - A)(C - A)$$

seinen **Winkel bei**  $A$  und notieren analog  $\beta, \gamma$  seine Winkel bei  $B, C$ .

**Proposition 1.8.7 (Winkelsumme im Dreieck).** *Gegeben ein Dreieck in einer euklidischen Ebene ist die Summe seiner drei Winkel der gestreckte Winkel.*

*Beweis.* Sei  $E$  unsere euklidische Ebene. Seien  $A, B, C \in E$  die Ecken unseres Dreiecks. Wir kürzen die „Kantenvektoren“ ab zu  $\vec{a} := B - C$ ,  $\vec{b} := C - A$  und  $\vec{c} := A - B$ . Wählen wir eine Orientierung auf  $\vec{E}$ , so wissen wir wegen der Additivität 1.7.8 der orientierten Winkel bereits

$$\angle(\vec{a}, -\vec{b}) + \angle(-\vec{b}, \vec{c}) + \angle(\vec{c}, -\vec{a}) = \angle(\vec{a}, -\vec{a})$$

Wenn wir in der Mitte beide Vektoren negativ machen, ändert sich der orientierte Winkel nicht. Wir haben also etwas übersichtlicher auch

$$\angle(\vec{a}, -\vec{b}) + \angle(\vec{b}, -\vec{c}) + \angle(\vec{c}, -\vec{a}) = \angle(\vec{a}, -\vec{a})$$

Andererseits gilt  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Aus dieser Identität folgt, daß  $(\vec{a}, -\vec{b})$ ,  $(\vec{b}, -\vec{c})$  und  $(\vec{c}, -\vec{a})$  drei gleich orientierte Basen sind, da die entsprechenden Basiswechselmatrizen alle positive Determinante haben. Wir können also, indem wir andernfalls die andere Orientierung wählen, alle drei positiv orientiert annehmen. Dann aber stimmen die orientierten mit den nichtorientierten Winkeln überein und wir erhalten

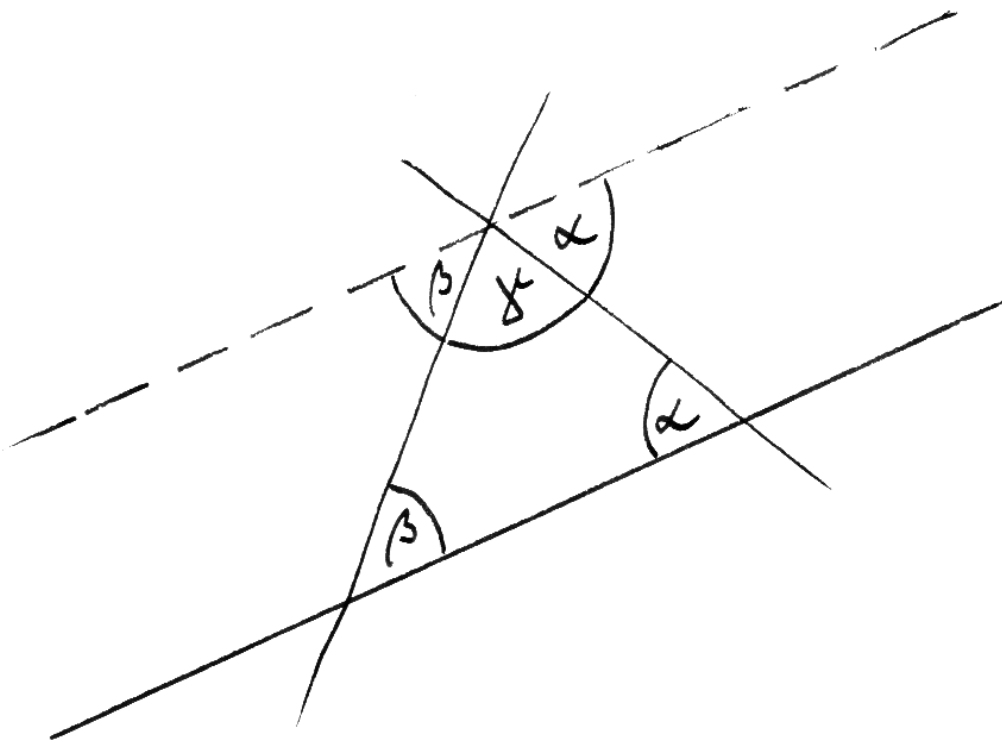
$$\gamma + \alpha + \beta = \angle(\vec{a}, -\vec{a}) \quad \square$$

1.8.8. Aus unserer Gleichung  $\alpha + \beta + \gamma = \angle(\vec{a}, -\vec{a})$  in der Winkelgruppe  $\mathbb{W}$  folgt

$$\text{Rad } \gamma + \text{Rad } \alpha + \text{Rad } \beta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

Für jeden Winkel  $\vartheta$  eines Dreiecks gilt aber offensichtlich auch  $\text{Rad}(\vartheta) \in (0, \pi)$ . Da damit alle drei Summanden links zu  $(0, \pi)$  gehören müssen und da weiter gilt  $(0, 3\pi) \cap (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) = \{\pi\}$ , folgt sogar

$$\text{Rad } \alpha + \text{Rad } \beta + \text{Rad } \gamma = \pi$$



Der auf der Schule übliche Beweis dafür, daß die Winkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  beträgt.

Natürlich können wir genauso gut mit dem Gradmaß  $\text{Grad} : \mathbb{W}^+ \xrightarrow{\sim} [0, 180]$  arbeiten und erhalten so die äquivalente Aussage

$$\text{Grad } \alpha + \text{Grad } \beta + \text{Grad } \gamma = 180$$

Sie entspricht vermutlich am ehesten dem, was Sie in der Schule gelernt haben.

**1.8.9 (Weitere Notationen für Dreiecke).** Gegeben ein Dreieck mit den Ecken  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene  $E$  bezeichne

$$a := \|B - C\|$$

je nach Kontext die  $m$ -Norm  $a \in \mathbb{R}$  der der Ecke  $A$  gegenüberliegenden Seite für fest gewähltes  $m \in \vec{E} \setminus 0$  oder ihre abstrakte Länge  $a \in \mathbb{L}(\vec{E})$  im Sinne von 1.5.11. Meist wird es auf diesen Unterschied gar nicht ankommen und wir reden unterschiedslos von der „Seitenlänge“. Analog erklären wir die Seitenlängen  $b$  und  $c$ .

**1.8.10.** Gegeben ein Dreieck mit den Ecken  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene  $E$  mit einem rechten Winkel bei  $C$  gilt

$$\cos(\beta) = a/c$$

In der Tat gibt es nach 1.2.13 einen Isomorphismus von euklidischen Ebenen  $E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  mit  $B \mapsto 0$  und  $C \mapsto e_1$ . Nach einer Streckung dürfen wir annehmen, daß  $A$  auf dem Einheitskreis zu liegen kommt und  $C$  auf  $\mathbb{R}_{>0}e_1$ . Dann gilt also  $c = 1$  und  $a = \cos(\beta)$  nach unserer Definition des Cosinus.

**1.8.11.** Dreiecke  $\{A, B, C\}$  und  $\{A', B', C'\}$  in einer euklidischen Ebene heißen **kongruent**, wenn es eine Kongruenz  $k$  gibt mit  $k(\{A, B, C\}) = \{A', B', C'\}$ . Ein Dreieck mit einer Anordnung seiner Ecken nenne ich ein **angeordnetes Dreieck** und notiere es  $(A, B, C)$ . Angeordnete Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  in einer euklidischen Ebene heißen **angeordnet kongruent**, wenn es eine Kongruenz  $k$  gibt mit  $k(A, B, C) = (A', B', C')$ .

## Übungen

**Übung 1.8.12.** Man zeige den **Cosinus-Satz**  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$  für jedes Dreieck mit positiven Seitenlängen  $a, b, c$  und jeweils den entsprechenden Seiten gegenüberliegenden nichtorientierten Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Man zeige in denselben Notationen auch den **Sinus-Satz**

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Hinweis: Man wähle eine Seite als horizontale Seite aus und berechne die Höhe unseres Dreiecks auf verschiedene Weisen. Hier meinen  $a, b, c$  die  $m$ -Normen der



jeweiligen Seiten in Bezug auf einen festen von Null verschiedenen Richtungsvektor  $m$ .

*Übung 1.8.13.* Je zwei angeordnete Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  einer euklidischen Ebene mit zwei gleichen Seiten  $a = a'$  sowie  $b = b'$  und gleichem eingeschlossenen Winkel  $\gamma = \gamma'$  sind angeordnet kongruent. Gilt statt  $\gamma = \gamma'$  eine der Gleichheiten  $\alpha = \alpha'$  oder  $\beta = \beta'$ , so brauchen unsere angeordneten Dreiecke nicht kongruent sein.

*Übung 1.8.14.* Je zwei angeordnete Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  einer euklidischen Ebene mit gleichen Seiten  $c = c'$  sowie gleichen anliegenden Winkeln  $\alpha = \alpha'$  und  $\beta = \beta'$  sind angeordnet kongruent. Dasselbe gilt auch unter der Annahme ( $c = c'$  und  $\alpha = \alpha'$  und  $\gamma = \gamma'$ ). Hinweis: Sinussatz und vorhergehende Übungen.

*Übung 1.8.15.* Je zwei angeordnete Dreiecke  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  einer euklidischen Ebene mit drei gleichen Seiten  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$  sind angeordnet kongruent. Hinweis: Cosinussatz und vorhergehende Übungen.

*Übung 1.8.16.* Gegeben Strahlen  $F, G, H$  in einem orientierten zweidimensionalen euklidischen Vektorraum liefert die Additivität der orientierten Winkel 1.7.8 für ihre Bogenmaße die Regel

$$\text{Rad } \angle(F, G) + \text{Rad } \angle(G, H) \in \text{Rad } \angle(F, H) + 2\pi\mathbb{Z}$$

*Übung 1.8.17.* Gegeben von Null verschiedene Vektoren  $v, w$  in einem orientierten zweidimensionalen reellen euklidischen Vektorraum haben wir stets die Alternative  $\text{Rad } \angle(v, w) + \text{Rad } \angle(w, -v) = \pm\pi$ .

*Ergänzende Übung 1.8.18 (Winkelsumme im Vieleck).* Sei in einer orientierten euklidischen Ebene  $E$  eine sich periodisch wiederholende Folge  $p_0, \dots, p_n = p_0, p_{n+1} = p_1, \dots$  mit  $p_1, \dots, p_n$  paarweise verschieden gegeben derart, daß die halboffenen Segmente  $[p_{i-1}, p_i)$  für  $1 \leq i \leq n$  paarweise disjunkt sind. Es gebe einen Richtungsvektor  $\vec{v} \neq 0$  derart, daß  $p_0 + \mathbb{R}_{>0}\vec{v}$  keines unserer Segmente trifft und daß  $(\vec{v}, p_1 - p_0)$  eine positiv orientierte Basis von  $\vec{E}$  ist. So gilt in unseren Konventionen 1.8.3 die Identität

$$\sum_{i=1}^n \text{Rad } \angle(p_i - p_{i-1}, p_{i+1} - p_i) = 2\pi$$

Hinweis: Gibt es zwei Ecken  $p_r \neq p_s$  derart, daß das offene Segment  $(p_r, p_s)$  keines unserer Segmente  $[p_{i-1}, p_i]$  trifft und daß alle Ecken in ein- und derselben abgeschlossenen Halbebene zur Gerade durch  $p_r$  und  $p_s$  liegen, so führt „Zerlegen in zwei Polygonzüge durch Einfügen einer doppelten Kante  $[p_r, p_s]$ “ zusammen mit vollständiger Induktion zum Ziel. Gibt es keine zwei derartigen Ecken, so

erkennt man „unschwer“, daß unser Polygonzug „konvex“ ist in dem Sinne, daß für je zwei Ecken  $p_r \neq p_s$  mit  $s \neq r \pm 1$  das offene Segment  $(p_r, p_s)$  keines unserer Segmente  $[p_{i-1}, p_i]$  trifft, und dann kommen wir wieder durch „Zerlegen in zwei Polygonzüge“ und Induktion ans Ziel.

## 1.9 Kreuzprodukt und Spatprodukt

**Satz 1.9.1.** *Gegeben ein dreidimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum  $V$  gibt es genau eine alternierende bilineare Abbildung  $V \times V \rightarrow V$  mit der Eigenschaft  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_3$  für jede orientierte Orthonormalbasis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Sie heißt das **Kreuzprodukt** wegen der für unsere Abbildung allgemein gebräuchlichen Notation*

$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$$

1.9.2. Aus der Definition folgt sofort, daß  $(\vec{v} \times \vec{w})$  auf  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  senkrecht steht, indem wir etwa eine angeordnete Orthonormalbasis derart wählen, daß  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  im Erzeugnis der ersten beiden Basisvektoren liegen.

1.9.3 (**Diskussion von Varianten des Begriffs und der Terminologie**). Eine mit den benötigten Einheiten versehene Variante des Kreuzprodukts für dreidimensionale euklidische Vektorräume diskutieren wir in 6.4.9. Andere Autoren bezeichnen unser Kreuzprodukt als **Vektorprodukt**, da es als Resultat eben Vektoren liefert im Gegensatz zum Skalarprodukt, das Skalare liefert. Ich habe für das Kreuzprodukt alias Vektorprodukt auch schon die alternative Notation  $[\vec{v}, \vec{w}]$  gesehen, die aber erst im Kontext von [ML] 1.3.7 ihre Verträglichkeit mit an wieder anderer Stelle üblichen Notationen zeigt. Noch seltener sieht man die Notation  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ , die hinwiederum in 6.5.28 ihre Verträglichkeit mit dem dort eingeführten „Dachprodukt“  $\wedge$  zeigt. Ich mag diese letzte Notation nicht, denn das Dachprodukt in seiner üblichen Definition ist im Gegensatz zu unserem Kreuzprodukt durchaus assoziativ.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen,  $V$  sei der  $\mathbb{R}^3$  mit seinem Standard-Skalarprodukt und seiner Standard-Orientierung. Wenn es in diesem Fall überhaupt eine bilineare Abbildung  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit den im Satz geforderten Eigenschaften gibt, dann muß diese offenichtlich durch die Vorschrift

$$\left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

gegeben werden. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß die durch diese Formel definierte bilineare Abbildung, die wir schon mal  $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$  notieren und

für den Rest dieses Beweises das **konkrete Kreuzprodukt** nennen, auch wirklich die im Satz geforderte Eigenschaft hat. In Anbetracht der Jägerzaunformel [LA1] 6.2.3 gilt für unser konkretes Kreuzprodukt offensichtlich schon mal die Identität

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$$

Umgekehrt legt aber diese Eigenschaft für alle  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ , ja sogar schon für  $\vec{u} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  auch bereits den Vektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  fest. Daraus folgern wir hinwiederum für alle Drehungen  $A \in \text{SO}(3)$  die Identität

$$(A\vec{v}) \times (A\vec{w}) = A(\vec{v} \times \vec{w})$$

In der Tat folgt diese Identität von Vektoren, wenn wir zeigen können, daß die Skalarprodukte beider Seiten mit allen Vektoren  $\vec{u}$  oder auch mit allen Vektoren  $A\vec{u}$  übereinstimmen. Dafür rechnen wir einfach  $\langle A\vec{u}, A(\vec{v} \times \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}) = \det A(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w}) = \det(A\vec{u}|A\vec{v}|A\vec{w}) = \langle A\vec{u}, (A\vec{v}) \times (A\vec{w}) \rangle$ . Also gilt in der Tat  $A(\vec{v} \times \vec{w}) = (A\vec{v}) \times (A\vec{w})$  für alle  $A \in \text{SO}(3)$ . Da sich aber je zwei orientierte Orthonormalbasen des  $\mathbb{R}^3$  durch eine Drehung  $A \in \text{SO}(3)$  ineinander überführen lassen, folgt unmittelbar, daß unser konkretes Kreuzprodukt die im Satz geforderte Eigenschaft hat.  $\square$

*Ergänzung 1.9.4.* Für den Ausdruck  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$  aus dem vorhergehenden Beweis mit  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  findet man manchmal auch die Notation  $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$  und die Bezeichnung als **Spatprodukt**, die darauf anspielt, daß diese Determinante ja nach [LA1] 6.2.6 bis auf ein Vorzeichen gerade das Volumen des durch die fraglichen drei Vektoren gegebenen Parallelepipedes angibt. Die Kristalle des Feldspats haben aber nun oft die Gestalt eines Parallelepipedes, weswegen derartige Körper auch als **Sparte** bezeichnet werden. In 6.4.3 diskutieren wir eine Variante des Spatprodukts für beliebige dreidimensionale euklidische Vektorräume.

**1.9.5 (Die schmutzige Anschauung für das Kreuzprodukt).** Setzen wir im Fall eines linear unabhängigen Paares  $(\vec{v}, \vec{w})$  in obiger Formel  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$  für die Beziehung von Kreuzprodukt, Skalarprodukt und Determinante den Vektor

$$\vec{u} = (\vec{v} \times \vec{w}) / \|\vec{v} \times \vec{w}\|$$

ein, so erkennen wir aus der anschaulichen Bedeutung [LA1] 6.2.6 der Determinante als Volumen, daß wir uns die Länge von  $\vec{v} \times \vec{w}$  gerade als das Volumen des von  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  aufgespannten Spats alias die Fläche des von  $\vec{v}, \vec{w}$  aufgespannten Parallelogramms denken dürfen. Damit erkennen wir, daß das Kreuzprodukt anschaulich wie folgt interpretiert werden kann: Für  $\vec{v}, \vec{w}$  linear abhängig gilt  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ ; Sonst ist  $\vec{v} \times \vec{w}$  der Vektor, der senkrecht steht auf  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$ , dessen Länge der anschaulichen Fläche des von  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  aufgespannten Parallelogramms entspricht, und dessen Richtung dadurch festgelegt wird, daß  $(\vec{v} \times \vec{w}, \vec{v}, \vec{w})$  eine orientierte Basis ist.

## Übungen

**Übung 1.9.6 (Einzigkeit des Kreuzprodukts).** Man zeige: Gegeben ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum  $V$  bilden die bilinearen Abbildungen  $\varphi : V \times V \rightarrow V$  mit der Eigenschaft  $\varphi(Av, Aw) = A\varphi(v, w)$  für alle  $v, w \in V$  und  $A \in \text{SO}(V)$  einen eindimensionalen Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen  $V \times V \rightarrow V$ . Es besteht insbesondere keine Hoffnung, neben dem Kreuzprodukt noch weitere „geometrisch bedeutsame“ bilineare Verknüpfungen auf  $V$  zu finden. Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $V$  der  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt. Es gibt eine Drehung mit  $e_1 \mapsto e_2$  und  $e_2 \mapsto -e_1$ . Man folgere, daß  $\varphi$  alternierend sein muß. Es gibt eine Drehung mit  $e_1 \mapsto e_2$  und  $e_2 \mapsto e_1$  und Drehachse  $e_2 + e_1$ . Man folgere, daß  $\varphi(e_1, e_2)$  auf  $e_2 + e_1$  senkrecht stehen muß.

**Übung 1.9.7.** Gegeben ein dreidimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum zeige man  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$ .

## 1.10 Abstandserhaltende Abbildungen

**Proposition 1.10.1.** Gegeben reelle Skalarprodukträume  $V, W$  ist eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  linear und *orthogonal* genau dann, wenn sie den Ursprung auf den Ursprung abbildet und alle Abstände erhält, in Formeln  $f(0) = 0$  und

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in V$$

1.10.2. Man beachte, daß die Linearität von  $f$  nicht vorausgesetzt, sondern vielmehr aus unseren Annahmen gefolgert wird.

**Beweis.** Zunächst beachten wir die **Polarisierungsidentität**

$$2\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$$

oder für diesen Beweis besser ihre Variante  $2\langle v, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2$ . Da unsere Abbildung den Ursprung und alle Abstände erhält, erhält sie auch die Norm aller Vektoren, und wir folgern schon einmal

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Um weiter  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  zu zeigen, beachten wir

$$\langle f(\lambda v) - \lambda f(v), f(u) \rangle = \langle \lambda v, u \rangle - \lambda \langle v, u \rangle = 0$$

für alle  $u \in V$  und folgern  $\langle f(\lambda v) - \lambda f(v), z \rangle = 0$  für alle  $z$  im Erzeugnis des Bildes  $f(V)$ . Nehmen wir dann speziell  $z = f(\lambda v) - \lambda f(v)$ , so ergibt sich erst  $\|f(\lambda v) - \lambda f(v)\|^2 = 0$  und dann  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ . In derselben Weise finden wir

$$\langle f(v + w) - f(v) - f(w), f(u) \rangle = \langle v + w, u \rangle - \langle v, u \rangle - \langle w, u \rangle = 0$$

für alle  $u \in V$  und folgern  $f(v + w) = f(v) + f(w)$ , womit dann auch die Linearität von  $f$  gezeigt wäre.  $\square$

1.10.3. Ein **affiner Skalarproduktraum** ist ein Paar bestehend aus einem reellen affinen Raum und einem Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum. Gegeben zwei Punkte  $p, q$  definieren wir dann ihren **Abstand** alias ihre **Distanz** als die Norm des zugehörigen Richtungsvektors, in Formeln

$$d(p, q) := \|p - q\|$$

Eine Abbildung  $f : E \rightarrow E'$  zwischen affinen Skalarprodukträumen, die alle Abstände erhält, nennt man auch **isometrisch** oder eine **Isometrie**. Die Terminologie geht auf griechisch  $\iota\sigma\omicron\varsigma$  für deutsch „gleich“ zurück. In Formeln fordern wir von einer Isometrie also

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in E$$

*Ergänzung* 1.10.4. Dieselbe Begriffsbildung verwendet man auch allgemeiner für Abbildungen zwischen sogenannten „metrischen Räumen“, wie sie etwa in [AN1] 6.2.1 erklärt werden. Ist eine Isometrie bijektiv, so spricht man von einem **isometrischen Isomorphismus**.

*Ergänzung* 1.10.5 (**Diskussion der Terminologie**). Ich habe auch schon die alternative Terminologie gesehen, in der nur unsere isometrischen Isomorphismen als „Isometrien“ bezeichnet werden und unsere Isometrien als „isometrische Abbildungen“.

**Satz 1.10.6 (Isometrien zwischen affinen Skalarprodukträumen).** *Eine Abbildung zwischen affinen Skalarprodukträumen ist eine Isometrie genau dann, wenn sie affin ist mit orthogonalem linearen Anteil.*

*Beweis.* Sei  $\varphi : E \rightarrow F$  unsere Abbildung und sei  $p \in E$  beliebig gewählt. Erklären wir  $\vec{\varphi}_p : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  durch  $\varphi(p + \vec{v}) = \varphi(p) + \vec{\varphi}_p(\vec{v})$ , so bildet  $\vec{\varphi}_p : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  offensichtlich den Ursprung auf den Ursprung ab und erhält alle Abstände. Nach der Proposition 1.10.1 ist folglich  $\vec{\varphi}_p$  linear und orthogonal und nach [LA1] 3.1.17 ist damit  $\varphi$  affin mit orthogonalem linearem Anteil. Der Beweis der Gegenrichtung kann dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

1.10.7 (**Diskussion der Terminologie**). Aus der Schule kennen Sie vermutlich bereits **Punktspiegelungen** an einem Punkt  $p$ , die durch die Vorschrift  $p + \vec{v} \mapsto p - \vec{v}$  gegeben werden. Wir wollen jedoch vereinbaren, daß mit **Spiegelungen** stets lineare oder affine Abbildungen mit einer Fixpunktmenge der Kodimension Eins gemeint sind, deren Quadrat die Identität ist. Punktspiegelungen heißen zwar verwirrenderweise ähnlich, sind aber nur im eindimensionalen Fall Spiegelungen in unserem Sinne.

1.10.8. Gegeben ein euklidischer Raum  $E$  verstehen wir unter dem **Abstand** zweier Punkte  $p, q \in E$  das Element  $\|p - q\| \in \mathbb{L}(\vec{E})$  der zugehörigen Längengrade. Eine Selbstabbildung  $f : E \rightarrow E$  heißt **abstandserhaltend**, wenn gilt

$$\|p - q\| = \|f(p) - f(q)\| \quad \forall p, q \in E$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die abstandserhaltenden Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen euklidischen Raums genau seine orthogonalaffinen Automorphismen aus 1.5.4 sind. Insbesondere sind die abstandserhaltenden Selbstabbildungen einer euklidischen Ebene nach 1.5.7 genau ihre Kongruenzen.

**Satz 1.10.9 (Abstandserhaltende Selbstabbildungen euklidischer Räume).** *Jede abstandserhaltende Selbstabbildung  $\varphi : E \rightarrow E$  eines endlichdimensionalen euklidischen Raums  $E$  läßt sich eindeutig darstellen als die Hintereinanderausführung*

$$\varphi = (+\vec{w}) \circ d$$

*einer abstandserhaltenden Selbstabbildung  $d : E \rightarrow E$  mit Fixpunkt gefolgt von einer Verschiebung um einen Richtungsvektor  $\vec{w}$ , der unter dieser abstandserhaltenden Selbstabbildung  $d$  invariant ist, in Formeln  $\vec{d}(\vec{w}) = \vec{w}$ .*

1.10.10. Gegeben eine abstandserhaltende Selbstabbildung  $\varphi$  eines endlichdimensionalen euklidischen Raums  $E$  gibt es also in Formeln ausgedrückt genau ein Paar  $(d, \vec{w})$  bestehend aus einer abstandserhaltenden Selbstabbildung  $d$  mit mindestens einem Fixpunkt sowie einem Richtungsvektor  $\vec{w}$  derart, daß gilt

$$\varphi = (+\vec{w}) \circ d \quad \text{und} \quad \vec{d}(\vec{w}) = \vec{w}.$$

Offensichtlich gilt dann sogar  $\varphi = (+\vec{w}) \circ d = d \circ (+\vec{w})$ . Natürlich haben  $d$  und  $\varphi$  denselben linearen Anteil, in Formeln  $\vec{d} = \vec{\varphi}$ . Jede abstandserhaltende Selbstabbildung kann also nochmal anders gesagt dargestellt werden durch eine Abbildungsvorschrift der Gestalt  $\varphi(p + \vec{u}) = p + A(\vec{u}) + \vec{w}$  mit  $p \in E$  und  $A \in O(\vec{E})$  orthogonal und  $\vec{w} \in \vec{E}^A$  einem Fixvektor von  $A$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Gegeben ein orthogonaler Automorphismus  $f$  eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums  $V$  ist der Fixpunkttraum  $\ker(f - \text{id}) = V^f$  das orthogonale Komplement von  $\text{im}(f - \text{id})$  in  $V$ , in Formeln

$$V^f = \text{im}(f - \text{id})^\perp$$

In der Tat zeigt die Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 in Verbindung mit 1.3.17, daß es ausreicht, die Inklusion  $V^f \subset \text{im}(f - \text{id})^\perp$  zu zeigen. Aus  $f(\vec{w}) = \vec{w}$  folgt aber offensichtlich  $\langle \vec{w}, f(\vec{v}) - \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{w}), f(\vec{v}) \rangle - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$  für alle  $\vec{v} \in V$ . Nun beginnt der eigentliche Beweis. Natürlich kann man für einen beliebigen Punkt

$q \in E$  stets einen Vektor  $\vec{v} \in \vec{E}$  finden mit  $\varphi(q) = q + \vec{v}$  und folglich  $\varphi(q + \vec{u}) = q + \vec{v} + \vec{\varphi}(\vec{u}) \quad \forall \vec{u} \in \vec{E}$ . Gegeben ein Richtungsvektor  $\vec{w}$  besitzt damit  $(-\vec{w}) \circ \varphi$  genau dann einen Fixpunkt, wenn es  $\vec{u} \in \vec{E}$  gibt mit

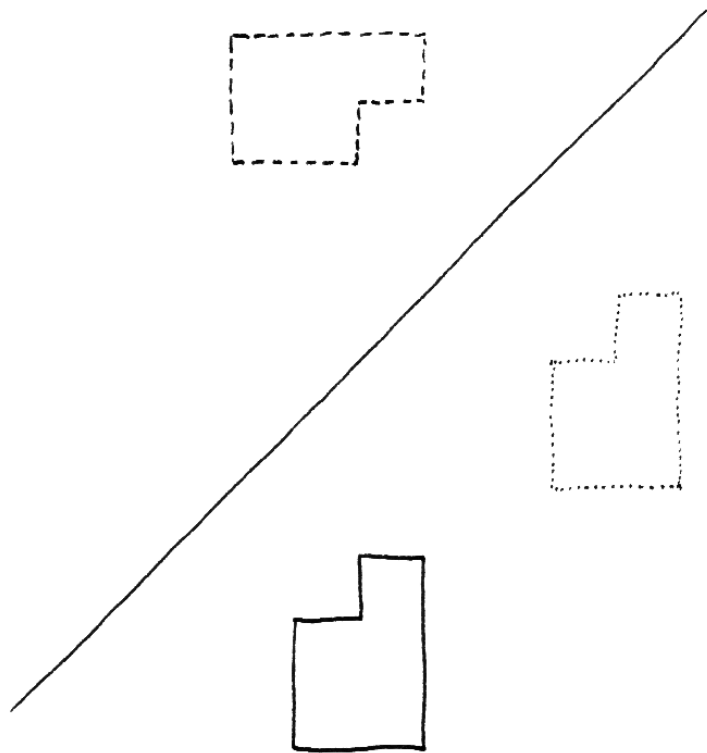
$$q + \vec{u} = q + \vec{v} + \vec{\varphi}(\vec{u}) - \vec{w}$$

alias  $(\vec{u} - \vec{\varphi}(\vec{u})) + \vec{w} = \vec{v}$ . Wegen der Zerlegung  $\vec{E} = \text{im}(\vec{\varphi} - \text{id}) \oplus \vec{E}^{\vec{\varphi}}$  aus unserer Vorüberlegung gibt es also genau ein  $\vec{w} \in \vec{E}^{\vec{\varphi}}$  derart, daß  $(-\vec{w}) \circ \varphi$  einen Fixpunkt hat.  $\square$

**Beispiel 1.10.11 (Abstandserhaltende Selbstabbildungen der Gerade).** Jede abstandserhaltende Selbstabbildung einer Gerade ist entweder eine Verschiebung  $x \mapsto x + a$  oder eine Spiegelung  $x \mapsto b - x$ : In der Tat, ist der lineare Anteil unserer Selbstabbildung die Identität, so handelt es sich nach 1.10.10 um eine Verschiebung; ist ihr linearer Anteil dahingegen das Negative der Identität, so muß in der Darstellung nach 1.10.10 der Vektor  $\vec{w}$  der Nullvektor sein und wir haben für ein festes  $p$  eine Abbildung der Gestalt  $p + u \mapsto p - u$  vor uns. Diese Abbildung mag man als eine Spiegelung am Punkt  $p$  auffassen, sie kann etwas weniger geometrisch auch in der Form  $x \mapsto 2p - x$  geschrieben werden.

**Beispiel 1.10.12 (Abstandserhaltende Selbstabbildungen der Ebene).** Jede abstandserhaltende Selbstabbildung einer euklidischen Ebene ist entweder (1) eine Verschiebung oder (2) eine von der Identität verschiedene Drehung um einen Punkt oder (3) eine **Gleitspiegelung**, als da heißt eine Spiegelung an einer Gerade gefolgt von einer Verschiebung in Richtung eben dieser Gerade. In der Tat erhalten wir nach 1.10.10 unseren Fall (1) für die Abbildungen mit der Identität als linearem Anteil; Fall (2) für die Abbildungen mit einer von der Identität verschiedenen Drehung als linearem Anteil; und Fall (3) für die Abbildungen mit einer Spiegelung als linearem Anteil. Die Spiegelung an einer Gerade finden wir in unserer Liste als spezielle Gleitspiegelung wieder.

**Beispiel 1.10.13 (Abstandserhaltende Selbstabbildungen des Raums).** Jede abstandserhaltende Selbstabbildung eines dreidimensionalen euklidischen Raums ist entweder (1) eine **Verschraubung** alias eine nichttriviale Drehung um eine Achse gefolgt von einer Verschiebung in Richtung eben dieser Achse, oder (2) eine **Drehspiegelung** alias eine Drehung um eine Achse gefolgt von einer Spiegelung an einer Ebene senkrecht zu besagter Achse, oder (3) eine **Gleitspiegelung** alias eine Spiegelung an einer Ebene gefolgt von einer Verschiebung um einen Richtungsvektor besagter Ebene. In der Tat erhalten wir nach 1.10.10 unseren Fall (1) für die Abbildungen mit einer Drehung als linearem Anteil; Fall (2) für die Abbildungen mit linearem Anteil bestehend aus einem nichttrivialen Drehblock und einem Eintrag  $(-1)$  auf der Diagonalen; und Fall (3) für die Abbildungen



Das Bild der durchgezeichneten Figur unter einer Verschiebung (gepunktelt) und unter einer Gleitspiegelung (gestrichelt). Durchgezogen eingezeichnet ist auch die Gerade, längs derer die Gleitspiegelung geschieht. Unsere Gleitspiegelung ist natürlich, wie von unserem Satz 1.10.9 vorhergesagt, die Verknüpfung einer Isometrie mit mindestens einem Fixpunkt, hier einer Spiegelung, mit einer Translation in einer unter dem linearen Anteil dieser Isometrie invarianten Richtung, hier in Richtung der Spiegelachse.



mit einer Spiegelung an einer Ebene als linearem Anteil. Die Verschiebungen finden wir in unserer Liste als spezielle Verschraubungen wieder, die Identität als eine spezielle Verschiebung, und die Spiegelung an einer Ebene als eine spezielle Gleitspiegelung.

## Übungen

*Übung 1.10.14.* Man betrachte die komplexe Zahlenebene als euklidische Ebene und betrachte die Drehung  $d$  mit Fixpunkt  $p \in \mathbb{C}$  im Uhrzeigersinn um den rechten Winkel, in Formeln gegeben durch  $d : p + z \mapsto p + iz$ . Man schreibe für einen beliebigen Richtungsvektor  $w \in \mathbb{C}$  die Verknüpfung  $(w+) \circ d$  wieder als eine Drehung. Was ist der Fixpunkt dieser neuen Drehung?

*Übung 1.10.15.* Jeder zweidimensionale reelle affine Raum  $E$  mit einem Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum wird zu einer euklidischen Ebene, wenn wir als Kongruenzen alle Abbildungen  $k : E \rightarrow E$  nehmen mit

$$\|k(p) - k(q)\| = \|p - q\| \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$$

*Übung 1.10.16 (Dreispiegelungssatz).* Man zeige, daß sich jedes Element der Kongruenzgruppe einer euklidischen Ebene als Verknüpfung von einer, zwei oder drei Spiegelungen darstellen läßt.

*Übung 1.10.17.* Welcher Fall im vorhergehenden Beispiel 1.10.13 deckt die sogenannten **räumlichen Punktspiegelungen** ab, die für einen festen Punkt  $p$  durch die Vorschrift  $p + \vec{v} \mapsto p - \vec{v}$  gegeben werden?

*Ergänzende Übung 1.10.18.* Sei  $E$  ein euklidischer Raum. Man zeige:

1. Eine bijektive affine Abbildung  $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E$  ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn für jeden orientierungserhaltenden abstandserhaltenden Automorphismus  $g$  von  $E$  auch  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$  abstandserhaltend ist;
2. Eine bijektive affine Abbildung  $\varphi : E \rightarrow E$  ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn sie alle Winkel zwischen Strahlen im Richtungsraum im Sinne von 1.7.15 erhält;
3. Jede Ähnlichkeit mit einem Fixpunkt  $p \in E$  läßt sich eindeutig darstellen als die Verknüpfung eines abstandserhaltenden Automorphismus, der besagten Punkt  $p$  festhält, mit einer Streckung oder Stauchung der Gestalt  $p + \vec{v} \mapsto p + \lambda \vec{v}$  für wohlbestimmtes  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ;
4. Jede Ähnlichkeit, die nicht abstandserhaltend ist, besitzt genau einen Fixpunkt.

Hinweis: Letztere Aussage kann man besonders elegant mit dem Banach'schen Fixpunktsatz [AN2] 3.1.8 einsehen.

## 1.11 Normalformen und Matrixzerlegungen

**Satz 1.11.1 (Spektralsatz für unitäre Automorphismen).** *Gegeben ein unitärer Automorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums existiert stets eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

*Beweis.* Ist unser Raum der Nullraum, so tut es die leere Menge. Sonst finden wir nach [LA1] 6.6.4 einen Eigenvektor und durch Renormieren natürlich auch einen Eigenvektor der Länge Eins. Da unser Automorphismus unitär ist, erhält er auch den Orthogonalraum dieses Eigenvektors und induziert auf diesem Orthogonalraum eine unitäre Abbildung. Mit Induktion über die Dimension finden wir in unserem Orthogonalraum eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und durch Hinzunehmen unseres ursprünglichen Eigenvektors der Länge Eins erhalten wir daraus die gesuchte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren des ganzen Raums.  $\square$

**Korollar 1.11.2.** *Für jede unitäre Matrix  $U \in U(n)$  gibt es eine weitere unitäre Matrix  $B \in U(n)$  mit  $B^{-1}UB = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ , wobei  $z_i \in S^1 \subset \mathbb{C}$  komplexe Zahlen der Länge Eins sind.*

*Beweis.* Man findet solch eine Matrix  $B$ , indem man eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  nach 1.11.1 als die Spalten von  $B$  nimmt: Dann gilt ja sicher  $UB = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)B$  und die Matrix  $B$  ist unitär nach Lemma 1.4.3.  $\square$

**Satz 1.11.3 (Normalform für orthogonale Matrizen).** *Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum  $V$  und eine orthogonale Selbstabbildung  $U : V \rightarrow V$  gibt es stets eine angeordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , bezüglich derer die Matrix  ${}_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}$  unserer Abbildung eine blockdiagonale Gestalt der Form*

$$\text{diag} \left( 1, \dots, 1, -1, \dots, -1, \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_r & -s_r \\ s_r & c_r \end{pmatrix} \right)$$

*hat mit  $1 > c_1 \geq \dots \geq c_r > -1$  und  $c_i^2 + s_i^2 = 1$ . Unter den angegebenen Einschränkungen wird umgekehrt besagte blockdiagonale Matrix durch unsere orthogonale Abbildung  $U$  bereits eindeutig festgelegt.*

1.11.4. Dieser Satz beinhaltet den Satz vom Fußball 1.4.14 und seine Variante 1.4.16 sowie die in 1.1.6 und 1.4.18 betrachteten Resultate, die sich schlicht als die Fälle  $n \leq 3$  des obigen Satzes erweisen.

*Beweis.* Der Drehblock zu  $(c_\rho, s_\rho)$  hat die komplexen Eigenwerte  $c_\rho \pm i s_\rho$ , und das zeigt bereits die behauptete Eindeutigkeit. Die Existenz ist klar im Fall  $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 2$  nach unserer Diskussion der Gruppe  $O(2)$  aus 1.1.6. Zu beachten ist hierbei, daß jede ebene Spiegelung in einer geeigneten Orthonormalbasis die darstellende

Matrix  $\text{diag}(1, -1)$  hat und jede ebene Drehung in einer geeigneten Orthonormalbasis als darstellende Matrix entweder  $\text{diag}(1, 1)$  oder  $\text{diag}(-1, -1)$  oder einen Drehblock wie oben. Die Existenz folgt mit Induktion im allgemeinen, sobald wir zeigen, daß es unter der Voraussetzung  $V \geq 0$  in  $V$  stets einen von Null verschiedenen unter  $U$  invarianten Teilraum der Dimension  $\leq 2$  gibt, indem wir dann nämlich die Induktionsannahme auf diesen Teilraum und sein orthogonales Komplement anwenden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von jetzt an  $V = \mathbb{R}^n$  mit  $n \neq 0$  annehmen und uns  $U$  als reelle Matrix denken. Nun hat  $U$  wegen  $n \neq 0$  stets einen Eigenvektor  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ , sagen wir  $Uv = \lambda v$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann folgt für  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)^\top$  sofort  $U\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$  und das komplexe Erzeugnis  $\langle v, \bar{v} \rangle_{\mathbb{C}}$  dieser beiden Vektoren ist sicher auch ein  $U$ -stabiler Teilraum von  $\mathbb{C}^n$  der Dimension Eins oder Zwei. Der Schnitt  $\langle v, \bar{v} \rangle_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$  ist also ein  $U$ -stabiler Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  einer Dimension  $\leq 2$ . Dieser Schnitt ist aber auch nicht Null, denn er enthält sowohl  $v + \bar{v}$  als auch  $i(v - \bar{v})$ , die wegen  $v \neq 0$  nicht beide verschwinden können.  $\square$

1.11.5. Der vorhergehende Beweis illustriert in meinen Augen sehr gut, wie wunderbar unsere Theorie durch ihre Erweiterung ins Komplexe vereinfacht wird. Ich selbst kenne jedenfalls keinen vergleichbar transparenten Beweis der obigen Klassifikation, der ohne die komplexen Zahlen auskommt.

**Satz 1.11.6 (Gram-Schmidt).** *Seien  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängige Vektoren eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums. So existiert in unserem Skalarproduktraum genau ein Orthonormalsystem  $w_1, \dots, w_k$  mit*

$$w_i \in \mathbb{R}_{>0}v_i + \langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle \quad \forall i$$

**Ergänzung 1.11.7 (Bezug zur Definition einer Bewegungsgruppe).** Ist  $V$  ein dreidimensionaler reeller Skalarproduktraum, so gibt es zu je zwei Tripeln bestehend aus einem Halbraum, einer Halbebene auf seinem Rand und einem Strahl auf deren Rand genau eine orthogonale Abbildung, die das eine Tripel in das andere überführt. Etwas präziser und in Formeln meinen wir hier Tripel von Teilmengen  $(H, E, A)$  von  $V$  derart, daß es linear unabhängige Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  gibt mit  $A = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1$  und  $E = \mathbb{R}_{\geq 0}v_2 + \mathbb{R}v_1$  und  $H = \mathbb{R}_{\geq 0}v_3 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_1$ . In der Tat sagt uns Gram-Schmid, daß jedes solche Tripel  $(H, E, A)$  durch genau eine Orthonormalbasis  $w_1, w_2, w_3$  beschrieben werden kann. Der letzte Vektor  $w_3$  wird dabei im übrigen durch die beiden anderen bereits bis auf ein Vorzeichen festgelegt, und Analoges gilt in beliebiger endlicher Dimension. Das zeigt den Bezug des Satzes von Gram-Schmid zu unserer Definition einer Bewegungsgruppe 1.6.8.

*Beweis.* Nach 1.3.17 können wir  $v_i$  eindeutig zerlegen als  $v_i = p_i + r_i$  mit  $p_i$  der orthogonalen Projektion von  $v_i$  auf  $\langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle$  und  $r_i$  im orthogonalen

Komplement dieses Teilraums. Wegen der linearen Unabhängigkeit der  $v_i$  gilt hier  $r_i \neq 0$ . Für die Vektoren  $w_i := r_i/\|r_i\|$  gilt dann  $w_j \in \langle v_j, \dots, v_1 \rangle$  und  $w_i \perp \langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle$  und damit  $\langle w_i, w_j \rangle = 0$  für  $i > j$ . Da andererseits auch gilt  $\langle w_i, w_i \rangle = 1$  nach Konstruktion, bilden sie in der Tat ein Orthonormalsystem, und unsere Konstruktion zeigt zusätzlich

$$w_i = v_i/\|r_i\| - p_i/\|r_i\| \in \mathbb{R}_{>0}v_i + \langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst  $w_j \in \langle v_j, \dots, v_1 \rangle$  und folgern mit Dimensionsbetrachtungen  $\langle w_j, \dots, w_1 \rangle = \langle v_j, \dots, v_1 \rangle$ . So folgt

$$\langle w_i \rangle = \langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle^\perp \cap \langle v_i, \dots, v_1 \rangle$$

Diese Bedingung legt  $w_i$  fest bis auf Multiplikation mit einem Skalar der Länge Eins. Es ist dann klar, daß  $w_i$  durch die zusätzliche Bedingung im Satz sogar eindeutig festgelegt wird.  $\square$

**1.11.8 (Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt).** In Worten läuft der Beweis wie folgt ab: Gegeben ist eine endliche angeordnete linear unabhängige Teilmenge unseres Skalarproduktraums. Wir beginnen mit dem ersten Vektor und normieren ihn auf Länge Eins. Dann nehmen wir uns den zweiten Vektor vor, machen ihn senkrecht zum ersten Vektor, indem wir seine orthogonale Projektion auf die vom ersten Vektor erzeugte Gerade von ihm abziehen, und normieren den so entstehenden Vektor wieder auf Länge Eins. Dann nehmen wir uns den dritten Vektor vor, machen ihn senkrecht zu den ersten beiden Vektoren, indem wir seine orthogonale Projektion auf die von den ersten beiden Vektoren erzeugte Ebene von ihm abziehen, und normieren den so entstehenden Vektor wieder auf Länge Eins. Und so machen wir immer weiter, bis wir alle Eingaben verarbeitet haben. Mit dem Normieren eines von Null verschiedenen Vektors ist dabei das Multiplizieren unseres Vektors mit dem Inversen seiner Länge gemeint. Wir schreiben das nun noch in Formeln mit den Notationen des vorhergehenden Satzes. Für unsere Basen gilt sicher  $\langle w_{i-1}, \dots, w_1 \rangle \subset \langle v_{i-1}, \dots, v_1 \rangle$  und Dimensionsvergleich liefert sogar die Gleichheit dieser Erzeugnisse. Nach der Formel für orthogonale Projektionen aus dem Beweis von 1.3.17 können wir also die  $w_i$  induktiv bestimmen durch die Formeln

$$\begin{aligned} r_1 &= v_1 \\ w_1 &= r_1/\|r_1\| \\ &\vdots \\ r_i &= v_i - \sum_{\nu=1}^{i-1} \langle w_\nu, v_i \rangle w_\nu \\ w_i &= r_i/\|r_i\| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das ist das **Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren** oder etwas ungewöhnlich aber genauer **Orthonormalisierungsverfahren**.

**Korollar 1.11.9 (Iwasawa-Zerlegung für  $GL(n; \mathbb{R})$ ).** *Bezeichne  $A \subset GL(n; \mathbb{R})$  die Menge aller Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen auf der Diagonale und  $N \subset GL(n; \mathbb{R})$  die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion*

$$O(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} GL(n; \mathbb{R})$$

*Ergänzung 1.11.10.* Eine Zerlegung einer Matrix  $M$  als Produkt  $M = QR$  mit  $Q$  orthogonal und  $R$  einer oberen Dreiecksmatrix gibt es auch für nicht notwendig invertierbare Matrizen. Sie wird als **QR-Zerlegung** bezeichnet, läßt sich nach Householder effektiv berechnen, und spielt eine wichtige Rolle in der Numerik.

*Beweis.* Sicher gilt  $A \cap N = \{I\}$ , folglich definiert die Multiplikation eine Injektion

$$A \times N \hookrightarrow GL(n; \mathbb{R})$$

Deren Bild  $AN$  ist eine Untergruppe, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen, und wegen  $O(n) \cap AN = \{I\}$  definiert die Multiplikation schon mal eine Injektion  $O(n) \times AN \hookrightarrow GL(n; \mathbb{R})$ . Es bleibt, deren Surjektivität zu zeigen. Dazu betrachten wir in  $\mathbb{R}^n$  die Standardbasis  $\mathcal{S}$ , eine beliebige angeordnete Basis  $\mathcal{B}$  und die im Gram-Schmidt-Verfahren daraus entstehende angeordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{A}$ . Unser Satz liefert für die zugehörige Basiswechselmatrix obere Dreiecksgestalt mit positiven Diagonaleinträgen, in Formeln

$${}_B[\text{id}]_{\mathcal{A}} \in AN$$

Aus der Identität  ${}_B[\text{id}]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{S}} = {}_B[\text{id}]_{\mathcal{S}}$  folgt dann die Surjektivität der Multiplikation  $AN \times O(n) \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ . Invertieren liefert den Rest.  $\square$

**Korollar 1.11.11 (Iwasawa-Zerlegung für  $GL(n; \mathbb{C})$ ).** *Bezeichne  $A \subset GL(n; \mathbb{C})$  die Menge aller Diagonalmatrizen mit reellen positiven Einträgen auf der Diagonale und  $N \subset GL(n; \mathbb{C})$  die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion*

$$U(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} GL(n; \mathbb{C})$$

*Beweis.* Der Beweis geht analog wie im reellen Fall 1.11.9.  $\square$

**Definition 1.11.12.** Eine Matrix  $M$  heißt **symmetrisch**, wenn sie mit ihrer eigenen Transponierten übereinstimmt, in Formeln  $M^T = M$ . Eine symmetrische Matrix  $M \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  heißt **positiv definit**, wenn gilt  $x^T M x \leq 0 \Rightarrow x = 0$ . Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt  $x^T M x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Korollar\* 1.11.13 (Cholesky-Zerlegung).** Gegeben eine positiv definite symmetrische Matrix  $M \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix  $L$  mit positiven Diagonaleinträgen und der Eigenschaft

$$M = LL^\top$$

1.11.14. Das  $L$  steht hier für englisch „lower triangular“.

*Beweis.* Wir betrachten auf dem  $\mathbb{R}^n$  das durch die Vorschrift  $s(x, y) := x^\top My$  erklärte Skalarprodukt  $s = s_M$ . Wenden wir nun das Gram-Schmidt-Verfahren in Bezug auf dieses neue Skalarprodukt an auf die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  des  $\mathbb{R}^n$ , so erhalten wir eine neue Basis  $w_1, \dots, w_n$  des  $\mathbb{R}^n$  mit  $w_i^\top Mw_j = \delta_{i,j}$  und  $w_i \in \mathbb{R}_{>0} e_i + \langle e_{i-1}, \dots, e_1 \rangle$ . Die Matrix  $N := (w_1 | \dots | w_n)$  mit den  $w_i$  in den Spalten ist also eine obere Dreiecksmatrix mit der Eigenschaft  $N^\top MN = I$ . Mit  $L = (N^\top)^{-1}$  ergibt sich dann die gesuchte Zerlegung. Deren Eindeutigkeit zeigt man, indem man den Beweis rückwärts liest.  $\square$

*Ergänzung 1.11.15.* Das Invertieren einer oberen Dreiecksmatrix  $N$  mit positiven Diagonaleinträgen ist im Prinzip unproblematisch. Bei der numerischen Berechnung der Cholesky-Zerlegung empfiehlt es sich jedoch, das Invertieren gleich mit dem Algorithmus des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens zu verschmelzen. Mehr dazu mögen Sie in der Numerik lernen.

## Übungen

*Übung 1.11.16.* Eine lineare Abbildung von komplexen Skalarprodukträumen ist unitär genau dann, wenn sie die Norm aller Vektoren erhält. Hinweis: Man beginne mit einer Variante der Polarisierungsidentität.

*Übung 1.11.17.* Man zeige: Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum  $V$  und darin eine lineare Hyperebene  $H \subset V$  gibt es genau eine orthogonale lineare Abbildung  $s : V \rightarrow V$  mit unserer Hyperebene als Fixpunktmenge, in Formeln  $H = V^s$ . Diese Abbildung  $s$  heißt die **orthogonale Spiegelung an der Hyperebene  $H$**  oder auch kürzer die **Spiegelung an  $H$** .

*Übung 1.11.18.* Man zeige, daß sich zwei Vektoren eines endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraums genau dann durch eine orthogonale Abbildung ineinander überführen lassen, wenn sie dieselbe Länge haben.

*Übung 1.11.19 (Zeichnen eines Würfels).* Man zeige: Zeichnet man einen massiven Würfel so, daß an einer Ecke alle drei angrenzenden Flächen zu sehen sind, so treffen sich auf dem Papier die drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten jeweils in einem **echt stumpfen Winkel**, also einem Winkel mit negativem geometrischen Cosinus. Zeichnet man also ein räumliches Koordinatensystem perspektivisch korrekt von einem Punkt des positiven Oktanten  $(\mathbb{R}_{>0})^3$  aus gesehen, so

müssen sich je zwei positive Koordinatenachsen in einem echt stumpfen Winkel treffen.

*Ergänzende Übung 1.11.20.* Jede orthogonale Selbstabbildung mit Determinante  $(-1)$  eines dreidimensionalen reellen Skalarproduktraums ist die Verknüpfung einer Drehung um eine Achse mit einer Spiegelung an der zu dieser Achse senkrechten Hyperebene.

*Ergänzende Übung 1.11.21.* Jede bezüglich Inklusion maximale kommutative Untergruppe der Drehgruppe  $SO(3)$  ist entweder die Gruppe aller Drehungen um eine Achse oder konjugiert zur Gruppe aller Diagonalmatrizen aus  $SO(3)$ .

*Übung 1.11.22.* Sei  $V$  ein reeller Skalarproduktraum. Man zeige:

1. Eine endliche Familie  $v_1, \dots, v_n$  von Vektoren von  $V$  ist orthonormal genau dann, wenn die zugehörige Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  orthogonal ist für das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .
2. Gegeben endliche angeordnete Basen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  von  $V$  mit  $\mathcal{A}$  orthonormal ist  $\mathcal{B}$  orthonormal genau dann, wenn die Basiswechselmatrix  ${}_{\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{A}}$  orthogonal ist. Hinweis: Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\text{id}} & V \\ \Phi_{\mathcal{B}} \uparrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{A}} \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{{}_{\mathcal{B}}[\text{id}]_{\mathcal{A}}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Man formuliere und zeige auch die analogen Aussagen im Komplexen.

*Übung 1.11.23.* Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums ist genau dann unitär, wenn er diagonalisierbar ist und wenn zusätzlich alle Eigenwerte den Betrag Eins haben.

*Ergänzende Übung 1.11.24.* Bezeichne  $R_{\varphi}^x \in SO(3)$  die Drehung um die  $x$ -Achse  $\mathbb{R}e_1$  mit dem Winkel mit Bogenmaß  $\varphi$ , in Formeln

$$R_{\varphi}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Bezeichne  $R_{\varphi}^z \in SO(3)$  die Drehung um die  $z$ -Achse  $\mathbb{R}e_3$  mit dem Winkel mit Bogenmaß  $\varphi$ , in Formeln

$$R_{\varphi}^z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man zeige: Jede Drehung  $U \in \mathrm{SO}(3)$  läßt sich darstellen als

$$U = R_\varphi^z R_\psi^x R_\vartheta^z$$

mit  $\psi \in [0, \pi]$  und  $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)$ , und unter der Voraussetzung  $e_3 \neq \pm U(e_3)$  ist diese Darstellung sogar eindeutig. Die fraglichen Winkel heißen dann die **Euler'schen Winkel** unserer Drehung  $U$ . Hinweis: Aus der Anschauung, deren Formalisierung Ihnen überlassen bleiben möge, finden wir  $\psi \in [0, \pi]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $R_\varphi^z R_\psi^x(e_3) = U(e_3)$ . Es folgt  $U^{-1} R_\varphi^z R_\psi^x = R_{-\vartheta}^z$  für geeignetes  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ .

*Ergänzende Übung 1.11.25 (Spingruppe und Quaternionen).* Wir erhalten einen Isomorphismus  $\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\sim} \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$  der Spingruppe mit der Gruppe der Quaternionen der Norm Eins, indem wir bemerken, daß bei unserer Konstruktion der Quaternionen im Beweis von [LA1] 5.6.3 beide Seiten dieselbe Untergruppe von  $\mathrm{Mat}(2; \mathbb{C})$  sind.

*Ergänzende Übung 1.11.26 (Spingruppe und Drehgruppe).* Sei  $\mathfrak{su}(2) := \{A \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^\top = 0, \operatorname{tr} A = 0\}$  der dreidimensionale reelle Vektorraum der schieferhermiteschen spurlosen  $(2 \times 2)$ -Matrizen. Man zeige: Die Vorschrift  $\langle A, B \rangle := -\operatorname{tr}(AB)$  liefert ein Skalarprodukt auf  $\mathfrak{su}(2)$  und wir erhalten einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\rho : \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(\mathfrak{su}(2))$  mit Kern  $\pm I$  durch die Vorschrift  $\rho(U) : A \mapsto UAU^{-1}$ . Insbesondere gibt es also einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

mit Kern  $\pm I$ . Hinweis: Um die Surjektivität zu zeigen, kann man den Satz 1.11.24 über die Eulerschen Winkel verwenden und zeigen, daß die von den drei Einbettungen  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$  mit  $i_{\mathbb{C}} \mapsto i, j, k$  nach 1.11.25 induzierten Einbettungen  $S^1 \hookrightarrow \mathrm{SU}(2)$  unter Nachschalten von  $\rho$  die Kreislinie surjektiv auf die Gruppen der Drehungen um drei paarweise orthogonale Achsen in  $\mathfrak{su}(2)$  abbilden. Ein konzeptionelles Argument wird in [ML] 1.5.2 ausgeführt.

*Übung 1.11.27.* Man zeige: Für jede komplexe quadratische Matrix  $A$  gibt es eine unitäre Matrix  $U$  derart, daß  $UAU^{-1}$  obere Dreiecksgestalt hat. Hinweis: Trigonalisierbarkeit und Gram-Schmidt.

*Ergänzende Übung 1.11.28.* Man zeige, daß die orthogonale Gruppe eines endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraums von Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt wird. Hinweis: Normalform 1.11.3.

*Ergänzende Übung 1.11.29 (Iwasawa-Zerlegung für  $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ ).* Bezeichne  $A \subset \mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$  die Menge aller Diagonalmatrizen mit reellen positiven Einträgen auf der Diagonale und  $N \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$  die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. So liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$\mathrm{SU}(n) \times A \times N \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$$



Hinweis: Man gehe vom Fall 1.11.11 der  $GL(n; \mathbb{C})$  aus.

*Übung 1.11.30.* Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix  $A$  mit Einträgen in einem angeordneten Körper haben  $A$  und  $A^\top A$  denselben Rang.

*Übung 1.11.31 (Ausgleichsrechnung).* Gegeben  $A \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$  und  $b \in \mathbb{R}^m$  nimmt die Funktion  $x \mapsto \|Ax - b\|$  genau an denjenigen Stellen  $x \in \mathbb{R}^n$  ihr Minimum an, für die gilt  $A^\top Ax = A^\top b$ . Hinweis: Nach 1.11.30 ist letztere Gleichung stets lösbar. Man prüfe nun für beliebige  $x, b, h$  die Identität

$$\|A(x + h) - b\|^2 - \|Ax - b\|^2 = \|Ah\|^2 + 2h^\top (A^\top Ax - A^\top b)$$

In typischen Anwendungen ist  $Ax = b$  ein überbestimmtes und deshalb unlösbares Gleichungssystem, etwa mit einer Proportionalitätskonstanten  $x$  als einziger Variablen, die man aus einer durch Meßfehler gestörten Meßreihe bestimmen will. Hat  $A$  den Rang  $n$ , so ist unser Minimum  $x$  sogar eindeutig bestimmt, wie man obiger Identität auch leicht ansieht. Etwas allgemeiner könnten wir für Meßwerte  $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$  Koeffizienten  $x_1, x_2$  so suchen, daß  $a \mapsto x_1 + x_2 a$  unsere Meßreihe  $a_i \mapsto b_i$  möglichst gut beschreibt. Hier ist zu beachten, daß wir statt  $x \mapsto ax + b$  wie üblich die Buchstaben ganz anders verwenden.

## 1.12 Selbstadjungierte Endomorphismen

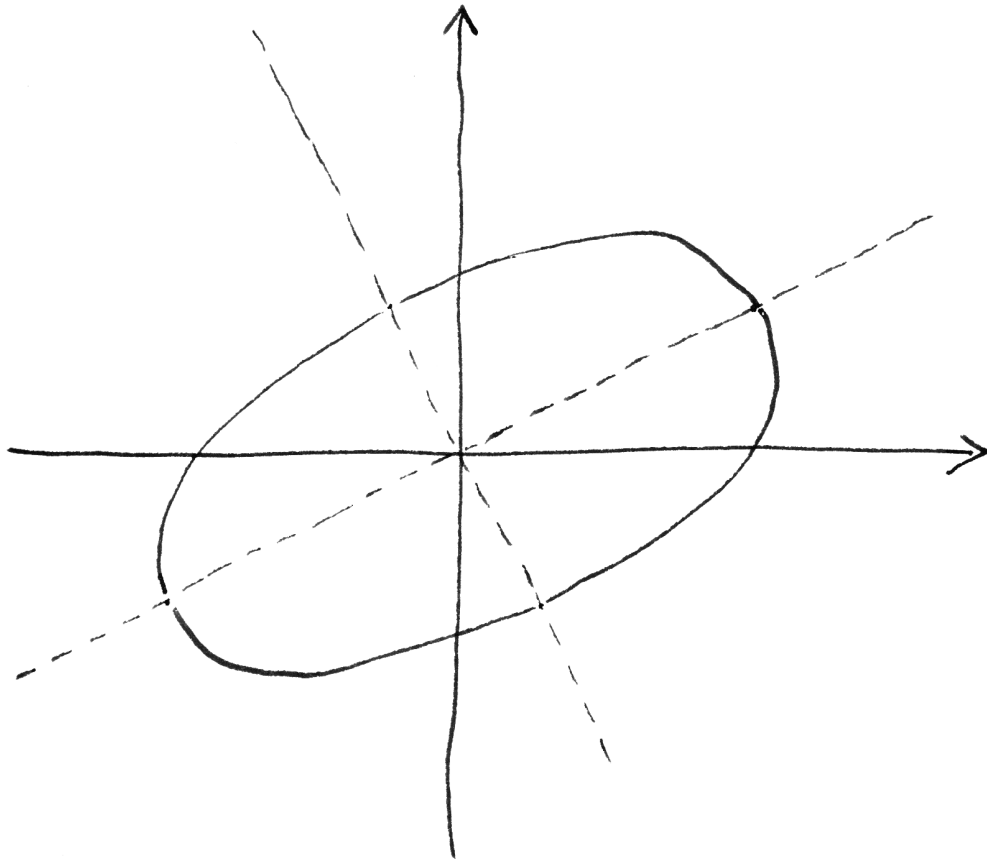
**Satz 1.12.1 (Hauptachsentransformation).** Gegeben eine quadratische Form auf dem  $\mathbb{R}^n$  alias eine Funktion  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Gestalt  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j$  gibt es stets eine Drehung  $U \in SO(n)$  und Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit

$$(q \circ U)(y_1, \dots, y_n)^\top = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Des weiteren ist die Multimenge  ${}_\mu\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  durch  $q$  bereits eindeutig bestimmt.

1.12.2. Dieser Satz wird sich als ein einfaches Korollar des Spektralsatzes erweisen und soll der Motivation dienen. Wir geben den Beweis im Anschluß an 1.12.20. In 2.2.7 diskutieren wir Hauptachsentransformationen noch ausführlicher.

1.12.3 (Anschauung für Hauptachsentransformationen). Man kann sich die Bedeutung dieses Satzes auf zwei Weisen veranschaulichen: Entweder „aktiv“ in dem Sinne, daß der Graph unserer Funktion  $q$  unter der Drehung  $U^{-1}$  oder präziser der Abbildung  $U^{-1} \times \text{id}$  in den Graphen unserer Linearkombination von Quadraten übergeht; Oder „passiv“ in dem Sinne, daß unsere Funktion beim Einführen neuer Koordinaten mit Koordinatenachsen in Richtung der Spaltenvektoren von  $U$  in den neuen Koordinaten ausgedrückt die fragliche Form annimmt, in Formeln  $q(y_1 \vec{v}_1 + \dots + y_n \vec{v}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  für  $\vec{v}_i$  die Spalten von  $U$ , also für



Dieses Bild zeigt die Ellipse, auf der die positiv definite quadratische Form  $17x^2 - 12xy + 8y^2$  bei einer geeigneten Wahl des Maßstabs den Wert Eins annimmt. Gestrichelt sind die Hauptachsen eingetragen, die in diesem Fall die Richtungsvektoren  $(2, 1)$  und  $(-1, 2)$  haben.

$U = (\vec{v}_1 | \dots | \vec{v}_n)$  und folglich  $U(y_1, \dots, y_n)^\top = y_1 \vec{v}_1 + \dots + y_n \vec{v}_n$ . Die Menge der von den Spalten der Matrix  $U$  erzeugten Geraden heißen dann ein System von **Hauptachsen** für unsere quadratische Form  $q$ . Die Multimenge der  $\lambda_i$  nennen wir die Multimenge der **Eigenwerte** unserer quadratischen Form.

**Beispiel 1.12.4 (Transformation einer Hyperbel auf ihre Hauptachsen).** Die Identität  $xy = (1/4)((x+y)^2 - (x-y)^2)$  zeigt, daß im Fall der quadratischen Form  $q(x, y) = xy$  die Hauptachsen gerade die Diagonale die Nebendiagonale sind, also die Ursprungsgeraden mit den Gleichungen  $x = \pm y$ . Mögliche Drehungen  $U$ , die unsere Form auf ihre Hauptachsen transformieren, sind also die Drehungen um die Winkel  $45^\circ + n \cdot 90^\circ$  mit  $n = 0, 1, 2, 3$ . Eine Matrix für eine derartige Drehung ist

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix}$$

Schreiben wir genauer  $x = x_1$  und  $y = x_2$ , so nimmt unsere Form die Gestalt  $q(x_1, x_2) = x_1 x_2$  an und für den Koordinatenwechsel  $(x_1, x_2)^\top = U(y_1, y_2)^\top$  alias  $x_1 = 2^{-1/2}y_1 - 2^{-1/2}y_2$  und  $x_2 = 2^{-1/2}y_1 + 2^{-1/2}y_2$  oder gleichbedeutend  $U^{-1}(x_1, x_2)^\top = (y_1, y_2)^\top$  alias  $y_1 = 2^{-1/2}x_1 + 2^{-1/2}x_2$  und  $y_2 = 2^{-1/2}x_1 - 2^{-1/2}x_2$  ergibt sich

$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$$

**Definition 1.12.5.** Gegeben Skalarprodukträume  $V, W$  heißen lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow W$  und  $g : W \rightarrow V$  zueinander **adjungiert**, wenn gilt

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

1.12.6. Ich kann für das Konzept adjungierter Abbildungen leider keinerlei Anschauung anbieten. Die adjungierte Abbildung darf nicht mit der adjungierten oder besser adjunkten Matrix aus [LA1] 6.4.6 verwechselt werden, mit der sie außer der Bezeichnung rein gar nichts zu tun hat.

1.12.7 (**Eindeutigkeit von Adjungierten**). Jede lineare Abbildung  $f$  zwischen Skalarprodukträumen hat höchstens eine Adjungierte: Sind nämlich  $g, h$  beide adjungiert zu  $f$ , so folgt  $\langle v, g(w) - h(w) \rangle = 0 \quad \forall v, w$  und insbesondere für  $v = g(w) - h(w)$  und damit  $g(w) = h(w) \quad \forall w$ .

1.12.8 (**Adjungierte in Koordinaten**). Versehen wir  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  jeweils mit dem Standardskalarprodukt, so wird für  $A \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$  die adjungierte Abbildung zu  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben durch die transponierte Matrix als  $A^\top : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ebenso wird im Komplexen die adjungierte Abbildung zu  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  gegeben durch  $\bar{A}^\top : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ . In der Tat finden wir mühelos

$$\langle Ax, y \rangle = (\overline{Ax})^\top y = \bar{x}^\top \bar{A}^\top y = \langle x, \bar{A}^\top y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$$

1.12.9 (**Existenz von Adjungierten im endlichdimensionalen Fall**). Wir folgern aus der Klassifikation endlichdimensionaler Skalarprodukträume 1.4.8 mithilfe der vorhergehenden Bemerkung, daß jede lineare Abbildung von endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarprodukträumen genau eine Adjungierte besitzt.

1.12.10 (**Eine Abbildung ohne Adjungierte im Unendlichdimensionalen**). Wir betrachten den freien  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = W$  über  $\mathbb{N}$  mit der Basis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und dem Skalarprodukt, für das diese Basis ein Orthonormalsystem ist. Die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mit  $e_n \mapsto (e_1 + \dots + e_n)$  besitzt keine Adjungierte, denn diese müßte  $e_1$  auf einen Vektor  $v \in V$  werfen mit  $\langle v, e_n \rangle = 1$  für alle  $n$ , und solch einen Vektor gibt es nicht.

**Definition 1.12.11.** Ein Endomorphismus eines reellen oder komplexen Skalarproduktraums heißt **selbstadjungiert**, wenn er zu sich selbst adjungiert ist.

1.12.12 (**Anschauung für selbstadjungierte Endomorphismen**). Die „schiefadjungierten“ alias zu ihrem Negativen adjungierten Endomorphismen eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums  $V$  mag man sich als die Richtungsvektoren des „Tangentialraums im neutralen Element an die Gruppe der unitären Automorphismen“ vorstellen. Ist in der Tat  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(V)$  eine differenzierbare Abbildung mit  $\gamma(0) = \text{id}$  und  $\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle  $v, w \in V$  und alle Zeiten  $t$ , so folgt

$$\langle \gamma'(0)v, w \rangle + \langle v, \gamma'(0)w \rangle = 0$$

für alle  $v, w \in V$  alias  $\gamma'(0)$  schiefadjungiert. Ist umgekehrt  $A$  schiefadjungiert, gilt also für die darstellende Matrix  $A$  bezüglich einer Orthonormalbasis  $A + \bar{A}^\top = 0$ , so ist  $\gamma : t \mapsto \exp(tA)$  ein Weg mit

$$\gamma(t)\overline{\gamma(t)}^\top = \exp(tA)\overline{\exp(tA)}^\top = \exp(tA + t\bar{A}^\top) = \exp(0) = I$$

für alle  $t$ , der mithin ganz in der unitären Gruppe verläuft. Das gibt hoffentlich eine gewisse Vorstellung für schiefadjungierte Endomorphismen und macht anschaulich klar, daß sie mit einem vorgegebenen Teilraum auch dessen orthogonales Komplement stabilisieren. Selbstadjungierte Endomorphismen sind dann die  $i$ -fachen der schiefadjungierten Endomorphismen, und mehr als die so vererbte Anschauung kann ich für diese Bedingung auch nicht anbieten. Geometrisch aber liefert der Spektralsatz oder besser sein Korollar 1.12.38 eine sehr explizite Beschreibung: Die selbstadjungierten Endomorphismen eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums sind genau diejenigen Endomorphismen, die in einer geeigneten Orthogonalbasis durch eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen dargestellt werden.

**1.12.13 (Symmetrisch beziehungsweise hermitesch heißt selbstadjungiert).** Eine reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  beschreibt eine selbstadjungierte Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in Bezug auf das Standard-Skalarprodukt genau dann, wenn sie symmetrisch ist, in Formeln  $A = A^\top$ . Das folgt sofort aus 1.12.7. Eine komplexe  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  beschreibt ähnlich eine selbstadjungierte Abbildung  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  in Bezug auf das Standard-Skalarprodukt genau dann, wenn sie die Identität  $A = \bar{A}^\top$  erfüllt. Solche Matrizen heißen auch **hermitesch**.

**Lemma 1.12.14 (Selbstadjungierte Abbildungen in Orthonormalbasen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. So sind gleichbedeutend:

1. Die Abbildung  $f$  ist selbstadjungiert;
2. Es gibt eine angeordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  derart, daß die Matrix  ${}_B[f]_B$  hermitesch ist;
3. Für jede angeordnete Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  ist die Matrix  ${}_B[f]_B$  hermitesch.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (3): Die Einträge  $a_{ji}$  unserer Matrix sind definiert durch die Vorschrift  $f(v_i) = \sum_j a_{ji} v_j$ . Im Fall einer Orthonormalbasis folgt  $a_{ji} = \langle v_j, f(v_i) \rangle$ . Ist dann  $f$  selbstadjungiert, so folgt

$$a_{ji} = \langle v_j, f(v_i) \rangle = \langle f(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, f(v_j) \rangle} = \overline{a_{ij}}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) bietet keine Schwierigkeiten. Um (2) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen bemerken wir, daß die Identität  $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$  für alle  $v, w$  folgt, sobald wir sie für alle  $v, w$  aus einer festen Basis  $\mathcal{B}$ , ja aus einem beliebigen Erzeugendensystem zeigen können. Das aber folgt dann aus der Hermitizität der Matrix von  $f$  mit der Rechnung, die wir bereits durchgeführt haben.  $\square$

**Satz 1.12.15 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen).** Für jeden selbstadjungierten Endomorphismus eines reellen oder komplexen endlichdimensionalen Skalarproduktraums besitzt unser Vektorraum eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, und auch im komplexen Fall sind alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Endomorphismus reell.

1.12.16. Einen noch allgemeineren Spektralsatz für „normale“ Endomorphismen dürfen Sie später als Übung 3.2.19 selbst beweisen. Er enthält sowohl den Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen als auch den Spektralsatz für unitäre Endomorphismen als Spezialfälle.

*Erster Beweis.* Sei  $V$  unser Skalarproduktraum und  $f : V \rightarrow V$  selbstadjungiert. Gegeben  $0 \neq v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $f(v) = \lambda v$  folgern wir von der Mitte ausgehend die Gleichungskette

$$\bar{\lambda}\langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle = \langle v, f(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

und daraus folgt bereits  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Weiter ist das orthogonale Komplement  $v^\perp$  eines Eigenvektors  $v$  stabil unter  $f$ , denn aus  $\langle v, w \rangle = 0$  folgt  $\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle = \bar{\lambda}\langle v, w \rangle = 0$ . Bis hierher brauchen wir noch nicht einmal  $V$  als endlichdimensional voraussetzen. Nun können wir den Beweis im Komplexen mit Induktion beenden: Im Fall  $V = 0$  ist der Satz klar. Sonst finden wir einen Eigenvektor  $v_1$  von  $f$ , den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Dann wenden wir auf die auf seinem orthogonalen Komplement induzierte Abbildung  $f : v_1^\perp \rightarrow v_1^\perp$  die Induktionsvoraussetzung an und finden darin eine Orthonormalbasis  $v_2, \dots, v_n$  aus Eigenvektoren von  $f$ . Damit ist  $v_1, \dots, v_n$  die gesuchte Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$  und der komplexe Fall ist erledigt. Im reellen Fall überlegen wir uns zunächst, daß die darstellende Matrix von  $f$  in Bezug auf eine Orthonormalbasis von  $V$  symmetrisch sein muß. Diese Matrix hat im Fall  $\dim_{\mathbb{R}} V > 0$ , wenn sie also nicht die  $(0 \times 0)$ -Matrix ist, mindestens einen komplexen Eigenwert, und da sie auch einen selbstadjungierten Endomorphismus eines komplexen Vektorraums darstellt, muß dieser Eigenwert nach unseren Überlegungen zu Beginn des Beweises sogar reell sein. Zu diesem Eigenwert finden wir dann wieder einen Eigenvektor aus  $V$ , und der Beweis läuft von da an wie im komplexen Fall.  $\square$

*Zweiter Beweis im Reellen.* Man betrachte auf  $V \setminus 0$  die zu  $f$  gehörige quadratische Form  $q(v) := \langle f(v), v \rangle$  und die zum Skalarprodukt gehörige quadratische Form  $n(v) := \langle v, v \rangle = \|v\|^2$  und deren Quotienten

$$v \mapsto R(v) := \frac{q(v)}{n(v)}$$

Sie heißt der **Raleigh-Quotient**, deshalb der Buchstabe  $R$ . Schränken wir diese Funktion ein auf die Einheitssphäre  $\{v \mid \|v\| = 1\}$ , so nimmt sie dort nach Heine-Borel [AN1] 7.1.10 und [AN1] 7.1.13 ihr Maximum an, etwa an einer Stelle  $v_+$ . Da unsere Funktion konstant ist auf jeder Geraden durch den Nullpunkt, muß sie an derselben Stelle auch als Funktion  $V \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Maximum annehmen. Wir betrachten nun für  $w \in V$  die für hinreichend kleines  $t \in \mathbb{R}$  wohldefinierte Funktion  $t \mapsto R(v_+ + tw)$ , ausgeschrieben

$$R(v_+ + tw) = \frac{q(v_+ + tw)}{n(v_+ + tw)} = \frac{\langle f(v_+ + tw), v_+ + tw \rangle}{\langle v_+ + tw, v_+ + tw \rangle}$$

Sie ist offensichtlich differenzierbar, folglich muß ihre Ableitung bei  $t = 0$  verschwinden. Dann verschwindet also, wenn wir diese Ableitung mithilfe der Quotientenregel berechnen, auch der Zähler, und wir folgern

$$(\langle f(w), v_+ \rangle + \langle f(v_+), w \rangle) \langle v_+, v_+ \rangle - 2 \langle f(v_+), v_+ \rangle \langle v_+, w \rangle = 0$$

für alle  $w \in V$ . Mithilfe der Selbstadjungiertheit von  $f$  folgern wir insbesondere

$$w \perp v_+ \Rightarrow w \perp f(v_+)$$

Das liefert offensichtlich  $f(v_+) \in \mathbb{R}v_+$  und wir haben einen Eigenvektor gefunden. Der Rest des Arguments läuft von da an wie beim ersten Beweis.  $\square$

**1.12.17 (Vergleich beider Beweise).** Der zweite Beweis vermeidet zwar den Fundamentalsatz der Algebra, benutzt jedoch einen wesentlichen Teil derjenigen Resultate aus der reellen Analysis, aus denen wir in [AN1] 7.2.1 auch den Fundamentalsatz der Algebra herleiten. Anschaulich scheint mir die im zweiten Beweis versteckte Erkenntnis recht klar: Durch den Punkt der Ellipse  $\{v \mid \langle f(v), v \rangle = 1\}$ , der am nächsten am Ursprung liegt, geht in der Tat eine Hauptachse. Dasselbe gilt natürlich für den Punkt, der dem Ursprung am fernsten liegt, als da heißt, der kleinstmögliche Wert des Raleigh-Quotienten ist auch ein Eigenwert und jede Stelle, an der er angenommen wird, ist ein Eigenvektor unseres selbstadjungierten Operators zu diesem Eigenwert.

**Korollar 1.12.18 (Spektralsatz für hermitesche Matrizen).** *Für jede hermitesche Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  gibt es eine unitäre Matrix mit Determinante Eins  $U \in \text{SU}(n)$  derart, daß  $\bar{U}^\top AU = U^{-1}AU$  diagonal ist mit reellen Einträgen.*

1.12.19. Die Gleichung  $U^\top AU = U^{-1}AU$  folgt aus unserer Identität  $\bar{U}^\top = U^{-1}$ , die ja für jede unitäre Matrix  $U$  gilt.

*Beweis.* Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen 1.12.15 finden wir eine Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  zu reellen Eigenwerten. Die Matrix  $U := (v_1 \mid \dots \mid v_n)$  ist also unitär mit  $AU = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  für  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Indem wir notfalls noch eine Spalte einer komplexen Zahl vom Betrag Eins multiplizieren, können wir sogar um  $\det U = 1$  erreichen.  $\square$

**Korollar 1.12.20 (Spektralsatz für reelle symmetrische Matrizen).** *Gegeben eine symmetrische Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  gibt es stets eine orthogonale Matrix mit Determinante Eins  $U \in \text{SO}(n)$  derart, daß  $U^\top AU = U^{-1}AU$  diagonal ist.*

*Beweis.* Wie im komplexen Fall in 1.12.18.  $\square$

*Beweis des Satzes über Hauptachsentransformationen 1.12.1.* Für unsere quadratische Form  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j$  finden wir eine symmetrische Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  mit

$$q(x) = x^\top A x$$

für den Spaltenvektor  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ , indem wir als diagonale Matrixeinträge  $a_{ii} = c_{ii}$  nehmen und außerhalb der Diagonalen  $a_{ij} = a_{ji} = c_{ij}/2$  setzen. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen 1.12.20 gibt es dann eine Drehung  $U \in \text{SO}(n)$  mit  $U^{-1}AU = U^\top AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  für geeignete  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , nämlich für die Eigenwerte von  $A$  mit ihren Vielfachheiten. Es folgt

$$q(Uy) = y^\top U^\top AU y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

In 2.2.7 gebe ich noch einen zweiten Beweis, der ohne Koordinaten auskommt und mir dadurch transparenter scheint.  $\square$

**Definition 1.12.21.** Eine hermitesche Matrix  $P \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  heißt **positiv definit**, wenn gilt  $x \neq 0 \Rightarrow \bar{x}^\top P x > 0$ . Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt  $\bar{x}^\top P x \geq 0 \forall x \in \mathbb{C}^n$ .

*Beispiel 1.12.22.* Gegeben eine beliebige Matrix  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$  ist  $\bar{A}^\top A$  stets positiv semidefinit, denn es gilt  $\bar{x}^\top \bar{A}^\top A x = \overline{Ax}^\top Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{C}^n$ . Gegeben eine invertierbare Matrix  $A \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$  zeigt dasselbe Argument, daß  $\bar{A}^\top A$  positiv definit ist.

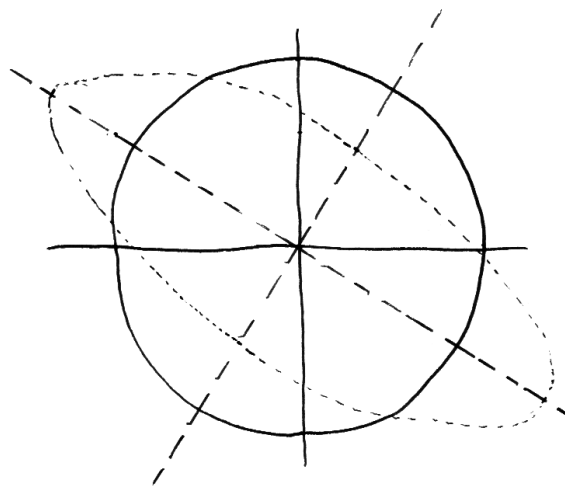
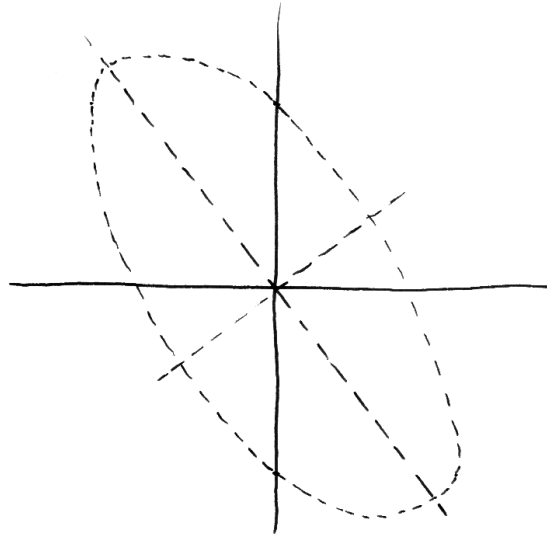
**Satz 1.12.23 (Polarzerlegung von Automorphismen).** Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Jede Matrix  $A \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt  $A = UP$  mit  $U \in \text{O}(n)$  orthogonal und  $P$  symmetrisch positiv definit;
2. Jede Matrix  $A \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt  $A = UP$  mit  $U \in \text{U}(n)$  unitär und  $P$  hermitesch positiv definit.

1.12.24. Offensichtlich bilden die Determinanten der Polarzerlegung einer invertierbaren Matrix die Polarzerlegung ihrer Determinante. So erhalten wir Polarzerlegungen in  $\text{SL}(n; \mathbb{R})$  und  $\text{SL}(n; \mathbb{C})$ . In dieser und noch größerer Allgemeinheit heißt sie oft **Cartan-Zerlegung**. Ich will jedoch lieber auch ganz allgemein von der Polarzerlegung reden, da diese Terminologie so viel Anschauung transportiert.

*Beispiele 1.12.25.* Im Fall  $\text{GL}(1; \mathbb{R})$  ist das die Zerlegung  $a = (a/|a|) \cdot |a|$  einer von Null verschiedenen reellen Zahl als das Produkt von einem Vorzeichen mit einer positiven reellen Zahl. Im Fall  $\text{GL}(1; \mathbb{C})$  ist es die Zerlegung  $a = (a/|a|) \cdot |a|$  einer von Null verschiedenen komplexen Zahl als das Produkt von einer komplexen Zahl auf dem Einheitskreis mit einer positiven reellen Zahl. Dieser Fall hat





Die Polarzerlegung der Scherung  $(x, y) \mapsto (x, y - x)$  stellt diese Abbildung dar als Verknüpfung einer Streckung beziehungsweise Stauchung längs orthogonaler Achsen mit einer Drehung. Im unteren Bild sieht man durchgezogen den Einheitskreis, und gestrichelt sein Bild unter dem selbstadjungiertem Faktor der Verscherung nebst den Hauptachsen, längs derer der Einheitskreis dabei gestreckt beziehungsweise gestaucht wird. Im oberen Bild sieht man dann den verscherten Einheitskreis alias die mit dem orthogonalen Faktor der Verscherung verdrehte Ellipse aus dem unteren Bild. Auch noch gestrichelt eingezeichnet sind die Hauptachsen dieser Ellipse.

wohl auch unserer Zerlegung ihren Namen gegeben. Im Fall  $GL(3; \mathbb{R})$  beschreibt  $A$  eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Nimmt man die Abbildung  $A$  als orientierungserhaltend an, so mag man sich ihre Polarzerlegung dahingehend denken, daß sich unsere Abbildung in eindeutiger Weise darstellen läßt als Verknüpfung einer Abbildung, die entlang geeigneter paarweise orthogonaler Koordinatenachsen dehnt oder staucht, mit einer Abbildung, die dreht. Wenden wir etwa  $A$  auf den mit Schaumgummi oder was auch immer gefüllt gedachten Raum an, so ist allein der positiv definite Faktor  $P$  für die Materialspannungen verantwortlich: Eine Kugel unseres Materials wird bei Anwenden von  $A$  „erst mit  $P$  zu einem Ellipsoid verzerrt und dann noch mit  $U$  gedreht“.

*Beweis.* Wir zeigen das im reellen Fall, im Komplexen muß man nur von jeder transponierten Matrix zusätzlich noch die komplex Konjugierte nehmen. Wir beginnen mit dem Nachweis der Eindeutigkeit. Gegeben eine Zerlegung  $A = UP$  wie oben haben wir sicher  $A^\top A = P^\top U^\top UP = P^\top P = P^2$ . Jede Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $P$  ist also auch eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $A^\top A$  und  $P$  muß die Matrix sein, die auf Eigenvektoren von  $A^\top A$  zum Eigenwert  $\lambda$  jeweils operiert durch den Skalar  $\sqrt{\lambda}$ . Das zeigt die Eindeutigkeit unserer Zerlegung. Andererseits folgt aus  $A^\top Av = \lambda v$  sofort  $v^\top A^\top Av = \lambda \|v\|^2 = \|Av\|^2$  und somit  $\lambda > 0$ . Wir können also  $P$  symmetrisch und positiv definit finden mit  $P^2 = A^\top A$ . Für  $U = AP^{-1}$  folgt dann  $U^\top U = P^{-1}A^\top AP^{-1} = I$  und folglich ist  $U$  orthogonal.  $\square$

1.12.26. Jetzt diskutieren wir dasselbe nocheinmal koordinatenfrei und in etwas größerer Allgemeinheit.

**Definition 1.12.27.** Ein selbstadjungierter Endomorphismus  $P$  eines Skalarproduktraums  $V$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt **positiv definit**, wenn gilt  $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, Px \rangle > 0$ . Er heißt **positiv semidefinit**, wenn gilt  $\langle x, Px \rangle \geq 0 \forall x \in V$ .

1.12.28. Im endlichdimensionalen Fall ist das gleichbedeutend dazu, daß alle Eigenwerte positiv beziehungsweise nichtnegativ sind. Die Begriffsbildung ist aber auch im Fall unendlichdimensionaler Räume relevant.

**Definition 1.12.29.** Unter einer **partiellen Isometrie** von Skalarprodukträumen versteht man eine lineare Abbildung, deren Restriktion auf den Orthogonalraum ihres Kerns isometrisch ist.

**Satz\* 1.12.30 (Polar-Zerlegung von Endomorphismen).** Jeder Endomorphismus  $A$  eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums  $V$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt  $A = UP$  mit  $P$  selbstadjungiert positiv semidefinit und  $U$  einer partiellen Isometrie derart, daß gilt  $(\ker U)^\perp = \text{im } P$ .

1.12.31. Dieser Satz gilt sowohl für komplexe als auch für reelle Vektorräume. Er verallgemeinert unseren Satz 1.12.23 über die Polarzerlegung von Automorphismen. Natürlich gibt es für diesen Satz auch eine Fassung für Matrizen und für den vorhergehenden Satz 1.12.23 auch eine Fassung für Automorphismen abstrakter endlichdimensionaler Skalarprodukträume. In [AN3] 4.5.15 zeigen wir sogar eine Fassung im unendlichdimensionalen Fall, genauer für sogenannte „beschränkte Operatoren auf Hilberträumen“. Eine Verallgemeinerung in eine wieder andere Richtung ist die sogenannte „Singularwertzerlegung“ 2.3.29, für die ich jedoch kein so schönes Eindeutigkeitskriterium kenne.

*Beweis.* Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Gegeben eine derartige Zerlegung  $A = UP$  können wir sicher auch eine orthogonale Abbildung  $M$  finden mit  $A = MP$ . Es folgt  $\bar{A}^\top A = P^2$  und folglich ist  $P$  eindeutig bestimmt als die einzige positiv semidefinite selbstadjungierte Abbildung  $P$  mit  $P^2 = \bar{A}^\top A$ . Dann ist auch  $U$  eindeutig festgelegt auf dem Bild  $(\text{im } P)$ , und unsere letzte Bedingung impliziert  $U = 0$  auf  $(\text{im } P)^\perp$  und legt damit auch  $U$  eindeutig fest. Um die Existenz zu zeigen, gehen wir diese Argumentation rückwärts durch. Das Argument des vorhergehenden Beweises zeigt, daß es ein selbstadjungiertes positiv semidefinites  $P$  gibt mit  $P^2 = \bar{A}^\top A$ . Wegen  $\langle Av, Av \rangle = \langle v, \bar{A}^\top Av \rangle = \langle v, P^2 v \rangle = \langle Pv, Pv \rangle$  gilt  $\ker A = \ker P$ . Das ist aber auch das orthogonale Komplement des Bildes  $U := \text{im } P$ . Bezeichnet also  $Q : V \twoheadrightarrow U$  die orthogonale Projektion auf  $U$  und  $J : U \hookrightarrow V$  die Einbettung, so haben wir mithin  $A = AJQ$ . Nun induziert  $P$  einen Isomorphismus  $P_U : U \xrightarrow{\sim} U$  und wir können die Komposition  $C = AJP_U^{-1} : U \rightarrow V$  betrachten. Dann gilt einerseits  $CQP = CP_UQ = AJQ = A$  und andererseits ist  $C$  isometrisch. Dann ist  $U = CQ$  eine partielle Isometrie mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Ergänzung 1.12.32 (Existenz von Adjungierten, koordinatenfrei).** Lineare Abbildungen  $f, g$  zwischen komplexen Skalarprodukträumen sind in anderen Formeln ausgedrückt genau dann zueinander adjungiert, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{can}_V} & V^\top \\ f \downarrow & & \downarrow g^\top \\ W & \xrightarrow{\text{can}_W} & W^\top \end{array}$$

kommutiert, mit  $g^\top : V^\top \rightarrow W^\top$  der „transponierten“ alias „dualen“ Abbildung zu  $g : W \rightarrow V$  und  $\text{can}_V : V \rightarrow V^\top$  der Abbildung  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  und  $\text{can}_W$  analog definiert. Diese „kanonischen“ Abbildungen  $\text{can}$  landen zwar wie behauptet im Dualraum, da unsere Skalarprodukte linear sind im zweiten Eintrag, sie sind jedoch selbst nur im reellen Fall linear und im komplexen Fall vielmehr schieflinear im Sinne von 1.3.6. Man überzeugt sich dennoch leicht, daß diese kanonischen Abbildungen im endlichdimensionalen Fall Bijektionen sein müssen,

und da die Verknüpfung einer linearen und einer schieflinearen Abbildung schieflinear ist und die Verknüpfung von zwei schieflinearen Abbildung linear, liefert das einen alternativen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung im endlichdimensionalen Fall. Noch bequemer wird die Argumentation, wenn man wie im nächsten Abschnitt den komplex konjugierten Vektorraum einführt.

*Ergänzung 1.12.33.* Zu jedem komplexen Vektorraum  $V$  bilden wir den **komplex konjugierten Vektorraum**  $\bar{V}$ , indem wir die additive Gruppe von  $V$  nehmen, die Operation von  $a \in \mathbb{C}$  auf  $v \in V$  jedoch abändern zu einer Operation  $a \cdot v$ , die mit der ursprünglichen Operation  $av$  verknüpft ist durch die Formel  $a \cdot v = \bar{a}v$  alias  $\bar{a} \cdot v = av$ . Es ist in diesem Zusammenhang praktisch, für jedes Element  $v \in V$  dasselbe Element in seiner Eigenschaft als Element des komplex konjugierten Vektorraums  $\bar{v} \in \bar{V}$  zu notieren, so daß wir unseren Punkt für die neue Operation der Skalare gleich wieder weglassen können und unsere zweite Formel besonders suggestiv in der Form

$$\bar{a}\bar{v} = \overline{av}$$

geschrieben werden kann. Für jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von komplexen Vektorräumen ist dieselbe Abbildung auch eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\bar{V} \rightarrow \bar{W}$  der komplex konjugierten Räume. Wir bezeichnen diese Abbildung dennoch mit einem neuen Symbol  $\bar{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{W}$  und nennen sie die **konjugierte Abbildung**. Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  angeordnete Basen von  $V$  und  $W$ , so hat die konjugierte Abbildung die konjugierte Matrix, in Formeln

$$\bar{\mathcal{B}}[\bar{f}]_{\bar{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}}}$$

Hier kriegen die Basen wie die einzelnen Vektoren einen Querstrich, um daran zu erinnern, daß sie im konjugierten Vektorraum zu verstehen sind. Eine koordinatenfreie Konstruktion der adjungierten Abbildung erhält man nun wie folgt: Jedes Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  liefert eine injektive  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{can} : \bar{V} & \hookrightarrow & V^\top \\ \bar{v} & \mapsto & \langle v, \cdot \rangle \end{array}$$

des konjugierten Raums zu  $V$  in den Dualraum von  $V$ . Lineare Abbildungen  $f, g$  zwischen komplexen Skalarprodukträumen sind in diesem Formalismus adjungiert genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{V} & \xrightarrow{\text{can}} & V^\top \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow g^\top \\ \bar{W} & \xrightarrow{\text{can}} & W^\top \end{array}$$

kommutiert, mit  $g^\top : V^\top \rightarrow W^\top$  der „transponierten“ alias „dualen“ Abbildung zu  $g : W \rightarrow V$ . Im endlichdimensionalen Fall sind unsere kanonischen Abbildungen in den Horizontalen jedoch nach Dimensionsvergleich Isomorphismen. In diesem Fall liefert also das obige kommutative Diagramm auch einen alternativen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit adjungierter Abbildungen.

## Übungen

**Übung 1.12.34 (Inhomogene reelle quadratische Formen).** Gegeben eine Polynomfunktion vom Grad höchstens Zwei mit reellen Koeffizienten alias eine Abbildung  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Gestalt

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + a$$

gibt es eine Isometrie  $B : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  mit

$$(q \circ B)(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \mu y_n + \nu$$

für geeignetes  $k$  und geeignete reelle  $\lambda_i \neq 0$  und  $\mu \geq 0$  und ( $k = n \Rightarrow \mu = 0$ ) und ( $\mu > 0 \Rightarrow \nu = 0$ ). Unter den gegebenen Annahmen sind zusätzlich die Multimenge der  $\lambda_i$  sowie  $\mu$  und  $\nu$  eindeutig bestimmt. Man sagt dann, die **quadratische Form  $q$  gehe unter unserer Bewegung  $B$  in ihre Standardform über**. Im Fall  $n \neq 1$  können wir sogar zusätzlich erreichen, daß  $B$  orientierungserhaltend ist. Hinweis: Man mag unser  $\mu$  beschreiben als das Minimum der Norm des Gradienten und, wenn dieses Minimum Null ist, unser  $\nu$  als den Wert an einer kritischen Stelle.

**Übung 1.12.35.** Man finde eine Bewegung, die die Quadrik  $xy + 3x$  in ihre Standardform 1.12.34 überführt.

**Übung 1.12.36.** Man zeige, daß sich die Nullstellenmenge einer reellen quadratischen Form  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$  in zwei Variablen stets als Urbild des Doppelkegels  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$  unter einer Isometrie  $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  schreiben läßt, es sei denn, die Nullstellenmenge unserer quadratischen Form ist leer oder besteht aus zwei parallelen Geraden.

**Übung 1.12.37.** Bei einem unitären Isomorphismus zwischen Skalarprodukträumen ist die adjungierte Abbildung die inverse Abbildung.

**Ergänzende Übung 1.12.38.** Man zeige: Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Skalarproduktraums ist genau dann selbstadjungiert, wenn es dazu eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt und alle Eigenwerte reell sind.

**Übung 1.12.39.** Gegeben eine symmetrische positiv definite reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  hat die Funktion  $y \mapsto \langle y, Ay \rangle / 2 - \langle b, y \rangle$  ihr einziges globales Minimum bei der Lösung der Gleichung  $Ax = b$ .

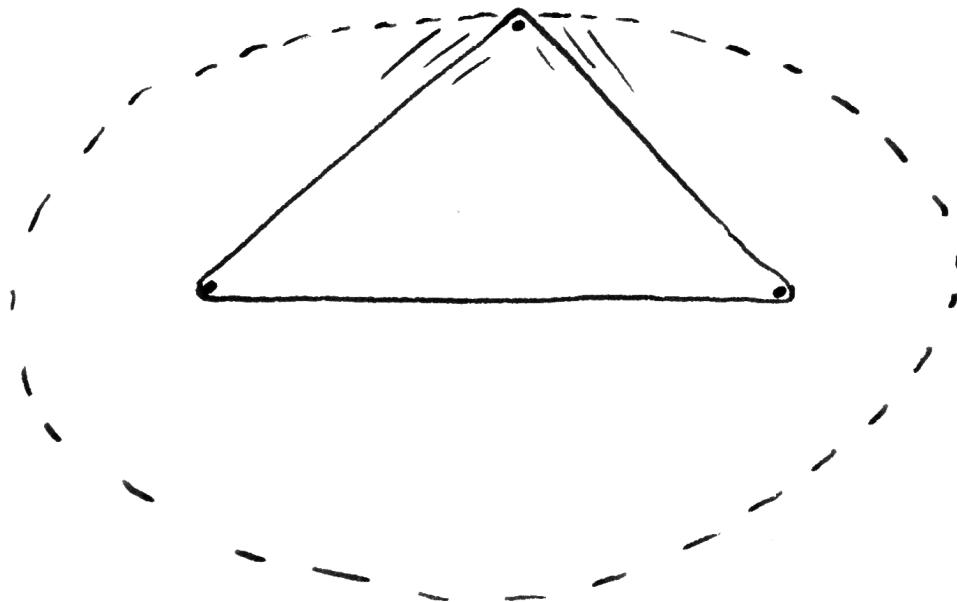
1.12.40 (**Elliptische Beete**). Gärtner erstellen elliptische Beete wie folgt: Sie schlagen zwei Pfosten ein, legen eine Seilschlinge darum, und fahren mit einem dritten Pfosten soweit außen, wie die Seilschlinge es erlaubt, um die beiden fest eingeschlagenen Pfosten herum. Eine einfache Rechnung zeigt, daß man so die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung und, da unsere Lösungsmenge beschränkt ist und nicht nur aus einem Punkt besteht, notwendig eine Ellipse erhält: Wenn man definieren müßte, welche Teilmengen einer affinen reellen Ebene denn nun Ellipsen heißen sollen, würde man nämlich genau diese Eigenschaft zur Definition erheben, und 1.12.34 zeigt, daß das auch unserer Anschauung entspricht, nach der eine Ellipse eine „zusammengedrückte Kreislinie“ sein sollte. Die beiden Pfosten heißen die **Brennpunkte** unserer Ellipse. Das hat hinwiederum mit dem Grenzfall der Parabel zu tun, zu dem wir gelangen, indem wir einen Pfosten vom anderen Pfosten weg auf geradem Wege ins Unendliche schieben und gleichzeitig das Seil so verlängern, daß immer gleich viel Spiel bleibt. Wäre die Ellipse ein Spiegel, so sollte anschaulich klar sein, daß sich das von einer Laterne auf einem der Pfosten ausgesandte Licht beim anderen Pfosten wieder sammeln muß. Im Grenzfall der Parabel wird sich folglich parallel aus der Richtung des unendlich fernen Pfostens einfallendes Licht beim anderen Pfosten sammeln und ihn, wenn auf dem unendlich fernen Pfosten statt einer Laterne die Sonne steht, möglicherweise sogar entzünden: Deshalb heißt er der Brennpunkt der Parabel, und von diesem Beispiel überträgt man das Wort auf Ellipsen und von dort weiter auf Hyperbeln, bei denen statt der Summe die Differenz der Abstände zu den beiden „Brennpunkten“ konstant ist.

*Übung* 1.12.41 (**Polar-Zerlegung von Endomorphismen, Variante**). Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum. Man zeige, daß jeder Endomorphismus  $A \in \text{End } V$  auch eine eindeutige Darstellung als Produkt  $A = P'U'$  besitzt mit  $P'$  selbstadjungiert positiv semidefinit und  $U'$  einer partiellen Isometrie derart, daß gilt im  $U' = (\ker P')^\perp$ .

*Übung* 1.12.42. Man gebe eine von Null verschiedene komplexe symmetrische nilpotente  $(2 \times 2)$ -Matrix an. Gibt es auch eine von Null verschiedene reelle symmetrische nilpotente  $(2 \times 2)$ -Matrix?

*Ergänzende Übung* 1.12.43. Bezeichne  $S \subset \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  den Untervektorraum der symmetrischen Matrizen. Gegeben eine symmetrische Matrix  $P \in S$  betrachte man die lineare Abbildung  $f_P : S \rightarrow S$  gegeben durch die Vorschrift  $f_P : A \mapsto PAP$ . Man zeige für die Determinante von  $f_P$  im Sinne von [LA1] 6.4.3 die Formel  $\det(f_P) = (\det P)^{n+1}$ . Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall zurück, daß  $P$  diagonal ist.

*Übung* 1.12.44. Man zeige, daß vier paarweise verschiedene Elemente der Zahlenkugel  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  genau dann ein reelles Doppelverhältnis haben, wenn sie auf einem gemeinsamen verallgemeinerten Kreis liegen.



Konstruktion elliptischer Beete

**Übung 1.12.45 (Reelle Formen und schieflineare Involutionen).** Unter einer **reellen Form eines komplexen Vektorraums**  $V$  versteht man einen reellen Untervektorraum  $V_{\mathbb{R}} \subset V$  derart, daß  $V_{\mathbb{R}}$  ganz  $V$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum erzeugt und daß jede über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums  $V_{\mathbb{R}}$  auch über  $\mathbb{C}$  linear unabhängig ist in  $V$ . Unter einer **schieflinearen Involution** eines komplexen Vektorraums  $V$  versteht man eine schieflineare Abbildung  $\bar{\theta} : V \rightarrow V$  mit  $\bar{\theta}^2 = \text{id}_V$ . Man zeige: Gegeben ein komplexer Vektorraum  $V$  liefert die Vorschrift, die jeder schieflinearen Involution von  $V$  ihre Fixpunktmenge zuordnet, eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{schieflineare Involutionen} \\ \bar{\theta} : V \rightarrow V \\ \bar{\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sim} \\ \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{reelle Formen} \\ V_{\mathbb{R}} \subset V \\ V^{\bar{\theta}} \end{array} \right\}$$



## 2 Allgemeine Bilinearformen

### 2.1 Fundamentalmatrix

**Definition 2.1.1.** Gegeben ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$  erinnern wir daran, daß wir in 1.3 bilineare Abbildungen  $b : V \times V \rightarrow K$  in den Grundkörper auch **Bilinearformen auf  $V$**  genannt hatten. Die Menge aller Bilinearformen auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  notieren wir

$$\text{Bil}_K(V) = \text{Bil}(V)$$

Sie bilden einen Untervektorraum im Vektorraum  $\text{Ens}(V \times V, K)$  aller Abbildungen von  $V \times V$  nach  $K$ . In der alternativen in [LA1] 2.3.8 eingeführten Notation hätten wir  $\text{Bil}_K(V) = \text{Hom}^{(2)}(V \times V, K)$ .

**Satz 2.1.2 (Fundamentalmatrix einer Bilinearform auf  $K^n$ ).** Gegeben ein Körper  $K$  und eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} F : & \text{Bil}(K^n) & \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(n; K) \\ & b & \mapsto [b] \end{array}$$

dadurch, daß wir jeder Bilinearform  $b$  ihre **Fundamentalmatrix**  $F(b) := [b]$  zuordnen, deren Einträge die Werte unserer Bilinearform auf Paaren von Vektoren der Standardbasis sind, in Formeln  $[b]_{ij} := b(e_i, e_j)$ . Die Umkehrabbildung kann beschrieben werden durch die Abbildungsvorschrift  $F \mapsto b_F$  mit  $b_F(v, w) = v^\top F w$ .

*Beweis.* Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Übung [LA1] 2.3.9, nach der eine bilineare Abbildung festgelegt und festlegbar ist durch ihre Werte auf Paaren von Basisvektoren. Um unsere Beschreibung der Umkehrabbildung zu prüfen, reicht es aus, für jede Matrix  $F$  die Identität  $[b_F] = F$  alias  $b_F(e_i, e_j) = F_{ij} \forall i, j$  zu zeigen. Das hinwiederum folgt unmittelbar aus  $b_F(e_i, e_j) = F_{ij} = e_i^\top F e_j$ .  $\square$

**Satz 2.1.3 (Fundamentalmatrix einer Bilinearform im Abstrakten).** Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  erhalten wir für jede angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathcal{A}} : & \text{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(n; K) \\ & b & \mapsto [b] = [b]_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} \end{array}$$

dadurch, daß wir jeder Bilinearform  $b$  ihre **Fundamentalmatrix**  $F_{\mathcal{A}}(b) := [b]$  bezüglich unserer Basis  $\mathcal{A}$  zuordnen vermittelt der Vorschrift  $[b]_{ij} = b(v_i, v_j)$ . Die Umkehrabbildung kann in diesem Fall beschrieben werden durch die Abbildungsvorschrift  $F \mapsto b_F$  mit

$$b_F(v, w) = {}_{\mathcal{A}}[v]^\top \circ F \circ {}_{\mathcal{A}}[w]$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt wieder unmittelbar aus der Erkenntnis [LA1] 2.3.9, daß eine bilineare Abbildung festgelegt und festlegbar ist durch ihre Werte auf Paaren von Basisvektoren. Für die zweite Aussage zeigen wir nun zur Abwechslung einmal  $b_{F(b)} = b$  alias  $b_{F(b)}(v, w) = b(v, w)$  für alle  $v, w$ . Dazu müssen wir ja nur zeigen  $b_{F(b)}(v_i, v_j) = b(v_i, v_j)$  für alle  $i, j$  alias

$${}_{\mathcal{A}}[v_i]^\top \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[v_j] = (F_{\mathcal{A}}(b))_{ij}$$

Das ist jedoch klar wegen  ${}_{\mathcal{A}}[v_i] = e_i$ . □

**2.1.4 (Notationsfragen).** Die Notation  $[b]_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}$  für die darstellende Matrix hat den Vorteil, daß sie sich als Spezialisierung eines noch allgemeineren Falls verstehen läßt. Wir können etwa für Vektorräume  $U, V$  mit angeordneten Basen  $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$  und  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$  eine bilineare Abbildung  $b : U \times V \rightarrow K$  beschreiben durch eine  $(n \times m)$ -Matrix  $[b] = [b]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  mit Einträgen  $[b]_{ij} = b(u_i, v_j)$ . Ist noch allgemeiner  $b : U \times V \rightarrow W$  eine bilineare Abbildung in einen weiteren Vektorraum und sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen unserer Räume, so erhalten wir eine Abbildung

$${}_C[b]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = [b] : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \rightarrow K$$

durch die Vorschrift, daß  $[b](u_i, v_j, w_k)$  der Koeffizient von  $w_k$  bei einer Darstellung des Vektors  $b(u_i, v_j) \in W$  in der Basis  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_l\}$  von  $W$  sein möge. Da sich solch ein „Zahlenwürfel“ alias „räumliche Matrix“ eh schlecht hinschreiben läßt, hilft die Wahl einer Anordnung der Basen auch nicht mehr weiter und ich bin zu einer Darstellung übergegangen, die die Wahl derartiger Anordnungen nicht benötigt. Wie es noch allgemeiner geht, besprechen wir in 2.1.10.

**2.1.5.** Wenn man viel zu rechnen hat, mag es praktisch sein, Matrizen von Bilinearformen als  $[b]_{ij}$  zu indizieren und Matrizen von linearen Abbildungen zur Unterscheidung anders als zuvor  ${}^k[f]_j$  und Skalare systematisch von rechts an Vektoren zu schreiben, also  $f(\vec{v}_j) = \sum_i \vec{w}_i {}^k[f]_j$  für  $f : V \rightarrow W$  und entsprechende Basen sowie  $b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = [b]_{ij}$  und für allgemeinere bilineare Abbildungen  $b : U \times V \rightarrow W$  entsprechend

$$b(\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \sum_k \vec{w}_k {}^k[b]_{ij}$$

Für eine lineare Abbildung  $f : W \rightarrow X$  ergäbe sich dann etwa die angenehm übersichtliche Formel  ${}^l[f \circ b]_{ij} = \sum_k {}^l[f]_k {}^k[b]_{ij}$ . Die Darstellung eines Vektors  $v \in V$  wäre  $v = \sum_j \vec{v}_j {}^j[v]$  und die lineare Abbildung  $b(\cdot, v)$  mit  $u \mapsto b(u, v)$  hätte die Matrix  ${}^k[b(\cdot, v)]_i = \sum_j {}^k[b]_{ij} {}^j[v]$ . Die Darstellung einer Linearform  $\lambda : U \rightarrow K$  schließlich wäre der Zeilenvektor mit Einträgen  $[\lambda]_i = \lambda(\vec{u}_i)$  und das Auswerten auf  $u = \sum_j \vec{u}_j {}^j[u]$  wäre  $\lambda(u) = \sum [\lambda]_i {}^i[u]$ .

**2.1.6 (Fundamentalmatrizen symmetrischer Bilinearformen).** Eine Bilinearform ist symmetrisch genau dann, wenn ihre Fundamentalmatrix bezüglich einer gegebenen Basis symmetrisch ist. Ist also in Formeln  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{B}$  eine angeordnete Basis von  $V$  und  $b : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, so gilt

$$b \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow F_{\mathcal{B}}(b) \text{ symmetrisch}$$

In der Tat, ist  $(v_1, \dots, v_n)$  unsere angeordnete Basis, so gilt für symmetrisches  $b$  ja  $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$  und damit die Identität  $F_{ij} = F_{ji}$  für die Einträge  $F_{ij} = b(v_i, v_j)$  der Fundamentalmatrix  $F = F_{\mathcal{B}}(b)$ . Bezeichnet ganz allgemein  $\tau : V \times V \xrightarrow{\sim} V \times V$  das Vertauschen  $\tau : (v, w) \mapsto (w, v)$ , so haben wir für jede Bilinearform  $b$  offensichtlich die Identität  $F_{\mathcal{B}}(b \circ \tau) = F_{\mathcal{B}}(b)^{\top}$ . Ist also die Fundamentalmatrix symmetrisch, in Formeln  $F_{\mathcal{B}}(b)^{\top} = F_{\mathcal{B}}(b)$ , so folgt mit 2.1.3 sofort  $b \circ \tau = b$  alias  $b$  symmetrisch.

**2.1.7 (Fundamentalmatrizen alternierender Bilinearformen).** Eine Bilinearform ist alternierend genau dann, wenn ihre Fundamentalmatrix bezüglich einer gegebenen Basis antisymmetrisch ist und auf der Diagonale verschwindet. Wir nennen derartige quadratische Matrizen auch **alternierend**.

**Proposition 2.1.8 (Fundamentalmatrix und Basiswechsel).** Gegeben ein Körper  $K$  und ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum  $V$  mit zwei angeordneten Basen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  gilt zwischen den Fundamentalmatrizen einer Bilinearform  $b \in \text{Bil}(V)$  in Bezug auf unsere beiden Basen die Beziehung

$${}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}}(b)$$

2.1.9. Man berechnet also in Worten gesagt die Fundamentalmatrix einer Bilinearform bezüglich einer Basis aus ihrer Fundamentalmatrix bezüglich einer anderen Basis, indem man von rechts die Basiswechselmatrix dranmultipliziert und von links ihre Transponierte.

*Beweis.* Gegeben  $v, w \in V$  gilt

$$\begin{aligned} b(v, w) &= {}_{\mathcal{B}}[v]^{\top} \circ F_{\mathcal{B}}(b) \circ {}_{\mathcal{B}}[w] \\ b(v, w) &= {}_{\mathcal{A}}[v]^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[w] \\ &= ({}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[v])^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[w] \\ &= {}_{\mathcal{B}}[v]^{\top} \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}[w] \end{aligned}$$

Gilt für Matrizen  $F, G \in \text{Mat}(n \times m; K)$  jedoch  $v^{\top} F w = v^{\top} G w$  für alle Spaltenvektoren  $v \in K^n$ ,  $w \in K^m$ , so folgt durch Einsetzen der Vektoren der Standardbasis  $F = G$ . Damit liefern unsere Gleichungen die gewünschte Identität  ${}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}}(b)$ .  $\square$

*Ergänzung 2.1.10.* Seien  $K$  ein Körper oder allgemeiner ein Kring und  $r \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $M_1, \dots, M_r, N$  Mengen. Wir setzen

$$\text{Mat}_K(M_1 \curlyvee \dots \curlyvee M_r, N) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Abbildungen} \\ T : M_1 \times \dots \times M_r \times N \rightarrow K \\ \text{derart, daß es für beliebige } m_1, \dots, m_r \\ \text{höchstens endlich viele } n \text{ gibt mit} \\ \text{mit } T(m_1, \dots, m_r, n) \neq 0 \end{array} \right\}$$

und nennen derartige Abbildungen **Multimatrizen**. Gegeben  $K$ -Vektorräume  $V_1, \dots, V_r, W$  mit Basen  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}$  erhalten wir dann eine Bijektion

$$\text{Hom}_K(V_1 \curlyvee \dots \curlyvee V_r, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_K(\mathcal{A}_1 \curlyvee \dots \curlyvee \mathcal{A}_r, \mathcal{B})$$

durch die Vorschrift  $f \mapsto [f]$  mit der Multimatrix  $[f] = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r}$  gegeben durch

$$f(v_1, v_2, \dots, v_r) = \sum_{w \in \mathcal{B}} [f](v_1, v_2, \dots, v_r, w) w$$

für beliebige Tupel  $(v_1, v_2, \dots, v_r) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_r$  von Basisvektoren. All unsere bisherigen Matrixbildungen ordnen sich dieser allgemeinen Konvention unter. In der üblichen Weise hinschreiben lassen sich unsere Multimatrizen aber nur in wenigen Spezialfällen:

1. Im Fall einer linearen Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen und nach Wahl einer Anordnung auf beiden Basen, das sind dann unsere Matrizen  ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$  linearer Abbildungen. Im Spezialfall einer Abbildung in den Grundkörper mit seiner Standardbasis  $\mathcal{S}(1)$  erhalten wir unsere Darstellung  ${}_{\mathcal{S}(1)}[f]_{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A}}$  einer Linearform als Zeilenmatrix;
2. Im Fall einer bilinearen Abbildung in den Grundkörper  $b : V_1 \times V_2 \rightarrow K$  von endlichdimensionalen Räumen und nach Wahl einer Anordnung auf beiden Basen, das sind dann Matrizen  ${}_{\mathcal{S}(1)}[b]_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2}$  mit der Konvention für die Zeilen und Spalten, daß sie als  $[b]_{i,j} := [b](v_i, w_j, 1)$  dargestellt werden sollen. Im Spezialfall  $V_1 = V_2 = V$  und  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$  erhalten wir dann unsere Fundamentalmatrix  $F_{\mathcal{A}}(b) = {}_{\mathcal{S}(1)}[b]_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} = [b]_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}$ ;
3. Im Fall einer 0-linearen Abbildung in einen endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  mit angeordneter Basis  $\mathcal{B}$  erhalten wir unsere Darstellung  ${}_{\mathcal{B}}[v]$  eines Vektors  $v \in V$  als Spaltenmatrix.

## 2.2 Hauptachsentransformation

**Definition 2.2.1.** Gegeben ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$  versteht man unter einer **quadratischen Form auf  $V$**  eine Abbildung  $q : V \rightarrow K$  derart, daß es eine Bilinearform  $b$  auf  $V$  gibt mit  $q(v) = b(v, v)$ .

2.2.2. Gegeben ein Körper  $K$  heißt eine quadratische Form auf dem  $K^n$  auch eine **quadratische Form über  $K$  in  $n$  Variablen**. Eine quadratische Form über  $\mathbb{Q}$  in drei Variablen wäre etwa  $x^2 + 6xy + zx - 13z^2$ .

*Ergänzung 2.2.3 (Quadratische Formen und kritische Stellen).* In der Analysis, etwa in [AN2] 2.4.9, können Sie lernen, wie man eine hinreichend differenzierbare Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  etwa um den Ursprung bis zu zweiter Ordnung approximieren kann durch eine polynomiale Funktion vom Totalgrad höchstens Zwei alias die Summe einer Konstanten mit einer Linearform und einer quadratischen Form. Ist die fragliche Linearform Null alias hat der Graph unserer Funktion am Ursprung eine horizontale Tangentialebene alias hat unsere Funktion am Ursprung eine „kritische Stelle“, so wird sie dort bis zur Ordnung Zwei approximiert durch die fragliche quadratische Form plus die Konstante. So führt uns das Studium von Funktionen mehrerer Veränderlichen in der Umgebung ihrer kritischen Stellen ganz natürlich auf das Studium quadratischer Formen.

2.2.4 (**Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen**). Ist die Charakteristik des Grundkörpers  $K$  ungleich Zwei, so liefert für jeden  $K$ -Vektorraum  $V$  die Vorschrift „werte auf zweimal demselben Vektor aus“ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{symmetrische Bilinearformen} \\ \text{auf dem Vektorraum } V \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{quadratische} \\ \text{Formen auf } V \end{array} \right\} \\ a & \mapsto & (v \mapsto a(v, v)) \end{array}$$

In der Tat liefern dann die Bilinearform  $b$  und die symmetrische Bilinearform  $a$  mit  $a(v, w) := (b(v, w) + b(w, v))/2$  dieselbe quadratische Form, mithin ist unsere Abbildung surjektiv. Weiter wird die symmetrische Bilinearform  $a$  durch  $q$  eindeutig bestimmt mittels der Relation  $2a(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$ , mithin ist unsere Abbildung auch injektiv. Wir nennen über einem Körper einer Charakteristik ungleich Zwei eine quadratische Form **nichtausgeartet**, wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform nichtausgeartet ist.

2.2.5 (**Bilinearformen und lineare Abbildungen**). Übung [LA1] 2.3.16 liefert uns für jeden Vektorraum  $V$  einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(V, V^\top) \\ a & \mapsto & \hat{a} \end{array}$$

zwischen dem Raum der Bilinearformen auf  $V$  und dem Raum der linearen Abbildungen von  $V$  in seinen Dualraum  $V^\top$ , gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $a \mapsto \hat{a}$  mit  $\hat{a} : w \mapsto a(\cdot, w)$  alias  $(\hat{a}(w))(v) = a(v, w)$ .

2.2.6 (**Bilinearformen und selbstadjungierte Endomorphismen**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Skalarproduktraum  $E$  erhalten wir eine natürliche

Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{selbstadjungierte} \\ \text{Endomorphismen von } E \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{symmetrische} \\ \text{Bilinearformen auf } E \end{array} \right\}$$

$$f \mapsto (a : (v, w) \mapsto \langle f(v), w \rangle)$$

Bezeichnet in der Tat  $s$  unser Skalarprodukt, so ist unser  $\hat{s}$  aus 2.2.5 offensichtlich eine Injektion und damit ein Isomorphismus  $\hat{s} : E \xrightarrow{\sim} E^\top$ . Gegeben eine weitere Bilinearform  $a$  können wir den Endomorphismus  $f := \hat{s}^{-1} \circ \hat{a}$  von  $E$  bilden und erhalten so eine Bijektion  $\text{Bil}(E) \xrightarrow{\sim} \text{End } E$ . Formal wird  $f$  charakterisiert durch die Formel  $\langle f(v), w \rangle = a(v, w)$  für alle  $w$ . Insbesondere ist der Endomorphismus  $f$  genau dann selbstadjungiert, wenn die Bilinearform  $a$  symmetrisch ist.

**Satz 2.2.7 (Hauptachsentransformation, abstrakte Form).** *Gegeben eine quadratische Form  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem endlichdimensionalen reellen Skalarproduktraum  $E$  gibt es stets eine Orthonormalbasis  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  von  $E$  und Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit*

$$q(y_1 \vec{v}_1 + \dots + y_n \vec{v}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad \forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$$

2.2.8. Den Spezialfall  $E = \mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt hatten wir bereits in 1.12.1 diskutiert. Die von den  $\vec{v}_i$  erzeugten Geraden nennen wir wieder ein System von **Hauptachsen** für unsere quadratische Form  $q$ . Beim Beweis wird sich wieder herausstellen, daß die Multimenge der  $\lambda_i$  durch unsere quadratische Form eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die **Multimenge der Eigenwerte** unserer quadratischen Form. Weiter wird sich herausstellen, daß die von den Hauptachsen zu einem festen Eigenwert erzeugten Teilräume eindeutig bestimmt sind. Wir nennen sie die **Eigenräume** unserer quadratischen Form. Sowohl die Hauptachsen als auch die Eigenwerte hängen hierbei von dem auf dem zugrundeliegenden Vektorraum gewählten Skalarprodukt ab.

**Vorschau 2.2.9 (Hauptachsentransformation für euklidische Vektorräume).** Gegeben eine quadratische Form  $q$  auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum  $V$  gibt es stets eine Zerlegung in paarweise orthogonale Teilräume  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  und „inverse Flächen“  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{L}^{-2}$  mit

$$q(v_1 + \dots + v_r) = \lambda_1 \|v_1\|^2 + \dots + \lambda_r \|v_r\|^2$$

für beliebige  $v_i \in V_i$ . Gilt außerdem  $\lambda_1 > \dots > \lambda_r$  und  $V_i \neq 0 \ \forall i$ , so werden die  $V_i$  und die  $\lambda_i$  durch unsere quadratische Form  $q$  bereits eindeutig festgelegt und wir nennen wieder die  $V_i$  die **Eigenräume** und die  $\lambda_i$  die **Eigenwerte** unserer quadratischen Form auf unserem euklidischen Vektorraum und die Dimensionen der  $V_i$  die **Vielfachheiten** der jeweiligen Eigenwerte. Diese Umformulierung von 2.2.7 wird Ihnen leicht fallen, sobald Sie sich mit dem entsprechenden Formalismus vertraut gemacht haben, wie er etwa in 6.1.15 erklärt wird.

*Erster Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen,  $E$  sei der  $\mathbb{R}^n$  mit seinem Standardskalarprodukt. In diesem Fall hatten wir den Satz bereits als 1.12.1 bewiesen. Allerdings war der dort gegebene Beweis in meinen Augen zu sehr von Koordinaten abhängig, um transparent zu sein. Ich gebe deshalb hier noch einen zweiten Beweis, der mir natürlicher scheint.  $\square$

*Zweiter Beweis.* In diesem Beweis notieren wir Vektoren wieder ohne Pfeil. Nach 2.2.4 finden wir zu unserer quadratischen Form  $q$  eine symmetrische Bilinearform  $a$  mit  $q(v) = a(v, v) \forall v \in E$ , und nach 2.2.6 finden wir zu  $a$  weiter einen selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  von  $E$  mit  $a(v, w) = \langle f(v), w \rangle \forall v, w \in E$ . Der Spektralsatz 1.12.15 liefert uns dann eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $E$  aus Eigenvektoren von  $f$ , so daß also gilt  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  für geeignete  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Unser Satz folgt unmittelbar.  $\square$

## 2.3 Klassifikation symmetrischer Bilinearformen

2.3.1. Unter einer **Klassifikation** einer gewissen Art von mathematischen Strukturen versteht man im allgemeinen die Angabe einer Liste von „Standardstrukturen“ derart, daß jede Struktur der vorgegebenen Art zu genau einer der Strukturen besagter Liste „isomorph“ ist. Oft sind derartige Listen sehr schwer anzugeben, und man ist schon froh, wenn man eine Liste von „Standardstrukturen“ angeben kann derart, daß jede Struktur der vorgegebenen Art zu mindestens einer der Strukturen besagter Liste „isomorph“ ist. Meist wird in der Darstellung das jeweilige Konzept von Isomorphie nicht explizit gemacht und muß vom Leser erraten werden. In der Sprache der Kategorientheorie ?? können wir das viel genauer sagen: Eine Klassifikation der Objekte einer Kategorie bedeutet die Angabe eines Repräsentantensystems für die Isomorphieklassen von Objekten unserer Kategorie.

*Beispiel 2.3.2 (Klassifikation endlich erzeugter Vektorräume).* Für die Struktur eines endlich erzeugten Vektorraums über einem vorgegebenen Körper  $K$  bilden die Vektorräume  $K^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine solche Liste, denn jeder endlich erzeugte  $K$ -Vektorraum ist isomorph zu genau einem  $K^n$ . Man sagt deshalb auch, die endlich erzeugten Vektorräume seien „klassifiziert durch ihre Dimension“. Ähnlich und noch einfacher werden die endlichen Mengen klassifiziert durch ihre Kardinalität. Ähnlich aber schwieriger werden die endlich erzeugten reellen oder komplexen Skalarprodukträume klassifiziert durch ihre Dimension.

*Beispiel 2.3.3 (Klassifikation endlicher Gruppen).* Die Klassifikation endlicher Gruppen haben wir in [GR] 2.3.9 begonnen: Bis auf Isomorphie gibt es nur je eine Gruppe  $G$  der Kardinalitäten  $|G| = 1, 2, 3$ . Dahingegen gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Kardinalität Vier.

**Beispiel 2.3.4 (Klassifikation linearer Abbildungen).** Lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen werden „klassifiziert durch die Dimensionen der beteiligten Vektorräume und den Rang der Abbildung“. Nennen wir genauer lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow W$  und  $f' : V' \rightarrow W'$  „isomorph“, wenn es Vektorraumisomorphismen  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$  und  $\psi : W \xrightarrow{\sim} W'$  gibt mit  $\psi f = f' \phi$ , so daß also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ V' & \xrightarrow{f'} & W' \end{array}$$

kommutiert, so ist jede lineare Abbildung isomorph zu genau einer linearen Abbildung  $K^n \rightarrow K^m$  mit einer Matrix in Smith-Normalform nach [LA1] 2.5.7.

**2.3.5 (Klassifikation der symmetrischer Bilinearformen).** Im folgenden sollen grundlegende Resultate zur Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über einem vorgegebenen Körper  $K$  vorgestellt werden. Klassifiziert werden sollen genauer Paare  $(V, a)$  bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow K$ , wobei zwei derartige Paare  $(V, a)$  und  $(V', a')$  isomorph heißen, wenn es einen Vektorraumisomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  gibt mit  $a(v, w) = a'(\varphi(v), \varphi(w))$  für alle  $v, w \in V$ . Eine derartige Klassifikation ist eng mit der Struktur des Körpers verknüpft und im allgemeinen schwierig. Wir geben zumindest im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers einer Charakteristik ungleich Zwei in 2.3.14 sowie im Fall  $K = \mathbb{R}$  in 2.3.23 Klassifikationen an. Die Klassifikation im Fall  $K = \mathbb{Q}$  ist ein interessantes Problem der Zahlentheorie.

**2.3.6 (Physikalische Motivation).** In der speziellen Relativitätstheorie modelliert man die Welt, in der wir leben, als einen vierdimensionalen reellen affinen Raum  $X$  aller „Raum-Zeit-Punkte“ alias „Ereignisse“. Wählen wir ein räumliches Koordinatensystem und einen Beginn der Zeitrechnung und eine Zeiteinheit, so können wir  $X$  mit dem  $\mathbb{R}^4$  identifizieren und jedes Ereignis wird spezifiziert durch eine Zeitkoordinate und drei Raumkoordinaten, also durch ein Viertupel von reellen Zahlen  $(t, x, y, z)$ . Das Licht breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Genau dann wird also eine Explosion am Raumzeitpunkt  $p = (t, x, y, z)$  gesehen bei  $p' = (t', x', y', z')$ , wenn gilt

$$t' \geq t \quad \text{und} \quad c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2 = 0$$

für  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Betrachten wir auf dem Raum  $\mathbb{R}^4$  die sogenannte **Lorentzmetrik** alias die symmetrische Bilinearform  $l$  mit der Fundamentalmatrix  $\text{diag}(c^2, -1, -1, -1)$ , so kann die Zweite unserer Bedingungen auch umgeschrieben werden zur Bedingung  $l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$  für  $\vec{v} = p' - p$ . Wenn Sie bereits die



Definition einer Metrik kennen, seien Sie gewarnt, daß diese Lorentzmetrik im Sinne der in der Mathematik üblichen Terminologie keine Metrik ist. Nun vergessen wir wieder unsere Koordinaten und modellieren die Welt, in der wir leben, als einen vierdimensionalen reellen affinen Raum  $X$  mitsamt einer symmetrischen Bilinearform

$$l : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

auf seinem Richtungsraum. Wir fordern, daß deren Fundamentalmatrix bezüglich mindestens einer Basis die oben angegebene Gestalt hat und daß sie die Ausbreitung des Lichts in der Weise beschreibt, daß  $l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$  gleichbedeutend ist dazu, daß eine Explosion am Raumzeitpunkt  $p \in X$  entweder bei  $p + \vec{v}$  oder bei  $p - \vec{v}$  gesehen werden kann. Manchmal nennt man die Menge  $\{\vec{v} \mid l(\vec{v}, \vec{v}) = 0\}$  auch den **Lichtkegel** und seine Elemente **lichtartige Vektoren**. Wir werden später zeigen, daß jede weitere symmetrische Bilinearform  $l'$  mit der Eigenschaft  $l'(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow l(\vec{v}, \vec{v}) = 0$  bereits ein Vielfaches von  $l$  sein muß. Die Wahl eines möglichen  $l$  bedeutet die Wahl einer Längeneinheit oder gleichbedeutend einer Zeiteinheit in der speziellen Relativitätstheorie. Das ist jedoch nicht, was an dieser Stelle diskutiert werden soll. Wir stellen uns die viel einfachere Frage, ob unsere Bilinearform nicht etwa bezüglich einer anderen Basis zum Beispiel  $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$  als Fundamentalmatrix haben könnte. Das geht nun zwar nicht, aber wir wollen eben unter anderem verstehen, warum es nicht geht, und entwickeln dazu die Anfänge der allgemeinen Theorie der symmetrischen Bilinearformen.

**2.3.7 (Klassifikation quadratischer Formen).** In Charakteristik ungleich Zwei ist nach 2.2.4 die Klassifikation symmetrischer Bilinearformen gleichbedeutend zur Klassifikation quadratischer Formen. Genauer meinen wir hier die Klassifikation von Paaren  $(V, q)$  bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  mit einer quadratischen Form  $q : V \rightarrow K$ , wobei zwei derartige Paare  $(V, q)$  und  $(V', q')$  isomorph heißen mögen, wenn es einen Vektorraumisomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  gibt mit  $q(v) = q'(\varphi(v))$  für alle  $v \in V$ .

**2.3.8 (Klassifikation quadratischer Formen auf der reellen Ebene).** Über dem Körper  $K = \mathbb{R}$  kann jede quadratische Form in zwei Variablen durch linearen Koordinatenwechsel in genau eine der folgenden fünf Formen überführt werden: Den „parabolischen Topf“  $x^2 + y^2$ , die „Sattelfläche“  $x^2 - y^2$ , den „umgestülpten parabolischen Topf“  $-x^2 - y^2$ , das „Tal“  $x^2$ , das „umgestülpte Tal“  $-x^2$  und die „Ebene“ 0. Formal sagt uns das der Trägheitssatz von Sylvester 2.3.23.

**2.3.9 (Klassifikation quadratischer Formen auf der komplexen Ebene).** Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  kann jede quadratische Form in zwei Variablen durch linearen Koordinatenwechsel in genau eine der folgenden drei Formen überführt werden: Das Produkt linear unabhängiger Linearformen  $xy$ , das Quadrat einer von Null verschiedenen Linearform  $x^2$ , und die Nullform

0. In der Tat hat unsere Form Gestalt  $ax^2 + bxy + cy^2$  mit  $a, b, c \in K$ . Ist  $a \neq 0$ , so setzen wir  $y = 1$ , faktorisieren das so entstehende Polynom in einer Variablen, und finden uns in einem der beiden ersten Fälle wieder. Ist  $c \neq 0$ , so machen wir es analog. Der Fall  $a = c = 0$  ist eh einfach. Dasselbe gilt allgemeiner mit demselben Beweis, wenn das Quadrieren eine Surjektion  $K \rightarrow K$  ist und  $K$  nicht die Charakteristik Zwei hat.

**2.3.10 (Klassifikation quadratischer Formen auf Skalarprodukträumen).** Lassen wir nur orthogonale Koordinatenwechsel zu, so kann jede quadratische Form auf  $\mathbb{R}^2$  in genau eine Form der Gestalt  $\lambda x^2 + \mu y^2$  überführt werden mit  $\lambda \leq \mu$  reell: Das sagt uns der Satz über die Hauptachsentransformation 2.2.7, der auch seinerseits ein Klassifikationsproblem löst: Die Klassifikation quadratischer Formen auf endlichdimensionalen reellen Skalarprodukträumen. Hier sind die zu klassifizierenden Strukturen Tripel  $(V, s, q)$  mit  $V$  einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum,  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  einem Skalarprodukt und  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  einer quadratischen Form. Zwei derartige Tripel  $(V, s, q)$  und  $(V', s', q')$  heißen isomorph, wenn es einen Vektorraumisomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V'$  gibt mit  $s(v, w) = s'(\varphi(v), \varphi(w))$  und  $q(v) = q'(\varphi(v))$  für alle  $v, w \in V$ . Die Klassifikation derartiger Tripel leistet also wie gesagt der Satz über die Hauptachsentransformation 2.2.7.

**Satz 2.3.11 (Existenz einer Orthogonalbasis).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$  mit  $\text{char } K \neq 2$ . So gibt es für jede symmetrische Bilinearform  $a$  auf  $V$  eine **Orthogonalbasis** alias eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  mit

$$i \neq j \Rightarrow a(v_i, v_j) = 0$$

2.3.12. Der Wortbestandteil „orthogonal“ möge Sie nicht dazu verleiten, sich hier für  $b$  ein Skalarprodukt vorzustellen. Dieser Fall wurde eh bereits durch 1.3.15 erledigt. Sie mögen stattdessen etwa an die Nullform  $b = 0$  denken oder an die Lorentzmetrik 2.3.6.

*Beweis.* Gilt für jeden Vektor  $v \in V$  bereits  $a(v, v) = 0$ , so folgt  $2a(v, w) = a(v + w, v + w) - a(v, v) - a(w, w) = 0$  für alle  $v, w$ . Wegen  $2 \neq 0$  in  $K$  folgt  $a = 0$  und jede Basis ist orthogonal. Sonst gibt es einen Vektor  $v_1 \in V$  mit  $a(v_1, v_1) \neq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow K \\ w &\mapsto a(v_1, w) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung mit  $v_1 \notin \ker \varphi$ . Aus Dimensionsgründen gilt sicher  $Kv_1 \oplus \ker \varphi = V$ . Mit Induktion über die Dimension dürfen wir annehmen, daß  $\ker \varphi$  eine Orthogonalbasis  $(v_2, \dots, v_n)$  besitzt. Dann ist aber  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Orthogonalbasis von  $V$ .  $\square$

**Definition 2.3.13.** Ist  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $b$  eine Bilinearform auf  $V$ , so erklären wir den **Rang** von  $b$  als den Rang einer Fundamentalmatrix

$$\operatorname{rg}(b) = \operatorname{rg} F_{\mathcal{B}}(b)$$

in Bezug auf eine und jede angeordnete Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ . Nach unserer Formel 2.1.8 für die Umrechnung zwischen den Fundamentalmatrizen zu verschiedenen Basen hängt diese Zahl in der Tat nicht von der Basis  $\mathcal{B}$  ab.

**2.3.14 (Klassifikation komplexer quadratischer Formen).** Ist  $K$  ein Körper einer Charakteristik  $\operatorname{char} K \neq 2$  und ist das Quadrieren  $x \mapsto x^2$  eine Surjektion  $K \rightarrow K$  und ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform, so können wir die im Satz 2.3.11 gefundene Orthogonalbasis offensichtlich sogar dahingehend abändern, daß die Fundamentalmatrix die Gestalt  $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  hat. Die Zahl der Einsen ist hierbei wohldefiniert als der Rang unserer Bilinearform. Insbesondere werden also komplexe quadratische Formen klassifiziert durch ihren Rang und die Dimension des zugrundeliegenden Vektorraums.

**Definition 2.3.15.** Eine Bilinearform auf einem Vektorraum  $V$  heißt **nichtausgeartet**, wenn es für jedes  $v \in V \setminus 0$  ein  $w \in W$  gibt mit  $b(v, w) \neq 0$  und umgekehrt auch für jedes  $w \in W \setminus 0$  ein  $v \in V$  mit  $b(v, w) \neq 0$ . Andernfalls heißt unsere Bilinearform **ausgeartet**.

**Definition 2.3.16.** Gegeben ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$  und eine Bilinearform  $b : V \times V \rightarrow K$  erklären wir den **Ausartungsraum** alias das **Radikal von  $V$**  als den Untervektorraum

$$\operatorname{rad} b := \{v \in V \mid b(w, v) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

Wir werden dieses Konzept im wesentlichen nur für symmetrische oder alternierende Bilinearformen verwenden und verzichten deshalb darauf, unseren Ausartungsraum feiner „Rechtsausartungsraum“ zu nennen und zusätzlich noch einen „Linksausartungsraum“ einzuführen.

**Satz 2.3.17 (Rang und Dimension des Radikals).** *Der Rang und die Dimension des Radikals einer Bilinearform  $b$  auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  sind verknüpft durch die Beziehung*

$$\operatorname{rg}(b) + \dim(\operatorname{rad}(b)) = \dim V$$

**2.3.18.** Eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ist insbesondere genau dann nichtausgeartet, wenn sie maximalen Rang hat.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{B}$  eine angeordnete Basis von  $V$ , so können wir  $F_{\mathcal{B}}(b)$  auch verstehen als die Matrix der Abbildung  $\hat{b} : V \rightarrow V^{\top}$ , die jedem  $w \in V$  die Linearform „paare mit  $w$  unter  $b$ “ alias  $(\hat{b}(w))(v) := b(v, w)$  zuordnet. Genauer und in Formeln haben wir

$${}_{\mathcal{B}^{\top}}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}}(b)$$

In der Tat, setzen wir  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  und machen den Ansatz  $\hat{b}(v_i) = a_{1i}v_1^{\top} + \dots + a_{ni}v_n^{\top}$ , so liefert das Auswerten der Linearformen auf beiden Seiten dieser Gleichung auf dem Basisvektor  $v_j$  die Identität  $b(v_i, v_j) = (\hat{b}(v_j))(v_i) = a_{ij}$  und damit die Gleichheit aller Einträge unserer beiden Matrizen. Insbesondere gilt  $\text{rg}(b) = \text{rg}(\hat{b}) = \dim(\text{im } \hat{b})$ . Wegen  $\text{rad}(b) = \ker(\hat{b})$  folgt unsere Identität damit aus der Dimensionsformel [LA1] 2.2.5, angewandt auf die lineare Abbildung  $\hat{b} : V \rightarrow V^{\top}$ .  $\square$

*Ergänzung 2.3.19.* Die Identität  ${}_{\mathcal{B}^{\top}}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = F_{\mathcal{B}}(b)$  aus dem vorhergehenden Beweis liefert auch einen zweiten Zugang zu unserer Formel 2.1.8 über das Verhalten der Fundamentalmatrix unter Basiswechsel: Wir rechnen einfach

$$F_{\mathcal{B}}(b) = {}_{\mathcal{B}^{\top}}[\hat{b}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}^{\top}}[\text{id}]_{\mathcal{A}^{\top}} \circ {}_{\mathcal{A}^{\top}}[\hat{b}]_{\mathcal{A}} \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}})^{\top} \circ F_{\mathcal{A}}(b) \circ {}_{\mathcal{A}}[\text{id}]_{\mathcal{B}}$$

unter Verwendung unserer Formel [LA1] 2.9.16 für die Matrix der transponierten Abbildung.

*Ergänzung 2.3.20 (Bilinearformen und lineare Abbildungen).* Übung [LA1] 2.3.16 liefert uns wie in 2.2.5 für jeden Vektorraum  $V$  einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{Bil}(V) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(V, V^{\top}) \\ b & \mapsto & \hat{b} \end{array}$$

zwischen dem Raum der Bilinearformen auf  $V$  und dem Raum der linearen Abbildungen von  $V$  in seinen Dualraum  $V^{\top}$ , gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $b \mapsto \hat{b}$  mit  $\hat{b} : w \mapsto b(\cdot, w)$  alias  $(\hat{b}(w))(v) = b(v, w)$ . In [AN2] 5.2.13 verwende ich die alternative Notation  $\hat{b} = \text{can}_b^2$  und betrachte zusätzlich auch noch  $\text{can}_b^1 : V \rightarrow V^{\top}$  gegeben durch  $v \mapsto b(v, \cdot)$ .

**Definition 2.3.21.** Eine quadratische Form  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Vektorraum  $V$  heißt

1. **positiv definit**, wenn gilt  $v \neq 0 \Rightarrow q(v) > 0$ ;
2. **positiv semidefinit**, wenn gilt  $q(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$ ;
3. **negativ definit**, wenn gilt  $v \neq 0 \Rightarrow q(v) < 0$ ;
4. **negativ semidefinit**, wenn gilt  $q(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$ ;

5. **indefinit**, wenn es  $v, w \in V$  gibt mit  $q(v) > 0$  und  $q(w) < 0$ .

Dieselben Bezeichnungen verwendet man auch für reelle symmetrische Matrizen  $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ , wenn die zugehörige quadratische Form  $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $q_A(v) = v^\top A v$  die entsprechende Eigenschaft hat. Allgemeiner verwenden wir sie auch im Fall eines beliebigen angeordneten Grundkörpers. Positive definite Matrizen kennen wir bereits aus 1.12.21 im Fall von reellen symmetrischen und, über die hier diskutierte Terminologie hinausgehend, im Fall von komplexen hermiteschen Matrizen.

2.3.22 (**Prüfen von Definitheitseigenschaften**). Um die Definitheitseigenschaften einer reellen symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von 2.3.11 erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hauptminoren-Kriterium 2.3.25 schnell zum Ziel führen.

**Satz 2.3.23 (Sylvester'scher Trägheitssatz).** *Gegeben ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $a$  gibt es stets eine angeordnete Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ , in der die Fundamentalmatrix von  $a$  die Gestalt*

$$F_{\mathcal{B}}(a) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

*annimmt. Die Zahl der Einsen, Minus-Einsen und Nullen wird hierbei durch besagte Bilinearform bereits eindeutig festgelegt.*

2.3.24. Die Differenz zwischen der Zahl der Minus-Einsen und der Zahl der Einsen heißt in diesem Kontext die **Signatur** unserer symmetrischen Bilinearform. Ich nenne das Tripel  $(p, m, n)$  aus der Zahl der Einsen, der Minus-Einsen und der Nullen den **Typ** unserer quadratischen Form. Die Signatur ist dann  $p - m$  und der Rang  $p + m$ . Das Supremum über die Dimensionen aller „negativ definiten“ Teilräume, also das  $m$ , nennt man den **Index** unserer Bilinearform. Er ist auch im Fall unendlichdimensionaler Vektorräume über einem angeordneten Körper mit einer symmetrischen Bilinearform noch sinnvoll definiert, kann aber dann den Wert  $\infty$  annehmen.

*Beweis.* Die Existenz einer Basis mit den geforderten Eigenschaften folgt unmittelbar aus der Existenz einer Orthogonalbasis 2.3.11, indem wir deren Vektoren mit geeigneten Skalaren multiplizieren. Die Zahl der Nullen ist wohlbestimmt als die Dimension des Radikals  $V_0$ . Ich behaupte, daß die Zahl der Einsen beziehungsweise Minus-Einsen beschrieben werden kann als die jeweils maximal mögliche Dimension für einen Teilraum, auf dem unsere Bilinearform positiv definit beziehungsweise negativ definit ist. Sind in der Tat  $V_+ \subset V$  und  $V_- \subset V$  Teilräume der maximal möglichen Dimension mit dieser Eigenschaft, ja sogar irgendwelche

Teilräume mit dieser Eigenschaft, so folgt  $V_- \cap V_0 = 0$  und  $V_+ \cap (V_- \oplus V_0) = 0$  und damit

$$\dim V_+ + \dim V_- + \dim V_0 \leq \dim V$$

Für jede Orthogonalbasis  $B$  bezeichne nun  $B_+$ ,  $B_-$  und  $B_0$  die Teilmenge derjenigen Basisvektoren, deren Paarung mit sich selber eine positive Zahl beziehungsweise eine negative Zahl beziehungsweise Null ergibt. So haben wir natürlich

$$|B_+| + |B_-| + |B_0| = \dim V$$

Da aber wegen der Maximalität von  $V_{\pm}$  offensichtlich gilt  $|B_{\pm}| \leq \dim V_{\pm}$  und da  $|B_0| \leq \dim V_0$  eh klar ist, muß bei diesen letzten Ungleichungen überall Gleichheit gelten.  $\square$

**Satz 2.3.25 (Hauptminoren-Kriterium für positive Definitheit).** *Eine reelle symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix ist positiv definit genau dann, wenn für alle  $l \leq n$  die quadratische Untermatrix, die man durch Wegstreichen der letzten  $l$  Spalten und der untersten  $l$  Zeilen erhält, eine positive Determinante hat.*

2.3.26. Unser Kriterium wird auch als **Hurwitz-Kriterium** zitiert. Es gilt mit demselben Beweis auch für Matrizen mit Einträgen in einem beliebigen angeordneten Körper. Die naheliegende Verallgemeinerung mit positiv semidefinit und nichtnegativen Determinanten gilt nicht, wie schon das Beispiel der Diagonalmatrix  $\text{diag}(0, -1)$  zeigt. Weitere Definitheitskriterien speziell für Matrizen mit nichtnegativen Einträgen außerhalb der Diagonalen findet man in [SPW] 1.10.

*Beweis.* Wählen wir eine Orthogonalbasis der zu unserer Matrix gehörigen symmetrischen Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ , so hat die Determinante der zugehörigen diagonalen Fundamentalmatrix nach unserer Transformationsformel 2.1.8 für die Fundamentalmatrizen zu verschiedenen Basen dasselbe Vorzeichen wie die Determinante unserer Ausgangsmatrix. Ist also unsere Ausgangsmatrix nicht positiv definit und hat positive Determinante, so existiert ein zweidimensionaler Teilraum, auf dem sie negativ definit ist. Dieser Teilraum schneidet die Hyperebene  $(\mathbb{R}^{n-1} \times 0) \subset \mathbb{R}^n$  nach dem Dimensionssatz [LA1] 2.2.9 nicht nur in Null. Ist also unsere Ausgangsmatrix nicht positiv definit und hat positive Determinante, so ist die quadratische Untermatrix, die man durch Wegstreichen der letzten Spalte und der untersten Zeile erhält, nicht positiv definit. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis.  $\square$

**Satz 2.3.27 (Satz über Hauptachsentransformationen, Variante).** *Gegeben ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit zwei symmetrischen Bilinearformen, von denen die Erste ein Skalarprodukt ist, besitzt unser Vektorraum eine Basis, die sowohl orthonormal ist für die erste als auch orthogonal für die zweite Bilinearform.*

2.3.28. Ist also in Formeln  $V$  unser endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $s$  ein Skalarprodukt auf  $V$  und  $a$  eine weitere symmetrische Bilinearform, so besitzt  $V$  eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  mit  $s(v_i, v_j) = \delta_{ij}$  und  $a(v_i, v_j) = 0$  für  $i \neq j$ . Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch für endlichdimensionale komplexe Vektorräume mit zwei hermiteschen Bilinearformen, von denen die erste ein Skalarprodukt ist.

*Beweis.* Das ist nur eine Umformulierung des Satzes über Hauptachsentransformationen 2.2.7. Es ist aber schneller, den Beweis zu wiederholen. Wir finden nach 2.2.6 einen bezüglich unseres Skalarprodukts  $s$  selbstadjungierten Endomorphismus  $A$  von  $V$  mit

$$a(v, w) = s(Av, w) \quad \forall v, w \in V$$

Nach dem Spektralsatz 1.12.15 besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  in Bezug auf  $s$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Sie leistet das Gewünschte.  $\square$

**Korollar 2.3.29 (Singulärwertzerlegung).** *Gegeben eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen reellen oder komplexen Skalarprodukträumen gibt es stets eine Orthonormalbasis des Definitionsbereichs, die auf eine Familie von paarweise orthogonalen Vektoren des Wertebereichs abgebildet wird.*

2.3.30. In geeigneten Orthonormalbasen ist die Matrix unserer Abbildung mit hin eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen auf der Diagonalen. Diese Einträge sind wohldefiniert als die Quadratwurzeln der Eigenwerte des Produkts unserer Abbildung mit ihrer Adjungierten. Sie heißen die **Singulärwerte** unserer Abbildung.

2.3.31. Die Singulärwertzerlegung verallgemeinert unsere Polarzerlegungen von Automorphismen 1.12.23 und Endomorphismen 1.12.30: Wir erhalten genauer eine Polarzerlegung aus einer Singulärwertzerlegung, indem wir „zunächst die Vektoren unserer Orthonormalbasis mit einer positiv semidefiniten Abbildung auf die Länge ihrer Bilder strecken oder stauchen, und die so auf die richtige Länge gebrachten Vektoren durch eine Drehung in die richtigen Richtungen bringen“.

2.3.32. In der Sprache der Matrizen ausgedrückt besagt unser Korollar, daß es für jede reelle beziehungsweise komplexe Matrix  $A$  orthogonale beziehungsweise unitäre quadratische Matrizen  $C, K$  gibt derart, daß  $CAK = D$  diagonal ist mit nichtnegativen Einträgen. Diese Einträge sind dann wieder wohldefiniert und heißen die **Singulärwerte** unserer Matrix. Die Darstellung als Produkt  $A = C^{-1}DK^{-1}$  schließlich heißt eine **Singulärwertzerlegung** unserer Matrix  $A$ .

*Beweis.* Sei  $f : V \rightarrow W$  unsere Abbildung. Wir betrachten auf  $V$  zusätzlich zum Skalarprodukt  $s = s_V$  die positiv semidefinite symmetrische beziehungsweise hermitesche Bilinearform  $a(u, v) := s_W(f(u), f(v))$ . Die vorhergehenden



Varianten 2.3.27 und 2.3.28 des Satzes über Hauptachsentransformationen liefern dann unmittelbar die Behauptung.  $\square$

**2.3.33 (Gram'sche Determinante und Volumen).** Gegeben ein reeller Skalarproduktraum  $V$  mit Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  heißt die quadratische Matrix mit den Skalarprodukten  $\langle v_i, v_j \rangle$  als Einträgen auch die **Gram'sche Matrix** unserer Vektoren und ihre Determinante die **Gram'sche Determinante**. Bilden unsere Vektoren eine Basis, so ist die Gram'sche Matrix die Fundamentalmatrix unseres Skalarprodukts bezüglich dieser Basis. Sind die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig, so ist die Gram'sche Determinante offensichtlich Null. Sind sie linear unabhängig, so mag man die Wurzel der Gram'schen Determinante in der schmutzigen Anschauung als das „Volumen des von den Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  in ihrem Erzeugnis aufgespannten Parallelepips“ verstehen. Sei in der Tat ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $V = \mathbb{R}^n$  mit seinem Standardskalarprodukt. Für die Matrix  $M := (v_1 | \dots | v_n)$  mit unseren Vektoren in den Spalten bedeutet dann, wie bereits in [LA1] 6.2.6 diskutiert, in der schmutzigen Anschauung  $|\det M|$  das Volumen unseres Parallelepips. Unsere Gram'sche Matrix aber ist in diesem Fall gerade das Produkt  $M^\top M$  und dessen Determinante ergibt sich zu  $\det(M^\top M) = (\det M)^2$  wie behauptet.

## Übungen

*Übung 2.3.34.* Ist  $s$  ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum über einem angeordneten Körper und  $v_1, \dots, v_n$  eine endliche Familie von Vektoren von  $V$ , so ist die Matrix  $(s(v_i, v_j))_{ij}$  positiv semidefinit. Es reicht hierfür sogar, die Bilinearform  $s$  symmetrisch und positiv semidefinit anzunehmen. Hinweis: Man betrachte den Beweis von Satz 2.3.29 zur Singulärwertzerlegung.

*Ergänzende Übung 2.3.35.* Unter einer **bilinearen Paarung** von zwei Vektorräumen  $V, W$  über demselben Grundkörper  $K$  versteht man eine bilineare Abbildung  $b : V \times W \rightarrow K$ . Solch eine Paarung heißt **nichtausgeartet**, wenn es für jedes  $v \in V \setminus 0$  ein  $w \in W$  gibt mit  $b(v, w) \neq 0$  und umgekehrt auch für jedes  $w \in W \setminus 0$  ein  $v \in V$  mit  $b(v, w) \neq 0$ . Andernfalls heißt unsere Paarung **ausgeartet**. Man zeige das **Lemma von Mackey**: Gegeben eine nichtausgeartete Paarung  $b : V \times W \rightarrow K$  zwischen zwei Vektorräumen  $V, W$  unendlicher Dimension mit abzählbarer Basis gibt es stets eine Basis  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $V$  und eine Basis  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $W$  derart, daß gilt  $b(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ . Hinweis: Man beginne mit zwei beliebigen Basen und wechsele geeignete Basen.

*Ergänzende Übung 2.3.36.* Gegeben zwei Vektorräume  $V, W$  mit einer bilinearen Paarung  $b : V \times W \rightarrow K$  und eine Teilmenge  $T \subset W$  setzen wir ganz allgemein

$$T^\perp := \{v \in V \mid b(v, t) = 0 \quad \forall t \in T\}$$



und nennen  $T^\perp$  wie in 1.3.16 den **Orthogonalraum von  $U$** . Gegeben zwei Vektorräume  $V, W$  mit einer nichtausgearteten Paarung  $b : V \times W \rightarrow K$  und ein Untervektorraum  $U \subset W$  zeige man für die Dimension des Orthogonalraums  $U^\perp$  von  $U$  die Formel  $\dim U + \dim U^\perp = \dim W$ .

*Ergänzende Übung 2.3.37 (Restriktionen reeller quadratischer Formen).* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer quadratischen Form alias symmetrischen Bilinearform  $s$  und sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum der Kodimension  $\operatorname{codim}(U \subset V) = 1$ . Sei  $(V, s)$  vom Typ  $(p, m, n)$  in der Terminologie aus 2.3.24. So gibt es für den Typ von  $U$  nur die vier Alternativen  $(p-1, m, n)$ ,  $(p, m-1, n)$ ,  $(p, m, n-1)$  und  $(p-1, m-1, n+1)$ . Des weiteren werden von diesen Alternativen alle, die keine negativen Einträge haben, auch tatsächlich realisiert. Hinweis: Am einfachsten ist der Fall  $U^\perp + U = V$ . Sonst gilt  $V^\perp \subset U^\perp \subset U$  und man unterscheidet die Fälle  $V^\perp = U^\perp$  und  $V^\perp \neq U^\perp$ . Im zweiten Fall wählt man  $v \in V \setminus U$  beliebig und findet  $w \in U^\perp$  mit  $s(v, w) \neq 0$ . Dann ist die Form nichtausgeartet auf  $\langle v, w \rangle$  und das orthogonale Komplement  $\langle v, w \rangle^\perp$  dieser Ebene ist auch ein Vektorraumkomplement und der Fall ist erledigt. Im ersten Fall kann man zu  $U/U^\perp \subset V/U^\perp$  übergehen. Da dann die Form auf  $U/U^\perp$  nicht ausgeartet ist, ist wieder das orthogonale Komplement ein Vektorraumkomplement und das Argument ist schnell fertig.

*Ergänzende Übung 2.3.38 (Signatur auf Subquotienten).* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer nichtausgearteten quadratischen Form alias symmetrischen Bilinearform  $s$  und sei  $S \subset V$  ein Untervektorraum, auf dem die Restriktion unserer Bilinearform verschwindet. So hat die auf  $S^\perp/S$  induzierte Form dieselbe Signatur wie die ursprüngliche Form. Hinweis: Man mag sich mit Induktion auf den Fall  $\dim S = 1$  zurückziehen und diesen Fall auf die vorhergehende Übung 2.3.37 zurückführen.

*Ergänzende Übung 2.3.39.* Man zeige, daß im Raum aller invertierbaren symmetrischen reellen quadratischen Matrizen zwei Matrizen genau dann zu derselben Wegzusammenhangskomponente gehören, wenn sie denselben Typ im Sinne von 2.3.24 haben.

*Ergänzende Übung 2.3.40.* Gegeben zwei verschiedene Punkte der Ebene  $p, q \in \mathbb{R}^2$  und eine positive Zahl  $b < \|p - q\|$  zeige man, daß die Punkte  $r \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|r - p\| - \|r - q\| = b$  einen Hyperbelast bilden, als da heißt, daß die Menge dieser Punkte unter einer geeigneten Bewegung in die Menge der Lösungen mit positiver  $x$ -Koordinate eines Gleichungssystems der Gestalt  $x^2 - \mu y^2 = c$  mit  $\mu, c$  positiv übergeht. Gegeben zwei verschiedene Punkte der Ebene  $p, q \in \mathbb{R}^2$  und eine positive Zahl  $a > \|p - q\|$  zeige man weiter, daß die Punkte  $r \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|r - p\| + \|r - q\| = a$  eine Ellipse bilden, als da heißt, daß die Menge dieser Punkte unter einer geeigneten Bewegung in die Menge der Lösungen eines Gleichungssystems der Gestalt  $x^2 + \mu y^2 = c$  mit  $\mu, c$  positiv übergeht. So erstellen

übrigends Gärtner elliptische Beete: Sie rammen zwei Pflöcke ein, legen um diese eine Seilschleife und fahren mit einem dritten Pflock in der Schleife um diese beiden Pflöcke herum, soweit außen wie möglich.

**Übung 2.3.41 (Inhomogene quadratische Formen).** Man zeige: Gegeben eine Polynomfunktion vom Grad höchstens Zwei mit Koeffizienten in einem Körper  $K$  mit  $\text{char } K \neq 2$ , also eine Abbildung  $q : K^n \rightarrow K$  der Gestalt

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} c_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + a$$

gibt es entweder einen Automorphismus von affinen Räumen  $D : K^n \rightarrow K^n$  mit

$$(q \circ D)(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + c$$

oder einen Automorphismus von affinen Räumen  $D : K^n \rightarrow K^n$  mit

$$(q \circ D)(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2 + y_n$$

für geeignete  $\lambda_i, c \in K$ . Hier können wir sogar erreichen, daß alle  $\lambda_i$  in einem vorgegebenen Repräsentantensystem des Quotienten  $K^\times / (K^\times)^2$  disjunkt vereinigt mit der Null liegen, im Fall  $K = \mathbb{R}$  also etwa in  $\{-1, 0, 1\}$  oder im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers in  $\{0, 1\}$ .

**Übung 2.3.42 (Klassifikation inhomogener quadratischer Formen).** Gegeben ein Körper  $K$  und ein affiner Raum  $E$  über  $K$  verstehen wir unter einer **inhomogenen quadratischen Form auf  $E$**  eine Abbildung  $Q : E \rightarrow K$ , die sich schreiben läßt in der Gestalt  $Q(p + \vec{v}) = q(\vec{v}) + a(p + \vec{v})$  mit  $q : \vec{E} \rightarrow K$  einer quadratischen Form auf  $\vec{E}$  und  $a : E \rightarrow K$  affin. Man diskutiere die Klassifikation inhomogener quadratischer Formen auf endlichdimensionalen affinen Räumen über den Körpern  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ . Hinweis: 2.3.41.

**Übung 2.3.43 (Klassifikation von Geradenpaaren im Raum).** Man zeige, daß die möglichen Vorgaben bestehend aus einem ungeordneten Paar von Geraden in einem dreidimensionalen affinen Raum über einem festen Körper in genau vier Isomorphieklassen zerfallen. In der Schule lernt man diese man üblicherweise als „gleich, parallel, sich schneidend und windschief“ kennen.

## 2.4 Satz von Witt\*

2.4.1. Seien  $(V, a)$  und  $(W, b)$  Vektorräume mit symmetrischen Bilinearformen. Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **isometrisch**, wenn gilt

$$a(u, v) = b(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in V$$

**Satz 2.4.2 (von Witt).** Seien  $K$  ein Körper einer Charakteristik  $\text{char } K \neq 2$  und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum endlicher Dimension und  $b : V \times V \rightarrow K$  eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Ist  $U \subset V$  ein Untervektorraum und  $\varphi : U \hookrightarrow V$  eine isometrische Injektion, so gibt es eine Fortsetzung von  $\varphi$  zu einem isometrischen Isomorphismus  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ .

*Beispiel 2.4.3.* Ist etwa der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der Lorentzmetrik, so können je zwei von Null verschiedene lichtartige Vektoren ineinander überführt werden durch einen Automorphismus, der die Lorentzmetrik erhält.

*Beweis.* Es reicht, die Existenz einer Fortsetzung von  $\varphi$  auf einen echt größeren Teilraum nachzuweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

*Fall 1:* Die Einschränkung  $b : U \times U \rightarrow K$  unserer Form ist ausgeartet. Dann gibt es  $u \in U \setminus \{0\}$  mit  $b(u, v) = 0 \quad \forall v \in U$ . Wir suchen zunächst ein  $u_1 \in V$  mit  $b(u, u_1) = 1$  und finden es, da  $b$  auf  $V$  nicht ausgeartet ist. Indem wir notfalls  $u_1$  durch  $u_1 + \lambda u$  mit  $\lambda \in K$  ersetzen, dürfen wir  $b(u_1, u_1) = 0$  annehmen, und nach Annahme gilt  $u_1 \notin U$ . Ebenso finden wir  $u_2 \in V$  mit  $b(u_2, \varphi(v)) = b(u_1, v)$  für alle  $v \in U$ , ja sogar für alle  $v \in V$ . Wieder können wir, indem wir notfalls  $u_2$  durch  $u_2 + \mu \varphi(u)$  ersetzen,  $b(u_2, u_2) = 0$  annehmen. Dann aber können wir  $\varphi$  ausdehnen auf  $U + \langle u_1 \rangle$  durch die Vorschrift  $\varphi(u_1) = u_2$ . Das erledigt den Fall, daß  $b$  auf  $U$  ausgeartet ist.

*Fall 2:* Die Einschränkung von  $b$  auf  $U$  ist nichtausgeartet. In diesem Fall argumentieren wir mit Induktion über  $\dim_K U$ . Für die Induktionsbasis sei  $U = \langle u \rangle$  eindimensional. Dann gilt also  $b(u, u) \neq 0$  und ebenso  $b(\varphi(u), \varphi(u)) \neq 0$ . Gälte  $b(u + \varphi(u), u + \varphi(u)) = 0 = b(u - \varphi(u), u - \varphi(u))$ , so folgte  $2b(u, u) + 2b(u, \varphi(u)) = 0 = 2b(u, u) - 2b(u, \varphi(u))$  und damit  $4b(u, u) = 0$  alias  $b(u, u) = 0$ . Da das nicht sein kann, dürfen wir, indem wir notfalls  $\varphi$  durch  $-\varphi$  ersetzen, für  $v := u - \varphi(u)$  annehmen, daß gilt  $b(v, v) \neq 0$ . Dann betrachten wir die lineare Abbildung  $s = s_v$  mit  $s(v) = -v$  und  $s(w) = w \quad \forall w \in v^\perp$ . Sie ist isometrisch und hat die Eigenschaft  $s : u + \varphi(u) \mapsto u + \varphi(u)$  und  $s : u - \varphi(u) \mapsto \varphi(u) - u$  und folglich  $s : u \mapsto \varphi(u)$ . Diese Abbildung dehnt folglich  $\varphi$  sogar orthogonal auf ganz  $V$  aus. Für den Induktionsschritt sei  $\dim_K U > 1$ . Dann können wir sicher  $U = W \oplus W_U^\perp$  zerlegen mit  $W \neq 0 \neq W_U^\perp$ , wobei mit  $W_U^\perp$  der Orthogonalraum in  $U$  gemeint ist. Zu unserem  $\varphi : U \hookrightarrow V$  gibt es nach Induktionsannahme einen mit der Bilinearform verträglichen Automorphismus  $s : V \xrightarrow{\sim} V$  mit  $s|_W = \varphi|_W$ . Also ist  $s^{-1} \circ \varphi : U \hookrightarrow V$  die Identität auf  $W$  und seine Restriktion zu einer Einbettung  $W_U^\perp \hookrightarrow W^\perp$  läßt sich wieder nach Induktion zu einem isometrischen Isomorphismus  $t : W^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$  ausdehnen. Dann ist  $(\text{id}_W \oplus t) : V \xrightarrow{\sim} V$  eine Ausdehnung von  $s^{-1} \circ \varphi$  und damit  $s \circ (\text{id}_W \oplus t)$  die gesuchte Ausdehnung von  $\varphi$ .  $\square$

## Übungen

**Übung 2.4.4 (Variante des Satzes von Witt für ausgeartete Bilinearformen).** Man gebe ein Gegenbeispiel zum Satz von Witt an im Fall einer ausgearteten symmetrischen Bilinearform. Man zeige andererseits, daß die Aussage des Satzes weiter gilt, wenn wir ausgeartete Bilinearformen  $b$  erlauben, dafür aber zusätzlich  $U \cap \text{rad}(b) = \varphi(U) \cap \text{rad}(b) = 0$  fordern.

## 2.5 Alternierende Bilinearformen

2.5.1. Man erinnere aus [LA1] 6.3.1, daß eine Bilinearform **alternierend** heißt, wenn Null herauskommt, sobald wir zweimal denselben Vektor einsetzen. Ich kann für dieses Konzept leider keine Anschauung anbieten.

**Satz 2.5.2 (Klassifikation alternierender Bilinearformen).** *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  und eine alternierende Bilinearform  $\omega : V \times V \rightarrow K$  besitzt  $V$  stets eine angeordnete Basis  $\mathcal{B}$ , bezüglich derer die Fundamentalmatrix von  $\omega$  die Gestalt*

$$F_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

*hat. Die Zahl der Zweierblöcke hängt hierbei nicht von der Wahl der Basis ab.*

**Vorschau 2.5.3.** Eine Variante für freie abelsche Gruppen mit alternierender nicht ausgearteter Bilinearform wird in [KAG] 2.9.1 bewiesen.

**Beweis.** Ist unsere Form nicht Null, so finden wir  $v, w \in V$  mit  $\omega(v, w) \neq 0$ . Durch Multiplikation von  $v$  mit einem Skalar erreichen wir sogar  $\omega(v, w) = 1$  und damit  $\omega(w, v) = -1$ . Diese beiden Vektoren  $v, w$  können wir schon einmal als die ersten beiden Vektoren unserer Basis in spe festhalten. Wir betrachten nun die Linearformen  $\omega(v, \cdot) : V \rightarrow K$  und  $\omega(w, \cdot) : V \rightarrow K$ . Sie sind beide nicht Null und ihre Kerne sind verschieden, genauer liegt  $v$  im Kern der ersten, nicht aber der zweiten Abbildung und  $w$  im Kern der Zweiten, nicht aber der Ersten. Für den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid \omega(v, u) = 0 = \omega(w, u)\}$$

haben wir also  $\dim S = \dim V - 2$  und  $(Kv \oplus Kw) \cap S = 0$ . Aus Dimensionsgründen folgt

$$V = (Kv \oplus Kw) \oplus S$$

und eine offensichtliche Induktion über die Dimension beendet den Beweis der Existenz. Die Zahl der Nullen nach den Zweierkästchen kann beschrieben werden als die Dimension des Radikals unserer Bilinearform und ist deshalb ebenso wie die Zahl der Zweierkästchen von der Wahl der Basis unabhängig.  $\square$

2.5.4. Eine im Sinne von 2.3.35 nichtausgeartete alternierende Bilinearform heißt auch eine **symplektische Form**, und ein mit einer symplektischen Form versehener Vektorraum heißt ein **symplektischer Vektorraum**. Symplektische Vektorräume spielen in der Hamilton'schen Mechanik eine wichtige Rolle. Nach 2.5.2 ist die Dimension eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums stets gerade.

## Übungen

*Übung 2.5.5.* In einem endlichdimensionalen symplektischen Vektorraum können je zwei von Null verschiedene Vektoren durch einen die symplektische Form erhaltenden Automorphismus ineinander überführt werden.

*Übung 2.5.6.* Gegeben eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  über einem Körper der Charakteristik Zwei existiert stets eine Zerlegung in paarweise orthogonale Teilräume  $V = V_d \oplus V_a$  derart, daß die Restriktion auf  $V_d$  eine Orthogonalbasis besitzt und die Restriktion auf  $V_a$  alternierend ist. Man zeige durch ein dreidimensionales Beispiel, daß selbst im Fall nichtausgearteter Formen die Dimensionen von  $V_d$  und  $V_a$  durch unsere Bilinearform keineswegs eindeutig festgelegt werden.

*Ergänzende Übung 2.5.7.* Gegeben eine alternierende Bilinearform  $\omega$  auf einem Vektorraum  $V$  der Dimension  $2n$  zeige man, daß man eine alternierende  $(2n)$ -Multilinearform  $\omega^{\wedge n}$  auf  $V$  erklären kann durch die Vorschrift

$$\omega^{\wedge n}(v_1, \dots, v_{2n}) := \sum_{\sigma \in R} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \dots \omega(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)})$$

mit  $R \subset \mathcal{S}_{2n}$  der Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, 2n\}$  mit den Eigenschaften  $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$  für alle  $i$  und  $\sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(2n-1)$ . Für  $g \in \operatorname{GL}(V)$  zeige man  $(\omega \circ (g \times g))^{\wedge n} = (\det g) \omega^{\wedge n}$ . Weiter zeige man, daß für  $\omega$  eine symplektische Form die Multilinearform  $\omega^{\wedge n}$  von Null verschieden ist. Sobald Sie einmal mit dem Dachprodukt  $\wedge$  in der äußeren Algebra  $\bigwedge V^*$  vertraut sind, können Sie  $\omega^{\wedge n}$  auch als die  $n$ -te Potenz  $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \dots \wedge \omega$  in der äußeren Algebra verstehen, daher die Notation.

*Ergänzende Übung 2.5.8.* Sei  $K$  ein Körper. Gegeben eine **alternierende** Matrix  $A \in \text{Mat}(2n; K)$  alias eine Matrix mit  $A = -A^\top$  und mit Nullen auf der Diagonale erklären wir ihre **Pfaff'sche Determinante**  $\text{Pf}(A)$  mithilfe ihrer alternierenden Bilinearform  $\omega_A(v, w) := v^\top A w$  und der zugehörigen Multilinearform  $\omega_A^{\wedge n}$  aus 2.5.7 durch die Identität

$$\omega_A^{\wedge n} = \text{Pf}(A) \det$$

im eindimensionalen Raum  $\text{Alt}^{2n}(K^{2n})$  aller Multilinearformen auf dem  $K^{2n}$ . Für  $B \in \text{Mat}(2n; K)$  folgere man

$$\text{Pf}(B^\top A B) = (\det B) \text{Pf}(A)$$

Weiter zeige man  $\text{Pf}(S) = 1$  für  $S \in \text{Mat}(2n; K)$  die blockdiagonale Matrix mit  $n$  Blöcken  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  und folgere, daß das Quadrat der Pfaff'schen Determinante die übliche Determinante ist, in Formeln

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$$

*Ergänzende Übung 2.5.9.* Gegeben ein symplektischer Vektorraum  $(V, \omega)$  heißt ein Vektorraumautomorphismus  $g : V \xrightarrow{\sim} V$  **symplektisch**, wenn gilt  $\omega(gv, gw) = \omega(v, w) \forall v, w \in V$ . Man zeige, daß jeder symplektische Automorphismus  $g$  eines endlichdimensionalen symplektischen Vektorraums die Determinante  $\det(g) = 1$  hat. Hinweis: 2.5.7.

*Ergänzende Übung 2.5.10.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  erhalten wir eine symplektische Form  $\omega$  auf  $V \oplus V^*$  durch die Vorschrift

$$\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \phi(w) - \psi(v)$$

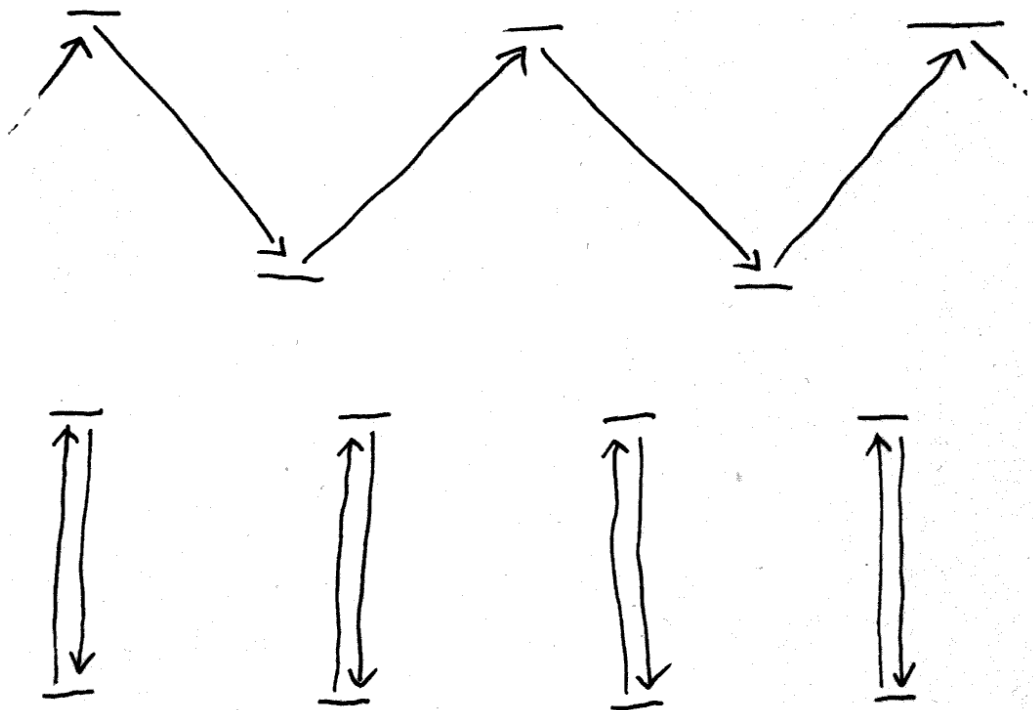
## 2.6 Relativistische Raumzeit\*

2.6.1 (**Erinnerungen zu klassischem Raum und klassischer Zeit**). In der Modellierung von Zeit und Raum für die Belange der Newton'schen Mechanik in ?? oder 1.6.4 haben wir erst einmal ignoriert, daß die Erde sich um sich selber dreht und dabei gleichzeitig um die Sonne rast, die sich hinwiederum mit unvorstellbarer Geschwindigkeit um das Zentrum der Milchstraße bewegt, und so weiter, und sind schlicht von einem dreidimensionalen affinen Raum ausgegangen, von dessen Punkten man einige ganz explizit als Kirchturmspitzen, Zimmerecken und dergleichen angeben kann. Dann haben wir eine Gruppe von „Bewegungen“ unseres Raums postuliert und verwendet, um den eindimensionalen Raum der Längen einzuführen, in dem das Pariser Urmeter eine Basis auszeichnet. Zusätzlich haben wir einen orientierten eindimensionalen affinen Raum aller „Zeitpunkte“ postuliert und in dessen Richtungsraum die Basis „Sekunde“ mithilfe von Tag und

ausgezeichnet. In diesem Rahmen ist dann schon klar, was gemeint ist, wenn wir sagen, die Lichtgeschwindigkeit betrage so in etwa 300 000 Kilometer pro Sekunde.

**2.6.2 (Motivation für relativistische Raumzeit).** Sobald wir jedoch dies alles nicht mehr ignorieren, ist es plötzlich gar nicht mehr so klar: Es gibt dann sozusagen gar keinen „festen Raum“ mehr, in dem unsere Lichtgeschwindigkeit konstant sein könnte, sondern „alles ist relativ“. Denken wir uns etwa zwei Raketen, die in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeifliegen, und einen Lichtstrahl, der in Richtung der einen Rakete zwischen ihnen hindurchsaust. Müßte in diesem Fall nicht von den beiden Besatzungen für diesen Lichtstrahl eine unterschiedliche Geschwindigkeit gemessen werden? Statt im weiteren stets von „Rakete Eins“ und „Rakete Zwei“ zu reden, denken wir uns der Klarheit der Darstellung halber lieber den einen Beobachter in einem sehr langen Zug und nennen ihn den Schaffner, und denken uns den anderen Beobachter auf einem Bahnhof, durch den der besagte Zug fährt, und nennen ihn den Bahnhofsvorsteher. Der Schaffner mißt seinen Zug sorgfältig aus und setzt sich genau in die Mitte. Gerade zu dem Zeitpunkt, zu dem sich Schaffner und Bahnhofsvorsteher gegenüberstehen, sehen beide auch noch die Vorder- und die Rücklichter des Zuges aufleuchten. Daraus ziehen sie jedoch unterschiedliche Schlüsse. Der Schaffner sagt: Na klar, die sind gleichzeitig angekommen. Der Bahnhofsvorsteher dahingegen meint: Als diese Lampen ihr Licht ausgesandt haben, das ist ja nun eine kleine Weile her, war die Lokomotive noch näher am Bahnhof als der Schlußwagen, folglich müssen die Lichter des Schlußwagens etwas früher angekommen sein, damit ihr Licht dennoch meine Augen zur selben Zeit erreichen konnte wie das Licht aus den Lampen der Lokomotive. Wer hat aber denn nun recht? Unmittelbar würde man wohl erst einmal sagen: Der Bahnhofsvorsteher hat recht, denn er bewegt sich nicht; Dann aber erinnert man sich, daß ja auch der Bahnhof selbst durchs Weltall rast und daß es sich auch um unsere zwei Raketen handeln könnte, und dann fällt uns die Entscheidung möglicherweise schon nicht mehr so leicht, wer von beiden denn nun recht hat.

**2.6.3 (Das Konzept einer absoluten Zeit muß aufgegeben werden).** Die „Relativitätstheorie“ löst diesen Widerspruch wie folgt auf: Beide haben recht und wir müssen unsere Vorstellung von einer „absoluten Zeit“ aufgeben. Was für den einen Beobachter gleichzeitig ist, ist es für den anderen noch lange nicht! Präziser modelliert man in der Relativitätstheorie Raum und Zeit gemeinsam als eine Menge von „Raum-Zeit-Punkten“ oder „Ereignissen“. Das Aufleuchten eines Vorderlichts unseres Zuges etwa wäre solch ein Ereignis, oder auch das Aufleuchten eines Rücklichts. Jeder unserer beiden Beobachter ordnet jedem derartigen Ereignis in einer Weise, die wir noch ausführlich diskutieren werden, vier reelle Zahlen zu: Drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate. Und in unserem speziellen



Dies Bild zeigt eine ruhende und eine bewegte „Lichtuhr“, bestehend aus zwei Spiegeln und einem Zähler, der zählt, wie oft ein Lichtstrahl dazwischen hin- und hersaust. Offensichtlich scheint die bewegte Lichtuhr langsamer zu gehen als die Zeit im im Koordinatensystem der ruhenden Lichtuhr. Hier müssen wir uns denken, daß im ruhenden Koordinatensystem ganz viele Lichtuhren aufgestellt und synchronisiert wurden wie oben schematisch dargestellt. Der Beobachter im bewegten System wird jedoch einwenden, daß von seinem Gesichtspunkt aus diese ganzen Uhren keineswegs synchron gehen.



Fall würde eben der Schaffner den beiden fraglichen Aufleucht-Ereignissen dieselbe Zeitkoordinate zuordnen, der Bahnhofsvorsteher dahingegen verschiedene Zeitkoordinaten.

2.6.4 (**Längenkontraktion**). Das hat hinwiederum auch für die Längenmessung Konsequenzen: Der Bahnhofsvorsteher würde ja wohl vernünftigerweise die Länge des Zuges erklären, indem er gleichzeitig in seinem Sinne die Ortskoordinaten von Lokomotive und Schlußwagen bestimmt und die Differenz bildet. Er wird dabei eine kürzere Länge erhalten als der Schaffner, der seinerseits behaupten würde, der Bahnhofsvorsteher habe etwas früher den Ort der Lokomotive bestimmt und erst etwas später den Ort des Schlußwagens. Wie ist es aber nun um die Breite des Zuges bestellt? Nun, beide messen in der Tat dieselbe Breite für unseren Zug, was die absonderliche Konsequenz hat, daß der Bahnhofsvorsteher mit vollem Recht behaupten wird, ein Zollstock, mit dem der Schaffner die Breite des Zuges gemessen hat, verkürze sich, wenn der Schaffner ihn nun in Richtung des Zuges dreht, um damit die Länge des Zuges auszumessen. Man mache sich jedoch auch bewußt, daß ein Zollstock ja genau genommen aus einer großen Menge von Atomen besteht, deren wechselseitige Position durch elektromagnetische Kräfte bestimmt wird, also in gewisser Weise durch den Austausch von Lichtsignalen. Nach diesen informellen Vorüberlegungen beginnen wir nun mit der präzisen Formulierung.

2.6.5. In der **Relativitätstheorie** modelliert man Raum und Zeit zusammen als eine Menge

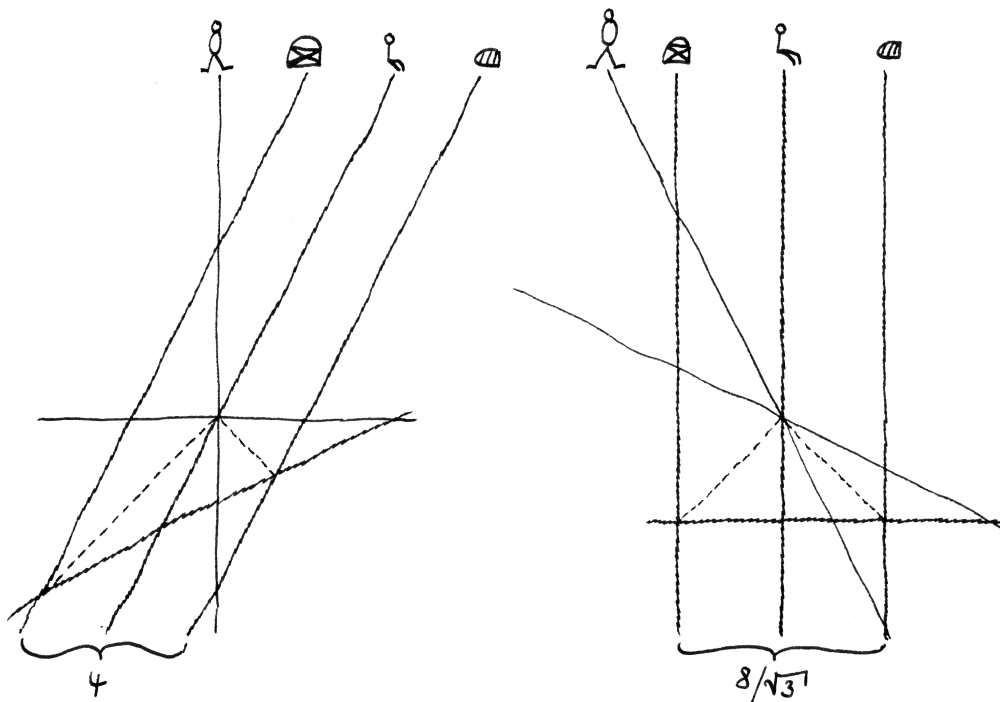
$$X$$

Deren Elemente heißen **Raum-Zeit-Punkte** oder auch **Ereignisse**. Die Menge  $X$  selbst nennt man die **Raumzeit**. Die Bewegung einer Fliege etwa wird durch eine Teilmenge von  $X$  beschrieben. Ort und Zeit einer Klausur wird beschrieben durch ein Element von  $X$  oder, da eine Klausur ja eine Weile dauert und in einem nicht ganz kleinen Hörsaal stattfindet, vielleicht auch eher durch eine Teilmenge von  $X$ . Die Ausbreitung des Lichts modellieren wir durch eine Teilmenge

$$\mathcal{L}^+ \subset X^2$$

Wir denken uns diese Teilmenge in der schmutzigen Anschauung als die Menge aller Paare von Raum-Zeit-Punkten  $(p, q) \in X^2$  derart, daß eine am Raum-Zeitpunkt  $p$  stattfindende Explosion am Raum-Zeitpunkt  $q$  gesehen würde. Wir sagen dann,  $q$  liege **kausal lichtartig zu**  $p$ . Um mathematische Präzision zu erreichen, vereinbaren wir explizit  $(p, p) \in \mathcal{L}^+ \forall p \in X$ .

2.6.6. In der **speziellen Relativitätstheorie** nimmt man zusätzlich an, daß  $X$  so mit der Struktur eines vierdimensionalen reellen affinen Raums versehen werden kann, daß die folgenden beiden Verträglichkeiten zwischen  $\mathcal{L}^+$  und dieser Struktur



Diese Bilder stellen die Sichtweisen des Bahnhofsvorstehers und des Schaffners in 2.6.3 dar. Beide benutzen Einheiten, in denen die Lichtgeschwindigkeit Eins ist. Die Lichtbewegung ist jeweils gestrichelt eingetragen. Im linken Schaubild hat der Bahnhofsvorsteher Ort gegen Zeit aufgetragen von Rücklicht, Schaffner und Vorderlicht, wobei seine Zeitachse senkrecht nach oben zeigt und seine Ortsachse waagerecht nach rechts. Der Zug fährt halbe Lichtgeschwindigkeit, und die Zackenlinie durch die beiden „Lampen-gehen-an-Punkte“ besteht aus Ereignissen, denen der Schaffner allen dieselbe Zeitkoordinate geben würde, sagen wir die Zeitkoordinate Null. Das rechte Schaubild hat der Schaffner gezeichnet. Beide wählen ihre Orts- und Zeitkoordinaten  $(x(p), t(p)) \in \mathbb{R}^2$  für den Bahnhofsvorsteher beziehungsweise  $(x'(p), t'(p)) \in \mathbb{R}^2$  für den Schaffner eines Ereignisses  $p$  derart, daß für je zwei Ereignisse  $p, q$  gilt

$$(x(p) - x(q))^2 - (t(p) - t(q))^2 = (x'(p) - x'(q))^2 - (t'(p) - t'(q))^2$$

Sie finden so die Umrechnung  $x' = (\sqrt{1+b^2})x + bt$  und  $t' = bx + (\sqrt{1+b^2})t + 4/\sqrt{3}$  mit  $b = -\sqrt{1/3}$ . Wie Sie sehen, scheint dem Schaffner sein Zug um den Faktor  $2/\sqrt{3}$  länger als dem Bahnhofsvorsteher.

gelten: Erstens soll  $\mathcal{L}^+$  stabil sein unter der diagonalen Operation des Richtungsraums  $\vec{X}$  auf  $X^2$ . Liegt also  $q$  kausal lichtartig zu  $p$ , so soll auch  $q + v$  kausal lichtartig zu  $p + v$  liegen für jeden Richtungsvektor  $v \in \vec{X}$ . Und zweitens soll die Menge der **kausal lichtartigen Vektoren**

$$\vec{\mathcal{L}}^+ := \{v \in \vec{X} \mid (p, p + v) \in \mathcal{L}^+ \forall p \in X\}$$

die „Hälfte einer Quadrik vom Typ  $(1, 1, 1, -1)$ “ sein, es soll also in Formeln linear unabhängige Linearformen  $x, y, z, t : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$  geben mit

$$\vec{\mathcal{L}}^+ = \{v \in \vec{X} \mid x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0, t(v) \geq 0\}$$

Einen Vektor, der entweder selbst kausal lichtartig ist oder dessen Negatives kausal lichtartig ist, heißt **lichtartig**. Die Elemente der konvexen Hülle der Menge der kausal lichtartigen Vektoren nennt man dann **kausal**, ihre Negativen **antikausal**, die weder kausalen noch antikausalen Vektoren **raumartig** und die weder raumartigen noch lichtartigen Vektoren **zeitartig**. In unserer Terminologie ist also der Nullvektor weder raumartig noch zeitartig. Die Bezeichnung als „kausaler Vektor“ soll das fundamentale Postulat zum Ausdruck bringen, daß ein Ereignis nur Ereignisse beeinflussen kann, die von ihm aus durch die Addition derartiger Vektoren erreichbar sind, daß also „keine Wirkung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausgeübt werden kann“.

## Übungen

*Übung 2.6.7 (Der Schaffner will den Zollstock in einen Gulli werfen).* Nehmen wir in 2.6.4 einmal an, der Zollstock des Schaffners sei etwas länger als der Durchmesser eines offenen Gullis auf dem Bahnhof. Der Schaffner streckt den Arm aus dem Fenster und läßt den Zollstock genau zum richtigen Zeitpunkt genau waagrecht runterfallen. Paßt er dann dank Längenkontraktion doch durch die Öffnung des Gullis, oder eben nicht? Wie beschreibt der Bahnhofsvorsteher, was er sieht?

## 2.7 Relativistische Längeneinheiten\*

2.7.1. Die Papierebene haben wir in 1.1.10 als Kongruenzebene durch die Angabe einer ausgezeichneten Gruppe von Kongruenzen modelliert und haben gesehen, wie dieses Datum eine euklidische Struktur 1.5.1 auf dem Richtungsraum liefert und damit nach 1.5.11 eine Gerade von Längeneinheiten. Für den Anschauungsraum der klassischen Mechanik kann man genauso vorgehen, vergleiche 1.6. Im Fall des Raumzeit gehen wir stattdessen davon aus, daß wir in ihrem Richtungsraum den Lichtkegel kennen, und zeigen im folgenden, wie man davon ausgehend

eine „pseudoeuklidische Struktur“ erklären kann, aus der wir dann wieder ein Gerade von „relativistischen Längeneinheiten“ konstruieren können.

**Lemma 2.7.2.** *Haben zwei nichtausgeartete indefinite quadratische Formen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum dieselben Nullstellen, so sind sie linear abhängig alias gleich bis auf eine multiplikative Konstante.*

*Beweis.* Sicher reicht es zu zeigen, daß jede quadratische Form  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die für  $0 < s < n$  auf der Nullstellenmenge  $\mathcal{L}$  des Polynoms  $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 \dots - x_n^2$  verschwindet, ein skalares Vielfaches dieses Polynoms sein muß. Schränken wir unsere Form auf die Ebene ein, auf der alle Koordinaten außer  $x_1$  und  $x_n$  verschwinden, so wird sie nach [LA1] 5.4.5 ein skalares Vielfaches von  $x_1^2 - x_n^2 = (x_1 + x_n)(x_1 - x_n)$ . Schränken wir unsere Form allgemeiner auf eine Ebene  $\{r\vec{v} + t\vec{w}\}$  ein mit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^s \times 0$  und  $\vec{w} \in 0 \times \mathbb{R}^{n-s}$  Vektoren der euklidischen Norm  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ , so gibt es aus demselben Grund  $a(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^\times$  mit

$$q(r\vec{v} + t\vec{w}) = a(\vec{v}, \vec{w})(r^2 - t^2)$$

von  $r^2 - t^2 = (r + t)(r - t)$ . Auswerten auf  $\vec{v}$  zeigt  $a(\vec{v}, \vec{w}_1) = a(\vec{v}, \vec{w}_2)$  für alle  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  und Auswerten auf  $\vec{w}$  zeigt ebenso  $a(\vec{v}_1, \vec{w}) = a(\vec{v}_2, \vec{w})$  für alle  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Die Behauptung folgt.  $\square$

2.7.3. Unter einer **präpseudoeuklidischen Struktur** auf einem reellen Vektorraum verstehen wir eine Menge  $T$  von symmetrischen Bilinearformen, die beschrieben werden kann als  $T = \mathbb{R}_{>0}s$  für eine symmetrische Bilinearform  $s$ . Unter einem **präpseudoeuklidischen Vektorraum** verstehen wir einen reellen Vektorraum mit einer ausgezeichneten präpseudoeuklidischen Struktur. Vektoren eines präpseudoeuklidischen Vektorraums heißen **orthogonal**, wenn sie unter einer und jeder zugehörigen Bilinearform zu Null paaren. Den **Nullkegel** in einem präpseudoeuklidischen Vektorraum  $V$  erklären wir als die Menge aller  $v \in V$  mit  $s(v, v) = 0$  für alle Bilinearformen  $s$  aus seiner präpseudoeuklidischen Struktur. Eine lineare Abbildung von präpseudoeuklidischen Vektorräumen heißt **präpseudoeuklidisch**, wenn jede Bilinearform der präpseudoeuklidischen Struktur des Zielraums zu einer Bilinearform der präpseudoeuklidischen Struktur der Ausgangsraums einschränkt. Einen präpseudoeuklidischen Automorphismus eines präpseudoeuklidischen Vektorraums nennen wir eine **lineare Ähnlichkeitsabbildung**.

2.7.4. Eine präpseudoeuklidische Struktur aus nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen nennen wir eine **pseudoeuklidische Struktur**. Pseudoeuklidische Strukturen aus Skalarprodukten sind genau unsere euklidischen Strukturen aus 1.5.1.

*Beispiel 2.7.5.* Der Richtungsraum der „Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie“ trägt eine nach 2.7.2 durch den Lichtkegel wohlbestimmte pseudo-euklidische Struktur vom Typ  $(3, 1)$ . Gehört eine symmetrische Bilinearform  $s$  zu dieser pseudo-euklidischen Struktur, so gilt für einen Richtungsvektor  $v$  ganz allgemein

$$\begin{aligned} s(v, v) > 0 &\Leftrightarrow v \text{ ist raumartig} \\ s(v, v) = 0 &\Leftrightarrow v \text{ ist lichtartig} \\ s(v, v) < 0 &\Leftrightarrow v \text{ ist zeitartig} \end{aligned}$$

2.7.6. Gegeben ein präpseudo-euklidischer Vektorraum  $V$  erklären wir einen orientierten höchstens eindimensionalen reellen Vektorraum  $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ , seine **Längengerade**. Ist  $V$  nicht Null, so erklären wir sie als die Menge aller Paare  $(S, v)$  aus einem Strahl  $S$  und einem Vektor  $v \in \langle S \rangle$  unter der Äquivalenzrelation, die gegeben wird durch die Vorschrift, daß  $(S, v) \sim (T, w)$  gleichbedeutend ist zu  $|s(v, v)| = |s(w, w)|$  für alle Bilinearformen  $s$  unserer präpseudo-euklidischen Struktur. Es ist klar, daß für jeden Strahl  $S$ , der nicht im Nullkegel enthalten ist, der Übergang zu Äquivalenzklassen eine Bijektion  $\langle S \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}$ ,  $v \mapsto [S, v]$  induziert und es genau eine Struktur als reeller Vektorraum auf  $\mathbb{L}$  gibt, für die alle diese Bijektionen Isomorphismen sind. Insbesondere ist unsere Längengerade nur dann der Nullraum, wenn unsere präpseudo-euklidische Struktur nur aus der Nullform besteht. Die Orientierung auf  $\mathbb{L}$  erklären wir im eindimensionalen Fall durch die Vorschrift  $\mathbb{L}_{\geq 0} = \{[S, v] \mid v \in S\}$  und im nulldimensionalen Fall als die Standardorientierung des Nullraums. Schließlich erklären wir noch die **Länge**

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{L}$$

im Fall  $V \neq 0$  durch die Vorschrift  $\|v\| := [S, v]$  mit  $v \in S$  und im Fall des Nullraums als die einzig mögliche Abbildung. Für jede präpseudo-euklidische Abbildung  $f : V \rightarrow W$  von präpseudo-euklidischen Vektorräumen gibt es genau eine lineare Abbildung  $\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(V) \rightarrow \mathbb{L}(W)$  mit  $\|v\| \mapsto \|f(v)\| \forall v \in V$ .

*Beispiel 2.7.7.* Die positiven Elemente der Längengerade des Richtungsraums der Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie heißen **relativistische Zeiteinheiten** oder gleichbedeutend **relativistische Längeneinheiten**.

2.7.8. Einen linearen Automorphismus eines präpseudo-euklidischen Vektorraums  $V$  nennen wir **orthogonal**, wenn er eine und jede Bilinearform der präpseudo-euklidischen Struktur erhält. Die Gruppe aller orthogonalen Automorphismen eines präpseudo-euklidischen Vektorraums  $V$  nennen wir seine **orthogonale Gruppe** und notieren sie

$$\mathrm{O}(V)$$

Ist  $V$  darüber hinaus endlichdimensional, so erklären wir weiter seine **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{SO}(V)$$

als die Untergruppe  $SO(V) \subset O(V)$  aller orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismen von  $V$ . Im Fall einer pseudoeuklidischen Struktur haben offensichtlich alle Elemente von  $O(V)$  die Determinante  $\pm 1$ .

2.7.9. Gegeben ein reeller affiner Raum  $E$  mit einer präpseudoeuklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum nennen wir diejenigen Affinitäten, deren Richtungsanteil orthogonal ist, die **orthogonalen Affinitäten**. Die Gruppe aller orthogonalen Affinitäten notieren wir  $O_{\text{aff}}(E)$  und nennen sie die **orthogonalaffine Gruppe**. Diejenigen Affinitäten, deren Richtungsanteil eine lineare Ähnlichkeit ist, nennen wir **Ähnlichkeiten**. Die Gruppe der Ähnlichkeiten notieren wir  $GO_{\text{aff}}(E)$ .

## Übungen

Übung 2.7.10. Gegeben der Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  mit der symmetrischen Bilinearform  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$  zeige man, daß die orthogonale Gruppe  $O(V)$  beschrieben werden kann als

$$O(V) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

Man verwendet vielfach die Notation  $\mathbb{R}^{p+q}$  für den Vektorraum  $\mathbb{R}^{p+q}$  mit der symmetrischen Bilinearform zur Fundamentalmatrix  $\text{diag}(I_p, -I_q)$  und die Notation  $O(p, q) := O(\mathbb{R}^{p+q})$ . Man zeige, daß die eben beschriebene Gruppe  $O(V)$  isomorph ist zu  $O(1, 1)$ . Man mag die ersteren Elemente oben „hyperbolische Rotationen“ nennen und die letzteren Elemente „hyperbolische Spiegelungen“.

## 2.8 Affine Struktur durch Lichtkegel\*

**Satz 2.8.1 (Alexandroff).** *Auf einer Menge  $X$  mit einer Relation  $\mathcal{L}^+ \subset X^2$  existiert höchstens eine Struktur als reeller affiner Raum der Dimension  $\dim_{\mathbb{R}} X = 4$  derart, daß es linear unabhängige Linearformen  $x, y, z, t$  auf dem zugehörigen Richtungsraum  $\vec{X}$  gibt mit*

$$\mathcal{L}^+ = \{(p, p+v) \mid v \in \vec{X} \text{ mit } x(v)^2 + y(v)^2 + z(v)^2 - t(v)^2 = 0 \text{ und } t(v) \geq 0\}$$

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus der anschließenden Proposition 2.8.3.  $\square$

2.8.2. Dieser Satz sagt uns, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Struktur der Raumzeit als reeller affiner Raum bereits durch die Vorgabe der Lichtkegel eindeutig bestimmt ist. Eine analoge Aussage für den Rahmen der klassischen Mechanik ist Satz [LA1] 3.3.1, nach dem die Struktur des klassischen Raums als reeller affiner Raum bereits durch die Vorgabe der Sichtlinien eindeutig bestimmt ist.

**Proposition 2.8.3.** *Man betrachte auf  $X := \mathbb{R}^4$  die Relation*

$$\mathcal{L}^+ := \{(p, p + (x, y, z, t)^\top) \in X^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0, t \geq 0\}$$

*Alle Bijektionen  $\phi : X \xrightarrow{\sim} X$ , die diese Relation festhalten, die also in Formeln die Eigenschaft  $(\phi \times \phi)(\mathcal{L}^+) = \mathcal{L}^+$  haben, sind affin.*

*Beweis.* Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor können allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschrieben werden als die maximalen Teilmengen  $L \subset X$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $p, q \in L$  gilt  $(p, q) \in \mathcal{L}^+$  oder  $(q, p) \in \mathcal{L}^+$ . Unsere Bijektion  $\phi$  überführt folglich Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor in ebensolche.
2. Gegeben ein Ereignis  $p \in X$  bezeichne  $\mathcal{L}_p^+ := \{x \in X \mid (p, x) \in \mathcal{L}^+\}$  den „vom Ereignis  $p$  ausgehenden Lichtkegel“ und  $\mathcal{L}_p^- := \{x \in X \mid (x, p) \in \mathcal{L}^+\}$  den „beim Ereignis  $p$  endenden inversen Lichtkegel“ und

$$\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p^+ \cup \mathcal{L}_p^-$$

den „beidseitigen Lichtkegel zu  $p$ “. Von einem Punkt  $p$  ausgehende Lichtstrahlen können allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschrieben werden als Schnitte des von  $p$  ausgehenden Lichtkegels mit durch  $p$  laufenden Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor. Bei einem Punkt  $p$  ankommende Lichtstrahlen können ebenso allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschrieben werden als Schnitte des bei  $p$  endenden inversen Lichtkegels mit durch  $p$  laufenden Geraden mit lichtartigem Richtungsvektor.

3. Auf der Raumzeit  $X$  betrachten wir die kleinste transitive und reflexive Relation  $\mathcal{K}^+$  im Sinne von [AN1] 1.3.1, die die Relation  $\mathcal{L}^+$  umfaßt. Explizit haben wir also  $(p, q) \in \mathcal{K}^+$  genau dann, wenn es eine Sequenz  $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$  von Ereignissen gibt mit  $(p_{i-1}, p_i) \in \mathcal{L}^+$  für  $i = 1, \dots, n$ . Es scheint mir klar, daß  $(p, q) \in \mathcal{K}^+$  gleichbedeutend ist dazu, daß  $q - p$  kausal ist. Wann also  $q$  kausal zu  $p$  liegt oder umgekehrt, ist auch bereits durch die Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  festgelegt. Wann weder das eine noch das andere gilt, wann also  $p$  raumartig zu  $q$  liegt, ist mithin auch bereits durch die Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  festgelegt.

4. Wir zeigen nun, daß auch Geraden mit raumartigem Richtungsvektor allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschrieben werden können. Gegeben zwei verschiedene Punkte  $p, q \in X$  mit raumartigem Verbindungsvektor  $q - p$  setzen wir dazu

$$N(p, q) := \{r \in X \mid \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_r = \emptyset\}$$

In der anschließenden Bemerkung 2.8.4 geben wir eine explizite Beschreibung dieser Menge  $N(p, q)$ . Sie zeigt, daß ein Punkt  $r \in X \setminus \{p, q\}$  genau dann auf

der Geraden durch  $p$  und  $q$  liegt, wenn gilt  $r \in N(p, q)$  und wenn es zusätzlich weder einen von  $r$  ausgehenden noch einen bei  $r$  ankommenden Lichtstrahl gibt, der ganz in  $N(p, q)$  enthalten ist. Das zeigt, daß auch Geraden mit raumartigem Richtungsvektor allein mithilfe der Daten  $(X, \mathcal{L}^+)$  beschrieben werden können.

5. Zu je zwei Geraden mit raumartigem Richtungsvektor, die sich in genau einem Punkt  $p$  treffen, bildet nun die Vereinigung aller raumartigen Geraden, die unsere beiden vorgegebenen Geraden in verschiedenen Punkten treffen, zusammen mit  $p$  eine affine Ebene in  $X$ , und wir erhalten so alle affinen Ebenen in  $X$ . Also macht unsere Bijektion  $\phi$  affine Ebenen zu affinen Ebenen und damit beliebige affine Geraden alias Schnitte verschiedener affiner Ebenen mit mindestens zwei Punkten zu affinen Geraden. Dann aber muß unsere Abbildung nach [LA1] 3.3.1 bereits affin sein.  $\square$

2.8.4. Hier holen wir die explizite Beschreibung der Menge  $N(p, q)$  nach, die im vorhergehenden Beweis benötigt wurde. Gegeben  $r \in X \setminus \{p, q\}$  sind wir in genau einem der folgenden Fälle:

1.  $r$  liegt auf einer Gerade mit  $p$  und  $q$ . Dann gilt offensichtlich  $r \in N(p, q)$ ;
2.  $r$  spannt mit  $p$  und  $q$  eine affine Ebene auf, deren von Null verschiedene Richtungsvektoren sämtlich raumartig sind. Dann gilt offensichtlich  $r \notin N(p, q)$ ;
3.  $r$  spannt mit  $p$  und  $q$  eine affine Ebene auf, auf deren Richtungsraum unsere Bilinearform ausgeartet ist. Für derartige  $r$  gilt  $r \in N(p, q) \Leftrightarrow r \in \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q$ . Um das zu sehen, müssen wir etwas rechnen. Da unsere Fragestellung unter Streckungen invariant ist, dürfen wir nach der Variante [LA2] 2.4.4 des Satzes von Witt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = (0, 0, 0, 0)$ ,  $q = (2, 0, 0, 0)$  und  $r = (x, 0, t, t)$  annehmen mit  $t \neq 0$ . Dann ist  $r \in N(p, q)$  gleichbedeutend zur Unlösbarkeit des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ (\lambda - x)^2 + \mu^2 + (\nu - t)^2 - (\tau - t)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der obersten Gleichung von den beiden anderen erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 &= 0 \\ \lambda &= 1 \\ x^2 - 2\lambda x + t^2 - 2\nu t - t^2 + 2\tau t &= 0 \end{aligned}$$

und weiter das äquivalente System

$$\begin{aligned} 1 + \mu^2 + (\nu + \tau)(\nu - \tau) &= 0 \\ x^2 - 2x &= 2t(\nu - \tau) \end{aligned}$$



und schließlich das äquivalente System

$$1 + \mu^2 + (\nu + \tau)(x^2 - 2x)/2t = 0$$

Dies System aber ist unlösbar für  $x^2 - 2x = 0$  und lösbar sonst, was genau unserer Behauptung entspricht.

4.  $r$  spannt mit  $p$  und  $q$  eine affine Ebene auf, auf deren Richtungsraum unsere Bilinearform indefinit ist. In diesem Fall zeigen wir

$$r \in N(p, q) \Leftrightarrow \begin{array}{l} r \text{ liegt raumartig zum einen und kausal oder} \\ \text{antikausal zum anderen unserer beiden Punkte } p, q, \\ \text{liegt jedoch mit keinem der beiden auf einer Lichtgerade.} \end{array}$$

Der Nachweis geschieht wieder durch Rechnung. Diesmal dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = (0, 0, 0, 0)$ ,  $q = (2, 0, 0, 0)$  und  $r = (x, 0, 0, t)$  mit  $t \neq 0$  annehmen. Dann ist  $r \in N(p, q)$  äquivalent zur Unlösbarkeit des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ (\lambda - 2)^2 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ (\lambda - x)^2 + \mu^2 + \nu^2 - (\tau - t)^2 & = & 0 \end{array}$$

Wie zuvor gelangen wir durch Subtraktion der ersten Gleichungen von den anderen zum äquivalenten Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1 + \mu^2 + \nu^2 - \tau^2 & = & 0 \\ x^2 - 2x + 2\tau t - t^2 & = & 0 \end{array}$$

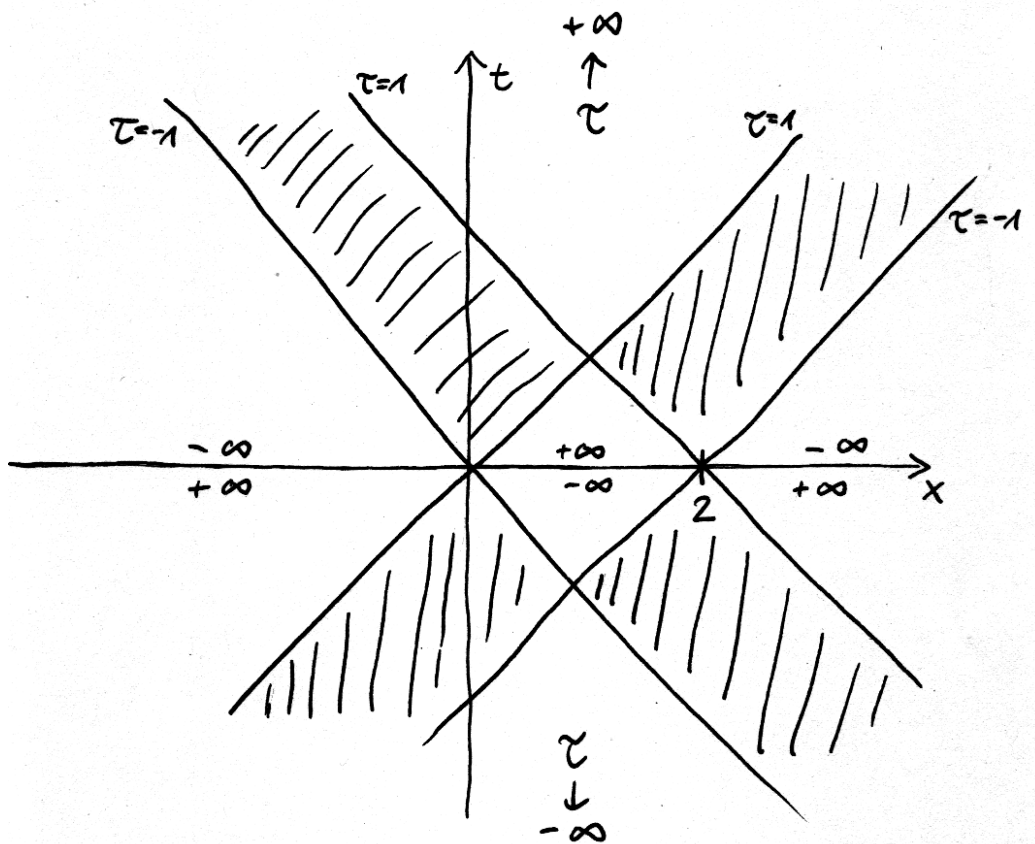
Die zweite Gleichung liefert  $\tau = (t^2 + 2x - x^2)/2t$  und das System ist genau dann lösbar wenn für dies  $\tau = \tau(x, t)$  gilt  $\tau^2 \geq 1$ . Suchen wir die  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t \neq 0$  und  $\tau(x, t) = 1$ , so ergibt sich

$$2(t - x) = (t - x)(t + x)$$

alias  $t = x$  oder  $t = 2 - x$ . Suchen wir die  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t \neq 0$  und  $\tau(x, t) = -1$ , so ergibt sich analog

$$-2(t + x) = (t - x)(t + x)$$

alias  $t = -x$  oder  $t = x - 2$ . Wir erhalten auf diese Weise nebenstehendes Bild für die Stellen, an denen  $\tau$  den Wert Eins beziehungsweise Minus Eins annimmt. Es folgt, daß  $\tau^2$  in den offenen schraffierten Bereichen kleiner ist als Eins, so daß wir dort keine Lösungen haben. Ebenso folgt, daß  $\tau^2$  in allen übrigen Bereichen größer als Eins ist, so daß wir dort Lösungen haben. Keine Lösungen finden wir also genau dann, wenn  $r$  strikt raumartig zu einem unserer Punkte  $p, q$  und strikt zeitartig zum anderen liegt.



BlahBlah

## 3 Hauptraumzerlegung und Jordanzerlegung

### 3.1 Motivation durch Differentialgleichungen\*

3.1.1. Wie etwa in [AN1] 9.3.9 besprochen wird, erklärt man die Exponentialabbildung auf komplexen quadratischen Matrizen durch die Exponentialreihe

$$\begin{aligned}\exp : \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C}) &\rightarrow \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\end{aligned}$$

Wie etwa in [AN1] 9.3.10 besprochen wird, spielt diese Abbildung eine zentrale Rolle bei der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Ist genauer  $A \in \operatorname{Mat}(n; \mathbb{C})$  eine quadratische Matrix und  $c \in \mathbb{C}^n$  ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit Anfangswert  $\gamma(0) = c$  und  $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , nämlich die Abbildung

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Fast noch grundlegender zeigen wir in [ML] 1.4.3, und diesen Beweis könnten Sie mit den Kenntnissen von Analysis II auch jetzt schon verstehen, daß jeder stetige Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{GL}(V)$  in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraums  $V$  die Gestalt  $\varphi(t) = \exp(tA)$  hat für genau ein  $A \in \operatorname{End} V$ . Es ist also wichtig, die Exponentialabbildung für Matrizen  $A \mapsto \exp A$  zu verstehen.

3.1.2. Um die Exponentialabbildung für Matrizen  $A \mapsto \exp A$  zu verstehen bemerkt man zunächst die Formel  $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$  für invertierbares  $P$ . Sie folgt direkt aus der Definition, wie Sie in der Analysis als Übung [AN1] 9.2.29 ausführen dürfen. Des weiteren erklären wir in [AN1] 9.2.13, warum für kommutierende quadratische Matrizen  $A, B$  stets gilt

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

In 3.3.1 werden wir im folgenden die „Jordan-Zerlegung“ herleiten, nach der sich jede komplexe quadratische Matrix  $A$  auf genau eine Weise zerlegen läßt als eine Summe  $A = D + N$  mit  $D$  diagonalisierbar und  $N$  nilpotent und  $DN = ND$ . Ist zusätzlich  $P$  invertierbar mit  $PDP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , so folgt

$$\begin{aligned}\exp A &= (\exp D)(\exp N) \\ &= P^{-1} \exp(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) P \exp N \\ &= P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P \exp N \\ \exp tA &= P^{-1} \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) P \exp tN\end{aligned}$$

Hierbei bricht die Reihe für  $\exp tN$  ab und wir erhalten so ein recht befriedigendes qualitatives Bild und mit der „Jordan’schen Normalform“ 3.4.5 und etwas mehr Rechnen auch eine sehr explizite Beschreibung der Lösungen unserer Differentialgleichung  $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$  und für stetige Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ .

## Übungen

*Ergänzende Übung 3.1.3.* Die Exponentialabbildung von reellen Matrizen liefert eine Bijektion

$$\exp : \{\text{symmetrische Matrizen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{positiv definite symmetrische Matrizen}\}$$

## 3.2 Hauptraumzerlegung

**Definition 3.2.1.** Gegeben ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  eines Vektorraums  $V$  und ein Skalar  $\lambda$  aus dem Grundkörper  $K$  erklären wir den **Eigenraum von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$**  durch

$$\mathrm{Eig}(f; \lambda) = \mathrm{Eig}(f|V; \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \mathrm{id})$$

und den **Hauptraum von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$**  durch

$$\mathrm{Hau}(f; \lambda) = \mathrm{Hau}(f|V; \lambda) := \bigcup_{n \geq 0} \ker(f - \lambda \mathrm{id})^n$$

Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$  besteht also aus allen Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  und dem Nullvektor. Die Elemente des Hauptraums zum Eigenwert  $\lambda$  heißen die **Hauptvektoren zum Eigenwert  $\lambda$** . Der Nullvektor ist insbesondere ein Hauptvektor zu jedem Eigenwert. Ist  $\lambda \in K$  kein Eigenwert von  $f$ , so haben wir  $\mathrm{Eig}(f; \lambda) = 0$  und offensichtlich oder nach 3.2.6 auch  $\mathrm{Hau}(f; \lambda) = 0$ .

**3.2.2 (Eigenräume zu den Eigenwerten Null und Eins).** Der Eigenraum zum Eigenwert Null einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  ist ihr Kern

$$\mathrm{Eig}(f|V; 0) = \ker f$$

Der Eigenraum zum Eigenwert Eins einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  besteht aus den Fixpunkten unserer Abbildung, in Formeln

$$\mathrm{Eig}(f|V; 1) = V^f$$

**Beispiel 3.2.3 (Hauptraum zum Eigenwert Null und Nilpotenz).** Der Hauptraum zum Eigenwert Null des durch Ableiten gegebenen Endomorphismus des Raums der Polynomfunktionen  $\partial : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$  ist der ganze Raum, in Formeln  $\text{Hau}(\partial; 0) = \mathbb{R}[t]$ . Allgemeiner hat ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  eines Vektorraums die Eigenschaft  $\text{Hau}(f; 0) = V$  genau dann, wenn es für jeden Vektor  $v \in V$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $f^n(v) = 0$ . Ein Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums mit dieser Eigenschaft heißt **lokal nilpotent**. Der Hauptraum zum Eigenwert Null des durch Ableiten gegebenen Endomorphismus  $\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$  des Raums der glatten reellwertigen Funktionen  $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R})$  auf der reellen Zahlengeraden besteht aus den Polynomfunktionen, in Formeln

$$\text{Hau}(\partial|\mathcal{C}^\infty; 0) = \mathbb{R}[t]$$

Präziser zeigt man in der Analysis, daß eine glatte Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann durch ein Polynom vom Grad höchstens  $n$  dargestellt werden kann, wenn ihre  $(n + 1)$ -te Ableitung die Nullfunktion ist.

**Definition 3.2.4.** Gegeben eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  von einer Menge in sich selbst nennen wir eine Teilmenge  $Y \subset X$  **stabil unter**  $f$ , wenn gilt  $f(Y) \subset Y$  alias  $x \in Y \Rightarrow f(x) \in Y$ .

**3.2.5 (Stabilität der Haupt- und Eigenräume).** Gegeben ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  eines Vektorraums  $V$  sind alle seine Eigenräume und Haupträume Untervektorräume. Sie sind auch offensichtlich stabil unter unserem Endomorphismus  $f$ , ja sogar unter jedem Endomorphismus  $g : V \rightarrow V$ , der mit  $f$  kommutiert. Ist noch allgemeiner  $g : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und sind  $x \in \text{End } V$  und  $y \in \text{End } W$  gegeben mit  $gx = yg$ , so gilt

$$g(\text{Eig}(x; \lambda)) \subset \text{Eig}(y; \lambda) \quad \text{und} \quad g(\text{Hau}(x; \lambda)) \subset \text{Hau}(y; \lambda).$$

**3.2.6 (Verschwinden von Haupt- und Eigenräumen).** Ist der Hauptraum zu einem Eigenwert  $\lambda$  nicht Null, so ist auch der zugehörige Eigenraum nicht Null. Ist in der Tat ein Vektor  $v \neq 0$  gegeben mit  $(f - \lambda \text{id})^n v = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so gibt es auch ein kleinstmögliches derartiges  $n \geq 1$ , und dann ist  $(f - \lambda \text{id})^{n-1} v$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Proposition 3.2.7 (Direktheit der Summe der Haupträume).** Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  und ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  von  $V$  und paarweise verschiedene Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  liefern die Einbettungen der Haupträume eine Injektion

$$\text{Hau}(f; \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Hau}(f; \lambda_r) \hookrightarrow V$$

**Vorschau 3.2.8.** In 7.8.8 will ich erklären, in welchem Sinne das sogar gilt, wenn wir alle Skalare  $\lambda \in K$  gleichzeitig betrachten.

**Beweis.** Wir beginnen mit einer Vorüberlegung und zeigen zunächst für  $\lambda \neq \mu$ , daß ein Hauptvektor  $v \neq 0$  zum Eigenwert  $\lambda$  nie ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\mu$  sein kann. In der Tat hätten wir sonst für hinreichend großes  $n$  eine Identität der Gestalt

$$0 = (f - \lambda \operatorname{id})^n(v) = (\mu - \lambda)^n(v)$$

und es folgte  $v = 0$ . In anderen Worten induziert  $(f - \mu \operatorname{id})$  für  $\lambda \neq \mu$  eine Injektion

$$(f - \mu \operatorname{id}) : \operatorname{Hau}(f; \lambda) \hookrightarrow \operatorname{Hau}(f; \lambda)$$

auf dem Hauptraum zu  $\lambda$ . Seien nun  $v_1, \dots, v_r$  Hauptvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Es gilt zu zeigen, daß aus  $v_1 + \dots + v_r = 0$  folgt  $v_1 = \dots = v_r = 0$ . Sicher finden wir ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(f - \lambda_i \operatorname{id})^n v_i = 0$  für alle  $i$ . Wenden wir nun  $(f - \lambda_2 \operatorname{id})^n \dots (f - \lambda_r \operatorname{id})^n$  auf unsere Identität  $v_1 + \dots + v_r = 0$  an, so folgt bereits  $(f - \lambda_2 \operatorname{id})^n \dots (f - \lambda_r \operatorname{id})^n(v_1) = 0$  und damit nach unserer Vorüberlegung zu Injektionen auf Haupträumen  $v_1 = 0$ . Dasselbe Argument zeigt  $v_i = 0$  für alle  $i$ .  $\square$

**Beispiel 3.2.9 (Lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $t^n e^{\lambda t}$ ).** Wir zeigen, daß im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  der glatten reellwertigen Funktionen die Funktionen  $t \mapsto t^n e^{\lambda t}$  eine linear unabhängige Familie  $(t^n e^{\lambda t})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}}$  bilden. In der Tat, betrachten wir den durch das Ableiten gegebenen Endomorphismus  $\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ , so liegen alle  $t^n e^{\lambda t}$  für festes  $\lambda$  im  $\lambda$ -Hauptraum  $\operatorname{Hau}(\partial; \lambda)$ . Wegen 3.2.7 reicht es also, für jedes feste  $\lambda$  die lineare Unabhängigkeit der  $t^n e^{\lambda t}$  zu zeigen. Diese folgt hinwiederum unmittelbar aus unserer Erkenntnis [LA1] 5.3.19, daß ein reelles Polynom nur dann überall den Wert Null annimmt, wenn es das Nullpolynom ist. In derselben Weise zeigt man auch, daß im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktionen  $t \mapsto t^n e^{\lambda t}$  für komplexe  $\lambda$  eine linear unabhängige Familie  $(t^n e^{\lambda t})_{(n,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}}$  bilden, vergleiche [AN1] 9.4.2.

**Satz 3.2.10 (Fitting-Zerlegung).** *Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums besitzt der Hauptraum zum Eigenwert Null genau ein unter unserem Endomorphismus stabiles Komplement und die Restriktion unseres Endomorphismus auf dies Komplement ist ein Isomorphismus.*

**Beweis.** Bezeichnet  $f : V \rightarrow V$  unseren Endomorphismus, so zeigen wir zunächst, daß für hinreichend großes  $n \gg 0$  unser Vektorraum  $V$  in die direkte Summe

$$(\ker f^n) \oplus (\operatorname{im} f^n) \xrightarrow{\sim} V$$

zerfällt. Die Bilder der  $f^\nu$  bilden in der Tat für wachsendes  $\nu$  eine monoton fallende Folge von Untervektorräumen. Da  $V$  nach Annahme endliche Dimension hat, gibt es eine Stelle  $n$ , ab der diese Folge konstant wird. Für dieses  $n$  muß die Surjektion  $f^n : (\operatorname{im} f^n) \twoheadrightarrow (\operatorname{im} f^{2n})$  aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus sein, also haben wir  $(\ker f^n) \cap (\operatorname{im} f^n) = 0$ , und nochmaliger Dimensionsvergleich mit der Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 zeigt über [LA1] 2.2.16 die behauptete Zerlegung. Sie heißt die **Fitting-Zerlegung**. Ab derselben Stelle  $n$  muß aus Dimensionsgründen auch die aufsteigende Folge der Untervektorräume  $(\ker f^\nu)$  stagnieren, so daß gilt  $(\ker f^n) = \operatorname{Hau}(f; 0)$ . Ist schließlich  $W \subset V$  ein  $f$ -stabiler Teilraum mit  $W \cap (\ker f^n) = 0$ , so folgt  $f(W) = W$  und damit  $W \subset (\operatorname{im} f^n)$ . Das zeigt die behauptete Eindeutigkeit.  $\square$

**Proposition 3.2.11 (Hauptraumdimension als Nullstellenordnung).** *Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums stimmt die Dimension jedes Hauptraums überein mit der Vielfachheit des entsprechenden Eigenwerts als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*

3.2.12. Man nennt diese Vielfachheit auch die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts, im Gegensatz zu seiner **geometrischen Vielfachheit**, unter der man die Dimension des zugehörigen Eigenraums versteht.

*Beweis.* Sei  $f : V \rightarrow V$  unser Endomorphismus und  $\lambda$  ein Skalar. Die **Fitting-Zerlegung** zu  $(f - \lambda \operatorname{id})$  zerlegt  $V$  in die direkte Summe des  $\lambda$ -Hauptraums und eines  $f$ -stabilen Komplements

$$V = \operatorname{Hau}(f; \lambda) \oplus W$$

derart, daß  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f : W \rightarrow W$  ist. Auf dem Hauptraum ist  $(f - \lambda \operatorname{id})$  nilpotent. Nach [LA1] 2.6.15 finden wir also darin eine Basis, bezüglich derer die Matrix von  $(f - \lambda \operatorname{id})$  obere Dreiecksgestalt hat mit Nullen auf der Diagonalen. Bezüglich derselben Basis hat die Matrix von  $f$  obere Dreiecksgestalt mit lauter Einträgen  $\lambda$  auf der Diagonalen. Ergänzen wir diese Basis durch eine Basis des Komplements  $W$  zu einer Basis von  $V$ , so ist die zugehörige Matrix von  $f : V \rightarrow V$  blockdiagonal. Unsere Formel [LA1] 6.6.10 für die Determinante einer blockdiagonalen Matrix liefert dann für das charakteristische Polynom die Darstellung

$$\chi_f(T) = (\lambda - T)^d \cdot \chi_{f|W}(T)$$

für  $d := \dim \operatorname{Hau}(f; \lambda)$  die Dimension des  $\lambda$ -Hauptraums und  $\chi_{f|W}(T)$  ein Polynom ohne Nullstelle bei  $\lambda$ .  $\square$

**Satz 3.2.13 (Hauptraumzerlegung).** *Ein Vektorraum endlicher Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt unter jedem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume.*

3.2.14. Ist  $f : V \rightarrow V$  unser Endomorphismus und sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seine Eigenwerte, so gilt also in Formeln  $\text{Hau}(f; \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Hau}(f; \lambda_n) \xrightarrow{\sim} V$  unter der durch die Addition gegebenen Abbildung.

3.2.15. Der Satz gilt mit dem ersten Beweis auch, wenn wir statt der algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers nur voraussetzen, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

*Erster Beweis.* Der Satz folgt mit der Direktheit der Summe der Haupträume 3.2.7 und Dimensionsvergleich unmittelbar aus Proposition 3.2.11, nach der die Dimensionen der Haupträume mit den Vielfachheiten der entsprechenden Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms zusammenfallen.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Gegeben ein Skalar  $\lambda$  zeigt die Fittingzerlegung, wenn wir sie auf  $(f - \lambda \text{id})$  anwenden, daß der Hauptraum  $\text{Hau}(f; \lambda)$  ein  $f$ -stabiles Komplement hat. Mit Induktion über die Dimension folgt, daß unser Vektorraum von seinen Haupträumen erzeugt wird. Die Direktheit der Summe der Haupträume kennen wir schon aus 3.2.7.  $\square$

## Übungen

*Ergänzende Übung* 3.2.16. Ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt unter einem Endomorphismus in die direkte Summe seiner Haupträume genau dann, wenn unser Endomorphismus **lokal endlich** ist, als da heißt, jeder Vektor liegt in einem endlichdimensionalen unter unserem Endomorphismus stabilen Teilraum.

*Ergänzende Übung* 3.2.17. Gegeben ein diagonalisierbarer Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums  $V$  und ein unter  $f$  stabiler Teilraum  $W \subset V$  gilt stets  $f(W) = W \cap f(V)$ . Man gebe auch ein Gegenbeispiel für allgemeines  $f$ .

*Ergänzende Übung* 3.2.18 (**Simultane Eigenvektoren**). Für jede Menge von paarweise kommutierenden trigonalisierbaren Endomorphismen eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen Vektorraums gibt es mindestens einen simultanen Eigenvektor. Hinweis: 3.2.5

*Übung* 3.2.19 (**Spektralsatz für normale Endomorphismen**). Ein Endomorphismus eines Skalarproduktraums heißt **normal**, wenn er einen Adjungierten besitzt und mit seinem Adjungierten kommutiert. Man zeige: Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Skalarproduktraums ist genau dann normal, wenn es dazu eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt. Hinweis: Kommutierende Endomorphismen stabilisieren die Eigenräume aller beteiligten Endomorphismen. Ist  $A^*$  adjungiert zu  $A$ , so sind  $A + A^*$  und  $i(A - A^*)$  selbstadjungiert. Alternativer Zugang: Man beginne mit einem gemeinsamen Eigenvektor



von  $A$  und  $A^*$  und wiederhole von dort ausgehend den Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Endomorphismen.

*Ergänzende Übung 3.2.20.* Gegeben ein Vektorraum mit einem lokal endlichen Endomorphismus besitzt der Hauptraum zu Null stets genau ein unter besagtem Endomorphismus stabiles Komplement.

*Ergänzung 3.2.21 (Ein Nullhauptraum ohne stabiles Komplement).* Betrachten wir Vektorräume unendlicher Dimension, so besitzt der Hauptraum zum Eigenwert Null eines Endomorphismus im allgemeinen kein unter besagtem Endomorphismus stabiles Komplement mehr. Betrachten wir zum Beispiel den Vektorraum  $V$  aller Abbildungen von der Menge  $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \geq j\}$  in unseren Grundkörper und den Endomorphismus, der „jede Zeile eins nach unten rückt und die unterste Zeile zu Null macht“. Der Hauptraum  $H$  zum Eigenwert Null besteht aus allen Funktionen, die nur auf endlich vielen Zeilen von Null verschieden sind. Nun betrachten wir den Vektor  $v \in V$  mit

$$v(i, j) = \begin{cases} 1 & i = 2j; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sein Bild ist im in 4.5.4 diskutierten Quotientenvektorraum  $\bar{v} \in V/H$  ein von Null verschiedener Vektor, der im Bild jeder Potenz unseres Endomorphismus liegt. In  $V$  selbst gibt es jedoch keinen derartigen von Null verschiedenen Vektor, folglich kann  $H \subset V$  kein unter unserem Endomorphismus stabiles Komplement besitzen.

### 3.3 Jordanzerlegung

**Satz 3.3.1 (Jordanzerlegung).** Seien  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und  $x \in \text{End } V$  ein Endomorphismus von  $V$ . So gibt es genau eine Zerlegung  $x = x_s + x_n$  mit  $x_s$  diagonalisierbar,  $x_n$  nilpotent und  $x_s x_n = x_n x_s$ .

3.3.2. Statt den Grundkörper algebraisch abgeschlossen anzunehmen, reicht für die Gültigkeit unseres Satzes auch die Annahme aus, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Der Beweis bleibt derselbe.

3.3.3. Daß der Endomorphismus jetzt plötzlich  $x$  heißt, obwohl er sonst immer  $f$  hieß, hat keine tieferen Gründe. Es hat jedoch den Vorteil, den Buchstaben  $f$  freizumachen für andere lineare Abbildungen.

3.3.4. Der untere Index  $s$  bei  $x_s$  steht für **semisimple**, die deutsche Übersetzung dafür ist **halbeinfach**. In der Situation des Satzes heißt  $x_s$  der **halbeinfache** und  $x_n$  der **nilpotente Anteil** von  $x$ . Die Zerlegung aus dem Satz bezeichnet man genauer auch als **additive Jordan-Zerlegung**, wenn man Verwechslungen mit der „multiplikativen Jordan-Zerlegung“ aus 3.3.20 befürchtet.

*Vorschau* 3.3.5. Ganz allgemein heißt ein Endomorphismus  $x$  eines  $k$ -Vektorraums  $V$  **halbeinfach**, wenn  $V$  mit der Struktur als  $k[T]$ -Modul, bei der die Variable  $T$  durch  $x$  operiert, halbeinfach ist im Sinne von [NAS] 1.5.1 alias die Summe seiner einfachen Untermoduln. Mit den dort eingeführten Methoden zeigt man leicht, daß das gleichbedeutend dazu ist, daß unser Endomorphismus  $x$  „nach Erweiterung der Skalare zum algebraischen Abschluß“ diagonalisierbar ist. Ersetzen wir im Satz die Bedingung „diagonalisierbar“ durch die Bedingung „halbeinfach“, so bleibt er auch ohne alle Forderungen an das charakteristische Polynom gültig für im Sinne von [AL] 3.9.21 „vollkommene“ Grundkörper, wie Sie im Rahmen der sogenannten „Galoistheorie“ als Übung [AL] 4.1.27 zeigen mögen.

*Beweis.* Gegeben ein Endomorphismus  $x$  eines Vektorraums endlicher Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper erklären wir einen weiteren Endomorphismus  $x_s$  durch die Vorschrift, daß er auf dem Hauptraum  $\text{Hau}(x; \lambda)$  von  $x$  zum Eigenwert  $\lambda$  jeweils durch die Multiplikation mit  $\lambda$  operieren soll. Dann ist  $x_s$  diagonalisierbar, und setzen wir  $x_n = x - x_s$ , so ist  $x_n$  nilpotent und  $x_s$  kommutiert mit  $x$  und dann auch mit  $x_n$ . Das zeigt die Existenz unserer Zerlegung. Ist  $x = s + n$  eine weitere Zerlegung mit  $s$  diagonalisierbar,  $n$  nilpotent und  $sn = ns$ , so folgt zunächst  $sx = xs$  und dann, da  $s$  die Haupträume von  $x$  stabilisieren muß, auch  $sx_s = x_s s$ . So erkennen wir, daß  $x, s, n, x_s$  und  $x_n$  paarweise kommutieren. Natürlich ist dann  $x_n - n$  nilpotent. Da  $s$  die Haupträume von  $x$  stabilisiert und da nach [LA1] 6.6.19 auch die Restriktion von  $s$  auf besagte

Haupträume diagonalisierbar ist, folgt aus der Definition von  $x_s$ , daß auch  $x_s - s$  diagonalisierbar sein muß. Aus  $x_n - n = s - x_s$  folgt dann aber sofort, daß beide Seiten Null sein müssen. Das zeigt die Eindeutigkeit unserer Zerlegung.  $\square$

**Ergänzung 3.3.6 (Halbeinfacher Anteil als Wert eines Polynoms).** In der Situation des Satzes lassen sich  $x_s$  und  $x_n$  sogar als Polynome in  $x$  ohne konstanten Term ausdrücken, als da heißt, es gibt  $P, Q \in T\mathbb{C}[T]$  mit  $x_s = P(x)$  und  $x_n = Q(x)$ . In der Tat, falls  $N$  so groß ist, daß gilt  $\text{Hau}(x; \lambda) = \ker(x - \lambda)^N$  für alle  $\lambda$ , so erhält man ein mögliches  $P$  aus dem chinesischen Restsatz [AL] 2.3.4 als simultane Lösung der Kongruenzen  $P \equiv \lambda \pmod{(T - \lambda)^N}$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $x$  und für  $\lambda = 0$ , und ein mögliches  $Q$  ist dann  $T - P(T)$ . Ich mag die in der Literatur übliche Argumentation mit diesen Polynomen nicht, sie sind mir zu willkürlich. Stattdessen ziehe ich die Argumentation mit der Funktorialität der Jordan-Zerlegung vor, die im Anschluß diskutiert wird.

**Satz 3.3.7 (Funktorialität der Jordan-Zerlegung).** *Gegeben eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $f : V \rightarrow W$  und  $x \in \text{End } V$  sowie  $y \in \text{End } W$  Endomorphismen folge aus  $fx = yf$  bereits  $fx_s = y_sf$  und  $fx_n = y_nf$ .*

*Beweis.* Aus  $fx = yf$  folgt zunächst  $f(\text{Hau}(x; \lambda)) \subset \text{Hau}(y; \lambda)$ . Nach der im Beweis von 3.3.1 gegebenen Beschreibung der Jordan-Zerlegung impliziert das unmittelbar  $fx_s = y_sf$  und dann auch  $fx_n = y_nf$ .  $\square$

3.3.8. Stabilisiert speziell ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper einen vorgegebenen Teilraum, so stabilisieren nach 3.3.7 auch sein halbeinfacher und sein nilpotenter Anteil besagten Teilraum.

**Ergänzung 3.3.9.** Unsere Sätze über die Jordan-Zerlegung 3.3.1 und deren Funktorialität 3.3.7 gelten analog, wenn man statt der Endlichdimensionalität der darin auftauchenden Vektorräume nur fordert, daß die fraglichen Endomorphismen  $x$  und  $y$  im Sinne von 3.2.16 lokal endlich sein sollen, und von  $x_n$  und  $y_n$  schwächer nur fordert, daß sie im Sinne von 3.2.3 lokal nilpotent sein sollen.

## Übungen

**Übung 3.3.10.** Gegeben kommutierende Endomorphismen  $x, y$  eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt  $(x + y)_s = x_s + y_s$  und  $(x + y)_n = x_n + y_n$ .

**Weiterführende Übung 3.3.11.** Gegeben  $x, y$  kommutierende lokal endliche Endomorphismen eines Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. ist auch  $x + y$  lokal endlich und es gilt  $(x + y)_s = x_s + y_s$  sowie  $(x + y)_n = x_n + y_n$ .

*Ergänzende Übung 3.3.12 (Operatornorm und Spektralradius).* Sei  $x$  ein Endomorphismus eines von Null verschiedenen endlichdimensionalen komplexen normierten Vektorraums  $V$  im Sinne von [AN1] 7.4.2. Bezeichne  $\| \cdot \|$  die zugehörige Operatornorm auf  $\text{End } V$  im Sinne von [AN1] 7.4.15. Man zeige, daß die Folge  $\sqrt[n]{\|x^n\|}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen das Maximum der Beträge der Eigenwerte alias den **Spektralradius** von  $x$  strebt. Hinweis: Zunächst folgere man aus [AN1] 7.4.12, daß der fragliche Grenzwert nicht von der auf unserem Vektorraum gewählten Norm abhängt. Dann behandle man den diagonalisierbaren Fall mithilfe der Maximumsnorm in Bezug auf eine geeignete Basis. Schließlich behandle man den allgemeinen Fall mithilfe der Jordan-Zerlegung und erinnere [AN1] 3.3.17.

*Ergänzende Übung 3.3.13 (Bilder halbeinfacher Anteile).* Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und ein Endomorphismus  $x : V \rightarrow V$  haben wir stets

$$\text{im } x \supset \text{im } x_s$$

Hinweis: Das Bild von  $x_s$  ist genau die Summe der Haupträume zu von Null verschiedenen Eigenwerten und das Bild von  $x$  umfaßt offensichtlich diese Summe. Alternativ erkennt man  $\text{im } x \supset \text{im}(x_s^N)$  für hinreichend großes  $N$  durch Entwicklung von  $x_s^N = (x - x_n)^N$  nach der binomischen Formel und Ausklammern von  $x$ , und die Behauptung folgt wegen  $\text{im } x_s = \text{im } x_s^N$ .

*Ergänzende Übung 3.3.14 (Automorphismen der Ordnung Zwei).* Jeder Endomorphismus der Ordnung zwei eines Vektorraums über einem Körper einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist diagonalisierbar. Hinweis: Später zeigen wir das als [NAS] 1.1.14. Jeder Endomorphismus der Ordnung vier eines komplexen Vektorraums ist diagonalisierbar. Hinweis: Man zerlege zunächst in Eigenräume unter dem Quadrat unseres Endomorphismus. Allgemeiner werden Sie in 3.3.15 zeigen, daß jeder Endomorphismus endlicher Ordnung eines komplexen Vektorraums diagonalisierbar ist.

*Ergänzende Übung 3.3.15 (Automorphismen endlicher Ordnung).* Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi : V \rightarrow V$  ein Automorphismus „endlicher Ordnung“, als da heißt, es gebe  $n \geq 1$  mit  $\varphi^n = \text{id}$ . So ist  $V$  die direkte Summe der Eigenräume von  $\varphi$ . Allgemeiner zeige man das auch unter der schwächeren Voraussetzung, daß die Charakteristik kein Teiler der Ordnung  $n$  unseres Automorphismus ist. Hinweis: Man behandle zunächst den endlichdimensionalen Fall mithilfe der Jordan-Zerlegung und beachte dabei, daß nach [LA1] 4.3.10 höhere Potenzen eines nilpotenten Endomorphismus stets größere Kerne haben müssen, solange nicht beide fraglichen Potenzen bereits Null sind. Fortgeschrittene erkennen einen Spezialfall des Satzes von Maschke [NAS] 2.1.1.

*Ergänzende Übung 3.3.16.* Gegeben ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besteht ein Hauptraum des transponierten Endomorphismus des Dualraums genau aus allen Linearformen, die auf allen Haupträumen zu anderen Eigenwerten des ursprünglichen Endomorphismus verschwinden.

*Ergänzung 3.3.17.* Ein Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums heißt **unipotent**, wenn  $(f - \text{id})$  nilpotent ist. Ein Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums heißt **lokal unipotent**, wenn  $(f - \text{id})$  lokal nilpotent ist. Oft wird aber hier das Wörtchen „lokal“ auch weggelassen.

*Ergänzende Übung 3.3.18.* Ein unipotenter Endomorphismus endlicher Ordnung eines Vektorraums über einem Körper der Charakteristik Null ist bereits die Identität. Hinweis: 3.3.15.

*Ergänzende Übung 3.3.19.* Das Produkt von zwei kommutierenden nilpotenten Endomorphismen ist nilpotent. Das Produkt von zwei kommutierenden unipotenten Endomorphismen ist unipotent. Das Produkt von zwei kommutierenden halbeinfachen Endomorphismen ist halbeinfach.

*Ergänzende Übung 3.3.20 (Multiplikative Jordan-Zerlegung).* Jeder Automorphismus  $x$  eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf genau eine Weise darstellen als Produkt  $x = x_u x_s$  mit  $x_s$  halbeinfach alias „semisimple“ alias diagonalisierbar,  $x_u$  unipotent und  $x_u x_s = x_s x_u$ . Hinweis: Ist  $x = x_s + x_n$  die additive Jordan-Zerlegung, so betrachte man  $x = x_s(\text{id} + x_s^{-1} x_n)$ . Man zeige weiter, daß dieselbe Aussage auch für lokal endliche Automorphismen eines beliebigen Vektorraums gilt, diesmal mit  $x_u$  lokal unipotent, und zeige die zu 3.3.7 analogen Funktorialitätseigenschaften.

*Ergänzende Übung 3.3.21.* Gegeben ein Endomorphismus  $A$  eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums  $V$  liegt  $\mathbb{Z}$  im Kern des Gruppenhomomorphismus  $\varphi_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(V)$  gegeben durch  $t \mapsto \exp(tA)$  genau dann, wenn  $A$  diagonalisierbar ist mit sämtlichen Eigenwerten aus  $2\pi i\mathbb{Z}$ . Weiter ist  $\varphi_A$  genau dann nicht injektiv, wenn  $A$  diagonalisierbar ist mit rein imaginären Eigenwerten, und wenn der von seinen Eigenwerten aufgespannte  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum höchstens die Dimension Eins hat.

*Ergänzende Übung 3.3.22 (Multifunktorialität der Jordanzerlegung).* Gegeben über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine multilineare Abbildung  $\varphi : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  sowie lokal endliche Endomorphismen  $x_i \in \text{End } V_i$  sowie  $y \in \text{End } W$  mit  $\varphi \circ (x_1 \times \dots \times x_r) = y \circ \varphi$  gilt auch

$$\varphi \circ ((x_1)_s \times \dots \times (x_r)_s) = y_s \circ \varphi$$

Das gilt sogar für  $r = 0$  und bedeutet in diesem Fall, daß für jeden Vektor  $w \in W$  gilt  $yw = w \Rightarrow y_s w = w$ .

### 3.4 Jordan'sche Normalform

**Definition 3.4.1.** Gegeben  $r \geq 1$  definieren wir eine  $(r \times r)$ -Matrix  $J(r)$ , genannt der **nilpotente Jordan-Block der Größe  $r$** , durch die Vorschrift  $J(r)_{i,j} = 1$  für  $j = i + 1$  und  $J(r)_{i,j} = 0$  sonst. Insbesondere ist also  $J(1)$  die  $(1 \times 1)$ -Matrix mit dem einzigem Eintrag Null.

**Satz 3.4.2 (Normalform nilpotenter Endomorphismen).** Gegeben ein nilpotenter Endomorphismus  $N$  eines endlichdimensionalen Vektorraums gibt es stets eine angeordnete Basis  $\mathcal{B}$  derart, daß die Matrix unseres Endomorphismus in dieser Basis blockdiagonal ist mit nilpotenten Jordanblöcken auf der Diagonalen, in Formeln

$$_{\mathcal{B}}[N]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_n))$$

Die positiven natürlichen Zahlen  $r_1, \dots, r_n$  sind hierbei durch unseren nilpotenten Endomorphismus eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge.

**Ergänzung 3.4.3 (Klassifikation nilpotenter Endomorphismen).** Der vorhergehende Satz leistet im Sinne von 2.3.1 die Klassifikation aller Paare  $(V, N)$  bestehend aus einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  über einem fest vorgegebenen Körper mitsamt einem nilpotenten Endomorphismus  $N$ . Zwei Paare  $(V, A)$  und  $(W, B)$  bestehend aus einem  $k$ -Vektorraum mit einem Endomorphismus nennen wir dazu „isomorph“ und schreiben  $(V, A) \cong (W, B)$  genau dann, wenn es einen Isomorphismus  $\phi : V \xrightarrow{\sim} W$  gibt mit  $B \circ \phi = \phi \circ A$ , so daß wir also ein kommutatives Diagramm erhalten der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ W & \xrightarrow{B} & W \end{array}$$

Für jeden Körper  $k$  werden in diesem Sinne also die Paare bestehend aus einem endlichdimensionalen  $k$ -Vektorraum und einem nilpotenten Endomorphismus desselben „klassifiziert durch endliche Multimengen von positiven natürlichen Zahlen“.

**Beweis.** Die Eindeutigkeit ist unproblematisch: Ist  $N : V \rightarrow V$  unser nilpotenter Endomorphismus mit Matrix  $\text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_n))$ , so finden wir für  $n \geq 1$  unmittelbar

$$\dim(\text{im } N^{n-1}) - \dim(\text{im } N^n) = |\{i \mid r_i \geq n\}|$$

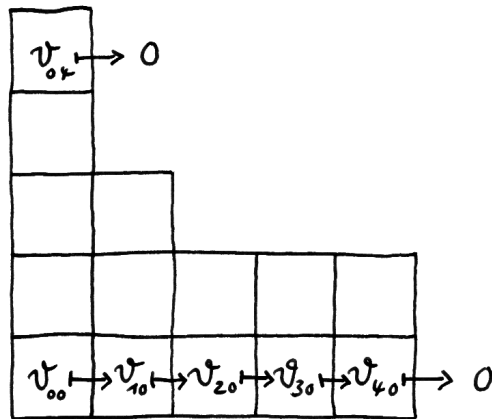
Die Kenntnis aller dieser Zahlen legt aber die Multimenge der  $r_i$  bereits fest. Die Existenz folgt unmittelbar aus Lemma 3.4.4, das wir gleich im Anschluß beweisen.  $\square$

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

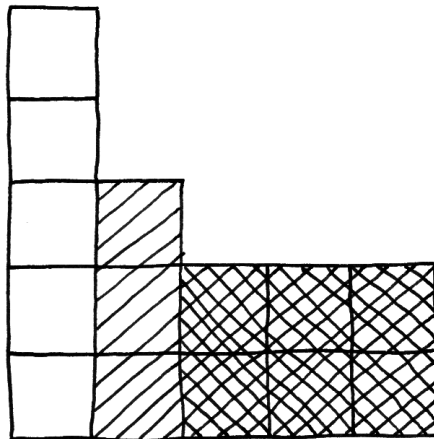
$\underbrace{\hspace{10em}}_r$ 
 $\left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} r$

Der nilpotente Jordan-Block  $J(r)$  der Größe  $r$ . Steht auf der Diagonalen statt der Nullen ein Skalar  $\lambda$ , so nennen wir die entsprechende Matrix einen **Jordan-Block der Größe  $r$  zum Eigenwert  $\lambda$**  und notieren diese Matrix

$$J(r; \lambda) := J(r) + \lambda I_r$$



Ich denke mir eine nilpotente Abbildung gerne in der hier gezeigten Weise. Die Kästchen stehen für Basisvektoren, unser Vektorraum hätte also die Dimension 14. Die Abbildung schiebt jedes Kästchen um eins nach links beziehungsweise nach Null, wenn es dabei aus unserem Bild herausfällt. Die Matrix dieser Abbildung hat in der geeignet angeordneten Kästchenbasis offensichtlich Normalform, und die Längen der Zeilen entsprechen hierbei den Größen der Jordanblöcke.



Schraffiert eine Basis des Bildes von  $N$ , kreuzweise schraffiert eine Basis des Bildes von  $N^2$ . Die Höhe der zweiten Spalte ist also genau  $\dim(\operatorname{im} N) - \dim(\operatorname{im} N^2)$ .



**Lemma 3.4.4.** *Ist  $N : V \rightarrow V$  ein nilpotenter Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$ , so gibt es eine Basis  $B$  von  $V$  derart, daß  $B \sqcup \{0\}$  stabil ist unter  $N$  und daß jedes Element von  $B$  unter  $N$  höchstens ein Urbild in  $B$  hat. Wir nennen solch eine Basis eine **Jordan-Basis**.*

*Beweis.* Wir betrachten die Sequenz

$$\ker N \hookrightarrow V \twoheadrightarrow \operatorname{im} N$$

Mit Induktion über die Dimension von  $V$  dürfen wir annehmen, daß wir für das Bild von  $N$  eine derartige Basis bereits gefunden haben, sagen wir die Basis  $A$ . Jetzt ergänzen wir  $\{a \in A \mid N(a) = 0\}$  durch irgendwelche  $b_1, \dots, b_s$  zu einer Basis des Kerns von  $N$  und wählen Urbilder  $c_1, \dots, c_r \in V$  für die Elemente von  $A \setminus N(A)$  und behaupten, daß

$$B = A \cup \{b_1, \dots, b_s\} \cup \{c_1, \dots, c_r\}$$

eine Basis von  $V$  ist mit den geforderten Eigenschaften. Nach Konstruktion ist  $B \sqcup \{0\}$  stabil unter  $N$  und jedes Element von  $B$  hat unter  $N$  höchstens ein Urbild in  $B$ . Wir müssen also nur noch zeigen, daß  $B$  eine Basis von  $V$  ist. Dazu schreiben wir  $B$  als die Vereinigung der beiden Mengen

$$\begin{aligned} &\{a \in A \mid N(a) \neq 0\} \cup \{c_1, \dots, c_r\} \\ &\{a \in A \mid N(a) = 0\} \cup \{b_1, \dots, b_s\} \end{aligned}$$

und bemerken, daß die erste Menge ein System von Urbildern unter  $N$  für unsere Basis  $A$  von  $(\operatorname{im} N)$  ist, wohingegen die zweite eine Basis von  $(\ker N)$  ist. Damit ist unsere große Vereinigung eine Basis von  $V$  nach [LA1] 2.2.6.  $\square$

**Korollar 3.4.5 (Jordan'sche Normalform).** *Gegeben ein Endomorphismus  $f$  eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es eine angeordnete Basis  $\mathcal{B}$  unseres Vektorraums derart, daß die Matrix unseres Endomorphismus bezüglich dieser Basis blockdiagonal ist mit Jordan-Blöcken auf der Diagonale, in Formeln*

$$_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(J(r_1; \lambda_1), \dots, J(r_t; \lambda_t))$$

*Die Jordan-Blöcke auf der Diagonale sind hierbei durch unseren Endomorphismus wohlbestimmt bis auf Reihenfolge.*

$$b_1 \mapsto 0$$

$$b_2 \mapsto 0$$

$$c_1 \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_2 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_3 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

$$c_4 \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto 0$$

Zum Beweis von 3.4.4. Die fetten Punkte stellen die Elemente der Basis  $A$  des Bildes im  $N$  dar. Die  $c_i$  zusammen mit den  $a \in A$  mit  $N(a) \neq 0$  bilden ein System von Urbildern unter  $N$  der Elemente von  $A$ .

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Ein Matrix in Jordan'scher Normalform mit drei Jordanblöcken. Genau dann hat eine komplexe  $(6 \times 6)$ -Matrix  $A$  diese Jordan'sche Normalform, wenn ihr charakteristisches Polynom eine einfache Nullstelle bei 7 und eine fünffache Nullstelle bei 5 hat und  $\ker(A - 5I)$  zweidimensional ist sowie  $\ker(A - 5I)^2$  vierdimensional.

**3.4.6 (Jordan'sche Normalform als Lösung eines Klassifikationsproblems).** Dieser Satz leistet im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers  $K$  im Sinne von 2.3.1 die Klassifikation der endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume mit einem ausgezeichneten Endomorphismus, in Bezug auf den in 3.4.3 erklärten Isomorphie-Begriff. Genauer werden solche Daten „klassifiziert durch endliche Multimengen von Paaren aus  $(K \times \mathbb{N}_{\geq 1})$ “. Man beachte den fundamentalen Unterschied zur „Smith-Normalform“ [LA1] 2.6.11.

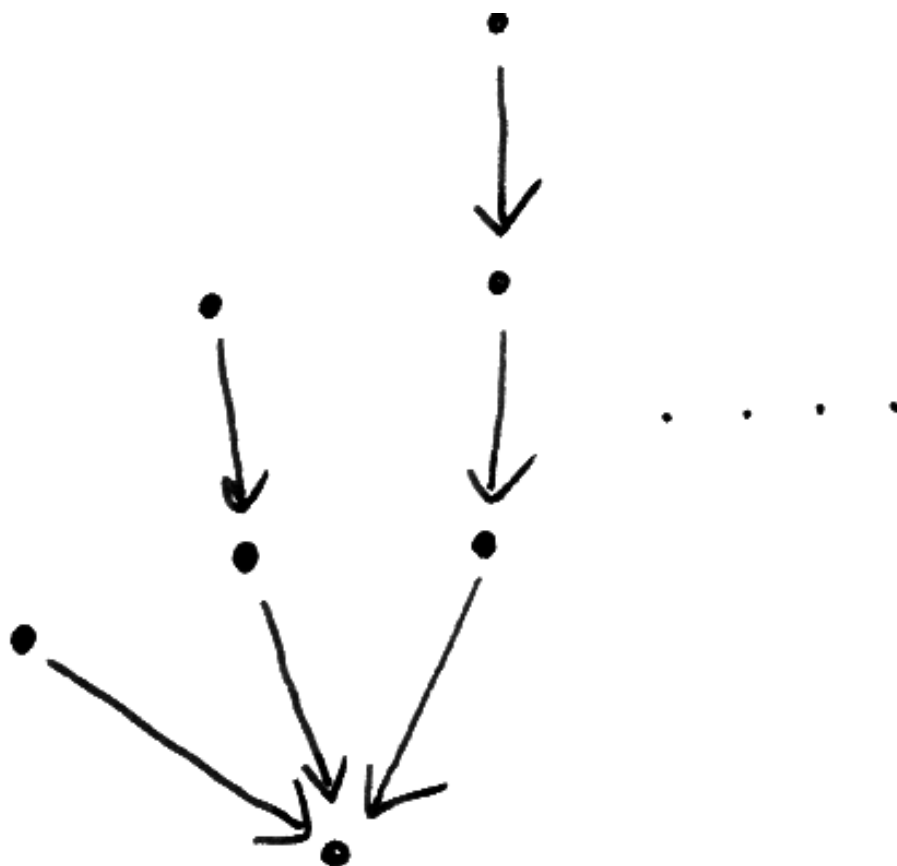
*Ergänzung 3.4.7 (Das Klassifikationsproblem für allgemeine Grundkörper).* Im Fall eines beliebigen Grundkörpers  $K$  wird die entsprechende Klassifikationsaufgabe in [KAG] 2.4.8 gelöst: Endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit einem ausgezeichneten Endomorphismus werden in Bezug auf den in 3.4.3 erklärten Isomorphie-Begriff „klassifiziert durch endliche Multimengen von Elementen des Produkts  $(\text{irnp } K[X]) \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ “ mit der Notation  $\text{irnp } K[X]$  für die Menge aller irreduziblen normierten Polynome aus  $K[X]$ .

3.4.8. Unser Korollar 3.4.5 gilt mit demselben Beweis auch, wenn wir statt der algebraischen Abgeschlossenheit des Grundkörpers nur voraussetzen, daß das charakteristische Polynom unseres Endomorphismus über unserem Körper vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Gegeben eine quadratische Matrix ist die explizite Berechnung einer „Jordan-Basis“ im allgemeinen nicht ganz einfach. Hierzu gibt es auch Algorithmen, mit denen ich Sie jedoch nicht belasten will, da die explizite Berechnung einer Jordan-Basis in der Praxis selten gebraucht wird. Wichtig an diesem Korollar sind vielmehr die darin enthaltenen strukturellen Aussagen über Endomorphismen von Vektorräumen.

*Beweis.* Sei  $f$  unser Endomorphismus. Der Satz über die Hauptraumzerlegung 3.2.13 zeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß es einen Skalar  $\lambda$  gibt, für den  $(f - \lambda \text{id})$  nilpotent ist. Der Satz über die Normalform nilpotenter Endomorphismen 3.4.2 beendet dann den Beweis.  $\square$

*Ergänzung 3.4.9 (Beispiele für lokal nilpotente Endomorphismen).* Obiges Lemma 3.4.4 über die Existenz einer Jordan-Basis gilt sogar ohne die Voraussetzung, daß  $V$  endlichdimensional ist. Um das zu zeigen, müssen wir nur die Induktion statt über die Dimension von  $V$  über die Nilpotenzordnung von  $N$  laufen lassen und [LA1] 1.9.20 verwenden. Für einen lokal nilpotenten Endomorphismus  $N$  findet man jedoch im Allgemeinen keine Jordan-Basis mehr, nebenstehendes Bild zeigt ein Gegenbeispiel. Im Fall abzählbarer Dimension kann man noch zeigen, daß es stets eine Jordan-Basis gibt, wenn der Schnitt der Bilder aller Potenzen Null ist. Das beruht auf dem „Satz von Ulm“ aus der Logik. Im Fall beliebiger Dimension gilt auch das nicht mehr, ja wir finden im allgemeinen noch nicht einmal eine Basis  $B$  derart, daß  $B \sqcup \{0\}$  unter  $N$  stabil ist. Betrachten wir zum Beispiel den Raum  $V$  aller Abbildungen von der Menge  $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \geq j\}$  nach  $\mathbb{R}$ , die

nur in endlich vielen Zeilen nicht identisch Null sind, und den Endomorphismus  $N : V \rightarrow V$ , der „jede Zeile um eins nach unten drückt und die nullte Zeile annulliert“, in Formeln  $(N(f))(i, j) = f(i, j + 1)$  falls  $i > j$  und  $(N(f))(i, j) = 0$  falls  $i = j$ . Sicher hat  $V/NV$  eine abzählbare Basis, so daß  $A := B \setminus NB$  abzählbar sein müßte. Andererseits ist in unserem Beispiel der Schnitt der Bilder aller Potenzen  $\bigcap N^n$  der Nullraum, und das zeigt  $B \sqcup \{0\} = A \cup NA \cup N^2A \cup \dots$  im Widerspruch dazu, daß  $V$  selbst keine abzählbare Basis besitzt. Das alles habe ich in Diskussion mit Martin Ziegler gelernt.



Eine Basis mit der Eigenschaft aus Lemma 3.4.4 nennen wir auch eine **Jordan-Basis**. Dieses Bild zeigt einen lokal nilpotenten Endomorphismus, für den keine Jordan-Basis existiert. Die fetten Punkte stehen für Basisvektoren, die Pfeile zeigen, wie sie abgebildet werden. Wir erhalten so eine lokal nilpotente Abbildung, bei der der Schnitt der Bilder aller Potenzen nicht Null ist. Dennoch ist kein Element des zugehörigen Vektorraums „unendlich divisibel“, folglich kann es in diesem Fall keine Jordan-Basis geben.

## 4 Quotienten

In diesem Abschnitt wird die Gruppentheorie weiter ausgebaut. Insbesondere lernen Sie die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen kennen. Man versteht unter solch einer Klassifikation die Angabe einer Liste von endlich erzeugten abelschen Gruppen derart, daß jede endlich erzeugte abelsche Gruppe zu genau einer Gruppe dieser Liste isomorph ist. Die Klassifikation endlich erzeugter Vektorräume über einem vorgegebenen Körper  $K$  kennen Sie bereits: Jeder solche Vektorraum  $K$  ist isomorph zu genau einem  $K^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , und dieses  $n$  heißt dann auch die Dimension des  $K$ -Vektorraums  $V$ . Wir werden sehen, daß die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen raffinierter ist.

### 4.1 Nebenklassen

4.1.1. Ist  $(G, \perp)$  eine Menge mit Verknüpfung und sind  $A, B \subset G$  Teilmengen, so schreiben wir  $A \perp B = \{a \perp b \mid a \in A, b \in B\} \subset G$  und erhalten auf diese Weise eine Verknüpfung auf der Menge aller Teilmengen von  $G$ , der sogenannten Potenzmenge  $\mathcal{P}(G)$ . Ist unsere ursprüngliche Verknüpfung assoziativ, so auch die induzierte Verknüpfung auf der Potenzmenge. Wir kürzen in diesem Zusammenhang oft die einelementige Menge  $\{a\}$  mit  $a$  ab, so daß also zum Beispiel  $a \perp B$  als  $\{a\} \perp B$  zu verstehen ist.

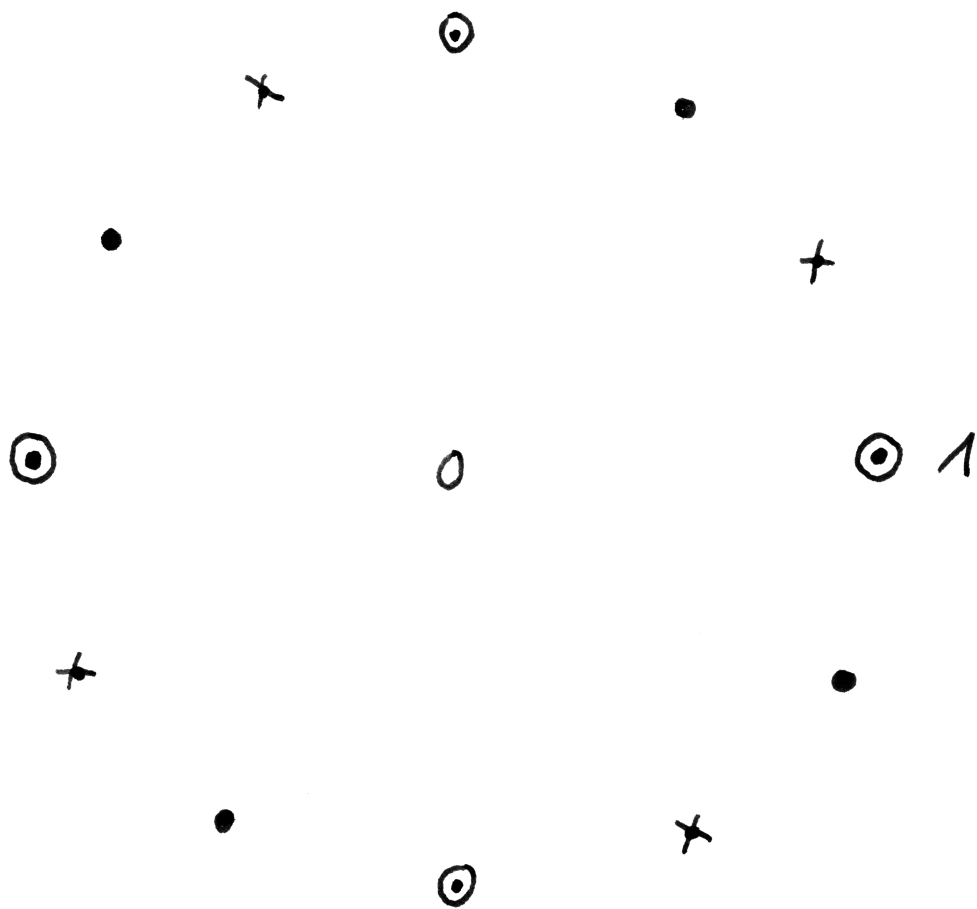
**Definition 4.1.2.** Ist  $G$  eine Gruppe,  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $g \in G$  ein Element, so nennen wir die Menge  $gH$  die **Linksnebenklasse von  $g$  unter  $H$**  und die Menge  $Hg$  die **Rechtsnebenklasse von  $g$  unter  $H$** . Diese Nebenklassen sind also Teilmengen von  $G$ . Ein Element einer Nebenklasse nennt man einen **Repräsentanten** der besagten Nebenklasse. Weiter betrachten wir in  $G$  die beiden Mengensysteme

$$\begin{aligned} G/H &= \{gH \mid g \in G\} \\ H \backslash G &= \{Hg \mid g \in G\} \end{aligned}$$

aller Links- beziehungsweise Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$ . Die Elemente von  $G/H$  und von  $H \backslash G$  sind also Teilmengen von  $G$ . Die Symbole  $G/H$  sowie  $H \backslash G$  bezeichnen dementsprechend Teilmengen der Potenzmenge  $\mathcal{P}(G)$  von  $G$ .

4.1.3 (**Disjunktheit der Nebenklassen**). Gegeben  $G \supset H$  eine Gruppe mit einer Untergruppe sind die  $H$ -Rechtsnebenklassen in  $G$  paarweise disjunkt. In der Tat folgt aus  $g \in xH$  alias  $g = xh$  für  $h \in H$  bereits  $gH = xhH = xH$ . Analoges gilt für die Linksnebenklassen.

*Beispiel 4.1.4.* Im Fall  $G = \mathbb{Z} \supset H = m\mathbb{Z}$  haben wir die Menge der Nebenklassen  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  bereits in [LA1] 5.2.4 diskutiert und sogar selbst mit der Struktur einer Gruppe, ja sogar mit der Struktur eines Rings versehen. Im allgemeinen trägt



Die drei Nebenklassen der Gruppe  $\{\pm 1, \pm i\}$  der vierten Einheitswurzeln in der Gruppe der zwölften Einheitswurzeln. Da diese Gruppe kommutativ ist, fallen hier Rechtsnebenklassen und Linksnebenklassen zusammen.



$G/H$  nur dann eine natürliche Gruppenstruktur, wenn wir an unsere Untergruppe  $H$  zusätzliche Forderungen stellen, vergleiche 4.2.

**Satz 4.1.5 (Lagrange).** *Gegeben eine endliche Gruppe teilt die Kardinalität jeder Untergruppe die Kardinalität der ganzen Gruppe. Ist  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, so gilt genauer*

$$|G| = |H| \cdot |G/H| = |H| \cdot |H \backslash G|$$

*Beweis.* Jedes Element von  $G$  gehört zu genau einer Links- beziehungsweise Rechtsnebenklasse unter  $H$ , und jede dieser Nebenklassen hat genau  $|H|$  Elemente.  $\square$

4.1.6. In anderen Worten kann man diesen Beweis etwa im Fall der Linksnebenklassen auch dahingehend formulieren, daß alle Fasern der offensichtlichen Abbildung  $\text{can} : G \rightarrow G/H$  genau  $|H|$  Elemente haben, denn diese Fasern sind gerade die Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$ .

**Definition 4.1.7.** Gegeben eine Gruppe  $G$  mit einer Untergruppe  $H$  heißt die Zahl  $|G/H|$  der Restklassen auch der **Index von  $H$  in  $G$** .

## Übungen

*Ergänzende Übung 4.1.8.* Haben zwei Untergruppen ein- und derselben Gruppe endlichen Index, so hat auch ihr Schnitt endlichen Index.

*Ergänzende Übung 4.1.9.* Seien  $G \supset H$  eine Gruppe und eine Untergruppe. Man zeige, daß es eine Bijektion zwischen  $G/H$  und  $H \backslash G$  gibt.

*Ergänzende Übung 4.1.10.* Haben zwei endliche Untergruppen einer Gruppe teilerfremde Kardinalitäten, so besteht ihr Schnitt nur aus dem neutralen Element.

*Übung 4.1.11.* Sei  $\varphi : G \rightarrow L$  ein Gruppenhomomorphismus und seien  $H \subset G$  sowie  $H' \subset G'$  Untergruppen. Gilt  $\varphi(H) \subset H'$ , so gibt es genau eine Abbildung  $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G'/H'$  derart, daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G'/H' \end{array}$$

auch das rechte Rechteck kommutiert, und die nichtleeren Fasern dieser Abbildung  $\bar{\varphi}$  sind die Mengen  $\bar{\varphi}^{-1}(\varphi(g)H') = \{gxH \mid x \in \varphi^{-1}(H')\}$  und haben insbesondere alle dieselbe Kardinalität wie  $\varphi^{-1}(H')/H$ . Sind weiter zwei der vertikalen Abbildungen unseres Diagramms Bijektionen, so auch die Dritte. Allgemeinere Aussagen liefert später das Neunerlemma 4.7.5.

**Ergänzende Übung 4.1.12 (Zu unipotenten oberen Dreiecksmatrizen).** Sei  $R$  ein Ring und  $n \geq 2$ . Gegeben  $i, j \leq n$  mit  $i \neq j$  betrachten wir die Untergruppen  $U_{ij} := I + RE_{ij} \subset GL(n; R)$  und die Untergruppe  $U \subset GL(n; R)$  aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen in  $R$ . Man zeige, daß das Aufmultiplizieren in beliebiger aber fest gewählter Reihenfolge stets eine Bijektion

$$\prod_{i < j} U_{ij} \xrightarrow{\sim} U$$

induziert. Hinweis: Man betrachte rechts die Folge von Untergruppen  $U_\nu := \{A \mid A_{ij} = 0 \text{ für } 0 < |i-j| \leq \nu\}$  und verwende 4.1.11. Allgemeiner zeige man, daß für jede Permutation  $w \in \mathcal{S}_n$  die Multiplikation bei beliebiger aber fester Reihenfolge der Faktoren eine Bijektion  $\prod_{i < j, w(i) < w(j)} U_{ij} \xrightarrow{\sim} U \cap w^{-1}Uw$  liefert. Hinweis: Natürlich gilt stets  $U_{w(i)w(j)}w = wU_{ij}$ .

## 4.2 Normalteiler und Nebenklassengruppen

**Satz 4.2.1 (Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen).**

Seien  $G$  eine Gruppe,  $s : G \twoheadrightarrow Q$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein beliebiger Gruppenhomomorphismus. Genau dann existiert ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{\varphi} : Q \rightarrow H$  mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$ , wenn gilt  $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$ .

4.2.2. Dieser Gruppenhomomorphismus  $\bar{\varphi}$  ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man unseren Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Gruppenhomomorphismus  $s : G \twoheadrightarrow Q$  für jede weitere Gruppe  $H$  eine Bijektion

$$(\circ s) : \text{Grp}(Q, H) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \text{Grp}(G, H) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Gruppen und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{s} & Q \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & H \end{array}$$

Man sagt dann,  $\varphi$  **faktoriere in eindeutiger Weise über  $s$** .

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $s^{-1}(s(x)) = x \ker(s)$  für alle  $x \in G$ . Die Fasern von unserem surjektiven Gruppenhomomorphismus  $s$  sind also genau die Nebenklassen unter  $\ker(s)$ . Damit ist  $\varphi$  konstant auf den Fasern von  $s$  und wir finden nach der universellen Eigenschaft von Surjektionen [GR] 1.5.13 schon einmal genau eine Abbildung  $\bar{\varphi}$  wie behauptet. Man prüft ohne weitere Schwierigkeiten, daß sie sogar ein Gruppenhomomorphismus sein muß.  $\square$

Beispiel 4.2.3. Wir haben etwa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{can}} & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ & \searrow \varphi : n \mapsto i^n & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

oder in Worten: Die Abbildung  $\varphi : n \mapsto i^n$  faktorisiert über  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  und induziert so einen Gruppenhomomorphismus  $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $\bar{n} \mapsto i^n$ .

**4.2.4 (Surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern).** Gegeben eine Gruppe  $G$  und zwei surjektive Gruppenhomomorphismen  $s : G \twoheadrightarrow Q$  und  $t : G \twoheadrightarrow P$  mit demselben Kern  $\ker(s) = \ker(t)$  sind die Gruppenhomomorphismen  $\bar{t} : Q \rightarrow P$  mit  $\bar{t} \circ s = t$  und  $\bar{s} : P \rightarrow Q$  mit  $\bar{s} \circ t = s$  nach 4.2.1 zueinander inverse Isomorphismen  $Q \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{\sim} Q$ . Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Gruppenhomomorphismus „das Ziel bereits durch die Ausgangsgruppe und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

4.2.5. Die vorstehenden Überlegungen legen die Frage nahe, welche Untergruppen einer gegebenen Gruppe denn als Kerne von von unserer Gruppe ausgehenden Gruppenhomomorphismen in Frage kommen. Das diskutieren wir im folgenden.

**Definition 4.2.6.** Eine Untergruppe  $N$  einer Gruppe  $G$  heißt **normal** oder auch ein **Normalteiler von  $G$** , wenn in  $G$  die  $N$ -Rechtsnebenklassen mit den  $N$ -Linksnebenklassen übereinstimmen, wenn also gilt

$$gN = Ng \quad \forall g \in G$$

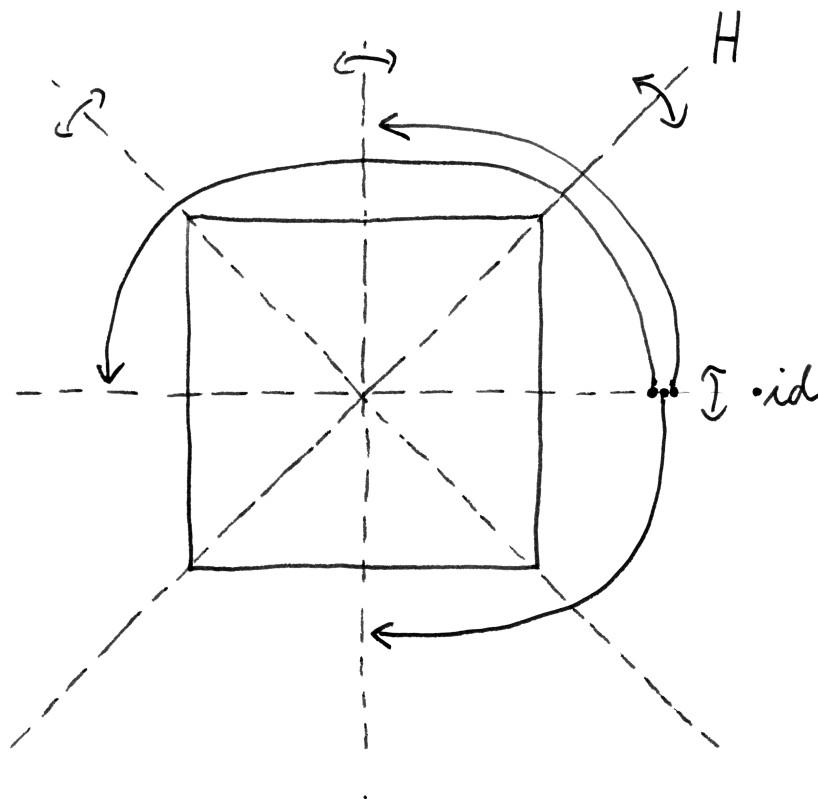
Die Aussage „ $N \subset G$  ist ein Normalteiler“ kürzt man oft ab mit  $N \triangleleft G$ .

*Beispiele 4.2.7.* In einer kommutativen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler. In der Gruppe  $\mathcal{S}_3$  der Permutationen von 3 Elementen ist die Untergruppe  $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3$  aller Permutationen, die die dritte Stelle festhalten, kein Normalteiler.

**4.2.8 (Diskussion der Terminologie).** Normal zu sein ist für eine Untergruppe etwas ganz Besonderes. In diesem Licht betrachtet ist unsere Terminologie gewöhnungsbedürftig. Aber gut, vielleicht ist ja bei Menschen auch normal zu sein etwas ganz Besonderes.

4.2.9. Man sieht leicht, daß der Kern eines Gruppenhomomorphismus stets ein Normalteiler sein muß. Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt jeder Normalteiler der Kern eines surjektiven Gruppenhomomorphismus ist.

**Satz 4.2.10.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $N \subset G$  ein Normalteiler. So gilt:



Die acht Symmetrien des Quadrats. Eine Linksnebenklasse  $gH$  der von der Spiegelung an der Nordost-Diagonalen erzeugten Untergruppe besteht aus den beiden Symmetrien des Quadrats, die die obere rechte Ecke in eine vorgegebene weitere Ecke überführen. Eine Rechtsnebenklasse  $Hg$  besteht dahingegen aus den beiden Symmetrien des Quadrats, bei denen die obere rechte Ecke von einer vorgegebenen weiteren Ecke herkommt. Insbesondere ist  $H$  kein Normalteiler in der Gruppe der acht Symmetrien des Quadrats.

1. Die Menge  $G/N$  der Nebenklassen ist abgeschlossen unter der induzierten Verknüpfung auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(G)$  von  $G$  und wird mit dieser Verknüpfung eine Gruppe, die **Nebenklassengruppe** oder auch der **Quotient von  $G$  nach  $N$** ;
2. Die Abbildung  $G \twoheadrightarrow G/N$ , die jedem Element seine Nebenklasse zuordnet, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern  $N$ .

*Beweis.* Es gilt  $(gN)(g_1N) = gNg_1N = gg_1NN = gg_1N$ , also ist unsere Menge stabil unter der Verknüpfung. Das Assoziativgesetz gilt eh, das neutrale Element ist  $N$ , und das Inverse zu  $gN$  ist  $g^{-1}N$ . Die zweite Aussage ist eh klar.  $\square$

*Beispiel 4.2.11.* Die Nebenklassengruppe  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  kennen wir bereits aus [LA1] 5.2.4, wo wir darauf sogar noch eine Multiplikation erklärt hatten, die sie zu einem Ring macht. Sie hat genau  $m$  Elemente.

**Satz 4.2.12 (Isomorphiesatz).** Jeder Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  von Gruppen induziert einen Isomorphismus  $\bar{\varphi} : G/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$ .

*Beispiel 4.2.13.* In unserem Beispiel 4.2.3 liefert uns der Isomorphiesatz einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \{i^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^\times$ .

*Beispiel 4.2.14.* Die Abbildung  $\varphi = 2\text{can} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, n \mapsto (2n + 10\mathbb{Z})$  hat den Kern  $\ker \varphi = 5\mathbb{Z}$  und das Bild  $\text{im } \varphi = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subset \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ . Der Isomorphiesatz liefert in diesem Fall also einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus unsern Erkenntnissen 4.2.4 über surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern, denn wir finden surjektive Gruppenhomomorphismen von  $G$  auf beide Seiten, die ein kommutatives Dreieck entstehen lassen und denselben Kern haben.  $\square$

**Korollar 4.2.15 (Noether'scher Isomorphiesatz).** Ist  $G$  eine Gruppe und sind  $K \subset H \subset G$  zwei Normalteiler von  $G$ , so induziert die Komposition von kanonischen Abbildungen  $G \twoheadrightarrow (G/K) \twoheadrightarrow (G/K)/(H/K)$  einen Isomorphismus

$$G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$$

4.2.16. Ist  $G$  eine Gruppe und sind  $K \subset H \subset G$  Untergruppen mit  $K$  normal in  $H$ , so werden wir bald  $(G/K)/(H/K)$  als „Raum der Bahnen einer Operation der Gruppe  $H/K$  auf der Menge  $G/K$ “ verstehen können, und unsere Abbildung ist dann immer noch wohldefiniert und nach 5.1.26 eine Bijektion.

*Beweis.* Nach unsern Erkenntnissen 4.2.4 über surjektive Gruppenhomomorphismen mit demselben Kern 4.2.4 reicht es zu zeigen, daß unsere Komposition den Kern  $H$  hat. Das ist jedoch klar.  $\square$

## Übungen

*Übung 4.2.17.* Man zeige, daß in der symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_4$  die Doppeltranspositionen aus [LA1] 6.1.12 zusammen mit dem neutralen Element einen Normalteiler  $D \subset \mathcal{S}_4$  bilden, und konstruiere einen Isomorphismus  $\mathcal{S}_4/D \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_3$ .

*Ergänzende Übung 4.2.18.* Sei  $m \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl. Man zeige, daß die Vorschrift  $\varphi \mapsto \varphi(\bar{1})$  für eine beliebige Gruppe  $G$  eine Bijektion

$$\text{Grp}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g^m = 1\}$$

liefert. Man beachte, daß hierbei  $\bar{1}$  nicht das neutrale Element der additiv notierten Gruppe  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  bezeichnet, sondern die Nebenklasse der Eins, einen Erzeuger, wohingegen  $1 \in G$  das neutrale Element der multiplikativ notierten Gruppe  $G$  meint. Wieviele Gruppenhomomorphismen gibt es von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?

*Übung 4.2.19.* Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \twoheadrightarrow \bar{G}$  und ein Normalteiler  $\bar{N} \subset \bar{G}$  mit Urbild  $\varphi^{-1}(\bar{N}) = N \subset G$  induziert  $\varphi$  einen Gruppenisomorphismus

$$\varphi : G/N \xrightarrow{\sim} \bar{G}/\bar{N}$$

*Übung 4.2.20.* Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist stets ein Normalteiler. Allgemeiner ist das Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus stets ein Normalteiler, und das Bild eines Normalteilers unter einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist wieder ein Normalteiler.

*Ergänzende Übung 4.2.21.* Jede Untergruppe vom Index Zwei ist ein Normalteiler.

*Ergänzende Übung 4.2.22.* Jede Untergruppe von endlichem Index umfaßt einen Normalteiler von endlichem Index.

*Ergänzende Übung 4.2.23.* Man nennt einen Gruppenhomomorphismus  $A \rightarrow A''$  **linksspaltend**, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, und nennt solch ein Rechtsinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Jeder linksspaltende Gruppenhomomorphismus ist surjektiv. Ist  $\varphi : A \rightarrow A''$  ein Homomorphismus von abelschen Gruppen,  $A' \subset A$  sein Kern und  $\psi : A'' \rightarrow A$  ein Rechtsinverses von  $\varphi$  alias  $\varphi\psi = \text{id}$ , so erhalten wir vermittels der Vorschrift  $(a', a'') \mapsto a' + \psi(a'')$  einen Isomorphismus  $A' \times A'' \xrightarrow{\sim} A$ . Verallgemeinerungen auf den Fall nichtabelscher Gruppen besprechen wir in [AL] 1.2.10.

*Ergänzende Übung 4.2.24.* Man nennt einen Gruppenhomomorphismus  $A' \rightarrow A$  **rechtsspaltend**, wenn er ein Linksinverses besitzt, und nennt solch ein Linksinverses dann eine **Spaltung**. Man zeige: Jeder rechtsspaltende Gruppenhomomorphismus ist injektiv. Ist  $\psi : A' \rightarrow A$  ein Homomorphismus von abelschen Gruppen und  $\phi : A \rightarrow A'$  ein Linksinverses alias  $\phi\psi = \text{id}$  und  $A'' \subset A$  dessen Kern, so ist  $\phi$  linksspaltend und wir erhalten für  $A'' := \ker \phi$  wie in 4.2.23 einen Isomorphismus  $A' \times A'' \xrightarrow{\sim} A$ .

*Ergänzende Übung 4.2.25.* Jede Surjektion von einer abelschen Gruppe auf  $\mathbb{Z}^r$  besitzt ein Rechtsinverses. Man gebe ein Beispiel für einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, der kein Rechtsinverses besitzt.

*Übung 4.2.26.* Man zeige, daß das Multiplizieren von Matrizen mit Spaltenvektoren eine Bijektion  $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$ ,  $A \mapsto (A \circ)$  zwischen der Menge aller  $(n \times m)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und der Menge aller Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  liefert.

*Ergänzende Übung 4.2.27.* Seien  $A, B, C$  abelsche Gruppen. Eine Abbildung  $\varphi : A \times B \rightarrow C$  heißt **bilinear** oder genauer  **$\mathbb{Z}$ -bilinear**, wenn jedes feste  $b \in B$  einen Gruppenhomomorphismus  $A \rightarrow C$ ,  $a \mapsto \varphi(a, b)$  liefert und jedes feste  $a \in A$  einen Gruppenhomomorphismus  $B \rightarrow C$ ,  $b \mapsto \varphi(a, b)$ . Man zeige: Gegeben eine bilineare Abbildung  $\varphi : A \times B \rightarrow C$  und surjektive Homomorphismen  $s : A \twoheadrightarrow P$  und  $t : B \twoheadrightarrow Q$  mit  $\varphi(\ker(s) \times B) = 0 = \varphi(A \times \ker(t))$  gibt es genau eine bilineare Abbildung  $\bar{\varphi} : P \times Q \rightarrow C$  derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ s \times t \downarrow & & \parallel \\ P \times Q & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & C \end{array}$$

Analog erklärt man multilineare Abbildungen für abelsche Gruppen und zeigt Analoges für diese.

### 4.3 Zyklische Gruppen

**Definition 4.3.1.** Eine Gruppe heißt **zyklisch**, wenn sie im Sinne von [LA1] 4.3.5 von einem einzigen Element erzeugt wird.

**Definition 4.3.2.** Sei  $g$  ein Element einer Gruppe  $G$ . Die **Ordnung**  $\text{ord } g$  von  $g$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n \geq 1$  mit  $g^n = 1_G$ . Gibt es kein solches  $n$ , so setzen wir  $\text{ord } g = \infty$  und sagen,  $g$  habe **unendliche Ordnung**.

4.3.3. In jeder Gruppe ist das einzige Element der Ordnung 1 das neutrale Element. Elemente der Ordnung  $\leq 2$  heißen auch **Involutionen**.

**Proposition 4.3.4 (Struktur zyklischer Gruppen).** Ist  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$  ein Element, so stimmt die Ordnung von  $g$  überein mit der Kardinalität der von  $g$  erzeugten Untergruppe, in Formeln  $\text{ord } g = |\langle g \rangle|$ . Genauer gilt:

1. Hat  $g$  unendliche Ordnung, so ist die Abbildung  $\nu \mapsto g^\nu$  ein Isomorphismus  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$ ;

2. Hat  $g$  endliche Ordnung  $\text{ord } g = n$ , so induziert  $\nu \mapsto g^\nu$  einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$ .

*Beweis.* Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \nu \mapsto g^\nu$ . Nach dem Isomorphiesatz 4.2.12 haben wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi = \langle g \rangle$$

Nach der Klassifikation [LA1] 4.3.4 der Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  ist  $\ker \varphi$  von der Form  $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$  für eindeutig bestimmtes  $n \in \mathbb{N}$ , und dann gilt notwendig  $n = \text{ord } g$  für  $g$  von endlicher Ordnung beziehungsweise  $n = 0$  für  $g$  von unendlicher Ordnung.  $\square$

4.3.5. Motiviert durch diese Proposition nennt man die Kardinalität einer Gruppe oft die **Ordnung der Gruppe**. Wir haben mit unserer Proposition im Übrigen auch bewiesen, daß jede Gruppe mit genau 5 Elementen isomorph ist zu  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , denn für jedes vom neutralen Element verschiedene Element unserer Gruppe ist  $\langle g \rangle$  eine Untergruppe mit mindestens zwei Elementen, also nach Lagrange bereits die ganze Gruppe. Wir formulieren das gleich noch allgemeiner.

*Ergänzung 4.3.6 (Diskussion der Notation).* Für die endlichen zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $n \geq 1$  sind viele alternative Notationen gebräuchlich. Ich kenne insbesondere die alternativen Notationen  $C_n$ ,  $Z_n$  und  $\mathbb{Z}_n$ , von denen ich die letzte am wenigsten mag, da sie im Fall einer Primzahl  $n = p$  auch für die sogenannten  $p$ -adischen Zahlen benutzt wird.

**Korollar 4.3.7.** Jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch. Ist genauer  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = p$  Elementen, so gibt es für jedes Element  $g \in G \setminus 1_G$  genau einen Gruppenisomorphismus  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} G$  mit  $\bar{1} \mapsto g$ .

*Beweis.* Nach dem Satz von Lagrange 4.1.5 teilt die Ordnung jeder Untergruppe die Ordnung der ganzen Gruppe. Eine Gruppe von Primzahlordnung hat also nur genau zwei Untergruppen, nämlich die einelementige Untergruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht, und die ganze Gruppe als Untergruppe von sich selbst. Die von einem Element, das nicht das neutrale Element ist, erzeugte Untergruppe muß also notwendig bereits die ganze Gruppe sein.  $\square$

**Korollar 4.3.8.** Bei einer endlichen Gruppe  $G$  teilt die Ordnung jedes Elements  $g \in G$  die Ordnung der ganzen Gruppe und es gilt mithin

$$g^{|G|} = 1$$

*Beweis.* Man wende den Satz von Lagrange 4.1.5 an auf die von unserem Element erzeugte Untergruppe. Es folgt, daß  $r := \text{ord } g = |\langle g \rangle|$  ein Teiler von  $|G|$  ist,  $|G| = ra$  mit  $a \in \mathbb{N}$ . Damit erhalten wir aber

$$g^{|G|} = g^{ra} = (g^r)^a = 1^a = 1 \quad \square$$



**Korollar 4.3.9.** Ist  $p$  eine Primzahl, so gilt für alle ganzen Zahlen  $a \in \mathbb{Z}$  die **Fermat'sche Kongruenz**

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

*Beweis.* Die multiplikative Gruppe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  des Körpers  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  hat genau  $p - 1$  Elemente, nach 4.3.8 gilt also  $b^{p-1} = 1$  für alle  $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ . Es folgt  $b^p = b$  für alle  $b \neq 0$ , und für  $b = 0$  gilt diese Gleichung eh. Mit  $b = a + p\mathbb{Z}$  ergibt sich dann die Behauptung.  $\square$

4.3.10. Gibt es natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ , die

- bei Division durch 6 Rest 4 lassen,
- bei Division durch 13 Rest 2, und
- bei Division durch 11 Rest 9?

Da  $\langle 6, 13 \rangle = \langle 13, 11 \rangle = \langle 6, 11 \rangle = \langle 1 \rangle$  lautet die Antwort ja, wie man aus dem anschließenden Korollar 4.3.13 folgert.

**Satz 4.3.11.** Ist  $m = ab$  ein Produkt von zwei zueinander teilerfremden positiven natürlichen Zahlen, so liefert die Abbildung  $\kappa : n \mapsto (n + a\mathbb{Z}, n + b\mathbb{Z})$  einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

4.3.12. Übung 4.4.25 zeigt, daß die fraglichen Gruppen im Fall nicht teilerfremder Faktoren auch nicht isomorph sind.

*Beweis.* Der Kern unserer Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ n &\mapsto (n + a\mathbb{Z}, n + b\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

besteht aus allen  $n \in \mathbb{Z}$ , die durch  $a$  und  $b$  teilbar sind, also aus allen Vielfachen von  $m$ . Unser Isomorphiesatz 4.2.12 liefert mithin einen Isomorphismus  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{im } \kappa$ . Daraus folgt hinwiederum  $\text{im } \kappa = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ , da unsere Untergruppe im  $\kappa$  bereits selbst  $m = ab$  Elemente hat.  $\square$

**Korollar 4.3.13 (Chinesischer Restsatz).** Ist  $m = q_1 \dots q_s$  ein Produkt von paarweise teilerfremden ganzen Zahlen, so liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_s\mathbb{Z}$$

*Beweis.* Das folgt induktiv aus dem in 4.3.11 behandelten Fall  $s = 2$ . Die Details mag der Leser als Übung selbst ausführen.  $\square$

*Ergänzung 4.3.14.* Ein Element endlicher Ordnung in einer Gruppe heißt ein **Torsionselement**. Eine Gruppe, in der alle Elemente außer dem neutralen Element unendliche Ordnung haben, heißt **torsionsfrei**. Zum Beispiel sind die abelschen Gruppen  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  torsionsfrei. Die Menge aller Torsionselemente ist in jeder abelschen Gruppe  $A$  eine Untergruppe, die **Torsionsuntergruppe**  $A_{\text{tor}}$ . In der Tat folgt, wenn wir unsere Gruppe einmal additiv notieren, für  $x, y \in A$  aus  $nx = 0$  und  $my = 0$  bereits  $nm(x + y) = 0$ .

**Satz 4.3.15 (Primzahl torsion in abelschen Gruppen).** *Gegeben eine abelsche Gruppe  $A$  gilt:*

1. *Für jede Primzahl  $p$  ist die Teilmenge  $A(p)$  aller Elemente von  $p$ -Potenz-Ordnung eine Untergruppe;*
2. *Sind  $p_1, \dots, p_r$  paarweise verschiedene Primzahlen, so liefert das Verknüpfen einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$A(p_1) \times \dots \times A(p_r) \hookrightarrow A$$

3. *Das Bild unseres Gruppenhomomorphismus aus Teil 2 besteht genau aus den Elementen von  $A$ , deren Ordnung endlich ist und von keinen von  $p_i$  verschiedenen Primzahlen geteilt wird.*

*Vorschau 4.3.16.* Dieser Satz wird sich in [KAG] 4.8.1 ebenso wie der Satz 3.2.7 über die Direktheit der Summe der Haupträume als Spezialfall desselben allgemeinen Resultats zu „Moduln über Kringen“ erweisen.

*Beweis.* (1) Wir notieren unsere abelsche Gruppe  $A$  additiv. Gegeben  $x, y \in A$  der Ordnungen  $p^r$  und  $p^s$  liefert die Vorschrift  $(n, m) \mapsto nx + my$  einen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \rightarrow A$ . Offensichtlich landet er sogar in  $A(p)$  und sein Bild enthält  $x$  und  $y$ . Das zeigt die erste Behauptung.

(2) Es gilt zu zeigen, daß der Kern Null ist. Sei sonst  $(x_1, \dots, x_r)$  im Kern aber nicht Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $x_1 \neq 0$  annehmen. die Gleichung

$$-x_1 = x_2 + \dots + x_r$$

zeigt dann  $(p_2 \dots p_r)^N x_1 = 0$  für hinreichend großes  $N$ , im Widerspruch zu unserer Annahme, daß die Ordnung von  $x_1$  eine Potenz von  $p_1$  sein soll.

(3) Es reicht, das für zyklische Torsionsgruppen zu zeigen. In diesem Fall folgt es aber unmittelbar aus dem chinesischen Restsatz.  $\square$

**Korollar 4.3.17 (Primzerlegung endlicher abelscher Gruppen).** *Sei  $E$  eine endliche abelsche Gruppe.*

1. Gegeben eine Primzahl  $p$  ist die Teilmenge  $E(p)$  aller Elemente, deren Ordnung eine  $p$ -Potenz ist, eine Untergruppe von  $p$ -Potenzordnung;
2. Sind  $p_1, \dots, p_r$  die paarweise verschiedenen Primzahlen, die in der Primfaktorzerlegung von  $|E|$  mindestens einmal vorkommen, so liefert die Verknüpfung einen Gruppenisomorphismus

$$E(p_1) \times \dots \times E(p_r) \xrightarrow{\sim} E$$

*Beweis.* Unser Korollar folgt unmittelbar aus Satz 4.3.15 über Primzahl torsion in abelschen Gruppen mit Ausnahme der Aussage, daß  $E(p)$  eine Gruppe von  $p$ -Potenzordnung ist. Das folgt aber für alle endlichen abelschen Gruppen, in denen jedes Element  $p$ -Potenzordnung hat, durch Induktion über die Gruppenordnung. Unser Korollar wird alternativ auch unmittelbar aus dem Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen 4.4.5 folgen.  $\square$

**Ergänzung 4.3.18 (Satz von Cauchy im abelschen Fall).** Teilt eine Primzahl  $p$  die Ordnung einer endlichen abelschen Gruppe  $E$ , so gibt es insbesondere in  $E$  ein Element der Ordnung  $p$ : In der Tat ist dann  $E(p)$  nicht trivial; es gibt darin also ein vom neutralen Element verschiedenes Element  $a$ ; dessen Ordnung ist etwa  $p^r$  mit  $r \geq 1$ ; und dann ist in additiver Notation  $p^{r-1}a$  das gesuchte Element der Ordnung  $p$ . Dieselbe Aussage gilt auch für beliebige endliche Gruppen und heißt der „Satz von Cauchy“, aber der Beweis ist dann schwieriger, vergleiche 5.1.35 oder [AL] 1.4.8.

## Übungen

**Ergänzende Übung 4.3.19 (Polynomfunktionen über endlichen Körpern).** Sei  $k$  ein endlicher Körper mit  $|k| = q$  Elementen. Man zeige  $a^q = a$  für alle  $a \in k$ . Man zeige weiter, daß der Kern unserer Surjektion  $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{Ens}(k^n, k)$  aus [LA1] 5.4.3 genau aus denjenigen Polynomen besteht, die sich als Summe  $P_1(X_1^q - X_1) + \dots + P_n(X_n^q - X_n)$  der Produkte von irgendwelchen Polynomen  $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit den Polynomen  $(X_i^q - X_i)$  schreiben lassen. Hinweis: Unsere Summen von Produkten bilden einen Untervektorraum, zu dem der Untervektorraum aller Polynome, in denen kein  $X_i$  in der Potenz  $q$  oder höher vorkommt, komplementär ist.

**Übung 4.3.20 (Untergruppen zyklischer Gruppen).** Man zeige: Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch. Genauer haben wir für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Teiler } d \in \mathbb{N} \text{ von } m\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\} \\ d & \mapsto & d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

Man folgere, daß jede echte, als da heißt von der ganzen Gruppe verschiedene Untergruppe einer zyklischen Gruppe von Primzahlpotenzordnung  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  in der Untergruppe  $p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  enthalten sein muß. Hinweis: [LA1] 4.3.4.

*Ergänzende Übung 4.3.21.* Man zeige: Jede endlich erzeugte Untergruppe von  $\mathbb{Q}$  ist zyklisch.

*Ergänzende Übung 4.3.22.* Man zeige, daß die additive Gruppe aller Gruppenhomomorphismen  $\text{Grp}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  unter punktwiser Addition isomorph ist zu  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , für alle  $n \geq 1$ .

*Übung 4.3.23.* Man gebe alle Zahlen an, die bei Division durch 6 Rest 4 lassen, bei Division durch 13 Rest 2, und bei Division durch 11 Rest 9. Hinweis: Der euklidische Algorithmus liefert schon mal Lösungen, wenn ein Rest 1 ist und die anderen Null.

*Übung 4.3.24.* Man zeige, daß es in einer zyklischen Gruppe der Ordnung  $n$  genau dann Elemente der Ordnung  $d$  gibt, wenn  $d$  ein Teiler von  $n$  ist.

*Übung 4.3.25.* Gibt es ein Vielfaches von 17, dessen letzte Ziffern 39 lauten?

*Ergänzende Übung 4.3.26.* Gegeben  $x, y$  zwei Elemente endlicher Ordnung in einer abelschen Gruppe  $G$  teilt die Ordnung ihres Produkts das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Ordnungen, und sind die Ordnungen von  $x$  und  $y$  teilerfremd, so gilt sogar  $\text{ord}(xy) = (\text{ord } x)(\text{ord } y)$ .

*Ergänzende Übung 4.3.27.* In jeder endlichen abelschen Gruppe wird die maximal von einem Gruppenelement erreichte Ordnung geteilt von den Ordnungen aller Gruppenelemente. Hinweis: Bezeichnet  $M \subset \mathbb{N}$  die Menge aller Ordnungen von Elementen unserer Gruppe, so enthält  $M$  mit jeder Zahl auch alle ihre Teiler. Weiter enthält  $M$  nach 4.3.26 mit je zwei teilerfremden Zahlen auch ihr Produkt.

*Übung 4.3.28 (Verallgemeinerte Fermat'sche Kongruenz).* Gegeben Primzahlen  $p_1, \dots, p_r$  und eine Zahl  $e$  mit  $e \equiv 1 \pmod{(p_i - 1)} \forall i$  zeige man für alle  $a \in \mathbb{Z}$  die Kongruenz  $a^e \equiv a \pmod{(p_1 \dots p_r)}$ . Hinweis: Man folgere das zunächst im Fall  $r = 1$  aus dem Kleinen Fermat. Für den allgemeinen Fall kombiniere man den Chinesischen Restsatz mit dem Kleinen Fermat.

*Ergänzung 4.3.29 (Verschlüsselung nach dem RSA-Verfahren).* Ich will versuchen, das sogenannte **RSA-Verfahren** nach Rivest, Shamir und Adleman zum öffentlichen Vereinbaren geheimer Schlüssel anhand des folgenden Schemas zu erklären.

Geheimbereich Alice	Öffentlicher Bereich	Geheimbereich Bob
Alice wählt zwei große Primzahlen $p, q$ und berechnet das Produkt $N = pq$ . Sie wählt Zahlen $s, t \in \mathbb{N}$ mit $st \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ . Sie macht $N$ und $t$ öffentlich.		
	$N, t$	
		Bob wählt eine Restklasse $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , berechnet $a^t$ , und macht es öffentlich.
	$a^t \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	
Alice berechnet $(a^t)^s = a$ .		

Die Restklasse  $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  ist dann der gemeinsame geheime Schlüssel. Die behauptete Gleichheit von Restklassen  $(a^t)^s = a$  prüft man mit Hilfe des Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

In  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  haben wir ja  $a^x = a$  wann immer gilt  $x \equiv 1 \pmod{p-1}$ . In  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  haben wir ebenso  $a^x = a$  wann immer gilt  $x \equiv 1 \pmod{q-1}$ . Falls beides gilt und erst recht falls gilt  $x \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$  haben wir also  $a^x = a$  in  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Diese Identität ist ein Spezialfall unserer verallgemeinerten Fermat'schen Kongruenz 4.3.28. Der Trick beim RSA-Verfahren besteht darin, daß alle derzeit bekannten Verfahren zum Faktorisieren einer großen Zahl wie  $N$  sehr viel Rechenzeit brauchen. Es ist also möglich,  $N$  zu veröffentlichen und dennoch  $p, q$  geheim zu halten, die wiederum für die Berechnung von  $s$  benötigt werden. Des weiteren braucht es mit allen derzeit bekannten Verfahren auch sehr viel Rechenzeit, um aus  $a^t$  auf  $a$  zurückzuschließen, also eine „ $t$ -te Wurzel modulo  $N$ “ zu finden.

## 4.4 Endlich erzeugte abelsche Gruppen

**Proposition 4.4.1.** *Jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe ist endlich erzeugt, und für die Untergruppe benötigt man höchstens so viele Erzeuger wie für die ganze Gruppe.*

*Ergänzung 4.4.2.* Eine Untergruppe einer nicht abelschen endlich erzeugten Gruppe muß im allgemeinen keineswegs endlich erzeugt sein. Ein Beispiel geben wir in [TF] 4.5.15.

*Beweis.* Induktion über die Zahl der Erzeuger. Im Fall einer zyklischen Gruppe wissen wir nach 4.3.20 oder eigentlich [LA1] 4.3.4 bereits, daß auch jede Untergruppe zyklisch ist. Sei nun unsere Gruppe  $X$  additiv notiert und sei  $x_0, \dots, x_n$  ein Erzeugendensystem. Sei  $Y \subset X$  eine Untergruppe. Nach 4.3.20 ist  $Y \cap \langle x_0 \rangle$  zyklisch, etwa erzeugt von  $y_0$ . Nach Induktionsannahme ist das Bild von  $Y$  in  $X/\langle x_0 \rangle$  endlich erzeugt, etwa von den Nebenklassen  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  gewisser Elemente  $y_1, \dots, y_n \in Y$ . Der Leser wird nun in Anlehnung an den Beweis von [LA1] 2.2.6 unschwer zeigen können, daß  $y_0, y_1, \dots, y_n$  bereits ganz  $Y$  erzeugen.  $\square$

4.4.3. Unter einer **Primzahlpotenz** oder kurz **Primpotenz** verstehen wir eine natürliche Zahl der Gestalt  $q = p^e$  für  $p$  prim und  $e \geq 0$ . Unter einer **echten Primzahlpotenz** verstehen wir eine von 1 verschiedene Primzahlpotenz. Gegeben eine Primzahl  $p$  verstehen wir unter einer  **$p$ -Potenz** eine natürliche Zahl der Gestalt  $q = p^e$  für  $p$  prim und  $e \geq 0$ . Die beiden folgenden Sätze geben zwei **Klassifikationen der endlich erzeugten abelschen Gruppen**.

**Satz 4.4.4 (Klassifikation durch Teilerfolgen).** *Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe  $X$  gibt es genau ein  $s \geq 0$  und ein  $s$ -Tupel von von 1 verschiedenen natürlichen Zahlen  $(a_1, \dots, a_s) \in \{0, 2, 3, \dots\}^s$  mit  $a_i | a_{i+1}$  für  $1 \leq i < s$  derart, daß gilt*

$$X \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_s\mathbb{Z}$$

**Satz 4.4.5 (Klassifikation durch Rang und Primzahlpotenzen).** *Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe  $X$  gibt es echte Primzahlpotenzen  $q_1, \dots, q_t$  und eine natürliche Zahl  $r \in \mathbb{N}$  mit*

$$X \cong \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$$

Die Zahl  $r$  wird durch  $X$  eindeutig festgelegt und heißt der **Rang** von  $X$ . Wir notieren sie  $r = \text{rang}(X)$ . Die Primzahlpotenzen  $q_i$  sind eindeutig bis auf Reihenfolge.

*Vorschau 4.4.6.* Die zweite Klassifikation wird sich in [KAG] 2.4.8 zusammen mit der Jordan'schen Normalform als Spezialfall derselben Klassifikation von „Moduln über Hauptidealringen“ erweisen. Auch die erste Klassifikation läßt sich in dieser Allgemeinheit formulieren und beweisen, vergleiche [KAG] 2.4.5.

4.4.7. Es wird im zweiten Satz nicht gefordert, daß die Primzahlpotenzen paarweise verschieden sein sollen. Ich erinnere daran, daß wir in [GR] 1.5.22 eine Multimenge von Elementen einer Menge  $P$  erklärt hatten als eine Abbildung  $P \rightarrow \mathbb{N}$ . In diesem Sinne werden also die endlich erzeugten abelschen Gruppen klassifiziert durch ihren Rang, eine natürliche Zahl, zusammen mit einer endlichen Multimenge von echten Primzahlpotenzen.

**4.4.8 (Übergang zwischen beiden Klassifikationen).** Um von der Darstellung im ersten Klassifikationssatz zu der im Zweiten überzugehen, kann man sich auf den Fall endlicher Gruppen beschränken, indem man die Nullen an der Ende der Folge der  $a_i$  abschneidet, die eben für den Faktor  $\mathbb{Z}^r$  verantwortlich sind. Die anderen  $a_i$  zerlegt man in ein Produkt von echten Primzahlpotenzen, und die zugehörigen Faktoren  $\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$  zerfallen dann nach dem chinesischen Restsatz entsprechend in ein Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Um von der Darstellung im zweiten Klassifikationssatz zu der im Ersten überzugehen, kann man sich wieder auf den Fall endlicher Gruppen beschränken. Gegeben ein Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung betrachtet man zunächst von jeder dabei auftauchenden Primzahl die höchste jeweils vorkommende Potenz und multipliziert diese zusammen: Das gibt  $a_s$ . Dann streicht man alle „verbrauchten“ Potenzen und macht genauso weiter.

**Korollar 4.4.9.** *Jede endliche abelsche Gruppe ist ein endliches Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, und die dabei auftretenden echten Primzahlpotenzen und ihre Vielfachheiten sind wohlbestimmt bis auf Reihenfolge. In Formeln erhalten wir so eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche Multimengen} \\ \text{von echten Primzahlpotenzen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Endliche abelsche Gruppen} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

$$\mu\{q_1, q_2, \dots, q_t\} \mapsto \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z}$$

4.4.10. Man beachte bei den vorhergehenden Sätzen, daß die Faktoren keineswegs eindeutig sind „als Untergruppen unserer abelschen Gruppe“. Partielle Eindeutigkeitsaussagen liefern 4.3.15 und 4.3.17. Die Beweise werden uns bis zum Ende des Abschnitts beschäftigen. Eine erste wesentliche Zutat ist der gleich folgende Elementarteilersatz 4.4.13.

*Beispiel 4.4.11.* Die Gruppen  $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sind nicht isomorph, denn sie entsprechen den beiden unterschiedlichen Multimengen von Primzahlpotenzen  $\mu\{9, 9, 4\}$  und  $\mu\{3, 27, 4\}$  oder alternativ den beiden unterschiedlichen Teilerfolgen  $9|36$  und  $3|108$ . Man kann das aber auch ohne alle Theorie unschwer einsehen: Die zweite Gruppe enthält Elemente der Ordnung 27, die erste nicht. Der Beweis, daß die explizit angegebenen Gruppen in unseren Klassifikationssätzen jeweils paarweise nicht isomorph sind, verfeinert diese Grundidee.

**4.4.12 (Endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppen).** Jede endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe ist nach jeder unserer beiden Klassifikationen 4.4.4 und 4.4.5 isomorph zu  $\mathbb{Z}^r$  für genau ein  $r \in \mathbb{N}$ .



- Satz 4.4.13 (Elementarteilersatz).** 1. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix  $A$  mit ganzzahligen Einträgen gibt es stets quadratische ganzzahlig invertierbare Matrizen mit ganzzahligen Einträgen  $P$  und  $Q$  derart, daß  $B := PAQ$  eine Matrix mit Nullen außerhalb der Diagonalen ist, in der die Diagonaleinträge weiter vorn jeweils die Diagonaleinträge weiter hinten teilen, in Formeln  $i \neq j \Rightarrow B_{i,j} = 0$  und  $B_{i,i} \mid B_{i+1,i+1} \forall i$ ;
2. Wir können durch geeignete Wahl von  $P$  und  $Q$  sogar zusätzlich erreichen, daß alle Diagonaleinträge nichtnegativ sind, und unter dieser Zusatzannahme werden besagte Diagonaleinträge durch die Matrix  $A$  bereits eindeutig festgelegt.

4.4.14. Ich nenne die Multimenge der Diagonaleinträge von  $B$  die Multimenge der **Elementarteiler der Matrix**  $A$ . Den Beweis der analogen Aussage für Polynomringe dürfen Sie selbst als Übung 4.4.30 ausarbeiten. Eine gemeinsame Verallgemeinerung für sogenannte „Hauptidealringe“ wird in [KAG] 2.4.1 dargestellt.

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Nachweis der Existenz. Ist  $A$  die Nullmatrix, so ist nichts zu zeigen. Sonst finden wir  $P, Q$  invertierbar derart, daß  $PAQ$  oben links einen positiven Eintrag hat. Es gibt dann natürlich auch  $P_{\min}, Q_{\min}$  derart, daß  $P_{\min}AQ_{\min}$  den kleinstmöglichen positiven Eintrag hat unter allen  $PAQ$  mit positivem Eintrag dort. Dann teilt dieser Eintrag notwendig alle anderen Einträge der ersten Spalte, da wir sonst durch Zeilenoperationen, genauer durch Subtraktion eines Vielfachen der ersten Zeile von einer anderen Zeile, Multiplikation einer Zeile mit  $-1$  und Vertauschung zweier Zeilen, einen noch kleineren positiven Eintrag oben links erzeugen könnten. Ebenso teilt unser Eintrag auch alle anderen Einträge in der ersten Zeile. Durch entsprechende Zeilen- und Spaltenoperationen können wir also zusätzlich die erste Zeile und Spalte bis auf den ersten Eintrag als genullt annehmen. Teilt nun unser positiver Eintrag oben links nicht alle anderen Einträge unserer Matrix, sagen wir nicht den Eintrag  $a_{i,j}$  mit  $i \neq 1 \neq j$ , so könnten wir durch Addieren der ersten Zeile zur  $i$ -ten Zeile gefolgt von einer Subtraktion eines Vielfachen der ersten Spalte von von der  $j$ -ten Spalte einen noch kleineren positiven Eintrag an der Stelle  $(i, j)$  erzeugen, und ihn durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in die linke obere Ecke bringen im Widerspruch zu unserer Annahme. Also teilt unser positiver Eintrag oben links alle anderen Einträge unserer Matrix und eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis der Existenz. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten wir für jedes  $r$  die sogenannten  **$r$ -Minoren** unserer Matrix. Man versteht darunter die Determinanten aller derjenigen  $(r \times r)$ -Matrizen, die wir aus unserer Matrix durch das Streichen von Zeilen und Spalten erhalten können. Dann bemerken wir, daß sich für gegebenes  $r \geq 1$



$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 8 \\ 18 & 16 & 24 & 38 \\ 16 & 12 & 8 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Elementarteiler einer ganzzahligen Matrix durch ganzzahlige ganzzahlig invertierbare Zeilen- und Spaltenoperationen. Wir finden die Elementarteiler 2, 10, 0 jeweils mit der Vielfachheit Eins.

der größte gemeinsame Teiler  $G_r$  aller  $(r \times r)$ -Minoren unter Zeilen- und Spaltenoperationen nicht ändert. Folglich sind die  $G_r = d_1 \dots d_r$  wohlbestimmt durch  $A$ , und dasselbe gilt dann auch für die  $d_i$ .  $\square$

**4.4.15 (Herkunft der Terminologie).** Der Begriff der „Minoren einer Matrix“ wurde meines Wissens in einer Arbeit von Arthur Cayley in Crelles Journal im Jahre 1855, Band 50, Seite 282, mit dem Titel „Sept différents mémoires d’analyse. No 3: Remarques sur la notation des fonctions algébriques“ eingeführt. Cayley war mit Sylvester befreundet, auf den wie bereits in [LA1] 1.1.12 erwähnt die Verwendung des Begriffs einer „Matrix“ in der Mathematik zurückgeht.

*Beweis der Klassifikationen 4.4.4 und 4.4.5.* Wir notieren die abelsche Gruppe  $X$  im folgenden additiv. Gegeben ein Erzeugendensystem  $x_1, \dots, x_n$  von  $X$  erklären wir durch die Vorschrift  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow X$$

Dessen Kern ist nach 4.4.1 wieder eine endlich erzeugte abelsche Gruppe  $K$ , für die wir wieder einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow K$  finden können. Mit der Notation  $\psi$  für die Komposition  $\mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow K \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$  erhalten wir also einen Isomorphismus abelschen Gruppen

$$\mathbb{Z}^n / \text{im } \psi \cong X$$

Genau wie bei Vektorräumen überlegt man sich, daß die Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  genau die Multiplikationen von links mit ganzzahligen  $(n \times m)$ -Matrizen sind, falls Elemente aus  $\mathbb{Z}^m$  beziehungsweise  $\mathbb{Z}^n$  als Spaltenvektoren aufgefaßt werden, vergleiche 4.2.26. Weiter überlegt man sich, daß auch in dieser Situation die Verknüpfung von Homomorphismen der Multiplikation von Matrizen entspricht. Bezeichnet nun  $A$  die Matrix unserer Abbildung  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , und wählen wir  $P$  und  $Q$  wie im Elementarteilersatz, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^n \\ Q \uparrow \wr & & P \downarrow \wr \\ \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}^n \end{array}$$

für eine nicht notwendig quadratische Diagonalmatrix  $D$  mit nichtnegativen Einträgen  $d_1|d_2|\dots|d_r$  für  $r = \min(m, n)$ . In anderen Worten bildet der Gruppenisomorphismus  $P : \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^n$  in dieser Situation im  $\psi = \text{im } A$  bijektiv auf im  $D$  ab und wir erhalten Isomorphismen

$$X \cong \mathbb{Z}^n / \text{im } \psi = \mathbb{Z}^n / \text{im } A \cong \mathbb{Z}^n / \text{im } D$$

Für die Diagonalmatrix  $D$  mit Diagonaleinträgen  $d_i$  ist aber klar, daß  $\mathbb{Z}^n / \text{im } D$  isomorph ist zu einem Produkt der Gruppen  $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$  mit soviel Kopien von  $\mathbb{Z}$ , wie es in unserer Matrix  $D$  mehr Spalten als Zeilen gibt, also mit  $(n - r)$  Kopien von  $\mathbb{Z}$ . Formaler kann das auch mit dem allgemeinen Resultat 4.6.13 begründet werden, nach dem „Produkte exakter Sequenzen wieder exakt sind“. Lassen wir von unserer Folge  $d_1|d_2|\dots|d_r$  nun alle Einsen vorne weg und ergänzen am Ende  $(n - r)$  Nullen, so erhalten wir eine Folge  $a_1|\dots|a_s$  wie in der Klassifikation durch Teilerfolgen 4.4.4 gefordert, und die Existenz dort ist gezeigt. Mit dem Chinesischen Restsatz 4.3.13 folgt dann auch sofort die Existenzaussage der Klassifikation durch Primzahlpotenzen 4.4.5. Um die Eindeutigkeit in unseren Klassifikationen zu zeigen bemerken wir, daß für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe  $X$  und jede Primzahl  $p$  und alle  $n \geq 1$  der Quotient  $p^{n-1}X/p^nX$  nach [LA1] 5.2.44 ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F}_p$  ist. Wir notieren seine Dimension

$$D_p^n(X) := \dim_{\mathbb{F}_p}(p^{n-1}X/p^nX)$$

Alternativ mag man  $D_p^n(X)$  auch als die eindeutig bestimmte natürliche Zahl  $D \in \mathbb{N}$  mit  $|p^{n-1}X/p^nX| = p^D$  charakterisieren. Man sieht nun leicht oder folgert formal mit 4.6.13 die Formel  $D_p^n(X \times Y) = D_p^n(X) + D_p^n(Y)$  für je zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen  $X$  und  $Y$ . Für zyklische Gruppen  $X \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  finden wir schließlich

$$D_p^n(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p^n \text{ teilt } a; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist das klar für  $a = p^m$ , für  $a$  teilerfremd zu  $p$  ist es eh klar, und mit dem Chinesischen Restsatz 4.3.11 folgt es im allgemeinen. Für jede Zerlegung  $X \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_t\mathbb{Z}$  finden wir also

$$D_p^n(X) = |\{i \mid p^n \text{ teilt } d_i\}|$$

Für  $X \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_t\mathbb{Z}$  wie in 4.4.5 finden wir insbesondere mit den Notationen von dort

$$D_p^n(X) = r + |\{i \mid p^n \text{ teilt } q_i\}|$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle Primzahlen  $p$ , so folgt die im Satz behauptete Eindeutigkeit ohne weitere Schwierigkeiten: Wir erhalten genauer für jede Primzahl  $p$  und jedes  $n \geq 1$  die nur von unserer Gruppe abhängenden Darstellungen  $|\{i \mid q_i = p^n\}| = D_p^n(X) - D_p^{n+1}(X)$  und  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} D_p^n(X)$  für die Zahl der zyklischen Faktoren von vorgegebener Primzahlpotenzordnung und den Rang  $r$  des freien Anteils. Die Eindeutigkeit in 4.4.4 hinwiederum kann man leicht aus der Eindeutigkeit in 4.4.5 folgern: Verschiedene Teilerfolgen führen offensichtlich zu verschiedenen Multimengen von echten Primzahlpotenzen oder verschiedenen Rängen.  $\square$

**Definition 4.4.16.** Gegeben eine Gruppe  $G$  heißt die kleinste Zahl  $e \geq 1$  mit  $g^e = 1 \quad \forall g \in G$  der **Exponent** unserer Gruppe. Gibt es kein solches  $e$ , so sagen wir, die Gruppe habe unendlichen Exponenten.

**Satz 4.4.17 (Endliche Gruppen von Einheitswurzeln).** *Jede endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers ist zyklisch.*

4.4.18. Die Elemente  $\zeta$  endlicher Ordnung in der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind per definitionem genau diejenigen Elemente, die eine Gleichung der Gestalt  $\zeta^n = 1$  erfüllen. Man nennt sie deshalb auch die **Einheitswurzeln** des Körpers.

*Beispiel 4.4.19.* Um uns auf den gleich folgenden Beweis einzustimmen zeigen wir zunächst beispielhaft, daß jede 18-elementige Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist. Nach 4.4.4 muß unsere Gruppe ja isomorph sein zu genau einer der beiden Gruppen  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Es gilt also nur, die zweite Möglichkeit auszuschließen. Im zweiten Fall gäbe es jedoch in unserer Gruppe 8 Elemente der Ordnung drei und 9 Elemente, deren Ordnung drei teilt, und das steht im Widerspruch dazu, daß das Polynom  $X^3 - 1$  in unserem Körper höchstens drei Nullstellen haben kann.

*Beweis.* In jeder endlichen kommutativen Gruppe wird die maximale von einem Gruppenelement erreichte Ordnung  $n$  geteilt von den Ordnungen aller Gruppenelemente, zum Beispiel nach dem Klassifikationssatz 4.4.4 oder direkter nach Übung 4.3.27. Wäre eine endliche Untergruppe  $E$  der multiplikativen Gruppe eines Körpers nicht zyklisch, so gäbe es also  $n < |E|$  mit  $\zeta^n = 1 \quad \forall \zeta \in E$  im Widerspruch dazu, daß das Polynom  $X^n - 1$  in unserem Körper höchstens  $n$  Nullstellen haben kann.  $\square$

**Ergänzung 4.4.20 (Nichtspalten der Einbettung der Torsionsuntergruppe).** Gegeben eine abelsche Gruppe  $A$  bilden die Elemente endlicher Ordnung nach 4.3.14 stets eine Untergruppe  $A_{\text{tor}} \subset A$  und der Quotient  $A/A_{\text{tor}}$  ist offensichtlich torsionsfrei. Allerdings gibt es im Gegensatz zum Fall endlich erzeugter abelscher Gruppen im allgemeinen keinen Gruppenisomorphismus zwischen  $A$  und  $A_{\text{tor}} \times (A/A_{\text{tor}})$ . Betrachten wir etwa in der Gruppe  $A$  aller Folgen  $a_n$  mit  $a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , die wir später einmal  $A = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  notieren, das Element

$$v = (\overline{p^0}, 0, \overline{p^1}, 0, \overline{p^2}, 0, \dots),$$

So ist  $v$  kein Torsionselement und seine Nebenklasse  $\bar{v} \in A/A_{\text{tor}}$  ist folglich nicht Null und für alle  $i \geq 0$  gibt es  $w = w_i \in A/A_{\text{tor}}$  mit  $p^i w = v$ . Das einzige Element von  $A$ , das in dieser Weise „durch alle  $p$ -Potenzen teilbar ist“, ist jedoch die Null. Folglich existiert kein Gruppenisomorphismus zwischen  $A$  und  $A_{\text{tor}} \times (A/A_{\text{tor}})$ . Dies Beispiel ist im übrigen eine Variation von 3.2.21.

## Übungen

*Übung 4.4.21.* Sei  $k$  ein Körper. Die Matrizen vom Rang  $< r$  in  $\text{Mat}(m \times n; k)$  sind genau die Matrizen, bei denen alle  $r$ -Minoren verschwinden.

*Ergänzende Übung 4.4.22.* Der Rang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe  $X$  kann beschrieben werden als die Dimension des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\text{Grp}(X, \mathbb{Q})$  aller Gruppenhomomorphismen von  $X$  nach  $\mathbb{Q}$ , mit seiner Vektorraumstruktur als Teilraum des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\text{Ens}(X, \mathbb{Q})$ .

*Ergänzende Übung 4.4.23.* Man gebe ein dreielementiges bezüglich Inklusion minimales Erzeugendensystem der Gruppe  $\mathbb{Z}$  an.

*Übung 4.4.24 (Untergruppen freier endlich erzeugter abelscher Gruppen).* Gegeben eine Untergruppe  $U \subset \mathbb{Z}^n$  gibt es stets einen Automorphismus  $\varphi$  von  $\mathbb{Z}^n$  und  $0 \leq r \leq n$  und positive natürliche Zahlen  $d_1 | d_2 | \dots | d_r$  mit  $\varphi(U) = \langle d_1 e_1, d_2 e_2, \dots, d_r e_r \rangle$ . Eine analoge Aussage für Polynomringe in einer Veränderlichen mögen Sie selber formulieren und beweisen. Eine gemeinsame Verallgemeinerung für „Hauptidealringe“ diskutieren wir in [KAG] 2.4.18.

*Ergänzende Übung 4.4.25.* Gegeben  $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gibt es einen Gruppenisomorphismus  $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  genau dann, wenn  $a$  und  $b$  teilerfremd sind.

*Ergänzende Übung 4.4.26.* Man zeige, daß für jede nichttriviale zyklische Gruppe gerader Ordnung  $2n$  in additiver Notation die Multiplikation mit  $n$  als Bild die einzige Untergruppe mit zwei Elementen hat und als Kern die einzige Untergruppe vom Index Zwei. Des weiteren zeige man, daß es nur einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von unserer zyklischen Gruppe gerader Ordnung auf „die“ zweielementige Gruppe gibt.

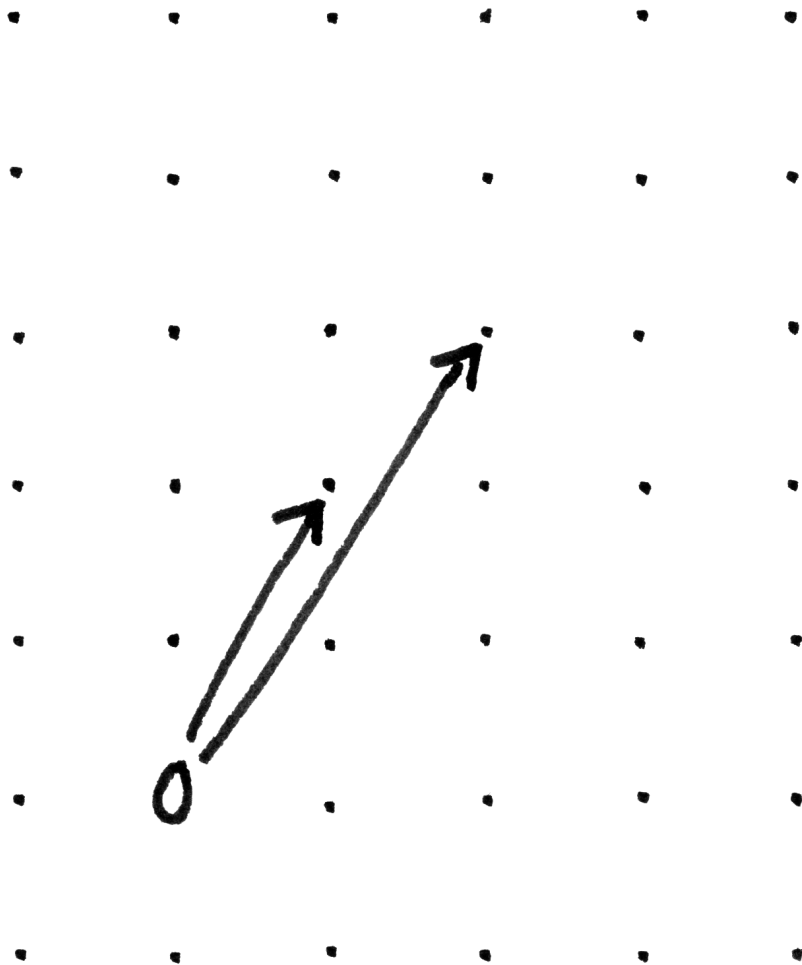
*Ergänzende Übung 4.4.27.* Man berechne die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

*Ergänzende Übung 4.4.28.* Man zeige, daß jede von Null verschiedene Zeilenmatrix als einzigen Elementarteiler den größten gemeinsamen Teiler der Matrixeinträge hat.

*Ergänzende Übung 4.4.29.* Sind  $a, b \in \mathbb{Z}$  teilerfremd, in Formeln  $\langle a, b \rangle = \langle 1 \rangle$ , so läßt sich das Element  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  ergänzen zu einem Erzeugendensystem von  $\mathbb{Z}^2$ . Man formuliere und zeige auch die analoge Aussage für  $\mathbb{Z}^n$ .

*Ergänzende Übung 4.4.30 (Smith-Zerlegung).* Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix  $A$  mit Einträgen im Polynomring  $k[X]$  mit Koeffizienten in



Ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{Z}^2$

einem Körper  $k$  zeige man: (1) Es gibt quadratische im Matrizenring über  $k[X]$  invertierbare Matrizen mit polynomialen Einträgen  $P$  und  $Q$  derart, daß  $B = PAQ$  eine Matrix mit Nullen außerhalb der Diagonalen ist, in der die Diagonaleinträge weiter vorn jeweils die Diagonaleinträge weiter hinten teilen, in Formeln  $i \neq j \Rightarrow B_{i,j} = 0$  und  $B_{i,i} | B_{i+1,i+1} \quad \forall i$ ; (2) Wir können durch geeignete Wahl von  $P$  und  $Q$  sogar zusätzlich erreichen, daß alle von Null verschiedenen Diagonaleinträge normiert sind, und unter dieser Zusatzannahme werden besagte Diagonaleinträge durch die Matrix  $A$  bereits eindeutig festgelegt.

**Vorschau 4.4.31.** Die Smith-Zerlegung aus der vorhergehenden Übung wird sich in [KAG] 2.4.1 als ein Spezialfall des „Elementarteilersatzes für Hauptidealringe“ erweisen. Die Smith-Zerlegung ist der Schlüssel zum vertieften Verständnis der Jordan’schen Normalform und liefert auch Verallgemeinerungen über nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körpern, vergleiche etwa [KAG] 2.4.11 folgende.

**Übung 4.4.32 (Einheitengruppen von Restklassenringen).** Nach dem chinesischen Restsatz kennen wir die Einheitengruppen  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ , sobald wir sie für jede Primzahlpotenz  $m$  kennen. In dieser Übung sollen sie zeigen:

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & p \text{ ist eine ungerade Primzahl, } r \geq 1; \\ \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2, r \geq 2. \end{cases}$$

Man beachte, daß hier links die Multiplikation als Verknüpfung zu verstehen ist, rechts dahingegen die Addition. Hinweis: Nach 4.4.17 ist  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  stets zyklisch. Bei ungeradem  $p$  gehe man von der Abbildung  $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  aus und zeige, daß sie surjektiv ist und daß die Restklasse von  $1 + p$  den Kern erzeugt. Dazu beachte man, daß für alle  $b \in \mathbb{Z}$  und  $n \geq 1$  gilt  $(1 + p^n + bp^{n+1})^p \in 1 + p^{n+1} + p^{n+2}\mathbb{Z}$ . Dann beachte man, daß diese Formel unter der stärkeren Annahme  $n \geq 2$  auch für  $p = 2$  gilt, und folgere, daß der Kern der Abbildung  $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$  für  $r \geq 2$  von der Restklasse von 5 erzeugt wird. In diesem Fall kann eine Spaltung unserer Abbildung leicht explizit angegeben werden.

**Übung 4.4.33.** Gibt es eine Potenz von 17, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern 37 endet?

**Übung 4.4.34 (Primitivwurzeln in Restklassenringen).** Man zeige, daß für  $m \geq 2$  die Einheitengruppe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  des Restklassenrings  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  zyklisch ist genau dann, wenn  $m$  eine Potenz einer ungeraden Primzahl oder das Doppelte einer Potenz einer ungeraden Primzahl oder Zwei oder Vier ist. Hinweis: Man beachte 4.4.32, den chinesischen Restsatz 4.3.11, und die Tatsache, daß eine zyklische Gruppe nie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  als Quotienten haben kann. Ein Erzeuger der Einheitengruppe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  heißt im übrigen auch eine **Primitivwurzel modulo  $m$**  und die vorhergehende Aussage darüber, modulo welcher natürlichen Zahlen  $m$  Primitivwurzeln existieren, wird als der **Satz von Euler** zitiert. Bis heute (2011) ungelöst

ist die **Vermutung von Artin**, nach der die 2 modulo unendlich vieler Primzahlen eine Primitivwurzel sein sollte.

*Ergänzende Übung 4.4.35.* Eine Untergruppe eines endlichdimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums heißt ein  **$\mathbb{Z}$ -Gitter**, wenn sie von einer Basis unseres  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums erzeugt wird. Man zeige: Eine endlich erzeugte Untergruppe eines endlichdimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums ist ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter genau dann, wenn sie besagten Vektorraum als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum erzeugt. Ist  $\Gamma \subset V$  ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter eines endlichdimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums und  $\varphi : V \twoheadrightarrow W$  eine surjektive lineare Abbildung, so ist  $\varphi(\Gamma)$  ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter in  $W$ . Ist  $U \subset V$  ein Untervektorraum, so ist  $U \cap \Gamma$  ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter in  $U$ .

## 4.5 Quotientenvektorräume

**Satz 4.5.1 (Universelle Eigenschaft surjektiver Homomorphismen).** Seien  $s : V \twoheadrightarrow Q$  eine surjektive lineare Abbildung und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine beliebige lineare Abbildung. Genau dann existiert ein Homomorphismus  $\bar{\varphi} : Q \rightarrow W$  mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$ , wenn gilt  $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$ .

4.5.2. Dieser Homomorphismus  $\bar{\varphi}$  ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man diesen Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Homomorphismus  $s : V \twoheadrightarrow Q$  für jeden weiteren Vektorraum  $W$  eine Bijektion

$$(\circ s) : \text{Hom}_k(Q, W) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \text{Hom}_k(V, W) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Gruppen und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{s} & Q \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & W \end{array}$$

Man formuliert diesen Satz auch mit den Worten,  $\varphi$  **faktoriere in eindeutiger Weise über  $s$** .

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\varphi$  konstant auf den Fasern von  $s$ . Damit finden wir schon mal eine Abbildung  $\bar{\varphi}$  wie behauptet. Man prüft leicht, daß sie ein Homomorphismus ist.  $\square$

4.5.3 (**Surjektive Homomorphismen mit gleichem Kern**). Gegeben ein Vektorraum  $V$  und zwei surjektive Homomorphismen  $s : V \twoheadrightarrow Q$  und  $t : V \twoheadrightarrow P$  mit demselben Kern  $\ker(s) = \ker(t)$  sind die Homomorphismen  $\bar{t} : Q \rightarrow P$  mit



$\bar{t} \circ s = t$  und  $\bar{s} : P \rightarrow Q$  mit  $\bar{s} \circ t = s$  nach 4.5.1 offensichtlich zueinander inverse Isomorphismen  $Q \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{\sim} Q$ . Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Homomorphismus „das Ziel bereits durch den Ausgangsraum und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

**Satz 4.5.4 (Quotientenvektorraum).** Sei  $k$  ein Körper. Gegeben  $V \supset U$  ein  $k$ -Vektorraum mit einem Teilraum existiert auf der Restklassengruppe  $V/U$  aus 4.2.10 genau eine Struktur als  $k$ -Vektorraum  $k \times V/U \rightarrow V/U$  derart, daß die kanonische Projektion

$$\text{can} : V \twoheadrightarrow V/U$$

aus 4.2.10 eine  $k$ -lineare Abbildung wird. Mit dieser Vektorraumstruktur heißt  $V/U$  der **Quotient von  $V$  nach  $U$** .

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} k \times \mathcal{P}(V) &\rightarrow \mathcal{P}(V) \\ (\lambda, A) &\mapsto \lambda.A := \lambda A + U \end{aligned}$$

Für  $A = v + U$  finden wir  $\lambda.A = \lambda A + U = \lambda v + U$ , so daß unsere Abbildung eine Abbildung  $k \times V/U \rightarrow V/U$  induziert, die die Eigenschaft  $\overline{\lambda v} = \lambda.\bar{v}$  hat für alle  $\lambda \in k, v \in V$ . Damit folgt sofort, daß unsere Abbildung  $k \times V/U \rightarrow V/U$  auf der abelschen Gruppe  $V/U$  eine Struktur als  $k$ -Vektorraum definiert, und daß die Projektion  $V \twoheadrightarrow V/U$  für diese Struktur  $k$ -linear ist. Umgekehrt ist auch klar, daß das die einzige Struktur als  $k$ -Vektorraum auf der abelschen Gruppe  $V/U$  ist, für die die Projektion  $V \twoheadrightarrow V/U$  eine  $k$ -lineare Abbildung sein kann.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k \times V & \xrightarrow{m} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ k \times V/U & \xrightarrow{\bar{m}} & V/U \end{array}$$

mit der Skalarmultiplikation in der oberen Horizontalen. Nach Übung 4.2.27 und wegen  $m(k \times U) \subset U$  gibt es genau eine  $\mathbb{Z}$ -bilineare Abbildung in der unteren Horizontalen, die dies Diagramm zum Kommutieren bringt. Daß die Nebenklassengruppe  $V/U$  mit dieser Abbildung als Skalarmultiplikation ein  $k$ -Vektorraum mit den geforderten Eigenschaften ist, prüft man dann ohne weitere Schwierigkeiten.  $\square$

**4.5.5 (Isomorphiesatz für Vektorräume).** Jeder Vektorraumhomomorphismus  $f : V \rightarrow W$  induziert einen Vektorraumisomorphismus  $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \text{im } f$ . Das folgt unmittelbar aus dem Isomorphiesatz für Gruppen 4.2.12.

4.5.6. Gegeben Vektorräume  $V \supset W \supset U$  induziert die Komposition von kanonischen Abbildungen  $V \twoheadrightarrow V/U \twoheadrightarrow (V/U)/(W/U)$  einen Vektorraumisomorphismus  $V/W \xrightarrow{\sim} (V/U)/(W/U)$ . Das folgt unmittelbar aus dem Noether'schen Isomorphiesatz 4.2.15.

**Definition 4.5.7.** Gegeben  $V \supset U$  ein Vektorraum mit einem Untervektorraum heißt die Dimension des Quotienten  $V/U$  auch die **Kodimension von  $U$  in  $V$**  und wird notiert als  $\text{codim}(U \subset V) := \dim(V/U)$ .

4.5.8. Ist  $V$  endlichdimensional, so haben wir nach dem Isomorphiesatz 4.5.5 und der Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 die Identität

$$\text{codim}(U \subset V) = \dim(V) - \dim(U)$$

Es gibt aber auch in unendlichdimensionalen Räumen durchaus Teilräume endlicher Kodimension. Eine Teilmenge eines Vektorraums ist eine lineare Hyperebene im Sinne von [LA1] 1.5.16 genau dann, wenn sie ein Untervektorraum der Kodimension Eins ist.

## Übungen

*Ergänzende Übung 4.5.9.* Gegeben eine bilineare Abbildung  $b : V \times W \rightarrow L$  und surjektive lineare Abbildungen  $s : V \twoheadrightarrow P$  und  $t : W \twoheadrightarrow Q$  mit der Eigenschaft  $b(\ker(s) \times W) = 0 = b(V \times \ker(t))$  gibt es genau eine bilineare Abbildung  $\bar{b} : P \times Q \rightarrow L$  derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & L \\ s \times t \downarrow & & \parallel \\ P \times Q & \xrightarrow{\bar{b}} & L \end{array}$$

*Übung 4.5.10.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  mit Untervektorräumen  $U, W$  zeige man, daß sich jede Linearform auf  $V$ , die auf  $U \cap W$  verschwindet, schreiben läßt als Summe einer Linearform, die auf  $U$  verschwindet, und einer Linearform, die auf  $W$  verschwindet.

*Übung 4.5.11 (Simultane Trigonalisierbarkeit).* Eine Menge von paarweise kommutierenden trigonalisierbaren Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums ist stets simultan trigonalisierbar, als da heißt, es gibt eine Basis, bezüglich derer alle unsere Endomorphismen eine Matrix von oberer Dreiecksgestalt haben. Hinweis: Existenz eines simultanen Eigenvektors 3.2.18 und vollständige Induktion durch betrachten des Quotienten nach dem davon erzeugten Teilraum.

*Ergänzende Übung 4.5.12 (Quotienten affiner Räume).* Gegeben eine surjektive affine Abbildung von affinen Räumen  $\varphi : E \twoheadrightarrow F$  zeige man, daß jede affine Abbildung  $\eta : E \rightarrow G$  mit  $\ker \eta \supset \ker \varphi$  in eindeutiger Weise über  $\varphi$  faktorisiert. Gegeben ein affiner Raum  $E$  und ein Teilraum  $U \subset \vec{E}$  zeige man andererseits, daß es eine surjektive affine Abbildung  $\varphi : E \twoheadrightarrow F$  gibt mit  $\ker \varphi = U$ . Man mag  $F$  konstruieren als den Bahnenraum von  $U$  in  $E$  und mag diesen affinen Raum  $E/U$  notieren. Die zu diesem Datum gehörige surjektive affine Abbildung mag  $\text{can} : E \twoheadrightarrow E/U$  notiert werden.

## 4.6 Exakte Sequenzen

4.6.1. Beim Arbeiten mit Quotienten ermöglicht der Formalismus der „exakten Sequenzen“ oft besonders transparente Formulierungen. Wir führen deshalb im folgenden auch diese Sprache ein.

**Definition 4.6.2.** Eine Menge mit einem ausgezeichneten Element heißt eine **bepunktete Menge**. Das ausgezeichnete Element einer bepunkteten Menge heißt der **Basispunkt**.

**Definition 4.6.3.** Eine Sequenz  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  von bepunkteten Mengen mit basispunkterhaltenden Abbildungen heißt **exakt**, wenn das Urbild in  $Y$  des ausgezeichneten Punktes  $z \in Z$  mit dem Bild von  $X \rightarrow Y$  zusammenfällt, in Formeln  $f(X) = g^{-1}(z)$ . Eine längere Sequenz von bepunkteten Mengen heißt exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

*Beispiel 4.6.4.* Sei  $\text{ens}$  die einelementige Menge. Eine Sequenz  $X \rightarrow Y \rightarrow \text{ens}$  ist exakt genau dann, wenn ihre erste Abbildung surjektiv ist. Eine Sequenz  $\text{ens} \rightarrow Y \rightarrow Z$  ist exakt genau dann, wenn ihre zweite Abbildung injektiv ist.

**Definition 4.6.5.** Eine **kurze exakte Sequenz** von bepunkteten Mengen ist eine Sequenz  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  derart, daß die Sequenz  $\text{ens} \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \text{ens}$  exakt ist oder gleichbedeutend, daß  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  exakt ist sowie  $X \rightarrow Y$  injektiv und  $Y \rightarrow Z$  surjektiv. Wir notieren kurze exakte Sequenzen meist

$$X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$$

4.6.6 (**Exakte Sequenzen von Gruppen**). Eine Gruppe fassen wir in diesem Kontext stets auf als eine bepunktete Menge mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt. Eine Sequenz von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

heißt also exakt, wenn das Bild der ersten Abbildung zusammenfällt mit dem Kern der zweiten Abbildung, in Formeln  $\text{im } f = \ker g$ .

*Beispiel 4.6.7.* Für jeden Homomorphismus  $x : M \rightarrow N$  von additiv notierten abelschen Gruppen ist die Sequenz

$$0 \rightarrow (\ker x) \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow (N/\operatorname{im} x) \rightarrow 0$$

exakt. Man nennt wegen dieser Symmetrie den Quotienten nach dem Bild auch den **Kokern** unseres Morphismus von abelschen Gruppen. Wir verwenden für den Kokern die Notation  $\operatorname{cok} x := (N/\operatorname{im} x)$ .

4.6.8. Die Dimensionsformel [LA1] 2.2.5 kann in dieser Terminologie auch dahingehend formuliert werden, daß für jede kurze exakte Sequenz  $V' \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V''$  von Vektorräumen gilt

$$\dim V = \dim V' + \dim V''$$

**Definition 4.6.9.** Gegeben Sequenzen  $A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} C$  und  $A' \xrightarrow{r'} B' \xrightarrow{s'} C'$  verstehen wir unter einem **Homomorphismus von Sequenzen** ein Tripel  $(f, g, h)$  von Homomorphismen derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ A' & \xrightarrow{r'} & B' & \xrightarrow{s'} & C' \end{array}$$

Solch ein Morphismus heißt ein **Isomorphismus von Sequenzen**, wenn alle drei vertikalen Abbildungen  $f, g$  und  $h$  Isomorphismen sind. Je nach Kontext meinen wir mit Homomorphismen hier Vektorraumhomomorphismen, Gruppenhomomorphismen oder schlicht Abbildungen.

4.6.10. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $A \xhookrightarrow{r} B \twoheadrightarrow C$  sind gleichbedeutend: (1)  $r$  besitzt ein Linksinverses, (2)  $s$  besitzt ein Rechtsinverses und (3) es gibt einen Isomorphismus der Gestalt  $(\operatorname{id}_A, f, \operatorname{id}_C)$  von unserer Sequenz mit der Sequenz

$$A \xhookrightarrow{\operatorname{in}_1} A \oplus C \xrightarrow{\operatorname{pr}_2} C$$

Das ist eine Umformulierung der Übungen 4.2.23 und 4.2.24. Eine kurze exakte Sequenzen mit diesen Eigenschaften heißt eine **spaltende** kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit der Multiplikation mit Zwei als erster Abbildung spaltet nicht.

4.6.11 (**Kurze exakte Sequenzen von Vektorräumen spalten**). Arbeiten wir speziell mit Vektorräumen, so finden wir mit [LA1] 2.10.1 für jeden Untervektorraum  $N \subset A$  einen zu  $N$  komplementären Teilraum  $U$  und nach [LA1] 2.2.20

induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus  $U \xrightarrow{\sim} A/N$ . In diesem Fall erhalten wir also zusätzlich einen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & N \oplus U & \twoheadrightarrow & U \\ \parallel & & \wr \downarrow g & & \wr \downarrow h \\ N & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A/N \end{array}$$

Implizit ist dabei zu verstehen, daß die Morphismen der oberen Horizontale die kanonische Injektion und Projektion sein sollen.

**4.6.12 (Die Duale einer kurzen exakten Sequenz ist exakt).** Gegeben eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen ist auch die duale Sequenz eine kurze exakte Sequenz. Das ist in der Tat offensichtlich im Fall einer kurzen exakten Sequenz der Gestalt  $N \hookrightarrow N \oplus U \twoheadrightarrow U$  und folgt dann mit 4.6.11 im allgemeinen. Speziell ist die Transponierte einer Injektion eine Surjektion und die Transponierte einer Surjektion eine Injektion.

## Übungen

*Übung 4.6.13 (Quotienten und Produkte).* Gegeben zwei Sequenzen von besetzten Mengen  $A \rightarrow B \rightarrow C$  und  $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$  ist ihr **Produkt**

$$(A \times A') \rightarrow (B \times B') \rightarrow (C \times C')$$

exakt genau dann, wenn die beiden Ausgangssequenzen exakt sind. Analoges gilt sowohl für das Produkt als auch für die direkte Summe einer beliebigen Familie von Sequenzen von besetzten Mengen. Diese Aussage präzisiert unter anderem die etwas vage Aussage, daß das „Bilden von Produkten mit dem Bilden von Quotienten kommutiert“.

*Ergänzende Übung 4.6.14 (Additivität der Spur).* Gegeben ein kommutatives Diagramm von endlichdimensionalen Vektorräumen mit zweimal derselben kurzen exakten Zeile

$$\begin{array}{ccccc} V' & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & V'' \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\ V' & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & V'' \end{array}$$

gilt für die Spuren der Vertikalen die Identität  $\text{tr}(f) = \text{tr}(f') + \text{tr}(f'')$ . Hat allgemeiner im Fall beliebiger Vektorräume der Homomorphismus  $f$  endlichen Rang, so haben auch  $f'$  und  $f''$  endlichen Rang, und unter dieser Voraussetzung gilt für die Spuren der Vertikalen auch wieder die Identität  $\text{tr}(f) = \text{tr}(f') + \text{tr}(f'')$ .

## 4.7 Mehr zu exakten Sequenzen\*

**Proposition 4.7.1 (Exakte Vektorraumsequenzen bis auf Isomorphismus).** *Jede exakte drei-Term-Sequenz von Vektorräumen ist isomorph zu einer Sequenz der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & V_1 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & V_0 \\ \oplus & & \oplus & & \oplus \\ V_3 & & V_2 & & V_1 \end{array}$$

4.7.2. Wir verwenden hier die Matrixnotation [LA1] 2.4.12.

*Beweis.* Sei  $C \xleftarrow{r} B \xleftarrow{s} A$  unsere Sequenz. Wir setzen  $V_0 := \ker s$  und wählen ein Komplement  $V_1 \subset A$  zu  $V_0$ . Dann induziert  $s$  einen Isomorphismus  $s : V_1 \xrightarrow{\sim} \text{im } s = \ker r$  und wir wählen ein Komplement  $V_2 \subset B$  zu  $\ker r$ . Nun induziert  $r$  einen Isomorphismus  $r : V_2 \xrightarrow{\sim} \text{im } r$  und wir wählen ein Komplement  $V_3 \subset C$  zu  $\text{im } r$ . Insgesamt erhalten wir dann mit der Notation  $i_\nu$  für die Einbettung von  $V_\nu$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & V_1 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & V_0 \\ \oplus & & \oplus & & \oplus \\ V_3 & & V_2 & & V_1 \\ \downarrow (r, i_3) \wr & & \downarrow (s, i_2) \wr & & \downarrow (i_0, i_1) \wr \\ C & \xleftarrow{\quad} & B & \xleftarrow{\quad} & A \end{array} \quad \square$$

**Korollar 4.7.3 (Erhaltung der Exaktheit unter Hom).** *Gegeben eine exakte Sequenz  $U \xrightarrow{r} V \xrightarrow{s} W$  von Vektorräumen erhalten wir für jeden weiteren Vektorraum  $L$  exakte Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(W, L) & \xrightarrow{\circ s} & \text{Hom}(V, L) & \xrightarrow{\circ r} & \text{Hom}(U, L) \\ \text{Hom}(L, U) & \xrightarrow{r \circ} & \text{Hom}(L, V) & \xrightarrow{s \circ} & \text{Hom}(L, W) \end{array}$$

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Proposition 4.7.1 zusammen mit der Erkenntnis, daß das Bilden des Homomorphismenraums, wie in [LA1] 2.3.12 und [LA1] 2.3.13 ausgeführt wird, „mit endlichen direkten Summen vertauscht“.  $\square$

**4.7.4 (Die Duale einer exakten Sequenz ist exakt).** Nehmen wir in diesem Korollar als  $L$  den Grundkörper, so folgt insbesondere, daß jede exakte Sequenz von Vektorräumen beim Dualisieren wieder eine exakte Sequenz liefert.

**Lemma 4.7.5 (Neunerlemma).** *Sei gegeben ein Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils trivial. Sei unser Diagramm **kommutativ** in dem Sinne, daß alle vier Quadrate „kommutieren“, daß also die Komposition  $A' \rightarrow A \rightarrow B$  übereinstimmt mit der Komposition  $A' \rightarrow B' \rightarrow B$  etcetera. Sind unter diesen Voraussetzungen zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die dritte.

4.7.6. Wir brauchen gar nicht zu fordern, daß die Abbildungen der rechten Vertikale Gruppenhomomorphismen sind, und noch nicht einmal, daß sie Gruppen sind, wenn wir nur annehmen, daß alle Horizontalen als Sequenzen von bepunkteten Mengen isomorph sind zu Sequenzen der Gestalt  $H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/H$  für eine Gruppe  $G$  mit einer Untergruppe  $H$  und dem neutralen Element von  $G$  als ausgezeichnetem Punkt in der Mitte. Der Beweis bleibt derselbe und 4.1.11 zeigt, daß auch in der rechten Spalte alle nichtleeren Fasern gleich viele Elemente haben. Die letzte Aussage von 4.1.11 etwa ist ein Spezialfall des so verallgemeinerten Neunerlemmas.

4.7.7. Das Neunerlemma kann als eine Verallgemeinerung des Noether'schen Isomorphiesatzes 4.2.15 verstanden werden, den man im Fall  $A' = A$  zurückgewinnt. Im Fall abelscher Gruppen werden Sie eine noch allgemeinere Aussage eventuell später einmal als „lange exakte Homologiesequenz“ [TS] 2.2.2 kennenlernen. Der folgende Beweis ist ein schönes Beispiel für eine Beweismethode, die als **Diagrammjagd** bekannt ist.

*Beweis.* Es ist einfacher, eine allgemeinere Aussage zu zeigen: Sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\
 X_{i+1} & \xhookrightarrow{f} & Y_{i+1} & \twoheadrightarrow & Z_{i+1} \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\
 X_i & \xhookrightarrow{f} & Y_i & \twoheadrightarrow & Z_i \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\
 X_{i-1} & \xhookrightarrow{f} & Y_{i-1} & \twoheadrightarrow & Z_{i-1} \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow
 \end{array}$$

gegeben derart, daß die Komposition aufeinanderfolgender Pfeile in den Spalten jeweils einwertig ist. Sind dann zwei der Spalten exakt, so auch die Dritte. Das Neunerlemma folgt durch die Erweiterung seines Diagramms durch triviale Gruppen nach oben und unten. Wir schreiben den Beweis gleich so auf, daß auch für

die allgemeinere Situation 4.7.6 funktioniert, und notieren dazu die ausgezeichneten Punkte der rechten Spalte mit  $\bar{1}$ . Wir diskutieren die drei Fälle der Reihe nach.

Fall 1: Die letzten beiden Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der ersten bei  $X_i$  zu zeigen. Sei also  $x_i \in X_i$  mit  $\partial x_i = 1$ . Für  $y_i := f x_i$  folgt  $\partial y_i = 1$ , also  $y_i = \partial y_{i+1}$ . Für  $z_{i+1} := g y_{i+1}$  folgt weiter  $\partial z_{i+1} = \bar{1}$ , also  $z_{i+1} = \partial z_{i+2}$ . Wir finden nun  $y_{i+2}$  mit  $g y_{i+2} = z_{i+2}$ , also  $g \partial y_{i+2} = z_{i+1} = g y_{i+1}$ , woraus für  $\tilde{y}_{i+1} := (\partial y_{i+2})^{-1} y_{i+1}$  folgt  $y_i = \partial \tilde{y}_{i+1}$  und  $g \tilde{y}_{i+1} = \bar{1}$ . Dann aber gibt es  $\tilde{x}_{i+1}$  mit  $f \tilde{x}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1}$  und es folgt  $f \partial \tilde{x}_{i+1} = y_i$  und somit  $\partial \tilde{x}_{i+1} = x_i$ .

Fall 2: Die beiden äußeren Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der mittleren bei  $Y_i$  zu zeigen. Sei  $y_i \in Y_i$  mit  $\partial y_i = 1$ . Für  $z_i := g y_i$  folgt  $\partial z_i = \bar{1}$ , also gibt es  $z_{i+1}$  mit  $\partial z_{i+1} = z_i$  und dann  $y_{i+1}$  mit  $g y_{i+1} = z_{i+1}$  und  $g \partial y_{i+1} = z_i = g y_i$ . Für  $\tilde{y}_i := (\partial y_{i+1})^{-1} y_i$  folgt also  $\partial \tilde{y}_i = 1$  und  $g \tilde{y}_i = \bar{1}$ . Also gibt es  $\tilde{x}_i$  mit  $f \tilde{x}_i = \tilde{y}_i$  und notwendig  $\partial \tilde{x}_i = 1$ , also  $\tilde{x}_i = \partial \tilde{x}_{i+1}$  und  $\tilde{y}_i = \partial f \tilde{x}_{i+1}$ . So erhalten wir schließlich  $y_i = \partial(y_{i+1} f(\tilde{x}_{i+1}))$ .

Fall 3: Die ersten beiden Spalten sind exakt und es gilt, die Exaktheit der letzten bei  $z_i$  zu zeigen. Sei also  $\partial z_i = \bar{1}$ . Sicher gibt es  $y_i$  mit  $g y_i = z_i$  und es folgt  $g \partial y_i = \bar{1}$ , also gibt es  $x_{i-1}$  mit  $f x_{i-1} = \partial y_i$ . Es folgt  $f \partial x_{i-1} = 1$ , also  $\partial x_{i-1} = 1$ , also gibt es  $x_i$  mit  $\partial x_i = x_{i-1}$ . Für  $\tilde{y}_i := y_i (f x_i)^{-1}$  folgt  $\partial \tilde{y}_i = 1$  und  $g(\tilde{y}_i) = z_i$ . Also gibt es  $\tilde{y}_{i+1}$  mit  $\tilde{y}_i = \partial \tilde{y}_{i+1}$  und dann gilt  $z_i = \partial g \tilde{y}_{i+1}$ .  $\square$

## Übungen

Übung 4.7.8. Man folgere den Noether'schen Isomorphiesatz 4.2.15 aus dem Neunerlemma.



## 5 Symmetrie\*

Symmetrie ist ein grundlegendes Konzept in Mathematik und Physik. Wir haben es bei der Modellierung des Anschauungsraums bereits in Aktion gesehen. Hier soll es in einem allgemeineren und formaleren Rahmen diskutiert und mit andersartigen Beispielen illustriert werden.

### 5.1 Gruppenwirkungen

**Definition 5.1.1.** Eine **Operation** oder **Wirkung** eines Monoids  $M$  auf einer Menge  $X$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} M \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

derart, daß gilt  $g(hx) = (gh)x$  für alle  $g, h \in M, x \in X$  sowie  $ex = x$  für das neutrale Element  $e \in M$  und alle  $x \in X$ . Eine Menge mit einer Operation eines Monoids  $M$  nennt man eine  **$M$ -Menge**. Die Aussage „ $X$  ist eine  $M$ -Menge“ schreiben wir in Formeln

$$M \curvearrowright X$$

5.1.2. Die erste Eigenschaft werde ich auch als die **Assoziativität** der Operation ansprechen und beide Eigenschaften zusammen als **Unitärassoziativität**. Ich ziehe die Bezeichnung als Operation an dieser Stelle vor, da das Wort „Wirkung“ in der Physik in einer anderen Bedeutung verwendet wird.

*Ergänzung 5.1.3.* In derselben Weise erklärt man noch allgemeiner auch den Begriff der **Operation einer Menge  $\Omega$  auf einer Menge  $X$**  als einer Abbildung  $\Omega \times X \rightarrow X$ , von der nichts weiter zu fordern ist.

- Beispiele 5.1.4.*
1. Das Anwenden einer Abbildung definiert für jede Menge  $X$  eine Operation  $\text{Ens}(X) \times X \rightarrow X$  des Monoids  $\text{Ens}(X)$  auf  $X$  und eine Operation  $\text{Ens}^\times(X) \times X \rightarrow X$  der Gruppe  $\text{Ens}^\times(X)$  auf  $X$ . Insbesondere operiert so die symmetrische Gruppe  $S_n$  auf der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
  2. Das Anwenden einer linearen Abbildung definiert für jeden Vektorraum  $V$  eine Operation  $\text{End}(V) \times V \rightarrow V$  des Monoids  $\text{End}(V)$  auf  $V$  und eine Operation  $\text{GL}(V) \times V \rightarrow V$  der Gruppe  $\text{GL}(V)$  auf  $V$ .
  3. Jedes Monoid  $M$  operiert mittels seiner Verknüpfung  $M \times M \rightarrow M$  auf sich selbst.
  4. Jedes Monoid  $M$  operiert auf jeder Menge  $X$  mittels der **trivialen Operation**  $ax = x \forall a \in M, x \in X$ .

5. Ist  $M$  ein Monoid und  $X$  eine  $M$ -Menge und  $N \subset M$  ein Untermonoid, so ist  $X$  auch eine  $N$ -Menge in offensichtlicher Weise. Ist allgemeiner  $X$  eine  $M$ -Menge und  $N \rightarrow M$  ein Monoidhomomorphismus, so kann  $X$  in offensichtlicher Weise mit einer Operation von  $N$  versehen werden.

6. Ist  $X$  ein  $M$ -Menge, so ist auch die Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  eine  $M$ -Menge in natürlicher Weise.

5.1.5. Gegeben ein Monoid  $M$  und eine Menge  $X$  induziert das Exponentialgesetz  $\text{Ens}(M \times X, X) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(M, \text{Ens}(X, X))$  aus [GR] 1.5.18 eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen des Monoids } M \\ \text{auf der Menge } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Monoidhomomorphismen} \\ M \rightarrow \text{Ens}(X) \end{array} \right\}$$

In gewisser Weise ist also eine Operation eines Monoids  $M$  auf einer Menge  $X$  „dasselbe“ wie ein Monoidhomomorphismus  $M \rightarrow \text{Ens}(X)$ . Ist  $G$  eine Gruppe, so erhalten wir insbesondere eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Operationen der Gruppe } G \\ \text{auf der Menge } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Gruppenhomomorphismen} \\ G \rightarrow \text{Ens}^\times(X) \end{array} \right\}$$

In gewisser Weise ist also eine Operation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  „dasselbe“ wie ein Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Ens}^\times(X)$ .

5.1.6. Ist ganz allgemein  $X \times Y \rightarrow Z$  eine Abbildung, etwa  $(x, y) \mapsto x \top y$ , und sind  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  Teilmengen, so notieren wir  $(A \top B) \subset Z$  die Teilmenge

$$(A \top B) = \{x \top y \mid x \in A, y \in B\}$$

Wir haben diese Notationen in Spezialfällen bereits oft verwendet, zum Beispiel, wenn wir das Erzeugnis eines Vektors in einem reellen Vektorraum als  $\langle v \rangle = \mathbb{R}v$  schreiben, oder wenn wir das Erzeugnis von zwei Teilräumen  $U, W$  eines Vektorraums  $V$  als  $U + W$  schreiben.

**Definition 5.1.7.** Sei  $X$  eine Menge mit einer Operation eines Monoids  $M$ , also eine  $M$ -Menge.

1. Die Menge aller **Fixpunkte von  $M$  in  $X$**  notiert man

$$X^M := \{x \in X \mid ax = x \ \forall a \in M\}$$

In vielen Situationen nennt man die Fixpunkte auch **Invarianten**.

2. Der **Fixator** oder auch **Stabilisator** eines Punktes  $x \in X$  ist die Menge

$$M_x := \{a \in M \mid ax = x\}$$

Sie ist ein Untermonoid von  $M$ . Im Fall einer Gruppenwirkung ist sie sogar eine Untergruppe und heißt die **Standgruppe** oder **Isotropiegruppe** des Punktes  $x$ .

3. Gegeben eine Teilmenge  $Y \subset X$  unterscheiden wir zwischen ihrem **Stabilisator**  $\{a \in M \mid aY \subset Y\}$ , ihrem **Fixator** oder **mengenweisen Fixator**  $\{a \in M \mid aY = Y\}$  und schließlich ihrem **punktweisen Fixator**  $\{a \in M \mid ay = y \ \forall y \in Y\}$ . Alle drei sind Untermonoide und die letzten beiden im Fall einer Gruppenoperation sogar Untergruppen. Den Fixator nennen wir insbesondere im Fall, daß  $Y$  mehr als nur ein Element besitzt und daß eine Gruppe operiert, die **Symmetriegruppe von  $Y$** . Natürlich kann der Fixator von  $Y \subset X$  auch beschrieben werden als der Fixator des Punktes  $Y \in \mathcal{P}(X)$  für die auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  induzierte Operation. Wir notieren ihn  $M_Y$ .
4. Eine  $M$ -Menge  $X$  heißt **frei**, wenn es eine Teilmenge  $Z \subset X$  gibt derart, daß die Operation  $M \times X \rightarrow X$  eine Bijektion  $M \times Z \xrightarrow{\sim} X$  induziert. Sie mögen als Übung zeigen, daß eine Menge mit Gruppenwirkung genau dann frei ist, wenn die Standgruppen aller ihrer Punkte trivial sind, in Formeln  $(gx = x \text{ für ein } x \in X) \Rightarrow (g = e)$ .
5. Für  $Z \subset X$ ,  $N \subset M$  schreiben wir kurz  $NZ$  für die Menge  $NZ := \{bz \mid b \in N, z \in Z\}$ . Für jede Teilmenge  $Z \subset X$  ist  $MZ$  eine  $M$ -Menge in offensichtlicher Weise. Eine Teilmenge  $Z \subset X$  heißt  **$N$ -stabil**, wenn gilt  $NZ \subset Z$ , wenn also  $N$  im Stabilisator der Teilmenge  $Z$  liegt. Ist  $N = G$  eine Untergruppe von  $M$ , so wird jede  $G$ -stabile Teilmenge  $Z$  sogar von allen Elementen von  $G$  festgehalten, in Formeln

$$(GZ \subset Z) \Rightarrow (g(Z) = Z \ \forall g \in G)$$

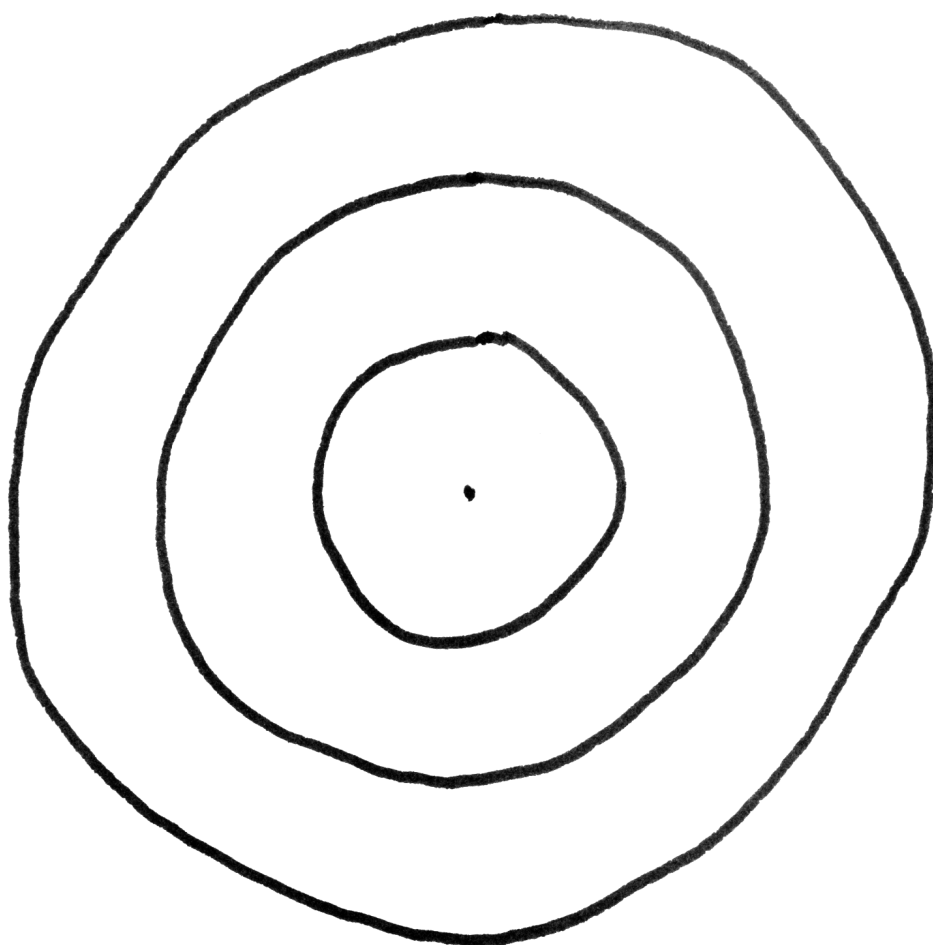
6. Sei  $x \in X$ . Die Menge

$$Mx := \{ax \mid a \in M\} \subset X$$

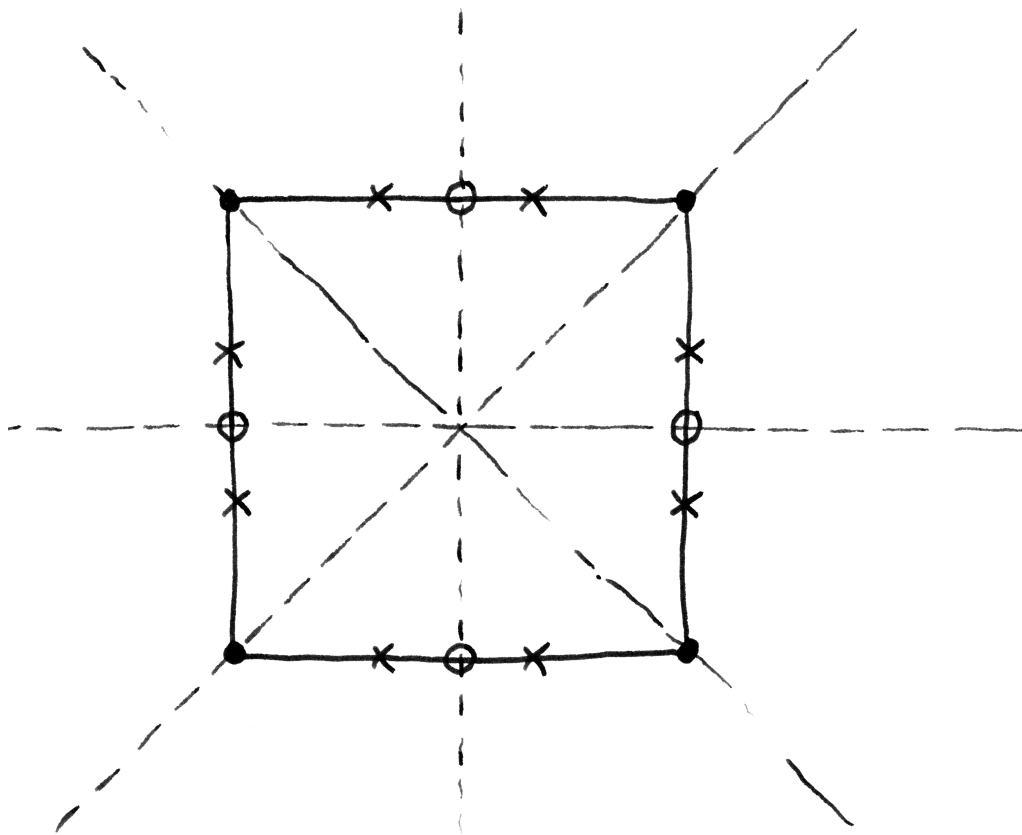
heißt die **Bahn** von  $x$ . Auf Englisch und Französisch sagt man dazu **orbit**.

7. Eine Operation heißt **transitiv**, wenn es ein  $x \in X$  gibt mit  $X = Mx$ . Im Fall einer Gruppenwirkung gilt dann  $X = Gx$  für alle  $x \in X$  und  $X$  heißt ein **homogener Raum** für  $G$ .
8. Eine Menge  $X$  mit einer freien transitiven Operation einer Gruppe  $G$  heißt ein **prinzipaler homogener  $G$ -Raum** oder auch ein  **$G$ -Torsor**.

5.1.8. Ist  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, so sind per definitionem die Rechtsnebenklassen von  $H$  in  $G$  genau die Bahnen der durch Multiplikation gegebenen Operation von  $H$  auf  $G$ .



Einige Bahnen von  $S^1$  auf  $\mathbb{C}$



Einige Bahnen der Symmetriegruppe eines Quadrats

5.1.9. Ist  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe, so ist die Menge der Linksnebenklassen  $X = G/H$  eine  $G$ -Menge in offensichtlicher Weise.

*Beispiele* 5.1.10. In jedem eindimensionalen Vektorraum über einem Körper  $k$  bilden die von Null verschiedenen Vektoren einen Torsor über der multiplikativen Gruppe  $k^\times$  unseres Körpers. Jeder affine Raum ist ein Torsor über seinem Richtungsraum. Jede Menge mit genau zwei Elementen ist in natürlicher Weise ein  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -Torsor. Jede Gruppe  $G$  kann in offensichtlicher Weise aufgefaßt werden als ein  $G$ -Torsor.

5.1.11 (**Diskussion der Terminologie**). Die Wirkung eines Monoids auf der leeren Menge ist in unseren Konventionen nicht transitiv. Hier sind jedoch auch andere Konventionen gebräuchlich, zum Beispiel nennt Bourbaki die Wirkung einer Gruppe auf der leeren Menge durchaus transitiv. Noch mehr Terminologie zu Mengen mit Gruppenwirkung führen wir in [TF] 3.2 ein.

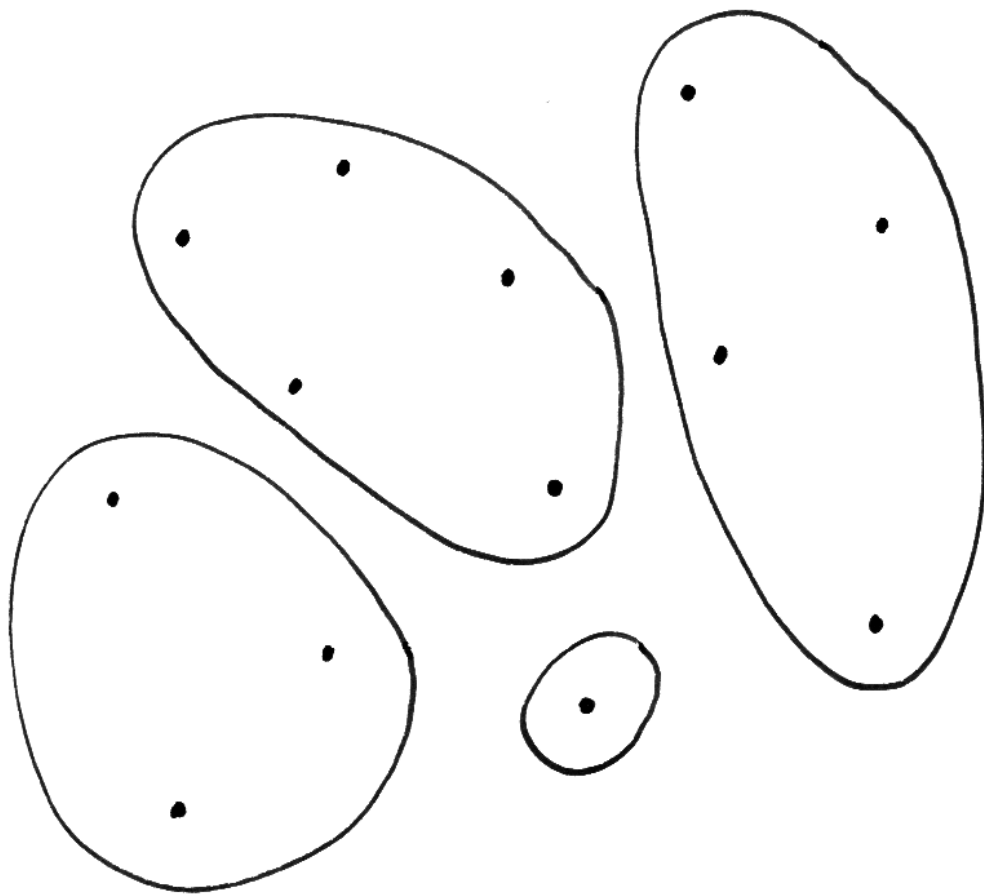
*Ergänzung* 5.1.12 (**Begriff eines Torsors, Varianten**). Es gibt auch Varianten des Torsor-Begriffs, bei denen man nicht auf eine vorgegebene Gruppe Bezug nimmt.

1. Man kann einen **Torsor** definieren als eine Menge  $X$  mitsamt einer ausgezeichneten Untergruppe  $G \subset \text{Ens}^\times(X)$ , die frei und transitiv auf  $X$  wirkt.
2. Man kann einen Torsor auch definieren als eine Menge  $X$  nebst einer Äquivalenzrelation auf  $X \times X$  mit gewissen Eigenschaften, die ich hier nicht ausschreibe. Von der üblichen Definition aus gesehen erklären wir dabei die Äquivalenzrelation dadurch, daß ihre Äquivalenzklassen genau die Graphen der durch die Gruppenelemente gegebenen Selbstabbildungen von  $X$  sind.
3. Man kann einen Torsor schließlich auch definieren kann als eine Menge  $X$  nebst einer Abbildung  $\varphi : X \times X \times X \rightarrow X$  mit gewissen Eigenschaften, die ich hier nicht ausschreibe. Von der üblichen Definition aus gesehen setzen wir dazu  $\varphi(x, gx, y) = gy$ .

**Lemma 5.1.13 (Zerlegung in Bahnen).** *Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation sind je zwei Bahnen entweder gleich oder disjunkt.*

*Ergänzung* 5.1.14. Im Fall der Operation eines Monoids gibt im allgemeinen keine Zerlegung in Bahnen: Man betrachte für ein Gegenbeispiel etwa die Operation durch Addition des additiven Monoids  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Z}$ .

5.1.15. Unter einer **Partition einer Menge**  $X$  versteht man ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen, deren Vereinigung ganz  $X$  ist. In dieser Terminologie besagt unser Lemma also, daß die Bahnen unter der Operation einer Gruppe auf einer Menge eine Partition besagter Menge bilden.



Eine Partition einer Menge mit dreizehn Elementen durch vier Teilmengen.

*Beweis.* Sei  $G \setminus X$  unsere Menge mit Gruppenoperation. Wegen unserer Forderung  $ex = x$  an eine Gruppenoperation liegt jedes  $x \in X$  in einer  $G$ -Bahn, nämlich in der  $G$ -Bahn  $Gx$ . Andererseits folgt aus  $Gx \cap Gy \neq \emptyset$  schon  $Gx = Gy$ : In der Tat liefert  $gx = hy$  wegen  $Gg = G$  unter Verwendung der Assoziativitätsbedingung an eine Gruppenoperation ja  $Gx = Ggx = Ghy = Gy$ . Die Bahnen sind also auch paarweise disjunkt.  $\square$

**Definition 5.1.16.** Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation bezeichnet man das Mengensystem der Bahnen auch als den **Bahnenraum**. Ist  $G \setminus X$  unsere Menge mit Gruppenoperation, so ist der Bahnenraum in Formeln ausgedrückt also die Teilmenge  $\{Gx \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$  der Potenzmenge von  $X$ . Wir notieren den Bahnenraum meist  $G \setminus X$  oder  $X/_l G$  oder  $X/G$ . Wir haben eine kanonische Surjektion  $\text{can} : X \twoheadrightarrow G \setminus X$ ,  $x \mapsto Gx$ , die jedem Element von  $X$  seine Bahn zuordnet.

**5.1.17 (Diskussion der Notation).** Alle Notationen für den Bahnenraum haben ihre Tücken: Die Notation  $G \setminus X$  könnte auch die in [GR] 1.2.7 eingeführte Differenzmenge bedeuten, die Notation  $X/G$  hinwiederum könnte auch für den Bahnenraum einer Rechtsoperation stehen, wie wir ihn gleich einführen werden. Was im Einzelfall gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden. Die Notation  $X/_l G$  vermeidet zwar diese Probleme, ist aber unüblich und umständlich.

*Beispiel 5.1.18.* Wir betrachten die Menge  $X = \mathbb{C}$  der komplexen Zahlen mit der Operation von  $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  durch Multiplikation. Die Standgruppen sind  $G_x = 1$  falls  $x \neq 0$  und  $G_0 = S^1$ . Die Bahnen sind genau alle Kreise um den Nullpunkt mit Radius  $r \geq 0$ . Die Einbettung  $\mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathbb{C}$  induziert eine Bijektion mit dem Bahnenraum  $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} (S^1 \setminus \mathbb{C})$ .

**5.1.19 (Universelle Eigenschaft des Bahnenraums).** Gegeben eine Menge mit Gruppenoperation  $G \setminus X$  und eine Abbildung in eine weitere Menge  $\varphi : X \rightarrow Y$  mit der Eigenschaft  $\varphi(gx) = \varphi(x)$  für alle  $g \in G, x \in X$  existiert genau eine Abbildung  $\bar{\varphi} : G \setminus X \rightarrow Y$  mit  $\bar{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{can}} & G \setminus X \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & Y \end{array}$$

In der Tat können und müssen wir  $\bar{\varphi}(Gx)$  als das einzige Element der Menge  $\varphi(Gx)$  definieren. Das ist ein Spezialfall der universellen Eigenschaft von Surjektionen [GR] 1.5.13. Man mag es auch als einen Spezialfall der universellen Eigenschaft des Raums der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation im Sinne von [LA1] 4.2.6 verstehen.



**Definition 5.1.20.** Sei  $X$  eine Menge und  $M$  ein Monoid. Eine **Rechtsoperation von  $M$  auf  $X$**  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times M &\rightarrow X \\ (x, a) &\mapsto xa \end{aligned}$$

derart, daß  $x(ab) = (xa)b$  für alle  $a, b \in M$ ,  $x \in X$ , und daß gilt  $xe = x$  für das neutrale Element  $e \in M$  und alle  $x \in X$ . Eine Menge mit einer Rechtsoperation eines Monoids  $M$  nennt man auch eine  **$M$ -Rechtsmenge**.

*Beispiel 5.1.21.* Ist  $M$  ein Monoid und  $X$  eine  $M$ -Menge und  $E$  eine weitere Menge, so wird der Abbildungsraum  $\text{Ens}(X, E)$  zu einer  $M$ -Rechtsmenge vermittelt der Operation „durch Vorschalten“  $(fa)(x) := f(ax)$ .

**5.1.22 (Beziehung von Rechts- und Linksoperationen).** Ist  $G$  eine Gruppe, so wird jede  $G$ -Rechtsmenge  $X$  zu einer  $G$ -Menge durch die Operation  $gx = xg^{-1}$ , die Begriffsbildung einer  $G$ -Rechtsmenge ist also für Gruppen in gewisser Weise obsolet. Sie dient im wesentlichen dem Zweck, in manchen Situationen suggestivere Notationen zu ermöglichen. Unsere Begriffe für Linksoperationen wie Bahn, Standgruppe et cetera verwenden wir analog auf für Rechtsoperationen. Den Bahnenraum notieren wir in diesem Fall stets  $X/G$ . Die kanonische Abbildung  $X \twoheadrightarrow X/G$  hat dann offensichtlich eine zu 5.1.19 analoge universelle Eigenschaft.

**5.1.23.** Unter dem Exponentialgesetz  $\text{Ens}(X \times M, X) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(M, \text{Ens}(X, X))$  aus [GR] 1.5.18 entsprechen die Rechtsoperationen eines Monoids  $M$  auf einer Menge  $X$  gerade den Monoidhomomorphismen  $M^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ens}^\times(X)$ . Hierbei meint  $M^{\text{opp}}$  das opponierte Monoid nach [GR] 2.3.33, die entsteht, indem wir die Menge  $M$  mit der opponierten Verknüpfung  $a^\circ b^\circ = (ba)^\circ$  versehen. In diesem Sinne ist also eine  $M$ -Rechtsoperation dasselbe wie eine Linksoperation von  $M^{\text{opp}}$ .

*Ergänzung 5.1.24.* Sei  $G$  eine Gruppe. Eine freie transitive  $G$ -Rechtsmenge nennen wir einen  **$G$ -Rechtstorsor** oder auch kurz einen  **$G$ -Torsor** in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, ob im jeweils vorliegenden Fall eine Menge mit freier und transitiver Rechts- oder mit freier und transitiver Linksoperation gemeint ist.

**5.1.25 (Operationen auf dem projektiven Raum).** Wir erinnern für einen Körper  $K$  und  $n \in \mathbb{N}$  aus [EL] 1.4.18 den projektiven Raum

$$\mathbb{P}^n K := (K^{n+1} \setminus \{0\}) / K^\times$$

Sicher operiert die Gruppe  $\text{GL}(n+1; K)$  auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}^n K$ . Die offensichtliche Operation von  $\text{GL}(2; K)$  auf  $\mathbb{P}^1 K$  entspricht unter unserer Identifikation von  $K \sqcup \{\infty\}$  mit  $\mathbb{P}^1 K$  durch  $x \mapsto \langle 1, x \rangle$  und  $\infty \mapsto \langle 0, 1 \rangle$  der Operation

von  $\mathrm{GL}(2; K)$  auf  $K \sqcup \{\infty\}$ , unter der eine Matrix durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \mapsto \frac{c + dx}{a + bx}$$

wirkt. Der Punkt  $\infty$  muß hier mit etwas Sorgfalt ins Spiel gebracht werden und ich schreibe nicht alle Fälle aus. Man sie jedoch leicht erschließen, wenn man weiß, daß diese Operation im Fall  $K = \mathbb{R}$  stetig ist für die natürliche Topologie aus [EL] 1.4.19. Zum Beispiel geht  $\infty$  im Fall  $b \neq 0$  nach  $d/b$ .

## Übungen

**Übung 5.1.26 (Noether'scher Isomorphiesatz, Variante).** Seien  $H \supset N$  eine Gruppe mit einem Normalteiler und  $X$  eine Menge mit  $H$ -Operation. So gibt es auf dem Bahnraum  $X/N$  genau eine Operation der Quotientengruppe  $H/N$  mit der Eigenschaft  $(hN)(Nx) = Nh x$ . Ist speziell  $G \supset H \supset N$  eine Gruppe mit zwei Untergruppen und ist  $N$  ein Normalteiler in  $H$ , so induziert die Komposition  $G \twoheadrightarrow G/N \twoheadrightarrow (G/N)/(H/N)$  eine Bijektion  $G/H \xrightarrow{\sim} (G/N)/(H/N)$ .

**Übung 5.1.27.** Unter der Operation von  $\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{Q})$  auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}^n \mathbb{Q}$  operiert bereits die Gruppe  $\mathrm{SL}(n; \mathbb{Z})$  aller  $(n \times n)$ -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante Eins transitiv. Hinweis: 4.4.29.

**Übung 5.1.28.** Ist  $E$  ein affiner Raum über einem Körper der Charakteristik Null und  $G \subset \mathrm{Aff}^\times E$  eine endliche Untergruppe seiner Automorphismengruppe, so besitzt  $G$  stets einen Fixpunkt in  $E$ . Hinweis: Man betrachte den Schwerpunkt einer Bahn.

**Übung 5.1.29 (Smith-Normalformen als Bahnrepräsentanten).** Sei  $K$  ein Körper. Man zeige, daß wir eine Operation der Gruppe  $\mathrm{GL}(n; K) \times \mathrm{GL}(m; K)$  auf der Menge  $\mathrm{Mat}(n \times m; K)$  erhalten durch die Vorschrift  $(A, B)M = AMB^{-1}$ . Man zeige weiter, daß die Bahnen unserer Operation genau die nichtleeren Fasern der durch den Rang gegebenen Abbildung  $\mathrm{rk} : \mathrm{Mat}(n \times m; K) \rightarrow \mathbb{N}$  sind. Hinweis: Smith-Normalform [LA1] 2.6.11.

**Übung 5.1.30 (Jordan-Normalformen als Bahnrepräsentanten).** Sei  $K$  ein Körper. Man zeige, daß wir eine Operation der Gruppe  $\mathrm{GL}(n; K)$  auf der Menge  $\mathrm{Mat}(n; K)$  erhalten durch die Vorschrift  $A.M := AMA^{-1}$ . Man zeige, wie für einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  die Theorie der Jordan'schen Normalform eine Bijektion liefert zwischen dem Bahnraum zu dieser „Operation durch Konjugation“ und der Menge aller endlichen Multimengen von Paaren aus  $\mathbb{N}_{\geq 1} \times K$ , deren erste Komponenten sich zu  $n$  aufaddieren.

**Ergänzende Übung 5.1.31.** Sei  $K$  ein Körper. Man zeige, daß der Teilraum der quadratischen Formen  $Q \subset \mathrm{Ens}(K^n, K)$  stabil ist unter der Rechtsoperation der

Gruppe  $GL(n; K)$  durch Vorschalten auf  $\text{Ens}(K^n, K)$ . Man diskutiere, inwiefern die Frage nach der Klassifikation der quadratischen Formen im wesentlichen die Frage nach einem Repräsentantensystem für die Bahnen dieser Operation ist.

*Ergänzende Übung 5.1.32.* Man gebe für jedes ungerade  $n$  einen Gruppenisomorphismus  $SO(n) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} O(n)$  an; Man zeige, daß es für gerades  $n$  keinen derartigen Isomorphismus gibt.

*Ergänzende Übung 5.1.33.* Ein Gitter in  $\mathbb{C}$  ist eine Untergruppe  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ , die man als Gruppenerzeugnis einer  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$  erhalten kann. Auf der Menge Gitt aller Gitter in  $\mathbb{C}$  operiert  $\mathbb{C}^\times$  in offensichtlicher Weise. Man zeige, daß es genau zwei  $\mathbb{C}^\times$ -Bahnen in Gitt gibt, deren Elemente nichttriviale Isotopiegruppen haben, nämlich die Bahnen der beiden Gitter  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  und  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}e^{\pi i/3}$ .

*Ergänzende Übung 5.1.34.* Man finde ein Repräsentantensystem für die Bahnen unter der offensichtlichen Wirkung von  $GL(n; \mathbb{Z}) \times GL(m; \mathbb{Z})$  auf dem Matrizenraum  $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{Q})$ . Hinweis: 4.4.13.

*Übung 5.1.35.* In dieser Übung sollen Sie den **Satz von Cauchy** zeigen: Jeder Primfaktor der Ordnung einer endlichen Gruppe tritt auch als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auf. Man zeige der Reihe nach:

1. Für eine Primzahl  $p$  und  $G = GL(n; \mathbb{F}_p)$  und die Untergruppe  $N \subset G$  der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen ist  $p$  kein Teiler von  $|G/N|$  und  $|N|$  eine Potenz von  $p$ ;
2. Jede endliche Untergruppe  $\Gamma \subset G$  ohne Elemente der Ordnung  $p$  operiert mit trivialen Standgruppen auf  $G/N$ , folglich muß ihre Ordnung  $|\Gamma|$  zu  $p$  teilerfremd sein;
3. Jede endliche Gruppe  $\Gamma$  läßt sich als Untergruppe in  $GL(n; \mathbb{F}_p)$  für  $n = |\Gamma|$  oder kanonischer in  $GL(\mathbb{F}_p \langle \Gamma \rangle)$  einbetten.

Einen anderen Beweis, bei dem vollständig innerhalb der Gruppentheorie argumentiert wird, können Sie in [AL] 1.4.8 finden. Er scheint mir jedoch im ganzen eher komplizierter.

## 5.2 Bahnformel

**Lemma 5.2.1 (Bahnen als Quotienten).** Seien  $G$  eine Gruppe,  $X$  eine  $G$ -Menge und  $x \in X$  ein Punkt. So induziert die Abbildung  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$  eine Bijektion

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$$

zwischen dem Quotienten nach der Standgruppe von  $x$  und der Bahn von  $x$ .

*Beweis.* Für jede  $G_x$ -Linksnebenklasse  $L \subset G$  im Sinne von 4.1.2 besteht die Menge  $Lx$  nur aus einem Punkt, für  $L = gG_x$  haben wir genauer  $Lx = gG_x x = \{gx\}$ . Die Abbildung im Lemma wird nun definiert durch die Bedingung, daß sie jeder Nebenklasse  $L \in G/G_x$  das einzige Element von  $Lx$  zuordnet. Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. Sie ist aber auch injektiv, denn aus  $gG_x x = hG_x x$  folgt  $gx = hx$ , also  $h^{-1}g \in G_x$ , also  $gG_x = hG_x$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Die durch das Anwenden auf  $x \in X$  gegebene Abbildung  $G \rightarrow Gx$  und die kanonische Surjektion  $G \rightarrow G/G_x$  sind Surjektionen mit denselben Fasern. Die Behauptung folgt so aus [GR] 1.5.13.  $\square$

5.2.2. Ist  $G$  eine endliche Gruppe und  $X$  eine  $G$ -Menge, so folgt mit dem vorhergehenden Lemma 5.2.1 aus dem Satz von Lagrange 4.1.5 für alle  $x \in X$  insbesondere die sogenannte **Bahnformel**

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|$$

Die Kardinalität jeder Bahn teilt also die Kardinalität der ganzen Gruppe, und die Kardinalität der Standgruppen ist konstant auf den Bahnen. Genauer prüft man für beliebiges  $G$  die Formel  $G_{gx} = gG_x g^{-1}$  für  $g \in G$ ,  $x \in X$ . Ist weiter  $X$  endlich und  $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$  seine Zerlegung in Bahnen und  $x(i) \in X_i$  jeweils ein Element, so folgt

$$|X| = |X_1| + \dots + |X_n| = |G|/|G_{x(1)}| + \dots + |G|/|G_{x(n)}|$$

*Beispiel 5.2.3.* Seien  $k \leq n$  natürliche Zahlen. Auf der Menge  $X$  aller  $k$ -elementigen Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  operiert die symmetrische Gruppe  $\mathcal{S}_n$  transitiv. Die Standgruppe des Punktes  $x \in X$ , der durch die  $k$ -elementige Teilmenge  $\{1, 2, \dots, k\}$  gegeben wird, ist isomorph zu  $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{n-k}$ . Die Bahnformel liefert folglich  $|X| = n!/(k!(n-k)!)$  in Übereinstimmung mit unseren Erkenntnissen aus [EIN] 1.1.19. Ähnlich kann man auch die in [GR] 1.5.29 diskutierten Formeln für die Multinomialkoeffizienten herleiten.

*Beispiel 5.2.4 (Zahl der Drehsymmetrien eines Würfels).* Wir können unsere Bahnformel auch umgekehrt anwenden. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollten die Drehungen zählen, die einen Würfel in sich überführen. Die Gruppe  $G$  dieser Drehungen operiert sicher transitiv auf der Menge  $E$  der acht Ecken des Würfels und die Standgruppe jeder Ecke  $p$  hat drei Elemente. Wir folgern  $|G| = |G_p| \cdot |E| = 3 \cdot 8 = 24$ .

## Übungen

*Ergänzende Übung 5.2.5.* Sind  $Q, H$  Untergruppen einer Gruppe  $G$ , so induziert die Einbettung  $Q \hookrightarrow G$  eine Bijektion  $Q/(Q \cap H) \xrightarrow{\sim} QH/H$ . Gemeint ist auf

der rechten Seite der Bahnenraum der Operation von rechts durch Multiplikation der Gruppe  $H$  auf der Teilmenge  $QH \subset G$ .

*Ergänzende Übung 5.2.6.* Ist  $G$  eine Gruppe und  $X$  eine  $G$ -Menge und  $Y$  eine  $G$ -Rechtsmenge, so erklärt man ihr **balanciertes Produkt**

$$Y \times_{/G} X$$

als die Menge aller  $G$ -Bahnen in  $Y \times X$  unter der Operation  $g(y, x) = (yg^{-1}, gx)$ .

Man zeige: Sind  $P, Q$  Untergruppen einer Gruppe  $G$  mit Schnitt  $S := P \cap Q$ , so induziert die Multiplikation eine Bijektion

$$P \times_{/S} Q \xrightarrow{\sim} PQ$$

*Ergänzende Übung 5.2.7.* Ist in der Bruhat-Zerlegung 5.6.1 der Körper  $k$  ein endlicher Körper  $k = \mathbb{F}_q$ , so wird die Kardinalität der Doppelnebenklasse  $BxB$  für  $x \in \mathcal{S}_n$  und  $B$  die oberen Dreiecksmatrizen gegeben durch die Formel

$$|BxB| = |B|q^{l(x)}$$

mit  $l(x)$  der Zahl der Fehlstände der Permutation  $x$ . Hinweis: Man wende auf die  $(B \times B)$ -Bahnen von  $x \in \mathcal{S}_n \subset G$  die Bahnformel an.

### 5.3 Konjugationsklassen

**Definition 5.3.1.** Ist  $G$  eine Gruppe und  $x \in G$  ein Element, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{int}_x : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto xgx^{-1} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus der Gruppe  $G$  mit sich selber. Er heißt die **Konjugation mit  $x$** . Ganz allgemein nennt man einen Isomorphismus einer Gruppe mit sich selber auch einen **Automorphismus** der Gruppe. Die Automorphismen einer Gruppe  $G$  bilden selber eine Gruppe mit der Verknüpfung von Abbildungen als Verknüpfung. Sie heißt die **Automorphismengruppe** von  $G$  und wir verwenden für sie die beiden Notationen  $\text{Aut}(G) = \text{Grp}^\times(G)$ . Diejenigen Automorphismen einer Gruppe, die sich als Konjugation mit einem geeigneten Gruppenelement schreiben lassen, heißen **innere Automorphismen** und auf englisch **interior automorphisms**, daher die Notation  $\text{int}$ . Sicher gilt  $\text{int}_x \circ \text{int}_y = \text{int}_{xy}$ , folglich ist  $\text{int} : x \mapsto \text{int}(x) := \text{int}_x$  ein Gruppenhomomorphismus  $\text{int} : G \rightarrow \text{Grp}^\times(G)$  und insbesondere eine Operation der Gruppe  $G$  auf der Menge  $G$ , die **Operation durch Konjugation**

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto \text{int}_x(y) = xyx^{-1} \end{aligned}$$

Die Bahnen dieser Operation heißen die **Konjugationsklassen** unserer Gruppe.

*Beispiele 5.3.2.* Die Konjugationsklassen in einer kommutativen Gruppe sind ein-elementig. Die Theorie der Jordan'schen Normalform beschreibt die Konjugationsklassen in  $GL(n; \mathbb{C})$ , vergleiche 5.1.30.

## Übungen

*Ergänzende Übung 5.3.3.* Sei  $A$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . So gibt es genau einen Ringisomorphismus  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{End } A$ , und dieser Ringisomorphismus induziert einen Isomorphismus zwischen der Einheitengruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  und der Automorphismengruppe von  $A$ .

*Ergänzende Übung 5.3.4.* Man gebe jeweils ein Repräsentantensystem an für die Konjugationsklassen der Gruppe aller Isometrien des affinen Skalarproduktraums  $\mathbb{R}^2$  und der Untergruppe ihrer orientierungserhaltenden Isometrien.

*Ergänzende Übung 5.3.5.* Wir betrachten die Gruppen  $G \supset K$  der Ähnlichkeiten und der Kongruenzen einer euklidischen Ebene. Man zeige, daß  $K$  stabil ist unter der Konjugation mit  $g \in G$  und daß die Konjugationsklassen von  $G$ , die in  $K$  enthalten sind, wie folgt beschrieben werden können:

1. Die Identität bildet für sich allein eine Konjugationsklasse;
2. Alle Verschiebungen, die nicht die Identität sind, bilden eine Konjugationsklasse;
3. Alle Spiegelungen an affinen Geraden bilden eine Konjugationsklasse;
4. Alle Gleitspiegelungen, die keine Spiegelungen sind, bilden eine Konjugationsklasse;
5. Für jeden Winkel  $\theta$  mit  $0 < \theta \leq 180^\circ$  bilden alle Drehungen um einen beliebigen Punkt und um einen Winkel mit dem Betrag  $\theta$  eine Konjugationsklasse.

Darüber hinaus gibt es keine weiteren Konjugationsklassen von  $G$  in  $K$ . Hinweis: 1.10.12.

*Ergänzende Übung 5.3.6.* Wir betrachten die Gruppen  $G \supset B$  der Ähnlichkeiten und der Bewegungen eines dreidimensionalen euklidischen Raums. Man zeige, daß  $B$  stabil ist unter der Konjugation mit  $g \in G$  und daß die Konjugationsklassen von  $G$ , die in  $B$  enthalten sind, wie folgt beschrieben werden können:

1. Die Identität bildet für sich allein eine Konjugationsklasse;
2. Alle Verschiebungen, die nicht die Identität sind, bilden eine Konjugationsklasse;

3. Für jeden Winkel  $\theta$  mit  $0 < \theta \leq 180^\circ$  bilden alle Drehungen um eine beliebige Achse und um einen Winkel mit dem Betrag  $\theta$  eine Konjugationsklasse;
4. Für jeden Winkel  $\theta$  mit  $0 < \theta \leq 180^\circ$  bilden alle Verschraubungen um einen Winkel mit dem Betrag  $\theta$ , die keine Drehungen sind, eine Konjugationsklasse.

Darüber hinaus gibt es keine weiteren Konjugationsklassen von  $G$  in  $B$ . Hinweis: 1.10.13.

## 5.4 Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen

5.4.1. Die **orthogonalaffinen** orientierungserhaltenden Automorphismen eines **euklidischen Raums**  $R$  der Dimension drei nennen wir seine **Bewegungen**. Die Gruppe  $B$  aller Bewegungen von  $R$  nennen wir die **Bewegungsgruppe von  $R$** . Gegeben eine Teilmenge des Raums  $T \subset R$  nennen wir eine Bewegung  $b \in B$  mit  $b(T) = T$  eine **Symmetriebewegung von  $T$** . Die Symmetriebewegungen einer Teilmenge  $T \subset R$  bilden eine Untergruppe seiner Bewegungsgruppe. Bis auf Isomorphismus gibt es nur einen dreidimensionalen euklidischen Raum und man mag sich darunter den Anschauungsraum denken. Der folgende Satz ist in dieser Anschauung und in Bezug auf die aus der Schule bekannten platonischen Körper formuliert in der Hoffnung, daß er durch diesen Stilbruch verständlicher wird. Das exakte Formulieren im Rahmen der in dieser Vorlesung entwickelten Sprache holen wir später nach.

**Satz 5.4.2 (Endliche Untergruppen von Bewegungsgruppen).** *Jede endliche Untergruppe der Bewegungsgruppe ist genau eine der folgenden Gruppen:*

1. Eine **zyklische Gruppe**  $C_k$  mit  $k \geq 1$  Elementen, bestehend aus allen Drehungen zu einer festen Drehachse um Winkel der Gestalt  $2\pi n/k$ . Der Fall  $k = 1$  deckt hier den Fall der trivialen Gruppe ab, die nur aus der Identität besteht.
2. Eine **Diedergruppe**  $D_k$  mit  $2k$  Elementen für  $k \geq 2$ . Im Fall  $k > 2$  ist das die Gruppe aller Symmetriebewegungen eines ebenen gleichseitigen  $k$ -Ecks, aufgefaßt als räumliche Figur. Im Fall  $k = 2$  ist es die Gruppe aller derjenigen Drehungen, die von einem Paar sich schneidender orthogonaler Geraden jede in sich überführen.
3. Eine **Tetraedergruppe**  $T$  aller 12 Symmetriebewegungen eines Tetraeders.
4. Eine **Würfelgruppe**  $W$  aller 24 Symmetriebewegungen eines Würfels.



5. Eine **Ikosaedergruppe**  $I$  aller 60 Symmetriebewegungen eines Ikosaeders.

5.4.3. Will man diesen Satz einem Laien erklären, der mit dem Gruppenbegriff nicht vertraut ist, so mag man nach [LA1] 4.3.7 auch einfacher von endlichen Mengen von Bewegungen reden, die mit je zwei Bewegungen stets auch deren Hintereinanderausführung enthalten. Vom mathematischen Standpunkt aus mag man das Resultat als eine Aufzählung der „Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen der Bewegungsgruppe“ ansehen, also der Bahnen unter der Operation durch Konjugation unserer Bewegungsgruppe auf der Menge ihrer endlichen Untergruppen. Die endlichen Untergruppen der Isometriegruppe des Anschauungsraums werden in 5.4.25 diskutiert.

5.4.4. Das Evozieren der platonischen Körper stellt insofern einen Stilbruch dar, als wir uns zumindest implizit darauf verständigt hatten, alle unsere Überlegungen ausschließlich im Rahmen der Mengenlehre durchzuführen. Ein möglicher **Würfel** ist schnell beschrieben, man mag als Ecken für irgendeine Orthonormalbasis  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  die acht Vektoren  $\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \vec{v}_3$  nehmen, im  $\mathbb{R}^3$  also etwa  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Die Ecken eines **Tetraeders** erhält man, wenn man nur die vier Ecken dieses Würfels nimmt, bei denen das Produkt der Koordinaten Eins ist. Den **Ikosaeder** besprechen wir in 5.4.12 noch ausführlich. Zu den fünf sogenannten „platonischen Körpern“ rechnet man außer diesen dreien noch den **Oktaeder** und den **Dodekaeder**. Die Eckenmenge eines Oktaeders bilden etwa die drei Vektoren der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  mitsamt ihren Negativen. Die Eckenmenge eines Dodekaeders mag man anschaulich als die Menge der „Flächenmitten eines Ikosaeders“ beschreiben und formal als die Menge der „Pole der Polordnung drei“ im Sinne des gleich folgenden Beweises im Fall der Symmetriegruppe eines Ikosaeders. Die Bezeichnungen Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder für die platonischen Körper außer dem Würfel kommen von den griechischen Worten für die Anzahlen 4, 8, 12 und 20 ihrer Flächen und dem griechischen Wort  $\varepsilon\delta\rho\alpha$  für „Sitz“ und dann auch „Sitzfläche“ her. Man findet für den Würfel wegen seiner 6 Flächen manchmal auch die Bezeichnung „Hexaeder“. „Dieder“ heißt eigentlich „Zweiflach“, womit wohl gemeint ist, daß er in gewisser Weise zwei Flächen hat, da man ihn ja wie einen Bierdeckel von beiden Seiten verschieden anmalen könnte.

5.4.5. Die Diedergruppe  $D_4$  mag man sich auch als die Gruppe aller acht räumlichen Bewegungen veranschaulichen, die einen Bierdeckel in sich überführen. Sie wird deshalb auch die **Bierdeckelgruppe** genannt.

*Ergänzung* 5.4.6 (**Beziehungen zur Kristallographie**). Unser Satz 5.4.2 ist ein möglicher Ausgangspunkt der Kristallographie: Unter einem  **$n$ -dimensionalen Kristall** verstehen wir hier eine Teilmenge  $K$  eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums  $E$ , etwa die Menge der Orte der Atome eines Kristallgitters, mit der Eigenschaft, daß (1) die Translationen aus ihrer Symmetriegruppe den Richtungsraum

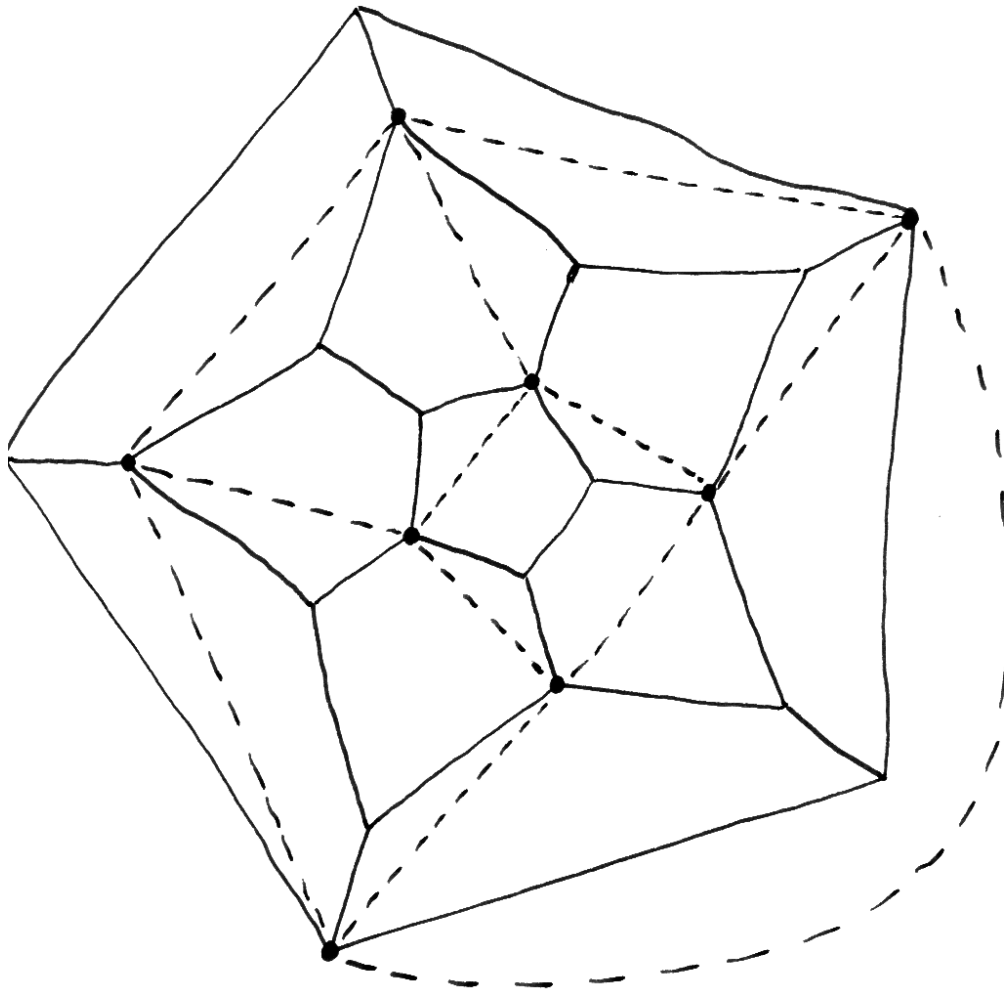


aufspannen und daß es (2) eine positive untere Schranke gibt für die Längen aller von Null verschiedenen Translationen aus besagter Symmetriegruppe. Die zweite Eigenschaft schließt etwa den Fall aus, daß unsere Teilmenge einfach der ganze besagte Raum ist. Unter der **Punktgruppe**  $P$  eines Kristalls verstehen wir die Untergruppe  $P \subset O(\vec{E})$  aller linearen Anteile von Symmetrien unseres Kristalls, unter seiner **Drehgruppe**  $D \subset SO(\vec{E})$  die Menge aller orientierungserhaltenden Elemente der Punktgruppe. Man zeigt, daß die Punktgruppe eines Kristalls stets endlich sein muß, und daß als Drehgruppen von räumlichen, als da heißt dreidimensionalen Kristallen nur die Gruppen  $C_k$  und  $D_k$  mit  $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  sowie die Tetraedergruppe und die Würfelgruppe auftreten können. Die Einteilung nach Drehgruppen entspricht in etwa, aber leider nicht ganz genau, der in der Kristallographie gebräuchlichen Einteilung in die sieben **Kristallsysteme**. Genauer entsprechen dem „kubischen System“ die Würfelgruppe und die Tetraedergruppe, dem „tetragonalen System“ die Drehgruppen  $C_4$  und  $D_4$ , dem „hexagonalen System“ die Drehgruppen  $C_6$  und  $D_6$ , dem „trigonalen System“ die Drehgruppen  $C_3$  und  $D_3$ , aber das „orthorhombische“, „monokline“ und „trikline System“ lassen sich erst anhand ihrer Punktgruppen unterscheiden. Auch in den übrigen Fällen liefert die Punktgruppe eine feinere Klassifikation. Für sie gibt es 32 Möglichkeiten, nach denen die Kristalle in die sogenannten **Kristallklassen** eingeteilt werden. Die eigentliche Klassifikation beschreibt alle als Symmetriegruppen von räumlichen Kristallen möglichen Bewegungsgruppen des Anschauungsraums bis auf Konjugation mit orientierungstreuen Automorphismen des unserem euklidischen Raum zugrundeliegenden affinen Raums. Das darf nicht dahingehend mißverstanden werden, daß diese Automorphismengruppe durch Konjugation auf der Menge der möglichen Symmetriegruppen räumlicher Kristalle operieren würde, aber in vielen Fällen sind eben doch zwei derartige Symmetriegruppen konjugiert zueinander, und dann betrachtet man sie als zur selben Klasse gehörig. Es gibt im Raum genau 230 Kristallklassen. Erlaubt man auch Konjugation mit nicht orientierungstreuen Automorphismen, so sinkt die Zahl der Klassen auf 219. Das **achtzehnte Hilbert'sche Problem** fragte unter anderem danach, ob es analog in jeder Dimension nur endlich viele Möglichkeiten für wesentlich verschiedene Kristalle gibt. Bieberbach konnte dafür einen Beweis geben.

#### 5.4.7 (Beziehungen zwischen den Symmetriegruppen platonischer Körper).

Eine Würfelgruppe kann auch als die Gruppe aller Symmetriebewegungen desjenigen Oktaeders aufgefaßt werden, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Würfels sind. Ähnlich kann eine Ikosaedergruppe auch als Gruppe aller Symmetriebewegungen eines Dodekaeders aufgefaßt werden. Die Kantenmitten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders, so erhält man eine Einbettung der Tetraedergruppe in die Würfelgruppe.

#### 5.4.8 (Symmetriegruppen platonischer Körper als abstrakte Gruppen). Die



Einer der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, mit gestrichelt eingezeichneten Kanten.

Diedergruppe  $D_2$  ist isomorph zur Klein'schen Vierergruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Sie kann vielleicht übersichtlicher auch beschrieben werden als die Gruppe aller Drehungen, die von einem Tripel paarweise orthogonaler Geraden jede in sich überführen. Neben der Identität liegen darin also die Drehungen um  $180^\circ$  um jede dieser drei Geraden. Die Tetraedergruppe kann man in die symmetrische Gruppe  $S_4$  einbetten mittels ihrer Operation auf den Ecken des Tetraeders. Wir erhalten so einen Isomorphismus der Tetraedergruppe mit der alternierenden Gruppe  $A_4$  aller geraden Permutationen von vier Elementen. Die Würfelgruppe operiert auf der Menge der vier räumlichen Diagonalen des Würfels und wir erhalten so einen Isomorphismus  $W \cong S_4$ . Die Ikosaedergruppe operiert auf der Menge der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, von denen einer in nebenstehendem Bild schematisch dargestellt ist. Mit etwas Geduld kann man direkt einsehen, daß diese Operation einen Isomorphismus der Ikosaedergruppe  $I$  mit der alternierenden Gruppe  $A_5$  aller geraden Permutationen von 5 Elementen liefert. In [AL] 1.2.5 werden wir erklären, wie man das auch mit weniger Geduld aber mehr Gruppentheorie einsehen kann, und in [AL] 1.6.10 werden wir zusätzlich einen Isomorphismus dieser Gruppe mit der Gruppe  $SL(2; \mathbb{F}_5)/\{\pm \text{id}\}$  herleiten.

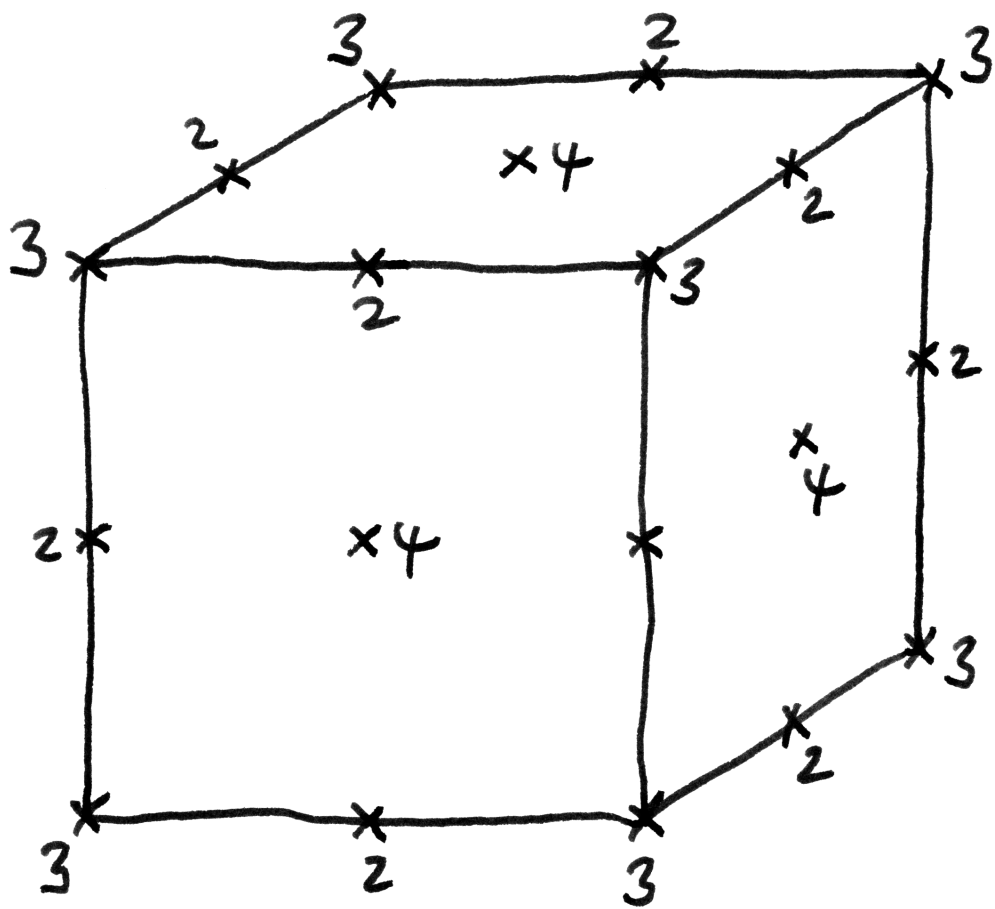
*Beweis von Satz 5.4.2.* Nach 5.1.28 besitzt jede endliche Gruppe von Automorphismen eines reellen affinen Raums mindestens einen Fixpunkt, genauer ist der Schwerpunkt [LA1] 3.4.2 jeder Bahn ein Fixpunkt. Folglich reicht es, die endlichen Untergruppen der Drehgruppe  $SO(3)$  zu klassifizieren. Sei also  $G \subset SO(3)$  eine endliche Untergruppe. Für jede nichttriviale Drehung  $g \in SO(3) \setminus 1$  erklären wir ihre „Pole“ als die beiden Schnittpunkte ihrer Drehachse mit der Einheitssphäre  $S^2$ . Sei  $P$  die Menge aller Pole von Elementen von  $G \setminus 1$ . Natürlich ist  $P$  eine endliche Menge und  $G$  operiert auf  $P$ . Wir zählen nun die Menge

$$M := \{(g, p) \in G \times S^2 \mid g \neq 1, gp = p\}$$

aller Paare  $(g, p)$  mit  $g \in G \setminus 1$  und  $p$  einem Pol von  $g$  auf zwei Weisen. Einerseits gehört jedes von 1 verschiedene Gruppenelement  $g \in G \setminus 1$  zu genau zwei Polen, andererseits gehört jeder Pol  $p \in P$  mit Standgruppe  $G_p$  zu genau  $|G_p| - 1$  von 1 verschiedenen Gruppenelementen. Zusammen erhalten wir so

$$2(|G| - 1) = |M| = \sum_{p \in P} (|G_p| - 1)$$

Sei nun  $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_r$  die Bahnzerlegung von  $P$  und seien  $p_i \in P_i$  fest gewählt. Die Standgruppe von  $p_i$  habe sagen wir  $n_i \geq 2$  Elemente. Die zugehörige Bahn hat dann  $|P_i| = |G|/n_i$  Elemente und alle Standgruppen zu Polen  $p \in P_i$  haben  $|G_p| = n_i$  Elemente. Die Kardinalität der Standgruppe eines Pols nennen wir abkürzend auch die **Polordnung**. Insbesondere ist also  $n_i$  die Polordnung des Pols



Die „von vorne sichtbaren“ Pole der Würfelgruppe mit den Kardinalitäten der jeweiligen Standgruppen

$p_i$ . Fassen wir dann die Pole jeder Bahn in unserer Summe zu einem Summanden zusammen, so können wir in unserer Gleichung die rechte Seite umformen zu  $\sum_{i=1}^r (|G|/n_i)(n_i - 1)$  und Wegteilen von  $|G|$  liefert die Gleichung

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

Jeder Summand auf der rechten Seite ist mindestens  $1/2$ , der Ausdruck links ist aber kleiner als 2. Es kommen also nur bis zu drei Bahnen von Polen in Betracht. Wir machen nun eine Fallunterscheidung nach der Zahl  $r$  der Bahnen von Polen.

**Fall 0:** Es gibt überhaupt keine Pole. In diesem Fall besteht  $G$  nur aus dem neutralen Element und wir haben die triviale Gruppe  $C_1$  vor uns.

**Fall 1:** Ganz  $P$  ist eine Bahn. Das ist unmöglich, denn es muß gelten  $|G| \geq 2$  wenn es überhaupt Pole geben soll, und damit hätten wir  $2 - \frac{2}{|G|} \geq 1 > 1 - \frac{1}{n_1}$  im Widerspruch zu unserer Gleichung.

**Fall 2:** Es gibt genau zwei Bahnen  $P_1$  und  $P_2$  in  $P$ . Wir haben dann

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

Natürlich haben wir  $n_i \leq |G|$  und damit notwendig  $n_1 = n_2 = |G|$ . Alle Pole werden also von der Gruppe festgehalten, es gibt folglich nur zwei Pole, die sich notwendig gegenüberliegen müssen. Damit sind wir im Fall der zyklischen Gruppen  $C_k$  mit  $k = n_1 = n_2 > 1$ .

**Fall 3:** Es gibt genau drei Bahnen  $P_1, P_2$  und  $P_3$  in  $P$ , wir haben also

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - 1$$

Wir dürfen annehmen  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Sicher gilt dann  $n_1 = 2$ , sonst wäre die rechte Seite  $\leq 0$ . Haben wir auch  $n_2 = 2$ , so kann  $n_3$  beliebige Werte annehmen und wir haben  $|G| = 2n_3$ . Die Bahn  $P_3$  besteht dann aus zwei Polen, die sich notwendig gegenüberliegen müssen, da sonst bereits die Bewegung eines dieser beiden Pole mit einer nichttrivialen Drehung und den anderen ein drittes Element der Bahn  $P_3$  liefern würde. Alle Gruppenelemente permutieren die beiden Pole aus  $P_3$  und unsere Gruppe wird damit eine Diedergruppe. Bleibt der Fall  $n_2 > 2$ . Hier sind  $(2, 4, 4)$  und  $(2, 3, 6)$  unmöglich für  $(n_1, n_2, n_3)$ , da ja gilt  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ . Also bleiben nur die Fälle  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  und  $(2, 3, 5)$  und man berechnet leicht die zugehörigen Gruppenordnungen zu 12, 24, und 60.

Den Stand unseres Beweises bis hierher können wir wie folgt zusammenfassen: Wir haben eine Abbildung konstruiert – man mag sie die **Bahnpolordnungsabbildung** nennen – die jeder endlichen Untergruppe der Drehgruppe eine endliche Multimenge natürlicher Zahlen zuordnet, und haben gezeigt, daß in ihrem Bild höchstens die folgenden Multimengen liegen:

$$\emptyset, \mu\{k, k\} \text{ und } \mu\{2, 2, k\} \text{ für } k \geq 2, \mu\{2, 3, 3\}, \mu\{2, 3, 4\}, \text{ und } \mu\{2, 3, 5\}.$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß (1) die angegebenen Multimengen genau das Bild unserer Bahnpolordnungsabbildung sind, und daß (2) je zwei Drehgruppen mit demselben Bild unter der Bahnpolordnungsabbildung zueinander konjugiert sind. Wenn wir das alles gezeigt haben, so folgt, daß die Bahnpolordnungsabbildung eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Untergruppen} \\ \text{der Drehgruppe } SO(3), \\ \text{bis auf Konjugation} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \mu\{k, k\} \text{ und } \mu\{2, 2, k\} \text{ für } k \geq 2, \\ \mu\{2, 3, 3\}, \mu\{2, 3, 4\}, \mu\{2, 3, 5\} \end{array} \right\}$$

liefert. Zusammen mit der beim Beweis erzeugten Anschauung zeigt das dann unseren Satz. Die Existenz endlicher Untergruppen der Drehgruppe mit derartigen Polbahnen und Polordnungen scheint mir anschaulich klar. Zum Beispiel hat die Würfelgruppe drei Polbahnen, als da sind: Eine Bahn aus den 8 Ecken zur Polordnung 3; eine Bahn aus den auf Länge Eins normierten 12 Mittelpunkten der Kanten, zur Polordnung 2; und eine Bahn aus den auf Länge Eins normierten 6 Mittelpunkten der Flächen, zur Polordnung 4. Diese Anschauung läßt sich auch leicht zu einem formalen Beweis präzisieren in allen Fällen mit Ausnahme des Ikosaeder-Falls (2, 3, 5). In diesem Fall folgt die Existenz formal erst aus 5.4.12. Daß je zwei zyklische Gruppen derselben endlichen Ordnung und je zwei Diedergruppen derselben endlichen Ordnung in der Drehgruppe zueinander konjugiert sind, scheint mir offensichtlich. Die folgenden beiden Lemmata 5.4.10 und 5.4.11 zeigen, daß auch je zwei Gruppen mit gegebenen Bahnpolordnungen oder, wie wir von jetzt an abkürzend sagen werden, zu gegebenem **Typ** (2, 3,  $n$ ) in der Drehgruppe zueinander konjugiert sind. Damit vervollständigen sie den Beweis unseres Satzes.  $\square$

5.4.9. Man mag eine Teilmenge eines dreidimensionalen euklidischen Raums eine **platonische Eckenmenge** nennen, wenn die Gruppe ihrer Symmetriebewegungen endlich ist und transitiv auf unserer Teilmenge operiert und jedes ihrer Elemente von mindestens drei Symmetriebewegungen festgehalten wird. Man mag einen **platonischen Körper** erklären als die konvexe Hülle einer platonischen Eckenmenge. Unsere Überlegungen zeigen dann, daß es bis auf Ähnlichkeit in unserem Raum genau fünf platonische Körper gibt.

**Lemma 5.4.10.** 1. Jede endliche Untergruppe einer Drehgruppe von einem der beiden Typen  $(2, 3, 4)$  oder  $(2, 3, 5)$  ist maximal unter allen endlichen Untergruppen der Drehgruppe;

2. Eine endliche Drehgruppe von einem der Typen  $(2, 3, n)$  mit  $n \geq 3$  kann beschrieben werden als der Stabilisator jeder ihrer beiden kleineren Bahnen von Polen.

*Beweis.* Nach unseren bisherigen Erkenntnissen kommen bei endlichen Drehgruppen für die Paare (Ordnung eines Pols, Kardinalität seiner Bahn) nur die Paare  $(n, 1)$ ,  $(n, 2)$ ,  $(2, n)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 8)$ ,  $(3, 20)$ ,  $(4, 6)$  und  $(5, 12)$  in Frage. Für jeden Pol müssen sich bei Übergang zu einer echt größeren Gruppe nach der Bahnformel entweder seine Polordnung oder die Kardinalität seiner Bahn oder beide vervielfachen. Das ist aber bei  $(4, 6)$  und  $(5, 12)$  unmöglich und wir erhalten die erste Behauptung. In den drei Fällen der zweiten Behauptung enthält weiter jede Bahn von Polen mindestens drei Punkte, also auch zwei verschiedene sich nicht gegenüberliegende Punkte. Folglich operiert sogar der Stabilisator in  $SO(3)$  der Bahn  $P_i$  treu auf  $P_i$  und ist insbesondere endlich. Nun muß  $P_i$  auch unter diesem Stabilisator eine Bahn von Polen sein. Wenn die Symmetriegruppe von  $P_i$  größer sein will als die Drehgruppe, von der wir ausgegangen sind, muß sie also an den Polen aus  $P_i$  größere Polordnungen haben. Wieder ist das unmöglich bei  $(3, 4)$ ,  $(3, 8)$ ,  $(3, 20)$ ,  $(4, 6)$  und  $(5, 12)$ .  $\square$

**Lemma 5.4.11.** Sind zwei endliche Drehgruppen vom selben Typ  $(2, 3, n)$  mit  $n \geq 3$  gegeben und sind  $P_3$  und  $\tilde{P}_3$  jeweils zugehörige Polbahnen kleinstmöglicher Kardinalität, so gibt es eine Drehung, die  $P_3$  in  $\tilde{P}_3$  überführt.

*Beweis.* Für die Operation der Drehgruppe  $SO(3)$  auf Paaren von Vektoren  $(p, q)$  durch  $g(p, q) := (gp, gq)$  ist klar, daß die Standgruppe jedes linear unabhängigen Paares trivial ist. Gegeben eine endliche Untergruppe  $G \subset SO(3)$  und eine Bahn von Polen  $P_i$  ist insbesondere die Standgruppe eines Paares  $(p, q)$  mit  $p \neq \pm q$  trivial. Nach dieser Vorüberlegung betrachten wir die drei Fälle der Reihe nach.

Im Fall  $(2, 3, 3)$  haben wir  $|P_3| = 4$ . Folglich gibt es in  $P_3 \times P_3$  ein Paar mit trivialer Standgruppe, das also eine 12-elementige Bahn hat, die wegen  $|P_3 \times P_3| = 16$  notwendig aus allen  $(p, q)$  mit  $p \neq q$  bestehen muß. Je zwei verschiedene Punkte aus  $P_3$  haben also denselben Abstand. Ich hoffe, daß damit sowohl die Aussage des Lemmas im Fall  $n = 3$  klar wird als auch, daß die Punkte aus  $P_3$  die Ecken eines Tetraeders bilden.

Im Fall  $(2, 3, 4)$  haben wir  $|P_3| = 6$ . Folglich gibt es in  $P_3 \times P_3$  ein Paar mit trivialer Standgruppe, das also eine 24-elementige Bahn hat, die wegen  $|P_3 \times P_3| = 36$  notwendig aus allen  $(p, q)$  mit  $p \neq \pm q$  bestehen muß. Die anderen Bahnen müssen

aus Paaren mit nichttrivialer Standgruppe bestehen, und da die Bahn der sechs Paare der Gestalt  $(p, p)$  noch nicht genug Elemente liefert, muß auch noch eine Bahn aus Paaren der Gestalt  $(p, -p)$  vorkommen. Wir sehen so einerseits, daß  $P_3$  stabil ist unter Punktspiegelung am Ursprung, und andererseits, daß je zwei voneinander verschiedene Pole aus  $P_3$ , die sich nicht gegenüberliegen, denselben Abstand haben. So erkennen wir hoffentlich sowohl die Aussage des Lemmas im Fall  $n = 4$  als auch, daß die Elemente von  $P_3$  die Ecken eines Oktaeders bilden müssen.

Im Fall  $(2, 3, 5)$  haben wir  $|P_3| = 12$  und  $|P_3 \times P_3| = 144$ . Wieder haben wir an Bahnen in  $|P_3 \times P_3|$  die zwölfelementige Bahn aller Paare  $(p, p)$ , möglicherweise noch eine zwölfelementige Bahn aller Paare  $(p, -p)$ , und daneben nur Bahnen mit 60 Elementen. Es folgt, daß  $P_3 \times P_3$  in vier Bahnen zerfällt, und zwar die Bahn der Paare gleicher Pole, die Bahn der Paare von sich gegenüberliegenden Polen, und zwei weitere Bahnen von Polpaaren. Nehmen wir irgendeinen Pol  $p \in P_3$ , so bilden die Bilder von jedem Pol  $q \in P_3$  mit  $q \neq \pm p$  unter den Drehungen aus unserer Gruppe mit Fixpunkt  $p$  ein regelmäßiges Fünfeck, denn die Polordnung der Pole aus  $P_3$  war ja 5. Für zwei verschiedene Ecken eines regelmäßigen Fünfecks gibt es zwei Möglichkeiten für ihren Abstand, deren Verhältnis nebenbei bemerkt nach [AN1] 3.4.27 oder elementargeometrischen Überlegungen gerade der goldene Schnitt ist. Unsere beiden 60-elementigen Bahnen müssen sich also im Abstand zwischen den Polen ihrer Paare unterscheiden. Zu jedem Pol aus  $P_3$  gibt es damit außer dem Pol selbst und dem gegenüberliegenden Pol noch 5 „nahe“ Pole und 5 „weite“ Pole. Nun bilden zwei sich gegenüberliegende Pole aus  $P_3$  mit jedem weiteren Pol ein Dreieck, das nach dem Satz des Thales bei diesem weiteren Pol einen rechten Winkel hat, wobei dieser Pol notwendig zu einem von unseren beiden sich gegenüberliegenden Polen nah sein muß und zum anderen weit, da ja zu jedem unserer sich gegenüberliegenden Pole von den zehn verbleibenden Polen fünf nah und fünf weit sein müssen. Da unser Dreieck eine Hypotenuse der Länge 2 hat, wird dadurch der Abstand zwischen nahen Polen und der zwischen weiten Polen bereits vollständig beschrieben und hängt insbesondere nicht von unserer Gruppe ab. Damit erkennen wir, daß im Fall  $(2, 3, 5)$  die Bahn  $P_3$  bestehen muß aus (1) zwei gegenüberliegenden Punkten  $N$  und  $S = -N$  sowie (2) zwei regelmäßigen Fünfecken der fünf zu  $N$  nahen Pole und der fünf zu  $S$  nahen Pole mit jeweils von der speziellen Gruppe unabhängigem Abstand der Ecken dieser Fünfecke zu den jeweiligen Polen. Jede Ecke des „nördlichen“ Fünfecks muß aber auch einer Ecke des „südlichen“ Fünfecks gegenüberliegen. Unser Lemma folgt unmittelbar.  $\square$

**Lemma 5.4.12 (Existenz der Ikosaedergruppe).** *Es gibt endliche Untergruppen der Drehgruppe  $SO(3)$  mit Elementen der Ordnungen drei und fünf.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(S^2)$  aller gleichseitigen Dreiecke mit



Ecken auf der Einheitssphäre, die nicht in einer Ebene mit dem Ursprung liegen, formal also

$$\mathcal{D} = \left\{ \{a, b, c\} \left| \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{R}^3, \|a\| = \|b\| = \|c\| = 1, \\ \|a - b\| = \|b - c\| = \|c - a\|, \\ \langle a, b, c \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3. \end{array} \right. \right\}$$

Gegeben ein Dreieck  $\Delta \in \mathcal{D}$  und eine Ecke  $a \in \Delta$  definieren wir das **umgeklappte Dreieck**  $\Delta^a \in \mathcal{D}$  als das eindeutig bestimmte gleichseitige Dreieck  $\Delta^a \in \mathcal{D}$  mit  $\Delta \cap \Delta^a = \{b, c\}$ . Definieren wir zu einem Dreieck  $\Delta \in \mathcal{D}$  die Menge

$$\mathcal{D}(\Delta)$$

als die kleinste Teilmenge  $\mathcal{D}(\Delta) \subset \mathcal{D}$ , die  $\Delta$  enthält und stabil ist unter dem Umklappen von Dreiecken, so gilt offensichtlich  $\mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta')$  für alle  $\Delta' \in \mathcal{D}(\Delta)$ . Ist  $r \in O(3)$  orthogonal, so gilt sicher  $\{ra, rb, rc\}^{ra} = r(\{a, b, c\}^a)$  für jedes Dreieck  $\{a, b, c\} \in \mathcal{D}$ , das mit  $r$  gedrehte Dreieck am Bild  $r(a)$  der Ecke  $a$  umklappen liefert also dasselbe wie das an der Ecke  $a$  umgeklappte Dreieck mit  $r$  drehen, und insbesondere gilt  $r(\mathcal{D}(\Delta)) = \mathcal{D}(r\Delta)$ . Haben wir nun zusätzlich  $|(r\Delta) \cap \Delta| \geq 2$ , so folgt  $r\Delta \in \mathcal{D}(\Delta)$  und damit  $\mathcal{D}(r\Delta) = \mathcal{D}(\Delta)$ . Nach diesen Vorüberlegungen gehen wir nun aus von einem regelmäßigen Fünfeck, bilden darauf die Pyramide mit Spitze  $N$  und aufsteigenden Kanten von derselben Länge wie die Kanten des Fünfecks, und schrumpfen oder strecken diese Pyramide so, daß wir sie als „Polkappe“ in die Einheitssphäre legen können. Dann gehen offensichtlich die fünf gleichseitigen Dreiecke dieser Polkappe durch Umklappen auseinander hervor. Bezeichne  $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$  die kleinste unter Umklappen stabile Menge von Dreiecken, die diese fünf Dreiecke umfaßt. Wir zeigen im folgenden, daß  $\mathcal{D}^*$  endlich ist: Dann bilden alle Drehungen, die  $\mathcal{D}^*$  in sich überführen, offensichtlich eine endliche Untergruppe der Drehgruppe mit Elementen der Ordnungen drei und fünf und wir sind fertig. Um zu zeigen, daß  $\mathcal{D}^*$  endlich ist, bilden wir zu  $\mathcal{D}^*$  einen Graphen im Sinne von 5.4.22 wie folgt: Als Graphenecken nehmen wir alle fünfelementigen Teilmengen von  $\mathcal{D}^*$  vom Typ „Polkappe“, die also aus einem festen Dreieck mit ausgezeichneten Ecke durch wiederholtes Umklappen unter Festhalten dieser einen ausgezeichneten Ecke gewonnen werden können. Nun verbinden wir zwei verschiedene derartige Graphenecken durch eine Graphenkante genau dann, wenn sie mindestens ein Dreieck gemeinsam haben. So erhält man aus  $\mathcal{D}^*$  einen zusammenhängenden Graphen mit den Eigenschaften aus Übung 5.4.22: Jede Graphenecke hat genau fünf Nachbarn, und je zwei benachbarte Graphenecken haben genau zwei gemeinsame Nachbarn. Nach Übung 5.4.22 ist ein zusammenhängender Graph mit diesen Eigenschaften jedoch endlich und damit muß auch unsere Menge von Dreiecken  $\mathcal{D}^*$  endlich gewesen sein.  $\square$

*Ergänzung 5.4.13.* Die obigen Überlegungen kann man dahingehend zusammenfassen, daß gegeben ein gleichseitiges Dreieck  $\Delta = \{a, b, c\}$ , für das es eine Drehung  $r$  um die Ursprungsgerade durch  $a$  gibt mit  $r^5 = \text{id}$  und  $r : b \mapsto c$ , die Menge  $\mathcal{D}(\Delta)$  der daraus durch Umklappen entstehenden Dreiecke endlich ist. Die hier geforderte Eigenschaft hat sicher jedes Dreieck, das anschaulich gesprochen „Fläche eines Ikosaeders“ ist. Es gibt aber auch noch andere gleichseitige Dreiecke mit dieser Eigenschaft, nämlich diejenigen gleichseitigen Dreiecke, die anschaulich gesprochen die „Diagonale unseres Ausgangsfünfecks“ als Seitenlänge haben.

*Ergänzung 5.4.14.* Mit welchen platonischen Körpern kann man den Raum füllen? Ich vermute, das geht nur mit Würfeln: Die anderen sollten als Winkel zwischen an einer Kante angrenzenden Flächen nie einen Winkel der Gestalt  $2\pi/n$  haben.

*Ergänzung 5.4.15.* Vielleicht ist es vernünftig, platonische Körper zu definieren über die Mengen ihrer Ecken, die man wohl wie folgt charakterisieren kann: Man definiere für eine endliche Teilmenge  $E$  des Raums ihre **Abständezahl**  $A(E)$  als die Zahl der möglichen von Null verschiedenen verschiedenen Abstände zwischen ihren Elementen. Eine endliche Teilmenge  $E$  einer Sphäre heißt nun Tetraeder bei  $|E| = 4$ ,  $A(E) = 1$ , Würfel bei  $|E| = 8$ ,  $A(E) = 3$ , Oktaeder bei  $|E| = 6$ ,  $A(E) = 2$ , Ikosaeder bei  $|E| = 12$ ,  $A(E) = 3$ , Dodekaeder bei  $|E| = 20$ ,  $A(E) = 4$ . Stimmt das eigentlich? Möglicherweise sollte man bei allen außer dem Tetraeder noch fordern, daß  $E$  stabil ist unter Punktspiegelung am Ursprung.

## Übungen

*Übung 5.4.16.* Man berechne den Cosinus des Winkels zwischen zwei Seitenflächen eines Tetraeders. Hinweis: Man argumentiere, daß die Normalenvektoren auf die Flächen eines Tetraeders die Ecken eines Tetraeders bilden. Man bemerke, daß die Standardbasisvektoren im  $\mathbb{R}^4$  einen Tetraeder bilden. Wieviele Tetraeder kann man längs einer gemeinsamen Kante zusammenlegen? Bleibt dann noch Luft? Hier mag ein Taschenrechner helfen.

*Weiterführende Übung 5.4.17.* Gegeben ein zusammenhängender ebener Graph, bei dem an jeder Ecke drei Kanten ankommen, leite man aus der Eulerschen Formel  $E - K + F = 2$  her, daß es eine Fläche mit höchstens fünf Kanten geben muß. Hier haben wir die unbeschränkte Fläche mitgezählt.

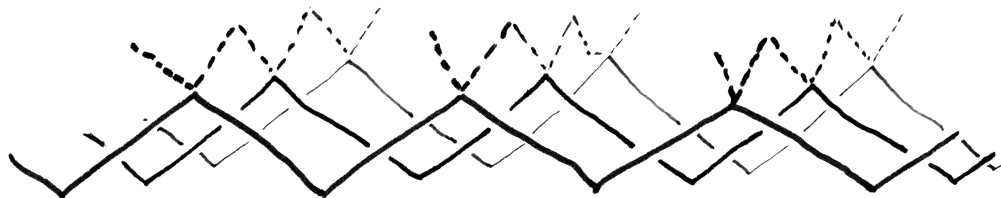
*Ergänzende Übung 5.4.18 (Kristallgitter des Diamants).* Seien  $v_1, \dots, v_4$  Richtungsvektoren des dreidimensionalen Anschauungsraums, die vom Schwerpunkt eines Tetraeders zu seinen vier Ecken zeigen. Wir betrachten alle Linearkombinationen  $\sum_{i=1}^4 n_i v_i$  mit  $\sum_{i=1}^4 n_i \in \{0, 1\}$  und behaupten, daß diese Linearkombinationen gerade die Punkte beschreiben, an denen in einem Diamant die

Kohlenstoffatome sitzen. In der Tat sind unsere Linearkombinationen paarweise verschieden, die „einzige“ Relation  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$  unserer Vektoren führt aufgrund unserer Einschränkungen nicht zu Mehrdeutigkeiten, und unsere Linearkombinationen lassen sich auch beschreiben als die Elemente des von den Richtungsvektoren  $v_1 - v_2, v_1 - v_3$  und  $v_1 - v_4$  erzeugten Gitters mitsamt dem um  $v_1$  verschobenen Gitter. Jeder Punkt hat vier nächste Nachbarn, der Nullpunkt etwa  $v_1, \dots, v_4$ , und zu diesen ist er gebunden im Diamantkristall. Anschaulich mag man sich eine Lage von parallelen horizontalen Zick-Zack-Linien denken, die Zick-Zacks darin nach oben und unten, dann eine weitere horizontale Lage senkrecht dazu, bei denen die Tiefpunkte immer gerade die Hochpunkte der Lage darunter berühren, und so weiter, und schließlich an jedem dieser Berührungspunkte ein Kohlenstoffatom.

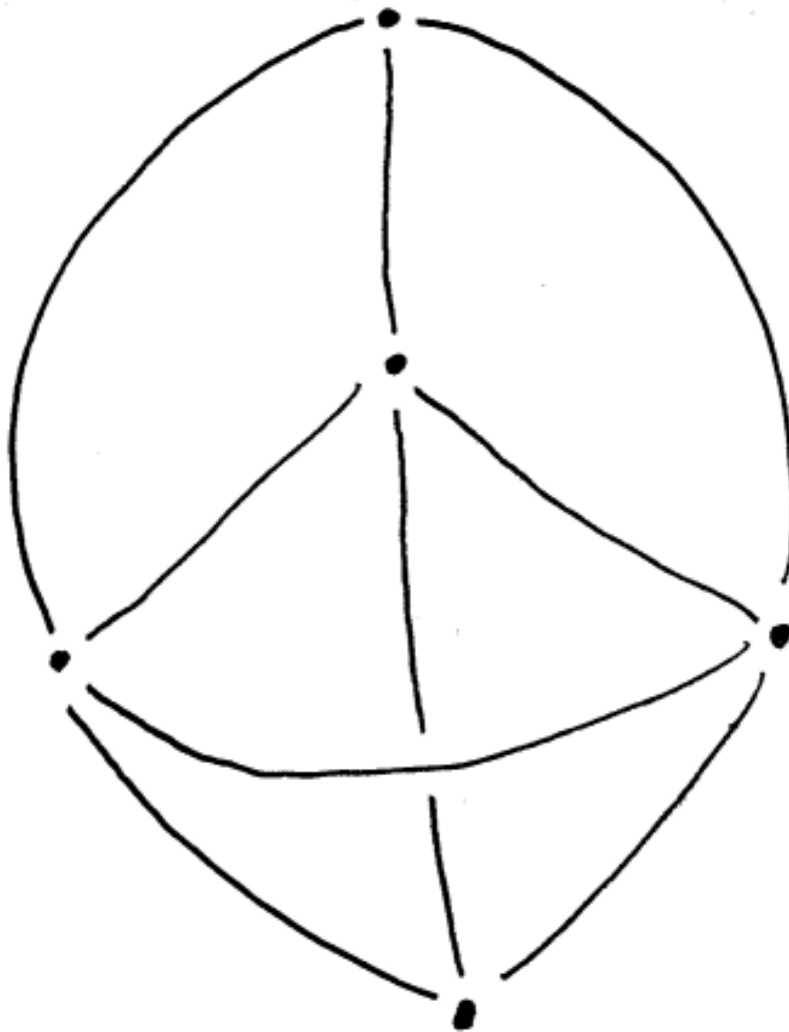
*Ergänzende Übung 5.4.19.* Man konstruiere einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ . Hinweis: Geometrisch mag man sich die  $S_4$  nach 5.4.8 als die Gruppe der Symmetriebewegungen eines Würfels denken und den fraglichen Gruppenhomomorphismus konstruieren über die Operation dieser Gruppe auf der Menge der drei Mittelsenkrechten auf den Flächen des Würfels. Später werden wir verstehen, daß dieser Homomorphismus etwas ganz besonderes ist: Surjektive nicht bijektive Gruppenhomomorphismen  $S_n \twoheadrightarrow G$  einer symmetrischen Gruppe auf irgendeine andere Gruppe gibt es unter der Annahme  $n \geq 5$  nur für  $|G| = 2$  und dann jeweils nur genau Einen, vergleiche [AL] 1.6.9.

*Ergänzende Übung 5.4.20.* Die Multiplikation definiert einen Isomorphismus zwischen der Gruppe aller Symmetrien aus  $O(3)$  eines Ikosaeders und dem Produkt der Gruppe seiner Symmetriebewegungen mit der zweielementigen Gruppe, die von der Punktspiegelung am Ursprung erzeugt wird. Insbesondere ist die „nicht-orientierte Ikosaedergruppe“ keineswegs isomorph zur symmetrischen Gruppe  $S_5$ .

5.4.21. Unter einem **Graphen** oder genauer einem **kombinatorischen Graphen** (ungerichtet, ohne mehrfache Kanten, ohne Schleifen) verstehen wir ein Paar  $(E, K)$  bestehend aus einer Menge  $E$  und einem System  $K \subset \mathcal{P}(E)$  von zweielementigen Teilmengen von  $E$ . Die Elemente von  $E$  heißen die **Ecken** unseres Graphen, die Elemente von  $K$  seine **Kanten**. Zwei verschiedene Ecken, die zu einer gemeinsamen Kante gehören, heißen **benachbart**. Ein **Isomorphismus** zwischen zwei Graphen ist eine Bijektion zwischen ihren Eckenmengen, die eine Bijektion zwischen ihren Kantenmengen induziert. Zwei Graphen heißen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt. Die Äquivalenzklassen der kleinsten Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge eines Graphen, unter der benachbarte Elemente äquivalent sind, heißen die **Zusammenhangskomponenten** unseres Graphen. Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn er aus einer einzigen Zusammenhangskomponente besteht.



Versuch einer graphischen Darstellung der räumlichen Struktur des Diamantkristalls. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien sind nur der Transparenz halber verschiedenartig gezeichnet und bedeuten die Bindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, die jeweils an den Ecken der Zick-Zack-Linien sitzen. Die hier gezeichnete Struktur gilt es nun übereinanderzuschichten, so daß sich jeweils die Ecken treffen.



Ein zusammenhängender Graph mit fünf Punkten, von denen drei vier Nachbarn haben und zwei nur drei Nachbarn. Die beiden Punkte „auf halber Höhe auf dem Rand“ haben drei gemeinsame Nachbarn.

*Übung 5.4.22.* Man zeige: Ein zusammenhängender Graph, in dem jede Ecke genau fünf (vier, drei) Nachbarn besitzt und je zwei benachbarte Ecken genau zwei gemeinsame Nachbarn, ist notwendig endlich und sogar isomorph zu jedem weiteren Graphen mit diesen beiden Eigenschaften. Den so charakterisierten Graphen mag man den „Kantengraphen des Ikosaeders (Oktaeders, Tetraeders)“ nennen. Hinweis: Ausprobieren.

*Übung 5.4.23 (Endliche Untergruppen der  $SU(2)$ ).* Man zeige, daß die Gruppe  $SU(2)$  nur zwei Elemente  $g$  besitzt mit  $g^2 = 1$ , nämlich  $g = \pm \text{id}$ . Man zeige, daß jede endliche Untergruppe ungerader Kardinalität  $n$  von  $SU(2)$  konjugiert ist zur Untergruppe  $\{\text{diag}(\zeta^r, \zeta^{-r}) \mid 1 \leq r \leq n\}$  für  $\zeta = \exp(2\pi i/n)$ . Man zeige, daß die endlichen Untergruppen gerader Kardinalität von  $SU(2)$  genau die Urbilder von endlichen Untergruppen von  $SO(3)$  unter unserer Surjektion  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  aus 1.11.26 sind, die wir nach 5.4.2 bereits kennen. Das benötigt den Satz von Cauchy 5.1.35.

*Übung 5.4.24 (Ikosaeder).* Es gibt in der Einheitssphäre zwölfelementige Teilmengen, die stabil sind unter der Drehung mit den Winkeln  $\pm 2\pi/5$  um die Ursprungsgeraden durch jeden ihrer Punkte, und je zwei derartige Teilmengen lassen sich durch eine Drehung ineinander überführen.

*Übung 5.4.25 (Endliche Untergruppen der Isometriegruppe des Raums).* Jede Wahl eines von Null verschiedenen Richtungsvektors versieht den Anschauungsraum mit einer Metrik. Alle diese Metriken unterscheiden sich nur um eine positive reelle Konstante und liefern folglich dieselben Isometrien. Die Gruppe aller Isometrien des Anschauungsraums ist damit wohldefiniert. Sie kann im übrigen auch beschrieben werden als die von allen Bewegungen und allen Punktspiegelungen erzeugte Gruppe von Selbstabbildungen. Diejenigen Isometrien des Anschauungsraums, die eine gegebene Teilmenge festhalten, nenne ich ihre **Isometriesymmetrien** oder im folgenden auch kurz **Symmetrien**. Man zeige, daß jede endliche Untergruppe der Gruppe der Isometrien alias abstandserhaltenden Selbstabbildungen des Anschauungsraums konjugiert ist zu genau einer Untergruppe der folgenden Liste:

1. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen eines Tetraeders, Würfels, oder Ikosaeders, insgesamt 6 Fälle mit den Kardinalitäten 24, 12, 48, 24, 120, 60;
2. Der Gruppe aller Symmetrien bzw. Symmetriebewegungen eines regelmäßigen  $k$ -eckigen Bierdeckels,  $k \geq 3$ , also 2 Fälle für jedes  $k$  von Gruppen der Kardinalitäten  $4k$  und  $2k$ ;
3. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen einer regelmäßigen  $k$ -eckigen Schale,  $k \geq 3$ , also 2 Fälle für jedes  $k$  von Gruppen der Kardinalitäten  $2k$  und  $k$ ;

4. Der Gruppe aller Symmetrien beziehungsweise Symmetriebewegungen, die von einem Tripel bestehend aus drei durch einen gemeinsamen Punkt laufenden paarweise orthogonalen Geraden jede der drei Geraden stabilisieren und eine beziehungsweise zwei dieser Geraden punktweise festhalten. In Formeln übersetzt und nach den entsprechenden Identifikationen also einer der Untergruppen  $\text{diag}(\pm 1, 1, 1)$ ,  $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, 1)$ ,  $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  oder ihrer Schnitte mit der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$ , insgesamt 6 Fälle mit den Kardinalitäten 2, 1, 4, 2, 8, 4;

*Übung 5.4.26 (Existenz des Ikosaeders, Alternative).* Die Würfelgruppe ist isomorph zur Gruppe  $S_4$  aller Permutationen seiner Raumdiagonalen. Die Drehungen an Raumdiagonalen erzeugen darin die Untergruppe  $A_4$  aller geraden Permutationen seiner Raumdiagonalen. Es gibt zwei Möglichkeiten, jeder Fläche des Würfels ein Paar von parallelen Kanten derselben Fläche so zuzuordnen, daß diese Wahl stabil ist unter  $A_4$ . Jetzt sollen einige der Kanten des Ikosaeders in der Mitte der Flächen unseres Würfels liegen, parallel zu den jeweils ausgewählten beiden Kanten, und nun muß man nur noch ihre Länge so bestimmen, daß die Abstände zwischen „benachbarten Kantenenden“ gleich der Kantenlängen sind. Man muß dann allerdings noch etwas argumentieren, um zu zeigen, daß die so gewonnene Menge von „Ecken des Ikosaeders“ Symmetrien der Ordnung fünf hat.

## 5.5 Diskussion der Eulerformel\*

5.5.1. Indem man bei unseren platonischen Körpern die Zahlen  $E, K, F$  der Ecken, Kanten und Flächen bestimmt, prüft man unmittelbar in allen fünf Fällen die **Eulerformel**

$$E - K + F = 2$$

Diese Beziehung gilt allgemeiner für jede „kompakten konvexen dreidimensionalen Polyeder“, nur habe ich gar nicht definiert, was das eigentlich sein soll, und habe selbst bei den platonischen Körpern nur definiert, was für Teilmengen des Raums nun diesen Namen verdienen sollen, und nicht, wie denn nun die „Kanten“ oder „Flächen“ dieser Gebilde definiert werden sollen, die wir bereits so unbekümmert gezählt haben. Eine Formalisierung des Begriffs eines „dreidimensionalen konvexen Polyeders“ und seiner „Ecken, Kanten und Flächen“ wird in [SPW] ?? ausgeführt, aber das schien mir hier unangemessen und sogar irreführend, da unsere Eulerformel anderer Natur ist. Im folgenden formuliere ich sehr präzise eine sehr allgemeine Fassung dieser Formel, gebe jedoch statt eines Beweises nur einige sehr unvollkommene heuristische Argumente.

5.5.2. Ich erinnere den Begriff eines Homöomorphismus aus [AN2] 3.4.3. Man bemerke, daß  $\mathbb{R}^2$  nicht homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^1$ . In  $\mathbb{R}^2$  ist nämlich das Komplement

jedes Punktes zusammenhängend, in  $\mathbb{R}^1$  dahingegen ist das Komplement jedes Punktes unzusammenhängend.

**Satz 5.5.3 (Topologische Eulerformel).** *Sei  $S^2 = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$  eine Zerlegung der Einheitssphäre  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen  $A_i$ , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Für jeden Index  $i$  ist  $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_i$  abgeschlossen in  $S^2$ ;*
2. *Jedes  $A_i$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^1$  oder  $\mathbb{R}^0$  alias einem Punkt.*

*So gilt die **Euler-Formel**  $E - K + F = 2$  für  $E, F$  und  $K$  die Zahl der jeweils zu  $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  homöomorphen  $A_i$ .*

5.5.4. Die Bezeichnungen  $E, K$  und  $F$  stehen für „Ecken, Kanten und Flächen“. Man prüft die Formel leicht explizit für die durch die Zentralprojektion eines platonischen Körpers auf die Einheitssphäre gegebene Zerlegung derselben in die Bilder seiner Ecken, Kanten und Flächen. Besitzt allgemeiner ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  eine Zerlegung

$$X = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$$

in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen derart, daß für jeden Index  $i$  gilt  $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_i \nsubseteq X$  und daß jedes  $A_i$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^{d(i)}$  für ein  $d(i) \geq 0$ , so ist  $\sum_i (-1)^{d(i)}$  unabhängig von der Wahl einer derartigen Zerlegung. Den Beweis der topologischen Euler-Formel 5.5.3 und auch dieser allgemeineren Aussage für beliebige lokal kompakte Hausdorffräume können Sie in [TG] 4.8.22 finden. Er benötigt vertiefte Kenntnisse in Topologie.

5.5.5 (**Diskussion einiger nicht erlaubter Zerlegungen**). Um die Aussage des Satzes herauszuarbeiten, will ich einige nicht erlaubte Zerlegungen angeben. Betrachten wir die ganze Einheitssphäre als eine einzige Fläche, so gilt unsere Formel sicher nicht. Die Einheitssphäre ist aber auch nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ , zum Beispiel, da sie kompakt ist. Zerlegen wir die Einheitssphäre in den Äquator und die beiden Hemisphären, so gilt unsere Formel ebensowenig. Der Äquator ist aber auch nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^1$ , zum Beispiel, da er kompakt ist. Zerlegen wir den Äquator in einen Punkt und eine Kante, so gelten unserer Annahmen und unsere Formel. Malen wir noch einen zweiten in derselben Weise zerlegten Äquator daneben, so wird sie wieder falsch. Das liegt daran, daß die „ringförmige Fläche“ zwischen unseren beiden Äquatoren nicht homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^2$ , was hier nicht formal gezeigt werden soll. Verbinden wir aber die beiden ausgewählten Punkte auf unseren beiden Äquatoren noch durch eine Kante, so wird unsere Formel wieder richtig und die Bedingungen des Satzes sind auch wieder erfüllt.



**5.5.6 (Heuristische Begründung der Eulerformel).** Wir gehen aus von der Zerlegung der Einheitssphäre in einen Punkt und sein Komplement. In diesem Fall gilt die Eulerformel. Jetzt argumentieren wir induktiv und gehen von einer Zerlegung der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen aus, in der wir die Eulerformel bereits geprüft haben.

1. Ergänzen wir eine Ecke, indem wir eine bereits existierende Kante in zwei Kanten zerteilen, so entsteht eine neue Zerlegung mit einer zusätzlichen Ecke und einer zusätzlichen Kante.
2. Ergänzen wir eine Kante, indem wir zwei Ecken auf dem Rand einer bereits vorhandenen Fläche innerhalb dieser Fläche durch eine Kante verbinden, so entsteht eine neue Zerlegung mit einer zusätzlichen Kante und einer zusätzlichen Fläche, da ja unsere Fläche von unserer neuen Kante in zwei Teile geschnitten wird.

Induktiv folgt so die Eulerformel für alle Zerlegungen der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen, die wir auf diese Weise induktiv konstruieren können. Die Schwäche der vorhergehenden Argumentation ist zusätzlich zur allgemeinen Unschärfe der darin verwendeten Begriffe, daß nicht klar ist, welche Zerlegungen der Einheitssphäre in Ecken, Kanten und Flächen wir denn mit dem im Beweis beschriebenen Verfahren induktiv erreichen können. Da aber diese Fragen nur mit dem Aufbau eines entsprechend starken Begriffsapparats befriedigend geklärt werden können, will ich sie hier nicht weiter verfolgen.

## 5.6 Bruhatzerlegung\*

**Satz 5.6.1 (Bruhatzerlegung).** *Gegeben ein Krings  $R$  und eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  zerfällt die Gruppe  $GL(n; R)$  unter der beidseitigen Operation der Untergruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen  $B \subset GL(n; R)$  in die disjunkte Vereinigung*

$$GL(n; R) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

*der Doppelnebenklassen der Permutationsmatrizen.*

*Beweis.* Multiplikation mit oberen Dreiecksmatrizen von rechts bedeutet solche Spaltenoperationen, bei denen eine Spalte mit einem invertierbaren Skalar multipliziert oder ein Vielfaches einer Spalte zu einer Spalte weiter rechts addiert wird. Ähnlich bedeutet die Multiplikation mit oberen Dreiecksmatrizen von links solche Zeilenoperationen, bei denen eine Zeile mit einem invertierbaren Skalar multipliziert oder ein Vielfaches einer Zeile zu einer Zeile weiter oben addiert wird. Also besteht für jede Permutationsmatrix  $w$  die Nebenklasse  $Bw$  aus gewissen

„Zahnlückenmatrizen“ und die Nebenklasse  $wB$  aus gewissen „Regaleinräummatrizen“, wie nebenstehendes Bild andeuten mag. Man erkennt so einerseits, daß aus  $Bw \cap vB \neq \emptyset$  folgt  $v(i) \leq w(i)$  für  $1 \leq i \leq n$ , wobei wir unsere Permutationsmatrizen nun als echte Permutationen aufgefaßt haben. Das zeigt  $v = w$  und wir erkennen, daß die Doppelnebenklassen  $BwB$  für  $w \in \mathcal{S}_n$  paarweise disjunkt sind. Andererseits können wir eine beliebige invertierbare Matrix  $g$  durch Davormultiplizieren von  $b \in B$  stets in eine Regaleinräummatrix transformieren: Wir beginnen dazu mit der ersten Spalte, nehmen darin den tiefsten von Null verschiedenen Eintrag, und benutzen Zeilenoperationen „nach oben“, um alle Einträge darüber auch auszuräumen. Dann streichen wir die Zeile dieses Eintrags und machen immer so weiter. Das zeigt, daß die Doppelnebenklassen  $BwB$  auch die ganze Gruppe überdecken.  $\square$

5.6.2. Für die meisten Matrizen  $g$  wird der tiefste von Null verschiedene Eintrag jedesmal in der untersten noch nicht gestrichenen Zeile auftauchen. Dann liegt die Matrix in der Doppelnebenklasse  $Bw_\circ B$  der Permutationsmatrix mit Einsen in der Nebendiagonalen und Nullen sonst. Die zugehörige Permutation  $w_\circ \in \mathcal{S}_n$  ist die Permutation, die „die Reihenfolge umdreht“. Diese Doppelnebenklasse heißt die **dicke Zelle**.

*Ergänzung 5.6.3.* Sei weiter  $w_\circ$  die Permutationsmatrix mit Einsen in der Nebendiagonalen und Nullen sonst, der also die Permutation  $w_\circ \in \mathcal{S}_n$  entspricht, die „die Reihenfolge umdreht“. Dann besteht  $L := w_\circ B w_\circ$  genau aus allen invertierbaren unteren Dreiecksmatrizen. Die mit  $w_\circ$  verschobene dicke Zelle kann also auch beschrieben werden als

$$w_\circ B w_\circ B = LB$$

Bezeichnet  $U := U(n; R)$  die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, so besteht  $L \cap U$  nur aus der Einheitsmatrix und wir haben  $LU = LB$ . Mithin liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$L \times U \xrightarrow{\sim} LB$$

auf die mit  $w_\circ$  verschobene dicke Zelle. In der Numerik nennt man diese Darstellung einer Matrix aus der verschobenen dicken Zelle  $LB$  als Produkt einer unteren mit einer oberen Dreiecksmatrix die **LR-Zerlegung** für „Links-Rechts“ oder **LU-Zerlegung** für „lower-upper“. Allgemeiner zeigt man, daß für eine beliebige Permutation  $w \in \mathcal{S}_n$  die Abbildung  $(a, u) \mapsto awu$  eine Bijektion

$$L \times (U \cap w^{-1}Uw) \xrightarrow{\sim} LwB$$

liefert. Die Surjektivität folgt hierbei in den Notationen von 4.1.12 aus der Erkenntnis, daß das Aufmultiplizieren in einer beliebigen aber festen Reihenfolge eine Bijektion  $\prod_{i < j, w(i) > w(j)} U_{ij} \times (U \cap w^{-1}Uw) \xrightarrow{\sim} U$  liefert und daß gilt  $wU_{ij} = U_{w(i)w(j)}w \in Lw$  für alle Faktoren des großen Produkts.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} * & * & * \\ & & * \\ & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 & & \text{"} \sim \mathcal{B} \\
 \downarrow & & \\
 \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & & * & * \\ * & & * & \\ * & & & \end{pmatrix} & & \text{"} \mathcal{B} \sim
 \end{array}$$

Die Nebenklassen einer Permutationsmatrix unter der Operation der oberen Dreiecksmatrizen. Das Symbol  $*$  steht für einen beliebigen Matrixeintrag, das Symbol  $*$  für einen invertierbaren Matrixeintrag.

### 5.6.1 Übungen

*Übung 5.6.4.* Seien  $R$  ein Ring. Wir betrachten in  $GL(n; R)$  die Untergruppen  $B, U$  und  $U^- := w_0 U w_0$  der oberen Dreiecksmatrizen, oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. Man zeige, daß für jedes  $w \in \mathcal{S}_n$  die Abbildung  $(b, u) \mapsto bwu$  eine Bijektion

$$B \times (U \cap w^{-1}U^-w) \xrightarrow{\sim} BwB$$

induziert. Man zeige: Für je zwei Permutationen  $v, w \in \mathcal{S}_n$  mit  $l(vw) = l(v) + l(w)$  für  $l(\sigma)$  wie in [LA1] 6.1.3 die Zahl der Fehlstände einer Permutation  $\sigma$  liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$BvB \times_B BwB \xrightarrow{\sim} BvwB$$

des balancierten Produkts nach 5.2.6 unserer Doppelnebenklassen mit einer weiteren Doppelnebenklasse. Ist dahingegen  $s \in \mathcal{S}_n$  eine Permutation mit nur einem Fehlstand und  $w \in \mathcal{S}_n$  beliebig und gilt  $l(sw) \leq l(w)$ , so haben wir  $l(sw) = l(w) - 1$  und

$$BsBwB = BswB \sqcup BwB$$

*Übung 5.6.5.* Genau dann besitzt eine invertierbare quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Kring eine LU-Zerlegung, wenn alle Untermatrizen, die durch Streichen von hinteren Spalten und gleichviel unteren Zeilen entstehen, alle auch invertierbar sind.

## 6 Multilineare Algebra

### 6.1 Tensorprodukte

**Satz 6.1.1.** Seien  $r \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $V_1, \dots, V_r$  Vektorräume über einem Körper  $K$ . So gilt:

1. Es gibt ein Paar  $(T, \tau)$  bestehend aus einem  $K$ -Vektorraum  $T$  und einer multilinearen Abbildung  $\tau : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow T$  derart, daß für jeden weiteren  $K$ -Vektorraum  $W$  das Vorschalten von  $\tau$  eine Bijektion

$$(\circ \tau) : \text{Hom}_K(T, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K^{(r)}(V_1 \times \dots \times V_r, W)$$

zwischen der Menge aller linearen Abbildungen  $T \rightarrow W$  und der Menge aller multilinearen Abbildungen  $V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  induziert. Wir nennen solch ein  $\tau : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow T$  eine **universelle multilineare Abbildung**;

2. Gegeben ein weiteres derartiges Paar  $(S, \sigma)$  existiert genau eine lineare Abbildung  $c : T \rightarrow S$  mit  $c \circ \tau = \sigma$  und genau eine lineare Abbildung  $d : S \rightarrow T$  mit  $d \circ \sigma = \tau$  und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen  $T$  und  $S$ .

*Beweis der Eindeutigkeit 6.1.1.2.* Die Existenz und Eindeutigkeit von  $c$  folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von  $(T, \tau)$ . Die Existenz und Eindeutigkeit von  $d$  folgt ebenso aus der universellen Eigenschaft von  $(S, \sigma)$ . Schließlich gilt  $(d \circ c) \circ \tau = \tau = \text{id}_T \circ \tau$  und damit folgt  $d \circ c = \text{id}_T$  wieder nach der universellen Eigenschaft von  $\tau$ . Die Identität  $c \circ d = \text{id}_S$  zeigt man genauso.  $\square$

6.1.2. Unsere Paare sind nach Teil 2 „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie denn existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. Solch ein Paar verdient damit eine eigene Notation und den bestimmten Artikel. Man nennt  $T$  das **Tensorprodukt der  $V_i$**  und notiert es im Fall  $r > 0$  als

$$T := V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

und notiert die universelle multilineare Abbildung  $(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ . Im Fall  $r = 0$  nimmt man meist als  $T = K$  den Grundkörper und wählt als universelle multilineare alias null-lineare alias beliebige Abbildung  $\text{ens} \rightarrow K$  vom leeren Produkt alias der einelementigen Menge nach  $K$  die Abbildung  $* \mapsto 1$ .

*Beweis der Existenz 6.1.1.1.* Um die Existenz in Teil 1 zu zeigen wählen wir Basen  $B_i \subset V_i$  und bemerken, daß die offensichtlichen Abbildungen Bijektionen

$$\text{Hom}_K^{(r)}(V_1 \times \dots \times V_r, W) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(B_1 \times \dots \times B_r, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(K\langle B_1 \times \dots \times B_r \rangle, W)$$

liefern. Wir können also als Tensorprodukt den freien Vektorraum über dem Produkt der Basen  $T := K\langle B_1 \times \dots \times B_r \rangle$  nehmen mit derjenigen multilinearen Abbildung  $\tau$ , die dadurch charakterisiert wird, daß sie Tupel von Basisvektoren  $(b_1, \dots, b_r)$  auf das Element  $\text{can}(b_1, \dots, b_r)$  des freien Vektorraums wirft.  $\square$

**6.1.3 (Basen allgemeiner Tensorprodukte).** Gegeben Vektorräume  $V_1, \dots, V_r$  über einem Körper  $K$  und Basen  $B_i \subset V_i$  bilden die Tensoren  $b_1 \otimes \dots \otimes b_r$  mit  $b_i \in B_i$  eine Basis des Tensorprodukts  $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ . Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Beweis. Speziell folgt  $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$ .

*Zweiter Beweis der Existenz 6.1.1.1.* Ich gebe noch einen alternativen Beweis für die Existenz universeller multilinearer Abbildungen, der ohne den Basisexistenzsatz und damit ohne Auswahlaxiom und Zorn'sches Lemma auskommt und mir natürlicher und im Grunde auch einfacher scheint. Er benötigt jedoch die Konstruktion des Quotientenvektorraums, die wir erst in 4.5.4 kennenlernen. Der Einfachheit halber schreibe ich die Details nur für bilineare Abbildungen aus. Wir beginnen mit dem freien  $K$ -Vektorraum  $K\langle V \times W \rangle$  über der Menge  $V \times W$ . Darin betrachten wir den Untervektorraum  $U \subset K\langle V \times W \rangle$ , der erzeugt wird von allen Ausdrücken

$$\begin{aligned} (v + v', w) - (v, w) - (v', w) \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w') \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{aligned}$$

für  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$  und  $\lambda \in K$ . Schließlich definieren wir  $T$  als den Quotientenvektorraum

$$T := K\langle V \times W \rangle / U$$

und erklären  $\tau : V \times W \rightarrow T$  als die Abbildung, die jedem Paar  $(v, w)$  die Nebenklasse  $\tau(v, w) := \text{can}(v, w) + U$  von  $\text{can}(v, w)$  zuordnet. Die Bilinearität von  $\tau$  folgt dann unmittelbar aus der Definition des herausgeteilten Untervektorraums  $U$ . Um die im Satz behauptete universelle Eigenschaft nachzuweisen, arbeiten wir mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V \times W & \longrightarrow & K\langle V \times W \rangle & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & R & & \end{array}$$

Für jede Abbildung  $b : V \times W \rightarrow R$  gibt es nach der universellen Eigenschaft des freien Vektorraums über einer vorgegebenen Menge genau eine  $K$ -lineare Abbildung  $\tilde{b} : K\langle V \times W \rangle \rightarrow R$  mit  $\tilde{b} \circ \text{can} = b$ . Ist hier  $b$  bilinear, so gilt offensichtlich  $\tilde{b}(U) = 0$ , also gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums genau eine lineare Abbildung  $\hat{b} : T \rightarrow R$  mit  $\hat{b}\tau(v, w) = b(v, w)$ . Diese

Abbildung  $\hat{b}$  ist eindeutig bestimmt durch  $b$ , da die  $\tau(v, w)$  das Tensorprodukt als Vektorraum erzeugen.  $\square$

**6.1.4 (Elemente von Tensorprodukten).** Bereits unsere universellen bilinearen Abbildungen  $V \times W \rightarrow V \otimes W$ ,  $(v, w) \mapsto v \otimes w$ , sind im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv. Genauer sind sie nur injektiv im Fall  $V = W = 0$ , denn es gilt ja stets  $\lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$ . Weiter sind sie nur surjektiv, wenn einer der beiden Räume eine Dimension  $\leq 1$  hat. Im Fall  $V = \mathbb{R}^2$  und  $W = \mathbb{R}^2$  etwa können wir unsere universelle bilineare Abbildung als eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  auffassen, die auf den Teilmengen  $\{(\lambda v, \lambda^{-1} w) \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$  konstant ist, und für eine derartige Abbildung ist hoffentlich zumindest anschaulich klar, daß sie nicht surjektiv sein kann. Formal behandeln Sie das in Übung 6.1.30.

**6.1.5 (Tensorpotenzen).** Gegeben ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  und eine natürliche Zahl  $r \in \mathbb{N}$  vereinbaren wir

$$V^{\otimes r} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r \text{ Faktoren}}$$

und verstehen insbesondere  $V^{\otimes 0} := K$  im Sinne von 6.1.2. Gegeben  $v \in V$  schreiben wir kurz  $v^{\otimes r} := (v \otimes \dots \otimes v)$  für das Bild von  $(v, \dots, v)$  unter der kanonischen multilinearen Abbildung  $V^{\times r} \rightarrow V^{\otimes r}$  und verstehen im Sinne von 6.1.2 insbesondere  $v^{\otimes 0} := 1 \in K$ .

**Beispiel 6.1.6 (Tensorprodukte und physikalische Einheiten).** Wir betrachten den schmutzigen Raum unserer Anschauung als einen dreidimensionalen euklidischen affinen Raum  $\mathbb{E}$ . Dessen schmutzige Längengerade  $\mathbb{L}$  besitzt die beiden Basen Meter m und Kilometer km und es gilt  $\text{km} = 1000 \text{ m}$ . In  $\mathbb{L}^{\otimes 2}$  erhalten wir mithin  $(\text{km})^{\otimes 2} = 10^6 \text{ m}^{\otimes 2}$ . In unserem Formalismus ist also in der Tat und wie es sich gehört ein Quadratkilometer eine Million Quadratmeter. Es ist üblich, in diesem Kontext die Klammern und Tensorzeichen wegzulassen, so daß unsere Identität die möglicherweise besser vertraute Gestalt

$$\text{km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

annimmt. Etwas mathematischer erkennt man für zwei beliebige Vektoren  $v, w$  eines eindimensionalen Vektorraums  $L$  mit  $v = \lambda w$  im Tensorquadrat  $L^{\otimes 2}$  unmittelbar die Identität  $v^{\otimes 2} = \lambda^2(w^{\otimes 2})$ .

**6.1.7 (Notation für lineare Abbildungen aus Tensorprodukten).** Seien  $V, W$  Vektorräume. Die Elemente der Gestalt  $v \otimes w$  erzeugen das Tensorprodukt als Vektorraum und sogar als abelsche Gruppe. Geben wir eine Abbildung von einem Tensorprodukt in einen Vektorraum  $R$  an durch eine Vorschrift der Gestalt  $v \otimes w \mapsto b(v, w)$ , so ist der Leser implizit gefordert, die Bilinearität der Abbildung  $b : V \times W \rightarrow R$  zu prüfen, und gemeint ist dann eigentlich die durch die

universelle Eigenschaft definierte lineare Abbildung  $\hat{b} : V \otimes W \rightarrow R$ . Analoge Vereinbarungen treffen wir für Abbildungen aus Tensorprodukten mit einer beliebigen Zahl von Faktoren.

**Definition 6.1.8.** Sind  $f : V \rightarrow V'$  und  $g : W \rightarrow W'$  lineare Abbildungen, so definieren wir eine lineare Abbildung  $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$  durch die Vorschrift

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$$

in unserer Konvention 6.1.7. Wir nennen  $f \otimes g$  das **Tensorprodukt der Abbildungen  $f$  und  $g$** . Analog erklären wir das Tensorprodukt einer beliebigen endlichen Familie von linearen Abbildungen. Gegeben eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  verwenden wir weiter die Abkürzung  $f^{\otimes r} := (f \otimes \dots \otimes f) : V^{\otimes r} \rightarrow W^{\otimes r}$ .

**Proposition 6.1.9 (Assoziativität von Tensorprodukten).** Sind  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume und  $0 \leq i \leq j \leq \dots \leq k \leq n$  Indizes, so liefert die Abbildungsvorschrift  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto (v_1 \otimes \dots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_j) \otimes \dots \otimes (v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_n)$  einen Isomorphismus

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes \dots \otimes V_i) \otimes (V_{i+1} \otimes \dots \otimes V_j) \otimes \dots \otimes (V_{k+1} \otimes \dots \otimes V_n)$$

6.1.10. Die Abbildungsvorschrift ist hier im Sinne unserer Vereinbarung 6.1.7 zu lesen. Leere Tensoren sind zu verstehen als das ausgezeichnete Element des leeren Tensorprodukts, also die Eins des Grundkörpers. Ich habe statt  $0 = i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r = n$  etwas weniger korrekt  $0 \leq i \leq j \leq \dots \leq k \leq n$  geschrieben, um Subindizes zu vermeiden.

*Beweis.* Wir prüfen leicht, daß unsere Abbildung eine Bijektion zwischen einer Basis des Ausgangsraums und einer Basis des Zielraums induziert.  $\square$

**Proposition 6.1.11 (Kommutativität von Tensorprodukten).** Sind  $V_1, \dots, V_n$  Vektorräume und ist  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  eine Permutation, so liefert die Abbildungsvorschrift  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}$  einen Isomorphismus

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes V_{\sigma(n)}$$

*Beweis.* Wir prüfen leicht, daß unsere Abbildung eine Bijektion zwischen einer Basis des Ausgangsraums und einer Basis des Zielraums induziert.  $\square$

6.1.12 (**Identifikationen zwischen längeren Tensorausdrücken**). Wir sehen mit 6.1.9, daß es bei Tensorprodukten mit mehreren Faktoren „nicht auf eventuelle Klammerung ankommt und Faktoren  $K$  weggelassen werden dürfen“. Präziser formuliert erhalten wir so natürliche Isomorphismen zwischen verschiedenen



Tensorprodukten mit mehreren Faktoren. Unter Verwendung der Vertauschungs-  
isomorphismen 6.1.11 erkennen wir weiter, daß es hier auch auf die Reihenfolge  
der Tensorfaktoren nicht ankommt. Das alles ist in dieser Situation noch derart  
explizit, daß mir eine stärkere Formalisierung unangemessen scheint. Der ent-  
sprechende Formalismus ist der einer „Schmelzkategorie“, der in Ansätzen in 6.2  
und im Vollausbau in [TS] ?? folgende besprochen wird.

**6.1.13 (Negative Tensorpotenzen im eindimensionalen Fall).** Im Fall eines ein-  
dimensionalen Vektorraums  $L$  über einem Körper  $K$  erklären wir die  $r$ -te Ten-  
sorpotez von  $L$  sogar für alle  $r \in \mathbb{Z}$ , indem wir unsere Definition 6.1.5 für  
nichtnegative Tensorpotenzen ergänzen durch die Vorschrift, daß negative Ten-  
sorpotezen zu verstehen sein mögen als die entsprechenden positiven Potenzen  
des Dualraums, in Formeln

$$L^{\otimes r} := (L^\top)^{\otimes(-r)} \quad \text{für } r < 0.$$

Erklären wir dann weiter für jedes  $l \in L \setminus 0$  und  $r < 0$  den Vektor  $l^{\otimes r} \in L^{\otimes r}$   
als  $l^{\otimes r} := (l^\top)^{\otimes r}$  mit  $l^\top \in L^\top$  definiert durch  $l^\top(l) = 1$ , so haben wir  $(\lambda l)^{\otimes r} =$   
 $\lambda^r(l^{\otimes r})$  für alle  $\lambda \in K^\times$  und  $r \in \mathbb{Z}$  und es gibt für beliebige  $r, s \in \mathbb{Z}$  eindeutig  
bestimmte Isomorphismen

$$L^{\otimes r} \otimes L^{\otimes s} \xrightarrow{\sim} L^{\otimes(r+s)}$$

mit der Eigenschaft  $l^{\otimes r} \otimes l^{\otimes s} \mapsto l^{\otimes(r+s)}$  für alle  $l \in L \setminus 0$ . Schließlich gibt es in  
diesem Fall zu jedem Isomorphismus  $f : L \xrightarrow{\sim} M$  für alle  $r \in \mathbb{Z}$  einen ausgezeich-  
neten Isomorphismus  $f^{\otimes r} : L^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} M^{\otimes r}$  mit  $l^{\otimes r} \mapsto f(l)^{\otimes r}$  für alle  $l \in L \setminus 0$ . Es ist  
auch in diesem Zusammenhang üblich, die Abkürzung  $l^r := l^{\otimes r}$  sowie  $L^r := L^{\otimes r}$   
zu verwenden. Insbesondere ist damit  $l^{-1}$  die duale Basis zu  $l$ .

**6.1.14 (Orientierung von Tensorpotenzen).** Gegeben ein orientierter eindimen-  
sionaler Vektorraum  $L$  über einem angeordneten Körper erhält man aus jeder Ori-  
entierung von  $L$  eine Orientierung aller Tensorpotenzen  $L^{\otimes r}$  durch die Vorschrift,  
daß für  $l \in L_{>0}$  ein positiver Vektor auch seine Potenzen  $l^r$  positiv sein sollen.  
Die damit auf den geraden Potenzen  $L^{\otimes 2r}$  gegebene Orientierung hängt dann noch  
nicht einmal von der auf  $L$  gewählten Orientierung ab. Im Fall des Dualraums  $L^{-1}$   
eines eindimensionalen Raums stimmt diese Orientierung mit der in [LA1] 6.5.12  
erklärten Orientierung eines Dualraums überein.

**Beispiel 6.1.15 (Beispiele für Tensorpotenzen).** In der schmutzigen Anschauung  
mag man sich die positiven Elemente einiger Tensorpotenzen der Längengerade  
 $\mathbb{L}$  wie folgt vorstellen: Elemente von  $\mathbb{L}^{\otimes 2}$  als Flächenmaße, Elemente von  $\mathbb{L}^{\otimes 3}$  als  
Volumenmaße, Elemente von  $\mathbb{L}^{\otimes(-1)}$  als „lineare Dichten“ wie etwa die Belegung  
eines Wanderwegs mit Personen pro Länge, Elemente von  $\mathbb{L}^{\otimes(-2)}$  als „Flächen-  
dichten“ wie etwa die Bevölkerungsdichte in Personen pro Fläche, und Elemente

von  $\mathbb{L}^{\otimes(-3)}$  als „Volumendichten“ wie etwa die Dichte eines Gases in Zahl der Moleküle pro Volumen.

**Beispiel 6.1.16.** Wir erinnern den Richtungsraum  $\vec{\mathbb{T}}$  der Zeitachse und seine Basis  $s$  mit dem Namen **Sekunde** ebenso wie seine Basis  $\text{min}$  mit dem Namen **Minute** und seine Basis  $\text{std}$  mit dem Namen **Stunde**. Zwischen diesen Basen besteht die Relation  $\text{min} = 60s$  und  $60\text{min} = \text{std}$ . Den Raum

$$\vec{\mathbb{T}}^\top \otimes \mathbb{L} = \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{-1}$$

oder vielmehr seine nichtnegativen Elemente in Bezug auf die offensichtliche Orientierung nennen wir **absolute Geschwindigkeiten**. Mit der Abkürzung  $\text{m/s} := \text{m} \otimes s^{-1}$  und ihren Analoga gelten in diesem Raum etwa die Identitäten

$$\text{m/s} = 3600\text{m}/3600s = 3,6\text{km/std}$$

**6.1.17 (Matrix des Tensorprodukts linearer Abbildungen).** Gegeben Vektorräume  $V, W$  mit angeordneten Basen  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$  bilden wir in  $V \otimes W$  die angeordnete Basis

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := & (v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, \\ & v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, \dots, v_2 \otimes w_m, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & v_n \otimes w_1, v_n \otimes w_2, \dots, v_n \otimes w_m) \end{aligned}$$

Gegeben zusätzlich weitere Vektorräume  $V', W'$  mit angeordneten Basen  $\mathcal{A}' = (v'_1, \dots, v'_{n'})$  und  $\mathcal{B}' = (w'_1, \dots, w'_{m'})$  und lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow V'$  und  $g : W \rightarrow W'$  können wir die Matrix  ${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$  von  $f \otimes g$  in den Basen  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$  wie folgt durch die Matrizen  $A = {}_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}}$  und  $B = {}_{\mathcal{B}'}[g]_{\mathcal{B}}$  ausdrücken: Haben wir etwa  $A = (a_{ij})$ , so wird

$${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n'1}B & \dots & a_{n'n}B \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite ist die Matrix geblockt geschrieben, es handelt sich ja eigentlich um eine  $(n'm' \times nm)$ -Matrix. Sie heißt auch das **Kronecker-Produkt** der Matrizen  $A$  und  $B$  und wird  $A \otimes B$  notiert, so daß wir unsere Identität oben also auch schreiben können in der Form

$${}_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}[f \otimes g]_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} = {}_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}} \otimes {}_{\mathcal{B}'}[g]_{\mathcal{B}}$$

Um diese Identität zu prüfen beginnen wir mit den Identitäten

$$f(v_i) = \sum_j a_{ji} v'_j \quad \text{und} \quad g(w_k) = \sum_l b_{lk} w'_l$$

und folgern

$$(f \otimes g)(w_i \otimes w_k) = \sum_{j,l} a_{ji} b_{lk} v'_j \otimes w'_l$$

Die Einträge der Matrix von  $f \otimes g$  sind also alle Produkte von einem Eintrag der Matrix von  $f$  mit einem Eintrag der Matrix von  $g$ . Daß diese Einträge dann auch noch an den oben beschriebenen Stellen der Matrix von  $f \otimes g$  stehen, mag sich der Leser am einfachsten selbst überlegen.

**Proposition 6.1.18 (Adjunktion von Tensor und Hom).** *Gegeben Vektorräume  $U, V, W$  erhalten wir durch die Vorschrift  $f \mapsto \tilde{f}$  mit  $\tilde{f}(u \otimes v) = (f(u))(v)$  einen Isomorphismus*

$$\text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(U \otimes V, W)$$

*Vorschau 6.1.19.* Diese Aussage bedeutet in einer Terminologie, die Sie in dieser Vorlesung nicht mehr lernen werden, daß „die Funktoren  $\otimes V$  und  $\text{Hom}(V, \ )$  zueinander adjungiert sind“.

*Beweis.* Beide Seiten sind in offensichtlicher und mit der angegebenen Abbildung verträglicher Weise in Bijektion zur Menge  $\text{Hom}^{(2)}(U \times V, W)$  aller bilinearen Abbildungen  $U \times V \rightarrow W$ .  $\square$

**Satz 6.1.20 (Homomorphismenräume als Tensorprodukt).** *Gegeben ein Körper  $K$  liefert für beliebig vorgegebene  $K$ -Vektorräume  $V, W$  die Abbildungsvorschrift  $f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$  eine Bijektion*

$$\text{can} : V^\top \otimes W \xrightarrow{\sim} \{f \in \text{Hom}(V, W) \mid \text{rg}(f) < \infty\}$$

*zwischen dem Tensorprodukt des Dualraums von  $V$  mit  $W$  und dem Raum aller Homomorphismen endlichen Ranges.*

*Beispiel 6.1.21.* Unsere vektoriellen Geschwindigkeiten aus [LA1] 3.1.12 können wir mithin auch verstehen als Elemente des Tensorprodukts  $\vec{\mathbb{T}}^{-1} \otimes \vec{\mathbb{E}} = \text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$  des Richtungsraums  $\vec{\mathbb{E}}$  unseres Anschauungsraums  $\mathbb{E}$  mit dem Dualraum des Raums der Zeitspannen.

6.1.22. Das Bild der Verknüpfung  $V^\top \times W \rightarrow V^\top \otimes W \hookrightarrow \text{Hom}(V, W)$  besteht genau aus allen Homomorphismen vom Rang Eins oder Null.

6.1.23. Ist  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine Basis von  $V$  und  $v_1^\top, \dots, v_n^\top \in V^\top$  die duale Basis von  $V^\top$ , so können wir im Satz die inverse Abbildung explizit angeben durch die Vorschrift  $f \mapsto v_1^\top \otimes f(v_1) + \dots + v_n^\top \otimes f(v_n)$ . Ist zusätzlich  $w_1, \dots, w_m$  eine Basis von  $W$ , so wird  $v_i^\top \otimes w_j$  abgebildet auf diejenige lineare Abbildung, deren

Matrix in Bezug auf die gegebenen Basen die Basismatrix  $E_{ji}$  aus [LA1] 2.5.3 ist, in Formeln

$${}_{\mathcal{B}}[\text{can}(v_i^\top \otimes w_j)]_{\mathcal{A}} = E_{ji}$$

für  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$  unsere angeordneten Basen von  $V$  und  $W$ . Im Fall endlichdimensionaler Räume kann der Satz also leicht mit Basen überprüft werden. Der Beweis gilt den unendlichdimensionalen Fällen.

*Beweis.* Wir beginnen mit der Injektivität. Jeder Tensor auf der linken Seite kann offensichtlich in der Form  $f_1 \otimes w_1 + \dots + f_r \otimes w_r$  dargestellt werden mit den  $w_i$  linear unabhängig. Geht er nach Null, so folgt  $f_1(v)w_1 + \dots + f_r(v)w_r = 0$  für alle  $v \in V$ . Daraus aber folgt  $f_1(v) = \dots = f_r(v) = 0$  für alle  $v \in V$  und damit  $f_1 = \dots = f_r = 0$  und unser Tensor war schon Null. Das zeigt die Injektivität. Unsere kanonischen Abbildung landet im Unterraum der Homomorphismen endlichen Ranges, da ja das Bild von  $\text{can}(f_1 \otimes w_1 + \dots + f_r \otimes w_r)$  stets im Erzeugnis  $\langle w_1, \dots, w_r \rangle$  der  $w_i$  liegt. Es liegt aber sogar jeder Homomorphismus endlichen Ranges  $\varphi : V \rightarrow W$  im Bild von  $\text{can}$ , denn ist  $w_1, \dots, w_r$  eine Basis von  $\text{im } \varphi$  und setzen wir  $f_i := w_i^\top \circ \varphi$ , so gilt offensichtlich

$$\text{can}(f_1 \otimes w_1 + \dots + f_r \otimes w_r) = \varphi \quad \square$$

**Korollar 6.1.24 (Tensorprodukt und Dualität).** *Gegeben Vektorräume  $V, W$  liefert die Abbildung  $f \otimes g \mapsto (v \otimes w \mapsto f(v)g(w))$  eine Injektion*

$$V^\top \otimes W^\top \hookrightarrow (V \otimes W)^\top$$

*vom Tensorprodukt der Dualräume in den Dualraum des Tensorprodukts. Sie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn einer unserer beiden Räume endlichdimensional ist.*

6.1.25. Im Fall endlichdimensionaler Räume kann das Korollar leicht mit Basen überprüft werden. Der Beweis gilt den unendlichdimensionalen Fällen. Im Fall eines eindimensionalen Raums  $L$  liefert uns die Korollar induktiv natürliche Isomorphismen  $L^{\otimes(-r)} \xrightarrow{\sim} (L^{\otimes r})^\top$ .

*Beweis.* Wir argumentieren mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes W)^\top & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}(V \otimes W, K) \\ & & \uparrow \wr \\ & & \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, K)) \\ & & \parallel \\ V^\top \otimes W^\top & \hookrightarrow & \text{Hom}(V, W^\top) \end{array}$$

Der vertikale Isomorphismus kommt aus 6.1.18, die horizontale Injektion aus 6.1.20. Daß deren Komposition genau die im Korollar beschriebene Abbildung ist, mag der Leser selbst prüfen.  $\square$

## Übungen

**Übung 6.1.26 (Orientierter Flächeninhalt).** Sei  $V$  ein orientierter zweidimensionaler euklidischer Vektorraum mit Längengerade  $\mathbb{L}$ . Man zeige, daß es genau eine alternierende bilineare Abbildung

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

gibt mit  $\omega(v, w) = \|v\| \otimes \|w\|$  wann immer  $v \perp w$  orthogonale Vektoren sind und  $(v, w)$  eine orientierte Basis von  $V$ .

**Übung 6.1.27.** Gegeben Vektorräume  $U, V, W$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U^\top \otimes V \otimes V^\top \otimes W & \hookrightarrow & \text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^\top \otimes W & \hookrightarrow & \text{Hom}(U, W) \end{array}$$

mit den von den kanonischen Injektionen 6.1.20 induzierten Horizontalen, dem Verknüpfen von linearen Abbildungen als rechter Vertikale, und in der linken Vertikalen der Verknüpfung

$$U^\top \otimes V \otimes V^\top \otimes W \rightarrow U^\top \otimes K \otimes W \xrightarrow{\sim} U^\top \otimes W$$

der vom Auswerten  $\text{id} \otimes \text{ev} \otimes \text{id}$  induzierten Abbildung gefolgt vom Isomorphismus  $U^\top \otimes K \otimes W \xrightarrow{\sim} U^\top \otimes W$ ,  $f \otimes \lambda \otimes w \mapsto \lambda(f \otimes w)$ . Die eben erklärte Abbildung in der linken Vertikalen bezeichnet man in dieser und ähnlichen Situationen auch als die **Verjüngung von Tensoren**.

**Übung 6.1.28.** Gegeben Vektorräume  $W, V, V'$  liefert  $w \otimes (v, v') \mapsto (w \otimes v, w \otimes v')$  einen Isomorphismus  $W \otimes (V \oplus V') \xrightarrow{\sim} (W \otimes V) \oplus (W \otimes V')$ . Analoges gilt auch für den ersten Tensorfaktor.

**Übung 6.1.29.** Besitzt ein von Null verschiedenes Element eines Tensorprodukts eine Darstellung der Gestalt  $v \otimes w$ , so sind seine möglichen Darstellungen dieser Gestalt genau alle Ausdrücke  $\lambda v \otimes \lambda^{-1} w$  mit  $\lambda \in K^\times$  einer Einheit des Grundkörpers  $K$ .

**Übung 6.1.30.** Seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Grundkörper. Man zeige, daß die universelle bilineare Abbildung  $V \times W \rightarrow V \otimes W$  genau dann surjektiv ist, wenn einer der beiden beteiligten Räume eine Dimension  $\leq 1$  hat. Hinweis: 6.1.22.

*Übung 6.1.31.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  zeige man, daß die offensichtliche Abbildung einen Vektorraumisomorphismus  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, V)$  induziert. Hier bezeichnet  $\mathcal{C}(X, V)$  den Raum aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $V$ .

*Ergänzende Übung 6.1.32.* Jede exakte Sequenz von Vektorräumen bleibt beim Darantensorieren eines weiteren Vektorraums exakt. Hinweis: 4.7.1, oder alternativ 7.8.11 und 4.6.13.

*Übung 6.1.33.* Gegeben ein Endomorphismus  $f \in \text{End } V$  eines Vektorraums mit  $f \otimes f = \text{id}$  in  $\text{End}(V \otimes V)$  gilt  $f = \pm \text{id}$ .

*Ergänzende Übung 6.1.34.* Gegeben ein Körper  $K$  und  $K$ -Vektorräume  $V, W$  und Endomorphismen endlichen Ranges  $f \in \text{End } V$  und  $g \in \text{End } W$  hat auch  $f \otimes g \in \text{End}(V \otimes W)$  endlichen Rang und es gilt

$$\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f) \text{tr}(g)$$

*Ergänzende Übung 6.1.35.* Hinweis: [LA1] 6.4.15. Gegeben ein Körper  $K$  und endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume  $V, W$  der Dimensionen  $n, m$  und Endomorphismen  $f \in \text{End } V$  und  $g \in \text{End } W$  gilt

$$\det(f \otimes g) = (\det(f))^m (\det(g))^n$$

*Ergänzende Übung 6.1.36 (Tensorprodukt und Orientierung).* Seien  $V$  ein Vektorraum und  $L$  ein eindimensionaler Vektorraum über demselben angeordneten Körper. Gegeben eine Orientierung  $\varepsilon$  von  $V$  und eine Orientierung  $\eta$  von  $L$  gibt es genau eine Orientierung  $\varepsilon \otimes \eta$  von  $V \otimes L$  mit

$$(\varepsilon \otimes \eta)(v_1 \otimes l, \dots, v_n \otimes l) = \varepsilon(v_1, \dots, v_n) \eta(l)^n$$

für jede angeordnete Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  und jede angeordnete Basis alias jeden von Null verschiedenen Vektor  $l \in L$ .

*Übung 6.1.37 (Evaluationspaarung im Tensorkalkül).* Für jeden Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  definiert das Auswerten oder lateinisierend „Evaluieren“ eine bilineare Abbildung, die **Evaluationspaarung**  $\text{ev} : V^\top \times V \rightarrow K$ ,  $(\xi, v) \mapsto \xi(v)$ . Man zeige, daß sie unter dem Isomorphismus aus 6.1.18 einerseits der Identität auf  $V^\top$  entspricht und andererseits, wenn wir die Faktoren vertauschen, der Evaluation  $\text{ev} : V \rightarrow V^{\top\top}$  aus [LA1] 2.9.22.

*Ergänzende Übung 6.1.38.* Gegeben ein Körper  $K$  induziert die Multiplikation einen Isomorphismus  $K[X] \otimes_K K[Y] \xrightarrow{\sim} K[X, Y]$  zwischen dem Tensorprodukt zweier Polynomringe in einer Variablen und dem Polynomring in zwei Variablen.

*Ergänzende Übung 6.1.39.* Die Multiplikation induziert einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[X]$ . Analoges gilt, wenn man  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$  ersetzt durch ein beliebiges Paar  $K \supset k$  bestehend aus einem Körper mit einem Teilkörper.

*Ergänzende Übung 6.1.40.* Gegeben Vektorräume  $V, W$  über einem Körper  $K$  und ein Untermonoid  $G \subset \text{End}(W)$  ist die offensichtliche lineare Abbildung ein Isomorphismus  $V \otimes (W^G) \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^G$ . Der obere Index  $G$  steht hier für den Teilraum der  $G$ -Invarianten.

*Ergänzende Übung 6.1.41.* Gegeben Körper  $k \subset K$  und ein  $k$ -Vektorraum  $V$  wird  $V_K = K \otimes_k V$  in offensichtlicher Weise ein  $K$ -Vektorraum. Man sagt, er entstehe aus  $V$  durch **Erweiterung der Skalare**. Die „kanonische“  $k$ -lineare Abbildung  $\text{can} : V \rightarrow V_K, v \mapsto 1 \otimes v$  hat dann die universelle Eigenschaft, daß für jeden  $K$ -Vektorraum  $W$  das Vorschalten von  $\text{can} : V \rightarrow V_K$  eine Bijektion

$$\text{Hom}_K(V_K, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(V, W)$$

liefert. Weiter ist das Bild unter  $\text{can}$  jeder  $k$ -Basis von  $V$  eine  $K$ -Basis von  $V_K$ , und gegeben ein weiterer  $k$ -Vektorraum  $W$  induziert die  $k$ -lineare Abbildung  $V \otimes_k W \rightarrow V_K \otimes_K W_K, v \otimes w \mapsto \text{can}(v) \otimes \text{can}(w)$  einen Isomorphismus

$$(V \otimes_k W)_K \xrightarrow{\sim} V_K \otimes_K W_K$$

Ist  $V$  oder  $K$  endlichdimensional über  $k$ , so liefert auch die  $k$ -lineare Abbildung  $\text{Hom}_k(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V_K, W_K)$  gegeben durch  $f \mapsto \text{id} \otimes f$  einen Isomorphismus

$$(\text{Hom}_k(V, W))_K \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(V_K, W_K)$$

und insbesondere „vertauscht das Erweitern der Skalare mit dem Bilden des Dualraums“ sowohl unter der Annahme  $\dim_k K < \infty$  als auch unter der Annahme  $\dim_k V < \infty$ . In voller Allgemeinheit vertauschen diese Operationen jedoch nicht. Im Spezialfall  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  bezeichnet man  $V_{\mathbb{C}}$  als **Komplexifizierung** von  $V$ .

*Ergänzende Übung 6.1.42.* Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus endlichen Ranges und  $k \subset K$  eine Körpererweiterung, so gilt  $\text{tr}_k(f|V) = \text{tr}_K(\text{id} \otimes f|V_K)$ .

*Ergänzung 6.1.43.* Ein alternativer vom Tensorprodukt unabhängiger Zugang zur Komplexifizierung wird in [ML] 2.2.13 erklärt. Etwas allgemeiner können wir, nun wieder mit unserem Tensorprodukt, für jeden Körperhomomorphismus  $\varphi : k \hookrightarrow K$  zu einem  $k$ -Vektorraum  $V$  den  $k$ -Vektorraum  $K \otimes_k^{\varphi} V$  erklären. Ist speziell  $\varphi$  die komplexe Konjugation  $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , so erhalten wir einen Isomorphismus  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}}^c V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$  mit unserem komplex konjugierten Vektorraum  $\bar{V}$  aus 1.12.33 mittels der Abbildungsvorschrift  $1 \otimes v \mapsto \bar{v}$ .

*Ergänzende Übung 6.1.44.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  und eine Teilmenge  $T \subset V$  setzen wir  $T^\perp = \{f \in V^\top \mid f(t) = 0 \quad \forall t \in T\}$ . Ist  $V$  endlichdimensional und  $W \subset V$  ein Teilraum, so zeige man, daß unter der Identifikation  $\text{End } V \xrightarrow{\sim} V \otimes V^\top$  die Identität  $\text{id}_V$  stets im Teilraum  $W \otimes V^\top + V \otimes W^\perp$  landet.

*Ergänzende Übung 6.1.45.* Gegeben ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum  $V$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^\top & \in & V \otimes V^\top & \xrightarrow{\text{ev}} & K \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \parallel \\ \text{id} & \in & \text{End } V & \xrightarrow{\text{tr}} & K \end{array}$$

Hier meint  $v_1, \dots, v_n$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $v_1^\top, \dots, v_n^\top$  die duale Basis von  $V^\top$  und die mittlere Vertikale die in 6.1.20 erklärte Injektion und  $\text{ev}$  das Auswerten im Sinne von 6.1.37. Die lineare Abbildung  $K \rightarrow V \otimes V^\top$  mit  $1 \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^\top$  nennen wir auch die **Expansion der Identität** und notieren sie

$$\text{ex} : K \rightarrow V \otimes V^\top$$

Hat  $V$  unendliche Dimension, so kommutiert das rechte Quadrat immer noch, wenn wir unten links nur Endomorphismen endlichen Ranges betrachten und ihre Spur wie in [LA1] 2.6.19 nehmen. Allerdings sind dann unser Tensorausdruck und unsere Expansion der Identität nicht mehr sinnvoll definiert und die Identität gehört auch nicht mehr zu den Endomorphismen endlichen Ranges.

*Ergänzende Übung 6.1.46.* Gegeben Mengen  $X, Y$  und ein beliebiger Körper  $K$  liefert die offensichtliche Abbildung  $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$  gegeben durch die Vorschrift  $(f \boxtimes g)(x, y) := f(x)g(y)$  eine Injektion

$$\text{Ens}(X, K) \otimes \text{Ens}(Y, K) \hookrightarrow \text{Ens}(X \times Y, K)$$

Man mag sich dazu auf 6.1.24 stützen. Alternativ mag man auch unabhängig zeigen, daß für  $g_1, \dots, g_n \in \text{Ens}(Y, K)$  linear unabhängig und  $f_1, \dots, f_n \in \text{Ens}(X, K)$  beliebig aus  $\sum f_i(x)g_i(y) = 0$  für alle  $x, y$  bereits folgt, daß alle  $f_i$  die Nullfunktion sein müssen. Betrachtet man hier statt einem Körper  $K$  einen Kring, so ist die analoge Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig, vergleiche [TS] ??.

*Ergänzende Übung 6.1.47.* Gegeben Vektorräume  $V, V', W, W'$  liefert das Tensorieren von Abbildungen eine Injektion

$$\text{Hom}(V, V') \otimes \text{Hom}(W, W') \hookrightarrow \text{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W')$$

Hinweis: Man mag  $V$  und  $W$  als direkte Summe eindimensionaler Räume schreiben und 7.8.12 anwenden. Alternative: Man mag ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Vektorräume frei sind über den Mengen  $X, X'$ ,



$Y, Y'$ , und kann dann unter Verwendung von 6.1.46 beide Seiten in verträglicher Weise einbetten in den Raum  $\text{Ens}(X \times X' \times Y \times Y', K)$  aller Abbildungen von besagtem Produkt in den Grundkörper  $K$ .

*Übung 6.1.48.* Bezeichne  $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  die Vertauschung der Tensorfaktoren. Man zeige, daß in Charakteristik Zwei der Teilraum der  $\tau$ -Invarianten erzeugt wird von allen  $(v \otimes w + w \otimes v)$  zusammen mit allen  $(v \otimes v)$ . Man zeige, daß in anderer Charakteristik Erstere ausreichen.

*Übung 6.1.49.* Bezeichne  $\sigma : V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V$  die zyklische Vertauschung der Tensorfaktoren. Man zeige, daß in Charakteristik Drei der Teilraum der  $\sigma$ -Invarianten erzeugt wird von allen  $(u \otimes v \otimes w + v \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes v)$  zusammen mit allen  $(v \otimes v \otimes v)$ . Man zeige, daß in anderer Charakteristik Erstere ausreichen.

## 6.2 Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen\*

*Beispiel 6.2.1.* Gegeben Vektorräume  $U', U'', U, V, W$  und eine bilineare Abbildung  $f : U \times V \rightarrow W$  sowie eine bilineare Abbildung  $g : U' \times U'' \rightarrow U$  erhalten wir offensichtlich eine trilineare Abbildung

$$U' \times U'' \times V \rightarrow W$$

durch die Vorschrift  $(u', u'', v) \mapsto f(g(u', u''), v)$ . Gegeben zusätzlich ein ausgezeichneter Vektor  $v \in V$  erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$U' \times U'' \rightarrow W$$

durch die Vorschrift  $(u', u'') \mapsto f(g(u', u''), v)$ . Diese Konstruktionen sind beide Spezialfälle für die „Multiverknüpfung“ multilinearer Abbildungen, die wir im folgenden besprechen.

**6.2.2 (Notation für multilineare Abbildungen).** Seien  $K$  ein Körper,  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $V_1, \dots, V_n, W$  Vektorräume über  $K$ . Wir verwenden im folgenden für Mengen von multilinearen Abbildungen die alternative Notation

$$\text{Mod}_K(V_1 \curlyvee \dots \curlyvee V_n, W) := \text{Hom}_K^{(n)}(V_1 \times \dots \times V_n, W)$$

Da durch die Verwendung des Symbols  $\curlyvee$  als Trenner keine Verwechslungsgefahr mit linearen Abbildungen aus dem Produktvektorraum besteht, können wir den oberen Index  $(n)$  auf der linken Seite weglassen. Im Fall  $n = 0$  notieren wir diese Menge  $\text{Mod}_K(\curlyvee, W)$ . Das Kürzel  $\text{Mod}_K$  steht für „ $K$ -Modul“, ein Synonym für „ $K$ -Vektorraum“.

**6.2.3 (Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen).** Seien  $K$  ein Körper und  $n, m \geq 0$  und  $U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_n, W$  Vektorräume über  $K$ . Seien  $f$  eine multilineare Abbildung

$$f \in \text{Mod}_K(V_1 \curlyvee \dots \curlyvee V_n, W)$$

und  $\varphi : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine Abbildung und

$$g_i \in \text{Mod}_K(U_{\varphi^{-1}(i)}, V_i)$$

multilineare Abbildungen von der auf die Faser  $\varphi^{-1}(i)$  eingeschränkte Familie mit der induzierten Anordnung. Ausgeschrieben meinen wir also

$$g_i \in \text{Mod}_K(U_{\nu(1)} \curlyvee \dots \curlyvee U_{\nu(r)}, V_i)$$

für  $\nu(1) < \dots < \nu(r)$  die der Größe nach geordneten Elemente der Faser  $\varphi^{-1}(i)$ . So erklären wir in der hoffentlich offensichtlichen Weise die **Multiverknüpfung** unserer multilinearen Abbildungen, eine multilineare Abbildung

$$f \circ (\varphi, g_1 \curlyvee \dots \curlyvee g_n) \in \text{Mod}_K(U_1 \curlyvee \dots \curlyvee U_m, W)$$

Die Symbole  $\curlyvee$  sind dabei auch links nur als Trenner zu verstehen, die andeuten, daß wir mit Multiverknüpfungen arbeiten. Ist  $\varphi$  monoton wachsend und surjektiv, so lassen wir es gerne aus der Notation weg. Unsere trilineare Abbildung aus obigen Beispiel hieße dann  $f \circ (g \curlyvee \text{id}_V)$  und unsere letzte bilineare Abbildung wäre die Multiverknüpfung  $f \circ (g \curlyvee v)$  für  $v \in \text{Mult}_K(\curlyvee, V)$  das Bild von  $v$  unter der kanonischen Bijektion  $V \xrightarrow{\sim} \text{Mult}_K(\curlyvee, V)$ . Die Multiverknüpfung multilinearer Abbildungen ist „assoziativ“ in einer hoffentlich offensichtlichen Weise, die ich an dieser Stelle nicht weiter formalisieren will.

**6.2.4 (Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen).** Sei  $K$  ein Körper. Viele unserer Regeln für das Rechnen mit Tensorprodukten lassen sich zusammenfassen als einfache Konsequenzen der Tatsache, daß jede Multiverknüpfung universeller multilinearer Abbildungen wieder universell ist. Sind also in der obigen Notation  $f$  und alle  $g_i$  universell, so auch  $f \circ (\varphi, g_1 \curlyvee \dots \curlyvee g_n)$ . Zum Beispiel ist die Identität  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  universell 1-linear und der Morphismus  $1 : * \rightarrow K$  universell 0-linear und  $\tau : V \times K \rightarrow V \otimes K$  universell bilinear. Es folgt, daß auch  $\tau \circ (\text{id}_V \curlyvee 1)$  universell 1-linear alias ein Isomorphismus ist, als da heißt, die Abbildung  $V \rightarrow V \otimes K$  gegeben durch  $v \mapsto v \otimes 1$  ist ein Isomorphismus. Das zeigt dann auch, daß das Vorschalten der 0-linearen Abbildung  $* \rightarrow K$  für jeden Vektorraum  $W$  eine Bijektion  $\text{Mod}_K(V \curlyvee K, W) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_K(V, W)$  liefert. Einen für diese und ähnliche Situationen maßgeschneiderten formalen Rahmen bilden die „Schmelzkategorien“, die in [TS] ?? eingeführt werden.

## 6.3 Bezug zur physikalischen Terminologie\*

**6.3.1 (Diskussion der Notation).** Im folgenden verwende ich die in der Physik übliche Notation mit oberen und unteren Indizes und der Konvention, daß üblicherweise die Summationsindizes einmal oben und einmal unten auftreten.

**6.3.2 (Kontravariante Tensoren erster Stufe sind Vektoren).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Unter einem **kontravarianten physikalischen Tensor erster Stufe zu  $V$**  verstehen wir eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  von  $V$  ein Zahlentupel  $(T(\mathcal{B})^k)_{k=1}^n$  so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{A})^i = \sum_k T(\mathcal{B})^k A_k^i \quad \text{alias} \quad T(\mathcal{B})^k = \sum_i T(\mathcal{A})^i (A^{-1})_i^k$$

mit den Einträgen der inversen Matrix rechts. Für jeden Vektor  $\vec{u}$  erhalten wir einen derartigen kontravarianten Tensor erster Stufe  $T = T_{\vec{u}}$  durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel  $(T(\mathcal{B})^k)$  zuordnet werden möge, das gegeben wird durch  $\vec{u} = \sum T(\mathcal{B})^k \vec{w}_k$ . In der Tat gilt dann

$$\vec{u} = \sum_k T(\mathcal{B})^k \vec{w}_k = \sum_{k,i} T(\mathcal{B})^k A_k^i \vec{v}_i = \sum_i T(\mathcal{A})^i \vec{v}_i$$

und somit  $T(\mathcal{A})^i = \sum_k T(\mathcal{B})^k A_k^i$ . Unsere Abbildung  $\vec{u} \mapsto T_{\vec{u}}$  liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen der Menge  $V$  und der Menge aller kontravarianten Tensoren erster Stufe zu  $V$ .

**6.3.3 (Kovariante Tensoren erster Stufe sind Kovektoren).** Seien  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Ein **kovarianter physikalischer Tensor erster Stufe zu  $V$**  ist eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  von  $V$  ein Zahlentupel  $(T(\mathcal{B})_k)_{k=1}^n$  so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{B})_k = \sum_i A_k^i T(\mathcal{A})_i$$

Für jede Linearform  $\lambda : V \rightarrow K$  alias jedes Element des Dualraums  $\lambda \in V^\top$  erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor erster Stufe  $T = T_\lambda$  durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel  $(T(\mathcal{B})_k)$  zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Koeffizienten der Darstellung von  $\lambda$  in der dualen Basis, in Formeln  $\lambda = \sum_k T(\mathcal{B})_k \vec{w}_k^\top$ . In der Tat gilt dann

$$T(\mathcal{B})_k = \lambda(\vec{w}_k) = \sum_i A_k^i \lambda(\vec{v}_i) = \sum_i A_k^i T(\mathcal{A})_i$$

Unsere Abbildung  $\lambda \mapsto T_\lambda$  liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Dualraum  $V^\top$  und der Menge aller kovarianten Tensoren erster Stufe zu  $V$ .

**6.3.4 (Kovariante Tensoren zweiter Stufe sind Bilinearformen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ . Ein **kovarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe zu  $V$**  ist eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  von  $V$  ein Zahlentupel  $(T(\mathcal{B})_{kl})_{k,l=1}^n$  so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{B})_{kl} = \sum_{i,j} A_l^j A_k^i T(\mathcal{A})_{ij}$$

Für jede bilineare Abbildung  $b : V \times V \rightarrow K$  erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor zweiter Stufe  $T = T_b$  durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel  $(T(\mathcal{B})_{kl})$  zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift  $T(\mathcal{B})_{kl} := b(\vec{w}_k, \vec{w}_l)$ . In der Tat gilt dann

$$T(\mathcal{B})_{kl} = b(\vec{w}_k, \vec{w}_l) = \sum_{i,j} A_k^i A_l^j b(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sum_{i,j} A_k^i A_l^j T(\mathcal{A})_{ij}$$

Unsere Abbildung  $b \mapsto T_b$  liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Raum  $\text{Hom}_K^{(2)}(V \times V, K)$  von bilinearen Abbildungen und der Menge aller kovarianten Tensoren zweiter Stufe zu  $V$ .

**6.3.5 (Kontravariante Tensoren zweiter Stufe sind duale Bilinearformen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ . Ein **kontravarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe** ist eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  von  $V$  ein Zahlentupel  $(T(\mathcal{B})^{kl})_{k,l=1}^n$  so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{A})^{ij} = \sum_{k,l} A_k^i A_l^j T(\mathcal{B})^{kl} \quad \text{alias} \quad T(\mathcal{B})^{kl} = \sum_{i,j} (A^{-1})_i^k (A^{-1})_j^l T(\mathcal{A})^{ij}$$

Für jede bilineare Abbildung  $\beta : V^\top \times V^\top \rightarrow K$  erhalten wir einen derartigen kovarianten Tensor zweiter Stufe  $T = T_\beta$  durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel  $(T(\mathcal{B})^{kl})$  zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift  $T(\mathcal{B})^{kl} := \beta(\vec{w}_k^\top, \vec{w}_l^\top)$ . In der Tat folgt aus  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  bereits  $\vec{v}_i^\top(\vec{w}_k) = A_k^i$  alias  $\vec{v}_i^\top = \sum_k A_k^i \vec{w}_k^\top$  und somit

$$T(\mathcal{A})^{ij} = \beta(\vec{v}_i^\top, \vec{v}_j^\top) = \sum_{k,l} A_k^i A_l^j \beta(\vec{w}_k^\top, \vec{w}_l^\top) = \sum_{k,l} A_k^i A_l^j T(\mathcal{B})^{kl}$$

Unsere Abbildung  $b \mapsto T_\beta$  liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen dem Raum  $\text{Hom}_K^{(2)}(V^\top \times V^\top, K)$  von bilinearen Abbildungen und der Menge aller kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu  $V$ . Zusammen mit 6.1.24 erhalten wir dann auch eine Bijektion zwischen  $V \otimes V$  und der Menge aller kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu  $V$ .

**6.3.6 (Ko-kontravariante Tensoren zweiter Stufe sind Endomorphismen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Ein **ko-kontravarianter physikalischer Tensor zweiter Stufe zu  $V$**  ist eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  ein Zahlentupel  $(T(\mathcal{B})_k^l)_{k,l=1}^n$  so zuordnet, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{B})_k^l = \sum_{i,j} (A^{-1})_j^l A_k^i T(\mathcal{A})_i^j$$

Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  erhalten wir einen derartigen ko-kontravarianten Tensor zweiter Stufe  $T = T_f$  durch die Vorschrift, daß jeder angeordneten Basis dasjenige Tupel  $(T(\mathcal{B})_k^l)$  zuordnet werden möge, das gegeben wird durch die Vorschrift  $f(\vec{w}_k) = \sum_l T(\mathcal{B})_k^l \vec{w}_l$ . In der Tat gilt dann

$$\sum_l T(\mathcal{B})_k^l \vec{w}_l = f(\vec{w}_k) = \sum_i A_k^i f(\vec{v}_i) = \sum_{i,j} A_k^i T(\mathcal{A})_i^j \vec{v}_j = \sum_{i,j,l} A_k^i T(\mathcal{A})_i^j (A^{-1})_j^l \vec{w}_l$$

Unsere Abbildung  $f \mapsto T_f$  liefert sogar, wie man leicht prüft, eine Bijektion zwischen der Menge  $\text{End}_K(V)$  aller Endomorphismen von  $V$  und der Menge aller ko-kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu  $V$ .

**6.3.7 (Allgemeine physikalische Tensoren als multilineare Abbildungen).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Gegeben  $r, s \geq 0$  definiert man einen  **$r$ -ko- $s$ -kontravarianten physikalischen Tensor zu  $V$**  als eine Vorschrift  $T$ , die jeder angeordneten Basis  $\mathcal{B} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  ein von  $r$  unteren und  $s$  oberen Indizes aus  $1, \dots, n$  abhängendes Zahlentupel so zuordnet, daß die Tupel zu verschiedenen angeordneten Basen in einer Weise zusammenhängen, die ich hier nur noch im Fall  $r = 2$  und  $s = 1$  ausführe: In diesem Fall fordert man, daß für jede weitere angeordnete Basis  $\mathcal{A} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  von  $V$  mit den Einträgen  $A_k^i$  der Basiswechselmatrix gegeben durch  $\vec{w}_k = \sum_i A_k^i \vec{v}_i$  gilt

$$T(\mathcal{B})_{kl}^m = \sum_{i,j,p} (A^{-1})_p^m A_k^i A_l^j T(\mathcal{A})_{ij}^p$$

Wie zuvor kann man jeder multilinearen Abbildung  $u : V^r \times (V^\top)^s \rightarrow K$  einen  $r$ -ko- $s$ -kontravarianten Tensor  $T_u$  zuordnen, der in unserem Spezialfall  $(r, s) =$

$(2, 1)$  gegeben wird durch  $T_u(\mathcal{B})_{kl}^m = u(\vec{w}_k, \vec{w}_l, \vec{w}_m^\top)$ , und wieder erhalten wir so eine Bijektion zwischen der Menge  $\text{Hom}_K^{(r+s)}(V^r \times (V^\top)^s, K)$  von multilinearen Abbildungen und der Menge aller  $r$ -ko- $s$ -kontravarianten Tensoren zweiter Stufe zu  $V$ . Alternativ erhalten wir mit unserem Satz 6.1.24 auch zu jedem Element von  $t \in (V^\top)^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}$  einen  $r$ -ko- $s$ -kontravarianten Tensor  $T_t$ , der in unserem Spezialfall  $(r, s) = (2, 1)$  gegeben wird durch

$$t = \sum_{m,k,l} T_t(\mathcal{B})_{kl}^m \vec{w}_k^\top \otimes \vec{w}_l^\top \otimes \vec{w}_m$$

Auch diese Zuordnung ist bijektiv und erklärt den Zusammenhang der beiden Tensorbegriffe.

## 6.4 Geometrie in euklidischen Vektorräumen

6.4.1. Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  über einem angeordneten Körper  $K$  erinnern wir seine zweielementige Orientierungsmenge  $\text{or}(V)$  aus [LA1] 6.5.3 und erklären seine **Orientierungsgerade** als den eindimensionalen Vektorraum

$$\text{or}_K(V) := \{a : \text{or}(V) \rightarrow K \mid \text{Die Summe der beiden Werte von } a \text{ ist Null}\}$$

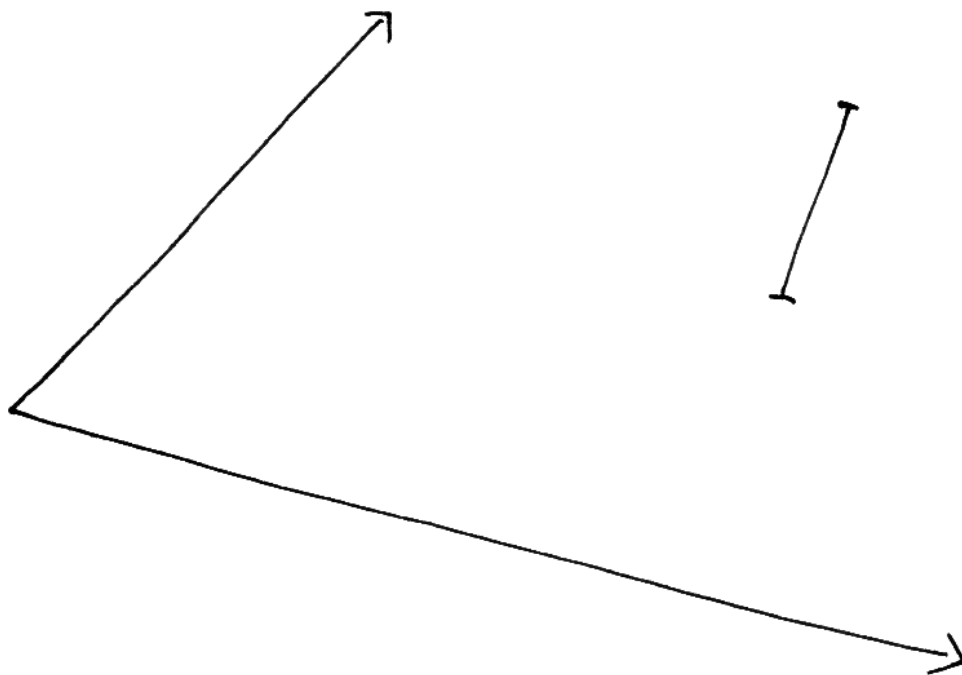
Wir erhalten eine Injektion  $\text{or}(V) \hookrightarrow \text{or}_K(V)$ , indem wir jeder Orientierung  $\varepsilon \in \text{or}(V)$  diejenige Funktion  $a \in \text{or}_K(V)$  mit  $f(\varepsilon) = 1$  zuordnen. Besagte Injektion behandeln wir von nun an in der Notation wie die Einbettung einer Teilmenge. Für jeden Vektorraumisomorphismus  $f : V \xrightarrow{\sim} W$  läßt sich unsere Bijektion  $\text{or}(f)$  zwischen den Orientierungsmengen auf genau eine Weise zu einem Isomorphismus  $\text{or}_K(f) : \text{or}_K(V) \xrightarrow{\sim} \text{or}_K(W)$  ihrer Orientierungsgeraden ausdehnen.

6.4.2. Ich erinnere an den Begriff 1.5.11 eines euklidischen Vektorraums  $V$  mit seiner Längengerade  $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ .

6.4.3. Für jeden euklidischen Vektorraum  $V$  einer endlichen Dimension  $n$  gibt es genau eine alternierende multilineare Abbildung, die **kanonische Volumenform**

$$\omega : V^{\otimes n} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$$

mit  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varepsilon \otimes \|v_1\| \otimes \dots \otimes \|v_n\|$  für eine und jede angeordnete Basis  $v_1, \dots, v_n$  der Orientierung  $\varepsilon$  aus paarweise orthogonalen Vektoren. In der Tat hat jede orthogonale Matrix die Determinante  $\pm 1$  und das zeigt, daß eine alternierende Abbildung, die diese Eigenschaft für eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren hat, sie für jede solche Basis haben muß. Den Fall  $n = 2$  haben Sie im



Das folgende ist eine nicht ganz mathematische Übung: Man schätze ab, ob das durch die eingezeichnete Längeneinheit und die anschauliche Kongruenzgruppe gegebene Skalarprodukt der beiden hier gezeichneten Vektoren größer ist als Zehn. Man verwende dabei nur ein Papier mit einer geraden Kante, das man kniffen darf, um einen rechten Winkel zu erzeugen, einen Bleistift zum Abtragen von Längen, und Augenmaß. Man beachte, wie hierbei die Kongruenzgruppe zu Anwendung kommt.

orientierten Fall bereits in Übung 6.1.26 diskutiert. Im Fall  $n = 3$  notieren wir unsere Abbildung

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle u, v, w \rangle$$

und nennen sie das **kanonische Spatprodukt**. Für jeden euklidischen Homomorphismus  $f : V \rightarrow W$  von euklidischen Vektorräumen derselben Dimension  $n$  kommutiert weiter das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} & \xrightarrow{\quad} & \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n} \\ f^{\otimes n} \downarrow & & \downarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(f) \otimes \mathbb{L}(f)^{\otimes n} \\ W^{\otimes n} & \xrightarrow{\quad} & \text{or}_{\mathbb{R}}(W) \otimes \mathbb{L}(W)^{\otimes n} \end{array}$$

Diese Erkenntnis bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion zum Ausdruck. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 7.4.8.

6.4.4. Das Tensorquadrat der Längengerade eines euklidischen Vektorraums nennen wir seine **Gerade von Flächeneinheiten** oder kurz seine **Flächengerade**.

**Vorschau 6.4.5 (Flächen- und Volumenmaße).** Gegeben ein euklidischer Raum  $E$  endlicher Dimension  $n$  mit Längengerade  $\mathbb{L}$  ordnen wir in [AN2] 4.3.10 jeder kompakten  $k$ -Fastfaltung  $M \subset E$  ein Volumen  $\int_M 1 \in \mathbb{L}^{\otimes k}$  so zu, daß für beliebige paarweise orthogonale von Null verschiedene Richtungsvektoren  $v_1, \dots, v_k \in \vec{E}$  und jeden Punkt  $p \in E$  der kompakten  $k$ -Fastfaltung  $M := p + [0, 1]v_1 + \dots + [0, 1]v_k$  das Volumen  $\int_M 1 = \|v_1\| \otimes \dots \otimes \|v_k\| \in \mathbb{L}^{\otimes k}$  zugeordnet wird und im Fall  $\dim E = 3$  der Sphäre  $S := \{q \in E \mid \|q - p\| = l\}$  mit Zentrum  $p \in E$  und Radius  $l \in \mathbb{L}$  die Fläche  $\int_S 1 = 4\pi l^{\otimes 2}$ . Auch in der Mathematik werden also salopp gesprochen „Flächen in Quadratmetern gemessen“.

6.4.6. Für jeden euklidischen Vektorraum  $V$  erklären wir sein **kanonisches Skalarprodukt** als die eindeutig bestimmte symmetrische bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

in seine Flächengerade derart, daß für jeden Vektor  $v \in V$  gilt  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ . Es kann beschrieben werden durch die Polarisierungsidentität  $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$  oder auch durch die Formel

$$\langle ae_1 + \dots + ce_n, xe_1 + \dots + ze_n \rangle = (ax + \dots + cz)l^2$$

für beliebige paarweise orthogonale Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  derselben Länge  $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = l \in \mathbb{L}$ . Für jeden euklidischen Homomorphismus  $f : V \rightarrow W$  von



euklidischen Vektorräumen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_V} & \mathbb{L}(V)^{\otimes 2} \\ f \times f \downarrow & & \downarrow \mathbb{L}(f)^{\otimes 2} \\ W \times W & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_W} & \mathbb{L}(W)^{\otimes 2} \end{array}$$

Es bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion zum Ausdruck. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 7.4.8.

**6.4.7 (Pythagoras).** In einem euklidischen Vektorraum sind zwei Vektoren  $v, w$  genau dann orthogonal, wenn in der zugehörigen Flächengerade  $\mathbb{L}^{\otimes 2}$  gilt

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$$

In der Tat folgt das unmittelbar aus der entsprechenden Aussage für Skalarprodukträume. Insbesondere gilt es für den Richtungsraum einer Kongruenzebene. In meinen Augen ist diese Aussage eine besonders befriedigende Formalisierung der geometrischen Erkenntnis, die man auf der Schule als „Satz des Pythagoras“ kennenlernt.

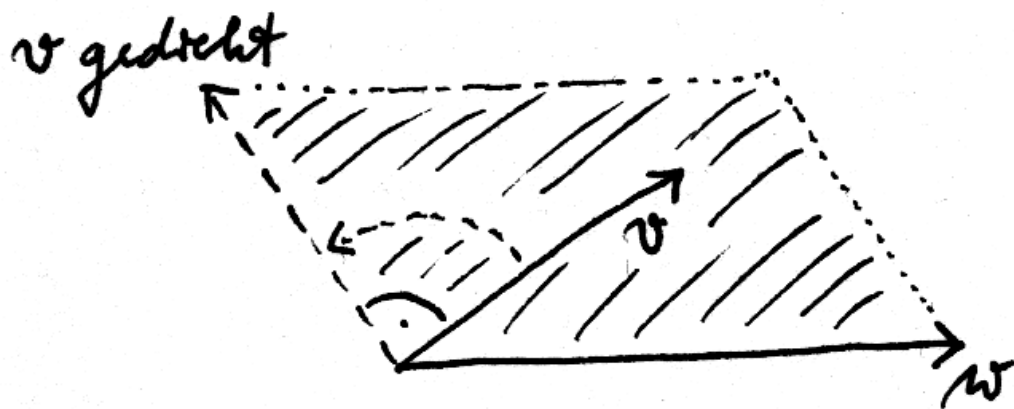
**6.4.8 (Zusätzliche Anschauung für das Skalarprodukt).** Man mag sich das kanonische Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$  im Fall eines zweidimensionalen euklidischen Vektorraums  $V$  vorstellen, indem man eine der beiden Drehungen um einen rechten Winkel auswählt, sie  $r$  nennt, und dann bemerkt, daß  $\langle v, w \rangle = \omega(rv, w)$  der orientierte Flächeninhalt von  $(rv, w)$  im Sinne von 6.4.3 ist für diejenige Orientierung  $\varepsilon = \varepsilon_r$  von  $V$ , die mit  $r$  verträglich ist in der Weise, daß  $(ru, u)$  für alle  $u \neq 0$  eine positiv orientierte Basis von  $V$  ist.

**6.4.9 (Kreuzprodukt für dreidimensionale euklidische Vektorräume).** Gegeben ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum  $V$  mit Längengerade  $\mathbb{L}$  gibt es genau eine alternierende bilineare Abbildung

$$\times = \times_V : V \times V \rightarrow V \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}}(V) \otimes \mathbb{L}$$

mit der Eigenschaft  $(v_1, v_2) \mapsto v_3 \otimes \varepsilon \otimes l$  für jede angeordnete Orthogonalbasis  $v_1, v_2, v_3$  der Orientierung  $\varepsilon$  aus Vektoren derselben Länge  $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = l \in \mathbb{L}$ . Wir nennen sie das **kanonische Kreuzprodukt** und notieren sie wieder  $(v, w) \mapsto v \times w$ . Für jeden euklidischen Homomorphismus  $f : V \rightarrow W$  von euklidischen Vektorräumen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\times_V} & V \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}}(V) \otimes \mathbb{L}(V) \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}}(f) \otimes \mathbb{L}(f) \\ W \times W & \xrightarrow{\times_W} & W \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}}(W) \otimes \mathbb{L}(W) \end{array}$$



Anschauliche Bedeutung des kanonischen Skalarprodukts  $\langle v, w \rangle$  als Fläche

Es bringt die Natürlichkeit unserer Konstruktion zum Ausdruck. Mehr dazu diskutieren wir im Zusammenhang mit „Transformationen von Funktoren“ in 7.4.8.

**6.4.10 (Spezialisierungen des kanonischen Kreuzprodukts).** Jede Orientierung auf  $V$  induziert einen Isomorphismus  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}}(V)$  und unser allgemeines Kreuzprodukt vereinfacht sich so im Fall eines dreidimensionalen orientierten euklidischen Vektorraums zu einem Kreuzprodukt der Gestalt

$$V \times V \rightarrow V \otimes \mathbb{L}$$

Jedes Skalarprodukt aus der euklidischen Struktur eines euklidischen Vektorraums induziert einen Isomorphismus  $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}$  und unser allgemeines Kreuzprodukt vereinfacht sich so im Fall eines dreidimensionalen Skalarproduktraums zu einem Kreuzprodukt der Gestalt

$$V \times V \rightarrow V \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V)$$

Im Fall eines dreidimensionalen orientierten Skalarproduktraums schließlich greifen beide Vereinfachungen und wir erhalten noch einmal unser bereits in 1.9.1 betrachtetes Kreuzprodukt  $V \times V \rightarrow V$ .

## Übungen

*Übung 6.4.11.* Gegeben ein präpseudoeuklidischer reeller Vektorraum  $V$  mit Längengerade  $\mathbb{L}$  gibt es genau eine symmetrische bilineare Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$  mit  $|\langle v, v \rangle| = \|v\|^2 \forall v \in V$  und  $\pm \langle v, v \rangle \in (\mathbb{L}^{\otimes 2})_{\geq 0}$  genau dann, wenn für ein und jede Bilinearform unserer präpseudoeuklidischen Struktur gilt  $\pm s(v, v) \geq 0$ . Wir nennen diese symmetrische bilineare Abbildung die **kanonische Realisierung** unserer präpseudoeuklidischen Struktur.

*Übung 6.4.12.* Man diskutiere, inwiefern das kanonische Skalarprodukt für jeden endlichdimensionalen euklidischen oder sogar pseudoeuklidischen Vektorraum  $V$  einen natürlichen Isomorphismus

$$V^{\top} \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes (-2)}$$

induziert. Man drücke dessen Natürlichkeit durch ein kommutatives Rechteck aus.

*Übung 6.4.13.* Man zeige, daß 6.4.3 für pseudoeuklidische Vektorräume  $V$  einer endlichen Dimension unverändert gilt: Es gibt immer noch genau eine alternierende multilineare Abbildung

$$V^{\otimes n} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$$

mit  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varepsilon \otimes \|v_1\| \otimes \dots \otimes \|v_n\|$  für eine und jede angeordnete Basis  $v_1, \dots, v_n$  der Orientierung  $\varepsilon$  aus paarweise orthogonalen Vektoren. Die Längengerade  $\mathbb{L}(V)$  und die Längen  $\|v\|$  sind dabei die in 2.7.6 Erklärten.

## 6.5 Alternierende Tensoren und äußere Potenzen

**6.5.1 (Alternierende multilineare Abbildungen).** Gegeben Vektorräume  $V, C$  über einem Körper  $K$  und  $r \geq 0$  bezeichne  $\text{Alt}_K(V^{\times r}, C) \subset \text{Hom}_K^{(r)}(V^{\times r}, C)$  den Teilraum der alternierenden multilinearen Abbildungen. Ich erinnere daran, daß eine derartige multilineare Abbildung alternierend genannt wird, wenn sie den Nullvektor ausgibt, wann immer man sie auf einem Tupel mit zwei oder mehr gleichen Einträgen auswertet. Wir vereinbaren zusätzlich wie in [AN2] 6.1.1 die Abkürzung  $\text{Alt}_K^r(V) := \text{Alt}_K(V^{\times r}, K)$  für den Raum der alternierenden Multilinearformen. Statt „alternierend multilinear“ sagen wir im folgenden meist kürzer nur „alternierend“. Unsere Determinante kann als ein Element  $\det \in \text{Alt}_K^n(K^n)$  aufgefaßt werden.

**Satz 6.5.2.** 1. Gegeben  $r \geq 0$  und ein Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  existiert ein Paar  $(A, \alpha)$  bestehend aus einem  $K$ -Vektorraum  $A$  und einer alternierenden Abbildung  $\alpha : V^{\times r} \rightarrow A$  derart, daß für jeden weiteren  $K$ -Vektorraum  $C$  das Vorschalten von  $\alpha$  eine Bijektion

$$(\circ \alpha) : \text{Hom}_K(A, C) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}_K(V^{\times r}, C)$$

zwischen der Menge aller linearen Abbildungen  $A \rightarrow C$  und der Menge aller alternierenden Abbildungen  $V^{\times r} \rightarrow C$  induziert. Wir nennen solch ein  $\alpha : V^{\times r} \rightarrow A$  eine **universelle alternierende Abbildung**;

2. Gegeben eine weitere derartige universelle alternierende Abbildung  $(B, \beta)$  existiert genau eine lineare Abbildung  $c : A \rightarrow B$  mit  $c \circ \alpha = \beta$  und genau eine lineare Abbildung  $d : B \rightarrow A$  mit  $d \circ \beta = \alpha$ , und diese Abbildungen sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen  $A$  und  $B$ .

**6.5.3 (Notation für äußere Potenzen).** Der Beweis von Teil 2 ist identisch zum Beweis der Eindeutigkeit im Fall des Tensorprodukts zweier Vektorräume. Unsere Paare sind also „eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus“, wenn sie existieren. Insbesondere kommt es auf die genaue Konstruktion ebensowenig an wie auf die genaue Konstruktion der natürlichen oder der reellen Zahlen. So eine universelle alternierende Abbildung  $\alpha : V \times \dots \times V \rightarrow A$  verdient damit den bestimmten Artikel und eine eigene Notation. Man nennt  $A$  die  **$r$ -te äußere Potenz von  $V$**  und notiert diesen Vektorraum

$$\bigwedge^r V$$

und notiert die universelle alternierende Abbildung  $(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ . Im Fall  $r = 0$  wählen wir üblicherweise  $\bigwedge^0 V := K$  mit der durch  $* \mapsto 1_K$  bestimmten alternierenden alias beliebigen Abbildung  $\alpha : \text{ens} = V^{\times 0} \rightarrow K$ .

*Beweis.* Es bleibt nur Teil 1 zu zeigen. Dazu bilden wir in der  $r$ -ten Tensorpotenz von  $V$  das Erzeugnis  $J_r \subset V^{\otimes r}$  aller Tensoren mit zwei oder mehr gleichen Einträgen und betrachten die Verknüpfung  $\alpha : V \times \dots \times V \rightarrow V^{\otimes r} \twoheadrightarrow V^{\otimes r}/J_r$  der kanonischen multilinearen Abbildung mit der kanonischen Abbildung auf den Quotienten. Aufgrund der universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und Quotient erhalten wir Isomorphismen

$$\text{Alt}(V^{\times r}, C) \xleftarrow{\sim} \{g \in \text{Hom}(V^{\otimes r}, C) \mid g(J_r) = 0\} \xleftarrow{\sim} \text{Hom}(V^{\otimes r}/J_r, C)$$

So sehen wir, daß  $\alpha$  die geforderte universelle Eigenschaft hat.  $\square$

**6.5.4 (Dachprodukt).** Sei  $V$  ein Vektorraum. Gegeben  $r, s \geq 0$  gibt es genau eine Abbildung

$$\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V$$

derart, daß mit dem Zusammentensorieren von Tensoren in der oberen Horizontale und besagter Abbildung in der unteren Horizontale das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} & \longrightarrow & V^{\otimes(r+s)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V & \longrightarrow & \bigwedge^{r+s} V \end{array}$$

kommutiert. Man folgert das unschwer aus Übung 4.5.9, da die obere Horizontale unseres Diagramms sowohl  $J_r \times V^{\otimes s}$  als auch  $V^{\otimes r} \times J_s$  auf Teilmengen von  $J_{r+s}$  abbildet. Unsere so konstruierte Abbildung  $\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \rightarrow \bigwedge^{r+s} V$  ist offensichtlich bilinear. Sie wird  $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$  notiert und heißt das **Dachprodukt**, englisch **wedge-product**, französisch **produit extérieur**. Aus der Konstruktion ergibt sich unmittelbar seine Assoziativität, in  $\bigwedge^{r+s+t} V$  gilt also

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

für alle  $\omega \in \bigwedge^r V$ ,  $\eta \in \bigwedge^s V$  und  $\xi \in \bigwedge^t V$ . Aus den Definitionen folgt unmittelbar, daß unsere universelle alternierende Abbildung durch das Dachprodukt ausgedrückt werden kann in der Form

$$\alpha : (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r$$

In unserer Notation aus 6.5.3 haben wir das schon vorweggenommen. Rechts sind diesmal, wenn wir es ganz genau nehmen wollen, unter  $v_i$  die Bilder der  $v_i$  unter der universellen alternierenden Abbildung  $V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^1 V$  zu verstehen. Insbesondere gilt  $v \wedge w = -w \wedge v$  und sogar stärker  $v \wedge v = 0$  für alle  $v, w \in V$ .

**Definition 6.5.5.** Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $\leq$  eine Anordnung von  $I$ . Gegeben eine endliche Teilmenge  $R \subset I$  mit  $|R| = r$  erklären wir dann ein Element  $v_R \in \bigwedge^r V$  als das Dachprodukt

$$v_R := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$$

für  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$  die der Größe nach geordneten Elemente von  $R$ . Im Extremfall  $r = 0$  vereinbaren wir  $v_\emptyset := 1 \in K = \bigwedge^0 V$ .

**Proposition 6.5.6 (Basis und Dualraum für äußere Potenzen).** Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $r \geq 0$ . So gilt:

1. Es existiert genau eine bilineare Abbildung

$$\beta : \bigwedge^r (V^\top) \times \bigwedge^r V \rightarrow K$$

mit  $((f_1 \wedge \dots \wedge f_r), (w_1 \wedge \dots \wedge w_r)) \mapsto \det(f_i(w_j))$ ;

2. Diese bilineare Abbildung ist eine *nichtausgeartete Paarung*;

3. Ist  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und wählen wir auf der Indexmenge  $I$  eine Anordnung, so bilden die Monome  $v_R$  mit  $R \subset I$  und  $|R| = r$  eine Basis der  $r$ -ten äußeren Potenz  $\bigwedge^r V$ .

6.5.7. Man beachte, daß unsere Abbildung von äußeren Potenzen des Dualraums zum Dualraum der äußeren Potenzen gewisse unkanonische Vorzeichenwahlen beinhaltet. Hier wären auch andere sinnvolle Wahlen von Vorzeichen denkbar, aber man muß sich halt einmal auf eine Konvention festlegen.

*Beispiel 6.5.8.* Eine Basis von  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$  besteht etwa aus den sechs Dachprodukten  $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4$  und  $e_3 \wedge e_4$ .

6.5.9. Im Zweifelsfall interpretieren wir  $\bigwedge^r V^\top$  im folgenden als  $\bigwedge^r (V^\top)$ . Unsere nichtausgeartete Paarung induziert in der üblichen Weise eine natürliche Injektion  $\bigwedge^r (V^\top) \hookrightarrow (\bigwedge^r V)^\top$ . In Verbindung mit unserem kanonischen Isomorphismus  $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$  aus 6.5.3 induziert sie damit auch eine natürliche Injektion  $\bigwedge^r (V^\top) \hookrightarrow \text{Alt}^r(V)$ . Im endlichdimensionalen Fall  $\dim V < \infty$  zeigt ein Dimensionsvergleich unter Verwendung der vorhergehenden Proposition, daß alle diese Injektionen Isomorphismen sind. Im allgemeinen gilt das jedoch nicht.

*Beweis.* 1. Unsere Abbildungsvorschrift definiert offensichtlich eine bilineare Abbildung

$$(V^\top)^{\otimes r} \times V^{\otimes r} \rightarrow K$$

Diese bilineare Abbildung verschwindet offensichtlich auf allen Paaren, bei denen rechts oder links zwei Tensorfaktoren gleich sind. Nach 4.5.9 induziert sie folglich

die Abbildung, deren Existenz in der Proposition behauptet wird.

3. Alle Tensoren  $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r}$  für  $i_1, \dots, i_r \in I$  beliebig erzeugen nach 6.1.3 die  $r$ -te Tensorpotenz  $V^{\otimes r}$ . Alle Dachprodukte  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$  erzeugen folglich die  $r$ -te äußere Potenz  $\bigwedge^r V$ . Beim Umordnen derartiger Dachprodukte ändert sich höchstens das Vorzeichen, und kommt ein Vektor doppelt vor, ist das fragliche Dachprodukt eh Null. Folglich erzeugen die Dachprodukte  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$  mit  $i_1 < \dots < i_r$  unsere  $r$ -te äußere Potenz, und es bleibt nur, ihre lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Dazu betrachten wir die Koordinatenfunktionen  $f_i := v_i^\top \in V^\top$  zu unserer Basis und aus den Eigenschaften der Determinante folgt für je zwei  $r$ -elementige Teilmengen  $R, S \subset I$  unmittelbar

$$\beta(f_S, v_R) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S = R; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das impliziert die lineare Unabhängigkeit der  $v_R$ .

2. Der vorherige Punkt zeigt auch die lineare Unabhängigkeit der  $f_S$  und zeigt so, daß unsere Paarung im Fall eines endlichdimensionalen Raums  $V$  nichtausgeartet ist. Der allgemeine Fall folgt daraus ohne weitere Schwierigkeiten.  $\square$

**6.5.10 (Dimensionen der äußeren Potenzen).** Aus 6.5.6 folgt für einen Vektorraum  $V$  endlicher Dimension  $\dim V = d < \infty$  sofort, daß die Dimensionen seiner äußeren Potenzen durch Binomialkoeffizienten gegeben werden und daß genauer gilt

$$\dim \bigwedge^r V = \binom{d}{r}$$

Insbesondere gilt  $\dim \bigwedge^d V = 1$  und  $\bigwedge^r V = 0$  für  $r > d$ . Man schreibt deshalb im endlichdimensionalen Fall oft  $\bigwedge^{\max} V := \bigwedge^{\dim V} V$ . Dieser Vektorraum ist natürlich stets eindimensional.

**6.5.11 (Zugang zu äußeren Potenzen über angeordnete Basen).** Im Rückblick erkennen wir, daß gegeben ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$  mit einer angeordneten Basis  $(\mathcal{B}, \leq)$  eine alternierende multilineare Abbildung  $V^{\times r} \rightarrow C$  in einen weiteren Vektorraum  $C$  durch ihre Werte auf streng monoton wachsenden  $r$ -Tupeln von Basisvektoren festgelegt und festlegbar ist. Bezeichnet also  $\mathcal{B}_{<}^{\times r}$  die Menge aller derartigen Tupel von Basisvektoren, so liefert in Formeln ausgedrückt die Restriktion eine Bijektion

$$\text{Alt}^r(V^{\times r}, C) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathcal{B}_{<}^{\times r}, C)$$

Wir hätten die Theorie auch ähnlich wie im Fall von Tensorprodukten beliebiger Länge in der Weise entwickeln können, daß wir zunächst diese Aussage beweisen, um dann zu folgern, daß der freie Vektorraum  $K\langle \mathcal{B}_{<}^{\times r} \rangle$  zusammen mit der von der

kanonischen Einbettung  $\text{can} : \mathcal{B}_{<}^{\times r} \rightarrow K\langle \mathcal{B}_{<}^{\times r} \rangle$  unter obiger Bijektion induzierten alternierenden Abbildung

$$\alpha : V^{\times r} \rightarrow K\langle \mathcal{B}_{<}^{\times r} \rangle$$

die universelle Eigenschaft einer äußeren Potenz besitzt. Dieser Zugang hat den Vorteil, daß unsere Proposition 6.5.6 über Basen äußerer Potenzen zu einer Tautologie wird. Sie hat den Nachteil, daß es etwas unangenehm ist, den Nachweis obiger Bijektion in Formeln auszuschreiben.

**6.5.12 (Äußere Potenzen und alternierende Tensoren).** Gegeben ein Vektorraum  $V$  definiert jede Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_r$  einen Endomorphismus seiner  $r$ -ten Tensorpotenz  $[\sigma] : V^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} V^{\otimes r}$  durch das „Permutieren der Tensorfaktoren“, in Formeln  $[\sigma] : v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)}$ . Wir schreiben diese Operation auch  $[\sigma] : t \mapsto t^\sigma$ . Diese Endomorphismen liefern eine Rechtsoperation, in Formeln  $t^{\sigma \circ \tau} = (t^\sigma)^\tau$ . Um das einzusehen, können wir etwa das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ens}(\{1, \dots, n\}, V) & \xrightarrow{\sim} & V^n & \longrightarrow & V^{\otimes n} \\ \downarrow \circ \sigma & & & & \downarrow [\sigma] \\ \text{Ens}(\{1, \dots, n\}, V) & \xrightarrow{\sim} & V^n & \longrightarrow & V^{\otimes n} \end{array}$$

betrachten. Unter **alternierenden Tensoren** versteht man diejenigen Elemente von  $V^{\otimes r}$ , die beim Vertauschen von zwei Tensorfaktoren ihr Vorzeichen wechseln, in Formeln die Elemente des Teilraums

$$(V^{\otimes r})^{\text{sgn}} := \{t \in V^{\otimes r} \mid t^\sigma = (\text{sgn } \sigma)t \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_r\}$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, daß unser Grundkörper Charakteristik Null oder eine Charakteristik größer als  $r$  hat, so können wir den sogenannten **Alternator**  $\text{alt} : V^{\otimes r} \rightarrow (V^{\otimes r})^{\text{sgn}}$  erklären durch die Abbildungsvorschrift

$$t \mapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \text{sgn}(\sigma) t^\sigma$$

Wir haben  $\text{alt}(t) = t$  für jeden alternierenden Tensor  $t$ , für die Inklusion des Teilraums der alternierenden Tensoren  $\text{inkl} : (V^{\otimes r})^{\text{sgn}} \hookrightarrow V^{\otimes r}$  gilt also  $\text{alt} \circ \text{inkl} = \text{id}$ , insbesondere ist unser Alternator  $\text{alt}$  surjektiv. Bezeichne  $\text{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$  die kanonische Projektion. Sicher verschwindet  $\text{alt}$  auf  $J_r = \ker(\text{proj})$ , folglich faktorisiert  $\text{alt}$  über eine wohlbestimmte Abbildung  $\bigwedge^r V \rightarrow (V^{\otimes r})^{\text{sgn}}$ . Andererseits faktorisiert auch die kanonische Projektion  $\text{proj} : V^{\otimes r} \twoheadrightarrow \bigwedge^r V$  über  $\text{alt}$  als  $\text{proj} = \text{proj} \circ \text{inkl} \circ \text{alt}$ . Zusammen folgt  $\ker(\text{alt}) = \ker(\text{proj})$ . Damit muß  $\text{proj} \circ \text{inkl}$  surjektiv und injektiv sein und ist folglich in der Tat ein Isomorphismus

$$(V^{\otimes r})^{\text{sgn}} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r V$$



**6.5.13 (Zugang zu äußeren Potenzen über alternierende Tensoren).** Manche Autoren machen es sich im Fall eines Grundkörpers der Charakteristik Null bei der Definition der äußeren Algebra eines Vektorraums  $V$  bequem, setzen schlicht  $\bigwedge^r V = (V^{\otimes r})_{\text{sgn}}$  und erklären das äußere Produkt entsprechend durch die Formel  $\omega \wedge \eta = \text{alt}(\omega \otimes \eta)$ . Das hat allerdings über die Einschränkungen an die Charakteristik hinaus den Nachteil, daß die Assoziativität des äußeren Produkts, die wir sozusagen gratis erhalten haben, nun durch wenig transparente Rechnungen nachgewiesen werden muß. In der Physik werden Ausdrücke der Gestalt  $\text{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)$  auch **Slater-Determinanten** genannt, da der Alternator an die Leibniz-Formel für Determinanten erinnert.

*Ergänzung* **6.5.14 (Beziehung zum Dachprodukt der Analysis).** Man beachte, daß sich im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  unser Isomorphismus  $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$  aus 6.5.3 mithilfe unserer Proposition 6.5.6 zu einem Isomorphismus  $\bigwedge^r (V^\top) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$  verlängern läßt. Mit den durch diese Isomorphismen gegebenen Vertikalen und dem Dachprodukt in der oberen Horizontalen und dem Dachprodukt, wie wir es im Rahmen des Stokes'schen Satzes in [AN2] 6.1.8 direkt einführen, in der unteren Horizontalen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^r V^\top \times \bigwedge^s V^\top & \longrightarrow & \bigwedge^{r+s} V^\top \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ \text{Alt}^r(V) \times \text{Alt}^s(V) & \longrightarrow & \text{Alt}^{r+s}(V) \end{array}$$

Die hier gegebene Konstruktion des Dachprodukts benötigt zwar den größeren begrifflichen Aufwand, scheint mir aber durchsichtiger als die im Rahmen des Beweises von [AN2] 6.1.8 gegebene direkte Konstruktion. Die dort gegebene direkte Konstruktion funktioniert erfreulicherweise ohne alle Einschränkungen an die Charakteristik, liefert aber nur für die Graßmann-Algebra des Dualraums eines endlichdimensionalen Vektorraums eine direkte Beschreibung.

*Vorschau* 6.5.15. Vom höheren Standpunkt aus mag man  $\bigwedge V$  mit Dachprodukt und Shuffle-Koprodukt als ein Biabmonoid der Schmelzkategorie  $\text{gsMod}_k$  verstehen und  $\text{Alt } V = \bigoplus \text{Alt}^n V$  als das duale Objekt mit seiner Algebrenstruktur und der Isomorphismus  $\bigwedge(V^\top) \xrightarrow{\sim} \text{Alt } V$  im endlichdimensionalen Fall ist das eigentlich besondere. Mehr dazu wird in [TS] ?? erklärt.

**6.5.16 (Maximale äußere Potenz und Determinante).** Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  induziert vermittle der universellen Eigenschaft lineare Abbildungen  $\bigwedge^r f : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W$ . Natürlich gilt auch  $\bigwedge^r (f \circ g) = (\bigwedge^r f) \circ (\bigwedge^r g)$  und  $\bigwedge^r (\text{id}) = \text{id}$ . Ist speziell  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums, so ist  $\bigwedge^{\max} f : \bigwedge^{\max} V \rightarrow \bigwedge^{\max} V$  ein Endomorphismus eines eindimensionalen Vektorraums alias ein Skalar. Wir zeigen nun, daß dieser

Skalar genau die Determinante von  $f$  ist, in Formeln

$$\bigwedge^{\max} f = \det f$$

Ist etwas allgemeiner  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen derselben endlichen Dimension  $n$  und sind  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  sowie  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$  angeordnete Basen, so gilt

$$(\bigwedge^n f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \det({}_B[f]_A) w_1 \wedge \dots \wedge w_n$$

In der Tat folgt aus  $f(v_i) = \sum a_{ji} w_j$  mit kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} (\bigwedge f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) &= f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_n) \\ &= (\sum a_{j1} w_j) \wedge \dots \wedge (\sum a_{jn} w_n) \\ &= \sum_{\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}} a_{\sigma(1)1} w_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge a_{\sigma(n)n} w_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} w_1 \wedge \dots \wedge w_n \\ &= (\det(a_{ji})) w_1 \wedge \dots \wedge w_n \end{aligned}$$

Die Multiplikationsregel für Determinanten folgt mit diesen Erkenntnissen unmittelbar aus der Relation  $\bigwedge^{\max}(f \circ g) = (\bigwedge^{\max} f) \circ (\bigwedge^{\max} g)$ . Daß die Determinante eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  verschwindet, falls dieser nicht vollen Rang hat, kann man in diesem Formalismus auch wie folgt einsehen: Man schreibt  $f$  als Verknüpfung  $V \rightarrow \operatorname{im} f \hookrightarrow V$ , und unter der Annahme  $d = \dim V > \dim(\operatorname{im} f)$  folgt  $\bigwedge^d(\operatorname{im} f) = 0$ , womit dann auch die Komposition  $\bigwedge^d V \rightarrow \bigwedge^d(\operatorname{im} f) \rightarrow \bigwedge^d V$  die Nullabbildung sein muß.

*Ergänzung 6.5.17.* Für einen  $K$ -Vektorraum  $V$  endlicher Dimension  $\dim V = n$  liefert das Dachprodukt nichtausgeartete Paarungen  $\bigwedge^d V \times \bigwedge^{n-d} V \rightarrow \bigwedge^n V$  im Sinne von 2.3.35, denn wir haben  $v_I \wedge v_J = \pm v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ , falls  $I$  das Komplement von  $J$  ist, und Null sonst. Jeder Isomorphismus  $\omega : \bigwedge^n V \xrightarrow{\sim} K$  liefert also insbesondere einen Isomorphismus  $\hat{\omega} : \bigwedge^{n-1} V \cong V^\top$  gegeben durch  $(\hat{\omega}(\eta))(v) = \omega(\eta \wedge v)$ .

*Ergänzung 6.5.18 (Äußere Potenzen und Orientierung).* Gegeben ein endlich-dimensionaler Vektorraum  $V$  über einem angeordneten Körper erhalten wir eine Bijektion

$$\operatorname{or}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{or}(\bigwedge^{\max} V)$$

durch die Vorschrift  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^\wedge$  mit  $\varepsilon^\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \varepsilon(v_1, \dots, v_n)$  für eine und jede angeordnete Basis von  $V$ . Es verhält sich nun so, daß es im Rückblick eigentlich richtiger gewesen wäre, diese Bijektion zu einer Definition des Orientierungsbegriffs zu machen. Das wäre nur aus didaktischen Gründen problematisch gewesen. Dafür müssen wir nun den Preis zahlen, daß verschiedene Veträglichkeiten zwischen leicht unkanonischen Wahlen zu prüfen sind, als da wären:

1. Ist  $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$  eine kurze exakte Sequenz endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume und sind  $\varepsilon, \eta$  Orientierungen auf  $U$  und  $W$  mit Elementen  $\hat{\varepsilon}, \hat{\eta}$  der zugehörigen offenen Halbgeraden in den jeweiligen äußeren Potenzen, so entspricht die zusammengesetzte Orientierung  $\varepsilon\eta$  auf  $V$  aus [LA1] 6.5.15 der offenen Halbgerade vom Bild von  $\hat{\varepsilon} \otimes \hat{\eta}$  unter dem kanonischen Isomorphismus  $\bigwedge^{\max} U \otimes \bigwedge^{\max} W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^{\max} V$  aus 6.5.25;
2. Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $\varepsilon$  eine Orientierung auf  $V$  und  $\hat{\varepsilon}$  ein Element der zugehörigen offenen Halbgeraden in  $\bigwedge^{\max}(V)$  und  $\eta$  die zu  $\varepsilon$  duale Orientierung auf dem Dualraum  $V^\top$  nach [LA1] 6.5.12 und  $\hat{\eta}$  ein Element der zugehörigen offenen Halbgeraden in  $\bigwedge^{\max}(V^\top)$ , so ist unter unserer ausgezeichneten Paarung  $\bigwedge^{\max}(V^\top) \times \bigwedge^{\max} V \rightarrow k$  aus 6.5.6 das Bild von  $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$  positiv.

## Übungen

**Übung 6.5.19 (Partielles Einsetzen in alternierende Formen).** Gegeben ein Vektorraum  $V$  und eine Linearform  $\lambda \in V^\top$  zeige man, daß es für alle  $n \geq 0$  genau eine lineare Abbildung

$$i_\lambda : \bigwedge^{n+1} V \rightarrow \bigwedge^n V$$

gibt mit  $i_\lambda(v_0 \wedge \dots \wedge v_n) = \sum (-1)^i \lambda(v_i) v_0 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n$ . Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir  $\bigwedge^n V = 0$  für  $n < 0$  und setzen  $i_\lambda$  in der einzig möglichen Weise zu allen  $n \in \mathbb{Z}$  fort. Man zeige in dieser Situation  $i_\lambda^2 = 0$  und zeige für alle  $v \in V$  die Identität  $(v \wedge) \circ i_\lambda + i_\lambda \circ (v \wedge) = (\lambda(v) \cdot)$  von Endomorphismen der äußeren Algebra. Weiter setzen wir auch  $\text{Alt}^n(V) = 0$  für  $n < 0$  und man zeige für  $v \in V$  die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{n+1} V^\top & \xrightarrow{i_{\text{ev}(v)}} & \bigwedge^n V^\top \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Alt}^{n+1}(V) & \xrightarrow{i_v} & \text{Alt}^n(V) \end{array}$$

mit der durch  $(i_v \eta)(v_1, \dots, v_n) := \eta(v, v_1, \dots, v_n)$  gegebenen beziehungsweise  $i_v = 0$  für  $n < 0$  unteren Horizontale und den Vertikalen aus 6.5.9 und zeige  $i_v^2 = 0$  sowie die Identität  $(\lambda \wedge) \circ i_v + i_v \circ (\lambda \wedge) = (\lambda(v) \cdot)$  von Endomorphismen der Algebra der alternierenden Formen. Der Buchstabe  $i$  steht für englisch **insertion**. Auf Deutsch heißen diese Abbildungen **Einsetzungshomomorphismen**.

**Ergänzende Übung 6.5.20.** Gegeben ein Vektorraum  $V$  und  $n = p + q$  natürliche Zahlen zeige man, daß es eine lineare Abbildung  $\Delta_n^{p,q} : \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^p V \otimes \bigwedge^q V$

gibt, das **Shuffle-Koprodukt**, mit

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma) (v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p)}) \otimes (v_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p+q)})$$

mit  $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_n$  wie beim Beweis von [AN2] 6.1.8 der Teilmenge der  $(p, q)$ -**Shuffles**, also derjenigen Permutationen, die die Reihenfolge der ersten  $p$  Einträge und der letzten  $q$  Einträge erhalten. Man zeige weiter, daß unser „Shuffle-Dachprodukt“ nach [AN2] 6.1.11 daraus entsteht durch Dualisieren als die Verknüpfung

$$\operatorname{Alt}^p V \times \operatorname{Alt}^q V = (\wedge^p V)^* \times (\wedge^q V)^* \rightarrow (\wedge^p V \otimes \wedge^q V)^* \rightarrow (\wedge^n V)^* = \operatorname{Alt}^n V$$

*Übung 6.5.21.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  und  $\omega \in \wedge^r V$  und  $\eta \in \wedge^s V$  gilt  $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$ .

*Ergänzende Übung 6.5.22.* (Hinweis: 6.5.16). Gegeben eine  $(n \times m)$ -Matrix  $A$  und eine  $(m \times n)$ -Matrix  $B$  kann man die Determinante der  $(n \times n)$ -Matrix  $AB$  bestimmen wie folgt: Für jede  $n$ -elementige Teilmenge  $I \subset \{1, \dots, m\}$  mit Elementen  $i_1 < \dots < i_n$  möge  $A_I$  gerade aus den Spalten von  $A$  der Indizes  $i_1, \dots, i_n$  bestehen und  $B^I$  aus den Zeilen von  $B$  der Indizes  $i_1, \dots, i_n$ . So gilt die **Cauchy-Binet-Formel**

$$\det(AB) = \sum_{|I|=n} (\det A_I)(\det B^I)$$

*Übung 6.5.23.* Gegeben ein Endomorphismus  $f \in \operatorname{End} V$  eines Vektorraums mit  $f^{\otimes r} = \operatorname{id} : V^{\otimes r} \rightarrow V^{\otimes r}$  für ein  $r \geq 1$  gilt  $f = \zeta \operatorname{id}$  mit  $\zeta^r = 1$ . Hinweis: 6.1.33.

*Ergänzende Übung 6.5.24.* Sei  $V$  ein Vektorraum. Man zeige: Das Erzeugnis  $J_r \subset V^{\otimes r}$  aller Tensoren mit zwei gleichen Einträgen fällt zusammen mit dem Erzeugnis  $J'_r \subset V^{\otimes r}$  aller Tensoren mit zwei benachbarten gleichen Einträgen.

*Weiterführende Übung 6.5.25.* Ist  $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$  eine kurze exakte Sequenz endlichdimensionaler Vektorräume, so induziert mit der Notation  $d = \dim W$  das Dachprodukt  $\wedge^{\max} U \otimes \wedge^d V \rightarrow \wedge^{\max} V$  einen Isomorphismus

$$\wedge^{\max} U \otimes \wedge^{\max} W \xrightarrow{\sim} \wedge^{\max} V$$

Wir nennen ihn den **kanonischen Isomorphismus**, aber man bemerke, daß an dieser Stelle auch andere sinnvolle Wahlen von Vorzeichen möglich wären. Auf eine solche Wahl muß man sich aber halt mal einigen und die hier getroffene Wahl ist verträglich mit unserem Begriff [LA1] 6.5.15 der „zusammengesetzten Orientierung“.

*Ergänzende Übung 6.5.26.* Sei  $L \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$  eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen mit  $\dim L = 1$ . So faktorisiert für alle  $m \geq 1$  das Dachprodukt  $L \otimes \bigwedge^{m-1} V \rightarrow \bigwedge^m V$  über  $L \otimes \bigwedge^{m-1} W$  und wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$L \otimes \bigwedge^{m-1} W \hookrightarrow \bigwedge^m V \twoheadrightarrow \bigwedge^m W$$

Hinweis: Man mag mit vollständiger Induktion über  $m$  argumentieren.

*Ergänzende Übung 6.5.27.* Gegeben ein endlichdimensionaler symplektischer Vektorraum  $(V, \omega)$  der Dimension  $2n$  zeige man für die in 2.5.7 erklärte  $(2n)$ -Multilinearform  $\omega^{(n)}$  auf  $V$  die Identität

$$n! \omega^{(n)} = \omega^{\wedge n}$$

*Ergänzende Übung 6.5.28 (Kreuzprodukt als Dachprodukt).* Gegeben ein dreidimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und darauf ein Skalarprodukt mit Einheiten  $\mathbb{L}$  im Sinne von ?? und  $\text{or}_{\mathbb{R}}(V)$  die Orientierungsgerade betrachte man die Komposition von Isomorphismen

$$\bigwedge^2 V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, \bigwedge^3 V) \xrightarrow{\sim} V^\top \otimes \mathbb{L}^{\otimes 3} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes V$$

wo die erste Abbildung durch  $\eta \mapsto \eta \wedge$  gegeben wird, die Zweite vom Spatprodukt ?? herkommt, und die Dritte von dem durch das Skalarprodukt gegebenen Isomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} V^\top \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2}$ . Man zeige, daß die Verknüpfung der Abbildung  $V \times V \rightarrow \bigwedge^2 V$ ,  $(v, w) \mapsto v \wedge w$  mit obiger Identifikation gerade unser Kreuzprodukt aus 6.4.9 ist.

*Übung 6.5.29.* Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen komplexen Vektorraums. Man zeige für den  $k$ -ten Koeffizienten  $a_k$  des charakteristischen Polynoms die Formel

$$a_k = (-1)^k \text{tr} \left( \bigwedge^k f \mid \bigwedge^k V \right)$$

Hinweis: Man ziehe ich auf den Fall einer oberen Dreiecksmatrix zurück. Die Formel gilt auch für beliebige Körper, da mag man sich mit einer Einbettung in einen algebraisch abgeschlossenen Körper behelfen, die nach [AL] 3.11.5 stets existiert.

## 7 Kategorien und Funktoren\*

Viele Konstruktionen der linearen und insbesondere der multilinearen Algebra, wie etwa Dualräume, Tensorpotenzen oder äußere Potenzen, zeigen erst in der Sprache der Kategorientheorie ihre wahre Natur. Es geht bei diesen Konstruktionen nämlich keineswegs darum, irgendwelche neuen Vektorräume zu konstruieren: Wir wissen ja bereits aus [LA1] 2.1.10, daß wir hier zumindest im Fall endlicher Dimension nichts wesentlich Neues finden können. Vielmehr geht es darum, zusammen mit diesen neuen Vektorräumen auch neue lineare Abbildungen zu konstruieren, wie etwa bei Dualräumen die transponierten Abbildungen. Erst zusammen mit diesen zusätzlichen Konstruktionen erhält man nützliche und anwendbare Begriffsbildungen.

Die Sprache der Kategorien und Funktoren liefert für derartige Konstruktionen einen begrifflichen Rahmen. Sie ist ähnlich ausdrucksstark, grundlegend und elegant wie die Sprache der Mengenlehre, auf der sie aufbaut, und gehört meines Erachtens in den Rucksack jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers. Ich bin sogar der Ansicht, daß die „naive Mengenlehre“ aus den Grundvorlesungen am besten durch eine axiomatische Beschreibung der „Kategorie aller Mengen“ wie etwa in [LR03] formalisiert wird. So formal will ich bei der hier gegebenen Darstellung jedoch nicht werden und arbeite deshalb weiter auf der Grundlage der naiven Mengenlehre. Eine ausführlichere Behandlung der Kategorientheorie findet man zum Beispiel in [Mac98].

### 7.1 Kategorien

**Definition 7.1.1.** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  ist ein Datum bestehend aus

- a. einer Menge  $\text{Ob } \mathcal{C}$  von **Objekten**;
- b. einer Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$  von **Morphismen** für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- c. einer Abbildung  $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ ,  $(f, g) \mapsto g \circ f$  für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ , genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, es gilt also  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  für Morphismen  $f, g$  und  $h$ , wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;
2. Für jedes Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ , die **Identität auf  $X$** , so daß gilt  $\text{id}_X \circ f = f$  und  $g \circ \text{id}_X = g$  für Morphismen  $f$  und  $g$  wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes  $X$  höchstens einen derartigen Morphismus

geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt wäre.

7.1.2. Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  Objekte. Statt  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  sagen wir auch,  $f$  sei ein **Morphismus von  $X$  nach  $Y$**  und schreiben kurz

$$f : X \rightarrow Y$$

Statt  $\text{id}_X$  schreiben wir oft nur  $\text{id}$ . Statt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  schreiben wir oft kürzer  $X \in \mathcal{C}$ .

7.1.3. Wir fordern nicht, daß die Morphismenmengen  $\mathcal{C}(X, Y)$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  paarweise disjunkt sein sollen. Wir erklären dahingegen die Menge aller Morphismen von  $\mathcal{C}$  als die disjunkte Vereinigung

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \bigsqcup_{X, Y \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X, Y)$$

*Beispiel 7.1.4 (Kategorie der Mengen).* Als erstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie  $\mathcal{C} := \text{Ens}$  aller Mengen eingeführt. Das ist jedoch nicht möglich, da die „Gesamtheit aller Mengen“, wie in [GR] 1.3.8 ausgeführt wird, nicht als Menge angesehen werden darf. Um diese Untiefen der Logik zu umschiffen, betrachten wir feiner ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  alias eine Menge  $\mathfrak{U}$  von Mengen und erklären die Kategorie  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  aller Mengen  $X \in \mathfrak{U}$ . Ihre Objekte sind beliebige Mengen  $X \in \mathfrak{U}$ , in Formeln

$$\text{Ob}(\mathfrak{U}\text{Ens}) := \mathfrak{U}$$

Für je zwei Objekte alias je zwei Mengen  $X, Y \in \mathfrak{U}$  erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , in Formeln

$$\mathfrak{U}\text{Ens}(X, Y) := \text{Ens}(X, Y)$$

Die Verknüpfung ordnet jedem Paar  $(f, g)$  von Abbildungen ihre Komposition  $g \circ f$  zu. Daß diese Daten unsere Axiome erfüllen, scheint mir offensichtlich. Unser  $\text{id}_X \in \mathfrak{U}\text{Ens}(X, X)$  ist die identische Abbildung  $\text{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$ .

*Vorschau 7.1.5 (Mengen, Klassen, Universen).* In vielen Quellen umschifft man die in 7.1.4 angesprochenen Untiefen der Logik, indem man nicht fordert, daß die Objekte einer Kategorie eine Menge bilden, sondern stattdessen, daß sie eine „Klasse“ bilden sollen. Das hat den Vorteil, daß man die Kategorie aller Mengen bilden kann. Es hat den Nachteil, daß man den Begriff einer Klasse einführen muß und erklären muß, wie man damit umgeht. Statt mit „Klassen“ werden wir zu gegebener Zeit mit „Universen“ arbeiten, die in 7.11.3 eingeführt werden. Für unsere Bedürfnisse läuft das auf dasselbe hinaus und erspart uns die Vertreibung aus dem Paradies der Mengenlehre. Ich werde aber oft kategorientheoretische Sprache auch in einem weiteren Sinn als „Metasprache“ verwenden und dabei derartige Feinheiten kurzerhand ignorieren.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{teilgeordnete Mengen}	monoton wachsende	Ord
	Abbildungen	
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{bepunktete Mengen}	Abbildungen,	Ens*
	die den Basispunkt erhalten	
{bepunktete Räume}	stetige Abbildungen,	Top*
	die den Basispunkt erhalten	
{ $K$ -Vektorräume}	$K$ -lineare Abbildungen	$K$ -Mod, $\text{Mod}_K$
{Affine Räume über $K$ }	affine Abbildungen	$K$ -Aff, $\text{Aff}_K$
{nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ringhomomorphismen	Ring
{kommutative Ringe}	Ringhomomorphismen	Kring
{ $K$ -Algebren}	$K$ -Algebren-Homomorphismen	$K$ -Alg, $\text{Alg}_K$
{ $K$ -Ringalgebren}	$K$ -Ringalgebren-Homomorphismen	$K$ -Ralg, $\text{Ralg}_K$
{ $K$ -Kringalgebren}	$K$ -Kringalgebren-Homomorphismen	$K$ -Kralg, $\text{Kralg}_K$

Hier einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint. Um

logische Abstürze zu vermeiden, müssen wir uns genauer stets ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  dazudenken, aus dem die zugrundeliegende Menge der jeweiligen Struktur kommen muß und das wir in der Notation meist unterschlagen. Wenn wir es doch notieren wollen, schreiben wir

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

und dergleichen. Wir denken uns das Mengensystem  $\mathfrak{U}$  meist als ziemlich riesig und fordern zumindest implizit für gewöhnlich, daß es unter dem Bilden von Teilmengen stabil sein möge und die reellen Zahlen enthält. Etwas genauer werden wir zu gegebener Zeit oft fordern, daß es ein „Universum“ sein soll.



*Beispiel 7.1.6.* Zu jedem Monoid  $M$  können wir die Kategorie  $[M]$  mit einem einzigen Objekt  $*$  bilden, deren Morphismen die Elemente von besagtem Monoid sind mit der Verknüpfung in unserem Monoid als Verknüpfung von Morphismen. Wir nennen sie die **Ein-Objekt-Kategorie** unseres Monoids. Umgekehrt ist für jedes Objekt  $X$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{C}(X, X)$  mit der von der Kategorienstruktur herkommenden Verknüpfung ein Monoid. In diesem Sinne ist also eine Kategorie mit einem einzigen Objekt nichts anderes als ein Monoid. Das Monoid der Morphismen von einem Objekt  $X$  zu sich selber in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  nennen wir das Monoid der **Endomorphismen** von  $X$  und kürzen es in Zukunft oft ab mit

$$\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$$

*Beispiel 7.1.7.* Sei  $K$  ein Körper oder allgemeiner ein Ring. Wir erklären die **Matrixkategorie**  $\text{Mat} = \text{Mat}_K = \text{Mat}(K)$  über  $K$  durch die Vorschriften

$$\text{Ob}(\text{Mat}_K) := \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \text{Mat}_K(m, n) := \text{Mat}(n \times m; K)$$

mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung von Morphismen. Die Axiome sind erfüllt aufgrund unserer Rechenregeln [LA1] 2.4.6 für die Matrixmultiplikation.

*Beispiel 7.1.8 (Teilgeordnete Menge als Kategorie).* Jede teilgeordnete Menge  $(A, \leq)$  kann als Kategorie aufgefaßt werden wie folgt: Objekte sind die Elemente von  $A$ ; Morphismen gibt es jeweils einen von einem Element zu jedem kleineren und zu sich selber; und die Verknüpfung von Morphismen ist die einzig Mögliche.

*Beispiel 7.1.9 (Kategorie der Vektorräume).* Als nächstes Beispiel hätte ich gerne die Kategorie  $\mathcal{C} = \text{Mod}_K$  aller Vektorräume über einem Körper  $K$  eingeführt. Die Notation  $\text{Mod}_K$  für Vektorräume über  $K$  steht dabei für ihre alternative Bezeichnung als  **$K$ -Moduln**. Wieder gerät man dabei in Untiefen der Logik. Um diese zu umschiffen betrachten wir wieder ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  und erklären dazu eine Kategorie

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

Als Objekte dieser Kategorie nehmen wir alle  $K$ -Vektorräume, deren Grundmenge zu unserem Mengensystem  $\mathfrak{U}$  gehört. Für je zwei Vektorräume  $V, W \in \mathfrak{U}\text{Mod}_K$  erklären wir die Morphismenmenge als die Menge aller linearen Abbildungen, in Formeln

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K(V, W) := \text{Hom}_K(V, W)$$

Die Verknüpfung ordnet wieder jedem Paar  $(f, g)$  von Abbildungen ihre Komposition  $g \circ f$  zu. Die Axiome sind offensichtlich erfüllt.

**7.1.10 (Verwendung des Symbols Hom).** Das Symbol „Hom“ für Mengen von Morphismen versuche ich nach Möglichkeit zu vermeiden: Ich will es reservieren

für die sogenannten „internen Hom-Räume“. Darunter versteht man Vorschriften, die in sehr speziellen Situationen zwei Objekten einer Kategorie ein Drittes zuordnen, im Fall der Vektorräume etwa die Morphismenmenge mit ihrer natürlichen Vektorraumstruktur. Wenn die Morphismenmenge als Menge gemeint ist, sollte ich  $\text{Mod}_K(V, W)$  schreiben, aber das halte ich im Fall der Vektorräume nicht durch. Das Kürzel „Mod“ mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets für Kategorien von abelschen Gruppen mit Zusatzstrukturen stehen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lasse ich die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutze ich stets das Kürzel „Ab“.

**Definition 7.1.11.** 1. Ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso**, wenn es einen Morphismus  $g \in \mathcal{C}(Y, X)$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ . Wir notieren Isomorphismen oft  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ ;

2. Zwei Objekte  $X$  und  $Y$  einer Kategorie heißen **isomorph**, wenn es einen Iso  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  gibt. Man schreibt dann auch kurz  $X \cong Y$ .

*Beispiele 7.1.12.* Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Kategorie der Vektorräume Vektorraumisomorphismen.

7.1.13. Kategorien, in denen alle Morphismen Isomorphismen sind, heißen **Gruppoid**. Kategorien, in denen es außer den Identitäten keine Morphismen gibt, heißen **diskret**. Natürlich ist jede diskrete Kategorie ein Gruppoid.

7.1.14 (**Diskussion des Begriffs eines Isomorphismus**). Bisher hatten wir verschiedentlich Isomorphismen abweichend erklärt als bijektive Homomorphismen, zum Beispiel bei Gruppen, Körpern, Vektorräumen und affinen Räumen. In allen diesen Fällen sollte es jedoch klar sein, daß die Umkehrabbildung im Sinne der Mengenlehre auch selbst wieder ein Homomorphismus ist, so daß wir in der Tat auch Isomorphismen im Sinne der Kategorientheorie vor uns haben. Ein typisches Beispiel für eine Kategorie von „Mengen mit Zusatzstrukturen“, in der bijektive Homomorphismen keine Isomorphismen zu sein brauchen, ist die Kategorie der teilgeordneten Mengen.

7.1.15. Viele mathematische Fragestellungen lassen sich in der Sprache der Kategorientheorie dahingehend formulieren, daß man einen Überblick über alle Objekte einer Kategorie gewinnen will, wobei man zwischen isomorphen Objekten nicht unterscheidet. Formal will man also für eine gegebene Kategorie  $\mathcal{C}$  die Menge aller Äquivalenzklassen von Objekten

$$\mathcal{C}/\cong$$

unter der Äquivalenzrelation der Isomorphie beschreiben. Man spricht dann auch von **Isomorphieklassen** von Objekten und nennt Fragestellungen dieser Art **Klassifikationsprobleme**. Zum Beispiel werden die endlich erzeugten Vektorräume über einem fest vorgegebenen Körper klassifiziert durch ihre Dimension, die endlich erzeugten abelschen Gruppen durch die Sätze 4.4.4 und 4.4.5, die endlichen Mengen durch ihre Kardinalität [GR] 1.2.5, und beliebige Mengen, vorsichtshalber aus einem fest vorgegebenen Mengensystem, ebenfalls durch ihre Kardinalität [AL] 5.3.1.

7.1.16. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilmenge der Objektmenge nebst Teilmengen der Morphismenmengen für je zwei Objekte unserer Teilmenge der Objektmenge derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll**, wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenmengen jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

7.1.17. Zu jeder Kategorie  $\mathcal{C}$  erklären wir eine Unterkategorie, die **Isomorphismenkategorie**  $\mathcal{C}^\times$  von  $\mathcal{C}$ , durch die Vorschrift, daß sie dieselben Objekte haben soll, aber nur die Isomorphismen von  $\mathcal{C}$  als Morphismen. Die Menge aller Isomorphismen von einem Objekt  $X$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in ein Objekt  $Y$  derselben Kategorie notieren wir folgerichtig  $\mathcal{C}^\times(X, Y)$ . Die Isomorphismen von einem Objekt  $X$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  auf sich selber heißen die **Automorphismen** von  $X$ . Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe**  $\mathcal{C}^\times(X)$  von  $X$ . Für die Automorphismengruppe  $\text{Mod}_k^\times(V)$  eines  $k$ -Vektorraums  $V$  hatten wir die Notation  $\text{GL}(V)$  vereinbart, für die Automorphismengruppe  $\text{Ens}^\times(X)$  einer Menge  $X$  die Bezeichnung als „Gruppe der Permutationen von  $X$ “.

**Definition 7.1.18.** Ein Objekt  $F$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **final**, wenn es für alle  $X \in \mathcal{C}$  genau einen Morphismus von  $X$  nach  $F$  gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(X, F)| = 1 \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

**Definition 7.1.19.** Ein Objekt  $K$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **kofinal** oder gleichbedeutend **initial**, wenn es für alle  $Y \in \mathcal{C}$  genau einen Morphismus von  $K$  nach  $Y$  gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K, Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

*Beispiele 7.1.20 (Finale und kofinale Objekte in Kategorien von Mengen).* Ist  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem, das nicht nur aus der leeren Menge besteht, so sind die finalen Objekte von  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  genau die einpunktigen Mengen aus  $\mathfrak{U}$ . Ist  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem, das nicht nur aus einelementigen Mengen besteht, so ist die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt von  $\mathfrak{U}\text{Ens}$ , wenn sie denn zu unserem Mengensystem  $\mathfrak{U}$  dazugehört.

7.1.21 (**Weitere Notationen**). Zwischen je zwei finalen beziehungsweise kofinalen Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir erlauben uns deshalb, etwas lax von *dem* finalen beziehungsweise *dem* kofinalen Objekt zu reden, und bezeichnen „das“ finale Objekt mit  $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$  für „Punkt“ oder  $\text{fin}(\mathcal{C})$  und Morphismen dahin mit  $\text{fin}$  für „final“. Meist verwenden wir als Bezeichnung des finalen Objekts die kleingeschriebene Bezeichnung der Kategorie, etwa  $\text{top}$  für den einelementigen topologischen Raum oder  $\text{ens}$  für die einelementige Menge. Morphismen vom finalen Objekt zu einem beliebigen Objekt notieren wir gerne *em* wie „embedding“ mit einem Index, der angibt, welcher Morphismus genau gemeint ist. Gegeben eine Menge  $X$  und ein Element  $x \in X$  meint etwa  $\text{em}_x : \text{ens} \rightarrow X$  die Einbettung der einelementigen Menge mit Bild  $x$ . Wir bezeichnen mit  $\text{ini} = \text{ini}(\mathcal{C})$  das initiale Objekt einer Kategorie  $\mathcal{C}$ , wenn es denn ein solches gibt.

## Übungen

*Übung 7.1.22.* Ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er ein **Rechtsinverses** und ein **Linksinverses** besitzt, wenn es also Morphismen  $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $h \circ f = \text{id}_X$ , und unter diesen Voraussetzungen gilt bereits  $g = h$ . Wir nennen diesen Morphismus dann den **inversen Morphismus zu  $f$**  und notieren ihn  $f^{-1}$ . Derartige Rechtsinverse bezeichnet man auch oft als **Schnitt** oder **Spaltung**. Allgemeiner nennt man jeden Morphismus **rechtsspaltend**, der ein Linksinverses besitzt, und jeden Morphismus **linksspaltend**, der ein Rechtsinverses besitzt

*Übung 7.1.23.* Kann ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  in einer Kategorie sowohl durch Vorschalten eines Morphismus  $g \in \mathcal{C}(W, X)$  als auch durch Nachschalten eines Morphismus  $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$  zu einem Isomorphismus gemacht werden, so muß er bereits selbst ein Isomorphismus gewesen sein.

*Übung 7.1.24.* Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus. Man zeige, daß  $f$  genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Vorschalten von  $f$  für jedes weitere Objekt  $Z$  eine Bijektion  $\mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z)$  induziert. Man zeige dual, daß  $f$  genau dann ein Isomorphismus ist, wenn das Nachschalten von  $f$  für jedes weitere Objekt  $Z$  eine Bijektion  $\mathcal{C}(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, Y)$  induziert. Allgemeiner Aussagen in dieser Richtung macht das sogenannte Yoneda-Lemma 7.10.2.

*Übung 7.1.25.* Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, Ringe, topologischen Räume und Vektorräume aus einem vorgegebenen Mengensystem  $\mathcal{U}$ .

## 7.2 Funktoren

**Definition 7.2.1.** Ein **Funktor**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von einer Kategorie  $\mathcal{A}$  in eine Kategorie  $\mathcal{B}$  ist ein Datum bestehend aus

- einer Abbildung  $F = F_{\text{Ob}} : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}, X \mapsto FX$ ;
- einer Abbildung  $F = F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FX, FY), f \mapsto Ff$  für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,

derart, daß gilt:

- $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$  für beliebige verknüpfbare Morphismen  $f$  und  $g$  aus der Kategorie  $\mathcal{A}$ ;
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$  für jedes Objekt  $X \in \mathcal{A}$ .

Ich nenne in diesem Zusammenhang  $\mathcal{A}$  die **Ausgangskategorie** und  $\mathcal{B}$  die **Zielkategorie** des Funktors  $F$ .

*Beispiel 7.2.2.* Gegeben ein Körper  $K$  erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K \\ n & \mapsto & K^n \\ A \downarrow & \mapsto & (A \circ) \downarrow \\ m & \mapsto & K^m \end{array}$$

von der Matrixkategorie 7.1.7 über  $K$  in die Kategorie der  $K$ -Vektorräume, indem wir wie angedeutet jedem Objekt  $n$  der Matrixkategorie den Vektorraum  $K^n$  zuordnen und jeder Matrix die durch diese Matrix gegebene lineare Abbildung. Wir nennen ihn den **Realisierungsfunktor**.

*Beispiel 7.2.3 (Der Richtungsraum als Funktor).* Wir erklären die Kategorie  $\text{Aff} = \text{Aff}_K$  der affinen Räume über einem gegebenen Körper  $K$ . Als Objekte nehmen wir unsere affinen Räume, als Morphismen affine Abbildungen. Das Bilden des Richtungsraums  $\text{Richt} : E \mapsto \vec{E}$  ist dann zusammen mit der Zuordnung, die jeder affinen Abbildung  $\varphi : E \rightarrow F$  ihren linearen Anteil  $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  zuordnet, ein Funktor

$$\text{Richt} : \text{Aff}_K \rightarrow \text{Mod}_K$$

*Beispiel 7.2.4 (Die Längengerade als Funktor).* Wir erklären die Kategorie  $\text{Euk}$  der euklidischen Vektorräume. Objekte sind wie in 1.5.1 reelle Vektorräume mit einer  $\mathbb{R}_{>0}$ -Bahn von Skalarprodukten, Morphismen die euklidischen Abbildungen nach 1.5.8. Unsere Konstruktion 1.5.11 der Längengerade eines euklidischen Raums und der zwischen Längengeraden induzierten Abbildungen ist dann ein Funktor

$$\mathbb{L} : \text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

7.2.5. Man gibt bei einem Funktor  $F$  meist nur die Abbildung  $X \mapsto FX$  auf den Objekten an in der Hoffnung, daß vom Leser erraten werden kann, welche Abbildung  $f \mapsto Ff$  auf den Morphismen gemeint ist.

7.2.6. Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  haben wir den **Identitätsfunktor**  $\text{Id} = \text{Id}_{\mathcal{C}}$  von besagter Kategorie zu sich selber. Sind  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren, so ist auch  $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor.

**Lemma 7.2.7 (Funktoren erhalten Isomorphie).** *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

*Beweis.* Sei  $F$  unser Funktor. Mithilfe unserer Bedingung  $F(\text{id}) = \text{id}$  schließen wir:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Isomorphismus} &\Rightarrow \text{Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \text{id und } g \circ f = \text{id} \\ &\Rightarrow (Ff) \circ (Fg) = \text{id und } (Fg) \circ (Ff) = \text{id} \\ &\Rightarrow Ff \text{ ist Isomorphismus.} \quad \square \end{aligned}$$

*Beispiel 7.2.8.* Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  bildet man die **opponierte Kategorie**  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ . Man setzt dazu

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} := \text{Ob } \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}^{\text{opp}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  als die vertauschte Verknüpfung. Wir notieren einen Morphismus  $f$  als  $f^\circ$ , wenn er in der opponierten Kategorie aufgefaßt werden soll, und haben also in Formeln  $g^\circ \circ f^\circ := (f \circ g)^\circ$ .

*Beispiel 7.2.9 (Bilden des Dualraums als Funktor).* Sei  $K$  ein Körper. Das Bilden des Dualraums mit dem Bilden der transponierten Abbildung auf dem Niveau der Homomorphismen ist auf den ersten Blick ein Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K^{\text{opp}} \\ V & \mapsto & V^\top \\ f \downarrow & \mapsto & \uparrow f^\top \\ W & \mapsto & W^\top \end{array}$$

von der Kategorie der  $K$ -Vektorräume in ihre eigene opponierte Kategorie, vergleiche [LA1] 2.9.15. Wenn wir es allerdings genau nehmen und ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  festhalten, so werden wir auf diese Weise im allgemeinen nur einen Funktor

$$\mathfrak{U}\text{Mod}_K \rightarrow \mathfrak{V}\text{Mod}_K^{\text{opp}}$$

für ein eventuell größeres Mengensystem  $\mathfrak{V}$  erhalten. Als konkretes Beispiel beachte man, daß über einem endlichen Körper der Dualraum eines abzählbaren Vektorraums im allgemeinen nicht mehr abzählbar ist. Ist jedoch unser Mengensystem  $\mathfrak{U}$  ein „Universum“ im Sinne von 7.11.3 und gehört die Grundmenge unseres Körpers  $K$  zu  $\mathfrak{U}$ , so ist  $\mathfrak{U}\text{Mod}_K$  sogar stabil unter dem Dualraumfunktor.

**Definition 7.2.10.** Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$  heißt auch ein **kontravarianter Funktor von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$** .

7.2.11. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  demnach aus einer Abbildung  $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$  sowie für je zwei Objekte  $X, Y \in \mathcal{A}$  einer Abbildung  $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FY, FX)$  derart, daß gilt  $F(\text{id}) = \text{id}$  und  $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f, g$ .

*Beispiel 7.2.12.* Gegeben Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  bildet man ihr **Produkt**, eine weitere Kategorie  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , wie folgt: Man setzt  $\text{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \text{Ob } \mathcal{A} \times \text{Ob } \mathcal{B}$ , erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien, und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

*Beispiel 7.2.13.* Das Bilden des Homomorphismenraums ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mod}_K^{\text{opp}} \times \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K & & \\ (V, W) & \mapsto & \text{Hom}_K(V, W) & \ni & h \\ (f^\circ, g) \downarrow & \mapsto & \downarrow & & \downarrow \\ (V', W') & \mapsto & \text{Hom}_K(V', W') & \ni & g \circ h \circ f \end{array}$$

Hier sollte der ganz rechte vertikale Pfeil eigentlich ein  $\mapsto$  sein, was ich aber mit meinem Schreibprogramm nicht hingekriegt habe. Die Notation  $\text{Hom}_K(V, K)$  betont, daß wir besagte Menge von Morphismen mit ihrer Vektorraumstruktur betrachten wollen.

*Ergänzendes Beispiel 7.2.14.* Das Bilden des Tensorprodukts ist ein Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mod}_K \times \text{Mod}_K & \rightarrow & \text{Mod}_K & & \\ (V, W) & \mapsto & V \otimes W & & \\ (f, g) \downarrow & \mapsto & f \otimes g \downarrow & & \\ (V', W') & \mapsto & V' \otimes W' & & \end{array}$$

*Ergänzendes Beispiel 7.2.15.* Das Bilden der  $r$ -ten Tensorpotenz nach 6.1.5 ist ein Funktor  $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ ,  $V \mapsto V^{\otimes r}$ ,  $f \mapsto f^{\otimes r}$ . Das Bilden der  $r$ -ten äußeren Potenz nach 6.5.3 ist ein Funktor  $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ ,  $V \mapsto \bigwedge^r V$  mit  $f \mapsto \bigwedge^r f$  nach 6.5.16.

*Beispiel 7.2.16.* Das „Vergessen der Gruppenstruktur“ ist ein Funktor  $v : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$  von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen. Es gibt noch viele weitere derartige **VergiB-Funktoren**.

*Beispiel 7.2.17.* Jeder Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor  $F^{\text{opp}} : \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{opp}}$  zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien. Oft notiert man ihn auch einfach  $F$ .

*Beispiel 7.2.18.* Gegeben ein Körper  $K$  bezeichne  $\text{Modf}_K$  mit  $\mathbf{f}$  für „finitely generated“ die Kategorie der endlich erzeugten  $K$ -Vektorräume und  $\text{Modf}_K^\times$  die zugehörige Isomorphismenkatgorie. Gegeben ein angeordneter Körper  $K$  ist das Bilden der Orientierungsmenge nach [LA1] 6.5.3 ein Funktor

$$\text{or} : \text{Modf}_K^\times \rightarrow \text{Ens}^\times$$

**Definition 7.2.19.** 1. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt **treu**, wenn er Injektionen  $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$  auf den Morphismen induziert, für alle  $A, A' \in \mathcal{A}$ .

2. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt **voll**, wenn er auf den Morphismenmengen Surjektionen  $F : \mathcal{A}(A, A') \twoheadrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$  induziert, für alle  $A, A' \in \mathcal{A}$ .

3. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt **volltreu**, wenn er voll und treu ist, wenn er also er Bijektionen  $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$  auf den Morphismenmengen induziert. Ich notiere volltreue Funktoren gerne  $\xrightarrow{\sim}$ .

4. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt **essentiell surjektiv**, wenn er eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle  $B \in \mathcal{B}$  ein  $A \in \mathcal{A}$  gibt mit  $FA \cong B$ .

5. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist. Ich notiere Äquivalenzen von Kategorien  $\xrightarrow{\sim}$ . Die doppelte Schlange soll andeuten, daß dieser Begriff schwächer ist als der Begriff eines Isomorphismus von Kategorien, wie er im Anschluß eingeführt wird.

6. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt ein **Isomorphismus von Kategorien**, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen, wenn er also ein Isomorphismus ist in der Kategorie der Kategorien aus ???. Ich notiere Isomorphismen von Kategorien  $\xrightarrow{\sim}$ .

*Beispiel 7.2.20.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien  $[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\sim} \{X\}$  zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Monoids der Endomorphismen von  $X$  und der vollen Unterkategorie von  $\mathcal{C}$  mit dem einzigen Objekt  $X$ , indem wir die Identität auf den Morphismenmengen und die einzig mögliche Abbildung auf den Objektmengen nehmen.

*Beispiel 7.2.21.* Sei  $K$  ein Körper. Wir betrachten die Kategorie  $\text{Modf}_K$  aller endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Dann ist unser Realisierungsfunktor  $n \mapsto K^n$  aus 7.2.2 eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Mat}_K \xrightarrow{\sim} \text{Modf}_K$$



zwischen unserer Matrixkategorie  $\text{Mat}_K$  und der Kategorie der endlich erzeugten  $K$ -Vektorräume, aber unser Funktor ist natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Diese Aussage faßt eine Vielzahl von Aussagen der linearen Algebra zusammen und illustriert meines Erachtens recht gut die Kraft und Eleganz der Sprache der Kategorientheorie.

*Ergänzendes Beispiel 7.2.22 (Die Matrixkategorie eines Mengensystems).* Gegeben ein Körper  $K$  und ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  bilden wir die **abstrakte Matrixkategorie**  $\mathfrak{U}\text{Mat}_K$  wie folgt: Objekte sind alle Mengen aus  $\mathfrak{U}$ , in Formeln  $\text{Ob}(\mathfrak{U}\text{Mat}_K) := \mathfrak{U}$ . Die Morphismenmengen erklären wir durch die Vorschrift

$$\mathfrak{U}\text{Mat}_K(X, Y) := \left\{ T : X \times Y \rightarrow K \mid \begin{array}{l} \text{Für jedes } x \in X \text{ gilt} \\ T(x, y) = 0 \text{ für fast alle } y \in Y \end{array} \right\}$$

Zumindest im Fall, daß  $\mathfrak{U}$  keine überabzählbaren Mengen enthält, mag man sich als Elemente dieser Morphismenmengen Matrizen mit möglicherweise unendlich vielen Zeilen und Spalten aber höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen in jeder Spalte denken. Die Verknüpfungen werden in der hoffentlich offensichtlichen Weise durch Summation über gleiche Indizes erklärt. Wir erhalten dann einen Funktor  $\mathfrak{U}\text{Mat}_K \rightarrow \text{Mod}_K$ , der auf Objekten durch die Konstruktion freier Vektorräume  $X \mapsto K\langle X \rangle$  über den entsprechenden Mengen gegeben wird und auf Morphismen leicht vom Leser erraten werden kann. Ist  $\mathfrak{U}$  ein „Universum“ im Sinne von 7.11.3, das den Körper  $K$  enthält, so erweist sich dieser Funktor sogar als eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathfrak{U}\text{Mat}_K \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}\text{Mod}_K$$

7.2.23. Gegeben ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  verstehen wir unter einer  $\mathfrak{U}$ -**Kategorie** eine Kategorie  $\mathcal{C}$ , bei der für alle Objekte  $X, Y \in \mathcal{C}$  die Morphismenmenge zu unserem Mengensystem  $\mathfrak{U}$  gehört, in Formeln  $\mathcal{C}(X, Y) \in \mathfrak{U}$ .

7.2.24. Die Menge aller Funktoren von einer Kategorie  $\mathcal{A}$  in eine Kategorie  $\mathcal{B}$  notieren wir

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

Sie ist eine Teilmenge  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \text{Ens}(\text{Ob } \mathcal{A}, \text{Ob } \mathcal{B}) \times \text{Ens}(\text{Mor } \mathcal{A}, \text{Mor } \mathcal{B})$ . In 7.4.12 werden wir eine Kategorie erklären, deren Objekte gerade die Funktoren  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  alias die Elemente von  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  sind, aber alles zu seiner Zeit.

*Beispiel 7.2.25.* Gegeben ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  und eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  ist die Zuordnung  $Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  ein Funktor  $\mathcal{C}(X, \_) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  und die Zuordnung  $Y \mapsto \mathcal{C}(Y, X)$  ein Funktor  $\mathcal{C}(\_, X) : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}^{\text{opp}}$ .

*Beispiel 7.2.26 (Funktoren zwischen Einobjektkategorien).* Gegeben Monoide  $G, H$  und die zugehörigen Einobjektkategorien  $[G], [H]$  nach 7.1.6 erhalten wir in

der offensichtlichen Weise eine Bijektion zwischen der Menge aller Monoidhomomorphismen  $G \rightarrow H$  und der Menge aller Funktoren  $[G] \rightarrow [H]$ , in Formeln also eine Bijektion

$$\text{Mon}(G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([G], [H])$$

## Übungen

*Übung 7.2.27.* Hat ein Funktor sogar die Eigenschaft, daß alle Morphismen, die er auf Isomorphismen abbildet, bereits zuvor Isomorphismen gewesen sein müssen, so nennt man ihn **konservativ**. Man gebe Beispiele für konservative und nicht-konservative Funktoren.

*Übung 7.2.28.* Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, alias durch Elemente von  $\mathbb{N}$ , alias durch Isomorphieklassen der Matrixkategorie.

*Übung 7.2.29 (Zwei aus Drei für Äquivalenzen von Kategorien).* Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Sind zwei der drei Funktoren  $F, G, GF$  Äquivalenzen von Kategorien, so auch der Dritte.

*Übung 7.2.30.* Bilden wir zu einer Kategorie eine volle Unterkategorie, indem wir aus jeder Isomorphieklasse von Objekten ein Objekt willkürlich auswählen, so ist der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz von Kategorien.

*Übung 7.2.31.* Sind in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  je zwei Objekte isomorph, so ist für jedes Objekt  $X \in \mathcal{C}$  der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\mathcal{C}(X)] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$$

zwischen der Ein-Objekt-Kategorie des Endomorphismenmonoids  $\mathcal{C}(X)$  von  $X$  und unserer Kategorie.

*Übung 7.2.32.* Gegeben Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  liefert jedes Paar  $(F, G)$  von Funktoren  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  einen wohlbestimmten Funktor in die Produktkategorie  $(F, G) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ .

## 7.3 Objekte mit Zusatzstrukturen\*

7.3.1. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  erklären wir eine  $(\mathcal{S}, v)$ -**Struktur auf  $X$**  als eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(S, \varphi)$  bestehend aus einem Objekt  $S \in \mathcal{S}$  und einem Isomorphismus  $\varphi : v(S) \xrightarrow{\sim} X$  mit der Maßgabe, daß  $(S, \varphi)$  äquivalent ist zu  $(T, \psi)$ , wenn es einen Isomorphismus  $i : S \xrightarrow{\sim} T$  gibt mit  $\varphi = \psi \circ v(i)$ .

*Beispiel 7.3.2.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge  $X \in \mathcal{U}$  eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf  $X$ , die  $X$  zu einer Gruppe machen, und der Menge aller  $(\mathcal{U}\text{Grp}, v)$ -Strukturen auf  $X$  für  $v : \mathcal{U}\text{Grp} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  der Vergißfunktors.

*Beispiel 7.3.3.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge  $X \in \mathcal{U}$  eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Verknüpfungen auf  $X$ , die  $X$  zu einer abelschen Gruppe machen, und der Menge aller  $(\mathcal{U}\text{Ab}, v)$ -Strukturen auf  $X$  für  $v : \mathcal{U}\text{Ab} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  der Vergißfunktors.

*Beispiel 7.3.4.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Wir erhalten für jede Menge  $X \in \mathcal{U}$  eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Topologien auf  $X$  und der Menge aller  $(\mathcal{U}\text{Top}, v)$ -Strukturen auf  $X$  für  $v : \mathcal{U}\text{Top} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  der Vergißfunktors.

*Beispiel 7.3.5.* Seien  $k$  ein Körper und  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Wir erhalten für jede abelsche Gruppe  $X \in \mathcal{U}\text{Ab}$  eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge aller Abbildungen  $k \times X \rightarrow X$ , die als Multiplikation mit Skalaren die Gruppe  $X$  zu einem  $k$ -Vektorraum machen, und der Menge aller  $(\mathcal{U}\text{Mod}_k, v)$ -Strukturen auf  $X$  für  $v : \mathcal{U}\text{Mod}_k \rightarrow \mathcal{U}\text{Ab}$  der Vergißfunktors.

7.3.6. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  von Objekten mit  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur sagen wir, unser Morphismus sei **verträglich mit der  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur**, wenn für beliebige Wahlen von Repräsentanten  $(S, \varphi)$  und  $(T, \psi)$  der jeweiligen  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen auf  $X$  und  $Y$  unser  $f$  das Bild unter  $v$  eines Morphismus  $F : S \rightarrow T$  ist, genauer  $f = \psi \circ v(F) \circ \varphi^{-1}$ . Offensichtlich ist die Identität auf einem Objekt mit jeder  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf besagtem Objekt verträglich und die Verknüpfung von verträglichen Morphismen ist wieder verträglich. Die so erklärte Kategorie der **Objekte von  $\mathcal{C}$  mit  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur** notieren wir

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  durch die Vorschrift  $S \mapsto (S, \text{id}_{v(S)})$ .

*Beispiel 7.3.7.* Gegeben ein Mengensystem  $\mathcal{U}$  ist unsere Äquivalenz aus 7.3.6 sogar ein Isomorphismus

$$\mathcal{U}\text{Grp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}\text{Ens}_{(\mathcal{U}\text{Grp}, v)}$$

zwischen der Kategorie aller Mengen  $G \in \mathcal{U}$  mit einer Verknüpfung, die sie zu einer Gruppe macht, und der Kategorie aller Mengen  $G \in \mathcal{U}$  versehen mit einer Äquivalenzklasse von Paaren  $(S, \varphi)$  bestehend aus einem Objekt  $S \in \mathcal{U}\text{Grp}$  zusammen mit einer Bijektion von Mengen  $\varphi : S \xrightarrow{\sim} G$  unter der in 7.3.1 gegebenen Äquivalenzrelation. Dasselbe gilt für das Vergessen der Topologie  $v : \mathcal{U}\text{Top} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  oder das Vergessen der Operation der Skalare  $v : \mathcal{U}\text{Mod}_k \rightarrow \mathcal{U}\text{Ab}$  in der Kategorie der Moduln über einem Ring  $k$  und überhaupt in allen konkreten Anwendungen, die mir in den Sinn kommen.

7.3.8. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  nennen wir einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  **initial**, wenn für alle  $W \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(W, X) = \{e \in \mathcal{C}(W, X) \mid fe \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(W, Y)\}$$

Initiale Morphismen heißen oft **Einbettungen**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung initialer Morphismen initial ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in  $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  nur dann initial sein kann, wenn der erste initial ist. Einen Morphismus in  $\mathcal{S}$  nennen wir  **$v$ -initial**, wenn er unter  $v$  einen  $(\mathcal{S}, v)$ -initialen Morphismus induziert.

*Beispiel 7.3.9.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Im Fall der  $\mathcal{U}$ -Mengen mit  $(\mathcal{U}\text{Grp}, v)$ -Struktur sind genau die injektiven mit der Struktur verträglichen Abbildungen initial. Ist in der Tat  $f : X \hookrightarrow Y$  ein Gruppenhomomorphismus und  $W$  eine Gruppe, so ist eine Abbildung  $e : W \rightarrow X$  genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn  $fe : W \rightarrow Y$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

7.3.10. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  und eine  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf  $Y$  gibt es höchstens eine  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf  $X$  derart, daß  $f$  initial wird. In der Tat, repräsentieren  $(S, \varphi)$  und  $(T, \psi)$  zwei derartige Strukturen, so muß die Identität auf  $X$  verträglich sein sowohl als Morphismus  $(X, S, \varphi) \rightarrow (X, T, \psi)$  als auch als Morphismus in die Gegenrichtung und daraus folgt leicht, daß diese beiden Daten dieselbe Struktur repräsentieren. Wir nennen sie die **induzierte Struktur** oder die **initiale Struktur** auf  $X$ .

*Beispiel 7.3.11.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Im Fall der  $\mathcal{U}$ -Mengen mit  $(\mathcal{U}\text{Top}, v)$ -Struktur alias topologischen Räume aus  $\mathcal{U}$  heißt unsere induzierte Struktur die Initialtopologie und im Fall der Einbettung einer Teilmenge auch die induzierte Topologie oder Spurtopologie oder Teilraumtopologie. In dieser Situation gibt es stets eine initiale Struktur.

*Beispiele 7.3.12.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung  $v : \mathcal{U}\text{Grp} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  existiert eine induzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen, die injektiv sind und deren Bild eine Untergruppe ist. Die induzierte Struktur ist dann die induzierte Gruppenstruktur. Eine Teilmenge  $X \subset Y$  einer Menge  $Y$  mit  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur nennt man ganz allgemein ein  **$(\mathcal{S}, v)$ -Unterobjekt**, wenn sie eine induzierte Struktur besitzt. Beispiele sind Untergruppen, Untervektorräume, affine Teilräume, Unterringe und so weiter.

7.3.13. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  ist auch  $v^{\text{opp}} : \mathcal{S}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{opp}}$  ein treuer Funktor und wir erhalten in der offensichtlichen Weise einen Isomorphismus von Kategorien

$$(\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)})^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{(\mathcal{S}^{\text{opp}}, v^{\text{opp}})}^{\text{opp}}$$

Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  mit  $f^\circ$  initial in Bezug auf die jeweiligen  $(\mathcal{S}^{\text{opp}}, v^{\text{opp}})$ -Strukturen nennen wir **final**. Ausgeschrieben bedeutet das, daß für

jedes weitere Objekt  $Z \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  gilt

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(Y, Z) = \{g \in \mathcal{C}(Y, Z) \mid gf \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}(X, Z)\}$$

Finale Morphismen heißen oft **Quotienten**. Es ist klar, daß jede Verknüpfung finaler Morphismen final ist und daß eine Verknüpfung von zwei Morphismen in  $\mathcal{C}_{(\mathcal{S}, v)}$  nur dann final sein kann, wenn der zweite final ist. Einen Morphismus in  $\mathcal{S}$  nennen wir  **$v$ -final**, wenn er unter  $v$  einen  $(\mathcal{S}, v)$ -finalen Morphismus induziert.

7.3.14. Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  und eine  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf  $X$  gibt es höchstens eine  $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur auf  $Y$  derart, daß  $f$  final wird. Wir nennen sie die **koinduzierte Struktur** oder die **finale Struktur** auf  $Y$ .

*Beispiel 7.3.15.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Im Fall der  $\mathcal{U}$ -Mengen mit  $(\mathcal{U}\text{Top}, v)$ -Struktur alias topologischen Räume heißt unsere koinduzierte Struktur die Finaltopologie und insbesondere im Fall von surjektiven Abbildungen auch die Quotiententopologie.

*Beispiele 7.3.16.* Sei  $\mathcal{U}$  ein Mengensystem. Im Fall des Vergessens der Verknüpfung  $v : \mathcal{U}\text{Grp} \rightarrow \mathcal{U}\text{Ens}$  existiert eine koinduzierte Struktur genau für diejenigen Abbildungen von einer Gruppe in eine Menge, die faktorisieren in einen surjektiven Gruppenhomomorphismus gefolgt von einer Bijektion, und die koinduzierte Struktur ist die von einer und jeder derartigen Bijektion induzierte Gruppenstruktur.

*Vorschau 7.3.17.* In [TM] 1.6.16 und [TM] 1.7.8 führen wir allgemeiner „gesamthaft initiale“ und „gesamthaft finale“ Familien ein.

## Übungen

*Übung 7.3.18.* Gegeben ein treuer Funktor  $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ , der zusätzlich konservativ ist, kann die Identität auf einem Objekt  $X \in \mathcal{C}$  nicht für zwei unterschiedliche  $(\mathcal{S}, v)$ -Strukturen  $(S, \varphi)$  und  $(T, \psi)$  auf  $X$  ein Morphismus  $(X, S, \varphi) \rightarrow (X, T, \psi)$  sein.

## 7.4 Transformationen

7.4.1. Bis hierher hat sich unsere Theorie noch in leidlich vertrauten Bahnen bewegt: Wir haben eben eine neue Art von Strukturen erklärt, die Kategorien, und dazwischen strukturerhaltende Abbildungen alias Morphismen betrachtet, die Funktoren. Insoweit paßt alles noch in den strukturellen Rahmen, an den man in der linearen Algebra durch das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen oder Gruppen und Gruppenhomomorphismen gewöhnt worden ist. Das Neue

bei der Kategorientheorie ist nun, daß es auch „Morphismen zwischen Morphismen“ gibt. Sie heißen „Transformationen von Funktoren“ und sind das Thema dieses Abschnitts.

**Definition 7.4.2.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren. Eine **Transformation**  $\tau : F \Rightarrow G$  ist eine Vorschrift, die jedem Objekt  $X \in \mathcal{A}$  einen Morphismus  $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$  zuordnet derart, daß für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$  das Rechteck

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

in  $\mathcal{B}$  kommutiert. In Formeln meint das die Gleichheit  $(Gf) \circ \tau_X = \tau_Y \circ (Ff)$  in der Morphismenmenge  $\mathcal{B}(FX, GY)$ . Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint, muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle  $\tau_X$  Isomorphismen, so nenne ich  $\tau$  eine **Isotransformation** und notiere sie  $\xrightarrow{\sim}$ , aber diese Terminologie ist nicht gebräuchlich. In der Literatur spricht man eher von einem **Isomorphismus von Funktoren** oder auch von einer **Äquivalenz von Funktoren**. Gibt es zwischen zwei Funktoren eine Isotransformation, so heißen sie **isomorph**.

**7.4.3 (Diskussion der Doppelpfeil-Notation).** Ich finde die Notation von Transformationen durch Doppelpfeile didaktisch hilfreich in derselben Weise wie die Notation  $\vec{v}$  für Vektoren am Anfang der linearen Algebra. Andererseits werden wir sie nicht konsequent durchhalten können und das ist auch nicht sinnvoll, denn wie in 7.4.12 erklärt können auch die Transformationen als Morphismen einer Kategorie aufgefaßt werden, der „Funktorkategorie“.

**7.4.4 (Diskussion der Terminologie).** In der Literatur heißen unsere Transformationen meist „natürliche Transformationen“. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der „natürlichen“ Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller  $\mathbb{R}$ -Vektorräume in den Bidualraumfunktors gerne die in 7.4.9 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber vielleicht schon die „natürlichste“.

**Beispiel 7.4.5 (Die Länge als Transformation).** Ich betrachte den Vergißfunktors und den Längengeradenfunktors 7.2.4 von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der reellen Vektorräume. Schalten wir noch einen weiteren Vergißfunktors nach, so werden sie zu Funktoren  $\text{Euk} \rightarrow \text{Ens}$ . Unsere in 1.5.11

erklärten Längenabbildungen  $\| \cdot \|_V : V \rightarrow \mathbb{L}(V)$  bilden dann in ihrer Gesamtheit eine Transformation  $\text{verg} \Rightarrow \mathbb{L}$  zwischen Funktoren  $\text{Euk} \rightarrow \text{Ens}$ . Ob ich nämlich erst einen Vektor mittels eines Homomorphismus von euklidischen Vektorräumen in einen weiteren euklidischen Vektorraum abbilde und dann seine Länge in Bezug auf den Bildraum nehme, oder erst seine Länge nehme und diese mittels des auf den Längengeraden induzierten Homomorphismus zu einer Länge in Bezug auf den Bildraum mache, es kommt beidesmal dasselbe heraus.

**Beispiel 7.4.6 (Winkelmaße als Transformationen).** Wir betrachten den Funktor  $W : \text{KongEb} \rightarrow \text{Grp}$ , der jeder Kongruenzebene  $(E, K)$  ihre Winkelgruppe  $W(E) := \vec{K}^+$  zuordnet, also die Gruppe ihrer orientierungserhaltenden Richtungskongruenzen. Unsere Winkelmaße aus 1.8.1 können wir auffassen als Transformationen

$$\text{or}_{\mathbb{R}} \circ \text{Richt} \Rightarrow W$$

von Funktoren  $\text{KongEb} \rightarrow \text{Grp}$  alias „natürliche“ Gruppenhomomorphismen  $\text{or}_{\mathbb{R}}(\vec{E}) \rightarrow W(E)$  von der Orientierungsgerade in die Winkelgruppe.

7.4.7. Winkelmaße sind etwas grundsätzlich anderes als Einheiten. Ein Winkelmaß in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet, ein Winkelmaß in allen Kongruenzebenen anzugeben. Eine Längeneinheit in einer Kongruenzebene anzugeben bedeutet dahingegen keineswegs, eine Längeneinheit in allen Kongruenzebenen anzugeben.

**Beispiel 7.4.8 (Das kanonische Skalarprodukt als Transformation).** Unsere kanonischen Skalarprodukte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \otimes V \rightarrow \mathbb{L}(V)^{\otimes 2}$  für euklidische Vektorräume aus 6.4.6 bilden in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

zwischen Funktoren  $\text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$  von der Kategorie der euklidischen Vektorräume in die Kategorie der  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

**Beispiel 7.4.9 (Evaluation als Transformation).** Gegeben ein Körper  $K$  bezeichne  $B : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  den **Bidualraumfunktor**, der jedem  $K$ -Vektorraum  $V$  seinen Bidualraum  $BV := V^{\top\top}$  zuordnet. So bilden die Evaluationsabbildungen  $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{\top\top}, v \mapsto (f \mapsto f(v))$  in ihrer Gesamtheit eine Transformation

$$\text{ev} : \text{Id} \Rightarrow B$$

und eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume, vergleiche [LA1] 2.9.26. Oft formalisiert man Situationen dieser Art nicht bis ins Letzte aus und spricht von **kanonischen Abbildungen** beziehungsweise **kanonischen Isomorphismen**, wenn bei formalerer Betrachtung Abbildungen  $\tau_X : FX \rightarrow GX$  oder Isomorphismen  $\tau_X : FX \xrightarrow{\sim} GX$  gemeint sind, die in ihrer Gesamtheit eine Transformation beziehungsweise Isotransformation von Funktoren  $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$  bilden.

**Beispiel 7.4.10 (Dualraum und Transponieren).** Seien  $K$  ein Körper und  $D : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K^{\text{opp}}$  der **Dualraumfunktork**, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei weiter  $\text{Mat}_K$  die Matrixkategorie aus 7.1.7 und  $T : \text{Mat}_K \rightarrow \text{Mat}_K^{\text{opp}}$  der Funktor, der die Objekte festhält und Matrizen transponiert. Sei schließlich  $R : \text{Mat}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  unser Realisierungsfunktor  $n \mapsto K^n$  aus 7.2.2 und bezeichne  $R^{\text{opp}}$  den entsprechenden Funktor zwischen den jeweils opponierten Kategorien. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : R^{\text{opp}}T \xrightarrow{\sim} DR$$

durch die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n$  alias jedem Objekt  $n \in \text{Mat}_K$  den offensichtlichen Isomorphismus  $\tau_n : K^n \xrightarrow{\sim} (K^n)^\top$  zuordnet. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa in diesem Beispiel unser  $\tau$  ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K & \xrightarrow{T} & \text{Mat}_K^{\text{opp}} \\ R \downarrow & \tau \swarrow \sim & \downarrow R^{\text{opp}} \\ \text{Mod}_K & \xrightarrow{D} & \text{Mod}_K^{\text{opp}} \end{array}$$

**Beispiel 7.4.11 (Tensor und Hom).** Die natürlichen Abbildungen

$$\text{can} : V^\top \otimes_K W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$$

aus 6.1.20 für  $K$ -Vektorräume  $V, W$  liefern eine Transformation zwischen den durch diese Vorschriften gegebenen Funktoren

$$\text{Mod}_K^{\text{opp}} \times \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$$

**7.4.12 (Kategorien von Funktoren).** Sind  $\tau : F \Rightarrow G$  und  $\sigma : G \Rightarrow H$  Transformationen, so ist auch  $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$  gegeben durch  $(\sigma \circ \tau)_X := \sigma_X \circ \tau_X$  für jedes Objekt  $X$  der Ausgangskategorie von  $F$  eine Transformation. Des weiteren gibt es für jeden Funktor  $F$  die **identische Transformation**  $\text{id} = \text{id}_F$  von besagtem Funktor zu sich selber, gegeben durch  $(\text{id}_F)_X := \text{id}_{FX}$  für jedes Objekt  $X$  der Ausgangskategorie unseres Funktors. Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien, so bilden die Funktoren  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sogar selbst eine Kategorie, mit Funktoren als Objekten und Transformationen als Morphismen und der eben erklärten Verknüpfung von Transformationen als Verknüpfung von Morphismen. Ich verwende für diese **Funktorkategorie** verschiedene Notationen. Erst einmal dieselbe Notation  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  wie für die Menge der Objekte, dann die Notation  $\underline{\text{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  wenn es darum geht, die Zusatzstruktur als Kategorie zu betonen, weiter die Notation  $(\mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B})$ , weil es sich



um einen Spezialfall von „internem Hom“ erweisen wird, und als besonders kurze Form die exponentielle Notation  $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ , so daß etwa für Funktoren  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  die Menge der Transformationen

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(F, G) = \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$$

notiert werden kann. Wenn die Kategorien selber durch größere Ausdrücke gegeben werden, sind für die Menge der Transformationen auch abkürzende Notationen wie etwa  $\text{Trans}(F, G)$  sinnvoll und üblich. Unsere Isotransformationen sind genau die Isomorphismen der Funktorkategorie.

*Ergänzung 7.4.13 (Exponentialgesetz für Kategorien).* Man zeige, daß man für je drei Kategorien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  eine Bijektion

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \underline{\text{Cat}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

erhält durch die Vorschrift  $F \mapsto \tilde{F}$  mit  $\tilde{F}(A, B) = (F(A))(B)$  auf Objekten und eine vom Leser zu spezifizierende Vorschrift auf Morphismen. Man baut diese auch leicht zu einem Isomorphismus von Kategorien aus, und das folgt alternativ auch aus allgemeinen Aussagen zu „internem Hom“, wie sie etwa in [TSK] 1.4.11 diskutiert werden.

*Beispiel 7.4.14.* Seien  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren und  $\tau : F \Rightarrow G$  eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation  $H\tau : HF \Rightarrow HG$ . Gegeben ein weiterer Funktor  $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  erhalten wir in offensichtlicher Weise ebenso eine Transformation  $\tau K : FK \Rightarrow GK$ . Offensichtlich liefern diese Konstruktionen ihrerseits Funktoren  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  und  $\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$  zwischen den entsprechenden Funktorkategorien, die wir als das **Nachscha**lten von  $H$  beziehungsweise **Vorsch**alten von  $K$  bezeichnen.

**7.4.15 (Schwierigkeiten der Notation).** Die Notationen  $\tau K$  und  $H\tau$  führen leicht zu Verwirrung, sobald nicht aus der Art der Symbole heraus klar ist, welche Symbole Funktoren und welche Transformationen darstellen. Ich kenne keine generelle Lösung für diese Schwierigkeiten der Notation. In diesem Abschnitt habe ich versucht, eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch zu erreichen, daß ich systematisch lateinische Großbuchstaben für Funktoren und kleine griechische Buchstaben für Transformationen verwende.

## Übungen

*Übung 7.4.16.* Gegeben ein Körper  $K$  zeige man, daß der Funktor  $\text{Mod}_K^{\times} \rightarrow \text{Mod}_K^{\times}$  von der Isomorphiekategorie der endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräume zu sich selber, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet und jedem Isomorphismus die Inverse der transponierten Abbildung  $\varphi \mapsto (\varphi^{\top})^{-1}$ , nicht isomorph

ist zum Identitätsfunktork. Hinweis: Man passe im Fall des Körpers mit zwei Elementen besonders gut auf.

*Übung 7.4.17.* Seien  $K$  ein Körper und  $\text{Id} : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  der Identitätsfunktork. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktork zu sich selber. Ebenso bestimme man alle Transformationen von diesem Funktork zum Bidualraumfunktork.

*Übung 7.4.18.* Sind zwei Funktoren isomorph und ist der eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der andere.

*Übung 7.4.19.* Man diskutiere, inwiefern die in 6.5.3 für jeden Vektorraum  $V$  konstruierten kanonischen Isomorphismen  $(\bigwedge^r V)^\top \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$  eine Isotransformation bilden. Idem für die in 6.5.9 für jeden endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  konstruierten kanonischen Isomorphismen  $\bigwedge^r(V^\top) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^r(V)$ .

*Übung 7.4.20.* Gegeben ein Monoid  $G$  heißt eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von  $G$ -Mengen **äquivariant**, wenn gilt  $\phi(gx) = g\phi(x)$  für alle  $g \in G$  und  $x \in X$ . Die  $G$ -Mengen mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden dann eine Kategorie, für die ich die beiden Notationen  $G\text{-Ens} = \text{Ens}_{G\backslash}$  verwende. Bilden wir zu unserem Monoid  $G$  die Ein-Objekt-Kategorie  $[G]$ , so liefert der hoffentlich offensichtliche Funktork einen Isomorphismus von Kategorien

$$G\text{-Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([G], \text{Ens})$$

*Ergänzende Übung 7.4.21 (Komplexifizierung einer Reellifizierung).* Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktoren  $\text{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{C}}$  mittels der Abbildungen  $i_V : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\sim} V \oplus \bar{V}$  gegeben durch  $\alpha \otimes v \mapsto (\alpha v, \alpha \bar{v})$  in den Notationen 1.12.33. Die inverse Isotransformation wird beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$(v, \bar{w}) \mapsto (1/2) \otimes (v + w) - (i/2) \otimes (iv - iw)$$

Im übrigen bildet unser Isomorphismus oben den Eigenraum  $\text{Eig}(1 \otimes i | \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V; i)$  isomorph auf  $V$  ab und den Eigenraum  $\text{Eig}(1 \otimes i | \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V; -i)$  isomorph auf  $\bar{V}$ . Der schieflineare Automorphismus  $\alpha \otimes v \mapsto \bar{\alpha} \otimes v$  von  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  schließlich entspricht unter unserem Isomorphismus dem schieflinearen Automorphismus  $(v, \bar{w}) \mapsto (w, \bar{v})$  von  $V \oplus \bar{V}$ .

*Ergänzende Übung 7.4.22.* Wir erhalten eine Isotransformation zwischen Funktoren  $\text{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{C}}^{\text{opp}}$  mittels der Abbildungen  $\bar{V}^\top \xrightarrow{\sim} \bar{V}^\top$  gegeben durch  $\bar{\varphi} \mapsto \bar{c} \circ \varphi$  in den Notationen 1.12.33, mit  $\bar{c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der komplexen Konjugation. Diese Identifikation scheint mir so kanonisch, daß ich auch oft  $\bar{\varphi}$  statt  $\bar{c} \circ \varphi$  schreiben werde.

**Ergänzung 7.4.23 (Dualraum und Restriktion der Skalare).** Gegeben ein komplexer Vektorraum  $V$  erklären wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top}$$

zwischen der Reellifizierung seines Dualraums und dem Dualraum seiner Reellifizierung durch die Vorschrift  $\lambda \mapsto 2\operatorname{Re}\lambda$ . Es kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top} \\ i_{V^{\top}} \downarrow \wr & & \wr \uparrow i_V^{\top} \\ V^{\top} \oplus \overline{V^{\top}} & \xrightarrow{\sim} & V^{\top} \oplus \overline{V^{\top}} \end{array}$$

Hier kommen die Vertikalen von 7.4.21 her, unten ist die von 7.4.22 gelieferte Abbildung  $(\lambda, \bar{\mu}) \mapsto (\lambda, \bar{c} \circ \mu)$  gemeint mit  $\bar{c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der komplexen Konjugation, und in der oberen Horizontale die Abbildung, die aus obiger Identifikation  $\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}} V)^{\top}$  unter der Komplexifizierung entsteht, gefolgt von der Identifikation  $(W^{\top})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (W_{\mathbb{C}})^{\top}$  aus 6.1.41. Der Faktor 2 zu Beginn scheint mir nicht nur angemessen, da er obiges Diagramm zum Kommutieren bringt, sondern auch, da man allgemeiner für jede „endliche separable Körpererweiterung“ vernünftigerweise einen natürlichen Isomorphismus  $\operatorname{res}_K^k(V^{\top}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{res}_K^k V)^{\top}$  erklärt durch die Vorschrift  $\lambda \mapsto S_K^k \circ \lambda$  mit  $S_K^k : K \rightarrow k$  der Spur aus [KAG] 8.3.1.

**Ergänzende Übung 7.4.24.** Gegeben ein Körper  $K$  erhalten wir eine Isotransformation von Funktoren  $\operatorname{Mod}_K \times \operatorname{Mod}_K \rightarrow \operatorname{Mod}_K$  mittels der durch das Dachprodukt gegebenen Abbildungen

$$\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (V \oplus W)$$

Zusammen mit Übung 7.4.21 erhalten wir insbesondere Isotransformationen von Funktoren  $\operatorname{Mod}_{\mathbb{C}} \rightarrow \operatorname{Mod}_{\mathbb{C}}$  alias für komplexe Vektorräume  $V$  kanonische Isomorphismen  $\bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j \overline{V} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^k (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$ .

**Ergänzende Übung 7.4.25.** Gegeben Funktoren  $F, F' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G, G' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  sowie Transformationen  $\alpha : F \Rightarrow F'$  und  $\beta : G \Rightarrow G'$  gilt die Gleichheit  $\beta F' \circ G\alpha = G'\alpha \circ \beta F$  von Transformationen  $GF \Rightarrow G'F'$ . Wir notieren diese Transformation auch  $\alpha * \beta : GF \Rightarrow G'F'$  und nennen sie die **Juxtaposition** unserer beiden Transformationen. Unsere Identität ist auch gleichbedeutend zu der Aussage, daß das Nachschalten einen Funktor  $\operatorname{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \operatorname{Cat}(\mathcal{B}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$  liefert, oder auch in ausführlicherer Notation das Vorschalten einen Funktor

$$\operatorname{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \operatorname{Cat}(\operatorname{Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}), \operatorname{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$$

*Übung 7.4.26.* Man zeige: Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es eine Äquivalenz von Kategorien in die Gegenrichtung  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  gibt nebst einer Isotransformation  $\tau : \text{Id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} GF$ . Die Äquivalenz  $G$  oder genauer das Paar  $(G, \tau)$  heißt dann ein **quasiinverser Funktor zu  $F$** . Man zeige weiter: Zu jedem Paar  $(G, \tau)$  wie eben gibt es genau eine Isotransformation  $\eta : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{B}}$  mit  $(\eta F) \circ (F\tau) = \text{id}_F$ .

*Übung 7.4.27.* Man zeige: Genau dann ist ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Äquivalenz von Kategorien, wenn es einen Funktor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  gibt derart, daß  $FG$  isomorph ist zum Identitätsfunktor auf  $\mathcal{B}$  und  $GF$  isomorph zum Identitätsfunktor auf  $\mathcal{A}$ .

*Übung 7.4.28.* Man zeige: Gegeben eine Äquivalenz von Kategorien  $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$  und ein Funktor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  nebst einer Isotransformation  $\tau : FG \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{A}}$  ist auch  $G$  eine Äquivalenz von Kategorien und  $(G, \tau)$  quasiinvers zu  $F$ .

*Übung 7.4.29 (Äquivalenzen von Funktorkategorien).* Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und ist  $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$  eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Vorschalten von  $K$  eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich  $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$  eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von  $H$  eine Äquivalenz von Funktorkategorien

$$\text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

## 7.5 Natürliche Konstruktionen in der Geometrie

**7.5.1 (Kanonische Skalarprodukte als Transformationen).** Wir interessieren uns nun für die Kategorie  $\text{Euk}$  der euklidischen Vektorräume und für Funktoren

$$\text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$$

Beispiele sind das Vergessen der euklidischen Struktur  $\text{verg}$  oder das Bilden der Längengerade  $\mathbb{L}$  oder Tensorpotenzen dieser Funktoren wie etwa  $\text{verg}^{\otimes r}$  oder  $\mathbb{L}^{\otimes r}$ . Unsere kanonischen Skalarprodukte sind Transformationen

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

von Funktoren alias Morphismen in der Funktorkategorie  $\text{Cat}(\text{Euk}, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$ .

**7.5.2 (Kanonische Skalarprodukte brauchen Einheiten).** Wir betrachten den konstanten Funktor  $C_{\mathbb{R}} : \text{Euk} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}$ , der jedem euklidischen Vektorraum den

reellen Vektorraum  $\mathbb{R}$  zuordnet und jeder euklidischen linearen Abbildung die Identität. Wir zeigen, daß es außer der Nulltransformation keine Transformation

$$\text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}$$

gibt. In der Tat ist die Multiplikation mit jeder reellen Zahl  $\lambda \neq 0$  für jeden euklidischen Vektorraum  $V$  eine euklidische Abbildung  $(\lambda \cdot) : V \rightarrow V$  und jede bilineare Abbildung  $\eta : V \times V \rightarrow C_{\mathbb{R}}$  mit  $\eta(v, w) = \eta(\lambda v, \lambda w) \forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$  ist offensichtlich Null. Salopp gesprochen gibt es also „kein kanonisches Skalarprodukt auf euklidischen Räumen mit Werten in den reellen Zahlen“.

**7.5.3 (Kanonische Spatprodukte als Transformation).** Nun halten wir  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  fest und interessieren uns für die Kategorie  $\text{Euk}_n$  der  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorräume und die Funktorkategorie  $\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$ . Zu dieser Funktorkategorie gehören etwa die Funktoren  $\text{verg}^{\otimes n} : V \mapsto V^{\otimes n}$  und  $\text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n} : V \mapsto \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$  und eine Transformation  $\tau : \text{verg}^{\otimes n} \Rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$  wird gegeben wird durch die Gesamtheit der in 6.4.3 konstruierten linearen Abbildungen  $\tau_V : V^{\otimes n} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes n}$  und im Fall  $n = 3$  speziell durch unsere kanonischen Spatprodukte

$$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle : V^{\otimes 3} \rightarrow \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)^{\otimes 3}$$

Man überzeugt sich unschwer, daß wir auf diese Weise sogar für jedes  $n$  eine Isotransformation  $\tau : \bigwedge^n \text{verg} \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}$  erhalten.

**7.5.4 (Kanonische Kreuzprodukte als Transformation).** Das Kreuzprodukt ist eine Transformation  $\times : \text{verg}^{\otimes 2} \Rightarrow \text{verg} \otimes \text{or}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{L}$  alias ein Morphismus in der Funktorkategorie  $\text{Cat}(\text{Euk}_3, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$ , der gegeben wird durch die in 6.4.9 konstruierten Morphismen

$$\times : V \otimes V \rightarrow V \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \mathbb{L}(V)$$

**7.5.5 (Klassifikationsfragen und Gruppenhomomorphismen).** Um die Funktorkategorie  $\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}})$  für vorgegebenes  $n$  besser zu verstehen, mag man von der Erkenntnis ausgehen, daß in der Kategorie  $\text{Euk}_n$  der  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorräume je zwei Objekte isomorph sind und nach 7.2.31 folglich der Einbettungsfunktor eine Äquivalenz

$$[\text{Euk}(\mathbb{R}^n)] \xrightarrow{\sim} \text{Euk}_n$$

ist. Die Automorphismengruppe des  $\mathbb{R}^n$  mit seiner Standardstruktur als euklidischer Raum ist nun die Gruppe  $\text{GO}(n) := \mathbb{R}^\times \text{O}(n) = \text{Euk}(\mathbb{R}^n)$  aller seiner **linearen Ähnlichkeiten**. Wir können so unsere Äquivalenz von oben umschreiben zu einer Äquivalenz  $[\text{GO}(n)] \xrightarrow{\sim} \text{Euk}_n$ . Bezeichnet andererseits  $\text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$  die

Kategorie der  $d$ -dimensionalen reellen Vektorräume, so erhalten wir ebenso eine Äquivalenz  $[\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)] \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}$ . Weil nach 7.4.29 Äquivalenzen von Kategorien Äquivalenzen von Funktorkategorien induzieren, erhalten wir so Äquivalenzen von Kategorien

$$\text{Cat}(\text{Euk}_n, \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}([\text{GO}(n)], \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{d\text{-dim}}) \xleftarrow{\sim} \text{Cat}([\text{GO}(n)], [\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$$

und damit nach 7.2.28 Bijektionen zwischen den jeweiligen Mengen von Isomorphieklassen. Objekte von  $\text{Cat}([\text{GO}(n)], [\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)])$  sind nun Monoidhomomorphismen  $\text{GO}(n) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(d)$  alias Gruppenhomomorphismen  $\text{GO}(n) \rightarrow \text{GL}(d; \mathbb{R})$ , und zwei solche Gruppenhomomorphismen  $\phi, \psi$  sind isomorphe Objekte genau dann, wenn es  $A \in \text{GL}(d; \mathbb{R})$  gibt mit  $(\text{int } A) \circ \phi = \psi$ . So erkennen wir zum Beispiel, daß Funktoren, die jedem  $n$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum einen eindimensionalen Vektorraum zuordnen, klassifiziert werden durch die Menge aller Gruppenhomomorphismen  $\text{GO}(n) \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$ . Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele für solche Funktoren in die Kategorie der eindimensionalen reellen Vektorräume und die zugehörigen Gruppenhomomorphismen.

Funktoren	$\text{Euk}_n \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{R}}^{1\text{-dim}}$	Morphismen	$\text{GO}(n) \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$
konstanter Funktor	$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$	konstanter	1
Maximalpotenz	$\bigwedge^n$	Determinante	$\det$
Orientierungsgerade	$\text{or}_{\mathbb{R}}$		$\det /  \det $
Längengerade	$\mathbb{L}$		$\sqrt[n]{ \det }$

## Übungen

*Ergänzende Übung 7.5.6.* Gibt es für zweidimensionale euklidische Vektorräume  $V$  nichttriviale natürliche Gruppenhomomorphismen  $\text{or}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \text{O}(V)$  von der Orientierungsgerade in die orthogonale Gruppe?

## 7.6 Köcher\*

7.6.1. Der Begriff einer Transformation ist in noch größerer Allgemeinheit natürlich und sinnvoll, wie hier kurz skizziert werden soll.

**Definition 7.6.2.** Ein **Köcher** ist ein Datum  $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$  bestehend aus zwei Mengen  $P, E$  und zwei Abbildungen  $a, e : P \rightarrow E$ . Wir nennen die Elemente von  $E$  die **Ecken** oder auch **Punkte** des Köchers und die Elemente von  $P$  seine **Pfeile**. Für einen Pfeil  $\vec{p} \in P$  nennen wir  $a(\vec{p})$  seinen **Anfangspunkt** und  $e(\vec{p})$  seinen

**Endpunkt.** Ein **Morphismus**  $F$  von unserem Köcher in einen weiteren Köcher  $(P', E', a', e')$  ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung  $F : P \rightarrow P'$  und einer Abbildung  $F : E \rightarrow E'$  derart, daß gilt  $Fa = a'F$  und  $Fe = e'F$ . Wir erhalten so die Kategorie der Köcher

Car

Ähnlich wie bei Kategorien schreiben wir auch gerne abkürzend  $\mathcal{Q}$  für die Eckenmenge eines Köchers  $\mathcal{Q} = (P, E, a, e)$  und  $\mathcal{Q}(x, y)$  für die Menge der Pfeile mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $y$ .

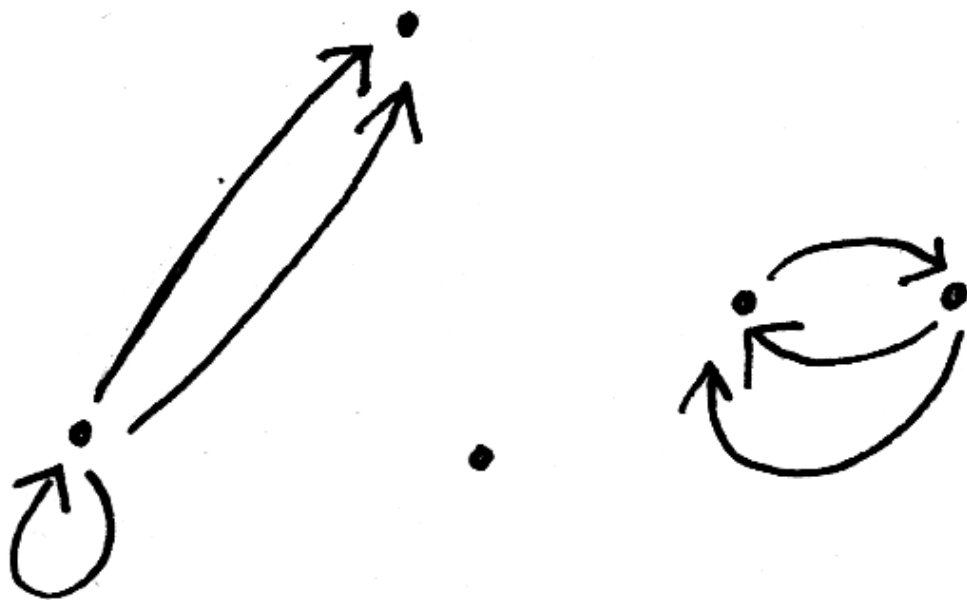
7.6.3. Auf Englisch sagt man **quiver**, auf Französisch **carquois**. Auf Englisch heißen die Ecken **vertices** und die Pfeile **arrows** oder **edges**.

7.6.4. Jede Kategorie liefert einen Köcher, mit den Objekten als Ecken und den Morphismen als Pfeilen. Zu jeder Menge  $\Omega$  bilden wir den **Ein-Punkt-Köcher**  $[\Omega]$ , mit nur einem Punkt  $*$  und für jedes  $\omega \in \Omega$  einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selbst. Ein Köcher heißt **endlich**, wenn er nur endlich viele Punkte und Pfeile hat. Manche Autoren nennen einen Köcher auch ein **Diagrammschema**. Ein Köchermorphismus von einem Köcher in eine Kategorie heißt eine **Darstellung unseres Köchers** in besagter Kategorie oder auch eine **Realisierung unseres Diagrammschemas** in besagter Kategorie oder, wenn wir auf das zugrundeliegende Diagrammschema nicht Bezug nehmen wollen, ein **Diagramm** in besagter Kategorie.

*Ergänzung 7.6.5.* Bezeichne  $\Rightarrow$  die Kategorie mit zwei Objekten Pf, Ec und vier Morphismen, von denen Zwei die Identitäten sind und Zwei von Pf nach Ec gehen und „Anfang“ und „Ziel“ heißen mögen. Dann kann die Kategorie der Köcher verstanden werden als die Funktorkategorie  $\text{Cat}(\Rightarrow, \text{Ens})$ .

*Ergänzung 7.6.6.* Eine **Verknüpfung auf einem Köcher**  $\mathcal{Q}$  ist eine Sammlung von Abbildungen  $\mathcal{Q}(x, y) \times \mathcal{Q}(y, z) \rightarrow \mathcal{Q}(x, z)$  für alle  $x, y, z \in \mathcal{Q}$ . Einen Köcher mit Verknüpfung nennen wir auch einen **Magmaoid**. Ein **Morphismus von Magmaoiden** ist ein Köchermorphismus, der mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Eine Kategorie ist in dieser Terminologie Magmaoid, das noch zusätzliche Eigenschaften hat, die man „Assoziativität“ und „Existenz von Identitätspfeilen“ nennen mag und die wir zur Bedingung **unitärassoziativ** zusammenfassen.

**Definition 7.6.7.** Seien  $\mathcal{Q}$  ein Köcher,  $\mathcal{B}$  eine Kategorie und  $F, G : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{B}$  Köchermorphismen. Eine **Transformation**  $\tau : F \Rightarrow G$  ist eine Vorschrift, die jeder Ecke  $x \in \mathcal{Q}$  einen Morphismus  $\tau_x \in \mathcal{B}(F(x), G(x))$  zuordnet derart, daß



Veranschaulichung eines endlichen Köchers mit 5 Ecken und 6 Pfeilen.



für jeden Pfeil  $\vec{p} : x \rightarrow y$  in unserem Köcher  $\mathcal{Q}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ F(\vec{p}) \downarrow & & \downarrow G(\vec{p}) \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

in unserer Kategorie  $\mathcal{B}$  kommutiert. Sind alle  $\tau_x$  Isomorphismen, so heißt  $\tau$  eine **Isotransformation**. Die Menge aller Transformationen bezeichnen wir mit  $\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{B})(F, G)$  oder  $\text{Trans}_{\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{B}}(F, G)$  oder abkürzend mit  $\text{Trans}_{\mathcal{Q}}(F, G)$  oder auch nur mit  $\text{Trans}(F, G)$ .

7.6.8. Wie in 7.4.12 die Funktoren bilden für jeden Köcher  $\mathcal{Q}$  und jede Kategorie  $\mathcal{C}$  die Köchermorphismen  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{C}$  die Objekte einer Kategorie  $\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$  mit Transformationen als Morphismen.

*Beispiel 7.6.9.* Seien  $K$  ein Körper und  $\downarrow$  der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen. Die Isomorphieklassen in der Kategorie von Köchermorphismen  $\text{Car}(\downarrow, \text{Modf}_K)$  werden durch die Theorie der Smith-Normalform [LA1] 2.5.7 bestimmt: Die Dimensionen der beiden beteiligten Vektorräume sowie der Rang der linearen Abbildung legen eine Darstellung dieses Köchers in endlichdimensionalen Vektorräumen bereits bis auf Isomorphie eindeutig fest.

*Beispiel 7.6.10.* Seien  $K$  ein Körper und  $\circlearrowright$  der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil von diesem Punkt zu sich selber. Die Isomorphieklassen in der Kategorie  $\text{Car}(\circlearrowright, \text{Modf}_K)$  werden zumindest im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers  $K$  bestimmt durch die Theorie der Jordan'schen Normalform 3.4.5.

## Übungen

*Übung 7.6.11.* Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  Köcher und  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  Kategorien. Ist  $K : \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$  ein Isomorphismus von Köchern, so liefert das Vorschalten von  $K$  einen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$$

Ist ähnlich  $H : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$  eine Äquivalenz von Kategorien, so liefert das Nachschalten von  $H$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$$

*Übung 7.6.12.* Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{Q}$  Köcher und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$  ein Köchermorphismus, der für je zwei Ecken  $x, y \in \mathcal{C}$  eine Surjektion  $\mathcal{C}(x, y) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}(x, y)$  induziert. Gegeben eine Verknüpfung auf  $\mathcal{C}$  gibt es höchstens eine Verknüpfung auf  $\mathcal{Q}$  derart, daß  $F$

ein Morphismus von **Magmaoiden** wird. Wenn es solch eine Verknüpfung gibt, heißt unser Köchermorphismus **angepaßt an die Verknüpfung** und die fragliche Verknüpfung auf  $\mathcal{Q}$  die **auf  $\mathcal{Q}$  koinduzierte Verknüpfung**. Ist unser Magmaoid  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so auch der Köcher  $\mathcal{Q}$  mit der koinduzierten Verknüpfung.

## 7.7 Produkte und Koprodukte in Kategorien

**Definition 7.7.1.** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X, Y$  Objekte von  $\mathcal{C}$ . Ein **Produkt** von  $X$  und  $Y$  ist ein Datum  $(P, p, q)$  bestehend aus (1) einem Objekt  $P \in \mathcal{C}$  und (2) Morphismen  $p : P \rightarrow X$  und  $q : P \rightarrow Y$ , den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist  $Z \in \mathcal{C}$  ein Objekt und sind  $a : Z \rightarrow X, b : Z \rightarrow Y$  Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus  $c : Z \rightarrow P$  mit  $p \circ c = a$  und  $q \circ c = b$ . Wir notieren diesen Morphismus dann  $c = (a, b)$  oder, ganz pedantisch und wenn wir ihn von den Morphismen aus einem Koprodukt absetzen wollen, als Spalte  $c = (a, b)^\top$ .

*Beispiele 7.7.2.* In der Kategorie der Mengen ist das sogenannte kartesische Produkt  $P = X \times Y$  mit  $p, q$  den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt von  $X$  und  $Y$ . Analoges gilt in der Kategorie der Vektorräume, der Gruppen, der Ringe, der Monoide, der abelschen Gruppen, und vielen weiteren Strukturen der Bauart „Menge mit ausgezeichneten Verknüpfungen und speziellen Elementen“.

**7.7.3 (Eindeutigkeit von Produkten).** Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer  $(P, p, q)$  und  $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$  zwei mögliche Produkte der Objekte  $X$  und  $Y$ , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von  $P$  genau ein  $c : \tilde{P} \rightarrow P$  mit  $p \circ c = \tilde{p}$  und  $q \circ c = \tilde{q}$  und ebenso genau ein  $d : P \rightarrow \tilde{P}$  mit  $\tilde{p} \circ d = p$  und  $\tilde{q} \circ d = q$ . Weiter gibt es auch genau ein  $f : P \rightarrow P$  mit  $p \circ f = p$  und  $q \circ f = q$ , und da sowohl  $f = \text{id}$  als auch  $f = c \circ d$  diese Bedingung erfüllen, folgt  $c \circ d = \text{id}$ . Ebenso erhalten wir  $d \circ c = \text{id}$ , mithin sind  $c$  und  $d$  zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$(X \times Y, \text{pr}_X, \text{pr}_Y)$$

oder auch noch ausführlicher  $X \times^{\mathcal{C}} Y$ . Morphismen in das Produkt schreiben wir auch  $(a, b)$ . Sind schließlich Morphismen  $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$  gegeben und existieren die Produkte  $X \times Y$  und  $X' \times Y'$ , so benutzen wir die Abkürzung  $(f \circ \text{pr}_X, g \circ \text{pr}_Y) = f \times g$  und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$$

**Definition 7.7.4.** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Sind in  $\mathcal{A}$  Morphismen  $p : P \rightarrow X$  und  $q : P \rightarrow Y$  gegeben, so erhalten wir Morphismen  $Fp : FP \rightarrow FX$  und

$Fq : FP \rightarrow FY$  in  $\mathcal{B}$ . Wenn das Produkt  $FX \times FY$  existiert, erhalten wir so auch einen Morphismus  $(Fp, Fq) : FP \rightarrow FX \times FY$ . Wenn schließlich auch das Produkt  $X \times Y$  existiert, so erhalten wir, indem wir es als unser  $P$  nehmen, in unserer ausführlichen Notation einen natürlichen Morphismus

$$F(X \times^{\mathcal{A}} Y) \rightarrow FX \times^{\mathcal{B}} FY$$

7.7.5. Der Morphismus von oben muß im allgemeinen kein Isomorphismus sein. Im Fall des Vergißfunktors von Vektorräumen über einem vorgegebenen Körper zu Mengen ist er jedoch stets ein Isomorphismus von Mengen alias eine bijektive Abbildung.

7.7.6. Produkte können auch für allgemeine Familien von Objekten ein- und derselben Kategorie erklärt werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll. Wir besprechen dies Konzept zunächst im Fall der Kategorie der Mengen.

7.7.7 (**Produkte von Mengen, Variante**). Allgemeiner als in [LA1] 1.3.1 diskutiert kann man auch für eine beliebige Familie von Mengen  $(X_i)_{i \in I}$  eine neue Menge bilden als die Menge aller Tupel  $(x_i)_{i \in I}$  mit  $x_i \in X_i$  für alle  $i \in I$ . Diese **Produktmenge** notiert man

$$\prod_{i \in I} X_i$$

und die Projektionsabbildungen werden mit  $\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  oder ähnlich bezeichnet. Wieder können wir für beliebige Abbildungen  $f_i : Z \rightarrow X_i$  eine Abbildung  $f = (f_i)_{i \in I} : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  definieren durch die Vorschrift  $f(z) = (f_i(z))_{i \in I}$  und jede Abbildung von einer Menge  $Z$  in ein Produkt ist von dieser Form mit  $f_i = \text{pr}_i \circ f$ . In Formeln ausgedrückt liefert das Nachschalten der Projektionen also für jede Menge  $Z$  eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}(Z, \prod_{i \in I} X_i) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} \text{Ens}(Z, X_i) \\ f & \mapsto & (\text{pr}_i \circ f) \end{array}$$

**Definition 7.7.8.** Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\mathcal{C}$ . Ein **Produkt** der  $X_i$  ist ein Datum  $(P, (p_i)_{i \in I})$  bestehend aus (1) einem Objekt  $P \in \mathcal{C}$  und (2) Morphismen  $p_i : P \rightarrow X_i$ , den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist  $Y \in \mathcal{C}$  ein Objekt und sind  $q_i : Y \rightarrow X_i$  Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus  $q : Y \rightarrow P$  mit  $p_i \circ q = q_i \forall i \in I$ . Wir notieren diesen Morphismus dann  $q = (q_i)_{i \in I}$  oder ganz pedantisch auch schon mal  $q = (q_i)_{i \in I}^\top$ .

*Beispiele 7.7.9.* In der Kategorie der Mengen ist  $P = \prod_{i \in I} X_i$  mit  $p_i$  den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt der  $X_i$ . Produkte in der Kategorie der Vektorräume diskutieren wir in 7.8.4.

*Beispiel 7.7.10.* Wählen wir ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  und betrachten präziser die Kategorie  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  der Mengen aus  $\mathfrak{U}$ , so wird es im allgemeinen beliebige durch eine Menge  $I$  indizierte Produkte in  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  nicht geben. Enthält zum Beispiel  $\mathfrak{U}$  eine Menge  $Z$  mit mindestens zwei Elementen, so überlegt man sich leicht, daß etwa ein Produkt  $\prod_{i \in \mathfrak{U}} Z$  in  $\mathfrak{U}\text{Ens}$  nicht existieren kann.

**7.7.11 (Eindeutigkeit von Produkten, Variante).** Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer  $(P, (p_i))$  und  $(\tilde{P}, (\tilde{p}_i))$  zwei mögliche Produkte der Objekte  $X_i$ , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von  $P$  genau ein  $\tilde{p} : \tilde{P} \rightarrow P$  mit  $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$  und ebenso genau ein  $p : P \rightarrow \tilde{P}$  mit  $\tilde{p}_i \circ p = p_i$ . Weiter gibt es auch genau ein  $f : P \rightarrow P$  mit  $p_i \circ f = p_i$ , und da sowohl  $f = \text{id}$  als auch  $f = \tilde{p} \circ p$  diese Bedingung erfüllen, folgt  $\tilde{p} \circ p = \text{id}$ . Ebenso erhalten wir  $p \circ \tilde{p} = \text{id}$ , mithin sind  $p$  und  $\tilde{p}$  zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von *dem* Produkt und notieren es

$$\left( \prod_{i \in I} X_i, (\text{pr}_i)_{i \in I} \right)$$

oder  $\prod^{\mathcal{C}}$ , wenn wir auch noch die Kategorie  $\mathcal{C}$  spezifizieren wollen, oder im Fall endlicher angeordneter Familien  $X_1 \times \dots \times X_n$  und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation  $\text{pr}_{X_i}$ . Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher angeordneter Familien auch  $(q_1, \dots, q_n)$  oder ganz pedantisch als Spalte  $(q_1, \dots, q_n)^{\top}$ .

**7.7.12 (Umindizierung).** Die Frage der Abhängigkeit eines Produkts von der Wahl der Indexmenge ist subtiler als es auf den ersten Blick scheinen mag. Natürlich liefert jede Umindizierung vermittelt einer Bijektion zwischen der Indexmenge und einer weiteren Menge einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den jeweiligen Produkten. Jedoch liefert die Umindizierung vermittelt einer Permutation der Indexmenge im allgemeinen nicht die Identität auf dem jeweiligen Produkt.

**7.7.13 (Produkte über leere Familien).** Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als „die“ einpunktige Menge. Damit wird das Bilden von Produkten von Mengen „assoziativ“ in der Weise, daß wir bei einer Familie  $(I_j)_{j \in J}$  von Indexmengen mit disjunkter Vereinigung  $I = \bigsqcup_j I_j$  stets eine kanonische Bijektion

$$\prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} \left( \prod_{i \in I_j} X_i \right)$$

haben. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$  verstehen wir analog als „das“ finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung

auch in diesem Fall Bijektionen  $\mathcal{C}(Y, \prod_{i \in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$  liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe endliche Produkte**, so meinen wir stets implizit, daß auch die Existenz eines finalen Objekts mit gefordert sein soll.

7.7.14. Produkte in der opponierten Kategorie heißen „Koprodukte“. Im folgenden schreiben wir das aus.

**Definition 7.7.15.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten aus  $\mathcal{C}$ . Ein **Koprodukt** der  $X_i$  ist ein Datum  $(K, (\text{in}_i)_{i \in I})$  bestehend aus einem Objekt  $K \in \mathcal{C}$  und Morphismen  $\text{in}_i : X_i \rightarrow K$  derart, daß gilt: Ist  $Z \in \mathcal{C}$  ein Objekt und sind  $f_i : X_i \rightarrow Z$  Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus  $f : K \rightarrow Z$  mit  $f \circ \text{in}_i = f_i \ \forall i \in I$ . Wir notieren diesen Morphismus dann auch  $(f_i)_{i \in I}$  und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wenn es drauf ankommt, mag ein Morphismus in ein Produkt eben als Spalte mit einem hochgestellten  $\top$  notiert werden und ein Morphismus aus einem Koprodukt als Zeile. Wir notieren Koprodukte  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  oder ausführlicher  $\bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{C}} X_i$  und bei endlich vielen Faktoren auch  $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ . Ein leeres Koprodukt ist dasselbe wie ein initiales Objekt.

**Beispiel 7.7.16 (Disjunkte Vereinigungen von Mengen).** Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen über eine beliebige Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Mengen heißt ihre **disjunkte Vereinigung**

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

Das Anhängen der Indizes auf der rechten Seite ist hier nur eine Vorsichtsmaßnahme für den Fall, daß unsere Mengen nicht disjunkt gewesen sein sollten. Jede derartige disjunkte Vereinigung ist versehen mit Inklusionsabbildungen  $\text{in}_j : X_j \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ . Weiter können wir für beliebige Abbildungen  $f_i : X_i \rightarrow Z$  in eine Menge  $Z$  die Abbildung  $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow Z$  bilden durch die Vorschrift  $f(x) = f_i(x)$  für  $x \in X_i$ , und jede Abbildung der disjunkten Vereinigung in eine Menge  $Z$  ist von dieser Form mit  $f_i = f \circ \text{in}_i$ . In Formeln ausgedrückt liefert das Vorschalten der Injektionen also für jede Menge  $Z$  eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}(\bigsqcup_{i \in I} X_i, Z) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} \text{Ens}(X_i, Z) \\ f & \mapsto & (f \circ \text{in}_i) \end{array}$$

Die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen  $X_1, \dots, X_n$  notieren wir auch  $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ .

7.7.17 (**Notationen für disjunkte Vereinigungen**). Gegeben eine Menge  $X$  und darin eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Teilmengen schreiben wir statt  $\bigcup_{i \in I} X_i$  auch  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ ,

wenn wir zusätzlich andeuten wollen, daß unsere Teilmengen paarweise disjunkt sind. In der Tat ist die Eigenschaft, paarweise disjunkt zu sein, ja gleichbedeutend dazu, daß die offensichtliche Abbildung  $\bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow X$  eine Bijektion  $\bigsqcup_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} X_i$  liefert. In derselben Weise verwenden wir bei endlich vielen Teilmengen  $X_1, \dots, X_n$  einer gegebenen Menge die Notation  $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ . In der Literatur werden statt  $\sqcup$  alternativ auch die Symbole  $\cup$  und  $\uplus$  verwendet.

*Vorschau 7.7.18.* Das Koproduct in der Kategorie der Vektorräume über einem vorgegebenen Körper heißt auch die „direkte Summe“ und wird in 7.8.4 besprochen.

7.7.19. Wie in 7.7.4 im Fall von zwei Faktoren besprochen erhalten wir für einen Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Objekten von  $\mathcal{A}$ , wenn Produkte der  $X_i$  und der  $F X_i$  existieren, einen natürlichen Morphismus

$$F \left( \prod X_i \right) \rightarrow \prod F X_i$$

Ist er „stets“ ein Isomorphismus, so sagen wir metasprachlich, der Funktor  $F$  sei **verträglich mit beliebigen Produkten**. Gilt das nur für Produkte endlicher Familien, so sagen wir, unser Funktor sei **verträglich mit endlichen Produkten**. Bereits die Verträglichkeit mit endlichen Produkten schließt die Eigenschaft mit ein, daß finale Objekte auf finale Objekte abgebildet werden. Dual erklären wir die Verträglichkeit mit beliebigen beziehungsweise endlichen Koproducten.

*Beispiel 7.7.20.* Sei  $K$  ein Körper. Der vergeßliche Funktor  $v : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$  ist verträglich mit beliebigen Produkten, aber nicht mit beliebigen, nicht einmal mit endlichen, ja noch nicht einmal mit dem leeren Koproduct. Mehr dazu diskutieren wir im folgenden Abschnitt 7.8.

*Vorschau 7.7.21.* Für die algebraisch Gebildeten unter Ihnen sei bemerkt, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe das Tensorprodukt über  $\mathbb{Z}$  im Sinne von [KAG] 2.6 ein Koproduct ist, sofern die Multiplikation auf  $A \otimes B$  durch  $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$  erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch  $a \mapsto a \otimes 1$  und  $b \mapsto 1 \otimes b$ .

## Übungen

*Übung 7.7.22.* Man präzisiere und zeige die „Assoziativität“ von Produkten, die die Formel  $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$  andeutet.

*Übung 7.7.23.* Man zeige, daß in der Kategorie der kommutativen Monoide das Produkt  $M \times N$  zusammen mit  $\text{in}_1 : M \rightarrow M \times N, m \mapsto (m, 0)$  und  $\text{in}_2 : N \rightarrow M \times N, n \mapsto (0, n)$  ein Koproduct ist.

## 7.8 Produkte und Summen von Vektorräumen\*

**Definition 7.8.1.** Gegeben eine Familie  $(V_i)_{i \in I}$  von Vektorräumen über einem Körper  $K$  bilden wir zwei neue  $K$ -Vektorräume, ihr **Produkt**  $\prod V_i$  und ihre **direkte Summe** oder kurz **Summe**  $\bigoplus V_i$  durch die Regeln

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i\} \\ \bigoplus_{i \in I} V_i &:= \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \text{ und nur endlich viele } v_i \text{ sind nicht null}\}\end{aligned}$$

Die Vektorraumstruktur ist dabei komponentenweise zu verstehen. Dieselben Konstruktionen sind auch im Fall von Gruppen sinnvoll, wenn wir „null“ als das jeweilige neutrale Element verstehen, und wir werden beide Konstruktionen auch in diesem Kontext verwenden.

7.8.2. Für eine endliche Familie von Gruppen oder Vektorräumen  $V_1, \dots, V_s$  stimmen die direkte Summe und das Produkt überein. Wir benutzen dann alternativ die beiden Notationen

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_s = V_1 \times \dots \times V_s$$

Wir zeigen im folgenden, daß die direkte Summe ein Koproduct in der Kategorie der Vektorräume ist. Die allgemeine Notation  $\sqcup$  für Koproducte benutzen wir für Vektorräume aber nur ungern und verwenden sie in konkreten Situationen vorzugsweise für das Koproduct von Mengen alias deren disjunkte Vereinigung.

*Beispiel 7.8.3 (Summe und Produkt konstanter Familien).* Im Fall der konstanten Familie  $(K)_{x \in X}$  erhalten wir einen Isomorphismus des freien Vektorraums über  $X$  im Sinne von [LA1] 2.3.4 mit unserer direkten Summe

$$K\langle X \rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X} K$$

vermittels der Abbildungsvorschrift  $\sum_{x \in X} a_x x \mapsto (a_x)_{x \in X}$ . Auch im Fall einer allgemeineren konstanten Familie  $(V)_{x \in X}$  erhalten wir einen Vektorraumisomorphismus

$$\text{Ens}(X, V) \xrightarrow{\sim} \prod_{x \in X} V$$

vermittels der Abbildungsvorschrift  $f \mapsto (f(x))_{x \in X}$ .

7.8.4 (**Universelle Eigenschaften von Summe und Produkt**). Das Produkt beziehungsweise die Summe haben im Fall von Vektorräumen oder allgemeiner von abelschen Gruppen die folgenden Eigenschaften: Die offensichtlichen Einbettungen und Projektionen sind Homomorphismen

$$\text{in}_i : V_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i \quad \text{beziehungsweise} \quad \text{pr}_i : \prod_{i \in I} V_i \twoheadrightarrow V_i$$

und ist  $V$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum, so induzieren die durch Vorschalten der  $\text{in}_i$  beziehungsweise Nachschalten der  $\text{pr}_i$  gegebenen Abbildungen Bijektionen, ja sogar Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K \left( \bigoplus_{i \in I} V_i, V \right) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Hom}_K(V_i, V) \\ f &\mapsto (f \circ \text{in}_i)_{i \in I} \\ \\ \text{Hom}_K \left( V, \prod_{i \in I} V_i \right) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Hom}_K(V, V_i) \\ f &\mapsto (\text{pr}_i \circ f)_{i \in I} \end{aligned}$$

Im Fall nichtabelscher Gruppen ist nur die Zweite dieser Abbildungen eine Bijektion. Ich gebe zu, daß das Symbol  $\text{in}_i$  nun in zweierlei Bedeutung verwendet wird: Einmal bei Mengen für die Einbettung in eine disjunkte Vereinigung und ein andermal bei Vektorräumen für die Einbettung in eine direkte Summe. Was jeweils gemeint ist, muß aus dem Kontext erschlossen werden. Betrachten wir im Fall des ersten Isomorphismus speziell den Fall  $V = K$ , so erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Dualraum einer direkten Summe und dem Produkt der Dualräume der Summanden.

7.8.5. Gegeben eine Familie  $(V_i)_{i \in I}$  von Untervektorräumen eines Vektorraums  $V$  bezeichnet man den von ihrer Vereinigung erzeugten Untervektorraum auch als ihre **Summe** und notiert ihn  $\sum_{i \in I} V_i$ . Diese Summe kann auch interpretiert werden als das Bild des natürlichen Homomorphismus  $\bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow V$  von der direkten Summe nach  $V$ . Ist dieser Homomorphismus injektiv, so sagen wir, die **Summe der Untervektorräume  $V_i$  sei direkt**.

7.8.6. Untervektorräume  $V_1, V_2$  eines Vektorraums  $V$  sind komplementär als Untervektorräume genau dann, wenn die durch die Einbettungen gegebene lineare Abbildung aus ihrem Koproduct in der Kategorie der Vektorräume alias ihrer direkten Summe ein Isomorphismus  $V_1 \sqcup V_2 = V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\sim} V$  ist. Da Koproducte eh nur wohlbestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, schreiben wir im Fall komplementärer Untervektorräume auch abkürzend  $V_1 \oplus V_2 = V$ .

## Übungen

*Ergänzende Übung 7.8.7 (Basis einer direkten Summe).* Ist  $(V_i)_{i \in I}$  eine Familie von Vektorräumen und  $B_i \subset V_i$  jeweils eine Basis, so ist die Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} \text{in}_i(B_i)$  der Bilder ihrer Basen eine Basis der direkten Summe  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ . Diese Basis ist auch in offensichtlicher Bijektion zur disjunkten Vereinigung von Basen  $\bigsqcup_{i \in I} B_i$ .



*Ergänzende Übung 7.8.8.* Man zeige, daß für jeden Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums  $V$  über einem Körper  $K$  die Einbettungen der Haupträume eine Injektion

$$\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f; \lambda) \hookrightarrow V$$

liefern. Der Hauptraum  $\text{Hau}(f; \lambda)$  ist hier im Fall, daß  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f$  ist, als der Nullraum zu verstehen.

*Ergänzende Übung 7.8.9.* Ich erinnere daran, daß ein Endomorphismus eines Vektorraums nach [LA1] 6.6.15 diagonalisierbar heißt, wenn unser Vektorraum von den Eigenvektoren des besagten Endomorphismus erzeugt wird. Man zeige, daß ein Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums  $V$  über einem Körper  $K$  genau dann diagonalisierbar ist, wenn  $V$  in die Summe seiner Eigenräume zerfällt, in Formeln

$$\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f; \lambda) \xrightarrow{\sim} V$$

wobei der Eigenraum  $\text{Eig}(f; \lambda)$  in dem Fall, daß  $\lambda$  kein Eigenwert ist, als der Nullraum zu verstehen ist.

*Ergänzende Übung 7.8.10.* Seien  $V$  ein Vektorraum und  $T \subset \text{End } V$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum seines Endomorphismenraums, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Endomorphismen besteht. So besitzt  $V$  unter  $T$  eine **simultane Eigenraumzerlegung**

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

in die **simultanen Eigenräume**  $V_\lambda := \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \forall x \in T\}$ . Hinweis: Sei  $x_0, \dots, x_n$  eine Basis von  $T$ . Da  $x_0$  diagonalisierbar ist, zerfällt  $V$  in Eigenräume unter  $x_0$ . Da die  $x_i$  für  $i \geq 1$  mit  $x_0$  kommutieren, stabilisieren sie dessen Eigenräume. Nach [LA1] 6.6.19 sind die  $x_i$  auch auf diesen Eigenräumen diagonalisierbar. Eine Induktion beendet den Beweis.

*Ergänzende Übung 7.8.11.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  und eine Familie von Vektorräumen  $(W_i)_{i \in I}$  liefert die kanonische Abbildung stets einen Isomorphismus

$$V \otimes \left( \bigoplus W_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (V \otimes W_i)$$

Analoges gilt für den anderen Tensorfaktor. Für jeden  $K$ -Vektorraum  $V$  ist in anderen Worten der Funktor  $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  verträglich mit beliebigen Koprodukten.

*Ergänzende Übung 7.8.12.* Gegeben ein Vektorraum  $V$  und eine Familie von Vektorräumen  $(W_i)_{i \in I}$  liefert die kanonische Abbildung stets eine Injektion

$$V \otimes \left( \prod W_i \right) \hookrightarrow \prod (V \otimes W_i)$$

Sie ist jedoch im allgemeinen kein Isomorphismus. Genauer ist sie nur dann ein Isomorphismus, wenn entweder  $V$  endlichdimensional ist oder wenn nur für endlich viele  $i$  der zugehörige Vektorraum  $W_i$  von Null verschieden ist. Diese Übung sagt insbesondere, daß für jeden  $K$ -Vektorraum  $V$  der Funktor  $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  mit endlichen Produkten verträglich ist, und daß für jeden endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  der Funktor  $V \otimes : \text{Mod}_K \rightarrow \text{Mod}_K$  mit beliebigen Produkten verträglich ist. Hinweis: Man folgere aus 6.1.20 die Injektivität der Komposition  $V \otimes W \rightarrow V^{\top\top} \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V^\top, W)$  und biete beide Seiten verträglich ein in  $\prod \text{Hom}(V^\top, W_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V^\top, \prod W_i)$ .

## 7.9 Algebren\*

7.9.1. Sei  $K$  ein Körper. Ganz allgemein bezeichnet man einen  $K$ -Vektorraum  $A$  mit einer bilinearen Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$  als eine  $K$ -**Algebra** und versteht unter einem **Algebrenhomomorphismus** in eine weitere  $K$ -Algebra eine  $K$ -lineare Abbildung, die mit den jeweiligen Verknüpfungen verträglich ist. Gegeben zwei  $K$ -Algebren  $A, B$  bezeichnen wir mit  $\text{Alg}_K(A, B)$  die Menge der Algebrenhomomorphismen von  $A$  nach  $B$ .

7.9.2. Ist die Verknüpfung einer Algebra assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Konvention, daß man eine Algebra stets als assoziativ versteht, wenn aus dem Kontext nichts anderes hervorgeht. Gibt es für diese Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation ein Ring ist. Ich schlage deshalb vor, derartige Algebren **Ringalgebren** und im Fall, daß sie auch noch kommutativ sind, **Kringalgebren** zu nennen. Unter einem **Homomorphismus von Ringalgebren** verstehen wir einen Algebrenhomomorphismus, der auch ein Ringhomomorphismus ist. Wir können diese Abbildungen sowohl charakterisieren als Algebrenhomomorphismen, die das Einselement auf das Einselement werfen, als auch als Ringhomomorphismen, die über dem Grundkörper linear sind. Wir vereinbaren für die Menge der Ringalgebrenhomomorphismen von einer  $K$ -Ringalgebra  $A$  in eine  $K$ -Ringalgebra  $B$  die Notation  $\text{Ralg}_K(A, B)$ . Sind beide beteiligten Algebren sogar Kringalgebren, so schreiben wir für diese Menge auch  $\text{Kralg}_K(A, B)$ .

*Beispiel 7.9.3.* Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[X]$  ist eine  $K$ -Ringalgebra, ja eine  $K$ -Kringalgebra. Dasselbe gilt für Polynomringe in mehreren Variablen. Gegeben ein  $K$ -Vektorraum  $V$  ist der Endomorphismenring  $\text{End } V$  eine  $K$ -Ringalgebra. Dasselbe gilt für die Matrizenringe  $\text{Mat}(n; K)$ . Eine weder assoziative noch unitäre Algebra wäre etwa  $\text{Mat}(n; K)$  mit der bilinearen Verknüpfung  $(A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA$ . Der Vektorraum  $\text{Mat}(n; K)$  mit dieser Verknüpfung gehört zu einem speziellen Typ von Algebren, den sogenannten „Lie-Algebren“. Mit dieser Struktur heißt er auf englisch die „general linear Lie algebra“ und wird  $\mathfrak{gl}(n; K)$  notiert. Die Lie-Algebren spielen eine zentrale Rolle beim Studium von abgeschlossenen Untergruppen der  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  und ganz allgemein beim Studium von „kontinuierlicher Symmetrie“.

**7.9.4 (Diskussion der Terminologie).** Für den Begriff einer Algebra sind in der Literatur leider auch viele andere Konventionen gebräuchlich, bei denen mehr oder weniger der oben explizit aufgeführten zusätzlichen Eigenschaften bereits für eine Algebra implizit mit gefordert werden.

**7.9.5.** Eine **Unteralgebra** einer Algebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum. Eine **Unterringalgebra** einer Ringalgebra ist ein unter der Verknüpfung stabiler Untervektorraum, der das Eins-Element enthält. Beide Begriffsbildungen ordnen sich der allgemeinen Begriffsbildung 7.3.12 eines Unterobjekts unter.

**7.9.6.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Die direkte Summe

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r \geq 0} \bigwedge^r V$$

der äußeren Potenzen von  $V$  wird mit dem „bilinear erweiterten“ **Dachprodukt** aufgrund der Assoziativität des Dachprodukts eine Ringalgebra mit Eins-Element  $1 \in K = \bigwedge^0 V$ . Sie heißt die **äußere Algebra** oder auch **Graßmann-Algebra** des Vektorraums  $V$ . Die offensichtliche Identifikation  $V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^1 V$  notieren wir kurzerhand  $v \mapsto v$  und behandeln sie auch sprachlich als Gleichheit. Gegeben  $v \in V$  gilt in  $\bigwedge^2 V$  wegen  $v \otimes v \in J_2$  natürlich  $v \wedge v = 0$ . Mit [LA1] 6.3.2 folgt daraus in der Graßmann-Algebra die Identität

$$v \wedge w = -w \wedge v \quad \forall v, w \in V$$

Unsere Abbildungen  $\bigwedge^r f : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W$  liefern in ihrer Gesamtheit einen Ringhomomorphismus

$$\bigwedge f : \bigwedge V \rightarrow \bigwedge W$$

Natürlich gilt auch  $\bigwedge(f \circ g) = (\bigwedge f) \circ (\bigwedge g)$  und  $\bigwedge(\text{id}) = \text{id}$ .

*Ergänzung 7.9.7.* Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Eine weitere Ringalgebra, die man jedem  $K$ -Vektorraum in natürlicher Weise zuordnen kann, ist die sogenannte **Tensoralgebra**  $T_K V$  **über**  $V$ . Sie ist definiert als

$$T(V) = T_K V = \text{Ten}_K V := \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$$

mit der  $K$ -bilinearen Multiplikation „Zusammentensorieren“, die festgelegt wird durch die Vorschrift  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_t) := (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_t)$ . Für die  $K$ -lineare Einbettung  $\tau : V \hookrightarrow T_K V$  des zweiten Summanden gilt dabei die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $A$  eine  $K$ -Ringalgebra und  $\varphi : V \rightarrow A$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von  $K$ -Ringalgebren  $\hat{\varphi} : T_K V \rightarrow A$  mit  $\varphi = \hat{\varphi} \circ \tau$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & T_K V \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

In der Tat sieht man leicht, daß die Vorschrift  $\hat{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \varphi(v_1) \dots \varphi(v_r)$  das einzig mögliche  $\hat{\varphi}$  liefert. In wieder anderen Worten liefert also das Vorschalten der kanonischen Einbettung für jede  $K$ -Ringalgebra  $A$  eine Bijektion

$$\text{Ralg}_K(TV, A) \xrightarrow{\circ \tau} \text{Hom}_K(V, A)$$

Ist  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Basis von  $V$ , so bilden nach 6.1.3 die „nichtkommutierenden Monome in den  $x_\lambda$ “ alias die Tensoren  $x_{\lambda(1)} \otimes \dots \otimes x_{\lambda(r)}$  für beliebige  $r \in \mathbb{N}$  und beliebige Abbildungen  $\lambda : \{1, 2, \dots, r\} \rightarrow \Lambda$  eine  $K$ -Basis der Tensoralgebra  $TV$ . Das „leere Monom“ mit  $r = 0$  steht dabei für das Einselement. In diesem Sinne kann man die Tensoralgebra also salopp gesprochen auch als einen „Polynomring in nichtkommutierenden Variablen“ auffassen. Mehr dazu wird in [NAS] 1.10.5 erklärt.

*Vorschau 7.9.8.* Es gibt noch eine dritte Ringalgebra, die man jedem Vektorraum  $V$  in natürlicher Weise zuordnen kann. Diese sogenannte „symmetrische Algebra“  $SV$  diskutieren wir in [AL] ?? In [AL] ?? diskutieren wir auch die Beschreibung der Grassmann-Algebra vom höheren Standpunkt als „Quotient der Tensoralgebra  $TV$  nach dem von allen  $v \otimes v$  mit  $v \in V$  erzeugten Ideal“.

## Übungen

*Ergänzende Übung 7.9.9.* Sei  $K$  ein Körper. Man zeige, daß in der Kategorie der  $K$ -Kringalgebren das Tensorprodukt ein Koproduct ist, sofern die Multiplikation

auf  $A \otimes B$  durch  $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$  erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch  $a \mapsto a \otimes 1$  und  $b \mapsto 1 \otimes b$ . Man zeige weiter, daß die analoge Aussage in der Kategorie der  $K$ -Ringalgebren nicht richtig ist.

*Ergänzende Übung 7.9.10.* Sei  $K$  ein Körper. Man zeige, daß der auf Objekten durch  $X \mapsto \text{Ens}(X, K)$  gegebene Funktor

$$\{\text{Endliche Mengen}\} \rightarrow \{K\text{-Kringalgebren}\}^{\text{opp}}$$

verträglich ist mit endlichen Produkten.

## 7.10 Yonedalemma\*

7.10.1. Einen Funktor von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie von Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf  $\mathcal{C}$** . Gegeben ein Mengensystem  $\mathfrak{U}$  und eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie bildet die Menge aller Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  mit Transformationen als Morphismen eine Kategorie  $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})$ . Jedes Objekt  $X \in \mathcal{C}$  liefert einen derartigen Mengenfunktor  $\check{X} = X^\vee$  gegeben durch  $\check{X} : A \mapsto \mathcal{C}(X, A)$ .

**Proposition 7.10.2 (Yoneda-Lemma).** *Seien  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem,  $\mathcal{C}$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie,  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  ein Mengenfunktor auf  $\mathcal{C}$ . So liefert die Abbildungsvorschrift  $\tau \mapsto \tau_X(\text{id}_X)$  eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})(\check{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

zwischen der Menge aller Transformationen  $\check{X} \Rightarrow F$  und der Menge  $F(X)$ .

*Vorschau 7.10.3.* Sie mögen als Übung 7.10.16 zeigen, inwiefern diese Bijektionen natürlich sind in  $X$  und  $F$ .

7.10.4. Die zur Kategorie dieser Mengenfunktoren auf  $\mathcal{C}$  opponierte Kategorie

$$\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathfrak{U}\text{Ens})^{\text{opp}}$$

kann man als eine „Vervollständigung“ von  $\mathcal{C}$  interpretieren. In der Tat liest sich unser Yoneda-Lemma in dieser Notation als eine Bijektion  $\mathcal{C}^\vee(F, \check{X}) \xrightarrow{\sim} F(X)$ . Spezialisieren wir zu  $F = \check{Y}$ , so erhalten wir eine Bijektion  $\mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y, X)$ , von der man leicht zeigt, daß sie zur offensichtlichen Abbildung  $\mathcal{C}(Y, X) \rightarrow \mathcal{C}^\vee(\check{Y}, \check{X})$  invers ist. So folgt, daß die Vorschrift  $X \mapsto \check{X}$  einen volltreuen Funktor  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$  induziert, die **Yoneda-Einbettung**. Im weiteren lassen wir das Mengensystem  $\mathfrak{U}$  wieder in den Hintergrund treten und ignorieren es meist in unserer Notation.

**7.10.5 (Diskussion der Notation).** Die hier verwendeten Notationen  $\mathcal{C}^\vee$  und das in 7.10.11 eingeführte  $\mathcal{C}^\wedge$  sind genau umgekehrt wie in [KS90]. Dafür stimmt die Notation  $\mathcal{C}^\wedge$  dann mit der in [Gro72] verwendeten Notation überein, und auch die Autoren von [KS90] verwenden in [KS00] letztere Notation, die mit der unseren übereinstimmt.

**7.10.6 (Das Yoneda-Lemma im Fall einer Einobjektkategorie).** Im Spezialfall einer Einobjektkategorie  $\mathcal{C} = [G]$  ist das Yoneda-Lemma besonders leicht einzusehen: Es besagt dann im Lichte von 7.4.20, daß die äquivalenten Abbildungen von einem Monoid  $G$  in eine beliebige  $G$ -Menge  $F$  festgelegt sind und festgelegt werden können durch das Bild des neutralen Elements.

*Beweis.* Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges  $a \in F(X)$  betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) & \rightarrow & F(Y) \\ f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation  $\tau : \check{X} \Rightarrow F$  bilden, die wir mit  $\hat{\tau}(a)$  bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung  $a \mapsto \hat{\tau}(a)$  invers ist zu unserer Abbildung  $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) := \tau_X(\text{id}_X)$  aus der Proposition. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt  $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$  für alle  $a \in F(X)$  und  $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$  für alle Transformationen  $\tau : \check{X} \Rightarrow F$ . Das überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Definition 7.10.7.** 1. Diejenigen Mengenfunktoren auf  $\mathcal{C}$ , die isomorph sind zu Mengenfunktoren im Bild von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$ , heißen **darstellbare Funktoren**.

2. Ist genauer ein Mengenfunktork  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  isomorph zu  $\check{X} = \mathcal{C}(X, \_)$  für ein  $X \in \mathcal{C}$ , so sagen wir, der **Funktork  $F$  werde dargestellt durch das Objekt  $X$** .

3. Ist noch genauer  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  ein Mengenfunktork und  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $a \in F(X)$  ein Element, das unter der Bijektion aus dem Yoneda-Lemma einer Isotransformation  $\mathcal{C}(X, \_) \xrightarrow{\sim} F$  entspricht, so sagen wir, der **Funktork  $F$  werde strikt dargestellt durch das Paar  $(X, a)$** . Ausgeschrieben bedeutet das, daß die Vorschrift  $f \mapsto (Ff)(a)$  für alle  $Y \in \mathcal{C}$  eine Bijektion  $\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} F(Y)$  liefert. Oft lassen wir das „strikt“ aber auch weg.

*Beispiel 7.10.8.* Der Vergißfunktork  $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$  von den  $K$ -Vektorräumen in die Mengen wird dargestellt durch das Paar  $(K, 1)$  oder auch durch jeden anderen eindimensionalen Vektorraum zusammen mit einem beliebigen von Null verschiedenen Element.

*Beispiel 7.10.9.* Der Vergißfunktork  $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$  von den Gruppen in die Mengen wird strikt dargestellt durch das Paar  $(\mathbb{Z}, 1)$  oder auch durch jedes andere Paar  $(Z, e)$  bestehend aus einer unendlich zyklischen Gruppe und einem Erzeuger derselben.

*Beispiel 7.10.10 (Das Tensorprodukt als Darstellung eines Funktors).* Seien  $K$  ein Körper und  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Der Funktor der bilinearen Abbildungen  $\text{Mod}_K \rightarrow \text{Ens}$ ,  $L \mapsto \text{Hom}_K^{(2)}(V \times W, L)$  wird strikt dargestellt durch das Paar  $(V \otimes W, \tau)$  mit  $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes W$  der kanonischen bilinearen Abbildung aus 6.1.2. Diese Aussage ist eine Umformulierung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts aus 6.1.1.

7.10.11. In derselben Weise kann man für jede  $\mathfrak{U}$ -Kategorie  $\mathcal{C}$  auch die Kategorie

$$\mathcal{C}^\wedge = \mathcal{C}_{\mathfrak{U}}^\wedge := \text{Cat}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$$

aller kontravarianten Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{U}\text{Ens}$  betrachten und erhält mit  $X \mapsto \mathcal{C}(\_, X)$  eine volltreue Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ , die **Ko-Yoneda-Einbettung**. Wieder heißen die Funktoren im Bild dieser Einbettung **darstellbare Funktoren** oder, wenn wir es ganz genau nehmen wollen, **kodarstellbare Funktoren**. Die Objekte von  $\mathcal{C}^\wedge$  werden Sie später vielleicht einmal unter der Bezeichnung als „mengenwertige Prägarben auf  $\mathcal{C}$ “ wiedertreffen. Notieren wir wieder zu  $X \in \mathcal{C}$  mit  $\hat{X} \in \mathcal{C}^\wedge$  den zugehörigen Funktor  $\hat{X} : A \mapsto \mathcal{C}(A, X)$ , so liefert diesmal das Auswerten auf  $\text{id}_X$  eine Bijektion  $\mathcal{C}^\wedge(\hat{X}, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$ .

7.10.12. Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  kann man leicht explizite Isomorphismen von Kategorien  $(\mathcal{C}^\vee)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\wedge$  und  $(\mathcal{C}^\wedge)^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\text{opp}})^\vee$  angeben. In diesem Sinne sind unsere beiden Konzepte zueinander dual.

*Vorschau 7.10.13.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ist die volltreue Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$  verträglich mit Produkten, wann immer diese in  $\mathcal{C}$  existieren. Ebenso ist die volltreue Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$  verträglich mit Koprodukten, wann immer diese in  $\mathcal{C}$  existieren. Mehr dazu wird in [TD] 3.1.4 diskutiert.

*Vorschau 7.10.14.* Ein Zugang zu der von Grothendieck konstruierten Kategorie der **Schemata** ist es, diese Kategorie zu realisieren als volle Unterkategorie der Kategorie  $\text{Kring}^\vee$ , die wir erhalten, wenn wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit der nötigen Sorgfalt bei Fragen der Mengenlehre in der oben erklärten Weise vervollständigen. Der affine Raum der Dimension  $n$  wird dann zum Beispiel definiert als der Funktor, der jedem kommutativen Ring  $R$  die Menge  $R^n$  zuordnet, und der projektive Raum der Dimension  $n$  als der Funktor, der jedem kommutativen Ring  $R$  die Menge derjenigen direkten Summanden  $D$  des  $R$ -Moduls  $R^{n+1}$  zuordnet, die „vom Rang Eins“ sind in dem Sinne, daß „bei jedem Primideal  $\mathfrak{p} \subset R$  ihre Lokalisierung  $D_{\mathfrak{p}}$  ein freier  $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul vom Rang Eins ist“. Man kann mit Schemata so effizient und geometrisch arbeiten, daß sie mittlerweile zum



eigentlichen Arbeitspferd der sogenannten „algebraischen Geometrie“ geworden sind.

## Übungen

**Übung 7.10.15 (Yoneda-Einbettungen und Exponentialgesetz).** Das Exponentialgesetz 7.4.13 spezialisiert zu Bijektionen

$$\mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{C}, \mathrm{Ens}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{Ens}))$$

In der Mitte betrachten wir nun den Mengenfunktor  $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} : (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$  der Morphismen. Man prüfe, daß er rechts der Koyoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\wedge}$  aus 7.10.11 entspricht und links dem Opponierten der Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\vee}$ .

**Übung 7.10.16 (Natürlichkeit im Yoneda-Lemma).** Man zeige, daß für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  die Bijektionen des Yoneda-Lemmas 7.10.2 eine Isotransformation zwischen den beiden Wegen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \rightarrow & \mathrm{Ens} \\ \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens}) & \rightarrow & \mathrm{Ens} \end{array}$$

liefern, also zwischen den beiden Funktoren  $\mathcal{C} \times \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ , die durch  $(X, F) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, F)$  und  $(X, F) \mapsto F(X)$  gegeben werden. Insbesondere liefern sie dann auch eine Isotransformation zwischen den Funktoren  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathrm{Ens}$  gegeben durch  $(X, Y) \mapsto \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})(\check{X}, \check{Y})$  und  $(X, Y) \mapsto \check{Y}(X) = \mathcal{C}(Y, X)$  und wir sehen so ein weiteres Mal, daß  $X \mapsto \check{X}$  eine volltreue Einbettung  $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \hookrightarrow \mathrm{Cat}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$  ist.

**Übung 7.10.17 (Eindeutigkeit darstellender Objekte).** Wird ein Mengenfunktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Ens}$  strikt dargestellt durch das Paar  $(X, a)$  und durch das Paar  $(Y, b)$ , so gibt es genau einen Isomorphismus  $i : X \xrightarrow{\sim} Y$  mit der Eigenschaft  $F(i) : a \mapsto b$ .

**Übung 7.10.18.** Welche Mengenfunktor werden durch finale und initiale Objekte dargestellt oder kodargestellt?

**Übung 7.10.19.** Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, und  $U \subset V$  ein Teilraum. Welchen Mengenfunktor stellt der Quotient  $V/U$  dar?

**Übung 7.10.20.** Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Welchen Mengenfunktor stellt die Tensoralgebra dar?

**Ergänzende Übung 7.10.21.** Welchen Mengenfunktor stellt das Produkt im Sinne von 7.10.7 dar?



*Ergänzende Übung 7.10.22.* Seien  $K$  ein endlicher Körper und  $\text{Mat}_K$  die Matrixkategorie aus 7.1.7 und  $\mathfrak{U}$  ein Mengensystem derart, daß  $\text{Mat}_K$  eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie ist. Wir betrachten die Yoneda-Einbettung

$$\text{Mat}_K \hookrightarrow \text{Cat}(\text{Mat}_K^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$$

Gilt  $X \in \mathfrak{U} \Rightarrow |X| < \infty$ , so induziert sie eine Äquivalenz von  $\text{Mat}_K$  mit der vollen Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren rechts. Gibt es zwar unendliche, aber keine überabzählbaren Mengen  $X \in \mathfrak{U}$ , so ist die volle Unterkategorie aller mit endlichen Produkten verträglichen Funktoren aus  $\text{Cat}(\text{Mat}_K^{\text{opp}}, \mathfrak{U}\text{Ens})$  äquivalent zur Kategorie aller abzählbaren  $K$ -Vektorräume. Analoge Aussagen gelten für andere Kardinalitäten und mutatis mutandis auch für unendliche Körper.

## 7.11 Universen\*

7.11.1. Um diese Leitplanken zur Vermeidung logischer Abstürze zu beschreiben, erfinde ich das Wort **Mengel** als zusammenfassende Bezeichnung für Mengen und Elemente von Mengen, die ja in unserer Terminologie selbst wieder Mengen sein dürfen, aber eben nicht sein müssen. Diese Terminologie ist allerdings nicht gebräuchlich.

*Ergänzung 7.11.2.* Baut man die Mengenlehre im Rahmen der Logik systematisch auf, vergleiche etwa [Ebb94], so verwendet man statt unserem „Mengel“ schlicht das Wort **Menge**. Aufgrund der Vereinbarung, daß zwei Mengen gleich sind genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben, kann es dann nur eine einzige Menge geben, die kein Element hat. Man notiert sie  $\emptyset$ .

**Definition 7.11.3.** Ein **Universum** ist eine Menge  $\mathfrak{U}$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $x \in M$  und  $M \in \mathfrak{U}$  implizieren zusammen  $x \in \mathfrak{U}$ ;
2.  $x \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x\} \in \mathfrak{U}$ ;
3.  $A \in \mathfrak{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathfrak{U}$ ;
4. Gegeben  $I \in \mathfrak{U}$  und eine Abbildung  $f : I \rightarrow \mathfrak{U}$  gilt  $(\bigcup_{i \in I} f(i)) \in \mathfrak{U}$ .

*Ergänzung 7.11.4 (Diskussion der Terminologie).* Diese Definition steht fast genauso bei Grothendieck [Gro72, Exposé I]. Abweichend will Grothendieck nur die leere Menge nicht als Universum zulassen und fordert statt unserer zweiten Bedingung scheinbar stärker  $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{U}$ . Da jedoch für jedes nicht-leere Universum gilt  $\emptyset \in \mathfrak{U}$  und folglich  $\{\emptyset\} \in \mathfrak{U}$  und  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathfrak{U}$ , ergibt sich das wegen  $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$  aus dem letzten Axiom, angewandt auf die Abbildung  $f : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rightarrow \mathfrak{U}$  mit  $f(\emptyset) = \{x\}$  und  $f(\{\emptyset\}) = \{y\}$ .

#### 7.11.5 (Elemente eines Universums versus Teilmengen eines Universums).

Gegeben ein Universum  $\mathfrak{U}$  gilt es genau zu unterscheiden zwischen Mengen  $x \in \mathfrak{U}$ , die Elemente des Universums sind, die also in unserer Terminologie [GR] 1.2.3 zu unserem Universum gehören, und Mengen  $M \subset \mathfrak{U}$ , die nur Teilmengen des Universums sind. Nach dem ersten Axiom ist jedes Element eines Universums, wenn es denn eine Menge ist, auch eine Teilmenge besagten Universums, aber das Umgekehrte gilt nicht. Die Formel  $M := \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin x\}$  definiert dann eine Teilmenge  $M \subset \mathfrak{U}$ , die kein Element von  $\mathfrak{U}$  zu sein braucht, und die Formel  $A := \{M \subset \mathfrak{U} \mid M \notin M\}$  definiert eine Menge  $A$ , die keine Teilmenge von  $\mathfrak{U}$  zu sein braucht, so daß keine dieser beiden Formeln auf den in [GR] 1.3.8 beschriebenen Widerspruch führt.

7.11.6 (Stabilitäten eines Universums). Wenn wir mit Kuratowski  $(x, y) := \{x, \{y\}\}$  setzen, erhalten wir sofort  $x, y \in \mathfrak{U} \Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{U}$ . Das Produkt von je zwei Mengen, die Elemente unseres Universums sind, ist auch selbst Element unseres Universums, zum Beispiel indem wir die Vereinigung erst über alle  $x \in X$  und dann über alle  $y \in Y$  der Mengen  $\{(x, y)\}$  bilden. Weiter ist mit je zwei Mengen  $X, Y \in \mathfrak{U}$  auch die Menge der Abbildungen  $\text{Ens}(X, Y)$  Element von  $\mathfrak{U}$  und dasselbe gilt für jedes Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  mit  $I \in \mathfrak{U}$  und  $X_i \in \mathfrak{U}$  für alle  $i \in I$ . Ebenso folgt, daß jede Teilmenge eines Elements unseres Universums wieder ein Element unseres Universums ist.

7.11.7 (Existenz von Universen). Die Annahme, daß jede Menge Element eines Universums ist, müssen wir der Mengenlehre als zusätzliches Axiom hinzufügen. Es scheint nicht auf Widersprüche zu führen, hat aber die bemerkenswerte Konsequenz, daß es zu jeder Menge ein kleinstes Universum gibt, zu dem sie als Element gehört, eben den Schnitt aller Universen, zu denen sie als Element gehört. Insbesondere ist natürlich auch jedes Universum Element eines Universums. Gegeben ein Körper  $k$  und ein Universum  $\mathfrak{U}$  mit  $k \in \mathfrak{U}$  können wir dann auf der Kategorie  $k\text{-}\mathfrak{U}\text{Mod}$  der  $k$ -Vektorräume, deren zugrundeliegende Menge zu  $\mathfrak{U}$  gehört, in der Tat den Dualraumfunktorklären.

7.11.8. Das kleinste Universum, das die leere Menge als Element enthält, besteht aus endlichen Mengen.

## **8 Danksagung**

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Ulrich Derenthal, Patrick Säring, Rolf-Dieter Frank, . . .

## 9 Die Vorlesung LA2 im Sommersemester 2015

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also  $4 \times 45$  Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 21.4 Gram-Schmidt, Iwasawa-Zerlegung (keine Cholesky-Zerlegung). Isometrien affiner euklidischer Räume, Anschauung besprochen, Beweis der eindeutigen Zerlegung in Translation und Isometrie mit Fixpunkt steht noch aus.
- 23.4 Beweis der eindeutigen Zerlegung einer Isometrie in Translation und Isometrie mit Fixpunkt. Winkel und orientierte Winkel, Winkelsumme im Dreieck. Kreuzprodukt. Beweis nicht ganz fertig, Bedingung alternierend vergessen!
- 28.4 Kreuzprodukt mit Existenz und Eindeutigkeit, Spatprodukt, anschauliche Bedeutung. Hauptachsentransformation, adjungierte Abbildungen, Eindeutigkeit und Existenz des Adjungierten. Spektralsatz noch ohne Beweis, auch noch keine selbstadjungierten Abbildungen.
- 30.4 Selbstadjungierte Abbildungen, Spektralsatz, Polarzerlegung. Kein Spektralsatz für normale Abbildungen. Hermitesche Matrizen.
- 5.5 Fundamentalmatrix einer Bilinearform, Verhalten unter Basiswechsel. Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen. Klassifikationsfragen. Klassifikation ebener quadratischer Formen über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  vorgestellt, noch nicht bewiesen.
- 7.5 Existenz einer Orthogonalbasis, Rang und Ausartungsraum, Trägheitssatz von Sylvester, Hurwitz-Kriterium.
- 12.5 Satz über Hauptachsentransformationen (Variante) und Singulärwertzerlegung. Alternierende Bilinearformen und deren Klassifikation.
- 19.5 Direktheit der Summe von Haupträumen, Fittingzerlegung, Dimension der Haupträume, Hauptraumzerlegung. Jordan-Zerlegung, nur Beweis der Existenz.
- 21.5 Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung und Funktorialität. Bezug zu linearen Systemen von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Normalform für nilpotente Endomorphismen. Jordan'sche Normalform im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers.

- 2.6 Nebenklassen von Untergruppen, Satz von Lagrange; Normalteiler, Faktorgruppe, universelle Eigenschaft, Isomorphiesatz, Noether'scher Isomorphiesatz noch ohne Beweis.
- 9.6 Beweis des Noether'schen Isomorphiesatzes. Zyklische Gruppen, Gruppen von Primzahlordnung, Kleiner Fermat, Chinesischer Restsatz, RSA-Verfahren;
- 11.6 Beide Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen und ihre Beziehung, aber noch ohne Beweis. Zerlegung endlicher abelscher Gruppen in ihre Primtorsionsanteile. Elementarteilersatz. Noch nicht: Untergruppen endlich erzeugter abelscher Gruppen sind endlich erzeugt.
- 16.6 Eindeutigkeit im Elementarteilersatz. Untergruppen endlich erzeugter abelscher Gruppen sind endlich erzeugt. Endliche Gruppen von Einheitswurzeln sind zyklisch. Beweis der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen durch Teilerfolgen. Beweis der Eindeutigkeit fast fertig.
- 18.6 Beweis der Eindeutigkeit in den Klassifikationen. Satz von Euler als Anwendung. Exakte Sequenzen. Teil des Beweises der Proposition ???: Nur Teil 2 und Beweis der Eindeutigkeit in Teil 1. Das soll erst bei Quotientenvektorräumen wieder aufgegriffen werden.
- 23.6 Gruppenoperationen auf Mengen. Definition von Fixpunkt, Stabilisator, stabiler Teilmenge, Bahn. Freie und transitive Wirkungen. Bahnzerlegung und Bahnenraum. Universelle Eigenschaft des Bahnenraums. Zahlreiche Beispiele von Gruppenwirkungen.
- 25.6 Linksoperationen versus Rechtsoperationen. Bahnformel. Konjugationsklassen. Beispiel: die Bahnformel für die Konjugationsklassen einer Gruppe. Der projektive Raum als Bahnenraum.
- 30.6 Endliche Untergruppen der Drehgruppe. Einbettung der Symmetriegruppen der platonischen Körper als Untergruppen vom Index höchstens Zwei in symmetrische Gruppen. Bild der Bahnpolordnungsabbildung. Injektivität soll in der kommenden Stunde diskutiert werden.
- 2.7 Injektivität der Bahnpolordnungsabbildung. Existenz der Ikosaedergruppe nicht gezeigt. Quotientenvektorräume, universelle Eigenschaft.
- 7.7 Exakte Sequenzen, Neunerlemma, Gram'sche Determinante.
- 9.7 Tensorprodukt, Existenz und Eindeutigkeit, Kroneckerprodukt von Matrizen, Tensor-Hom-Adjunktion.

- 14.7 Tensorprodukt mit dem Dualraum und Homomorphismen. Spur und Evaluationsmorphismus. Identität auf endlichdimensionalen Raum als Tensor.
- 14.7 Allgemeinere Tensorprodukte. Dachprodukt und äußere Potenzen. Erzeugung durch streng monotone Monome. Noch nicht deren lineare Unabhängigkeit.
- 21.7 Deren lineare Unabhängigkeit. Kategorien, Funktoren, Beispiele. Volltreue Funktoren. Noch nicht Äquivalenz von Kategorien.
- 23.7 Äquivalenz von Kategorien. Matrixkategorie äquivalent zur Kategorie endlich erzeugter Vektorräume. Äußere Potenz und Determinante. Cauchy-Binet-Formel. Transformationen. Evaluationstransformation zum Bidualraum. Natürliche Konstruktionen von Vektorräumen zu Bewegungsräumen. Kreuzprodukt und Skalarprodukt als Transformationen.

## Literatur

- [AL] *Skriptum Algebra und Zahlentheorie*, Wolfgang Soergel.
- [AN1] *Skriptum Analysis 1*, Wolfgang Soergel.
- [AN2] *Skriptum Analysis 2*, Wolfgang Soergel.
- [AN3] *Skriptum Analysis 3*, Wolfgang Soergel.
- [Bae50] Reinhold Baer, *Free mobility and orthogonality*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 439–460.
- [Ebb94] Heinz-Dieter Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*, third ed., Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.
- [EIN] *Skriptum Einstimmung*, Wolfgang Soergel.
- [EL] *Skriptum Elementargeometrie*, Wolfgang Soergel.
- [GR] *Skriptum Grundlagen*, Wolfgang Soergel.
- [Gro72] Alexander Grothendieck, *SGA 4*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer, 1972.
- [KAG] *Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie*, Wolfgang Soergel.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.
- [KS00] ———, *Categories and sheaves*, Grundlehren, vol. 332, Springer, 2000.
- [LA1] *Skriptum Lineare Algebra 1*, Wolfgang Soergel.
- [LA2] *Skriptum Lineare Algebra 2*, Wolfgang Soergel.
- [LR03] William F. Lawvere and Robert Rosebrugh, *Sets for mathematics*, Cambridge University Press, 2003.
- [Mac98] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, GTM, vol. 5, Springer, 1998.
- [ML] *Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen*, Wolfgang Soergel.
- [NAS] *Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie*, Wolfgang Soergel.

- [Pic49] Günter Pickert, *Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems*, Math. Ann. **120** (1949), 492–501.
- [SPW] *Skriptum Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*, Wolfgang Soergel.
- [TD] *Skriptum Derivierte Kategorien und Funktoren*, Wolfgang Soergel.
- [TF] *Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*, Wolfgang Soergel.
- [TG] *Skriptum Garbenkohomologie*, Wolfgang Soergel.
- [TM] *Skriptum Topologie und kompakte Gruppen*, Wolfgang Soergel.
- [TS] *Skriptum Singuläre Homologie*, Wolfgang Soergel.
- [TSK] *Skriptum Kategorielle Produktstrukturen*, Wolfgang Soergel.



## **Indexvorwort**

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das  $\cup$  dem Buchstaben u oder das  $\subset$  dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa  $\zeta$  unter z und  $\omega$  unter o.

# Index

- $\angle$  Winkel
  - von Vektoren, 42
  - von Zweistrahle, 40
- $\angle$  gerichteter Winkel, 40
- $X/G$  Bahnenraum, 176
- $X/_IG$  Bahnenraum, 176
- $G \backslash X$  Bahnenraum, 176
- $\Rightarrow$  Transformation, 254
- $\rightarrow$  Morphismus in Kategorie, 239
- $\Rightarrow$  Isotransformation, 254
- $\rightarrow$  Isomorphismus
  - in Kategorie, 242
  - von Kategorien, 248
- $\approx$  Äquivalenz von Kategorien, 248
- $\hookrightarrow$  volltreuer Funktor, 248
- $|\alpha|$  Betrag des Winkels  $\alpha$ , 40
- $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ , 241
- $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$  Spatprodukt, 51
- $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  Skalarprodukt, 18
- $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$  Skalarprodukt, 19
- $[M]$  Einobjektkategorie, 241
- $[\Omega]$  Einpunktköcher, 263
- $[\vec{v}, \vec{w}]$  Vektorprodukt, 50
- $\mathcal{C}^\wedge$  Funktorkategorie, 279
- $\check{X}$  Funktor  $\mathcal{C}(X, \_)$ , 277
- $\bar{V}$  konjugierter Vektorraum, 76
- $\bar{v}$  Vektor als Element von  $\bar{V}$ , 76
- $f^{-1}$  inverser Morphismus, 244
- $f^\circ$  in opponierter Struktur
  - opponierter Morphismus, 246
- $T^\perp$  Orthogonalraum von  $T$ , 20, 97
- $X^\vee$  Funktor  $\mathcal{C}(X, \_)$ , 277
- $\mathcal{C}^\vee$  Funktorkategorie, 277
- $\perp$  orthogonal
  - in Skalarproduktraum, 19
- $*$  Juxtaposition, 259
- $\circ$  Verknüpfung
  - von Morphismen, 238
- $\oplus$  direkte Summe
  - $\bigoplus$  Summe von Familie, 271
  - von komplementären Untervektorräumen, 272
- $X^M$  Fixpunkte von  $M$  in  $X$ , 170
- $\mathcal{B}^A$  Funktorkategorie, 257
- $\triangleleft$  Normalteiler in, 139
- $\prod$  Produkt
  - in Kategorie, 268
  - von Mengen, 267
  - von Vektorräumen, 271
- $\wedge$  Dachprodukt, 229
  - $\bigwedge^r$  äußere Potenz, 228
  - $\bigwedge^{\max}$  maximale Potenz, 231
  - Vektorprodukt, 50
- $\uplus$  disjunkte Vereinigung, 270
- $\cup$  disjunkte Vereinigung, 270
- $\sqcup$  Koprodukt
  - disjunkte Vereinigung, 269
- $\sqcup$  disjunkte Vereinigung
  - $\bigsqcup$  von Mengenfamilie, 269
  - von Teilmengen, 270
- $\mathcal{C}^\times$  Isomorphismen in  $\mathcal{C}$ , 243
- $\times$ 
  - Produkt von Kategorien, 247
- $\times$  Produkt
  - in Kategorie, 268
- $\mathcal{C}^\times$  Isomorphismenkategorie, 243
- $\boxtimes$  äußeres Produkt
  - von Funktionen, 216
- Ab abelsche Gruppen
  - Kategorie, 240
- Abständezahl, 194
- Abstand, 19, 54
- Achsenspiegelung, 35
- adjungiert
  - lineare Abbildung, 67

ähnlich  
     Dreiecke, 17  
 Ähnlichkeit, 16, 31, 110  
     lineare, 261  
 Ähnlichkeitsabbildung, 31  
     lineare, 31, 108  
 Äquivalenz  
     von Funktoren, 254  
     von Kategorien, 248  
 äquivariant, 258  
 äußere Algebra, 275  
 äußere Potenz, 228  
 Aff Kategorie der affinen Räume, 245  
 Alexandroff, Satz von, 110  
 Alg Algebrenhomomorphismen, 274  
 Alg Kategorie der Algebren, 240  
 Algebra, **274**  
 Algebrenhomomorphismus, **274**  
 Alt alternierende Formen, 228  
 Alternator, 232  
 alternierend  
     Matrix, 83  
     Tensor, 232  
 Anfangspunkt  
     von Pfeil in Köcher, 262  
 antikausal, 107  
 arrow of quiver, 263  
 Artin, Vermutung von, 160  
 Assoziativität  
     bei Gruppenoperation, 169  
 Ausartungsraum, 91  
 Ausgangskategorie, 245  
 ausgeartet  
     Bilinearform, 91  
     Paarung, 96  
 Automorphismus  
     einer Gruppe, 181  
     in Kategorie, 243  
 Bahn, 171  
 Bahnenraum, 176  
 Bahnformel, 180  
 Bahnpolordnungsabbildung, 190  
 balanciertes Produkt, 181  
 Basispunkt, 163  
 bepunktete Menge, 163  
 Bessel'sche Ungleichung, 24  
 Betrag  
     eines Winkels, 40  
 Bewegung, 33, 183  
 Bewegungsgruppe, 183  
     affine, 33  
 Bewegungsraum, 33  
 Bierdeckelgruppe, 184  
 Bil Bilinearformen, 81  
 bilinear  
     bei abelschen Gruppen, 143  
 Bilinearform, 16  
     nichtausgeartet, 91  
 Bilinearformen, 81  
 Bogenmaß, 44  
 Brennpunkt  
     einer Ellipse, 78  
 Bruhat-Zerlegung  
     in der  $GL(n; R)$ , 201  
 *$C_n$  zyklische Gruppe*, 144  
 Car Kategorie der Köcher, 263  
 *$\text{Car}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$* , 265  
 carquois, 263  
 Cartan-Zerlegung, 72  
 *$\underline{\text{Cat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$* , 256  
 Cauchy  
     Satz von, 179  
 Cauchy-Binet-Formel, 236  
 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 21  
 Chinesischer Restsatz, 145  
 Cholesky-Zerlegung, 62  
 codim Kodimension  
     eines Untervektorraums, 162  
 cok Kokern  
     bei abelschen Gruppen, 164

$\cos_a$  analytischer Cosinus, 42  
 $\cos_g$  geometrischer Cosinus, 42  
 Cosinus, 42  
     analytischer, 42  
     geometrischer, 42  
 Cosinus-Satz, 48  
  
 Dachprodukt, 229  
 darstellbarer Funktor, 278, 279  
 Darstellung  
     eines Köchers, 263  
 Diagramm  
     in Kategorie, 263  
 Diagrammjagd, 167  
 Diagrammschema, 263  
 dicke Zelle  
     in der  $GL(n; K)$ , 202  
 Diedergruppe, 183  
 direkte Summe  
     von Vektorräumen, 271  
 disjunkte Vereinigung, 269  
 diskret  
     Kategorie, 242  
 Dodekaeder, 184  
 Drehachse, 32  
     von linearer Drehung, 32  
 Drehgruppe, 185  
 Drehspiegelgruppe, 38  
 Drehspiegelung, 55  
 Drehung, 32  
     lineare, 32  
 Drehungsgruppe, 35, 38  
 Dreiecksungleichung  
     in euklidischem Vektorraum, 22  
 Dreispiegelungssatz, 57  
  
 Ecke  
     eines Dreiecks, 46  
     von Graph, 195  
     von Köcher, 262  
 edge of quiver, 263  
  
 Eig Eigenraum, 116  
 Eigenraum, 116  
     von quadratischer Form  
         auf Skalarproduktraum, 86  
 Eigenwert  
     von quadratischer Form  
         auf Skalarproduktraum, 86  
         auf  $\mathbb{R}^n$ , 67  
 Ein-Objekt-Kategorie, 241  
 Einbettung, 252  
 Einheitswurzel  
     eines Körpers, 156  
 Einpunktköcher, 263  
 Eins-Element  
     einer Algebra, 274  
 Einsetzungshomomorphismus, 235  
 Elementarteiler, 152  
 Elementarteilersatz  
     über dem Grundring  $\mathbb{Z}$ , 151  
 Ellipse  
     Brennpunkt, 78  
 $\text{em}_x$   
     Morphismus aus finalem Objekt,  
         244  
 endlich  
     Köcher, 263  
 Endomorphismen  
     in Kategorie, 241  
 Endpunkt  
     von Pfeil in Köcher, 263  
 ens einelementige Menge, 244  
 Ens Kategorie der Mengen, 240  
 Ens\* bepunktete Mengen, 240  
 Ereignisse, 105  
 Erweiterung der Skalare  
     bei Vektorräumen, 215  
 essentiell surjektiv  
     Funktor, 248  
 Euk Kategorie der euklidischen Vek-  
     torräume, 245  
 euklidisch

- Abbildung, 31
- Ebene, 29
- Raum, 29
- Struktur, 29
- Vektorraum, 19, 29
- euklidische Struktur
  - induzierte, 31
- Euler'sche Winkel, 64
- Euler, Satz von, 159
- Euler-Formel, 200
- Eulerformel, 199
- ev Evaluationspaarung, 214
- Evaluationspaarung, 214
- ex Expansion der Identität, 216
- exakte Sequenz
  - von bepunkteten Mengen, 163
- Expansion der Identität, 216
- Exponent, 156
- $F(b)$  Fundamentalmatrix, 81
- Fermat'sche Kongruenz, 145
- fin Morphismus zum finalen Objekt, 244
- $\text{fin}(C)$  finales Objekt, 244
- final, 252
  - Objekt, 243
  - Struktur, 253
- Fitting-Zerlegung
  - von Vektorräumen, 119
- Fixator, 170, 171
  - mengenweiser, 171
  - punktweiser, 171
- Fixpunkt
  - von Gruppenwirkung, 170
- Flächengerade, 224
- Form
  - quadratische, 84
- frei
  - Gruppenwirkung, 171
  - Wirkung eines Monoids, 171
- Fundamentalmatrix, 81
- Funktor, 245
  - darstellbarer, 278, 279
  - kodarstellbarer, 279
  - kontravarianter, 247
  - quasiinverser, 260
- Funktorkategorie, 256
- Fußball, Satz vom, 28
- gegensinnig
  - Kongruenz, 8
- Geschwindigkeit
  - absolute, 210
- gestreckter Winkel, 41
- Gitter
  - $\mathbb{Z}$ -Gitter in  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, 160
- gleichsinnig
  - Kongruenz, 8
- Gleitspiegelung, 55
- $\text{GO}_{\text{aff}}(E)$  Ähnlichkeiten, 110
- Gon als Winkelmaß, 44
- Grad
  - bei der Winkelmessung, 44
- Gram'sche Determinante, 96
- Gram'sche Matrix, 96
- Gram-Schmidt, 59
  - Orthogonalisierungsverfahren, 60
- Graph
  - kombinatorischer, 195
- Graßmann-Algebra, 275
- Grp Kategorie der Gruppen, 240
- $\text{Grp}^\times(G)$  Automorphismen von  $G$ , 181
- Gruppoid, 242
- halbeinfach
  - Endomorphismus, 122
- halbeinfacher Anteil
  - eines Endomorphismus, 122
- Halbgerade, 6
- Halbraumfahne
  - fastvollständige, 38
  - vollständige, 38

Hau Hauptraum, 116  
 Hauptachse  
     von quadratischer Form  
         auf Skalarproduktraum, 86  
     von quadratischer Form  
         auf  $\mathbb{R}^n$ , 67  
 Hauptminoren-Kriterium, 94  
 Hauptraum, 116  
 Hauptvektor, 116  
 Helmholtz'sches Raumproblem, 38  
 hermitesch, 18, 69  
 Hilbert'sche Probleme  
     Nummer 18, 185  
 Hilbertraum  
     endlichdimensionaler, 19  
 homogener Raum, 171  
 Homomorphismus  
     von Ringalgebren, 274  
     von Sequenzen, 164  
 Hurwitz-Kriterium, 94  
 Id Identitätsfunktork, 246  
 identische Transformation, 256  
 Identität auf  $X$ , 238  
 Identitätsfunktork, 246  
 Ikosaeder, 184  
 Ikosaedergruppe, 184  
 in, Morphismus in Koprodukt, 272  
 indefinit, 93  
 Index  
     einer Untergruppe, 137  
     von Bilinearform, 93  
 induziert  
     Struktur, 252  
 ini( $\mathcal{C}$ ) initiales Objekt, 244  
 initial  
     Objekt, 243  
     Struktur, 252  
 innerer Automorphismus  
     einer Gruppe, 181  
 insertion homomorphism, 235  
 int <sub>$x$</sub>  Konjugation mit  $x$ , 181  
 interior automorphisms, 181  
 Invariante  
     von Gruppenwirkung, 170  
 invers  
     Morphismus, 244  
 Involution, 143  
 Iso  
     in Kategorie, 242  
 Isometrie, 53  
     partielle, 74  
 Isometriesymmetrien, 198  
 isometrisch, 53  
     lineare Abbildung, 98  
     Isomorphismus, 53  
 isomorph  
     Funktoen, 254  
     Graphen, 195  
     in Kategorie, 242  
 Isomorphieklasse, 243  
 Isomorphiesatz, 141  
     Noether'scher, 141  
 Isomorphismenkategorie, 243  
 Isomorphismus  
     in Kategorie, 242  
     isometrischer, 53  
     von Funktoen, 254  
     von Graphen, 195  
     von Kategorien, 248  
     von Kongruenzebenen, 15  
     von Sequenzen, 164  
 Isotransformation, 254, 265  
 Isotropiegruppe  
     für Standgruppe, 170  
 Iwasawa-Zerlegung  
     für  $GL(n; \mathbb{C})$ , 61  
     für  $GL(n; \mathbb{R})$ , 61  
     für  $SL(n; \mathbb{C})$ , 64  
 J( $r$ ) nilpotenter Jordan-Block, 126  
 J( $r; \lambda$ ) Jordan-Block, 127

Jordan'sche Normalform, 129  
 Jordan-Basis, 129, 134  
 Jordan-Block, 129  
     nilpotenter, 126  
 Jordan-Zerlegung  
     additive, 122  
     multiplikative, 125  
 Juxtaposition, 259  
  
 kanonisch  
     Abbildung, **255**  
     Isomorphismus, **255**  
     Realisierung, 227  
 Kante  
     von Graph, 195  
 kartesisch  
     Produkt  
         von beliebig vielen Mengen, 267  
 Kategorie, 238  
      $\mathcal{U}$ -Kategorie, 249  
     diskrete, 242  
 kausal, 107  
 Klassifikation, 87  
     abelsche Gruppen, 150  
 Klassifikationsprobleme, 243  
 Ko-Yoneda-Einbettung, 279  
 kodarstellbarer Funktor, 279  
 Kodimension  
     eines Untervektorraums, 162  
 Köcher, 262  
     mit Verknüpfung, 263  
 kofinal  
     Objekt, 243  
 koinduziert  
     Struktur, 253  
 Kokern  
     bei abelschen Gruppen, 164  
 kommutativ  
     Diagramm, 167  
 Komplement  
     orthogonales, 21  
  
 komplex konjugiert  
     Vektorraum, 76  
 Komplexifizierung, 215  
 kongruent  
     angeordnete Dreiecke, 48  
     Dreiecke, 7  
 Kongruenz, 6  
 Kongruenzebene, 6  
 Kongruenzgruppe  
     affine, 6  
 Konjugation, 181  
 Konjugationsklasse, 181  
 konjugiert  
     Vektorraum, komplexer, 76  
 konservativ  
     Funktor, 250  
 kontravariant  
     Funktor, 247  
 Koproduct, 269  
 Kralg  
     Kategorie der Ringalgebren, 240  
     Kringalgebrenhomomorphismen, **274**  
 Kreuzprodukt, 50  
     kanonisches, 225  
 Kring Kategorie der Kringe, 240  
 Kringalgebra, 274  
 Kristall  
     im Raum, 184  
 Kristallklasse, 185  
 Kristallsystem, 185  
 Kronecker-Produkt, 210  
 kurze exakte Sequenz, 163  
  
 Längeneinheit  
     relativistische, 109  
 Länge, 31, 109  
 Längengerade, 31, 109  
     von euklidischem Raum, 32  
 Lagrange  
     Satz von, 137  
 Laspp, 243

- lichtartig, 107
  - kausal, 105
- lichtartige Vektoren, 89
- Lichtkegel, 89
- lineare Gruppe
  - spezielle, 26
- Linksinverses
  - in Kategorie, 244
- Linksnebenklasse, 135
- linksspaltend
  - Gruppenhomomorphismus, 142
  - Morphismus, 244
- lokal endlich, 120
- lokal nilpotent, 117
- lokal unipotent, 125
- Lorentzmetrik, 88
- LR-Zerlegung, 202
- LU-Zerlegung, 202
- Mackey
  - Lemma von, 96
- Magmaoid, 263
- Mat Matrixkategorie, 241
- Matrixkategorie, 241
- $\bigwedge^{\max}$  maximale äußere Potenz, 231
- Menge
  - $M$ -Menge, 169
  - im Sinne der Logik, 281
- Mengel, 281
- Mengenfunktork, 277
- Minor einer Matrix, 152
- $\text{Mod}_K$  Vektorräume über  $K$ , 240
- $\text{Modf}_K$  Vektorräume, endlich erzeugte, 248
- Modul
  - über Körper, 241
- Mon Kategorie der Monoide, 240
- $\text{Mor}(\mathcal{C})$  Menge der Morphismen von  $\mathcal{C}$ , 239
- Morphismus
  - in Kategorie, 238
  - von euklidischen Räumen, 31
- Multimatrix, 84
- Multiverknüpfung
  - von multilinearen Abbildungen, 218
- Nebenklasse, 135
- Nebenklassengruppe, 141
- negativ definit, 92
- negativ semidefinit, 92
- Neugrad, 44
- Neunerlemma, 166
- nichtausgeartet
  - Bilinearform, 91
  - Paarung, 96
  - quadratische Form, 85
- nilpotent
  - lokal, 117
- nilpotenter Anteil
  - eines Endomorphismus, 122
- Noether'scher Isomorphiesatz, 141
- Norm, 4
  - eines Vektors, 12
- normal
  - Endomorphismus, 120
  - Untergruppe, 139
  - Vektor, 19
- Normalteiler, 139
- Nullkegel, 108
- Nullwinkel, 41
- $O(V)$  orthogonale Automorphismen, 26
- $O(n)$  orthogonale Matrizen, 27
- $O_{\text{aff}}(E)$  orthogonalaffine Gruppe, 110
- $O(V, S)$  orthogonale Gruppe, 30
- $O_{\text{aff}}(E, S)$  Gruppe der orthogonalaffinen Automorphismen, 30
- Objekt einer Kategorie, 238
- Oktaeder, 184
- Operation
  - eines Monoids, 169
  - triviale



- von Gruppe, 169
  - von Menge auf Menge, 169
- $F^{\text{opp}}$  für Funktor  $F$ , 247
- opponiert
  - Kategorie, 246
- orbit, 171
- ord  $g$  Ordnung von  $g$ , 143
- Ord Kategorie der geordneten Mengen, 240
- Ordnung
  - einer Gruppe, 144
  - von Gruppenelement, 143
- Orientierungsgerade
  - eines Vektorraums, 222
- orthogonal, 8, 109
  - Affinität, 110
  - Automorphismus, 30
  - in präpseudoeuklidischem Vektorraum, 108
  - Komplement, 21
  - lineare Abbildung, 25
  - Matrix, 27
  - Teilräume, 21
  - Vektoren, 19
- orthogonalaffine Gruppe, 110
- Orthogonalbasis, 90
- orthogonale Gruppe, 5, 30
- orthogonale Projektion, 21
- Orthogonalraum, 20
- Orthonormalbasis, 20
- Orthonormalsystem, 20
- Paarung
  - bilineare, 96
  - nichtausgeartete, 96
- Parallelogrammregel, 11
- Partition
  - einer Menge, 174
- Pfaff'sche Determinante, 102
- Pfeile, 262
- platonisch
  - Eckenmenge, 190
  - Körper, 190
- Polarisierungsidentität, 52
- Polarzerlegung, 72
  - eines Endomorphismus, 74
- Polordnung, 187
- positiv definit, 4, 92
  - Bilinearform, 16
  - Endomorphismus, 74
  - hermitesche Matrix, 72
  - symmetrische Matrix, 61
- positiv semidefinit, 92
  - Endomorphismus, 74
  - hermitesche Matrix, 72
  - symmetrische Matrix, 61
- Potenz
  - $p$ -Potenz, 150
  - Primpotenz, 150
  - Primzahlpotenz, 150
- pr Projektion aus Produkt, 268
- pr, Projektion aus Produkt, 272
- Prä-Hilbertraum, 19
- präpseudoeuklidisch
  - Abbildung, 108
  - Struktur, 108
  - Vektorraum, 108
- Primitivwurzel, 159
- Primpotenz, 150
- Primzahlpotenz, 150
  - echte, 150
- prinzipaler homogener  $G$ -Raum, 171
- produit extérieur, 229
- Produkt
  - balanciertes, 181
  - in Kategorie
    - von Familie, 267
    - von zwei Objekten, 266
  - von Kategorien, 247
  - von Mengen, 267
  - von Sequenzen, 165
  - von Vektorräumen, 271

Produktmorphismus, 266  
 Projektion  
     in Kategorie, 266, 267  
 pseudoeuklidisch, 108  
 $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$  finales Objekt von  $\mathcal{C}$ , 244  
 Punkt  
     von Köcher, 262  
 Punktgruppe, 185  
 Punktspiegelung, 53  
     räumliche, 57  
 Pythagoras, Satz von, 19  
 QR-Zerlegung, 61  
 quadratisch  
     Form auf  $\mathbb{R}^n$ , **65**  
 quadratische Form, 84  
     inhomogene, 98  
 quasiinverser Funktor, 260  
 quiver, 263  
 Quotient, 253  
     von affinem Raum, 163  
     von Gruppe, 141  
 Quotientenvektorraum, 161  
 Rad Radian  
     für orientierten Winkel, 45  
 Radian, 44, 45  
 Radikal  
     einer Bilinearform, 91  
 Raleigh-Quotient, 70  
 Ralg  
     Kategorie der Ringalgebren, 240  
     Ringalgebrenhomomorphismen, **274**  
 rang Rang einer abelschen Gruppe, 150  
 Rang  
     einer abelschen Gruppe, 150  
     einer Bilinearform, 91  
 Raum-Zeit-Punkte, 105  
 raumartig  
     Vektor, 107  
 Raumzeit, 105  
 Realisierung  
     eines Diagrammschemas, 263  
 Realisierungsfunktor, 245  
 rechter Winkel, 41  
 Rechtsinverses  
     in Kategorie, 244  
 Rechtsmenge, 177  
 Rechtsnebenklasse, 135  
 Rechtsoperation, 177  
 rechtsspaltend  
     Gruppenhomomorphismus, 142  
     Morphismus, 244  
 Rechtstorsor, 177  
 reelle Form  
     von komplexem Vektorraum, 80  
 Relativitätstheorie, 105  
 Repräsentant, 135  
 Ring Kategorie der Ringe, 240  
 Ringalgebra, **274**  
 Rng Kategorie der nicht unitären Rin-  
     ge, 240  
 RSA-Verfahren, 148  
 Schema, 279  
 schieflinear, 18  
 Schnitt  
     von Morphismus, 244  
 selbstadjungiert, 68  
 senkrecht, 8  
 Sequenz  
     kurze exakte, 163  
 Sesquilinearform, 18  
 Shuffle, 236  
 Shuffle-Koprodukt, 236  
 Signatur, 93  
 $\sin_a$  analytischer Sinus, 42  
 $\sin_g$  geometrischer Sinus, 42  
 Singulärwert  
     einer Abbildung, 95  
     einer Matrix, 95  
 Singulärwertzerlegung, 95

Sinus, 42  
     analytischer, 42  
     geometrischer, 42  
 Sinus-Satz, 48  
 Skalarprodukt, 4, 16  
     auf komplexem Vektorraum, 18  
     kanonisches, 224  
 Skalarproduktnorm, 19  
 Skalarproduktraum, 4, 19  
     affiner, 53  
     skalarproduktverträglich, 25  
 $SL(V)$  spezielle lineare Gruppe, 26  
 $SL(n; K)$  spezielle lineare Gruppe, 26  
 Slater-Determinante, 233  
 Smith-Zerlegung, 157  
 $SO(V)$  spezielle orthogonale Automorphismen, 26  
 $SO(n)$  spezielle orthogonale Matrizen, 27  
 spaltend  
     kurze exakte Sequenz, 164  
 Spaltung  
     bei Gruppen, 142  
     bei Gruppen, 142  
     von Morphismus, 244  
 Spat, 51  
 Spatprodukt, 51  
     kanonisches, 224  
 Spektralradius  
     endlichdimensionaler Fall, 124  
 speziellen Relativitätstheorie, 105  
 Spiegelung, 53  
     orthogonale, 33, 62  
 Spingruppe, 27  
 stabil  
     Teilmenge unter Abbildung, 117  
     unter Monoid, 171  
 Stabilisator, 170, 171  
 Standard-Skalarprodukt, 4, 18  
 Standardorientierung  
     der komplexen Zahlenebene, 39  
 Standgruppe  
     für Isotropiegruppe, 170  
 Strahl, 11  
 Struktur  
      $(\mathcal{S}, v)$ -Struktur, 250  
 $SU(V)$  spezielle unitäre Automorphismen, 26  
 $SU(n)$  spezielle unitäre Matrizen, 27  
 Summe  
     von Untervektorräumen, 272  
     von Vektorräumen, 271  
 Sylvester  
     Trägheitssatz, 93  
 Symmetriebewegung, 183  
 Symmetriegruppe, 171  
 symmetrisch  
     Bilinearform, 16  
     Matrix, 61  
 symplektisch  
     Vektorraumautomorphismus, 102  
 symplektische Form, 101  
 symplektischer Vektorraum, 101  
 $\tau = 2\pi$ , 45  
 $T_K V$  Tensoralgebra, 276  
 $Ten_K V$  Tensoralgebra, 276  
 Tensor  
     physikalisch, ko-kontravariant, 221  
     physikalisch, kontravariant, 219, 220  
     physikalisch, kovariant, 219, 220  
 Tensoralgebra, 276  
 Tensorprodukt  
     von linearen Abbildungen, 208  
     von Vektorräumen, 205  
 Tetraeder, 184  
 Tetraedergruppe, 183  
 top einelementiger Raum, 244  
 Top topologische Räume, 240  
 $Top^*$  bepunktete topologische Räume, 240  
 $A_{\text{tor}}$  Torsionsuntergruppe von  $A$ , 146

- torsionsfrei
  - Gruppe, 146
- Torsionsuntergruppe, 146
- Torsor, 174
  - Rechtstorsor, 177
  - von links, 171
- Trägheitssatz
  - Sylvester'scher, 93
- Trans Transformationen, 257, 265
- Transformation
  - von Funktoren, 254
  - von Köchermorphismen, 263
- transitiv
  - Gruppenwirkung, 171
- treu
  - Funktor, 248
- trivial
  - Operation
    - von Gruppe, 169
- Typ
  - von reeller quadratischer Form, 93
- $\sqcup$  Koproduct, 269
- $U(V)$  unitäre Automorphismen, 26
- $U(n)$  unitäre Matrizen, 27
- $\mathfrak{U}\text{Ens}$  Mengen  $X \in \mathfrak{U}$ , 239
- $\mathfrak{U}$ -Kategorie, 249
- $\mathfrak{U}\text{Mod}_K$ , 240
- $\mathfrak{U}\text{Mod}_K$  Vektorräume  $V \in \mathfrak{U}$ , 241
- unipotent
  - Endomorphismus, 125
  - lokal unipotent, 125
- unitär
  - lineare Abbildung, 25
  - Matrix, 27
  - Raum, 19
- unitärassoziativ
  - Magmaoid, 263
- Unitärassoziativität, 169
- universell
  - alternierende Abbildung, 228
  - multilineare Abbildung, 205
- Universum, 281
- Unteralgebra, 275
- Unterkategorie, 243
- Unterobjekt
  - $(\mathcal{S}, v)$ -Unterobjekt, 252
- Unterringalgebra, 275
- Vektorprodukt, 50
- Vektorraum
  - komplex konjugierter, 76
- Vergiß-Funktor, 247
- Verjüngung von Tensoren, 213
- Verknüpfung
  - auf Köcher, 263
  - koinduzierte, 266
  - von Morphismen, 238
- Verschlüsselung
  - RSA-Verfahren, 148
- Verschraubung, 55
- vertex of quiver, 263
- voll
  - Funktor, 248
  - Unterkategorie, 243
- volltreu, Funktor, 248
- Volumenform
  - kanonische, 222
- $\bar{\mathbb{W}}$  Winkelmenge, 40
- $\mathbb{W}$  Winkelgruppe, 40
- wedge-product, 229
- Winkel, 39, 40, 42, **45**
  - echt stumpfer, 62
  - gerichteter, 40
  - gestreckter, 41
  - negativ, 39
  - positiv, 39
  - rechter, 41
- Winkelgruppe
  - abstrakte, 40
  - konkrete, 39

- Winkelmenge
  - abstrakte, 40
- Wirkung
  - eines Monoids, 169
- Witt, Satz von, 99
- Würfel, 184
  - Zeichnung, 62
- Würfelgruppe, 183
- Wurzel
  - als reeller Vektorraum, 31
- Yoneda-Einbettung, 277
- $Z_n$  zyklische Gruppe, 144
- $\mathbb{Z}_n$  zyklische Gruppe, 144
- zeitartig
  - Vektor, 107
- Zeiteinheit
  - relativistische, 109
- Zielkategorie, 245
- zusammenhängend
  - Graph, 195
- Zusammenhangskomponente
  - eines Graphen, 195
- Zweistrahl, 38
  - angeordneter, 38
- zyklisch
  - Gruppe, 143