Dr. Jan Fuhrmann
Joseph Theo Meyer, Henning Stein
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Sommersemester 2023

0. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (De Morgansche Regeln).
Seien Ω, I nichtleere Mengen und $A_i \subset \Omega$ mit $i \in I$. Zeigen Sie

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Aufgabe 2.
Seien Ω, Ω', I nichtleere Mengen, $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und A, B, $A_i \subset \Omega$ mit $i \in I$. Widerlegen Sie folgende Aussagen. Überlegen Sie sich zusätzlich, ob eine der Inklusionen $\subset$ oder $\supset$ im allgemeinen wahr ist.

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

(c) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Aufgabe 3.
Betrachten Sie

(a) $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{\lambda^\omega}{\omega!} e^{-\lambda}$, $\omega \in \mathbb{N}_0$, wobei $\lambda > 0$,

(b) $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathbf{P}(\{\omega\}) = (1-p)^{\omega-1} p$, $\omega \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0,1)$.

Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathbf{P})$ jeweils diskrete Wahrscheinlichkeitsräume bilden.

Aufgabe 4.
Geben Sie die Lösung folgender Aufgaben an. Nutzen Sie hierfür Formeln aus der Kombinatorik (s.u.).

(a) Wie viele Linien entstehen, wenn man N Punkte paarweise miteinander verbindet? (Für $N = 4$ ist die Antwort 6)

(b) Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

(c) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(d) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(e) Wie viele 4-stellige Zahlen mit Quersumme 9 gibt es?

(f) Die Lottoziehung (6 aus 49) ist vorbei, die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

(g) Wir haben N Bücher. Unter diesen Büchern gibt es M gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die N Bücher in einem Regal nebeneinander anzuordnen.

(h) An vier verschiedene Personen wird je ein Brief geschickt. Die Umschläge sind vorbereitet. Wie viele Möglichkeiten gibt es die Briefe auf die Umschläge zu verteilen, sodass mindestens ein Brief an die richtige Adresse geschickt wird?

Formeln aus der Kombinatorik: Ziehen einer Stichprobe vom Umfang r aus n Elementen $(r \leq n)$

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
in Reihenfolge	n^r	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

Dies entspricht den Kardinalitäten folgender Teilmengen von r-Tupeln:

$$\#\{1,\ldots,n\}^r = n^r, \tag{1}$$
$$\#\big\{(a_1,\ldots,a_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \ : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\big\} = n(n-1)\cdots(n-r+1), \tag{2}$$
$$\#\big\{(a_1,\ldots,a_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \ : 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leq n\big\} = \binom{n}{r}, \tag{3}$$
$$\#\big\{(a_1,\ldots,a_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \ : 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r \leq n\big\} = \binom{n+r-1}{r}. \tag{4}$$

Außerdem ist $\binom{n}{r}$ die Kardinalität der Menge aller r-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge:

$$\#\big\{A \subset \{1,\ldots,n\} \ : \#A = r\big\} = \binom{n}{r}.$$

Aufgabe 5.

Für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient gegeben durch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(a) Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(c) Zeigen Sie, dass zu $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.$$

Tipp: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

für $x, y \in \mathbb{R}$

Dieses Blatt wird **nicht** abgegeben. Es wird in den Übungsgruppen am 20.04.2023 und 21.04.2023 besprochen.