Analysis 1 Vorlesungsmitschrieb

unfertige Version vom 2. November 2022

von Julian Partanen

Der Vorlesungsmitschrieb ist verfasst auf Grundlage der Vorlesung Analysis 1 (WS202223) von Prof. Markus Banagl. Er dient als Zusatzinformation, nicht als offizielle Prüfungsgrundlage. Dieser Mitschrieb hat keine Ansprüche auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Organisatorisches

- Übungsbetrieb geleitet von Dr. Dominik Wrazidlo
- Zettelabgabe Freitag bis 16 Uhr, analog im Zettelkasten Mathematikon
- Klausur: Freitag 17.02.2023
- Helpdesk Mo., Mi. 16-17:30 Uhr im Seminarraum Statistik 2. OG Mathematikon
- Sprechstunde Banagl Do. 13-14 Uhr, 3.317 Mathematikon
- Sprechstunde Wrazidlo Di. 15-16 Uhr, 5.212
- dwrazidlo@mathi.uni-heidelberg.de

2 Kontext Analysis

Analysis untersucht (nichtlineare) Veränderung von Größen in Abhängigkeit von anderen Größen („Variablen“). Die Anwendungsgebiete (Physik, Biologie) bilden Modelle auf Basis der Analysis. **Die (Lineare) Algebra untersucht lineare Funktionen** z.B. $F(x, y) = ax + by$. Man kann mithilfe linearer Approximation in der Analysis Methoden der linearen Algebra verwenden und lokale qualitative Aussagen treffen. Die Beziehung zwischen TopologieGeometrie und Analysis wird mithilfe globaler Analysis auf Mannigfaltikeiten hergestellt. TG bezieht sich auf LA über Tangentialräume.

3 Mengen

Man legt ZFC zugrunde. Schreibweisen, Operationen auf Mengen, Beispiele.

- endliche Mengen: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
  - Ordnung irrelevant
  - $x_i = x_j$ für $i \neq j$ erlaubt
  - Bsp.: $1, 2 = 2, 1 = \{1, 1, 2\}$
- unendliche Mengen, Bsp.:
  - Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$
  - Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$
  - Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
  - Reelle Zahlen: $\mathbb{R} :=$ Menge aller „Grenzwerte“ von rationalen Zahlenfolgen

Widerspruchsbeweis für $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Idee: Bruch aus Definition nehmen, annehmen dass dieser gekürzt ist, den Bruch quadrieren und zeigen, dass p und q gerade sind.

3.1 Relationen zwischen / Operationen auf Mengen

3.1.1 Teilmenge

Seien A,B Mengen. $A \subset B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$

3.1.2 Gleichheit

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$

3.1.3 Intervalle

$a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

3.1.4 Vereinigung

$A, B \subset X A \cup B := \{x \in X | x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Allgemeiner: Sei I Indexmenge und X_i Mengen $i \in I, X_i \subset X$
$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \in X | \exists i \in I : x \in X_i\}$

3.1.5 Durchschnitt

$A, B \subset X$ Teilmengen

$A \cap B := \{x \in X | x \in A \text{ und } x \in B\}$

Def.: A,B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$

Seien $X_i \subset X, i \in I$

$\bigcap\limits_{i \in I} X_i := \{x \in X | \forall i \in I : x \in X_i\}$

Bsp.: $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}, n \neq N} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0)$

3.1.6 Differenzmenge

$A - B = A \backslash B := \{x \in A | x \notin B\}$

3.1.7 Kartesische Produkte von Mengen

A, B Mengen. Geordnete Paare $(a, b), a \in A, b \in B$
$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \in A, b = b' \in B$
$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
Bsp.: $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$
$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$
Bsp.: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ „Ebene“ $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ „3-dim. Raum“. Rekursiv: $\mathbb{R}^{n+1} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

3.1.8 Partitionen

Sei X eine Menge. Teilmengen $X_i \subset X, i \in I$
Def.: $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine **Partition von X**, wenn $\forall i \in I, X_i \neq \emptyset, X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i \in I} X_i = X$. Wir können dann folgende (binäre) Relation $\sim$ auf X erklären durch: $x \sim x' :\Leftrightarrow \exists i \in I : x, x' \in X_i$. Diese Relation erfüllt:

- Reflexivität: $x \sim x$
- Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Def.: Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie die letzten Unterpunkte erfüllt. Die **Äquivalenzklassen von** $\sim$ sin, für $x \in X$, $[x] := \{x' \in X | x' \sim x\} \subset X$. Die

Menge aller Äquivalenzklassen bildet eine Partition von X und wird bezeichnet durch $X/\sim$.
Bsp.: $X = \mathbb{Z}, n, m \in \mathbb{Z}$. $n \sim m :\Leftrightarrow 3|(n-m)$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/\sim := \{[0],[1],[2]\}$

3.2 Abbildungen zwischen Mengen

Seien X,Y Mengen. **Def.:** Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

3.2.1 Schreibweisen und Terminologie:

$f : X \to Y$
$x \mapsto f(x)$
X heißt **Definitionsbereich** von f, Y heißt Wertebereich von f, $f(x)$ ist das
Bild von x unter f. $A \subset X$
Bild von A unter f: $f(A) := \{f(x)|x \in A\} \subset Y$ $B \subset Y$
Urbild von B unter f: $f^{-1}(B) := \{x \in X|f(x) \in B\} \subset X$

3.3 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Def.: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- f ist **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$
- f ist **injektiv**, wenn gilt: $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- f ist **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ nicht surj., nicht inj.
$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ nicht surj. aber inj.
$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ $x \mapsto x^2$ ist bijektiv

3.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

Def.: Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn $\exists$ Bijektion $f : X \to Y$.
Def.: Eine Menge X heißt **abzählbar**, wenn X endlich ist oder $\exists$ Bijektion $\mathbb{N} \to X$.
Proposition (Prop.): Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar. (Beweis: Diagonalverfahren)
Korollar: Q ist abzählbar.
Def.: X heißt **überabzählbar**, wenn X nicht abzählbar ist.
Prop.: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wir zeigen: $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ist überabzählbar. (Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren)

3.5 Indentitätsabbildung, Komposition und Umkehrabbildung

Identitätsabbildung: X eine Menge.
$id : X \to X$ $x \in X \mapsto x \in X$
Hintereinanderausführung von Abbildungen (Komposition):
$X \to^f Y \to^g Z$
$g \circ f : X \to Z$ $x \mapsto g(f(x))$
Assoziativität: $h : Z \to V$
$X \to^f Y \to^g Z \to^h V$
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \to V$

Bem.: $g \circ f \neq f \circ g$
z.B.: $f(x) = x^2, g(x) = x + 1$
$g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1 \neq (f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2$
Umkehrabbildungen: Sei $f : X \to Y$ eine Bijektion. Sei $y \in Y$.
$f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ für genau ein $x \in X$. Wir setzen $f^{-1}(y) := x$ und erhalten so eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$, die **Umkehrabbildung von** f.
z.B.: $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = x^2$ ist eine Bijektion.
$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \geq 0$
Es gilt allgemein: $f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y$

4 Gruppen und Körper

Def.: Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$, wobei:

- G ist eine Menge, und
- $\cdot : G \times G \to G$
  $(a, b) \in G \times G \mapsto a \cdot b (= ab)$ sodass gilt:

  Assoziativität: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in G$

  $\exists e \in G : \forall a \in G : a \cdot e = a = e \cdot a$. „neutrales Element von G“, das neutrale Element ist eindeutig.

  $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$, das inverse Element ist eindeutig.

Bsp.: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, $e = 0$,„a^{-1}“$= -a$
Eine Gruppe heißt **abelsch**, wenn $a \cdot b = b \cdot b \in G \forall a, b \in G$
Bsp.: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Def.: Ein **Körper** ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, wobei:

1. K ist eine Menge
2. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element „0“)
3. $\cdot : K \times K \to K$ kann eingeschränkt werden zu einer Abbildung $\cdot : K^* \times K^* \to K^* := K - \{0\}$
4. $(K^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element „1“)
5. **Distributivgesetz:** $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \forall a, b, c \in K$

Schreibweisen:

- Inverse Element von $a \in K$ bzgl. $+$ wird geschrieben als $-a$
- Inverses Element von $a \in K^*$ bzgl. $\cdot$ wird geschrieben als a^{-1}
- $a - b := a + (-b), b \in K^*$
  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \in K$

Bsp.: $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

4.1 Ordnungsaxiome

Der Körper $\mathbb{R}$ enthält eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$, die Teilmenge der „positiven“ Elemente, sodass gilt:

1. $\forall x$ gilt genau eine der folgenden Aussagen: $x \in P$ oder $x = 0$ oder $-x \in P$

2. $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$

3. $x, y \in P \Rightarrow x \cdot y \in P$

Def.: $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$
$x > y :\Leftrightarrow y < x$
Def.: Ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge $P \subset K$, die die letzten Teilaxiome erfüllt, heißt (durch $<$) **angeordneter** Körper.
Konsequenzen der Axiome:

- **Transitivität:** $x < yy < z \Rightarrow x < z$
  Bew.: $y - x \in P, z - y \in P$
  $(P2) \Rightarrow (z - y) + (y - x) \in P$
  $= z - x \Rightarrow x < z$

- Angenommen, $x < y, a \in K^*$. 2 Fälle: $a \in P$ oder $-a \in P$.
  Wenn $a \in P$: $a(\in P) \cdot (y - x)(\in P) \in P$ (nach (P3))
  $= ay - ax \in P$
  $ax < ay$
  Wenn $-a \in P$: $(-a) \cdot (y - x) \in P$ nach (P3)
  $= -ay + ax$
  $ax > ay$

- Für jedes $x \in K^*$ gilt $x^2 (= x \cdot x) \in P$
  Bew.: 2 Fälle: $x \in P$ oder $-x \in P$.
  Wenn $x \in P : x \cdot x \in P$ (nach (P3))
  Wenn $-x \in P : (-x) \cdot (-x) \in P$
  Insbesondere gilt in jedem angeordneten Körper $1 > 0$

4.2 Der Absolutbetrag

Sei $x \in \mathbb{R}$
$|x| := x,$, wenn $x \geq 0$ $-x$, wenn $x < 0$
Eigenschaften: $|x| \geq 0$

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$. $|xy| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ „Dreiecksungleichung“
- $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $= |y - x| \geq |y| - |x| => |x - y| \geq max\{|y| - |x|, |x| - |y|\} = ||y| - |x||$

4.3 Das Archimedische Axiom in angeordneten Körpern

In $\mathbb{R}$ gilt: $\forall x, \epsilon \in \mathbb{R}, x, \epsilon > 0$ gilt: $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \epsilon > x$
Die primäre Anwendung in der Analysis ist: $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} : \frac{1}{n} < \epsilon$
Bew.: $x := 1$
Archim. Axiom $=> \exists n : n \cdot \epsilon > 1, \epsilon > \frac{1}{n}$

5 Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Seien $A(n)$ Aussagen, die von einer natürlichen Zahl n abhängen.
$(A(0)\&(\forall n : A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$
$A(0)$: Induktionsanfang, $A(n)$: Induktionsvoraussetzung, =>: Induktionsschritt
$x \in \mathbb{R} : x^0 := 1$ (z.B. $0^0 = 1$)
$x^n + 1 := x \cdot x^n$

6 Wichtige Ungleichungen

6.1 Bernoullische Ungleichung

$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$
Bew.: Durch Induktion nach n.
$n = 0$ (Ind.anf.): $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$ ✓
Ind.schritt: Es gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ ✓

6.2 Arithmetisches und Geometrisches Mittel

$x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$

Arith. Mittel: $A := \frac{1}{2}(x+y)$

Geom. Mittel: $G := \sqrt{xy}$

Beh.: $G \leq A$

Bew.: Genügt: $G^2 \leq A^2$

d.h.: $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$

$\Rightarrow$ z.z.: $4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$

Also z.z.: $0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

Allgemeiner: Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ die Umkehrabbildung der Bijektion $g : [0, \infty) \to [0, \infty), g(y) = y^n$

$x^{\frac{1}{n}} := f(x)$

$\sqrt[n]{x}$

Seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, x_i > 0 \quad \forall i$

$A_n := \frac{1}{n}(x_i + x_2 +,,, + x_n) =: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

$G_n := (x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} =: (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\frac{1}{n}}$

Prop.: $G_n \leq A_n$
Beweis: Vollständige Induktion nach n.
Induktionsstart: $G_2 \leq A_2$ - schon gezeigt
Induktionsannahme: Es gelte $G_n \leq A_n$
Zu zeigen ist: $G_{n+1} \leq A_{n+1}$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(x_1 + ... + x_n) + x_{n+1}}{(n+1)A_n} = \frac{nA_n + x_{n+1}}{(n+1)A_n}$$

$$= \frac{(n+1)A_n + x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n} = 1 + \frac{x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}$$ Bernoulli: $(1+y)^n \geq 1 + ny \quad (1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + x$

$$(\frac{A_{n+1}}{A_n})^{n+1} = (1 + \frac{x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n})^{n+1} \geq 1 + \frac{x_{n+1} - A_n}{A_n} = \frac{x_{n+1}}{A_n}$$

(Hierbei verwenden wir ohne B.d.A.: $x_{n+1} = max\{x_1, ..., x_{n+1}\}$)

$$A_{n+1}^{n+1} = A_n^{n+1} \cdot (\frac{A_{n+1}}{A_n})^{n+1} \geq A_n^{n+1} \cdot \frac{x_{n+1}}{A_n} = A_n^n \cdot x_{n+1} \geq \text{ (Ind.ann.)}$$

$$(x_1 \cdot ... \cdot x_n) \cdot x_{n+1} = G_{n+1}^{n+1} \Rightarrow A_{n+1} \geq G_{n+1}$$

Für $n = 1, 2, ...$: $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$
Behauptung: $\forall n : a_n < a_{n+1}$
Binomischer Lehrsatz: Fakultät. $k \in \mathbb{N}$ $0! := 1$ $k = 1, 2, ... : k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$
Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$
"Pascalsches Dreieck."

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
z.B. $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
Zurück zur Behauptung:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} \cdot (\frac{1}{n+1})^{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (\frac{1}{n+1})^k$$

$$= (\frac{1}{n+1})^{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n+1}{n+1} \frac{(n+1)-1}{n+1} \cdot ... \cdot \frac{(n+1)-k+1}{n+1}$$

$$= (\frac{1}{n+1})^{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdot ...$$

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

Unser Argument zeigt auch:

$(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Für $k \geq 2: k! = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \geq 2^{k-1}$

$(1+\frac{1}{n})^n \leq 1(k=0) + 1(k=1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

6.3 Geometrische Reihen

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$

$$\begin{array}{ll} s := & 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n \\ xs & \quad\;\; x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} \end{array}$$

$(1-x)s = s - xs = 1 - x^{n+1}$

$\rightarrow s = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Wir haben gezeigt: $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x \neq 1)$

$(1+\frac{1}{n})^n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k = (*) 1 + \frac{1-(\frac{1}{2}^n)}{1-\frac{1}{2}} \leq 3$

Wir haben gezeigt: $(1+\frac{1}{n})^n \leq 3 \quad \forall n$

6.4 Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum x_k^2)^{\frac{1}{2}} (=: X) \cdot (\sum y_k^2)^{\frac{1}{2}} (=: Y)$

Beweis: Wenn $X = 0 \Rightarrow x_k = 0 \quad \forall k \checkmark$

Wenn $Y = 0$ analog (Symmetrie)

Seien nun $X > 0$ und $Y > 0$.

$\xi_k := \frac{|x_k|}{X} \quad \eta_k := \frac{|y_k|}{Y}$

$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = \sum \sqrt{\xi_k^2 \eta_k^2} \leq (G_2 \leq A_2) \sum \frac{1}{2} (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \frac{1}{2} \sum \xi_k^2 (=1) + \frac{1}{2} \sum \eta_k^2 (=1) = 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \leq 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k||y_k|}{X \cdot Y}$

$\Rightarrow \sum |x_k y_k| \leq X \cdot Y$

6.5 Ungleichung von Minkowski

$$(\sum_k (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Bew.: Ist $\sum_k (a_k + b_k)^2 = 0$, dann ist die Ungleichung richtig.

Sei nun $\sum (a_k + b_k)^2 > 0$

$$\begin{aligned}
\sum (a_k + b_k)^2 (= C^2) &= \sum |a_k + b_k| \cdot |a_k + b_k| \le \sum |a_k + b_k| \cdot (|a_k| + |b_k|) \\
&= \sum |a_k + b_k| \cdot |a_k| + \sum |a_k + b_k| \cdot |b_k| \\
&\le \text{ <- (Cauchy-Schwarz) } (\sum (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_k^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} (=: C) \cdot ((\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_k^2)^{\frac{1}{2}}) \\
C^2 &\le C((\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_k^2)^{\frac{1}{2}}) \\
C &> 0 \Rightarrow \\
(\sum (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} &= C \le (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_k^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

7 Die komplexen Zahlen

Wir wollen auf der Menge $\mathbb{R}^2$ Operationen $+$ und $\cdot$ erklären, sodass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper wird.
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\Rightarrow (x, y) + (0, 0) = (x, y) \Rightarrow$ neutrales Element von $+$ ist $(0, 0)$
$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$
$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$ Neutrales Element von $\cdot$ ist $(1, 0)$
$i := (0, 1)$ **“imaginäre Einheit„**
$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$
Notation: Für $x \in \mathbb{R}$: $(x, 0)$

$$\underset{x}{(x,0)} \underset{+i}{+} \underset{}{(0,1)} \cdot \underset{y}{(y,0)} = (x,y)$$

Inverse Elemente:

$(x, y) + (-x, -y)$ (additives Inverse) $= (0, 0) = 0$

$$(x, y)(\neq 0) \cdot (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}) = (\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} (= 1), \frac{xy - yx (= 0)}{x^2 + y^2}) = (1, 0)$$

(Assoziativität von $+, \cdot$ und das Distributivgesetz prüft man leicht nach)
$\Rightarrow \mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bildet einen Körper, den Körper der **komplexen Zahlen**.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ eingebettet durch $x \mapsto (x, 0), x \in \mathbb{R}$
$x, y \in \mathbb{R}$
$x + i \cdot y = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$
$\Rightarrow$ Die Schreibweise $x + i \cdot y$ ist logisch kohärent.
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$
$Re(z) := x$ “**Realteil** von z „.
$Im(z) := y$ „**Imaginärteil** von z „.

$\overline{z} := x - iy = (x, -y)$ "**konjugiert komplexe** Zahl von z „.

$$
\begin{aligned}
\text{Dann gilt: } z = \overline{z} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\
\overline{\overline{z}} &= z \\
&z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
z \cdot \overline{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 (\geq 0) \\
Re(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\
|z| :&= \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\
|\overline{z}| &= |z|, \; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}
$$

$(z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2)$

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &= |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\
&\leq \; \text{(Minkowski)} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1| + |z_2| \; \text{(Dreiecks-Ungleichung)}
\end{aligned}
$$

Prop.: Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden. Bew.: Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt eine Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ (mit zugehöriger Relation $>$), sodass $(P1) - (P3)$ gelten.
Für alle $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ gilt $z^2 > 0$
Insbesondere ist für $z = i : -1 = i^2 > 0$
In jedem angeordneten Körper gilt aber $1 > 0$
Widerspruch zu Axiom (P1).

8 Polynome und ihre Nullstellen

Sei K ein Körper.
Def.: Ein Polynom über K (in einer Variablen) ist ein formeller Ausdruck
$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i$ ("Koeffizienten „) $\in K$
Ist $p \neq 0$, dann sei $a_n \neq 0$
In diesem Fall setzen wir $deg(p) := n$ ("Grad von p„) ("degree„)
Addition von Polynomen: $q = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ O.B.d.A.: Sei $m \leq n$
$p + q := a_n x^n + ... + (a_m + 1) x^m + 1 + (a_m + b_m)(\in K) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + ... + (a_0 + b_0)$
Multiplikation von Polynomen ist eindeutig bestimmt durch $x^n \cdot x^m := x^{n+m}, a(\in K) \cdot x^n := ax^n$,
+ Distributiv-, Assoziativgesetz, Kommutativität.
Sei $K[x]$ die Menge aller Polynome über K in x.
(**Bem.:** $(K[x], +, \cdot)$ bildet einen kommutativen Ring mit 1)
Jedes $p \in K[x]$ legt eine zugeordnete polynomiale Funktion fest durch $f_p : K \to K, \; a \mapsto p(a)$ ("$x = a$ „)
Wir unterscheiden also zwischen p und f_p
Def.: Ein Element $a \in K$ mit $p(a) = 0$ heißt **Nullstelle von p**
Bsp.: Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
0	0	1

$p = x^2 + x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x] \neq 0$

Aber: $p(0) = 0^2 + 0 = 0$

$p(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 0$

$\Rightarrow f_p = 0$ während $p \neq 0$

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

Allgemeiner: $x^k - a^k = (x-a) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2}a + ... + xa^{k-2} + a^{k-1})$

Sei $p \in K[x]$ und a eine Nullstelle von p

$$p(x) = p(x) - p(a) = a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + ... + a_1(x-a)$$
$$= (*) a_n(x-a) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}a + ... + xa^{n-2} + a^{n-1})(\text{Grad } n-1) + a_{n-1}(x-a) \cdot (\text{Grad } n-2) + ..$$
$$= (x-a) \cdot (\text{Polynom vom Grad } n-1)(p^{\ (x))}$$
$$\Rightarrow p = (x-a)^m \cdot q, q \in K[x]$$

a ist keine Nullstelle von q

Def.: m heißt **Vielfachheit** der Nullstelle a

Bem.: Für $p, q \neq 0$, $deg(p \cdot q) = deg(p) + deg(q)$

(Oft: $deg(0) :=$ “ $-\infty$ „)

$\Rightarrow$ Ist $p \neq 0$, dann ist

$p = (x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x-a_k)^{m_k} \cdot q (\in K[x])$, a_i sind Nullstellen von p

wobei q keine Nullstellen in K besitzt.

Es folgt, dass ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad n höchstens n Nullstellen hat.

Satz: $p, q \in K[x]$. Ist $f_p(a) = f_q(a)$ für mindestens $n+1$ verschiedene $a \in K$, dann ist $p = q$.

Beweis:

$f_p(a_i) = f_q(a_i), a_1, ..., a_{n+1} \in K$

$\Rightarrow p - q$ hat die $n+1$ verschiedenen Nullstellen $a_1, ..., a_{n+1}$

$\Rightarrow p - q = 0$ Also $p = q$

Kor.: Hat K unendlich viele Elemente, dann legt die polynomiale Funktion das Polynom eindeutig fest.