radii-polynomial approach における 無限次元ガウスの消去法

（指導教員　関根 晃汰　准教授）
関根研究室　2131701 齋藤 悠希

1. 背景と目的

非線形微分方程式は，さまざまな現象をモデル化することに用いられる．この非線形微分方程式を解くことで，モデル元の現象の解析を行うことができる．非線形微分方程式の解の導出には計算機を用いられるが，誤差が生じる．この解を保証するために，精度保証付き数値計算による検証が必要となる．

非線形微分方程式の解の精度保証付き数値計算には，Newton-Kantorovich 型の定理が用いられる．この定理は有限次元な非線形方程式に用いられるため，近似解での保証になってしまう．真の解での保障をするために，無限次元の問題を解かなければならない．

本研究では，有限次元非線形方程式を解く際に用いられる Newton-Kantorovich 型定理を，無限次元非線形方程式の精度保証付き数値計算に適応する手法を提案することを目的とする．

2. Newton-Kantorovich 型定理

X, Yを Banach 空間，$\mathcal{L}(X,Y)$をXからYへの有界線形作用素の集合とする．有界線形作用素$A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$を考え，作用素$F: X \to Y$が$C^1$-Fréchet 微分可能とする．いま，$\tilde{x} \in X$に対して，正定数$Y_0, Z_0, Z_1$および非減少関数$Z_2(r)(r>0)$が存在して，次に不等式を満たすとする．

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{1}$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0 \tag{2}$$

$$\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r)\\ \forall b &\in \overline{B(\tilde{x}, r)}\end{aligned} \tag{4}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \tag{5}$$

これに対し，$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば，$F(\tilde{x}) = 0$を満たす解$\tilde{x}$が$b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$内に一意に存在する．

3. 提案手法

有限次元における Newton-Kantorovich 型定理の作用素Aは，作用素$A^\dagger$の近似逆作用素であった．無限次元での作用素Aは，作用素$A^\dagger$の逆作用素になる．$A = DF^{-1}$より，式 (1) は以下になる．

$$\|DF^{-1}F(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{6}$$

ここで，$\phi := DF^{-1}F(\tilde{x})$とし，式(7) のように変形して，ガウスの消去法を適用する．Π_Nは射影作用素とする．

$$DF\phi = F(\tilde{x}) \tag{7}$$

$$\begin{cases} \Pi_N DF \quad (\Pi_N\phi + (I - \Pi_N)\phi) \\ \qquad\qquad = \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N)DF(\Pi_N\phi + (I - \Pi_N)\phi) \\ \qquad\qquad = (I - \Pi_N)F(\tilde{x}) \end{cases} \tag{8}$$

4. 今後の課題

提案手法で提示した式(8) のガウスの消去法による展開や，Julia を用いたプログラムの実証を行う．

参考文献

[1] 高安亮紀, , Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル