無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

（指導教員　関根 晃汰　准教授）
関根研究室　2131701 齋藤 悠希

1. 背景と目的

非線形微分方程式は，さまざまな現象を数学モデル化することができる．この非線形微分方程式を解くことで，数学モデルの現象の解析を行うことができる．非線形微分方程式の解の導出には計算機が用いられるが，有限次元として問題を解くと，導出された解と実際の解には誤差が生じる．そのため，解の導出の精度を上げるために，無限次元で考えられる精度保証付き数値計算が必要となる．

非線形微分方程式の精度保証付き数値計算の手法の一つに，radii-polynomial approach がある．この定理は，非線形方程式を有限次元の問題として解を導出している．

本研究では，解の導出精度向上のために，radii-polynomial approach 無限次元ガウスの消去法を用いた改良手法を提案する．

2. radii-polynomial approach

X, Yを Banach 空間，$\mathcal{L}(X,Y)$をXからYへの有界線形作用素の集合とする．有界線形作用素$A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$を考え，作用素$F : X \to Y$が$C^1$-Fréchet 微分可能とする．

いま，$\tilde{x} \in X$に対して，正定数Y_0, Z_0, Z_1および非減少関数$Z_2(r)(r>0)$が存在して，次に不等式を満たすとする．

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{1}$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0 \tag{2}$$

$$\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r) \\ \forall b &\in \overline{B(\tilde{x}, r)}\end{aligned} \tag{4}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \tag{5}$$

これに対し，$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば，$F(\tilde{x}) = 0$を満たす解$\tilde{x}$が$b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$内に一意に存在する．

ここで，$DF(\bar{x})$を F の $\bar{x}$における Fréchet 微分，$A^\dagger$を$DF(\bar{x})$の近似，Aを$A^\dagger$の近似左逆作用素($AA^\dagger \approx I$)とする．

3. 提案手法

radii-polynomial approach で定義された有限次元上での作用素Aは，作用素$A^\dagger$の近似逆作用素である．無限次元上の場合，この$A^\dagger$は真の逆作用素Aとなる．$A = DF^{-1}$より，式(1)は以下になる．

$$\|DF^{-1}F(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{6}$$

ここで，$\phi := DF^{-1}F(\tilde{x})$とし，式(6) を以下のように変形して，ガウスの消去法を適用する．Π_Nは射影作用素とする．

$$DF\phi = F(\tilde{x}) \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \Pi_N DF \Pi_N & \Pi_N DF(I - \Pi_N)\phi \\ (I - \Pi_N) DF \Pi_N & (I - \Pi_N) DF \Pi_N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) F(\tilde{x}) \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{8}$$

4. 今後の課題

提案手法で提示した式(8) のガウスの消去法による展開や，Julia を用いたプログラムの実証を行う．

参考文献

[1] 高安亮紀，Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル