

# タイトル

2131701 齋藤悠希

## 1 Preparation

### 1.1 Banach Space

**定義 1** (線形空間の公理). 空でない集合  $X$  が, 係数体  $\mathbb{K}$  上の線形空間であるとは, 任意の  $u + v \in X$  とスカラー  $\alpha \in \mathbb{K}$  に対して, 加法  $u + v \in X$  とスカラー乗法  $\alpha u \in X$  が定義されていて, 任意の  $u, v, w \in X$  とスカラー  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  に対して次のことが成り立つことである.

1.  $(u + v) + w = u + (v + w)$
2.  $u + v = v + u$
3.  $u + 0 = u$  となる  $0 \in X$  が一意に存在
4.  $u + (-u) = 0$  となる  $-u \in X$  が一意に存在
5.  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6.  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
7.  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8.  $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

**定義 2** (ノルムとノルム空間の定義).  $X$  を係数体  $\mathbb{K}$  上の線形空間とする.  $X$  で定義された関数  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{K}$  上で定義された関数が  $X$  のノルムであるとは

1.  $\|u\| \geq 0, \quad u \in X$
2.  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3.  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

が成立することである. さらに  $X$  に 1つのノルムが指定されているとき,  $X$  はノルム空間という.

**定義 3** (ノルム空間の収束と極限).  $X$  をノルム空間とする.  $X$  の点列  $(u_n) \subset X$  は

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ に対して } \|u_n - u\| < \epsilon$$

のとき、点  $u \in X$  に収束するといひ、

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

と表す。このとき、 $u$  を  $u_n$  の極限といひ、

$$u_n - u, (n \rightarrow \infty)$$

と表す。

**定義 4** (Cauchy 列).  $X$  をノルム空間とする。そのとき  $X$  が *Cauchy* 列であるとは

$$u_n - u_m \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである。即ち

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである。

**定義 5** (完備).  $X$  をノルム空間とする。 $X$  が完備であるとは、任意の *Cauchy* 列  $(u_n)$  が  $X$  の中で極限をもつことである。すなわち、任意の *Cauchy* 列  $(u_n \subset X)$  が

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

となる極限  $u$  を  $X$  内に持つことである。

**定義 6** (Banach 空間). ノルム空間  $X$  が *Banach* 空間であるとは、 $X$  が完備であることである。

**定理 1** (逆三角不等式).  $X$  をノルム空間とする。任意の  $u, v \in X$  について次の不等式を満たす。

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

**証明.** 任意の  $u, v \in X$  について

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\|u\| - \|v\| &\leq \|u - v\| \\ \|v\| - \|u\| &\leq \|u - v\|\end{aligned}$$

となるため、

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ。 ■

**定義 7** (有界列).  $X$  をノルム空間とする. そのとき  $X$  の点列  $(u_n)$  が有界列とは任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数  $M > 0$  が存在することである.

**定理 2** (Cauchy 列ならば有界列).  $X$  をノルム空間とする. そのとき  $X$  の点列  $(u_n)$  が *Cauchy* 列ならば有界列でもある.

**証明.**  $X$  の点列  $(u_n)$  が Cauchy 列であるために,  $\epsilon - N$  論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

を満たす.  $\epsilon = 1$  としても, それに対応した  $N$  が存在し, 任意の  $n \geq N$  に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす.

任意の  $n \geq N$  に対して  $\|u_n\|$  が  $\|u_N\|$  で評価できることを示す. 逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\|| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる. 絶対値の性質より  $|\|u_n - u_N\|| < 1$  は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる. よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため, 点列  $(u_n)$  は有界列である. ■

**定義 8** (線形部分空間). 線形空間  $X$  の空でない集合  $M$  が任意の元  $u, v \in M$  と任意の係数体  $\alpha \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} u + v &\in M \\ \alpha u &\in M \end{aligned}$$

を満たすとき,  $M$  は線形空間  $X$  の線形部分空間と呼ぶ.

**定義 9** (ノルム空間の開球).  $X$  をノルム空間とする.  $x \in X$  とし,  $r > 0$  を正実数とする. そのとき, 集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心  $x$ , 半径  $r$  の開球という.  $X$  が明らかな場合は  $B_X(x, r)$  を省略して  $B(x, r)$  と表記する.

**定義 10** (ノルム空間の開集合).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の部分集合とする. 任意の  $x \in M$  に対して,  $B_X(x, r) \subset M$  となる  $r > 0$  が存在する場合,  $M$  が開集合であるという.

**定義 11** (ノルム空間の閉集合).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の部分集合とする.  $M$  が閉集合であるとは,  $M$  の任意の点列  $(u_n)$  の極限  $u \in X$  が  $M$  にも属することである. すなわち, 点列  $(u_n) \subset M$  について

$$u_n \rightarrow u, \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき,  $M$  は閉集合であるという.

**定義 12** (閉部分空間).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の線形部分空間が閉集合であるとき,  $M$  を閉部分空間である.

## 1.2 Operator

**定義 13** (作用素). ある線形空間  $X$  から別の線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とは,

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき,  $\mathcal{D}(A)$  のどんな元に対しても, それぞれ集合  $Y$  のただ一つの元を指定する規則のことである. また,  $\mathcal{D}(A)$  は  $A$  の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

**定義 14** (単射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

**定義 15** (全射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素  $A$  は全単射であるという.

**定義 16** (全射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とし, その定義域を  $\mathcal{D}(A) \subset X$ , 値域を  $\mathcal{R}(A) \subset Y$  とする. そのとき,

$$A^{-1}(A(u)) = u, u \in \mathcal{D}(A)$$

$$A(A^{-1}(u)) = u, u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$

$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $A^{-1}$  を  $A$  の逆作用素と呼ぶ.

**定理 3** (単射と逆作用素の環境). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とすると.

$$A \text{ が逆作用素を持つ} \Leftrightarrow A \text{ が単射である}$$

**証明.** 「 $A$  が逆作用素を持つ  $\Rightarrow A$  が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$  に対し  $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$ 」を満たすことを確かめる.  $A$  の逆作用素を  $A^{-1}$  とすると, 任意の  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$  に対し

$$\begin{aligned} A(u_1) &= A(u_2) \\ \Rightarrow A^{-1}(A(u_1)) &= A^{-1}(A(u_2)) \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

「 $A$  が単射である  $\Rightarrow A$  が逆作用素  $A^{-1}$  をもつ」の証明

$A$  の値域の定義  $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$  より, 任意の  $v \in \mathcal{R}(A)$  に対し,

$$A(u) = v$$

となる  $u \in \mathcal{D}(A)$  が存在する. その上,  $A$  が単射であるため, 単射の定義の対偶より  $u \in \mathcal{D}(A)$  はどんな  $u \in \mathcal{R}(A)$  に対してもただ一つの元である. そのため, 作用素の定義より, 上記の  $u \in \mathcal{R}(A)$  に対してただ一つの元  $u \in \mathcal{D}(A)$  を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域  $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$  と値域  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$  となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $B$  が定義できる. その上,  $B(v) = u$  の  $v = A(u)$  を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる. 同様に,  $A(u) = v$  の  $u$  に  $u = B(v)$  を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる. よって, 定義域  $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$  と値域  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$  となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $B$  は  $A$  の逆作用素であるため,  $A$  は逆作用素を持つ. ■