無限次元ガウスの消去法を用いた radii polynomial approach 改良

（指導教員 関根 晃太 准教授）
関根研究室 2131701 齋藤 悠希

1 はじめに

精度保証付き数値計算に関する定理の一つに，Newton-Kantorovich 型の定理を利用した radii polynomial approach がある．この定理は有限次元や無限次元を問わず, 非線形方程式や偏微分方程式など殆どの微分方程式に用いることができる．

従来の radii polynomial approach では，ノルム空間の定義に重み付き l^1 空間を用いている．重み付き l^1 空間を用いると，l^1 空間を用いた場合よりも，精度保証のできる条件が厳しくなる問題がある．従来手法で重み付き l^1 空間を用いている要因として，計算過程に計算困難な無限次元の問題が生じるためである．精度保証できる条件を緩和するためには，重みを除いた l^1 空間を用いることで解決することができる．l^1 空間上で radii polynomial approach を用いるためには，線形化作用素が全単射である条件が必要となる．

本研究では，van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を問題とし, 無限次元ガウスの消去法 [1] を用いて, radii polynomial approach におけるノルム空間を l_1 空間で線形化作用素が全単射であるか検証する．これにより，radii polynomial approach の改良が可能であるか確かめる．

2 radii polynomial approach [2]

定理 1 有界線形作用素 $A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$ を考え，作用素 $F : X \to Y$ が C^1-Fréchet 微分可能であるとする．また，A が単射とする．いま，$\bar{x} \in X$ に対して，

$$\|AF(\bar{x})\|_X \le Y_0$$
$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0$$
$$\|A(DF(\bar{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1$$
$$\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r)r, \quad \forall b \in \overline{B(\bar{x}, r)}$$

が成り立つとする．このとき

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

を radii polynomial といい，もし $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在すれば，$F(\tilde{x}) = 0$ をみたす $\tilde{x}$ が $\overline{B(\tilde{x}, r_0)}$ 内に一意存在する．

3 提案手法

$\|DF(\bar{x})^{-1}F(\bar{x})\|$ について，無限次元ガウスの消去法を用いる．$\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\bar{x})$ とおくと，

$$A_M DF(\bar{x})\phi = A_M F(\bar{x})$$

作用素 $A_M, DF(\bar{x})$，射影演算子 Π_N と，

$$T := \Pi_N A_M DF(\bar{x}) \quad B := \Pi_N A_M DF(\bar{x})$$
$$C := (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x}) \quad E := (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x})$$

より，以下に式変形できる．

$$\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N A_M F(\bar{x}) \\ (I - \Pi_N) A_M F(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$S := E - BT^{-1}C$ とすると，

$$\begin{aligned} &\|I_{X_2} - S\| \\ &= \| \left((I - \Pi_N) ADF(\bar{x}) \right) |_{X_2} \\ &\quad - ((I - \Pi_N) ADF(\bar{x}))|_{X_1} \left((\Pi_N ADF(\bar{x}))|_{X_1} \right)^{-1} \\ &\quad\quad ((I - \Pi_N) ADF(\bar{x}))|_{X_2} \| \\ &< 1 \end{aligned}$$

となれば，$DF(\bar{x})$ は全単射である．

4 実験結果

実験では, フーリエ係数の次数を変更し, ノルム値を検証した．検証結果を表 1に示す．結果より，ノルム値が 1 より小さいことがわかることから，radii polynomial approach において，ノルム空間を l_1 空間とし，無限次元ガウスの消去法による計算手法が有効可能であることがわかる．

表 1 フーリエ係数の次数の変更とノルム値の比較

次数	$\|I_{X_2} - S\|$
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

5 おわりに

本研究では，l^1 空間上で線形化作用素が全単射であることを無限次元ガウスの消去法で検証した．実験より，線形化作用素が全単射であることが検証できた．これにより, radii polynomial approach は, 無限次元ガウスの消去法による改良が可能であることがわかった．今後の課題として，無限次元ガウスの消去法による手法を，評価式を対象に適応する手法を検討する．

参考文献

[1] 関根晃太, 中尾充宏, 大石進一. Numerical verification methods for a system of elliptic pdes and their software library.
[2] 舩越康太, 井藤佳奈子, 大谷俊輔, 近藤慎佑, 高橋和暉, 瀬戸翔太, 二平泰知, 高安亮紀. Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル, 2024/11/29.