タイトル

2131701 齋藤悠希

1 Preparation

1.1 Banach Space

定義 1 (線形空間の公理). 空でない集合 X が，係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは，任意の $u+v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，加法 $u+v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて，任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである．

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $u+v = v+u$
3. $u+0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u+(-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

定義 2 (ノルムとノルム空間の定義). X を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．X で定義された関数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{K}$ 上で定義された関数が X のノルムであるとは

1. $||u|| \geq 0, \quad u \in X$
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

が成立することである．さらに X に *1* つのノルムが指定されているとき，X はノルム空間という．

定義 3 (ノルム空間の収束と極限). X をノルム空間とする．X の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } ||u_n - u|| < \epsilon$$

のとき，点 $u \in X$ に収束するといい，

$$||u_n - u|| \to 0,\ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，u を u_n の極限といい，

$$u_n - u,\ (n \to \infty)$$

と表す．

定義 4 (Cauchy 列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X が *Cauchy* 列であるとは

$$u_n - u_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$||u_n - u_m|| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

定義 5 (完備)**.** X をノルム空間とする．X が完備であるとは，任意の *Cauchy* 列 (u_n) が X の中で極限をもつことである．すなわち，任意の *Cauchy* 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \to 0\ , (n \to 0)$$

となる極限 u を X 内に持つことである．

定義 6 (Banach 空間)**.** ノルム空間 X が *Banach* 空間であるとは，X が完備であることである．

定理 1 (逆三角不等式)**.** X をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす．

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

証明. 任意の $u, v \in X$ について

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\| \end{aligned}$$

となる．よって

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$$

となるため，

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ． ■

定義 7 (有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである．

定理 2 (Cauchy 列ならば有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が *Cauchy* 列ならば有界列でもある．

証明. X の点列 (u_n) が Cauchy 列であるために，$\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } ||u_n - u_m|| < \epsilon$$

を満たす．$\epsilon = 1$ としても，それに対応した N が存在し，任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす．

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す．逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる．絶対値の性質より $|\|u_n - u_N\|| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる．よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため，点列 (u_N) は有界列である． ■

定義 8 (線形部分空間)**.** 線形空間 X の空でない集合 M が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$u + v \in M$$
$$\alpha u \in M$$

を満たすとき，M は線形空間 X の線形部分空間と呼ぶ．

定義 9 (ノルム空間の開球)**.** X をノルム空間とする．$x \in X$ とし，$r > 0$ を正実数とする．そのとき，集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心 x，半径 r の開球という．X が明らかな場合は $B_X(x, r)$ を省略して $B(x, r)$ と表記する．

定義 10 (ノルム空間の開集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．任意の $x \in M$ に対して，$B_X(x, r) \subset M$ となる $r > 0$ が存在する場合，M が開集合であるという．

定義 11 (ノルム空間の閉集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．M が閉集合であるとは，M の任意の点列 (u_n) の極限 $u \in X$ が M にも属することである．すなわち，点列 $(u_n) \subset M$ について

$$u_n \to u, \quad (n \to \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき，M は閉集合であるという．

定義 12 (閉部分空間)**.** X をノルム空間とし，M を X の線形部分空間が閉集合であるとき，M を閉部分空間である．

1.2 Operator

定義 13 (作用素)**.** ある線形空間 X から別の線形空間 Y への作用素 A とは，

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき，$\mathcal{D}(A)$ のどんな元に対しても，それぞれ集合 Y のただ一つの元を指定する規則のことである. また，$\mathcal{D}(A)$ は A の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

定義 14 (単射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

定義 15 (全射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素 A は全単射であるという．

定義 16 (全射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とし，その定義域を $\mathcal{D}(A) \subset X$，値域を $\mathcal{R}(A) \subset Y$ とする．そのとき，

$$A^{-1}\left(A\left(u\right)\right) = u,\ u \in \mathcal{D}\left(A\right)$$
$$A(A^{-1}(u)) = u,\ u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$
$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる Y から X への作用素 A^{-1} を A の逆作用素と呼ぶ.

定理 3 (単射と逆作用素の環境)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とすると．

$$A\text{ が逆作用素を持つ} \Leftrightarrow A\text{ が単射である}$$

証明.「A が逆作用素を持つ $\Rightarrow$ A が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$」を満たすことを確かめる．A の逆作用素を A^{-1} とすると，任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し

$$\begin{aligned}&A(u_1) = A(u_2)\\ \Rightarrow &A^{-1}(A(u_1)) = A^{-1}(A(u_2))\\ \Rightarrow &u_1 = u_2\end{aligned}$$

「A が単射である $\Rightarrow$ A が逆作用素 A^{-1}をもつ」の証明

A の値域の定義 $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ より，任意の $v \in \mathcal{R}(A)$ に対し，

$$A(u) = v$$

となる $u \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．その上，A が単射であるため，単射の定義の対偶より $u \in \mathcal{D}(A)$ はどんな $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してもただ一つの元である．そのため，作用素の定義より，上記の $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してただ一つの元 $u \in \mathcal{D}(A)$ を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B が定義できる．その上，$B(v) = u$ の $v = A(u)$ を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる．同様に，$A(u) = v$ の u に $u = B(v)$ を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる．よって，定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B は A の逆作用素であるため，A は逆作用素を持つ． ■

定義 17 (作用素の等号)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A と B が等しいとは

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

かつ

$$Au = Bu,\ \forall u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

が成立することであり，

$$A = B$$

と表記する．

定義 18 (作用素の連続)**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A が $u \in \mathcal{D}(A)$ で連続であるとは

$$u_n \to u,\ (n \to \infty)$$

となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$ に対して

$$Au_n \to Au,\ (n \to \infty)$$

を満たすときである．さらに，A が任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ において連続であるとき，A は連続であるという．

定義 19 (線形作用素)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が，任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A) \text{ が } X \text{ の線形部分空間} \\
&A(u+v) = Au + Av \\
&A(\alpha u) = \alpha Au
\end{aligned}$$

を満たすとき，A を作用素と呼ぶ.

定義 20 (線形作用素の加法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A と B の和を

$$(A+B)u := Au + Bu,\ u \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 $A+B$ の定義域は

$$\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

とする.

定義 21 (線形作用素のスカラー乗法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A の $\alpha \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍を

$$(\alpha A)u := \alpha Au,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 αA の定義域は

$$\mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A)$$

とする.

定義 22 (合成作用素)**.** X, Y, Z を線形空間とする．A を Y から Z への線形作用素とし，B を X から Y への線形作用素とする．そのとき，A と B の合成作用素 AB は

$$(AB)u := A(Bu),\ u \in \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

と定義する．このとき，X から Z への合成作用素 AB の定義域は

$$\mathcal{D}(AB) := \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

とする.

定理 4 (線形作用素に対する単射性 (1))**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A において以下は同値である．

1. 線形作用素が A の単射である．
2. $Au=0,\ u\in\mathcal{D}(A)\Rightarrow u=0$

証明. 単射の定義の対偶は

$$Au_1=Au_2,\ \forall u_1,u_2\in\mathcal{D}(A)\Rightarrow u_1=u_2$$

となる．その上，A は線形作用素であるため，

$$Au_1=Au_2\Leftrightarrow A(u_1-u_2)=0$$

となる．$u_1-u_2\in\mathcal{D}(A)$ を $u\in\mathcal{D}(A)$ とおきなおせば，$1\Rightarrow 2$ は証明された．また，証明を逆に追うことで $2\Rightarrow 1$ も示せる． ■

定理 5 (線形作用素に対する単射性 (2))**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素 A とする．不等式

$$\|u\|_X\leq K\|Au\|_Y,\ u\in\mathcal{D}(A)$$

を満たす定数 $K>0$ が存在するならば，線形作用素 A は単射である．

証明. A が線形作用素であるため，$Au=0,\ u\in\mathcal{D}(A)\Rightarrow u=0$ を使って証明する．ノルムの定義より

$$Au=0,\ \forall u\in\mathcal{D}(A)\Leftrightarrow\|Au\|_Y=0$$

となる．さらに，$Au=0$ ならば，

$$\|u\|_X\leq K\|Au\|_Y=0,\ u\in\mathcal{D}(A)$$

より $\|u\|_X=0$ となる．よって，再びノルムの定義より

$$\|u\|_X=0,\ \forall u\in\mathcal{D}(A)\Leftrightarrow u=0$$

より，$Au=0$ ならば $u=0$ となる． ■

定義 23 (有界な線形作用素)**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$\|Au\|_Y\leq K\|u\|_X,\ \mathcal{D}(A)$$

を満たす正の定数 K が存在する時，線形作用素 A を有界な作用素と呼ぶ．

定理 6 (有界な線形作用素と連続な線形作用素)**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$A\text{ が有界}\Leftrightarrow A\text{ が連続}$$

証明.「A が有界 $\Rightarrow$ A が連続」の証明

連続性の定義より，$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して $Au_n \to Au$ となることを確かめる．$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ から $\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$ を持つ．その上，A は有界であることから

$$\|Au_n - Au\|_Y \leq M\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$$

よって，$u_n \to u,\ (n \to \infty)$ ならば，$Au_n \to Au$ であるため，A は連続である．

「A が連続 $\Rightarrow$ A が有界」の証明

背理法によって証明する．すなわち，A が連続ならば，任意の $M_2 > 0$ に対して

$$\|Au\|_Y > M_2\|u\|_x$$

を満たす $u \in \mathcal{D}$ が存在すると仮定して矛盾を見つける．この仮定より自然数 n に対して，

$$\|Au_n\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす $u_n \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．このとき，$\|u_n\|_X \neq 0$ であることに注意する．ノルム空間 X はノルム空間全体の定義より線形空間であるため，ゼロ元 $0 \subset X$ を持つ．その上，線形作用素の定義より $\mathcal{D}(A)$ は X の部分空間であるため，ゼロ元 $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ を持つ．その上，A が連続であるため，A は $0 \in \mathcal{D}(A)$ でも連続である．$\epsilon - \sigma$ 論法による A の $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ における連続の定義を記述すると

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \|u_n\|_X < \delta \text{となる}\ \forall u_n \in X\ \text{に対して}\ \|Au_n\|_Y < \epsilon$$

となる．その上，ϵ を $n\|u_n\|_X$ とすると，$\delta_n > 0$ が存在し，$\|u_n\|_X < \delta$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して，

$$\|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となる．有界ではないという仮定と組み合わせると

$$n\|u_n\|_X < \|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となるため矛盾する． ■

定義 24 (定義域が X の全体となる有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$)**.** 定義域が *Banach* 空間 X 全体となる X から Y への有界線形作用素全体を

$$\mathcal{L}(X,Y)$$

とする．

定理 7 ($\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間)**.** X をノルム空間とし，Y を *Banach* 空間とする．定義域が X 全体となる X から Y への有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$ のノルムを

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|X\|_X},\ A \in \mathcal{L}(X,Y)$$

とすると，$\mathcal{L}(X,Y)$ は $Banach$ 空間となる．

証明. 作用素の加法（20）と作用素のスカラー乗法（21）の定義をもとに線形空間の公理（1）が満たされていることが導かれる．ただし，$\mathcal{L}(X,Y)$ のゼロ元は任意の $u \in X$ を $0 \in Y$ へ写す作用素であることに注意が必要である．

「ノルム空間」$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ がノルムの定義を満たすことを示せばよい．ノルム空間 X と Banach 空間 Y であるため $\|\cdot\|_X \geq 0$ と $\|\cdot\|_Y \geq 0$ であることから

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \geq 0$$

となるため，$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y) \geq 0}$ となり，ノルムの定義 (1) ■