無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

背景

radii polynomial approach 非線形方程式の解の精度保証に使われる定理

$\tilde{x} \in X$に対して、正定数Y_0, Z_0, Z_1および、非減少関数$Z_2(r)(r > 0)$が存在して、次の式を満たすとする.

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0$$

$$\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1$$

$$\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r),\ \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

背景

このとき，radii polynomial を以下で定義する.

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば、$F(x) = 0$を満たす解 $\tilde{x}$ が $\overline{B(x, r)}$ 内に一意に存在する.

目的

Aを$DF(\bar{x})^{-1}$の近似した作用素で代替
$\rightarrow$ 無限次元ガウスの消去法で $DF(\bar{x})^{-1}$ を計算

従来手法と提案手法の簡単な比較

	計算	**精度**
従来手法	簡略化	悪い
提案手法	無限次元ガウスの消去法	良い

目的

<u>**簡略化部分を無限次元ガウスの消去法で計算**</u>

→ 精度の改善

提案手法

radii-polynomial approach の一部，Y_0の評価式

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0$$

に対して，無限次元ガウスの消去法を適用する．

$A = DF(\bar{x})^{-1}, \quad \phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$として

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x})\Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \\ (I-\Pi_N)DF(\bar{x})\Pi_N & (I-\Pi_N)DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N\phi \\ (I-\Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I-\Pi_N)F(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

今後の課題

- 無限次元ガウスの消去法を用いたY_0の展開
- Julia を用いたプログラムの実証