無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

はじめに

微分方程式を計算機で解くとき，
計算機の資源が有限という特徴のために
方程式の解に誤差が発生する．

→ 解の誤差を評価し，精度を保証する．

<u>精度保証付き数値計算</u>

背景 - van der Pol 方程式

van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) + x = 0$$

- 未知関数　: $x(t)$
- パラメータ : $\mu > 0$

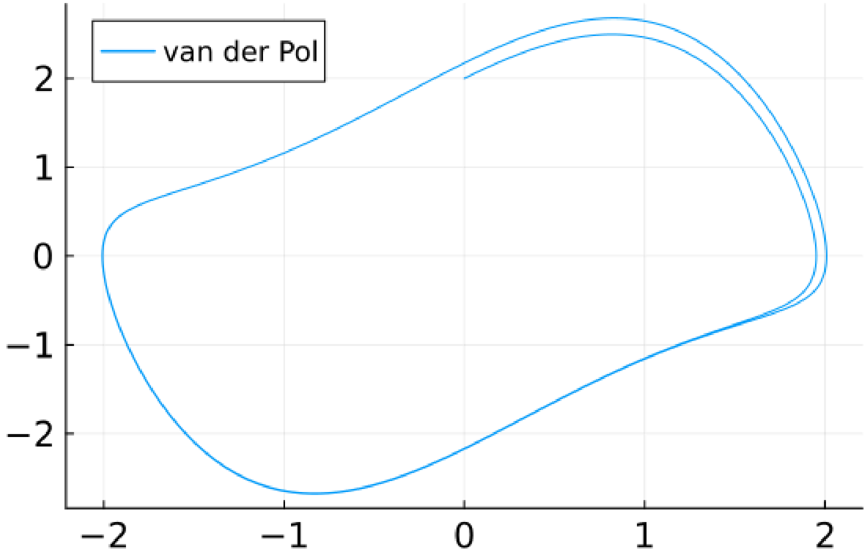


図 1: van der Pol 方程式
初期値 $(0, 2), \mu = 1.0$

背景 - 先行研究

radii-polynomial approach [1]

X, Y	Banach 空間
$\mathcal{L}(X,Y)$	$X \to Y$への 有界線形作用素の集合
$A^\dagger$	$\mathcal{L}(X,Y)$の要素
A	$\mathcal{L}(Y,X)$の要素
F	C^1-Fréchet 微分 可能な作用素

$$\|AF(\bar{x})\|_X \le Y_0$$

$$\left\|I - AA^\dagger\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0$$

$$\left\|A\left(DF(\bar{x}) - A^\dagger\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1$$

$$\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r),$$

$$\forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

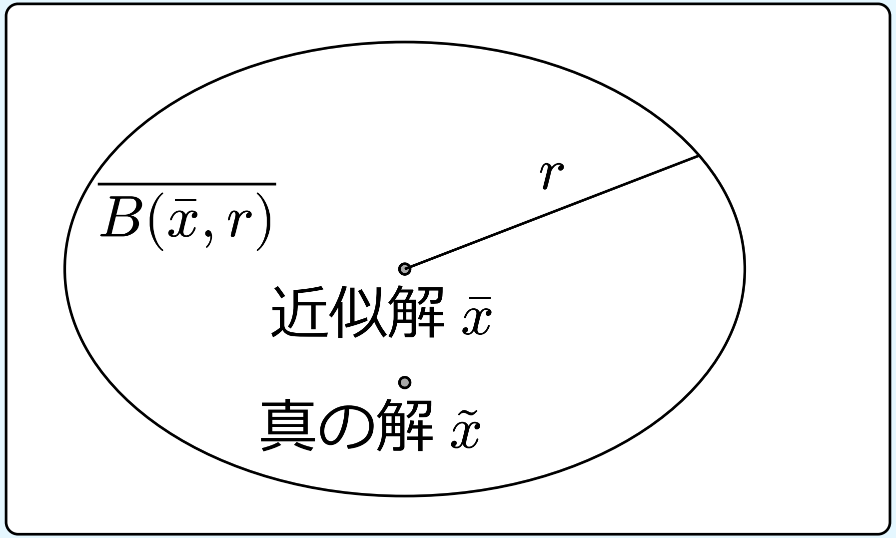
背景 - 先行研究

radii-polynomial approach [1] （続き）

radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

$r_0 > 0$ かつ $p(r_0) < 0$ なら，
$F(\tilde{x}) = 0$ となる解 $\tilde{x}$ が
$\overline{B(\bar{x}, r)}$ 内に一意に存在する．



参考：[1]高安亮紀, Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル

背景 - 先行研究

西窪の研究[2]では，radii-polynomial approach において作用素 A を，
「$A^\dagger$の<u>近似逆作用素</u> $\to$ <u>真の逆作用素</u>」とおき，

$$A \approx DF(x)^{-1} \to A = DF(x)^{-1}$$

$$AA^\dagger \approx I \to AA^\dagger = I$$

ノルムの計算を簡略化.

例） $\left\|A\big(DF(\bar{x}) - A^\dagger\big)\right\| \le Z_1 \Rightarrow \|ADF(\bar{x}) - I\| \le Z_1$

$\longrightarrow$ 精度は大きく低下しない，計算時間は短縮

参考：[2]西窪壱華, radii-polynomial approach における零点探索手順の削除

既存手法と問題点

無限次元サイズの行列 $DF(\bar{x})$
$\to$ 有限で打ち切り，コンピュータで計算

打ち切った分を調整するため，重み付きノルムを使う

重み付きl_1ノルム

$$\|a\|_\omega := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\omega_k < \infty$$

既存手法と問題点

重み付きl_1空間

$$l_\omega^1 = \left\{ a : \|a\| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\omega_k < \infty \right\}$$

l_1空間

$$l_1 = \left\{ a : \|a\| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty \right\}$$

ノルムの値は「重み付きノルム」 $>$ 「l_1ノルム」

$\rightarrow$ 条件の不等号を満たすために，aが限られる.

$\rightarrow$ 精度保証できる問題が限られる.

目的

重みを外し，l_1空間上で計算することで，

radii-polynomial approach の適用できる問題の範囲を増やす

提案手法

l_1空間で計算するために，無限次元ガウスの消去法[3]で作用素を計算

↓

作用素DFが全単射であることを確認しなければならない．

提案手法 - 概要

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

無限次元ガウスの消去法を用いて，$DF(\bar{x})^{-1}$の全単射性を確かめる.

参考：[3]Kouta Sekine, Mitsuhiro T. Nakao, and Shin'ichi Oishi:, "Numerical verification methods for a system of elliptic PDEs, and their software library"

提案手法 - 無限次元ガウスの消去法

射影演算子Π_Nと作用素Aより，以下の作用素を定義する．

$$
\begin{aligned}
T &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_1, & B &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_1, \\
C &:= (I - \Pi_N) ADF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_2, & E &:= (I - \Pi_N) ADF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_2
\end{aligned}
$$

$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$は，作用素の定義より，以下に変形できる．

$$
\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N AF(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) AF(\tilde{x}) \end{pmatrix}
$$

提案手法 - 無限次元ガウスの消去法

$S := D - CT^{-1}B$ としたとき，

$$\left\| I_{X_2} - S \right\| < 1$$

となれば，Sは全単射となる．

Sは，Aと$DF(\bar{x})$から求められる．

$$\begin{aligned} S &:= D - CT^{-1}B \\ &= (I - \Pi_N)ADF(\bar{x}) - ((I - \Pi_N)ADF(\bar{x})) \\ &\quad (\Pi_N ADF(\bar{x}))^{-1}(\Pi_N ADF(\bar{x})) \end{aligned}$$

実行環境

表 1: 実験環境

環境	詳細
CPU	12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700
OS	Ubuntu 24.04.1 LTS
コンパイラ	Julia 1.11.2
微分方程式解答ライブラリ	DifferentialEquations v7.10.0
数値計算ライブラリ	IntervalArithmetic v0.20.9

実験結果

表 2: フーリエ係数の次数の変更による$\left\| I_{X_2} - S \right\|$の比較

次数	$\left\| I_{X_2} - S \right\|$
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

- $\left\| I_{X_2} - S \right\| < 1$を満たした.
- 次数が上がるにつれ，ノルム値が減少.

まとめ

- 無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良手法を提案した
- 数値実験での検証により，l_1空間上で$DF(\bar{x})$が全単射であることがわかった.

$\to$ 提案手法で改良可能であることがわかった