# タイトル

2131701 齋藤悠希

# 1 Preparation

## 1.1 Banach Space

**定義 1** (線形空間の公理)**.** 空でない集合 $X$ が，係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは，任意の $u+v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，加法 $u+v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて，任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである．

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $u+v = v+u$
3. $u+0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u+(-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

**定義 2** (ノルムとノルム空間の定義)**.** $X$ を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．$X$ で定義された関数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{K}$ 上で定義された関数が $X$ のノルムであるとは

1. $||u|| \geq 0, \quad u \in X$
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

が成立することである．さらに $X$ に 1 つのノルムが指定されているとき，$X$ はノルム空間という．

**定義 3** (ノルム空間の収束と極限)**.** $X$ をノルム空間とする．$X$ の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } ||u_n - u|| < \epsilon$$

のとき，点 $u \in X$ に収束するといい，

$$||u_n - u|| \to 0,\ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，$u$ を $u_n$ の極限といい，

$$u_n - u,\ (n \to \infty)$$

と表す．

**定義 4** (Cauchy 列)**.** $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ が Cauchy 列であるとは

$$u_n - u_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$||u_n - u_m|| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

**定義 5** (完備)**.** $X$ をノルム空間とする．$X$ が完備であるとは，任意の Cauchy 列 $(u_n)$ が $X$ の中で極限をもつことである．すなわち，任意の Cauchy 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \to 0\ , (n \to 0)$$

となる極限 $u$ を $X$ 内に持つことである．

**定義 6** (Banach 空間)**.** ノルム空間 $X$ が Banach 空間であるとは，$X$ が完備であることである．

**定理 1** (逆三角不等式)**.** $X$ をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす．

$$|\|u\| - \|v\|| \le \|u - v\|$$

**証明.** 任意の $u, v \in X$ について

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \|u - v + v\| \le \|u - v\| + \|v\| \\
\|v\| &= \|v - u + u\| \le \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\|u\| - \|v\| \le \|u - v\| \|v\| - \|u\| \le \|u - v\|$$

となるため，

$$|\|u\| - \|v\|| \le \|u - v\|$$

を持つ． ■

**定義 7** (有界列)**.** $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ の点列 $(u_n)$ が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \le M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである．

**定理 2** (Cauchy 列ならば有界列). $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ の点列 $(u_n)$ が Cauchy 列ならば有界列でもある．

*証明*. $X$ の点列 $(u_n)$ が Cauchy 列であるために，$\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } ||u_n - u_m|| < \epsilon$$

を満たす．$\epsilon = 1$ としても，それに対応した $N$ が存在し，任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす．

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す．逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる．絶対値の性質より $|\|u_n - u_N\|| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる．よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため，点列 $(u_N)$ は有界列である． ■

**定義 8** (線形部分空間). 線形空間 $X$ の空でない集合 $M$ が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$u + v \in M$$
$$\alpha u \in M$$

を満たすとき，$M$ は線形空間 $X$ の線形部分空間と呼ぶ．

**定義 9** (ノルム空間の開球). $X$ をノルム空間とする．$x \in X$ とし，$r > 0$ を正実数とする．そのとき，集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心 $x$，半径 $r$ の開球という．$X$ が明らかな場合は $B_X(x, r)$ を省略して $B(x, r)$ と表記する．

**定義 10** (ノルム空間の開集合). $X$ をノルム空間とし，$M$ を $X$ の部分集合とする．任意の $x \in M$ に対して，$B_X(x, r) \subset M$ となる $r > 0$ が存在する場合，$M$ が開集合であるという．

**定義 11** (ノルム空間の閉集合). X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．M が閉集合であるとは，M の任意の点列 $(u_n)$ の極限 $u \in X$ が M にも属することである．すなわち，点列 $(u_n) \subset M$ について

$$u_n \to u, \quad (n \to \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき，M は閉集合であるという．

**定義 12** (閉部分空間). X をノルム空間とし，M を X の線形部分空間が閉集合であるとき，M を閉部分空間である．

## 1.2 Operator

**定義 13** (作用素). ある線形空間 X から別の線形空間 Y への作用素 A とは,

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき，$\mathcal{D}(A)$ のどんな元に対しても，それぞれ集合 Y のただ一つの元を指定する規則のことである. また，$\mathcal{D}(A)$ は A の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

**定義 14** (単射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

**定義 15** (全射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素 A は全単射であるという．

**定義 16** (全射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とし，その定義域を $\mathcal{D}(A) \subset X$，値域を $\mathcal{R}(A) \subset Y$ とする．そのとき，

$$A^{-1}(A(u)) = u,\ u \in \mathcal{D}(A)$$
$$A(A^{-1}(u)) = u,\ u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$
$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる Y から X への作用素 $A^{-1}$ を A の逆作用素と呼ぶ.

**定理 3** (単射と逆作用素の環境)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とすると.

$$A \text{ が逆作用素を持つ} \Leftrightarrow A \text{ が単射である}$$

証明.「$A$ が逆作用素を持つ $\Rightarrow$ $A$ が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$」を満たすことを確かめる．A の逆作用素を $A^{-1}$ とすると，任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し

$$\begin{aligned} &A(u_1) = A(u_2) \\ \Rightarrow &A^{-1}(A(u_1)) = A^{-1}(A(u_2)) \\ \Rightarrow &u_1 = u_2 \end{aligned}$$

「$A$ が単射である $\Rightarrow$ $A$ が逆作用素 $A^{-1}$をもつ」の証明

$A$ の値域の定義 $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ より，任意の $v \in \mathcal{R}(A)$ に対し，

$$A(u) = v$$

となる $u \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．その上，A が単射であるため，単射の定義の対偶より $u \in \mathcal{D}(A)$ はどんな $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してもただ一つの元である．そのため，作用素の定義より，上記の $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してただ一つの元 $u \in \mathcal{D}(A)$ を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B が定義できる．その上，$B(v) = u$ の $v = A(u)$ を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる．同様に，$A(u) = v$ の $u$ に $u = B(v)$ を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる．よって，定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B は A の逆作用素であるため，A は逆作用素を持つ． ■

**定義 17** (作用素の等号)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A と B が等しいとは

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

かつ

$$Au = Bu, \ \forall u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

が成立することであり，

$$A = B$$

と表記する．

**定義 18** (作用素の連続)**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A が $u \in \mathcal{D}(A)$ で連続であるとは

$$u_n \to u,\ (n \to \infty)$$

となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$ に対して

$$Au_n \to Au,\ (n \to \infty)$$

を満たすときである．さらに，A が任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ において連続であるとき，A は連続であるという．

**定義 19** (線形作用素)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が，任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A) \text{ が } X \text{ の線形部分空間} \\
&A(u+v) = Au + Av \\
&A(\alpha u) = \alpha Au
\end{aligned}$$

を満たすとき，A を作用素と呼ぶ.

**定義 20** (線形作用素の加法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A と B の和を

$$(A+B)u := Au + Bu,\ u \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 $A+B$ の定義域は

$$\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

とする.

**定義 21** (線形作用素のスカラー乗法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A の $\alpha \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍を

$$(\alpha A)u := \alpha Au,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 $\alpha A$ の定義域は

$$\mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A)$$

とする.

**定義 22** (合成作用素)**.** X,Y,Z を線形空間とする．A を Y から Z への線形作用素とし，B を X から Y への線形作用素とする．そのとき，A と B の合成作用素 AB は

$$(AB)u := A(Bu),\ u \in \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

と定義する．このとき，X から Z への合成作用素 AB の定義域は

$$\mathcal{D}(AB) := \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

とする.

**定理 4** (線形作用素に対する単射性 (1)). 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A において以下は同値である．

1. 線形作用素が A の単射である．
2. $Au = 0,\ u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$

証明. 単射の定義の対偶は

$$Au_1 = Au_2,\ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u_1 = u_2$$

となる．その上，A は線形作用素であるため，

$$Au_1 = Au_2 \Leftrightarrow A(u_1 - u_2) = 0$$

となる．$u_1 - u_2 \in \mathcal{D}(A)$ を $u \in \mathcal{D}(A)$ とおきなおせば，$1 \Rightarrow 2$ は証明された．また，証明を逆に追うことで $2 \Rightarrow 1$ も示せる． ■

**定理 5** (線形作用素に対する単射性 (2)). ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素 A とする．不等式

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

を満たす定数 $K > 0$ が存在するならば，線形作用素 A は単射である．

証明. A が線形作用素であるため，$Au = 0,\ u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$ を使って証明する．ノルムの定義より

$$Au = 0,\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0$$

となる．さらに，$Au = 0$ ならば，

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y = 0,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

より $\|u\|_X = 0$ となる．よって，再びノルムの定義より

$$\|u\|_X = 0,\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow u = 0$$

より，$Au = 0$ ならば $u = 0$ となる． ■

**定義 23** (有界な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X,\ \mathcal{D}(A)$$

を満たす正の定数 K が存在する時，線形作用素 A を有界な作用素と呼ぶ．

**定理 6** (有界な線形作用素と連続な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$A \text{ が有界} \Leftrightarrow A \text{ が連続}$$

証明.「$A$ が有界 $\Rightarrow$ $A$ が連続」の証明

連続性の定義より，$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して $Au_n \to Au$ となることを確かめる．$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ から $\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$ を持つ．その上，A は有界であることから

$$\|Au_n - Au\|_Y \leq M\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$$

よって，$u_n \to u,\ (n \to \infty)$ ならば，$Au_n \to Au$ であるため，A は連続である．

「$A$ が連続 $\Rightarrow$ $A$ が有界」の証明

背理法によって証明する．すなわち，$A$ が連続ならば，任意の $M_2 > 0$ に対して

$$\|Au\|_Y > M_2\|u\|_x$$

を満たす $u \in \mathcal{D}$ が存在すると仮定して矛盾を見つける．この仮定より自然数 $n$ に対して，

$$\|Au_n\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす $u_n \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．このとき，$\|u_n\|_X \neq 0$ であることに注意する．ノルム空間 $X$ はノルム空間全体の定義より線形空間であるため，ゼロ元 $0 \subset X$ を持つ．その上，線形作用素の定義より $\mathcal{D}(A)$ は $X$ の部分空間であるため，ゼロ元 $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ を持つ．その上，$A$ が連続であるため，$A$ は $0 \in \mathcal{D}(A)$ でも連続である．$\epsilon - \sigma$ 論法による $A$ の $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ における連続の定義を記述すると

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \|u_n\|_X < \delta \text{となる}\ \forall u_n \in X\ \text{に対して}\ \|Au_n\|_Y < \epsilon$$

となる．その上，$\epsilon$ を $n\|u_n\|_X$ とすると，$\delta_n > 0$ が存在し，$\|u_n\|_X < \delta$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して，

$$\|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となる．有界ではないという仮定と組み合わせると

$$n\|u_n\|_X < \|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となるため矛盾する． ■

**定義 24** (定義域が $X$ の全体となる有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$)**.** 定義域が Banach 空間 X 全体となる X から Y への有界線形作用素全体を

$$\mathcal{L}(X,Y)$$

とする．

**定理 7** ($\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間)**.** X をノルム空間とし，Y を Banach 空間とする．定義域が X 全体となる X から Y への有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$ のノルムを

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|X\|_X},\ A \in \mathcal{L}(X,Y)$$

とすると，$\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間となる．

**証明**．作用素の加法（20）と作用素のスカラー乗法（21）の定義をもとに線形空間の公理（1）が満たされていることが導かれる．ただし，$\mathcal{L}(X,Y)$ のゼロ元は任意の $u \in X$ を $0 \in Y$ へ写す作用素であることに注意が必要である．

「ノルム空間」$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ がノルムの定義を満たすことを示せばよい．ノルム空間 $X$ と Banach 空間 $Y$ であるため $\|\cdot\|_X \geq 0$ と $\|\cdot\|_Y \geq 0$ であることから

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \geq 0$$

となるため，$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 0$ となり，ノルムの定義 (1) はいえる．

次に，$A = 0$ ならば $\|Au\|_Y = 0$ であるため，

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{0}{\|u\|_X} = 0$$

である．さらに，任意の $u \in X \backslash \{0\}$ について

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = 0 \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0 \Leftrightarrow Au = 0$$

任意の $u \in X \backslash \{0\}$ を $0 \in Y$ へ写す作用素は $\mathcal{L}(X,Y)$ が線形空間により一意に存在し，$A = 0$ である．よって，ノルムの定義 (2) も示された．

続いて $\alpha \in K$ としたとき，$Y$ は Banach 空間であるため，$\|\cdot\|_Y$ はノルムの定義を満たすため，

$$\|\alpha A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|\alpha Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

となるため，ノルムの定義 (3) も示された．

最後に，任意の $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ について

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|(A+B)u\|_Y}{\|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Au + Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Au\|_Y + \|Bu\|_Y}{|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{|u\|_X} + \sup_{u \in X \backslash \{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{|u\|_X} \\
&= \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}
\end{aligned}$$

となり，ノルムの定義 (4) も示されたため，$\mathcal{L}(X,Y)$ はノルム空間である．

「Banach 空間」

Banach 空間であることを証明するには $\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ が極限 $T$ を $\mathcal{L}(X,Y)$ 内に持つことを示せばよい．

まず，極限の候補 $\tilde{A}$ が定義できるか確認する．任意の Cauchy 列 $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ は Cauchy 列の定義 (4) より

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0,\ (n,m \to \infty)$$

となる．任意の $u \in X \backslash \{0\}$ に対して，点列 $(A_n u) \subset Y$ は

$$\begin{aligned}
\|A_n u - A_m u\|_Y &= \frac{\|(A_n - A_m)u\|_Y}{\|u\|_X}\|u\|_X \\
&\leq \sup_{\phi \in X \backslash \{0\}} \frac{\|(A_n - A_m)\phi\|_Y}{\|\phi\|_X}\|\|_X \\
&= \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X \to 0,\ (n,m \to \infty)
\end{aligned}$$

を持つため，点列 $(A_n u) \subset Y$ は Cauchy 列になる．その上，$Y$ は Banach 空間であるため，$Y$ の任意の Cauchy 列は収束し，$Y$ 内に極限 $\tilde{A}u$ となるような $X$ から $Y$ への作用素 $\tilde{A}$ が存在する．ここで，任意の $u \in X$ に対して極限 $\tilde{A}u$ が定義されることから，$\tilde{A}$ の定義域は $\mathcal{D}(\tilde{A}) = X$ である．これにより，$\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 $(A_n)$ の極限の候補 $\tilde{A}$ が定義できた．

続いて，定義した極限の候補 $\tilde{A}$ が $\mathcal{L}(X,Y)$ に属しているか確認する．$\tilde{A}$ が有界な線形作用素であり，かつ $D(\tilde{A}) = X$ であることを示せばよい．$\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 $(A_n)$ の元 $A_n$ は線形作用素であるため，線形作用素の定義より任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と $u, v \in X$ について

$$A_n(\alpha u + \beta v) = \alpha A_n u + \beta A_n v$$

を持つ．よって $n \to \infty$ とすると

$$(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{A}u + \beta \tilde{A}v$$

となり，極限の候補 $\tilde{A}$ は線形作用素である．次に極限の候補 $\tilde{A}$ が有界作用素であることを示す．点列 $(A_n)$ は Cauchy 列であるため定理 (2) より有界列でもある．すなわち，どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$$

となる $n \in \mathbb{N}$ に依存しない定数 $M$ が存在する．この $n \in \mathbb{N}$ に依存しない定数 $M$ は，任意の $n \in X$ について

$$\|A_n u\|_Y \leq M\|u\|_X$$

も満たす．$\|A_n u\| \to \tilde{A}_u,\ (n \to \infty)$ であるため，上の不等式に対して $n \to \infty$ とすると $M$ が $n$ に依存しないため

$$\|\tilde{A}u\|_Y \leq M\|u\|_X$$

を得る．よって，点列 $(A_n)$ の極限の候補 $\tilde{A}$ は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．

最後に，点列 $(A_n)$ の極限が $\tilde{A}$ であることを示す．任意の $u \in X$ に対して，点列 $(A_n u) \subset Y$ は $Y$ 内に極限 $\tilde{A}u$ を持つこと，すなわち

$$A_n u \to \tilde{A}u,\ (u \to \infty)$$

を持つことから

$$\|A_n u - A_m u\|_Y \to \|A_n u - \tilde{A}u\|_Y,\ (m \to \infty)$$

となる．その上，$\mathcal{L}(X,Y)$ のノルムの定義と $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ から

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)},\ (m \to \infty)$$

を得る．点列 $(A_n)$ が Cauchy 列であるため

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon$$

を満たす．その上，$m \to \infty$ とすると

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \text{ に対して } \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon$$

となり，$\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ は Cauchy 列 $(A_n)$ の極限である．よって，任意の Cauchy 列は $\mathcal{L}(X,Y)$ 内に極限を持つため，ノルム空間 $\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間である． ■

**定理 8** ($\mathcal{L}(X,Y)$ ノルムの性質 (1))**.** $X$ をノルム空間とし，$Y$ を Banach 空間とする．そのとき，任意の $u \in X$ と任意の $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ について以下の不等式が成り立つ．

$$\|Au\|_Y \geq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X$$

**証明.** $u = 0$ の時は明らかに成り立つため，$u \in X\backslash\{0\}$ について考える．$u \in X\backslash\{0\}$ について

$$\|Au\|_Y = \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}\|u\|_X \leq \sup_{\phi \in X\backslash\{0\}} \frac{\|A\phi\|_Y}{\|\phi\|_X}\|u\|_X = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X$$

となるため，題意は示された． ■

**定理 9** ($\mathcal{L}(X,Y)$ ノルムの性質 (2))**.** $X$ をノルム空間とし，$Y$ と $Z$ を Banach 空間とする．そのとき，任意の $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ と $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ の合成作用素 $AB$ は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．その上，

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

**証明.** 合成作用素の定義 (22) から

$$\mathcal{D}(AB) = \{v \in \mathcal{D}(B) = X \mid Bv \in \mathcal{D}(A) = Y\}$$

となるが，$B \in \mathcal{L}(X,Y)$ であるため，任意の $v \in X$ に対して $Bv$ は $Y$ に属する．よって，

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D} = X$$

となる．その上，$A$ も $B$ も線形作用素であることから，任意の $u, v \in X$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$AB(\alpha u + \beta v) = A(B\alpha u + B\beta v) = A(\alpha Bu + \beta Bv) = A\alpha Bu + A\beta Bv = \alpha ABu + \beta ABv$$

となるため，合成作用素 $AB$ は定義域が $X$ 全体となる線形作用素である．よって $AB$ は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．その上，

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\mathcal{L}(X,Z)} &= \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|ABu\|_Z}{\|u\|_X} \\ &\le \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X}{\|u\|_X}\|u\|_X \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\end{aligned}$$

■

**定義 25.** (X 上の恒等作用素] $X$ を Banach 空間とする．任意の $u \in X$ に対して

$$Iu = u$$

となる $I \in \mathcal{L}(X)$ を X 上の恒等作用素と呼ぶ.

**定理 10** (Neumann 級数)**.** $X$ を Banach 空間とする．$B \in \mathcal{L}(X)$ とし，$I \in \mathcal{L}(X)$ を $X$ 上の恒等作用素とする．もし

$$\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

ならば逆作用素をもち $B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ となる．そのうえ，

$$B^{-1} = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i$$

で，かつ

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{1 - \|I-B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

証明.

$$S_n = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots + (I-B)^n$$

とすると，$B$ と $I$ ともに $\mathcal{L}(X)$ に属するため，加法 $I-B$ や合成作用素 $(I-B)(I-B)$ なども $\mathcal{L}(X)$ に属する．よって $S_n$ も $\mathcal{L}(X)$ に属する．

続いて点列 $(S_n) \subset \mathcal{L}(X)$ が極限 $S$ を $\mathcal{L}(X)$ 内に持つか確認する．定理 (9) より

$$\|(I-B)^i\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)},\ i = 0, 1, \cdots$$

となるため，$n > m > 0$ となる整数に対して

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\sum_{i=m+1}^{n}(I-B)^i\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \sum_{i=m+1}^{n}\|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)}$$

となる．定理の仮定より $\|(I-B)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ であるため，

$$\sum_{i=m+1}^{n}\|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となる．よって
$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$
となるため，点列 $(S_n)$ は Cauchy 列である．その上，$\mathcal{L}(X)$ は Banach 空間であるため，任意の Cauchy 列は極限 $\mathcal{L}(X)$ に持つため，点列 $(S_n)$ は
$$\|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$
となる極限 $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ を持つ．

次に $S$ が $B^{-1}$ になることを示す．合成作用素の定義 (22) にしたがって合成作用素 $BS_n$ を考える．$X$ は Banach 空間であり，$S, B_n \in \mathcal{L}(X)$ であるため，定理 (9) より合成作用素 $BS_n$ は $\mathcal{L}(X)$ に属する．その上，点列 $(BS_n) \subset \mathcal{L}(X)$ は
$$\|BS_n - BS\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X)}\|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n \to \infty)$$
となるため，極限 $BS$ を $\mathcal{L}(X)$ 内にもつ．一方で，
$$\begin{aligned} BS_n &= (I - (I - B))S_n \\ &= S_n - (I - B)S_n \\ &= \sum_{i=0}^{n}(I - B)^i - \sum_{i=1}^{n+1}(I - B)^i \\ &= I - (I - B)^{n+1} \end{aligned}$$
となり，定理の仮定より $\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ を持つため
$$\|BS_n - I\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(I - B)^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1} \to 0,\ (n \to 0)$$
となるため，点列 $(BS_n)$ は極限 $I$ も $\mathcal{L}(X)$ 内に持つ．よって，極限の一意性より
$$BS = I$$
を得る．$\mathcal{R}(I) = X$ であるため，$\mathcal{R}(BS) = X$ である．その上，$X = \mathcal{R}(BS) \subset \mathcal{R}(B)$ と $\mathcal{R}(B) \subset X$ となるため，
$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(B) = X$$
となる．

同様の議論を $S_nB \in \mathcal{L}(X)$ について行うと
$$SB = I$$
と
$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(S) = X$$
が得られる．そのため，$B$ は逆作用素を持ち，逆作用素 $B^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$ である．

また，

$$S_n = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots + (I-B)^n \to B^-1,\ (n\to\infty)$$

より

$$B^{-1} = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i$$

となる．

最後に

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\|(I-B)\|^i$$

となり，初項 1，公比 $\|I-B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ の総和より

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-\|I-B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

■

**定理 11.** $X$ と $Y$ を Banach 空間とする．$A\in\mathcal{L}(X,Y), R\in\mathcal{L}(Y,X)$ とする．もし $RA$ が全単射ならば，$A$ は単射であり，$R$ は全射である．

証明.「$A$ が単射」の証明

定理 (4)(線形作用素に対する単射性 (1)) の (2) を用いて証明する．$u\in X$ とし，$RA$ が単射であることに注意すると

$$Au = 0 \Rightarrow RAu = 0 \Rightarrow u = 0$$

「$R$ が全射」の証明

$RA$ が全射であるため任意の $g\in X$ に対して，

$$RAu = g$$

となる $u\in X$ が存在する．その上，$v = Au$ とすると任意の $g\in X$ に対して

$$Rv = g$$

となる $v\in Y$ が存在するため，$R$ は全射である． ■

**定義 26** (Fréchet 微分)**.** 作用素 $F: X\to Y$ が $x_0\in X$ で Fréchet 微分可能であるとは，ある有界線形作用素 $E: X\to Y$ が存在して

$$\lim_{\|h\|_X\to 0}\frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-Eh\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

が成り立つことをいう．このとき $E$ は作用素 $F$ の $x_0$ における Fréchet 微分といい，$E = DF(x_0)$ とも書く．もしも作用素 $F: X\to Y$ がすべての $x\in X$ に対して Fréchet 微分可能ならば，$F$ は $X$ において $C^1$-Fréchet 微分可能という．

## 1.3　Banach の不動点定理