無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

1. 背景と目的

非線形微分方程式は，さまざまな現象を数学モデル化することができる．この非線形微分方程式を解くことで，数学モデルの現象の解析を行うことができる．

radii-polynomial approach は，非線形方程式の解の精度保証付き数値計算に関する定理である．従来の radii-polynomial approach は，難しい計算部分を簡略化している．そのため，精度保証の性能が低くなる．そこで，この簡略化をせずに、無限次元ガウスの消去法を用いて，精度保証の性能を向上させる．

2. radii-polynomial approach

- X, Yは Banach 空間
- $\mathcal{L}(X,Y)$はXからYへの有界線形作用素集合
- 有界線形作用素$A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$
- 作用素$F : X \to Y$がC^1-Fréchet 微分可能

$\tilde{x} \in X$に対して，正定数Y_0, Z_0, Z_1および非減少関数$Z_2(r)(r>0)$が存在して，次の不等式を満たすとする．

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{1}$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0 \tag{2}$$

$$\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r) \\ \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}\end{aligned} \tag{4}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \tag{5}$$

これに対し，$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば，$F(x) = 0$を満たす解$\tilde{x}$が$\overline{B(x,r)}$内に一意に存在する．

ここで，$DF(\bar{x})$をFの$\bar{x}$における Fréchet 微分，$A^\dagger$を$DF(\bar{x})$の近似，Aを$A^\dagger$の近似左逆作用素($AA^\dagger \approx I$)とする．

3. 提案手法

従来の radii-polynomial approach では，$A^\dagger, A$は，簡略化のために近似した作用素としていた．

提案手法では，$A^\dagger, A$を以下のように，正確なニュートン法である作用素として計算をする．

$$A^\dagger = DF(\bar{x}), \quad A = DF(\bar{x})^{-1} \tag{6}$$

この式(6) を，radii-polynomial approach の式(1) に代入する．

$$\|DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{7}$$

ここで，$\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$とする．この式に，無限次元ガウス消去法を用いて変形する．ただし、Π_Nは射影作用素とする．

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x}) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \Pi_N DF \Pi_N & \Pi_N DF(I - \Pi_N)\phi \\ (I - \Pi_N)DF\Pi_N & (I - \Pi_N)DF\Pi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\tilde{x}) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

4. 今後の課題

- 提案手法で提示した式(9) のガウスの消去法による展開
- Julia を用いたプログラムの実証

参考文献

[1] 高安亮紀，Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル