3 年第 n 回ゼミ

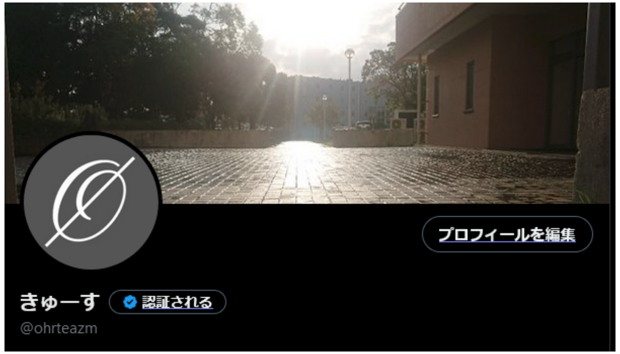
関根研究室　2131701　齋藤 悠希

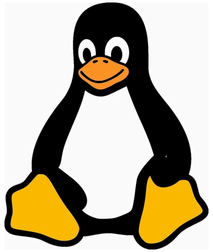
おしながき

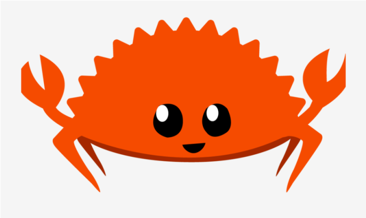
- 自己紹介
- 知識
  - 有界線形作用素
  - Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに

自己紹介

- 名前
  - 齋藤 悠希
- 趣味
  - ゲーム (Valorant とか)
  - プログラミングとか
  - ドライブ







おしながき

- 自己紹介
- 知識
  - 有界線形作用素
  - *Fréchet* 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに

有界線形作用素

有界で線形な作用素

⇨ 順番に考えてみる

有界線形作用素

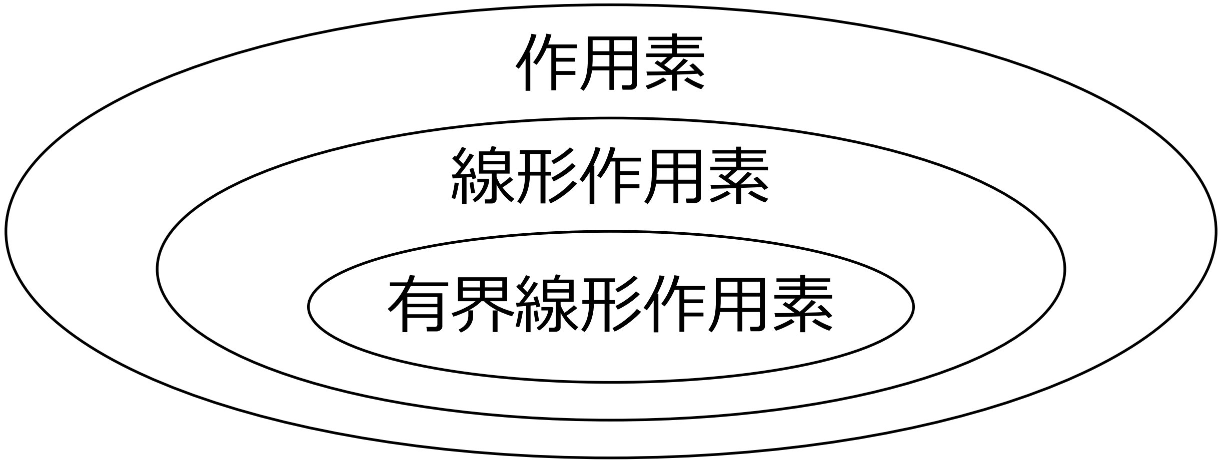


図 有界で線形な作用素のベン図

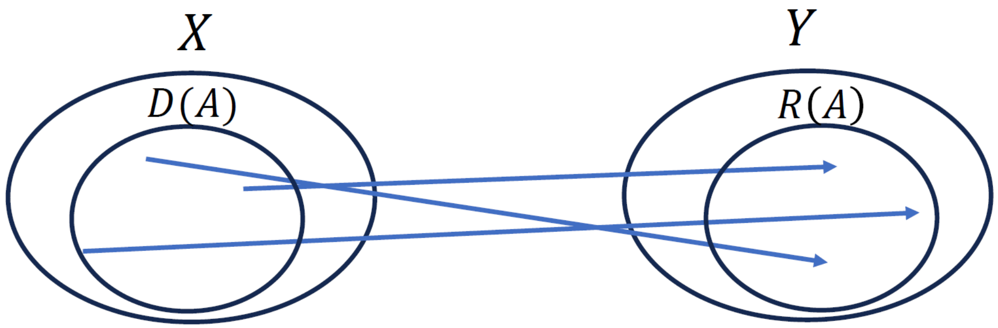
有界線形作用素 - 作用素

作用素

線形空間Xから線形空間Yへの作用素Aとは,

$$D(A) := \{u \in \mathrm{X} \mid Au \in Y\}$$

としたときに,$D(A)$のどんな元に対しても,それぞれ集合Yの唯一つの元を指定する規則のこと



45

有界線形作用素 - 線形作用素

定義　線形作用素

- X, Y : 線形空間，$A : X \to Y$への作用素
- 任意の$u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$と$\alpha \in \mathbb{K}$，に対し
  - $\mathcal{D}(A)$がXの線形部分空間
  - $A(u + v) = Au + Av$
  - $A(\alpha u) = \alpha Au$

を満たす，Aのこと.

有界線形作用素 - 線形作用素

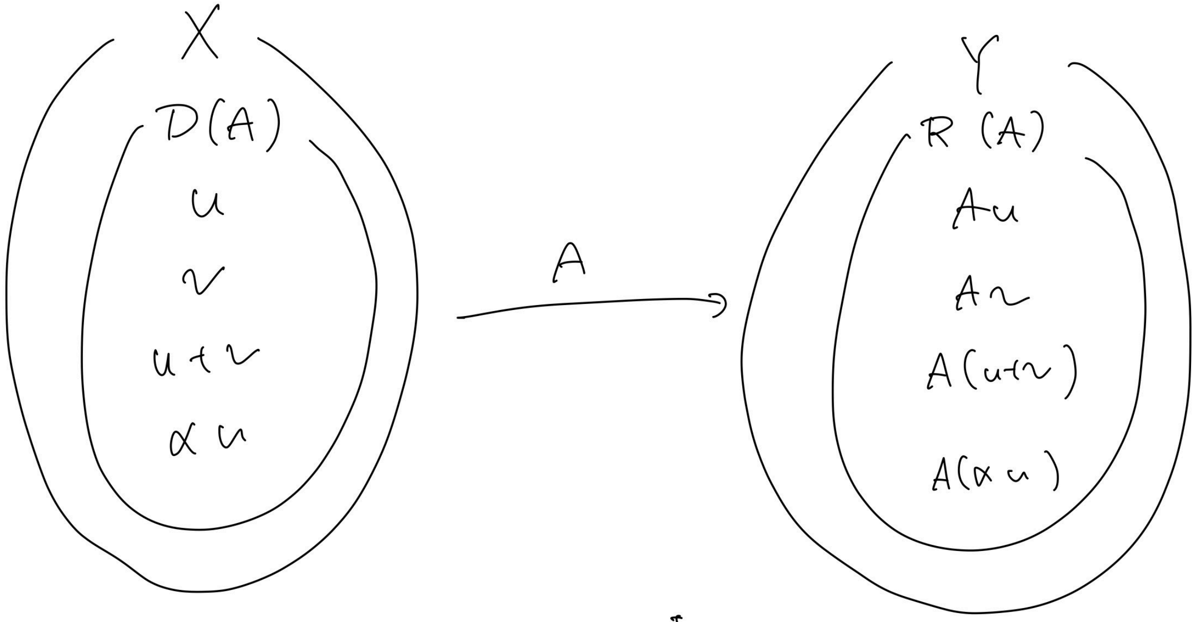


図 線形作用素 イメージ

有界線形作用素 - 線形作用素

定義　線形作用素

- $X, Y:$ 線形空間，$A : X \to Y$ への作用素
- 任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$，に対し
  - $\mathcal{D}(A)$ が X の線形部分空間
  - $A(u+v) = Au + Av$
  - $A(\alpha u) = \alpha Au$

  を満たす，A のこと．

⇨ つまり，<u>足し算と定数倍が保存される</u>

有界線形作用素 - 線形作用素

$$
\begin{tikzcd}
 & u+v \arrow[r, "A"] & A(u+v) \\
u, v \arrow[ur, "+"] \arrow[dr, "A"'] & & \rotatebox{90}{$=$} \\
 & Au, Av \arrow[r, "+"] & Au+Av
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \alpha u \arrow[r, "A"] & A(\alpha u) \\
u \arrow[ur, "\times\alpha"] \arrow[dr, "A"'] & & \\
 & Au \arrow[r, "\times\alpha"] & \alpha Au
\end{tikzcd}
$$

図　線形な写像のイメージ

有界線形作用素 - 有界線形作用素

定義　有界線形作用素

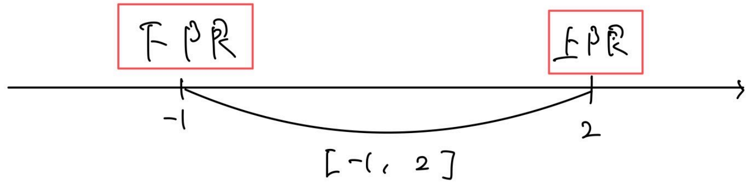
- X, Yを線形空間，$A : X \to Y$への作用素
- $u \in \mathcal{D}(A)$に対し,
  - $\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X$

を満たす，正の定数Kが存在するとき，

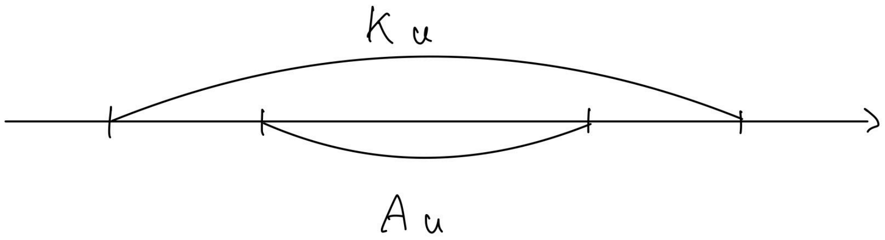
Aを有界な作用素と呼ぶ.

有界線形作用素 - 線形作用素

- $[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ は有界（上下に）



- $\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X$



ある範囲におさまる

有界線形作用素

つまり，有界線形作用素Aとは，

- **有界で**（上限と下限があって）
  - $\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X$
- **線形な**
  - $A(u+v) = Au + Av$
  - $A(\alpha u) = \alpha Au$
- **作用素**（写像みたいなやつ）

おしながき

- 自己紹介
- 知識
  - 有界線形作用素
  - Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに

Fréchet 微分

定義　Fréchet 微分

- X, Yを Banach 空間，開部分集合$U \subset X$
- 定義域を$\mathcal{D}(f) = U$とする，UからYへの作用素fはU上で連続
- ある点$v \in U$に対し，$v + h$となる任意の$h \in X$について

$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \to 0, (h \to 0)$$

を満たす線形作用素$f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$を$f$の点$v$における Fréchet 微分と呼ぶ.

Fréchet 微分

⇨ 順番に考えてみる

Fréchet 微分

Fréchet 微分は，全微分の拡張

$\Downarrow$

全微分は？

$\Downarrow$

微分は？

Fréchet 微分 - 微分

定義　微分可能

関数$f(x)$が微分可能であるとは,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to c, (h \to 0)$$

となる c が存在すること.

Fréchet 微分 - 微分

$f(x) = x^2$のときの c は？

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{\left(x^2 + 2xh + h^2\right) - x^2}{h} \\
&= 2x + h \\
&\to 2x \quad (h \to 0)
\end{aligned}
$$

これより，$f'(x) = c = 2x$

Fréchet 微分 - 微分

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to c, (h \to 0)$$

より，

$$\frac{f(x+h)-f(x)-ch}{h} \to 0, (h \to 0)$$

Fréchet 微分 - 微分

$$\frac{f(x+h) - f(x) - ch}{h} \to 0, (h \to 0)$$

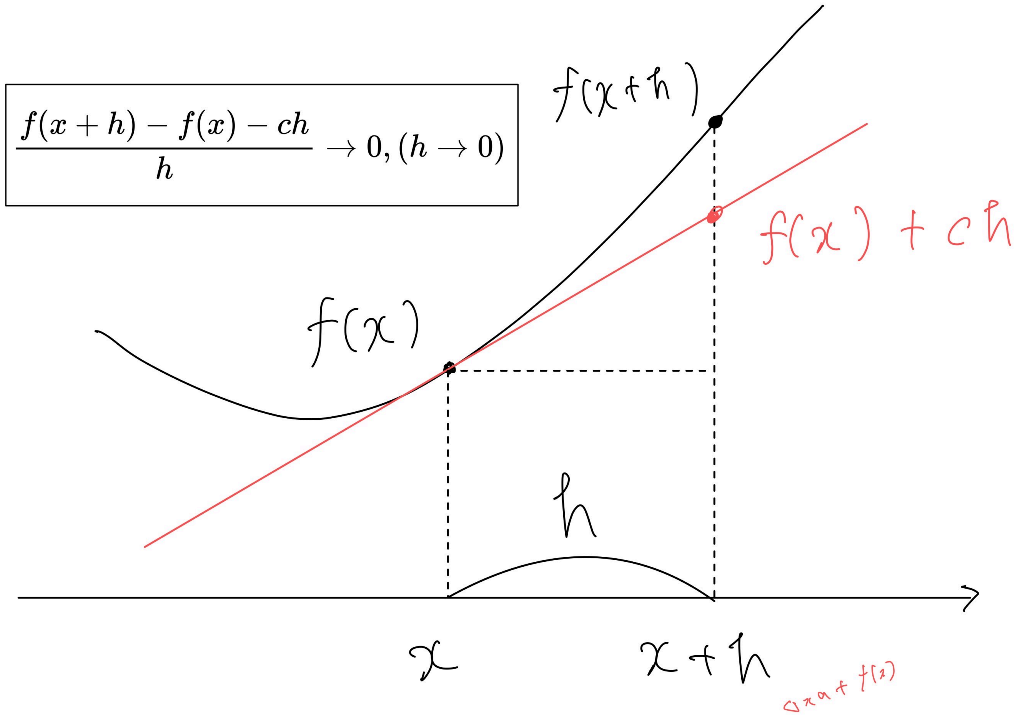


図 微分

Fréchet 微分 - 全微分

定義　全微分可能

関数$f(x)$が微分可能であるとは,

$$\frac{f(x+h)-f(x)-c\cdot h}{\|h\|} \to 0, (h \to 0)$$

となる c が存在すること.

(x, c, hはベクトル)

Fréchet 微分 - 全微分

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)-c\cdot h}{||h||}\to 0,(h\to 0)}$$

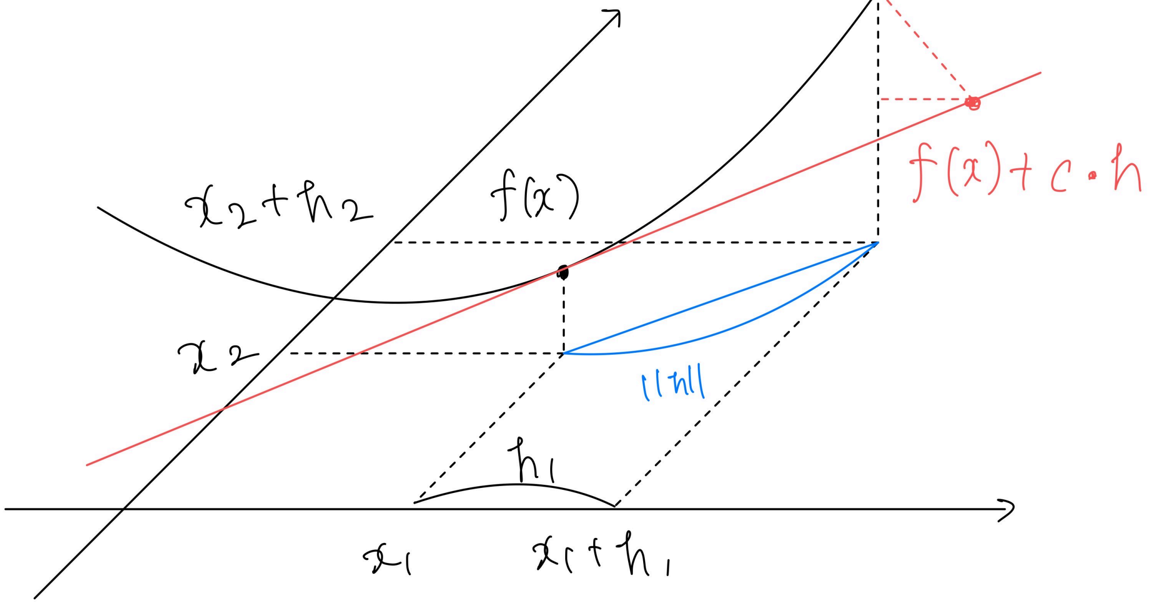


図 全微分 (2次元)

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

定義　Fréchet 微分（再掲）

- X, Yを Banach 空間，開部分集合$U \subset X$
- 定義域を$\mathcal{D}(f) = U$とする，UからYへの作用素fはU上で連続
- ある点$v \in U$に対し，$v + h$となる任意の$h \in X$について

$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \to 0, (h \to 0)$$

を満たす線形作用素$f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$を$f$の点$v$における Fréchet 微分と呼ぶ.

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

- X, Yを Banach 空間，開部分集合$U \subset X$
- 定義域を$\mathcal{D}(f) = U$とする，UからYへの作用素fはU上で連続

$$\Downarrow$$

定義域の指定

関数を作用素に拡張

fが連続 $\rightarrow$ 微分できることの明示

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

- ある点$v \in U$に対し，$v + h$となる任意の$h \in X$について

$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \to 0, (h \to 0)$$

を満たす線形作用素$f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$を…

$$\Downarrow$$

ほぼ全微分と同じ

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

（さっきの式）を満たす線形作用素$f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$を$f$の点$v$における Fréchet 微分と呼ぶ.

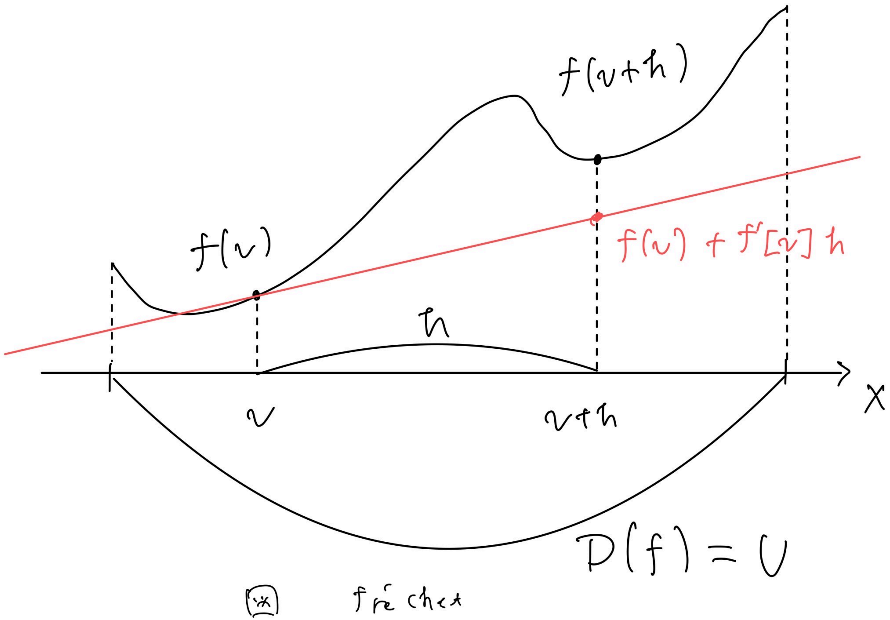
$\Downarrow$

$\boxed{\text{微分の結果を} f'[v] \text{とするよ（} c \text{と意味が同じ）}}$

$\mathcal{B}(X, Y)$…定義域がXの全体となる有界な線形作用素全体の集合

↳ 定義域がXとなる有界線形作用素を，すべて集めたやつ

Fréchet 微分 - Fréchet 微分



$$\boxed{\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X}}$$

線形作用素$f'[v]$を
f の点v における
Fréchet 微分と呼ぶ.

Fréchet 微分（再掲）

定義　Fréchet 微分

- X, Yを Banach 空間，開部分集合$U \subset X$
- 定義域を$\mathcal{D}(f) = U$とする，UからYへの作用素fはU上で連続
- ある点$v \in U$に対し，$v + h$となる任意の$h \in X$について

$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \to 0, (h \to 0)$$

を満たす線形作用素$f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$を$f$の点$v$における Fréchet 微分と呼ぶ.

おしながき

- 自己紹介
- 知識
  - 有界線形作用素
  - *Fréchet* 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに

研究テーマの紹介 - 目的

radii-polynomial approach を改善する

radii-polynomial approach とは

非線形方程式の近似解の精度保証を行う定理

定理　radii-polynomial approach

- X, Yを，Banach 空間
- $\mathcal{L}(X, Y)$を，有界線形作用素全体の集合
  - 定義域がXとなる有界線形作用素を，すべて集めたやつ
- 作用素$F : X \to Y$が，C^1-Fréchet 可能
  - C^1-Fréchet 可能 … 1 回微分可能　かつ　F'が連続

radii-polynomial approach とは

$\tilde{x} \in X$に対して、

正定数Y_0, Z_0, Z_1および、非減少関数$Z_2(r)(r > 0)$が存在して

$$\|AF[\tilde{x}]\|_X \le Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0$$

$$\|A\big(F'[\tilde{x}] - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1$$

$$\|A(F'[b] - F'(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r), \quad \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

を満たすとする.

radii-polynomial approach とは

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば、$F(x) = 0$を満たす解 $\tilde{x}$ が $\overline{B(x, r)}$ 内に一意に存在する．

研究テーマの紹介 - 背景

例えば…　$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0$を計算したい．

従来手法では，Aを$F'[\bar{x}]^{-1}$の近似として，計算する．

↳ 精度があまり良くない

$\Downarrow$

無限次元のガウスの消去法を使って$F'[\bar{x}]^{-1}$を計算し，

精度を良くしよう

研究テーマの紹介 - 目的・手法

<u>**近似部分に無限次元ガウスの消去法を用いる**</u>

↳ 精度の改善

おしながき

- 自己紹介
- 知識
  - 有界線形作用素
  - *Fréchet* 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに

おわりに

今回の内容の，有界線形作用素，Fréchet 微分は，

の 174 ページに記載があります．