

無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

はじめに

微分方程式を計算機で解くとき、
計算機の資源が有限という特徴のために
方程式の解に誤差が発生する。

→ 解の誤差を評価し、精度を保証する。

精度保証付き数値計算

背景 - van der Pol 方程式

van der Pol 方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) + x = 0$$

- $x(t)$: 未知関数
- $\mu > 0$: 非線形の減衰の強さを表すパラメータ

> van der Pol の図 <

newo

newo

$$xy = z$$

Lorem ipsum dolor
sit amet.

はじめに

radii-polynomial approach 非線形方程式の解の精度保証に使われる定理

radii-polynomial approach

$\tilde{x} \in X$ に対して、正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および、非減少関数 $Z_2(r) (r > 0)$ が存在して、次の式を満たすとする.

radii-polynomial approach (続き)

$$\|AF(\bar{x})\|_X \leq Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0$$

$$\|A(DF(\bar{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1$$

$$\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r), \quad \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

このとき, radii polynomial を以下で定義する.

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、 $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば、 $F(\tilde{x}) = 0$ を満たす解 \tilde{x} が $\overline{B(\bar{x}, r)}$ 内に一意に存在する.

既存手法

既存手法では、重み付き l_1 空間を用いて Banach 空間を定義.

重み付き l_1 空間

重み $\omega_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ としたとき,

$$l_\omega^1 := \left\{ a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_k \in \mathbb{C}, \|a\|_\omega := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \omega_k < \infty \right\}$$

既存手法

計算で無限次元作用素が生じる
→ 有限で打ち切り，重み ω_k で修正

問題点

重み付き l_1 空間ではノルム値が大きくなる.
→ 定理を適用できる問題が少ない

目的

radii-polynomial approach を使って
精度保証付き数値計算できる問題を増やすために、
無限次元ガウスの消去法を用いた計算が可能か検証する

提案手法

1. $DF(x)$ と A_M を定義する.

ヤコビ行列 $DF(x)$

近似周期解 (ω, a) より, $x = \left(\omega, \underbrace{0, \dots, 0}_M, a, \underbrace{0, \dots, 0}_M \right)$ と定め,

$$DF(x) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & 1 & \dots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \partial_{\omega} f_k & \dots & \partial_{a_j} f_k & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{array} \right]$$

提案手法

作用素 A_M

$$\bar{x} = \left(\omega, \underbrace{0, \dots, 0}_M, a, \underbrace{0, \dots, 0}_M \right) \text{ と定め,}$$

$$A_M = \left[\begin{array}{c|ccc} DF(\bar{x})^{-1} & 0 & \dots & \dots \\ \hline 0 & \lambda_N^{-1} & & 0 \\ \vdots & & \lambda_{N+1}^{-1} & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{array} \right], \quad (\lambda_k := -k^2 \omega^2 - i\mu k \omega + 1)$$

提案手法

2. $DF(\bar{x})^{-1}$ の全単射性を, 無限次元ガウスの消去法を用いて確かめる.

$$\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x}) \text{ とおくと,}$$

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

ここで, 射影演算子 Π_N と作用素 A_M より, 以下の作用素を定義する.

$$\begin{aligned} T &:= \Pi_N A_M DF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1, & B &:= \Pi_N A_M DF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \rightarrow X_1, \\ C &:= (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_2, & E &:= (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \rightarrow X_2 \end{aligned}$$

提案手法

$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$ は、作用素の定義より、以下に変形できる.

$$\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N A_M F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) A_M F(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$S := D - CT^{-1}B$ としたとき,

$$\|I_{X_2} - S\| < 1$$

となれば, S は全単射となる.

提案手法

$$\begin{aligned} S &:= D - CT^{-1}B \\ &= (I - \Pi_N)A_M DF(\bar{x}) - ((I - \Pi_N)A_M DF(\bar{x})) \\ &\quad (\Pi_N A_M DF(\bar{x}))^{-1} (\Pi_N A_M DF(\bar{x})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_M DF(\bar{x}) &= \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} T & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} T^{-1}T & T^{-1}M_{12} \\ \lambda M_{21} & \lambda M_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} I & B \\ C & E \end{array} \right] \end{aligned}$$

実験結果

表 1: フーリエ係数の次数の変化による $\|I_{X_2} - S\|$ の比較

次数	$\ I_{X_2} - S\ $
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

まとめ

- 無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良手法を提案した
- 数値実験での検証により，提案手法で改良可能であることが確かめられた．