

# タイトル

2131701 齋藤悠希

## 1 Preparation

### 1.1 Banach Space

**定義 1** (線形空間の公理). 空でない集合  $X$  が, 係数体  $\mathbb{K}$  上の線形空間であるとは, 任意の  $u + v \in X$  とスカラー  $\alpha \in \mathbb{K}$  に対して, 加法  $u + v \in X$  とスカラー乗法  $\alpha u \in X$  が定義されていて, 任意の  $u, v, w \in X$  とスカラー  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  に対して次のことが成り立つことである.

1.  $(u + v) + w = u + (v + w)$
2.  $u + v = v + u$
3.  $u + 0 = u$  となる  $0 \in X$  が一意に存在
4.  $u + (-u) = 0$  となる  $-u \in X$  が一意に存在
5.  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6.  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
7.  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8.  $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

**定義 2** (ノルムとノルム空間の定義).  $X$  を係数体  $\mathbb{K}$  上の線形空間とする.  $X$  で定義された関数  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{K}$  上で定義された関数が  $X$  のノルムであるとは

1.  $\|u\| \geq 0, \quad u \in X$
2.  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3.  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

が成立することである. さらに  $X$  に 1 つのノルムが指定されているとき,  $X$  はノルム空間という.

**定義 3** (ノルム空間の収束と極限).  $X$  をノルム空間とする.  $X$  の点列  $(u_n) \subset X$  は

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } \|u_n - u\| < \epsilon$$

のとき, 点  $u \in X$  に収束するといい,

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

と表す. このとき,  $u$  を  $u_n$  の極限といい,

$$u_n - u, (n \rightarrow \infty)$$

と表す.

**定義 4** (Cauchy 列).  $X$  をノルム空間とする. そのとき  $X$  が Cauchy 列であるとは

$$u_n - u_m \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである. 即ち

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである.

**定義 5** (完備).  $X$  をノルム空間とする.  $X$  が完備であるとは, 任意の Cauchy 列  $(u_n)$  が  $X$  の中で極限をもつことである. すなわち, 任意の Cauchy 列  $(u_n \subset X)$  が

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

となる極限  $u$  を  $X$  内に持つことである.

**定義 6** (Banach 空間). ノルム空間  $X$  が Banach 空間であるとは,  $X$  が完備であることである.

**定理 1** (逆三角不等式).  $X$  をノルム空間とする. 任意の  $u, v \in X$  について次の不等式を満たす.

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

**証明.** 任意の  $u, v \in X$  について

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|\end{aligned}$$

となる. よって

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \quad \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$$

となるため,

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ. ■

**定義 7** (有界列).  $X$  をノルム空間とする. そのとき  $X$  の点列  $(u_n)$  が有界列とは任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数  $M > 0$  が存在することである.

**定理 2** (Cauchy 列ならば有界列).  $X$  をノルム空間とする. そのとき  $X$  の点列  $(u_n)$  が Cauchy 列ならば有界列でもある.

**証明.**  $X$  の点列  $(u_n)$  が Cauchy 列であるために,  $\epsilon - N$  論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

を満たす.  $\epsilon = 1$  としても, それに対応した  $N$  が存在し, 任意の  $n \geq N$  に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす.

任意の  $n \geq N$  に対して  $\|u_n\|$  が  $\|u_N\|$  で評価できることを示す. 逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\|| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる. 絶対値の性質より  $|\|u_n - u_N\|| < 1$  は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる. よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため, 点列  $(u_n)$  は有界列である. ■

**定義 8** (線形部分空間). 線形空間  $X$  の空でない集合  $M$  が任意の元  $u, v \in M$  と任意の係数体  $\alpha \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} u + v &\in M \\ \alpha u &\in M \end{aligned}$$

を満たすとき,  $M$  は線形空間  $X$  の線形部分空間と呼ぶ.

**定義 9** (ノルム空間の開球).  $X$  をノルム空間とする.  $x \in X$  とし,  $r > 0$  を正実数とする. そのとき, 集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心  $x$ , 半径  $r$  の開球という.  $X$  が明らかな場合は  $B_X(x, r)$  を省略して  $B(x, r)$  と表記する.

**定義 10** (ノルム空間の開集合).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の部分集合とする. 任意の  $x \in M$  に対して,  $B_X(x, r) \subset M$  となる  $r > 0$  が存在する場合,  $M$  が開集合であるという.

**定義 11** (ノルム空間の閉集合).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の部分集合とする.  $M$  が閉集合であるとは,  $M$  の任意の点列  $(u_n)$  の極限  $u \in X$  が  $M$  にも属することである. すなわち, 点列  $(u_n) \subset M$  について

$$u_n \rightarrow u, \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき,  $M$  は閉集合であるという.

**定義 12** (閉部分空間).  $X$  をノルム空間とし,  $M$  を  $X$  の線形部分空間が閉集合であるとき,  $M$  を閉部分空間である.

## 1.2 Operator

**定義 13** (作用素). ある線形空間  $X$  から別の線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とは,

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき,  $\mathcal{D}(A)$  のどんな元に対しても, それぞれ集合  $Y$  のただ一つの元を指定する規則のことである. また,  $\mathcal{D}(A)$  は  $A$  の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

**定義 14** (単射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

**定義 15** (全射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素  $A$  は全単射であるという.

**定義 16** (全射). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とし, その定義域を  $\mathcal{D}(A) \subset X$ , 値域を  $\mathcal{R}(A) \subset Y$  とする. そのとき,

$$A^{-1}(A(u)) = u, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

$$A(A^{-1}(u)) = u, \quad u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$

$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $A^{-1}$  を  $A$  の逆作用素と呼ぶ.

**定理 3** (単射と逆作用素の環境). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  とすると.

$A$  が逆作用素を持つ  $\Leftrightarrow A$  が単射である

**証明.** 「 $A$  が逆作用素を持つ  $\Rightarrow A$  が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$  に対し  $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$ 」を満たすことを確かめる.  $A$  の逆作用素を  $A^{-1}$  とすると, 任意の  $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$  に対し

$$\begin{aligned} A(u_1) &= A(u_2) \\ \Rightarrow A^{-1}(A(u_1)) &= A^{-1}(A(u_2)) \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

「 $A$  が単射である  $\Rightarrow A$  が逆作用素  $A^{-1}$  をもつ」の証明

$A$  の値域の定義  $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$  より, 任意の  $v \in \mathcal{R}(A)$  に対し,

$$A(u) = v$$

となる  $u \in \mathcal{D}(A)$  が存在する. その上,  $A$  が単射であるため, 単射の定義の対偶より  $u \in \mathcal{D}(A)$  はどんな  $u \in \mathcal{R}(A)$  に対してもただ一つの元である. そのため, 作用素の定義より, 上記の  $u \in \mathcal{R}(A)$  に対してただ一つの元  $u \in \mathcal{D}(A)$  を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域  $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$  と値域  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$  となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $B$  が定義できる. その上,  $B(v) = u$  の  $v = A(u)$  を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる. 同様に,  $A(u) = v$  の  $u$  に  $u = B(v)$  を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる. よって, 定義域  $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$  と値域  $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$  となる  $Y$  から  $X$  への作用素  $B$  は  $A$  の逆作用素であるため,  $A$  は逆作用素を持つ. ■

**定義 17** (作用素の等号). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  と  $B$  が等しいとは

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

かつ

$$Au = Bu, \forall u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

が成立することであり,

$$A = B$$

と表記する.

**定義 18** (作用素の連続). ノルム空間  $X$  からノルム空間  $Y$  への作用素  $A$  が  $u \in \mathcal{D}(A)$  で連続であるとは

$$u_n \rightarrow u, (n \rightarrow \infty)$$

となる任意の  $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$  に対して

$$Au_n \rightarrow Au, (n \rightarrow \infty)$$

を満たすときである. さらに,  $A$  が任意の  $u \in \mathcal{D}(A)$  において連続であるとき,  $A$  は連続であるという.

**定義 19** (線形作用素). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への作用素  $A$  が, 任意の  $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$  と  $\alpha \in \mathbb{K}$  に対し,

$$\mathcal{D}(A) \text{ が } X \text{ の線形部分空間}$$

$$A(u + v) = Au + Av$$

$$A(\alpha u) = \alpha Au$$

を満たすとき,  $A$  を作用素と呼ぶ.

**定義 20** (線形作用素の加法). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への線形作用素  $A$  と  $B$  の和を

$$(A + B)u := Au + Bu, u \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

と定義する. このとき,  $X$  から  $Y$  への作用素  $A + B$  の定義域は

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

とする.

**定義 21** (線形作用素のスカラー乗法). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への線形作用素  $A$  の  $\alpha \in \mathbb{K}$  によるスカラー倍を

$$(\alpha A)u := \alpha Au, u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する. このとき,  $X$  から  $Y$  への作用素  $\alpha A$  の定義域は

$$\mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A)$$

とする.

**定義 22** (合成作用素).  $X, Y, Z$  を線形空間とする.  $A$  を  $Y$  から  $Z$  への線形作用素とし,  $B$  を  $X$  から  $Y$  への線形作用素とする. そのとき,  $A$  と  $B$  の合成作用素  $AB$  は

$$(AB)u := A(Bu), u \in \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

と定義する. このとき,  $X$  から  $Z$  への合成作用素  $AB$  の定義域は

$$\mathcal{D}(AB) := \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

とする.

**定理 4** (線形作用素に対する単射性 (1)). 線形空間  $X$  から線形空間  $Y$  への線形作用素  $A$  において以下は同値である.

1. 線形作用素が  $A$  の単射である.
2.  $Au = 0, u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$

**証明.** 単射の定義の対偶は

$$Au_1 = Au_2, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u_1 = u_2$$

となる. その上,  $A$  は線形作用素であるため,

$$Au_1 = Au_2 \Leftrightarrow A(u_1 - u_2) = 0$$

となる.  $u_1 - u_2 \in \mathcal{D}(A)$  を  $u \in \mathcal{D}(A)$  とおきなおせば,  $1 \Rightarrow 2$  は証明された. また, 証明を逆に追うことで  $2 \Rightarrow 1$  も示せる. ■

**定理 5** (線形作用素に対する単射性 (2)). ノルム空間  $X$  からノルム空間  $Y$  への線形作用素  $A$  とする. 不等式

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y, u \in \mathcal{D}(A)$$

を満たす定数  $K > 0$  が存在するならば, 線形作用素  $A$  は単射である.

**証明.**  $A$  が線形作用素であるため,  $Au = 0, u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$  を使って証明する. ノルムの定義より

$$Au = 0, \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0$$

となる. さらに,  $Au = 0$  ならば,

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y = 0, u \in \mathcal{D}(A)$$

より  $\|u\|_X = 0$  となる. よって, 再びノルムの定義より

$$\|u\|_X = 0, \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow u = 0$$

より,  $Au = 0$  ならば  $u = 0$  となる. ■

**定義 23** (有界な線形作用素). ノルム空間  $X$  からノルム空間  $Y$  への作用素  $A$  に対し,

$$\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X, \mathcal{D}(A)$$

を満たす正の定数  $K$  が存在する時, 線形作用素  $A$  を有界な作用素と呼ぶ.

**定理 6** (有界な線形作用素と連続な線形作用素). ノルム空間  $X$  からノルム空間  $Y$  への作用素  $A$  に対し,

$$A \text{ が有界} \Leftrightarrow A \text{ が連続}$$

証明. 「 $A$  が有界  $\Rightarrow A$  が連続」の証明

連続性の定義より,  $u_n \rightarrow u$  となる任意の  $u_n \in \mathcal{D}(A)$  に対して  $Au_n \rightarrow Au$  となることを確かめる.  $u_n \rightarrow u$  となる任意の  $u_n \in \mathcal{D}(A)$  から  $\|u_n - u\|_X \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$  を持つ. その上,  $A$  は有界であることから

$$\|Au_n - Au\|_Y \leq M\|u_n - u\|_X \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

よって,  $u_n \rightarrow u, (n \rightarrow \infty)$  ならば,  $Au_n \rightarrow Au$  であるため,  $A$  は連続である.

「 $A$  が連続  $\Rightarrow A$  が有界」の証明

背理法によって証明する. すなわち,  $A$  が連続ならば, 任意の  $M_2 > 0$  に対して

$$\|Au\|_Y > M_2\|u\|_X$$

を満たす  $u \in \mathcal{D}$  が存在すると仮定して矛盾を見つける. この仮定より自然数  $n$  に対して,

$$\|Au_n\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす  $u_n \in \mathcal{D}(A)$  が存在する. このとき,  $\|u_n\|_X \neq 0$  であることに注意する. ノルム空間  $X$  はノルム空間全体の定義より線形空間であるため, ゼロ元  $0 \in X$  を持つ. その上, 線形作用素の定義より  $\mathcal{D}(A)$  は  $X$  の部分空間であるため, ゼロ元  $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$  を持つ. その上,  $A$  が連続であるため,  $A$  は  $0 \in \mathcal{D}(A)$  でも連続である.  $\epsilon - \sigma$  論法による  $A$  の  $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$  における連続の定義を記述すると

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|u_n\|_X < \delta \text{ となる } \forall u_n \in X \text{ に対して } \|Au_n\|_Y < \epsilon$$

となる. その上,  $\epsilon$  を  $n\|u_n\|_X$  とすると,  $\delta_n > 0$  が存在し,  $\|u_n\|_X < \delta$  となる任意の  $u_n \in \mathcal{D}(A)$  に対して,

$$\|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となる. 有界ではないという仮定と組み合わせると

$$n\|u_n\|_X < \|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となるため矛盾する. ■

**定義 24** (定義域が  $X$  の全体となる有界な線形作用素全体の集合  $\mathcal{L}(X, Y)$ ). 定義域が Banach 空間  $X$  全体となる  $X$  から  $Y$  への有界線形作用素全体を

$$\mathcal{L}(X, Y)$$

とする.

**定理 7** ( $\mathcal{L}(X, Y)$  は Banach 空間).  $X$  をノルム空間とし,  $Y$  を Banach 空間とする. 定義域が  $X$  全体となる  $X$  から  $Y$  への有界な線形作用素全体の集合  $\mathcal{L}(X, Y)$  のノルムを

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}, A \in \mathcal{L}(X, Y)$$



とすると,  $\mathcal{L}(X, Y)$  は Banach 空間となる.

証明. 作用素の加法 (20) と作用素のスカラー乗法 (21) の定義をもとに線形空間の公理 (1) が満たされていることが導かれる. ただし,  $\mathcal{L}(X, Y)$  のゼロ元は任意の  $u \in X$  を  $0 \in Y$  へ写す作用素であることに注意が必要である.

「ノルム空間」  $\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  がノルムの定義を満たすことを示せばよい. ノルム空間  $X$  と Banach 空間  $Y$  であるため  $\|\cdot\|_X \geq 0$  と  $\|\cdot\|_Y \geq 0$  であることから

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \geq 0$$

となるため,  $\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \geq 0$  となり, ノルムの定義 (1) はいえる.

次に,  $A = 0$  ならば  $\|Au\|_Y = 0$  であるため,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{0}{\|u\|_X} = 0$$

である. さらに, 任意の  $u \in X \setminus \{0\}$  について

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = 0 \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0 \Leftrightarrow Au = 0$$

任意の  $u \in X \setminus \{0\}$  を  $0 \in Y$  へ写す作用素は  $\mathcal{L}(X, Y)$  が線形空間により一意に存在し,  $A = 0$  である. よって, ノルムの定義 (2) も示された.

続いて  $\alpha \in K$  としたとき,  $Y$  は Banach 空間であるため,  $\|\cdot\|_Y$  はノルムの定義を満たすため,

$$\|\alpha A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$$

となるため, ノルムの定義 (3) も示された.

最後に, 任意の  $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$  について

$$\begin{aligned} \|A + B\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(A + B)u\|_Y}{\|u\|_X} \\ &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au + Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\ &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y + \|Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\ &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} + \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} + \|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \end{aligned}$$

となり, ノルムの定義 (4) も示されたため,  $\mathcal{L}(X, Y)$  はノルム空間である.

「Banach 空間」

Banach 空間であることを証明するには  $\mathcal{L}(X, Y)$  の任意の Cauchy 列  $(A_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$  が極限  $T$  を  $\mathcal{L}(X, Y)$  内に持つことを示せばよい.

まず、極限の候補  $\tilde{A}$  が定義できるか確認する。任意の Cauchy 列  $(A_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$  は Cauchy 列の定義 (4) より

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

となる。任意の  $u \in X \setminus \{0\}$  に対して、点列  $(A_n u) \subset Y$  は

$$\begin{aligned} \|A_n u - A_m u\|_Y &= \frac{\|(A_n - A_m)u\|_Y}{\|u\|_X} \|u\|_X \\ &\leq \sup_{\phi \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(A_n - A_m)\phi\|_Y}{\|\phi\|_X} \|\phi\|_X \\ &= \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u\|_X \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を持つため、点列  $(A_n u) \subset Y$  は Cauchy 列になる。その上、 $Y$  は Banach 空間であるため、 $Y$  の任意の Cauchy 列は収束し、 $Y$  内に極限  $\tilde{A}u$  となるような  $X$  から  $Y$  への作用素  $\tilde{A}$  が存在する。ここで、任意の  $u \in X$  に対して極限  $\tilde{A}u$  が定義されることから、 $\tilde{A}$  の定義域は  $\mathcal{D}(\tilde{A}) = X$  である。これにより、 $\mathcal{L}(X, Y)$  の任意の Cauchy 列  $(A_n)$  の極限の候補  $\tilde{A}$  が定義できた。

続いて、定義した極限の候補  $\tilde{A}$  が  $\mathcal{L}(X, Y)$  に属しているか確認する。 $\tilde{A}$  が有界な線形作用素であり、かつ  $\mathcal{D}(\tilde{A}) = X$  であることを示せばよい。 $\mathcal{L}(X, Y)$  の任意の Cauchy 列  $(A_n)$  の元  $A_n$  は線形作用素であるため、線形作用素の定義より任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  と  $u, v \in X$  について

$$A_n(\alpha u + \beta v) = \alpha A_n u + \beta A_n v$$

を持つ。よって  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{A}u + \beta \tilde{A}v$$

となり、極限の候補  $\tilde{A}$  は線形作用素である。次に極限の候補  $\tilde{A}$  が有界作用素であることを示す。点列  $(A_n)$  は Cauchy 列であるため定理 (2) より有界列でもある。すなわち、どんな  $n \in \mathbb{N}$  に対しても

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq M$$

となる  $n \in \mathbb{N}$  に依存しない定数  $M$  が存在する。この  $n \in \mathbb{N}$  に依存しない定数  $M$  は、任意の  $n \in X$  について

$$\|A_n u\|_Y \leq M \|u\|_X$$

も満たす。 $\|A_n u\| \rightarrow \tilde{A}u$ ,  $(n \rightarrow \infty)$  であるため、上の不等式に対して  $n \rightarrow \infty$  とすると  $M$  が  $n$  に依存しないため

$$\|\tilde{A}u\|_Y \leq M \|u\|_X$$

を得る。よって、点列  $(A_n)$  の極限の候補  $\tilde{A}$  は  $\mathcal{L}(X, Y)$  に属する。

最後に、点列  $(A_n)$  の極限が  $\tilde{A}$  であることを示す。任意の  $u \in X$  に対して、点列  $(A_n u) \subset Y$  は  $Y$  内に極限  $\tilde{A}u$  を持つこと、すなわち

$$A_n u \rightarrow \tilde{A}u, (n \rightarrow \infty)$$

を持つことから

$$\|A_n u - A_m u\|_Y \rightarrow \|A_n u - \tilde{A} u\|_Y, \quad (m \rightarrow \infty)$$

となる。その上、 $\mathcal{L}(X, Y)$  のノルムの定義と  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  から

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X, Y)}, \quad (m \rightarrow \infty)$$

を得る。点列  $(A_n)$  が Cauchy 列であるため

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \epsilon$$

を満たす。その上、 $m \rightarrow \infty$  とすると

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ に対して } \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \epsilon$$

となり、 $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  は Cauchy 列  $(A_n)$  の極限である。よって、任意の Cauchy 列は  $\mathcal{L}(X, Y)$  内に極限を持つため、ノルム空間  $\mathcal{L}(X, Y)$  は Banach 空間である。 ■

**定理 8** ( $\mathcal{L}(X, Y)$  ノルムの性質 (1)).  $X$  をノルム空間とし、 $Y$  を Banach 空間とする。そのとき、任意の  $u \in X$  と任意の  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  について以下の不等式が成り立つ。

$$\|Au\|_Y \geq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u\|_X$$

**証明.**  $u = 0$  の時は明らかに成り立つため、 $u \in X \setminus \{0\}$  について考える。 $u \in X \setminus \{0\}$  について

$$\|Au\|_Y = \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \|u\|_X \leq \sup_{\phi \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A\phi\|_Y}{\|\phi\|_X} \|u\|_X = \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u\|_X$$

となるため、題意は示された。 ■

**定理 9** ( $\mathcal{L}(X, Y)$  ノルムの性質 (2)).  $X$  をノルム空間とし、 $Y$  と  $Z$  を Banach 空間とする。そのとき、任意の  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  と  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  の合成作用素  $AB$  は  $\mathcal{L}(X, Y)$  に属する。その上、

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$$

**証明.** 合成作用素の定義 (22) から

$$\mathcal{D}(AB) = \{v \in \mathcal{D}(B) = X \mid Bv \in \mathcal{D}(A) = Y\}$$

となるが、 $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  であるため、任意の  $v \in X$  に対して  $Bv$  は  $Y$  に属する。よって、

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D} = X$$

となる。その上、 $A$  も  $B$  も線形作用素であることから、任意の  $u, v \in X$  と任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  に対して

$$AB(\alpha u + \beta v) = A(B\alpha u + B\beta v) = A(\alpha Bu + \beta Bv) = A\alpha Bu + A\beta Bv = \alpha ABu + \beta ABv$$

となるため、合成作用素  $AB$  は定義域が  $X$  全体となる線形作用素である。よって  $AB$  は  $\mathcal{L}(X, Y)$  に属する。その上、

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\mathcal{L}(X, Z)} &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|ABu\|_Z}{\|u\|_X} \\ &\leq \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u\|_X}{\|u\|_X} \|u\|_X \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \|B\|_{\mathcal{L}(X, Y)}\end{aligned}$$

■

**定義 25** ( $X$  上の恒等作用素).  $X$  を Banach 空間とする。任意の  $u \in X$  に対して

$$Iu = u$$

となる  $I \in \mathcal{L}(X)$  を  $X$  上の恒等作用素と呼ぶ。

**定理 10** (Neumann 級数).  $X$  を Banach 空間とする。  $B \in \mathcal{L}(X)$  とし、  $I \in \mathcal{L}(X)$  を  $X$  上の恒等作用素とする。もし

$$\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

ならば逆作用素をもち  $B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$  となる。そのうえ、

$$B^{-1} = I + (I - B) + (I - B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (I - B)^i$$

で、かつ

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|I - B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

**証明.**

$$S_n = I + (I - B) + (I - B)^2 + \cdots + (I - B)^n$$

とすると、  $B$  と  $I$  ともに  $\mathcal{L}(X)$  に属するため、加法  $I - B$  や合成作用素  $(I - B)(I - B)$  などとも  $\mathcal{L}(X)$  に属する。よって  $S_n$  も  $\mathcal{L}(X)$  に属する。

続いて点列  $(S_n) \subset \mathcal{L}(X)$  が極限  $S$  を  $\mathcal{L}(X)$  内に持つか確認する。定理 (9) より

$$\|(I - B)^i\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

となるため、  $n > m > 0$  となる整数に対して

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{i=m+1}^n (I - B)^i \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{i=m+1}^n \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^i$$

となる。定理の仮定より  $\|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$  であるため、

$$\sum_{i=m+1}^n \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^i \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

となる。よって

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

となるため、点列  $(S_n)$  は Cauchy 列である。その上、 $\mathcal{L}(X)$  は Banach 空間であるため、任意の Cauchy 列は極限  $\mathcal{L}(X)$  に持つため、点列  $(S_n)$  は

$$\|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

となる極限  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$  を持つ。

次に  $S$  が  $B^{-1}$  になることを示す。合成作用素の定義 (22) にしたがって合成作用素  $BS_n$  を考える。  $X$  は Banach 空間であり、 $S, B_n \in \mathcal{L}(X)$  であるため、定理 (9) より合成作用素  $BS_n$  は  $\mathcal{L}(X)$  に属する。その上、点列  $(BS_n) \subset \mathcal{L}(X)$  は

$$\|BS_n - BS\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

となるため、極限  $BS$  を  $\mathcal{L}(X)$  内にもつ。一方で、

$$\begin{aligned} BS_n &= (I - (I - B))S_n \\ &= S_n - (I - B)S_n \\ &= \sum_{i=0}^n (I - B)^i - \sum_{i=1}^{n+1} (I - B)^i \\ &= I - (I - B)^{n+1} \end{aligned}$$

となり、定理の仮定より  $\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$  を持つため

$$\|BS_n - I\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(I - B)^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

となるため、点列  $(BS_n)$  は極限  $I$  も  $\mathcal{L}(X)$  内に持つ。よって、極限の一意性より

$$BS = I$$

を得る。  $\mathcal{R}(I) = X$  であるため、  $\mathcal{R}(BS) = X$  である。その上、  $X = \mathcal{R}(BS) \subset \mathcal{R}(B)$  と  $\mathcal{R}(B) \subset X$  となるため、

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(B) = X$$

となる。

同様の議論を  $S_n B \in \mathcal{L}(X)$  について行くと

$$SB = I$$

と

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(S) = X$$

が得られる。そのため、  $B$  は逆作用素を持ち、逆作用素  $B^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$  である。

また,

$$S_n = I + (I - B) + (I - B)^2 + \cdots + (I - B)^n \rightarrow B^{-1}, \quad (n \rightarrow \infty)$$

より

$$B^{-1} = I + (I - B) + (I - B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (I - B)^i$$

となる.

最後に

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (I - B)^i \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|(I - B)\|^i$$

となり, 初項 1, 公比  $\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$  の総和より

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|I - B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

■

**定理 11.**  $X$  と  $Y$  を Banach 空間とする.  $A \in \mathcal{L}(X, Y), R \in \mathcal{L}(Y, X)$  とする. もし  $RA$  が全単射ならば,  $A$  は単射であり,  $R$  は全射である.

**証明.** 「 $A$  が単射」の証明

定理 (4)(線形作用素に対する単射性 (1)) の (2) を用いて証明する.  $u \in X$  とし,  $RA$  が単射であることに注意すると

$$Au = 0 \Rightarrow RAu = 0 \Rightarrow u = 0$$

「 $R$  が全射」の証明

$RA$  が全射であるため任意の  $g \in X$  に対して,

$$RAu = g$$

となる  $u \in X$  が存在する. その上,  $v = Au$  とすると任意の  $g \in X$  に対して

$$Rv = g$$

となる  $v \in Y$  が存在するため,  $R$  は全射である. ■

**定義 26** (Fréchet 微分). 作用素  $F : X \rightarrow Y$  が  $x_0 \in X$  で Fréchet 微分可能であるとは, ある有界線形作用素  $E : X \rightarrow Y$  が存在して

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - Eh\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

が成り立つことをいう. このとき  $E$  は作用素  $F$  の  $x_0$  における Fréchet 微分といい,  $E = DF(x_0)$  とも書く. もしも作用素  $F : X \rightarrow Y$  がすべての  $x \in X$  に対して Fréchet 微分可能ならば,  $F$  は  $X$  において  $C^1$ -Fréchet 微分可能という.

### 1.3 Banach の不動点定理

**定義 27** (不動点).  $X$  を係数帯が  $\mathbb{R}$  の Banach 空間とする.  $M$  は空でない閉集合で  $M \subset X$  を満たすとする.  $A$  を  $M$  から  $M$  への写像とする.  $x \in M$  が  $A$  の不動点であるとは,  $x$  が

$$x = Ax$$

を満たすことである.

**定義 28** (距離空間).  $X$  をノルム空間とし,  $x, y \in X$  に対して実数値を対応させる関数  $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が定義され,

1.  $d(x, y) \geq 0$  かつ  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x, y \in X$
2.  $d(x, y) = d(y, x), x, y \in X$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), x, y, z \in X$

を満たすとき,  $d$  を距離空間という. 距離の備わった