タイトル

2131701 齋藤悠希

1 Preparation

1.1 Banach Space

定義 1 (線形空間の公理)**.** 空でない集合 X が，係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは，任意の $u+v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，加法 $u+v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて，任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである．

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $u+v = v+u$
3. $u+0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u+(-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

定義 2 (ノルムとノルム空間の定義)**.** X を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．X で定義された関数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{K}$ 上で定義された関数が X のノルムであるとは

1. $||u|| \geq 0, \quad u \in X$
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

が成立することである．さらに X に 1 つのノルムが指定されているとき，X はノルム空間という．

定義 3 (ノルム空間の収束と極限)**.** X をノルム空間とする．X の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } ||u_n - u|| < \epsilon$$

のとき，点 $u \in X$ に収束するといい，

$$||u_n - u|| \to 0,\ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，u を u_n の極限といい，

$$u_n - u,\ (n \to \infty)$$

と表す．

定義 4 (Cauchy 列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X が Cauchy 列であるとは

$$u_n - u_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$||u_n - u_m|| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

定義 5 (完備)**.** X をノルム空間とする．X が完備であるとは，任意の Cauchy 列 (u_n) が X の中で極限をもつことである．すなわち，任意の Cauchy 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \to 0\ , (n \to 0)$$

となる極限 u を X 内に持つことである．

定義 6 (Banach 空間)**.** ノルム空間 X が Banach 空間であるとは，X が完備であることである．

定理 1 (逆三角不等式)**.** X をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす．

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

証明. 任意の $u, v \in X$ について

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|$$
$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|$$

となる．よって

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$$

となるため，

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ． ■

定義 7 (有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである．

定理 2 (Cauchy 列ならば有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が Cauchy 列ならば有界列でもある．

証明. X の点列 (u_n) が Cauchy 列であるために，$\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } ||u_n - u_m|| < \epsilon$$

を満たす．$\epsilon = 1$ としても，それに対応した N が存在し，任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす．

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す．逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる．絶対値の性質より $|\|u_n - u_N\|| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる．よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため，点列 (u_N) は有界列である． ■

定義 8 (線形部分空間)**.** 線形空間 X の空でない集合 M が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$u + v \in M$$
$$\alpha u \in M$$

を満たすとき，M は線形空間 X の線形部分空間と呼ぶ．

定義 9 (ノルム空間の開球)**.** X をノルム空間とする．$x \in X$ とし，$r > 0$ を正実数とする．そのとき，集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心 x，半径 r の開球という．X が明らかな場合は $B_X(x, r)$ を省略して $B(x, r)$ と表記する．

定義 10 (ノルム空間の開集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．任意の $x \in M$ に対して，$B_X(x, r) \subset M$ となる $r > 0$ が存在する場合，M が開集合であるという．

定義 11 (ノルム空間の閉集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．M が閉集合であるとは，M の任意の点列 (u_n) の極限 $u \in X$ が M にも属することである．すなわち，点列 $(u_n) \subset M$ について

$$u_n \to u, \quad (n \to \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき，M は閉集合であるという．

定義 12 (閉部分空間)**.** X をノルム空間とし，M を X の線形部分空間が閉集合であるとき，M を閉部分空間である．

1.2 Operator

定義 13 (作用素)**.** ある線形空間 X から別の線形空間 Y への作用素 A とは，

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき，$\mathcal{D}(A)$ のどんな元に対しても，それぞれ集合 Y のただ一つの元を指定する規則のことである. また，$\mathcal{D}(A)$ は A の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

定義 14 (単射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

定義 15 (全射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素 A は全単射であるという．

定義 16 (全射)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とし，その定義域を $\mathcal{D}(A) \subset X$，値域を $\mathcal{R}(A) \subset Y$ とする．そのとき，

$$A^{-1}(A(u)) = u, \ u \in \mathcal{D}(A)$$
$$A(A^{-1}(u)) = u, \ u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$
$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる Y から X への作用素 A^{-1} を A の逆作用素と呼ぶ.

定理 3 (単射と逆作用素の環境)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とすると．

$$A \text{ が逆作用素を持つ} \Leftrightarrow A \text{ が単射である}$$

証明.「A が逆作用素を持つ $\Rightarrow$ A が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$」を満たすことを確かめる．A の逆作用素を A^{-1} とすると，任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し

$$\begin{aligned} &A(u_1) = A(u_2) \\ \Rightarrow &A^{-1}(A(u_1)) = A^{-1}(A(u_2)) \\ \Rightarrow &u_1 = u_2 \end{aligned}$$

「A が単射である $\Rightarrow$ A が逆作用素 A^{-1}をもつ」の証明

A の値域の定義 $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ より，任意の $v \in \mathcal{R}(A)$ に対し，

$$A(u) = v$$

となる $u \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．その上，A が単射であるため，単射の定義の対偶より $u \in \mathcal{D}(A)$ はどんな $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してもただ一つの元である．そのため，作用素の定義より，上記の $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してただ一つの元 $u \in \mathcal{D}(A)$ を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B が定義できる．その上，$B(v) = u$ の $v = A(u)$ を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる．同様に，$A(u) = v$ の u に $u = B(v)$ を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる．よって，定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B は A の逆作用素であるため，A は逆作用素を持つ． ■

定義 17 (作用素の等号)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A と B が等しいとは

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

かつ

$$Au = Bu, \ \forall u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

が成立することであり，

$$A = B$$

と表記する．

定義 18 (作用素の連続)**.** ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A が $u \in \mathcal{D}(A)$ で連続であるとは

$$u_n \to u,\ (n \to \infty)$$

となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$ に対して

$$Au_n \to Au,\ (n \to \infty)$$

を満たすときである．さらに，A が任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ において連続であるとき，A は連続であるという．

定義 19 (線形作用素)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が，任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(A)\ \text{が}\ X\ \text{の線形部分空間}\\&A(u+v) = Au + Av\\&A(\alpha u) = \alpha Au\end{aligned}$$

を満たすとき，A を作用素と呼ぶ.

定義 20 (線形作用素の加法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A と B の和を

$$(A+B)u := Au + Bu,\ u \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 $A+B$ の定義域は

$$\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

とする.

定義 21 (線形作用素のスカラー乗法)**.** 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A の $\alpha \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍を

$$(\alpha A)u := \alpha Au,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する．このとき，X から Y への作用素 αA の定義域は

$$\mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A)$$

とする.

定義 22 (合成作用素)**.** X,Y,Z を線形空間とする．A を Y から Z への線形作用素とし，B を X から Y への線形作用素とする．そのとき，A と B の合成作用素 AB は

$$(AB)u := A(Bu),\ u \in \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

と定義する．このとき，X から Z への合成作用素 AB の定義域は

$$\mathcal{D}(AB) := \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

とする.

定理 4 (線形作用素に対する単射性 (1)). 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A において以下は同値である．

1. 線形作用素が A の単射である．
2. $Au = 0,\ u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$

証明. 単射の定義の対偶は

$$Au_1 = Au_2,\ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u_1 = u_2$$

となる．その上，A は線形作用素であるため，

$$Au_1 = Au_2 \Leftrightarrow A(u_1 - u_2) = 0$$

となる．$u_1 - u_2 \in \mathcal{D}(A)$ を $u \in \mathcal{D}(A)$ とおきなおせば，$1 \Rightarrow 2$ は証明された．また，証明を逆に追うことで $2 \Rightarrow 1$ も示せる． ■

定理 5 (線形作用素に対する単射性 (2)). ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素 A とする．不等式

$$\|u\|_X \le K\|Au\|_Y,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

を満たす定数 $K > 0$ が存在するならば，線形作用素 A は単射である．

証明. A が線形作用素であるため，$Au = 0,\ u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$ を使って証明する．ノルムの定義より

$$Au = 0,\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0$$

となる．さらに，$Au = 0$ ならば，

$$\|u\|_X \le K\|Au\|_Y = 0,\ u \in \mathcal{D}(A)$$

より $\|u\|_X = 0$ となる．よって，再びノルムの定義より

$$\|u\|_X = 0,\ \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow u = 0$$

より，$Au = 0$ ならば $u = 0$ となる． ■

定義 23 (有界な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$\|Au\|_Y \le K\|u\|_X,\ \mathcal{D}(A)$$

を満たす正の定数 K が存在する時，線形作用素 A を有界な作用素と呼ぶ．

定理 6 (有界な線形作用素と連続な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し，

$$A \text{ が有界} \Leftrightarrow A \text{ が連続}$$

証明.「A が有界 $\Rightarrow$ A が連続」の証明

連続性の定義より，$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して $Au_n \to Au$ となることを確かめる．$u_n \to u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ から $\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$ を持つ．その上，A は有界であることから

$$\|Au_n - Au\|_Y \leq M\|u_n - u\|_X \to 0,\ (n \to \infty)$$

よって，$u_n \to u,\ (n \to \infty)$ ならば，$Au_n \to Au$ であるため，A は連続である．

「A が連続 $\Rightarrow$ A が有界」の証明

背理法によって証明する．すなわち，A が連続ならば，任意の $M_2 > 0$ に対して

$$\|Au\|_Y > M_2\|u\|_x$$

を満たす $u \in \mathcal{D}$ が存在すると仮定して矛盾を見つける．この仮定より自然数 n に対して，

$$\|Au_n\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす $u_n \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．このとき，$\|u_n\|_X \neq 0$ であることに注意する．ノルム空間 X はノルム空間全体の定義より線形空間であるため，ゼロ元 $0 \subset X$ を持つ．その上，線形作用素の定義より $\mathcal{D}(A)$ は X の部分空間であるため，ゼロ元 $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ を持つ．その上，A が連続であるため，A は $0 \in \mathcal{D}(A)$ でも連続である．$\epsilon - \sigma$ 論法による A の $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ における連続の定義を記述すると

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \|u_n\|_X < \delta \text{となる}\ \forall u_n \in X\ \text{に対して}\ \|Au_n\|_Y < \epsilon$$

となる．その上，ϵ を $n\|u_n\|_X$ とすると，$\delta_n > 0$ が存在し，$\|u_n\|_X < \delta$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して，

$$\|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となる．有界ではないという仮定と組み合わせると

$$n\|u_n\|_X < \|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となるため矛盾する． ■

定義 24 (定義域が X の全体となる有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$)**.** 定義域が Banach 空間 X 全体となる X から Y への有界線形作用素全体を

$$\mathcal{L}(X,Y)$$

とする．

定理 7 ($\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間)**.** X をノルム空間とし，Y を Banach 空間とする．定義域が X 全体となる X から Y への有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X,Y)$ のノルムを

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|X\|_X},\ A \in \mathcal{L}(X,Y)$$

とすると，$\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間となる．

証明. 作用素の加法（20）と作用素のスカラー乗法（21）の定義をもとに線形空間の公理（1）が満たされていることが導かれる．ただし，$\mathcal{L}(X,Y)$ のゼロ元は任意の $u \in X$ を $0 \in Y$ へ写す作用素であることに注意が必要である．

「ノルム空間」$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ がノルムの定義を満たすことを示せばよい．ノルム空間 X と Banach 空間 Y であるため $\|\cdot\|_X \geq 0$ と $\|\cdot\|_Y \geq 0$ であることから

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \geq 0$$

となるため，$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 0$ となり，ノルムの定義 (1) はいえる．

次に，$A = 0$ ならば $\|Au\|_Y = 0$ であるため，

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{0}{\|u\|_X} = 0$$

である．さらに，任意の $u \in X \setminus \{0\}$ について

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = 0 \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0 \Leftrightarrow Au = 0$$

任意の $u \in X \setminus \{0\}$ を $0 \in Y$ へ写す作用素は $\mathcal{L}(X,Y)$ が線形空間により一意に存在し，$A = 0$ である．よって，ノルムの定義 (2) も示された．

続いて $\alpha \in K$ としたとき，Y は Banach 空間であるため，$\|\cdot\|_Y$ はノルムの定義を満たすため，

$$\|\alpha A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} = |\alpha| \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

となるため，ノルムの定義 (3) も示された．

最後に，任意の $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ について

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(A+B)u\|_Y}{\|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au+Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y + \|Bu\|_Y}{|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{|u\|_X} + \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{|u\|_X} \\
&= \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}
\end{aligned}$$

となり，ノルムの定義 (4) も示されたため，$\mathcal{L}(X,Y)$ はノルム空間である．

「Banach 空間」

Banach 空間であることを証明するには $\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ が極限 T を $\mathcal{L}(X,Y)$ 内に持つことを示せばよい．

まず，極限の候補 $\tilde{A}$ が定義できるか確認する．任意の Cauchy 列 $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ は Cauchy 列の定義 (4) より

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0,\ (n,m \to \infty)$$

となる．任意の $u \in X\backslash\{0\}$ に対して，点列 $(A_n u) \subset Y$ は

$$\begin{aligned}
\|A_n u - A_m u\|_Y &= \frac{\|(A_n - A_m)u\|_Y}{\|u\|_X}\|u\|_X \\
&\leq \sup_{\phi \in X\backslash\{0\}} \frac{\|(A_n - A_m)\phi\|_Y}{\|\phi\|_X}\|\|_X \\
&= \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X \to 0,\ (n,m \to \infty)
\end{aligned}$$

を持つため，点列 $(A_n u) \subset Y$ は Cauchy 列になる．その上，Y は Banach 空間であるため，Y の任意の Cauchy 列は収束し，Y 内に極限 $\tilde{A}u$ となるような X から Y への作用素 $\tilde{A}$ が存在する．ここで，任意の $u \in X$ に対して極限 $\tilde{A}u$ が定義されることから，$\tilde{A}$ の定義域は $\mathcal{D}(\tilde{A}) = X$ である．これにより，$\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 (A_n) の極限の候補 $\tilde{A}$ が定義できた．

続いて，定義した極限の候補 $\tilde{A}$ が $\mathcal{L}(X,Y)$ に属しているか確認する．$\tilde{A}$ が有界な線形作用素であり，かつ $D(\tilde{A}) = X$ であることを示せばよい．$\mathcal{L}(X,Y)$ の任意の Cauchy 列 (A_n) の元 A_n は線形作用素であるため，線形作用素の定義より任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と $u, v \in X$ について

$$A_n(\alpha u + \beta v) = \alpha A_n u + \beta A_n v$$

を持つ．よって $n \to \infty$ とすると

$$(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{A}u + \beta \tilde{A}v$$

となり，極限の候補 $\tilde{A}$ は線形作用素である．次に極限の候補 $\tilde{A}$ が有界作用素であることを示す．点列 (A_n) は Cauchy 列であるため定理 (2) より有界列でもある．すなわち，どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$$

となる $n \in \mathbb{N}$ に依存しない定数 M が存在する．この $n \in \mathbb{N}$ に依存しない定数 M は，任意の $n \in X$ について

$$\|A_n u\|_Y \leq M\|u\|_X$$

も満たす．$\|A_n u\| \to \tilde{A}_u,\ (n \to \infty)$ であるため，上の不等式に対して $n \to \infty$ とすると M が n に依存しないため

$$\|\tilde{A}u\|_Y \leq M\|u\|_X$$

を得る．よって，点列 (A_n) の極限の候補 $\tilde{A}$ は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．

最後に，点列 (A_n) の極限が $\tilde{A}$ であることを示す．任意の $u \in X$ に対して，点列 $(A_n u) \subset Y$ は Y 内に極限 $\tilde{A}u$ を持つこと，すなわち

$$A_n u \to \tilde{A}u,\ (u \to \infty)$$

を持つことから

$$\|A_n u - A_m u\|_Y \to \|A_n u - \tilde{A} u\|_Y, \ (m \to \infty)$$

となる．その上，$\mathcal{L}(X,Y)$ のノルムの定義と $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ から

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}, \ (m \to \infty)$$

を得る．点列 (A_n) が Cauchy 列であるため

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon$$

を満たす．その上，$m \to \infty$ とすると

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \text{ に対して } \|A_n - \tilde{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \epsilon$$

となり，$\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ は Cauchy 列 (A_n) の極限である．よって，任意の Cauchy 列は $\mathcal{L}(X,Y)$ 内に極限を持つため，ノルム空間 $\mathcal{L}(X,Y)$ は Banach 空間である． ■

定理 8 ($\mathcal{L}(X,Y)$ ノルムの性質 (1))**.** X をノルム空間とし，Y を Banach 空間とする．そのとき，任意の $u \in X$ と任意の $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ について以下の不等式が成り立つ．

$$\|Au\|_Y \geq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u\|_X$$

証明. $u = 0$ の時は明らかに成り立つため，$u \in X \backslash \{0\}$ について考える．$u \in X \backslash \{0\}$ について

$$\|Au\|_Y = \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \|u\|_X \leq \sup_{\phi \in X \backslash \{0\}} \frac{\|A\phi\|_Y}{\|\phi\|_X} \|u\|_X = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u\|_X$$

となるため，題意は示された． ■

定理 9 ($\mathcal{L}(X,Y)$ ノルムの性質 (2))**.** X をノルム空間とし，Y と Z を Banach 空間とする．そのとき，任意の $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ と $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ の合成作用素 AB は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．その上，

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

証明. 合成作用素の定義 (22) から

$$\mathcal{D}(AB) = \{v \in \mathcal{D}(B) = X \mid Bv \in \mathcal{D}(A) = Y\}$$

となるが，$B \in \mathcal{L}(X,Y)$ であるため，任意の $v \in X$ に対して Bv は Y に属する．よって，

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D} = X$$

となる．その上，A も B も線形作用素であることから，任意の $u, v \in X$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$AB(\alpha u + \beta v) = A(B\alpha u + B\beta v) = A(\alpha Bu + \beta Bv) = A\alpha Bu + A\beta Bv = \alpha ABu + \beta ABv$$

となるため，合成作用素 AB は定義域が X 全体となる線形作用素である．よって AB は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属する．その上，

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\mathcal{L}(X,Z)} &= \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|ABu\|_Z}{\|u\|_X} \\ &\le \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X}{\|u\|_X}\|u\|_X \\ &= \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\end{aligned}$$

■

定義 25 (X 上の恒等作用素)**.** X を Banach 空間とする．任意の $u \in X$ に対して

$$Iu = u$$

となる $I \in \mathcal{L}(X)$ を X 上の恒等作用素と呼ぶ．

定理 10 (Neumann 級数)**.** X を Banach 空間とする．$B \in \mathcal{L}(X)$ とし，$I \in \mathcal{L}(X)$ を X 上の恒等作用素とする．もし

$$\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

ならば逆作用素をもち $B^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ となる．そのうえ，

$$B^{-1} = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i$$

で，かつ

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{1 - \|I-B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

証明*.*

$$S_n = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots + (I-B)^n$$

とすると，B と I ともに $\mathcal{L}(X)$ に属するため，加法 $I-B$ や合成作用素 $(I-B)(I-B)$ なども $\mathcal{L}(X)$ に属する．よって S_n も $\mathcal{L}(X)$ に属する．

続いて点列 $(S_n) \subset \mathcal{L}(X)$ が極限 S を $\mathcal{L}(X)$ 内に持つか確認する．定理 (9) より

$$\|(I-B)^i\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)},\ i = 0, 1, \cdots$$

となるため，$n > m > 0$ となる整数に対して

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} (I-B)^i \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \sum_{i=m+1}^{n} \|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)}$$

となる．定理の仮定より $\|(I-B)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ であるため，

$$\sum_{i=m+1}^{n} \|(I-B)\|^i_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となる．よって

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となるため，点列 (S_n) は Cauchy 列である．その上，$\mathcal{L}(X)$ は Banach 空間であるため，任意の Cauchy 列は極限 $\mathcal{L}(X)$ に持つため，点列 (S_n) は

$$\|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となる極限 $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ を持つ．

次に S が B^{-1} になることを示す．合成作用素の定義 (22) にしたがって合成作用素 BS_n を考える．X は Banach 空間であり，$S, B_n \in \mathcal{L}(X)$ であるため，定理 (9) より合成作用素 BS_n は $\mathcal{L}(X)$ に属する．その上，点列 $(BS_n) \subset \mathcal{L}(X)$ は

$$\|BS_n - BS\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X)} \|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0,\ (n \to \infty)$$

となるため，極限 BS を $\mathcal{L}(X)$ 内にもつ．一方で，

$$\begin{aligned}
BS_n &= (I - (I - B))S_n \\
&= S_n - (I - B)S_n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (I - B)^i - \sum_{i=1}^{n+1} (I - B)^i \\
&= I - (I - B)^{n+1}
\end{aligned}$$

となり，定理の仮定より $\|I - B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ を持つため

$$\|BS_n - I\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(I - B)^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|(I - B)\|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1} \to 0,\ (n \to 0)$$

となるため，点列 (BS_n) は極限 I も $\mathcal{L}(X)$ 内に持つ．よって，極限の一意性より

$$BS = I$$

を得る．$\mathcal{R}(I) = X$ であるため，$\mathcal{R}(BS) = X$ である．その上，$X = \mathcal{R}(BS) \subset \mathcal{R}(B)$ と $\mathcal{R}(B) \subset X$ となるため，

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(B) = X$$

となる．

同様の議論を $S_n B \in \mathcal{L}(X)$ について行うと

$$SB = I$$

と

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(S) = X$$

が得られる．そのため，B は逆作用素を持ち，逆作用素 $B^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$ である．

また，
$$S_n = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots + (I-B)^n \to B^{-}1,\ (n \to \infty)$$
より
$$B^{-1} = I + (I-B) + (I-B)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i$$
となる．

最後に
$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\sum_{i=0}^{\infty}(I-B)^i\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\|(I-B)\|^i$$
となり，初項 1，公比 $\|I-B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ の総和より
$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-\|I-B\|_{\mathcal{L}(X)}}$$
■

定理 11. X と Y を Banach 空間とする．$A \in \mathcal{L}(X,Y), R \in \mathcal{L}(Y,X)$ とする．もし RA が全単射ならば，A は単射であり，R は全射である．

証明.「A が単射」の証明

定理 (4)(線形作用素に対する単射性 (1)) の (2) を用いて証明する．$u \in X$ とし，RA が単射であることに注意すると
$$Au = 0 \Rightarrow RAu = 0 \Rightarrow u = 0$$

「R が全射」の証明

RA が全射であるため任意の $g \in X$ に対して，
$$RAu = g$$
となる $u \in X$ が存在する．その上，$v = Au$ とすると任意の $g \in X$ に対して
$$Rv = g$$
となる $v \in Y$ が存在するため，R は全射である． ■

定義 26 (Fréchet 微分)**.** 作用素 $F : X \to Y$ が $x_0 \in X$ で Fréchet 微分可能であるとは，ある有界線形作用素 $E : X \to Y$ が存在して
$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - Eh\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$
が成り立つことをいう．このとき E は作用素 F の x_0 における Fréchet 微分といい，$E = DF(x_0)$ とも書く．もしも作用素 $F : X \to Y$ がすべての $x \in X$ に対して Fréchet 微分可能ならば，F は X において C^1-Fréchet 微分可能という．

1.3 Banach の不動点定理

定義 27 (不動点)**.** X を係数帯が $\mathbb{K}$ の Banach 空間とする．M は空でない閉集合で $M \subset X$ を満たすとする．A を M から M への写像とする．$x \in M$ が A の不動点であるとは，x が

$$x = Ax$$

を満たすことである．

定義 28 (距離空間)**.** X をノルム空間とし，$x, y \in X$ に対して実数値を対応させる関数 $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ が定義され，

1. $d(x,y) \leq 0$ かつ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ x, y \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x),\ x,y \in X$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ x,y,z \in X$

を満たすとき，d を距離空間という．距離の備わった集合を距離空間という．

定義 29 (縮小写像)**.** X を係数体が $\mathbb{K}$ の Banach 空間とする．M は空でない閉集合で $M \subset X$ を満たすとする．写像 $A : M \to M$ が k 次の縮小写像であるとは，$0 \leq k < 1$ を満たす定数 k が存在し，$\forall x, y \in M$ について

$$\|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$$

を満たすことである．

定理 12 (Banach の不動点定理)**.** X を係数体が $\mathbb{K}$ の Banach 空間とする．M は空でない閉集合で $M \subset X$ を満たすとする．A は M から M への k 次の縮小写像とする．そのとき，問題

$$\text{Find } u \in M \text{ s.t. } u = Au \tag{1}$$

は真の解 u^* を M 内にただ一つ持つ．即ち，写像 A は M 上にただ一つ不動点 u^* を持つ．

証明. u_0 を閉集合 M の元として与えられていると仮定する．点列 (u_n) は反復法

$$u_{n+1} = Au_n,\ n = 0, 1, \cdots \tag{2}$$

にとって得られる．そのとき，証明のプロセスは次のように考える．

1. (u_n) が Cauchy 列になること，さらに Banach 空間の完備性を使うことで，$u_n \to u,\ n \to \infty$ となる u が X 内に存在することを示す．
2. u が式 (1) を満たす真の解 u^* と一致することを示す (解の存在性)．
3. 真の解 u^* が M 内で一意であることを示す．

1)

式 (2) より，

$$\|u_n - u_{n+1}\| = \|Au_{n-1} - Au_n\| \tag{3}$$

となる．定理の仮定より A は k 次の縮小写像であるため，

$$\|Au_{n-1} - Au_n\| \leq k\|u_{n-1} - u_n\| \tag{4}$$

となる定数 k が存在する．同様に $\|u_{n-1} - u_n\|$ に式 (2) と A の縮小写像の性質を使うと最終的に

$$\|u_n - u_{n+1}\| \leq k^n\|u_0 - u_1\| \tag{5}$$

を得る．

次に三角不等式より，$n = 0, 1, 2, \cdots,\ m > n$ について

$$\begin{align}
\|u_n - u_m\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + (u_{m-1} - u_m)\| \tag{6}\\
&\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + \|u_{m-1} - u_m\| \tag{7}
\end{align}$$

となる．上の式に式 (5) を適用すると

$$\begin{align}
\|u_n - u_m\| &\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + \|u_{m-1} - u_m\| \tag{8}\\
&\leq k^n\|(u_n - u_{n+1}\| + k^{n+1}\|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + k^{m-1}\|u_{m-1} - u_m\| \tag{9}\\
&= k^n(1 + k + \cdots + k^{m-n-1})\|u_0 - u_1\| \tag{10}
\end{align}$$

となる．ここで，k は $0 < k < 1$ であるため，$1 + k + \cdots + k^{m-n-1} \leq 1 + k + \cdots + k^{m-1}$ となる．さらに，等比級数から

$$1 + k + \cdots + k^{m-1} = \frac{1 - k^m}{1 - k} \tag{11}$$

であるため，式 (8) は

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{k^n(1 - k^m)}{1 - k}\|u_0 - u_1\| \tag{12}$$

となる．よって，k は $0 < k < 1$ から $k^n \to 0,\ n \to \infty$ と $k^m \to 0,\ m \to \infty$ となる．すなわち，

$$\|u_n - u_m\| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

となるため，点列 (u_n) は Cauchy 列である．さらに X は Banach 空間であるため，X は完備である．すなわち，任意の Cauchy 列が X の中で極限を持つ．よって，点列 (u_n) は

$$u_n \to u,\ n \to \infty$$

となる $u \in X$ が存在する．

2)

a

3)

a

■