

# 無限次元ガウスの消去法を用いた

## radii-polynomial approach の改良

(指導教員 関根 晃汰 准教授)

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

### 1. 背景と目的

非線形微分方程式は、さまざまな現象を数学モデル化することができる。この非線形微分方程式を解くことで、数学モデルの現象の解析を行うことができる。非線形微分方程式の解の導出には計算機が用いられるが、有限次元として問題を解くと、導出された解と実際の解には誤差が生じる。そのため、解の導出の精度を上げるために、無限次元で考えられる精度保証付き数値計算が必要となる。

非線形微分方程式の精度保証付き数値計算の手法の一つに、radii-polynomial approach がある。この定理は、非線形方程式を有限次元の問題として解を導出している。

本研究では、解の導出精度向上のために、radii-polynomial approach 無限次元ガウスの消去法を用いた改良手法を提案する。

### 2. radii-polynomial approach

$X, Y$  を Banach 空間、 $\mathcal{L}(X, Y)$  を  $X$  から  $Y$  への有界線形作用素の集合とする。有界線形作用素  $A^\dagger \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $A \in \mathcal{L}(Y, X)$  を考え、作用素  $F: X \rightarrow Y$  が  $C^1$ -Fréchet 微分可能とする。

いま、 $\tilde{x} \in X$  に対して、正定数  $Y_0, Z_0, Z_1$  および非減少関数  $Z_2(r) (r > 0)$  が存在して、次に不等式を満たすとする。

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (1)$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0 \quad (2)$$

$$\|A(DF(\tilde{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1 \quad (3)$$

$$\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r) \quad (4)$$
$$\forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

このとき、radii polynomial を以下で定義する。

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \quad (5)$$

これに対し、 $p(r_0) < 0$  となる  $r_0 > 0$  が存在するならば、 $F(\tilde{x}) = 0$  を満たす解  $\tilde{x}$  が  $b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$  内に一意に存在する。

ここで、 $DF(\tilde{x})$  を  $F$  の  $\tilde{x}$  における Fréchet 微分、 $A^\dagger$  を  $DF(\tilde{x})$  の近似、 $A$  を  $A^\dagger$  の近似左逆作用素 ( $AA^\dagger \approx I$ ) とする。

### 3. 提案手法

radii-polynomial approach で定義された作用素  $A$  は、有限次元上では作用素  $A^\dagger$  の近似逆作用素である。無限次元上の場合、この  $A^\dagger$  は真の逆作用素  $A$  となる。 $A = DF^{-1}$  より、式(1)は以下になる。

$$\|DF^{-1}F(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (6)$$

ここで、 $\phi := DF^{-1}F(\tilde{x})$  とし、式(6)を以下のように変形して、ガウスの消去法を適用する。 $\Pi_N$  は射影作用素とする。

$$DF\phi = F(\tilde{x}) \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF \Pi_N & \Pi_N DF (I - \Pi_N) \phi \\ (I - \Pi_N) DF \Pi_N & (I - \Pi_N) DF \Pi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N) \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) F(\tilde{x}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

### 4. 今後の課題

提案手法で提示した式(8)のガウスの消去法による展開や、Julia を用いたプログラムの実証を行う。

### 参考文献

- [1] 高安亮紀, Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル