

3 年第 n 回ゼミ

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

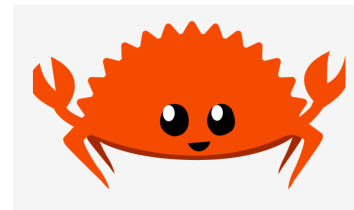
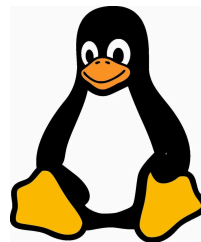
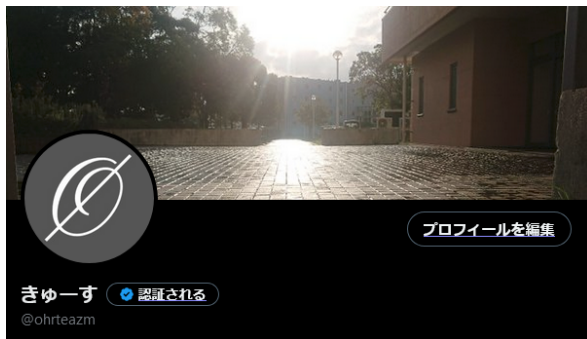
おしながき

- 自己紹介
- 知識
 - ▶ 有界線形作用素
 - ▶ Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに



自己紹介

- 名前
 - ▶ 齋藤 悠希
- 趣味
 - ▶ ゲーム (Valorant とか)
 - ▶ プログラミングとか
 - ▶ ドライブ



おしながき

- 自己紹介
- 知識
 - ▶ 有界線形作用素
 - ▶ Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに



有界線形作用素

有界で線形な作用素



⇒ 順番に考えてみる

有界線形作用素

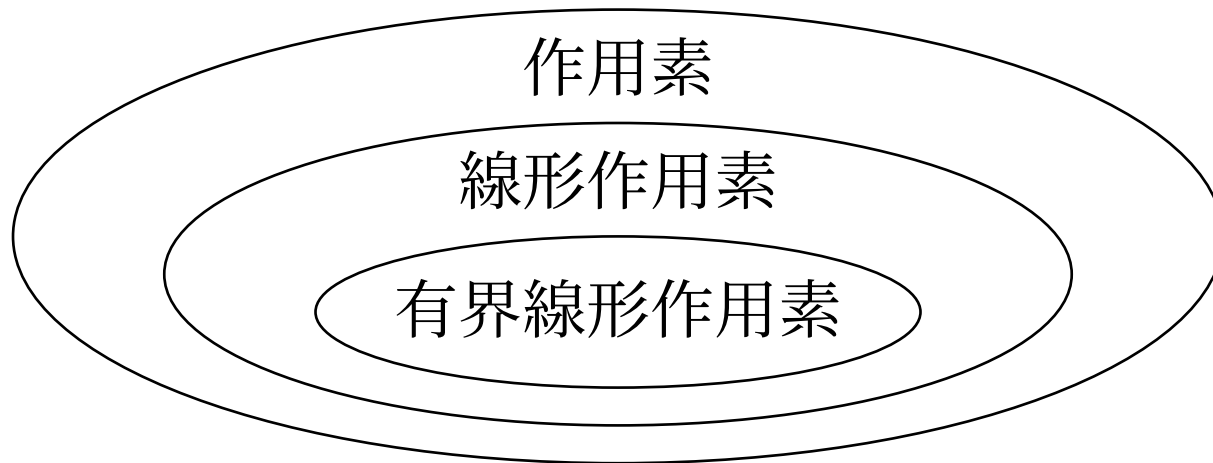


図 有界で線形な作用素のベン図

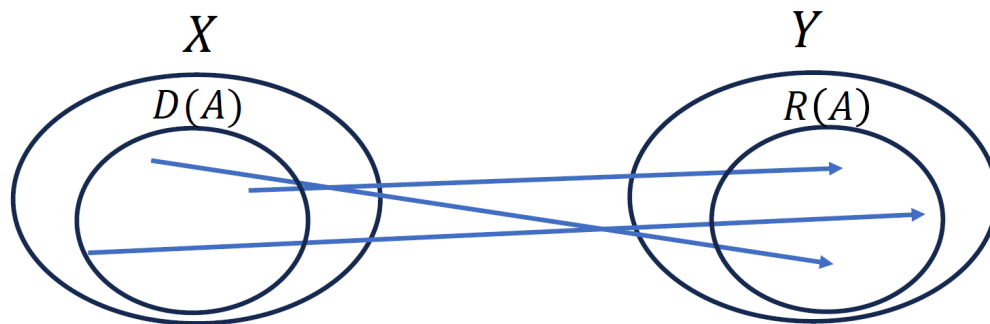
有界線形作用素 - 作用素

作用素

線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とは,

$$D(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたときに, $D(A)$ のどんな元に対しても,それぞれ集合 Y の唯一つの元を指定する規則のこと



有界線形作用素 - 線形作用素

定義 線形作用素

- X, Y : 線形空間, $A : X \rightarrow Y$ への作用素
- 任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$, に対し
 - ▶ $\mathcal{D}(A)$ が X の線形部分空間
 - ▶ $A(u + v) = Au + Av$
 - ▶ $A(\alpha u) = \alpha Au$

を満たす, A のこと.

有界線形作用素 - 線形作用素

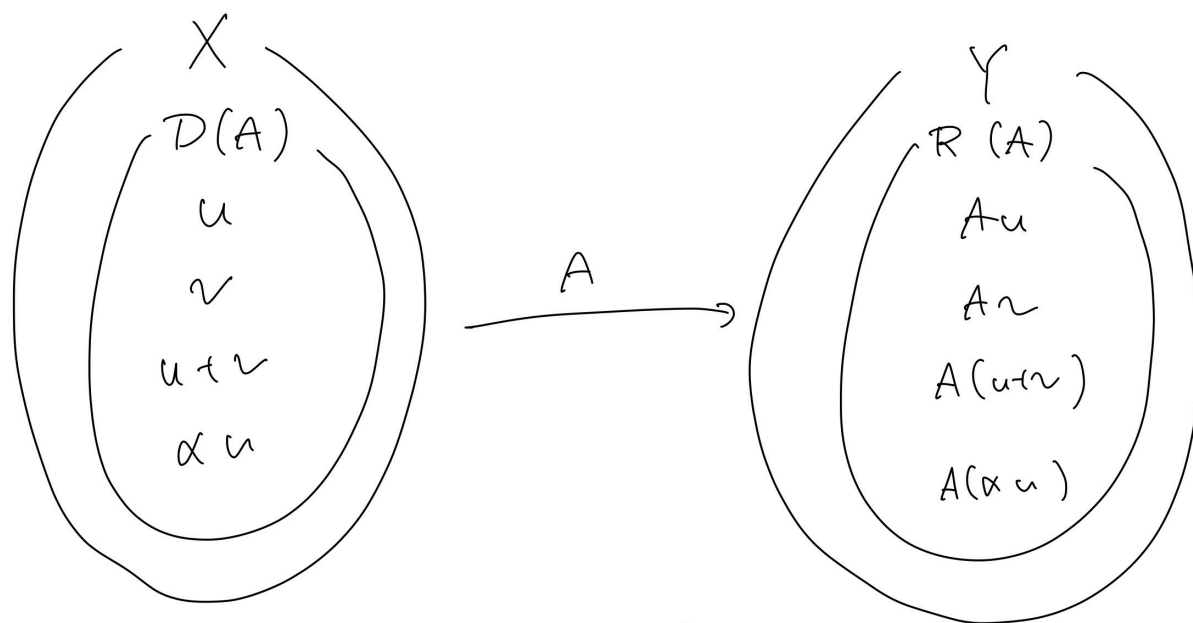


図 線形作用素 A の作用

有界線形作用素 - 線形作用素

定義 線形作用素

- X, Y : 線形空間, $A : X \rightarrow Y$ への作用素
- 任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$, に対し
 - ▶ $\mathcal{D}(A)$ が X の線形部分空間
 - ▶ $A(u + v) = Au + Av$
 - ▶ $A(\alpha u) = \alpha Au$

を満たす, A のこと.

\Rightarrow つまり, 足し算と定数倍が保存される

有界線形作用素 - 線形作用素

$$\begin{array}{ccc}
 u, v & \xrightarrow{+} & u+v \\
 & \searrow A & \\
 & & Au, Av \xrightarrow{+} Au+Av
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{A} & A(u+v) \\
 & & || \\
 & & Au+Av
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{\alpha} & \alpha u \xrightarrow{A} A(\alpha u) \\
 & \searrow A & \\
 & & Au \xrightarrow{\alpha} \alpha Au
 \end{array}$$

□

線形作用素の性質

有界線形作用素 - 有界線形作用素

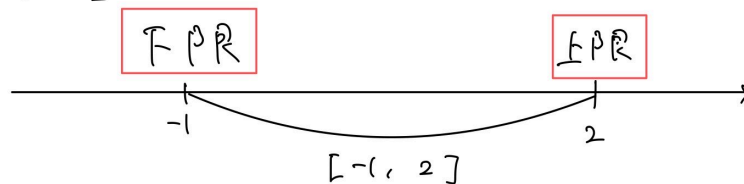
定義 有界線形作用素

- X, Y を線形空間, $A : X \rightarrow Y$ への作用素
- $u \in \mathcal{D}(A)$ に対し,
 - ▶ $\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X$

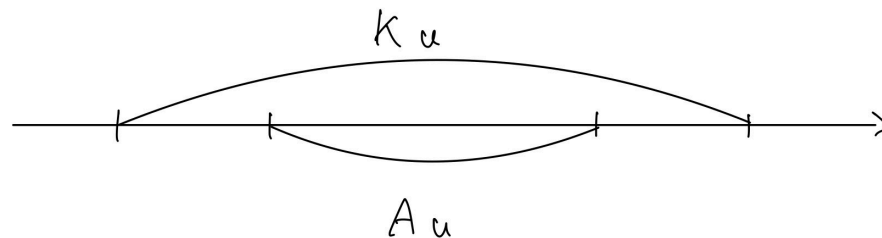
を満たす, 正の定数 K が存在するとき,
 A を有界な作用素と呼ぶ.

有界線形作用素 - 線形作用素

- $[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ は有界 (上下に)



- $\|Au\|_Y \leq k \|u\|_X$



ある範囲におさまる

有界線形作用素

つまり，有界線形作用素 A とは，

- 有界で（上限と下限があって）
 - ▶ $\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X$
- 線形な
 - ▶ $A(u + v) = Au + Av$
 - ▶ $A(\alpha u) = \alpha Au$
- 作用素（写像みたいなやつ）

おしながき

- 自己紹介
- 知識
 - ▶ 有界線形作用素
 - ▶ Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに



Fréchet 微分

定義 Fréchet 微分

- X, Y を Banach 空間, 開部分集合 $U \subset X$
- 定義域を $\mathcal{D}(f) = U$ とする, U から Y への作用素 f は U 上で連続
- ある点 $v \in U$ に対し, $v + h$ となる任意の $h \in X$ について

$$\frac{\|f(v + h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

を満たす線形作用素 $f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$ を f の点 v における Fréchet 微分と呼ぶ.

Fréchet 微分



⇒ 順番に考えてみる

Fréchet 微分

Fréchet 微分は，全微分の拡張



全微分は？



微分は？

Fréchet 微分 - 微分

定義 微分可能

関数 $f(x)$ が微分可能であるとは,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow c, (h \rightarrow 0)$$

となる c が存在すること.

Fréchet 微分 - 微分

$f(x) = x^2$ のときの c は？

$$\begin{aligned} c &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= 2x + h \\ &\rightarrow 2x \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

これより, $f'(x) = c = 2x$

Fréchet 微分 - 微分

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow c, (h \rightarrow 0)$$

より,

$$\frac{f(x+h) - f(x) - ch}{h} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

Fréchet 微分 - 微分

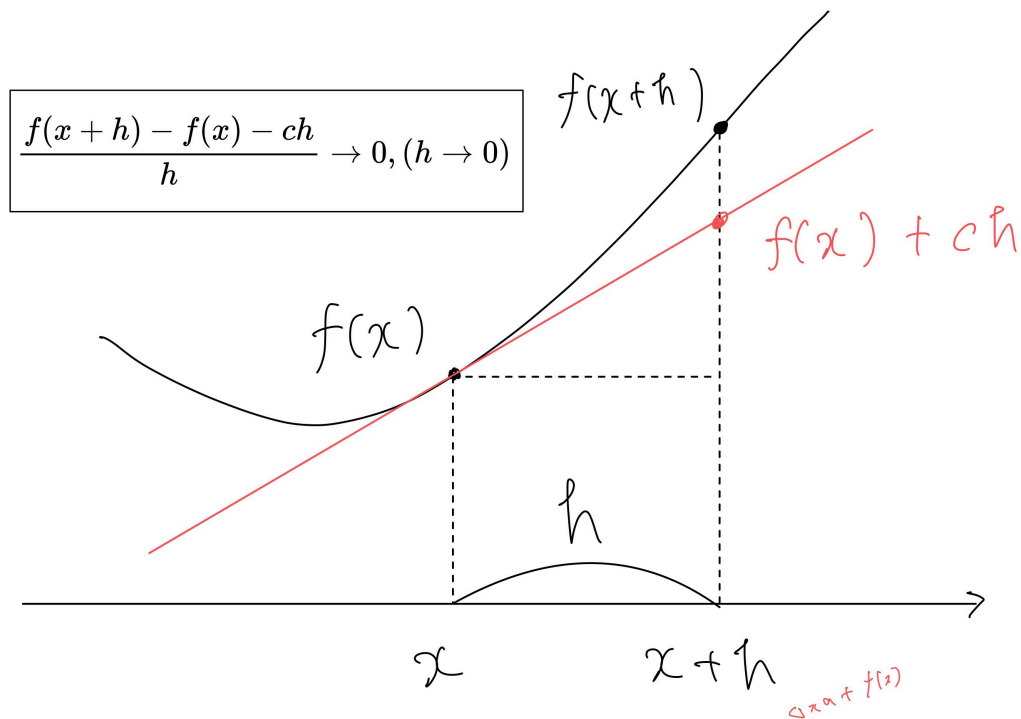


図 微分

Fréchet 微分 - 全微分

定義 全微分可能

関数 $f(x)$ が微分可能であるとは,

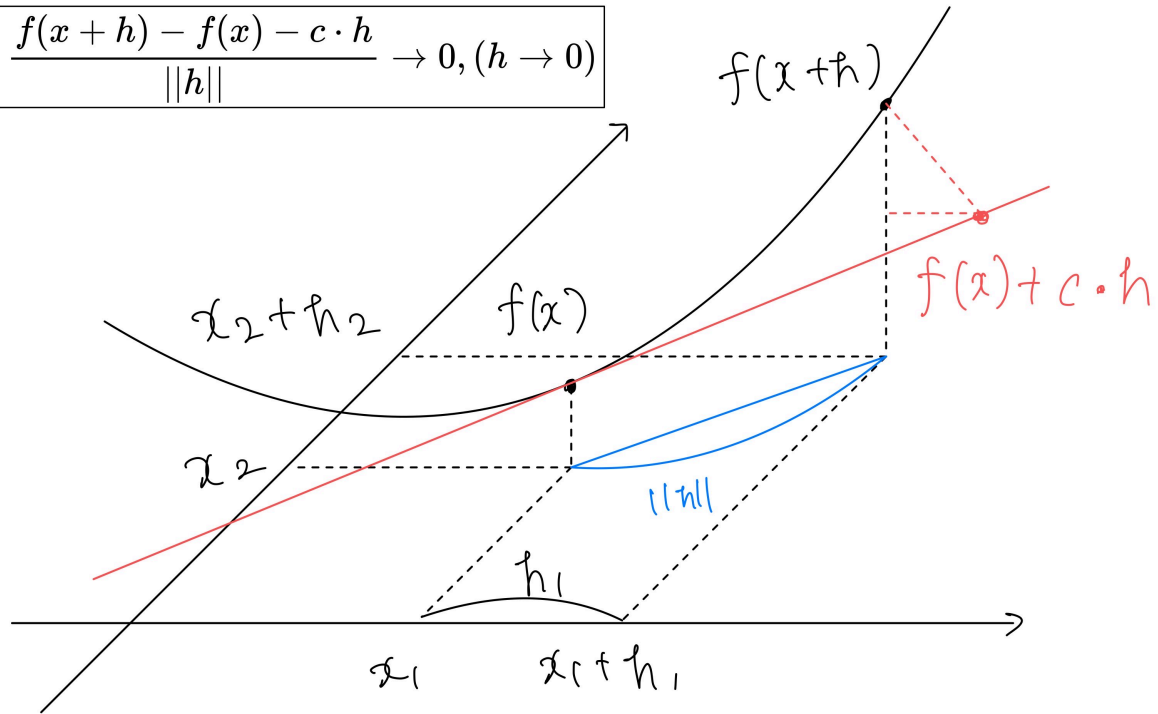
$$\frac{f(x+h) - f(x) - c \cdot h}{\|h\|} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

となる c が存在すること.

(x, c, h はベクトル)

Fréchet 微分 - 全微分

$$\frac{f(x+h) - f(x) - c \cdot h}{||h||} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$



合 1 條分 (2 次 6)

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

定義 Fréchet 微分 (再掲)

- X, Y を Banach 空間, 開部分集合 $U \subset X$
- 定義域を $\mathcal{D}(f) = U$ とする, U から Y への作用素 f は U 上で連続
- ある点 $v \in U$ に対し, $v + h$ となる任意の $h \in X$ について

$$\frac{\|f(v + h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

を満たす線形作用素 $f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$ を f の点 v における Fréchet 微分と呼ぶ.

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

- X, Y を Banach 空間, 開部分集合 $U \subset X$
- 定義域を $\mathcal{D}(f) = U$ とする, U から Y への作用素 f は U 上で連続



定義域の指定

関数を用作用素に拡張

f が連続 \rightarrow 微分できることの明示

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

- ある点 $v \in U$ に対し, $v + h$ となる任意の $h \in X$ について

$$\frac{\|f(v + h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

を満たす線形作用素 $f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$ を…



ほぼ全微分と同じ

Fréchet 微分 - Fréchet 微分

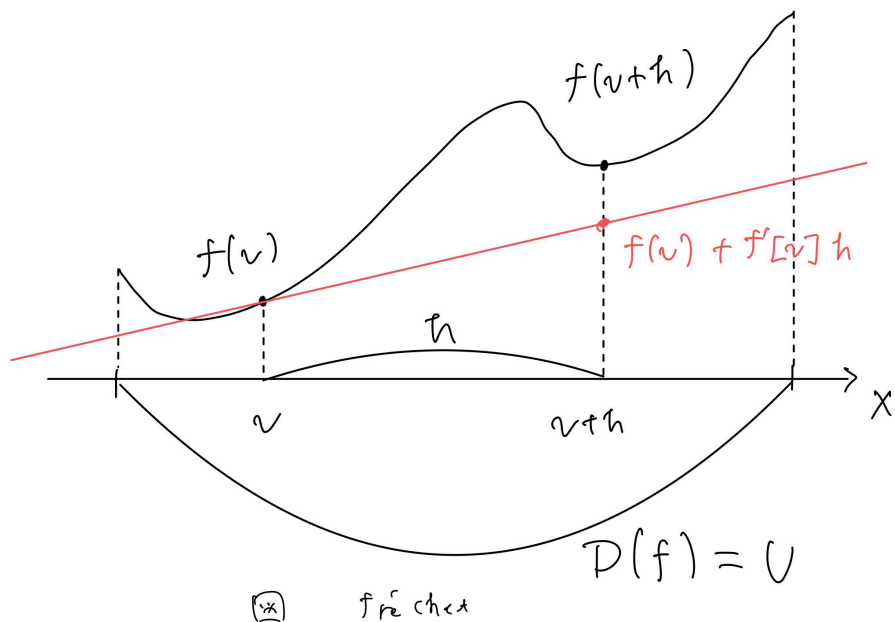
(さっきの式) を満たす線形作用素 $f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$ を f の点 v における Fréchet 微分と呼ぶ.



微分の結果を $f'[v]$ とするよ (c と意味が同じ)

$\mathcal{B}(X, Y)$...定義域が X の全体となる有界な線形作用素全体の集合
↳ 定義域が X となる有界線形作用素を, すべて集めたやつ

Fréchet 微分 - Fréchet 微分



$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X}$$

線形作用素 $f'[v]$ を
 f の点 v における
 Fréchet 微分と呼ぶ。

Fréchet 微分 (再掲)

定義 Fréchet 微分

- X, Y を Banach 空間, 開部分集合 $U \subset X$
- 定義域を $\mathcal{D}(f) = U$ とする, U から Y への作用素 f は U 上で連続
- ある点 $v \in U$ に対し, $v + h$ となる任意の $h \in X$ について

$$\frac{\|f(v+h) - f(v) - f'[v]h\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

を満たす線形作用素 $f'[v] \in \mathcal{B}(X, Y)$ を f の点 v における Fréchet 微分と呼ぶ.

おしながき

- 自己紹介
- 知識
 - ▶ 有界線形作用素
 - ▶ Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに



研究テーマの紹介 - 目的

radii-polynomial approach を改善する

radii-polynomial approach とは

非線形方程式の近似解の精度保証を行う定理

定理 radii-polynomial approach

- X, Y を, Banach 空間
- $\mathcal{L}(X, Y)$ を, 有界線形作用素全体の集合
 - ▶ 定義域が X となる有界線形作用素を, すべて集めたやつ
- 作用素 $F : X \rightarrow Y$ が, C^1 -Fréchet 可能
 - ▶ C^1 -Fréchet 可能 \cdots 1 回微分可能 かつ F' が連続

radii-polynomial approach とは

$\tilde{x} \in X$ に対して、

正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および、非減少関数 $Z_2(r) (r > 0)$ が存在して

$$\|AF[\tilde{x}]\|_X \leq Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0$$

$$\|A(F'[\tilde{x}] - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1$$

$$\|A(F'[b] - F'(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r), \quad \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

を満たすとする.

radii-polynomial approach とは

このとき, radii polynomial を以下で定義する.

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、 $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば、 $F(x) = 0$ を満たす解 \tilde{x} が $\overline{B(x, r)}$ 内に一意に存在する.

研究テーマの紹介 - 背景

例えば… $\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0$ を計算したい.

従来手法では, A を $F'[\bar{x}]^{-1}$ の近似として, 計算する.

↳ 精度があまり良くない



無限次元のガウスの消去法を使って $F'[\bar{x}]^{-1}$ を計算し,
精度を良くしよう

研究テーマの紹介 - 目的・手法

近似部分に無限次元ガウスの消去法を用いる

↳ 精度の改善

おしながき

- 自己紹介
- 知識
 - ▶ 有界線形作用素
 - ▶ Fréchet 微分
- 研究テーマの紹介
- おわりに



おわりに

今回の内容の、有界線形作用素、Fréchet 微分は、



の 174 ページに記載があります。