

タイトル

2131701 齋藤悠希

1 Preparation

1.1 Banach Space

定義 1 (線形空間の公理). 空でない集合 X が, 係数体 \mathbb{K} 上の線形空間であるとは, 任意の $u + v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して, 加法 $u + v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて, 任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである.

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. $u + v = v + u$
3. $u + 0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u + (-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

定義 2 (ノルムとノルム空間の定義). X を係数体 \mathbb{K} 上の線形空間とする. X で定義された関数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{K}$ 上で定義された関数が X のノルムであるとは

1. $\|u\| \geq 0, \quad u \in X$
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

が成立することである. さらに X に 1つのノルムが指定されているとき, X はノルム空間という.

定義 3 (ノルム空間の収束と極限). X をノルム空間とする. X の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } \|u_n - u\| < \epsilon$$

のとき, 点 $u \in X$ に収束するといい,

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

と表す. このとき, u を u_n の極限といい,

$$u_n - u, (n \rightarrow \infty)$$

と表す.

定義 4 (Cauchy 列). X をノルム空間とする. そのとき X が *Cauchy* 列であるとは

$$u_n - u_m \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである. 即ち

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0, (n, m \rightarrow \infty)$$

が成立することである.

定義 5 (完備). X をノルム空間とする. X が完備であるとは, 任意の *Cauchy* 列 (u_n) が X の中で極限をもつことである. すなわち, 任意の *Cauchy* 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

となる極限 u を X 内に持つことである.

定義 6 (Banach 空間). ノルム空間 X が *Banach* 空間であるとは, X が完備であることである.

定理 1 (逆三角不等式). X をノルム空間とする. 任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす.

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

証明. 任意の $u, v \in X$ について

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|\end{aligned}$$

となる. よって

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \quad \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$$

となるため,

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ. ■

定義 7 (有界列). X をノルム空間とする. そのとき X の点列 (u_n) が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである.

定理 2 (Cauchy 列ならば有界列). X をノルム空間とする. そのとき X の点列 (u_n) が *Cauchy* 列ならば有界列でもある.

証明. X の点列 (u_n) が Cauchy 列であるために, $\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \text{ に対して } \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

を満たす. $\epsilon = 1$ としても, それに対応した N が存在し, 任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす.

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す. 逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$\left| \|u_n\| - \|u_N\| \right| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる. 絶対値の性質より $\left| \|u_n - u_N\| \right| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる. よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため, 点列 (u_n) は有界列である. ■

定義 8 (線形部分空間). 線形空間 X の空でない集合 M が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} u + v &\in M \\ \alpha u &\in M \end{aligned}$$

を満たすとき, M は線形空間 X の線形部分空間と呼ぶ.

定義 9 (ノルム空間の開球). X をノルム空間とする. $x \in X$ とし, $r > 0$ を正実数とする. そのとき, 集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心 x , 半径 r の開球という. X が明らかな場合は $B_X(x, r)$ を省略して $B(x, r)$ と表記する.

定義 10 (ノルム空間の開集合). X をノルム空間とし, M を X の部分集合とする. 任意の $x \in M$ に対して, $B_X(x, r) \subset M$ となる $r > 0$ が存在する場合, M が開集合であるという.

定義 11 (ノルム空間の閉集合). X をノルム空間とし, M を X の部分集合とする. M が閉集合であるとは, M の任意の点列 (u_n) の極限 $u \in X$ が M にも属することである. すなわち, 点列 $(u_n) \subset M$ について

$$u_n \rightarrow u, \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき, M は閉集合であるという.

定義 12 (閉部分空間). X をノルム空間とし, M を X の線形部分空間が閉集合であるとき, M を閉部分空間である.

1.2 Operator

定義 13 (作用素). ある線形空間 X から別の線形空間 Y への作用素 A とは,

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in X \mid Au \in Y\}$$

としたとき, $\mathcal{D}(A)$ のどんな元に対しても, それぞれ集合 Y のただ一つの元を指定する規則のことである. また, $\mathcal{D}(A)$ は A の定義域と呼ばれ

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$$

を値域と呼ぶ

定義 14 (単射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$u_1 \neq u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A(u_1) \neq A(u_2)$$

定義 15 (全射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が

$$Y = \mathcal{R}(A)$$

を満たすときに作用素 A は全単射であるという.

定義 16 (全射). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とし, その定義域を $\mathcal{D}(A) \subset X$, 値域を $\mathcal{R}(A) \subset Y$ とする. そのとき,

$$A^{-1}(A(u)) = u, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

$$A(A^{-1}(u)) = u, \quad u \in \mathcal{R}(A)$$

かつ

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$

$$\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$$

となる Y から X への作用素 A^{-1} を A の逆作用素と呼ぶ.

定理 3 (単射と逆作用素の環境). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A とすると.

$$A \text{ が逆作用素を持つ} \Leftrightarrow A \text{ が単射である}$$

証明. 「 A が逆作用素を持つ $\Rightarrow A$ が単射である」の証明

単射の定義 14 の待遇「任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$ 」を満たすことを確かめる. A の逆作用素を A^{-1} とすると, 任意の $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ に対し

$$\begin{aligned} A(u_1) &= A(u_2) \\ \Rightarrow A^{-1}(A(u_1)) &= A^{-1}(A(u_2)) \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

「 A が単射である $\Rightarrow A$ が逆作用素 A^{-1} をもつ」の証明

A の値域の定義 $\mathcal{R}(A) = \{A(u) \in Y \mid u \in \mathcal{D}(A)\}$ より, 任意の $v \in \mathcal{R}(A)$ に対し,

$$A(u) = v$$

となる $u \in \mathcal{D}(A)$ が存在する. その上, A が単射であるため, 単射の定義の対偶より $u \in \mathcal{D}(A)$ はどんな $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してもただ一つの元である. そのため, 作用素の定義より, 上記の $u \in \mathcal{R}(A)$ に対してただ一つの元 $u \in \mathcal{D}(A)$ を指定する規則として

$$B(v) = u$$

となる定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B が定義できる. その上, $B(v) = u$ の $v = A(u)$ を代入すると

$$B(A(u)) = u$$

となる. 同様に, $A(u) = v$ の u に $u = B(v)$ を代入すると

$$A(B(v)) = v$$

となる. よって, 定義域 $\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(A)$ と値域 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(A)$ となる Y から X への作用素 B は A の逆作用素であるため, A は逆作用素を持つ. ■

定義 17 (作用素の等号). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A と B が等しいとは

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

かつ

$$Au = Bu, \forall u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$$

が成立することであり,

$$A = B$$

と表記する.

定義 18 (作用素の連続). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A が $u \in \mathcal{D}(A)$ で連続であるとは

$$u_n \rightarrow u, (n \rightarrow \infty)$$

となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$ に対して

$$Au_n \rightarrow Au, (n \rightarrow \infty)$$

を満たすときである. さらに, A が任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ において連続であるとき, A は連続であるという.

定義 19 (線形作用素). 線形空間 X から線形空間 Y への作用素 A が, 任意の $u, v \in \mathcal{D}(A) \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\mathcal{D}(A) \text{ が } X \text{ の線形部分空間}$$

$$A(u + v) = Au + Av$$

$$A(\alpha u) = \alpha Au$$

を満たすとき, A を作用素と呼ぶ.

定義 20 (線形作用素の加法). 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A と B の和を

$$(A + B)u := Au + Bu, u \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

と定義する. このとき, X から Y への作用素 $A + B$ の定義域は

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$$

とする.

定義 21 (線形作用素のスカラー乗法). 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A の $\alpha \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍を

$$(\alpha A)u := \alpha Au, u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する. このとき, X から Y への作用素 αA の定義域は

$$\mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A)$$

とする.

定義 22 (合成作用素). X, Y, Z を線形空間とする. A を Y から Z への線形作用素とし, B を X から Y への線形作用素とする. そのとき, A と B の合成作用素 AB は

$$(AB)u := A(Bu), u \in \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

と定義する. このとき, X から Z への合成作用素 AB の定義域は

$$\mathcal{D}(AB) := \{v \in \mathcal{D}(B) \mid Bv \in \mathcal{D}(A)\}$$

とする.

定理 4 (線形作用素に対する単射性 (1)). 線形空間 X から線形空間 Y への線形作用素 A において以下は同値である.

1. 線形作用素が A の単射である.
2. $Au = 0, u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$

証明. 単射の定義の対偶は

$$Au_1 = Au_2, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u_1 = u_2$$

となる. その上, A は線形作用素であるため,

$$Au_1 = Au_2 \Leftrightarrow A(u_1 - u_2) = 0$$

となる. $u_1 - u_2 \in \mathcal{D}(A)$ を $u \in \mathcal{D}(A)$ とおきなおせば, $1 \Rightarrow 2$ は証明された. また, 証明を逆に追うことで $2 \Rightarrow 1$ も示せる. ■

定理 5 (線形作用素に対する単射性 (2)). ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形作用素 A とする. 不等式

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y, u \in \mathcal{D}(A)$$

を満たす定数 $K > 0$ が存在するならば, 線形作用素 A は単射である.

証明. A が線形作用素であるため, $Au = 0, u \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow u = 0$ を使って証明する. ノルムの定義より

$$Au = 0, \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \|Au\|_Y = 0$$

となる. さらに, $Au = 0$ ならば,

$$\|u\|_X \leq K\|Au\|_Y = 0, u \in \mathcal{D}(A)$$

より $\|u\|_X = 0$ となる. よって, 再びノルムの定義より

$$\|u\|_X = 0, \forall u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow u = 0$$

より, $Au = 0$ ならば $u = 0$ となる. ■

定義 23 (有界な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し,

$$\|Au\|_Y \leq K\|u\|_X, \mathcal{D}(A)$$

を満たす正の定数 K が存在する時, 線形作用素 A を有界な作用素と呼ぶ.

定理 6 (有界な線形作用素と連続な線形作用素). ノルム空間 X からノルム空間 Y への作用素 A に対し,

$$A \text{ が有界} \Leftrightarrow A \text{ が連続}$$

証明. 「 A が有界 $\Rightarrow A$ が連続」の証明

連続性の定義より, $u_n \rightarrow u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して $Au_n \rightarrow Au$ となることを確かめる. $u_n \rightarrow u$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ から $\|u_n - u\|_X \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ を持つ. その上, A は有界であることから

$$\|Au_n - Au\|_Y \leq M\|u_n - u\|_X \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

よって, $u_n \rightarrow u, (n \rightarrow \infty)$ ならば, $Au_n \rightarrow Au$ であるため, A は連続である.

「 A が連続 $\Rightarrow A$ が有界」の証明

背理法によって証明する. すなわち, A が連続ならば, 任意の $M_2 > 0$ に対して

$$\|Au\|_Y > M_2\|u\|_X$$

を満たす $u \in \mathcal{D}$ が存在すると仮定して矛盾を見つける. この仮定より自然数 n に対して,

$$\|Au_n\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす $u_n \in \mathcal{D}(A)$ が存在する. このとき, $\|u_n\|_X \neq 0$ であることに注意する. ノルム空間 X はノルム空間全体の定義より線形空間であるため, ゼロ元 $0 \in X$ を持つ. その上, 線形作用素の定義より $\mathcal{D}(A)$ は X の部分空間であるため, ゼロ元 $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ を持つ. その上, A が連続であるため, A は $0 \in \mathcal{D}(A)$ でも連続である. $\epsilon - \sigma$ 論法による A の $0 \in \mathcal{D}(A) \subset X$ における連続の定義を記述すると

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|u_n\|_X < \delta \text{ となる } \forall u_n \in X \text{ に対して } \|Au_n\|_Y < \epsilon$$

となる. その上, ϵ を $n\|u_n\|_X$ とすると, $\delta_n > 0$ が存在し, $\|u_n\|_X < \delta$ となる任意の $u_n \in \mathcal{D}(A)$ に対して,

$$\|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となる. 有界ではないという仮定と組み合わせると

$$n\|u_n\|_X < \|Au_n\|_Y < n\|u_n\|_X$$

となるため矛盾する. ■

定義 24 (定義域が X の全体となる有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X, Y)$). 定義域が $Banach$ 空間 X 全体となる X から Y への有界線形作用素全体を

$$\mathcal{L}(X, Y)$$

とする.

定理 7 ($\mathcal{L}(X, Y)$ は $Banach$ 空間). X をノルム空間とし, Y を $Banach$ 空間とする. 定義域が X 全体となる X から Y への有界な線形作用素全体の集合 $\mathcal{L}(X, Y)$ のノルムを

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}, A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

とすると, $\mathcal{L}(X, Y)$ は *Banach* 空間となる.

証明. 作用素の加法 (20) と作用素のスカラー乗法 (21) の定義をもとに線形空間の公理 (1) が満たされていることが導かれる. ただし, $\mathcal{L}(X, Y)$ のゼロ元は任意の $u \in X$ を $0 \in Y$ へ写す作用素であることに注意が必要である.

「ノルム空間」 $\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ がノルムの定義を満たすことを示せばよい. ノルム空間 X と Banach 空間 Y であるため $\|\cdot\|_X \geq 0$ と $\|\cdot\|_Y \geq 0$ であることから

$$\frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \geq 0$$

となるため, $\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \geq 0$ となり, ノルムの定義 (1) はいえる.

次に, $A = 0$ ならば $\|Au\|_Y = 0$ であるため,

$$\|A\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}}$$

■