radii-polynomial approach における
無限次元ガウスの消去法

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

背景と目的

既存の radii-polynomial approach は,
有限次元の非線形方程式の精度保証付き数値計算に利用できる.

↓

近似解での保証が可能だが, 真の解ではない.

↓

定理を無限次元に拡張し,
真の解での精度保証を可能にする.

radii-polynomial approach

- X, Yを Banach 空間
- $\mathcal{L}(X, Y)$を XからYへの有界線形作用素の集合
- 有界線形作用素$A^\dagger \in \mathcal{L}(X, Y), A \in \mathcal{L}(Y, X)$
- 作用素$F : X \to Y$がC^1-Fréchet 微分可能とする.

radii-polynomial approach

$\tilde{x} \in X$に対して，正定数Y_0, Z_0, Z_1および非減少関数$Z_2(r)(r > 0)$が存在して，次に不等式を満たすとする．

$$
\begin{aligned}
\|AF(\tilde{x})\|_X &\le Y_0 \\
\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_0 \\
\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_1 \\
\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r) \\
\forall b &\in \overline{B(\tilde{x}, r)}
\end{aligned}
$$

radii-polynomial approach

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し，$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば，$F(\tilde{x}) = 0$を満たす解$\tilde{x}$が$b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$内に一意に存在する．

提案手法

Y_0の評価式 $\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0$ に対して，ガウスの無限次元消去法を適用する．Π_Nは射影作用素とする．

$$A = DF^{-1}, \phi := DF^{-1}F(\tilde{x})$$

$$DF\phi = F(\tilde{x})$$

$$\begin{cases} \Pi_N DF(\Pi_N\phi + (I - \Pi_N)\phi) & = \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N)DF(\Pi_N\phi + (I - \Pi_N)\phi) & = (I - \Pi_N)F(\tilde{x}) \end{cases}$$

今後の課題

- ガウスの消去法を用いたY_0の展開
- Julia を用いた，プログラムの実証