無限次元ガウスの消去法を用いた radii polynomial approach 改良

（指導教員 関根 晃太 准教授）
関根研究室 2131701 齋藤 悠希

1 はじめに

精度保証付き数値計算に関する定理の一つに，Newton-Kantorovich 型の定理を利用した radii polynomial approach がある．この定理は有限次元や無限次元を問わず, 非線形方程式や偏微分方程式など殆どの微分方程式に用いることができる．

従来の radii polynomial approach では，ノルム空間の定義に重み付き l_1 空間を用いている．重み付き l_1 空間を用いると，l_1 空間を用いた場合よりも，定理の適用できる問題が少ない．従来手法で重み付き l_1 空間を用いている要因として，計算過程に計算困難な無限次元の問題が生じるためである．

本研究では，van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を問題とし，無限次元ガウスの消去法を用いて，radii polynomial approach におけるノルム空間を l_1 空間で定義可能か検証することを目的とする．

2 radii polynomial approach [1]

定理 1 有界線形作用素 $A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$ を考え，作用素 $F : X \to Y$ が C^1-Fréchet 微分可能であるとする．また，A が単射で，$AF : X \to X$ とする．いま，$\bar{x} \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|AF(\bar{x})\|_X &\le Y_0\\
\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_0\\
\|A(DF(\bar{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_1\\
\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r)r,\\
&\forall b \in \overline{B(\bar{x}, r)}
\end{aligned}$$

が成り立つとする．このとき

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

を radii polynomial といい，もし $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在すれば，$F(\tilde{x}) = 0$ をみたす $\tilde{x}$ が $\overline{B(\tilde{x}, r_0)}$ 内に一意存在する．

3 提案手法

radii polynomial approach で用いられる作用素 A_M，$DF(x)$ を以下のように定義する．

$$DF(x) = \left[\begin{array}{c|ccc}
0 & \cdots & 1 & \cdots\\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
\partial_w f_k & \cdots & \partial_{a_j} f_k & \cdots\\
\vdots & & \vdots &
\end{array}\right]$$

また，

$$\bar{x} = (\omega,\ \underbrace{0,\cdots,0}_{M_2},\ a,\ \underbrace{0,\cdots,0}_{M_2}) \in \mathbb{C}^{2N+2M_2}$$

と定めると，A_M の定義は，以下のように定義できる．

$$A_M = \left(\begin{array}{c|ccc}
DF(\bar{x})^{-1} & 0 & \cdots & \cdots\\
\hline
0 & \lambda_N^{-1} & & 0\\
\vdots & & \lambda_{N+1}^{-1} & \\
\vdots & 0 & & \ddots
\end{array}\right)$$

定義した作用素を用いて，$\cancel{\|AF(\bar{x})\| \le Y_0}$ $DF(\bar{x})^{-1}$ の全単射性を~~計算す~~確かめる．Π_N を射影演算子とし，

$$\begin{aligned}
&\|I_{X_2} - S\|\\
&= \|\,((I - \Pi_N)\,ADF(\bar{x}))\,|_{X_2}\\
&\quad - ((I - \Pi_N)\,ADF(\bar{x}))|_{X_1}\,((\Pi_N ADF(\bar{x}))|_{X_1})^{-1}\\
&\qquad ((I - \Pi_N)ADF(\bar{x}))|_{X_2}\|\\
&< 1
\end{aligned}$$

となれば，~~ノルム空間は~~ $\cancel{l_1}$ ~~空間~~$DF(\bar{x})^{-1}$ の全単射性で~~定義可能で~~ある．

4 実験結果

実験では，フーリエ係数~~列~~の~~サイズ~~次数を変更した際のノルム値を検証した．検証結果を表 1に示す．結果より，ノルム値が 1 より小さいことがわかることから，radii polynomial approach において無限次元ガウスの消去法による計算手法が有効可能であることがわかる．

表 1　フーリエ~~サイズ~~係数の次数の変更とノルム値の比較

~~フーリエサイズ~~ 次数	$\|I_{X_2} - S\|$
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

5 おわりに

本研究では，radii polynomial approach の適用できる問題を増やすことを，無限次元ガウスの消去法を用いることで可能になるかを検証した．実験より，radii polynomial approach の定理の一部の評価式に対し，期待した結果を得ることができ，無限次元ガウスの消去法が有効であることがわかった．今後の課題として，無限次元ガウスの消去法を他の評価式を対象に適応する手法を検討する．

参考文献

[1] 舩越康太, 井藤佳奈子, 大谷俊輔, 近藤慎佑, 高橋和暉, 瀬戸翔太, 二平泰知, 高安亮紀. Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル, 2024/11/29.