(とりあえず)

$$
\begin{aligned}
&A \simeq DF^{-1} \to A = DF^{-1}\\
&\phi = DF^{-1}F(\tilde{x})\\
&DF\phi = F(\tilde{x})\\
&\begin{cases} \Pi_N DF(\Pi_N\phi + (I-\Pi_N)\phi) = \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I-\Pi_N)DF(\Pi_N DF(\Pi_N + (I-\Pi_N)\phi)) = (I-\Pi_N)F(\tilde{x}) \end{cases}\\
&||DF^-1(x)F(\tilde{x})||_X \le Y_0\\
&DF\phi = F(\tilde{x})
\end{aligned}
$$

1 無限次元ガウスの消去法

1.1 知識

定義 1 (代数的直和)**.** Banach 空間 X とする．また，X_1, X_2 を X の線形部分空間とする．ただし，X_1 と X_2 のノルムは，X のノルムと同一とする．そのとき，X が X_1 と X_2 の代数的直和であるとは

- $X = X_1 + X_2 := \{x_1 + x_2 | \ \forall x_1 \in X_1,\ \forall x_2 \in X_2\}$
- $X_1 \cap X_2 = \{0\}$

が成立することをいう．

定義 2 (射影)**.** X をノルム空間とする．定義域を X とした X 上の線形作用素 P が

$$P^2 = P$$

となるとき，線形作用素，あるいは，単に射影と呼ぶ．

定理 1. Banach 空間 X がその線形部分空間 X_1, X_2 の代数的直和であるとする．そのとき，$x \in X$ について

$$x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2$$

とし，$\mathcal{D}(P) = X$ となる X 上の線形作用素 P を

$$Px = x_1,\ (I-P)x = x_2$$

とすると，線形作用素 P と $I - P$ は射影になる．

¿

定理 2. X を Banach 空間，X_1, X_2 を X の代数的直和となる線形部分空間，$\mathcal{L}(x, y)$ を有界な線形作用素集合とする．$L \in \mathcal{L}(x, y)$ と L g P phi_1 phi_2 T B C E

¿¿

1.2 計算

radii-polynomal approach の Y_0 の評価式に，無限次元ガウスの消去法を用いる．

X, Y を Banach 空間，$\mathcal{L}(X,Y)$ を X から Y への有界線形作用素，$A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ を考え，作用素 $F : X \to Y$ が C^1-Fréchet 微分可能とする．ここで，$\tilde{x} \in X$ に対して，正定数 Y_0 が存在して，次の式を考える．

$$\|AF(\bar{x})\|_X \leq Y_0 \tag{1}$$

$A = DF(\bar{x})$ とすると，式 (1) より，

$$\|AF(\bar{x})\|_X = \|DF(\bar{x})F(\bar{x})\| \leq Y_0 \tag{2}$$

となる．$\phi := DF(\bar{x})F(\bar{x})$ とし，これを変形する．Π_N を射影演算子とすると，$DF(\bar{x})\phi = F(\bar{x})$ より，

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x})\Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \\ (I-\Pi_N)DF(\bar{x})\Pi_N & (I-\Pi_N)DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N\phi \\ (I-\Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I-\Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

となり，両辺に A をかけて

$$A\begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x})\Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \\ (I-\Pi_N)DF(\bar{x})\Pi_N & (I-\Pi_N)DF(\bar{x})(I-\Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N\phi \\ (I-\Pi_N)\phi \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I-\Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる．ここで，線形作用素 T, B, C, E それぞれに対し，

$$\begin{gathered} T := \Pi_N ADF(\bar{x})\,|_{X_1} : X_1 \to X_1, \quad B := \Pi_N ADF(\bar{x})\,|_{X_2} : X_2 \to X_2, \\ C := (I-\Pi_N)ADF(\bar{x})\,|_{X_1} : X_1 \to X_2, \quad E := (I-\Pi_N)ADF(\bar{x})\,|_{X_2} : X_2 \to X_1 \end{gathered} \tag{5}$$

と定義すると，式 (3) は以下のように変形できる．

$$\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N\phi \\ (I-\Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I-\Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

定理**??**より，線形作用素 S を

$$S := E - CT^{-1}B : X_2 \to X_2 \tag{7}$$

とする．もし，S が全単射ならば，

$$\begin{pmatrix} \Pi_N\phi \\ (I-\Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} + T^{-1}BS^{-1}CT^{-1} & -T^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CT^{-1}S^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I-\Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

となり，有限線形作用素 $ADF(\bar{x})$ は全単射となる．