タイトル

2131701 齋藤悠希

1 Preparation

1.1 Banach Space

定義 1 (線形空間の公理)**.** 空でない集合 X が，係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは，任意の $u+v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，加法 $u+v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて，任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである．

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $u+v = v+u$
3. $u+0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u+(-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

定義 2 (ノルムとノルム空間の定義)**.** X を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．X で定義された関数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{K}$ 上で定義された関数が X のノルムであるとは

1. $||u|| \geq 0, \quad u \in X$
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

が成立することである．さらに X に *1* つのノルムが指定されているとき，X はノルム空間という．

定義 3 (ノルム空間の収束と極限)**.** X をノルム空間とする．X の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } ||u_n - u|| < \epsilon$$

のとき，点 $u \in X$ に収束するといい，

$$||u_n - u|| \to 0,\ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，u を u_n の極限といい，

$$u_n - u,\ (n \to \infty)$$

と表す．

定義 4 (Cauchy 列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X が *Cauchy* 列であるとは

$$u_n - u_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$||u_n - u_m|| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

定義 5 (完備)**.** X をノルム空間とする．X が完備であるとは，任意の *Cauchy* 列 (u_n) が X の中で極限をもつことである．すなわち，任意の *Cauchy* 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \to 0\ , (n \to 0)$$

となる極限 u を X 内に持つことである．

定義 6 (Banach 空間)**.** ノルム空間 X が *Banach* 空間であるとは，X が完備であることである．

定理 1 (逆三角不等式)**.** X をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす．

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

証明. 任意の $u, v \in X$ について

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\|\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \\ \|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|\end{aligned}$$

となるため，

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ． ■

定義 7 (有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである．

定理 2 (Cauchy 列ならば有界列)**.** X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (u_n) が *Cauchy* 列ならば有界列でもある．

証明. X の点列 (u_n) が Cauchy 列であるために，$\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } ||u_n - u_m|| < \epsilon$$

を満たす．$\epsilon = 1$ としても，それに対応した N が存在し，任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす．

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す．逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\|| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる．絶対値の性質より $|\|u_n - u_N\|| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる．よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため，点列 (u_N) は有界列である． ■

定義 8 (線形部分空間)**.** 線形空間 X の空でない集合 M が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$u + v \in M$$
$$\alpha u \in M$$

を満たすとき，M は線形空間 X の線形部分空間と呼ぶ.

定義 9 (ノルム空間の開球)**.** X をノルム空間とする．$x \in X$ とし，$r > 0$ を正実数とする．そのとき，集合

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$$

を中心 x，半径 r の開球という．X が明らかな場合は $B_X(x, r)$ を省略して $B(x, r)$ と表記する．

定義 10 (ノルム空間の開集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．任意の $x \in M$ に対して，$B_X(x, r) \subset M$ となる $r > 0$ が存在する場合，M が開集合であるという．

定義 11 (ノルム空間の閉集合)**.** X をノルム空間とし，M を X の部分集合とする．M が閉集合であるとは，M の任意の点列 (u_n) の極限 $u \in X$ が M にも属することである．すなわち，点列 $(u_n) \subset M$ について

$$u_n \to u, \quad (n \to \infty) \Rightarrow u \in M$$

であるとき，M は閉集合であるという．

定義 12 (閉部分空間)**.** X をノルム空間とし，M を X の線形部分空間が閉集合であるとき，M を閉部分空間であるという．