無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

はじめに

微分方程式を計算機で解くとき,
計算機の資源が有限という特徴のために
方程式の解に誤差が発生する.

$\rightarrow$ 解の誤差を評価し，精度を保証する.

<u>精度保証付き数値計算</u>

背景 - van der Pol 方程式

van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) + x = 0$$

- 未知関数　: $x(t)$
- パラメータ : $\mu > 0$

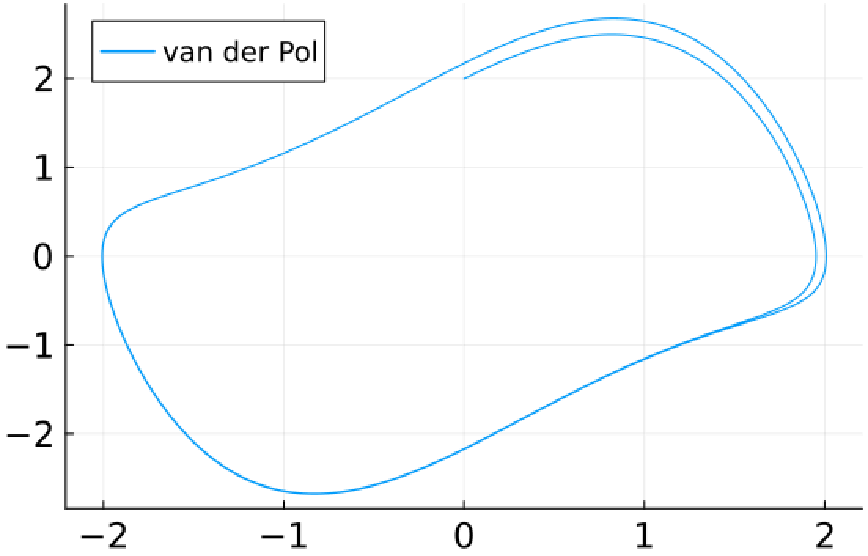


図 1: van der Pol 方程式
初期値 $(0, 2), \mu = 1.0$

背景 - 先行研究

radii-polynomial approach [1]

X, Y	Banach 空間
$\mathcal{L}(X, Y)$	$X \to Y$への 有界線形作用素の集合
$A^\dagger$	$\mathcal{L}(X, Y)$の要素
A	$\mathcal{L}(Y, X)$の要素
F	C^1-Fréchet 微分 可能な作用素

$$\begin{aligned}
\|AF(\bar{x})\|_X &\le Y_0 \\
\left\|I - AA^\dagger\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_0 \\
\left\|A\left(DF(\bar{x}) - A^\dagger\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_1 \\
\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r), \\
&\forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}
\end{aligned}$$

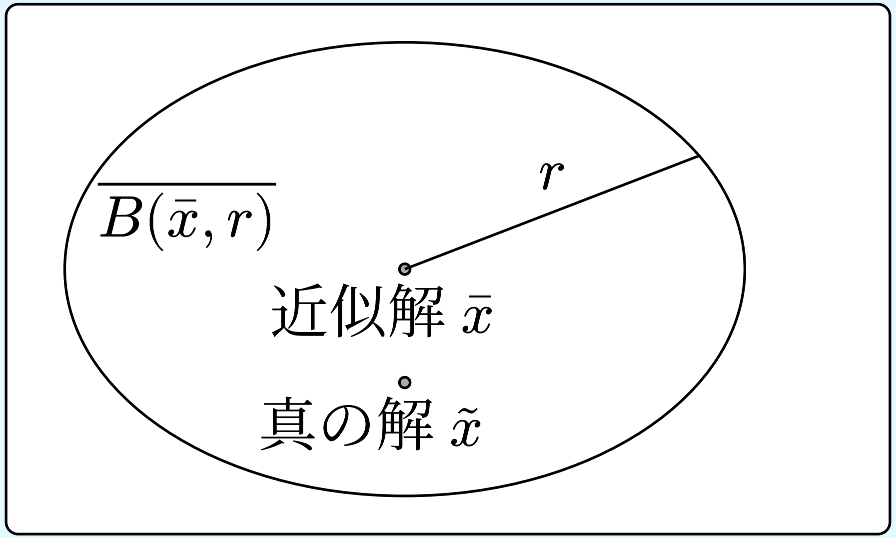
背景 - 先行研究

radii-polynomial approach [1]（続き）

radii polynomial を以下で定義する.

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

$r_0 > 0$ かつ $p(r_0) < 0$ なら,
$F(\tilde{x}) = 0$ となる解 $\tilde{x}$ が
$\overline{B(\bar{x}, r)}$ 内に一意に存在する.



参考：[1]高安亮紀, Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル

背景 - 先行研究

西窪の研究[2]では，radii-polynomial approach において作用素 A を，

「$A^\dagger$の近似逆作用素 $\to$ 真の逆作用素」とおき，

$$A \approx DF(x)^{-1} \to A = DF(x)^{-1}$$

$$AA^\dagger \approx I \to AA^\dagger = I$$

ノルムの計算を簡略化.

例）　$$\left\| A\big(DF(\bar{x}) - A^\dagger\big) \right\| \leq Z_1 \Rightarrow \| ADF(\bar{x}) - I \| \leq Z_1$$

$\to$ 精度は大きく低下しない，計算時間は短縮

参考：[2]西窪壱華, radii-polynomial approach における零点探索手順の削除

既存手法と問題点

ノルムの計算に，重み付き l^1 ノルムを定義.

重み付きl^1ノルム（既存手法）
$$\|a\|_\omega := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lvert a_k \rvert \omega_k < \infty$$

l^1ノルム（l^1空間）
$$\|a\| := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lvert a_k \rvert < \infty$$

重み付き l^1 ノルムでは，ω_kがあるため，aの条件が厳しくなる.

$\rightarrow$ 精度保証できる条件が限られる.

$\rightarrow$ l_1空間を使うことで，条件を緩和できる.

目的

重みを外した l_1 空間上で計算することで,

radii-polynomial approach の適用できる問題の範囲を大きくする

提案手法 - 概要

精度保証するために，$\|DF(\bar{x})F(\tilde{x})\|$を計算しなければならない．

$\downarrow$

l^1空間上で，$DF(\bar{x})$は全単射でなければならない．

$\downarrow$

無限次元ガウスの消去法[3]を用いて，$DF(\bar{x})$が全単射であるか確かめる．

参考：[3]Kouta Sekine, Mitsuhiro T. Nakao, and Shin'ichi Oishi:, "Numerical verification methods for a system of elliptic PDEs, and their software library"

提案手法 - 無限次元ガウスの消去法

$\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$とおくと,

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

両辺に作用素Aを掛け,

$$ADF(\bar{x})\phi = AF(\tilde{x})$$

提案手法 - 無限次元ガウスの消去法

射影演算子Π_Nより，以下の作用素を定義する．

$$
\begin{aligned}
T &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_1, & B &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_1, \\
C &:= (I - \Pi_N) ADF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_2, & E &:= (I - \Pi_N) ADF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_2
\end{aligned}
$$

$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$は，作用素の定義より，以下に変形できる．

$$
\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N AF(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) AF(\tilde{x}) \end{pmatrix}
$$

提案手法 - 無限次元ガウスの消去法

S を以下のように定義し，A と $DF(\bar{x})$ から求められる.

$$
\begin{aligned}
S &:= E - CT^{-1}B \\
&= (I - \Pi_N)ADF(\bar{x}) - ((I - \Pi_N)ADF(\bar{x}))(\Pi_N ADF(\bar{x}))^{-1}(\Pi_N ADF(\bar{x}))
\end{aligned}
$$

$$\left\| I_{X_2} - S \right\| < 1$$

となれば，S は全単射となる.

T^-1が存在することを確認し，

S が全単射であれば,$DF(\bar{x})$ が全単射となる

実行環境

表 1: 実験環境

環境	詳細
CPU	12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700
OS	Ubuntu 24.04.1 LTS
コンパイラ	Julia 1.11.2
微分方程式解答ライブラリ	DifferentialEquations v7.10.0
数値計算ライブラリ	IntervalArithmetic v0.20.9

実験結果

表 2: フーリエ係数の次数の変更による$\left\| I_{X_2} - S \right\|$の比較

次数	$\left\| I_{X_2} - S \right\|$
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

- すべての次数条件において，$\left\| I_{X_2} - S \right\| < 1$ を満たした.
- 次数が上がるにつれ，ノルム値が減少.

まとめ

- 無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良方法を提案した
- 数値実験での検証により，l_1空間上で$DF(\bar{x})$が全単射であることがわかった

$\to$ 提案方法で改良可能であることがわかった