# タイトル

2131701 齋藤悠希

## 1 Banach Space

**定義 1** (線形空間の公理)**.** 空でない集合 $X$ が，係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは，任意の $u+v \in X$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，加法 $u+v \in X$ とスカラー乗法 $\alpha u \in X$ が定義されていて，任意の $u, v, w \in X$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して次のことが成り立つことである．

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $u+v = v+u$
3. $u+0 = u$ となる $0 \in X$ が一意に存在
4. $u+(-u) = 0$ となる $-u \in X$ が一意に存在
5. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
6. $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
8. $1u = u, 1 \in \mathbb{K}$

**定義 2** (ノルムとノルム空間の定義)**.** $X$ を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．$X$ で定義された関数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{K}$ 上で定義された関数が $X$ のノルムであるとは

1. $||u|| \geq 0, \quad u \in X$
2. $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $||\alpha u|| = |\alpha|||u||, \quad (\alpha \in \mathbb{K}, u \in X)$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

が成立することである．さらに $X$ に *1* つのノルムが指定されているとき，$X$ はノルム空間という．

**定義 3** (ノルム空間の収束と極限)**.** $X$ をノルム空間とする．$X$ の点列 $(u_n) \subset X$ は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \geq N \text{ に対して } ||u_n - u|| < \epsilon$$

のとき，点 $u \in X$ に収束するといい，

$$||u_n - u|| \to 0,\ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，$u$ を $u_n$ の極限といい，

$$u_n - u,\ (n \to \infty)$$

と表す．

**定義 4** (Cauchy 列)**.** $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ が *Cauchy* 列であるとは

$$u_n - u_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$||u_n - u_m|| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

**定義 5** (完備)**.** $X$ をノルム空間とする．$X$ が完備であるとは，任意の *Cauchy* 列 $(u_n)$ が $X$ の中で極限をもつことである．すなわち，任意の *Cauchy* 列 $(u_n \subset X)$ が

$$\|u_n - u\| \to 0\ ,(n \to 0)$$

となる極限 $u$ を $X$ 内に持つことである．

**定義 6** (Banach 空間)**.** ノルム空間 $X$ が *Banach* 空間であるとは，$X$ が完備であることである．

**定理 1** (逆三角不等式)**.** $X$ をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ について次の不等式を満たす．

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

**証明．** 任意の $u, v \in X$ について

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\| \end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \|u\| - \|v\| &\leq \|u - v\| \\ \|v\| - \|u\| &\leq \|u - v\| \end{aligned}$$

となるため，

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$$

を持つ． ■

**定義 7** (有界列)**.** $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ の点列 $(u_n)$ が有界列とは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u_n\| \leq M$$

となる定数 $M > 0$ が存在することである．

**定理 2** (Cauchy 列ならば有界列)**.** $X$ をノルム空間とする．そのとき $X$ の点列 $(u_n)$ が *Cauchy* 列ならば有界列でもある．

**証明．** $X$ の点列 $(u_n)$ が Cauchy 列であるために，$\epsilon - N$ 論法を用いた表記で

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \text{ に対して } ||u_n - u_m|| < \epsilon$$

を満たす．$\epsilon = 1$ としても，それに対応した $N$ が存在し，任意の $n \geq N$ に対して

$$\|u_n - u_N\| < 1$$

を満たす．

任意の $n \geq N$ に対して $\|u_n\|$ が $\|u_N\|$ で評価できることを示す．逆三角不等式である定理 1 を用いると

$$|\|u_n\| - \|u_N\| \leq \|u_n - u_N\| < 1$$

となる．絶対値の性質より $|\|u_n - u_N\|| < 1$ は

$$\|u_N\| - 1 \leq \|u_n\| < \|u_N\| + 1$$

となる．よって

$$M = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1\}$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\|u_n\| \leq M$$

が成り立つため，点列 $(u_N)$ は有界列である． ■

**定義 8** (線形部分空間)**.** 線形空間 $X$ の空でない集合 $M$ が任意の元 $u, v \in M$ と任意の係数体 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} u + v &\in M \\ \alpha u &\in M \end{aligned}$$

を満たすとき，$M$ は線形空間 $X$ の線形部分空間と呼ぶ.