

無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

1. 背景と目的

非線形微分方程式は，さまざまな現象を数学モデル化することができる．この非線形微分方程式を解くことで，数学モデルの現象の解析を行うことができる．radii-polynomial approach は，非線形方程式の解の精度保証付き数値計算に関する定理である．

以下に，radii-polynomial approach の定理を書く．

X, Y を Banach 空間， $\mathcal{L}(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素の集合とする．有界線形作用素 $A^\dagger \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ を考え，作用素 $F: X \rightarrow Y$ が C^1 -Fréchet 微分可能とする．いま， $\tilde{x} \in X$ に対して，正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および非減少関数 $Z_2(r) (r > 0)$ が存在して，次に不等式を満たすとする．

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (1)$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0 \quad (2)$$

$$\|A(DF(\tilde{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1 \quad (3)$$

$$\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r) \quad (4)$$
$$\forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \quad (5)$$

これに対し， $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば， $F(\tilde{x}) = 0$ を満たす解 \tilde{x} が $b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$ 内に一意に存在する．

ここで， $DF(\bar{x})$ を F の \bar{x} における Fréchet 微分， A^\dagger を $DF(\bar{x})$ の近似， A を A^\dagger の近似左逆作用素 ($AA^\dagger \approx I$) とする．

2. 提案手法

有限次元での非線形方程式の精度保証をする radii-polynomial approach での作用素 A は，作用素 A^\dagger の近似逆作用素である．無限次元上の場合， A は真の逆作用素となる． $A = DF(\bar{x})^{-1}$ より，式(1)は以下になる．

$$\|DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (6)$$

ここで， $\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$ とし，式(6)を以下のように変形して，ガウスの消去法を適用する． Π_N は射影作用素とする．

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x}) \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF \Pi_N & \Pi_N DF(I - \Pi_N)\phi \\ (I - \Pi_N)DF \Pi_N & (I - \Pi_N)DF \Pi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\tilde{x}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

3. 今後の課題

提案手法で提示した式(8)のガウスの消去法による展開や，Julia を用いたプログラムの実証を行う．

参考文献

- [1] 高安亮紀，Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル