radii polynomial approach における無限次元ガウスの消去法

（指導教員　関根 晃汰　准教授）
関根研究室　2131701 齋藤 悠希

1. 研究背景と目的

微分方程式の解の精度保証付き数値計算では，Newton 法の半局所的収束定理を精度保証付き数値計算に利用した Newton-Kantorovich 定理がある．この定理は，連立一次方程式や非線形方程式，偏微分方程式などほとんどの微分方程式に用いることができる．しかし，十分条件が厳しく非線形作用素の解を求める必要があり，数値計算に多くの手間がかかる．

本研究では，Newton-Kantorovich 型定理の一部を変更し，数値計算を減らすとともに，既存手法との精度比較を行うことを目的とする．

2. Newton-Kantorovich の定理

X, Yを Banach 空間，$\mathcal{L}(X,Y)$をXからYへの有界線形作用素の集合とする．有界線形作用素$A^\dagger \in \mathcal{L}(X,Y), A \in \mathcal{L}(Y,X)$を考え，作用素$F: X \to Y$が$C^1$-Fréchet 微分可能とする．いま，$\tilde{x} \in X$に対して，正定数$Y_0, Z_0, Z_1$および非減少関数$Z_2(r)(r>0)$が存在して，次に不等式を満たすとする．

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \le Y_0 \tag{1}$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0 \tag{2}$$

$$\|A\big(DF(\tilde{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} &\le Z_2(r) \\ \text{for all } b &\in \overline{B(\tilde{x}, r)} \end{aligned} \tag{4}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \tag{5}$$

これに対し，$p(r_0) < 0$となる$r_0 > 0$が存在するならば，$F(\tilde{x}) = 0$を満たす解$\tilde{x}$が$b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$内に一意に存在する．

Newton-Kantorovich 型定理を利用する数値検証の際には，$DF(\tilde{x})$をFの$\tilde{x}$におけるFréchet 微分，$A^\dagger$を$DF(\tilde{x})$の近似，Aを$A^\dagger$の近似左逆作用素とする($AA^\dagger \approx I$)とするのが一般的である．

3. 提案手法

4. 今後の課題

参考文献

[1] 某 ZR．メッチャすごい論文，2020.
[2] 某 ZR．メッチャすごい本，2022.