

無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

背景

radii polynomial approach 非線形方程式の解の精度保証に使われる定理

$\tilde{x} \in X$ に対して、正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および、非減少関数 $Z_2(r)(r > 0)$ が存在して、次の式を満たすとする.

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0$$

$$\|A(DF(\tilde{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1$$

$$\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r), \quad \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

背景

このとき, radii polynomial を以下で定義する.

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、 $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば、 $F(\tilde{x}) = 0$ を満たす解 \tilde{x} が $b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$ 内に一意に存在する.

目的

既存手法と提案手法の比較

| | 計算 | 精度 |
|------|-----------------|----|
| 既存手法 | 簡略化 | 悪い |
| 提案手法 | 無限次元ガウスの 消去法 | 良い |

簡略化部分を、無限次元ガウスの消去法で計算する

→ 精度を改善する

提案手法

radii-polynomial approach の一部, Y_0 の評価式

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0$$

に対して, 無限次元ガウスの消去法を適用する.

$$A = DF(\bar{x})^{-1}, \quad \phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x}) \text{ より}$$

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x}) \Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x}) (I - \Pi_N) \\ (I - \Pi_N) DF(\bar{x}) \Pi_N & (I - \Pi_N) DF(\bar{x}) (I - \Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N) \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) F(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

今後の課題

- 無限次元ガウスの消去法を用いた Y_0 の展開
- Julia を用いたプログラムの実証