無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室　2131701　齋藤 悠希

はじめに

radii-polynomial approach 非線形方程式の解の精度保証に使われる定理

radii-polynomial approach

$\tilde{x} \in X$ に対して、正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および、非減少関数 $Z_2(r)(r > 0)$ が存在して、次の式を満たすとする.

radii-polynomial approach（続き）

$$\|AF(\bar{x})\|_X \le Y_0$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_0$$

$$\|A\big(DF(\bar{x}) - A^\dagger\big)\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_1$$

$$\|A(DF(b) - DF(\bar{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \le Z_2(r),\ \ \forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

このとき，radii polynomial を以下で定義する．

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0$$

これに対し、$p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば、$F(\tilde{x}) = 0$ を満たす解 $\tilde{x}$ が $\overline{B(\bar{x}, r)}$ 内に一意に存在する．

既存手法

既存手法では，**重み付き**l_1**空間**を用いて Banach 空間を定義.

重み付きl_1空間

重み $\omega_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ としたとき,

$$l_\omega^1 := \left\{ a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} : a_k \in \mathbb{C}, \|a\|_\omega := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\omega_k < \infty \right\}$$

既存手法

計算で無限次元作用素が生じる
$\rightarrow$ 有限で打ち切り，重み ω_k で修正

問題点

重み付き l_1 空間ではノルム値が大きくなる．
$\rightarrow$ 定理を適用できる問題が少ない

目的

radii-polynomial approach を使って
精度保証付き数値計算できる問題を増やすために,
無限次元ガウスの消去法を用いた計算が可能か検証する

提案手法

扱う問題を van der Pol 方程式とし，フーリエ・スペクトル法で求めた近似周期解をもとに，常微分方程式の精度保証をする

van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) + x = 0$$

未知関数は$x(t)$，$\mu > 0$は非線形の減衰の強さを表すパラメータである．

提案手法

1. $DF(x)$とA_Mを定義する．

ヤコビ行列$DF(x)$

近似周期解(ω, a)より， $x = \left(\omega, \underbrace{0, \cdots, 0}_{M}, a, \underbrace{0, \cdots, 0}_{M}\right)$ と定め,

$$DF(x) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \partial_\omega f_k & \cdots & \partial_{a_j} f_k & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}\right]$$

提案手法

作用素A_M

$$\bar{x} = \left(\omega, \underbrace{0, \cdots, 0}_{M}, a, \underbrace{0, \cdots, 0}_{M}\right) \text{と定め,}$$

$$A_M = \left[\begin{array}{c|ccc} DF(\bar{x})^{-1} & 0 & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & \lambda_N^{-1} & & 0 \\ \vdots & & \lambda_{N+1}^{-1} & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{array}\right], \quad (\lambda_k := -k^2\omega^2 - i\mu k\omega + 1)$$

提案手法

2. $DF(\bar{x})^{-1}$の全単射性を，無限次元ガウスの消去法を用いて確かめる．

$\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$とおくと，

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$$

ここで，射影演算子Π_Nと作用素A_Mより，以下の作用素を定義する．

$$T := \Pi_N A_M DF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_1, \qquad B := \Pi_N A_M DF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_1,$$
$$C := (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x})|_{X_1} : X_1 \to X_2, \quad E := (I - \Pi_N) A_M DF(\bar{x})|_{X_2} : X_2 \to X_2$$

提案手法

$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x})$は，作用素の定義より，以下に変形できる．

$$\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N A_M F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) A_M F(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$S := D - CT^{-1}B$ としたとき，

$$\left\| I_{X_2} - S \right\| < 1$$

となれば，Sは全単射となる．

提案手法

$$
\begin{aligned}
S &:= D - CT^{-1}B \\
&= (I - \Pi_N)A_M DF(\bar{x}) - ((I - \Pi_N)A_M DF(\bar{x})) \\
&\quad (\Pi_N A_M DF(\bar{x}))^{-1}(\Pi_N A_M DF(\bar{x}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_M DF(\bar{x}) &= \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} T & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} T^{-1}T & T^{-1}M_{12} \\ \lambda M_{21} & \lambda M_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & B \\ C & E \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

実験結果

表 1: フーリエ係数の次数の変化による$\left\| I_{X_2} - S \right\|$の比較

次数	$\left\| I_{X_2} - S \right\|$
50	0.22815114629236252
100	0.11455533660051737
150	0.07655718822651922
200	0.05749210273025131

まとめ

- 無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良手法を提案した
- 数値実験での検証により，提案手法で改良可能であることが確かめられた．