

無限次元ガウスの消去法を用いた radii-polynomial approach の改良

関根研究室 2131701 齋藤 悠希

1. 背景と目的

非線形微分方程式は、さまざまな現象を数学モデル化することができる。この非線形微分方程式を解くことで、数学モデルの現象の解析を行うことができる。非線形微分方程式の解の導出には計算機が用いられるが、有限次元として問題を解くと、導出された解と実際の解には誤差が生じる。そのため、解の導出の精度を保証するために、無限次元で考えられる精度保証付き数値計算が必要となる。

非線形微分方程式の精度保証付き数値計算の手法の一つに、radii-polynomial approach がある。この定理は、有限次元に落とし込んだ本研究では、解の保証精度の性能向上のために、radii-polynomial approach 無限次元ガウスの消去法を用いた改良手法を提案する。

2. radii-polynomial approach

X, Y を Banach 空間、 $\mathcal{L}(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素の集合とする。有界線形作用素 $A^\dagger \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ を考え、作用素 $F : X \rightarrow Y$ が C^1 -Fréchet 微分可能とする。いま、 $\tilde{x} \in X$ に対して、正定数 Y_0, Z_0, Z_1 および非減少関数 $Z_2(r) (r > 0)$ が存在して、次に不等式を満たすとする。

$$\|AF(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (1)$$

$$\|I - AA^\dagger\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_0 \quad (2)$$

$$\|A(DF(\tilde{x}) - A^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_1 \quad (3)$$

$$\|A(DF(b) - DF(\tilde{x}))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Z_2(r) \quad (4)$$
$$\forall b \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$$

このとき、radii polynomial を以下で定義する。

$$p(r) := Z_2(r)r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0 \quad (5)$$

これに対し、 $p(r_0) < 0$ となる $r_0 > 0$ が存在するならば、 $F(\tilde{x}) = 0$ を満たす解 \tilde{b} が $\tilde{b} \in \overline{B(\tilde{x}, r)}$ 内に一意に存在する。

ここで、 $DF(\bar{x})$ を F の \bar{x} における Fréchet 微分、 A^\dagger を $DF(\bar{x})$ の近似、 A を A^\dagger の近似左逆作用素 ($AA^\dagger \approx I$) とする。

3. 提案手法

有限次元での非線形方程式の精度保証をする radii-polynomial approach での作用素 A は、作用素 A^\dagger の近似逆作用素である。無限次元上の場合、 A は真の逆作用素となる。 $A = DF(\bar{x})^{-1}$ より、式(1) は以下になる。

$$\|DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})\|_X \leq Y_0 \quad (6)$$

ここで、 $\phi := DF(\bar{x})^{-1}F(\tilde{x})$ とし、式(6) を以下のように変形して、ガウスの消去法を適用する。 Π_N は射影作用素とする。

$$DF(\bar{x})\phi = F(\tilde{x}) \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF \Pi_N & \Pi_N DF(I - \Pi_N)\phi \\ (I - \Pi_N) DF \Pi_N & (I - \Pi_N) DF \Pi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N) F(\tilde{x}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

4. 今後の課題

提案手法で提示した式(8) のガウスの消去法による展開や、Julia を用いたプログラムの実証を行う。

参考文献

- [1] 高安亮紀, Julia 言語を使った精度保証付き数値計算のチュートリアル