

(とりあえず)

$$A \simeq DF^{-1} \rightarrow A = DF^{-1}$$

$$\phi = DF^{-1}F(\tilde{x})$$

$$DF\phi = F(\tilde{x})$$

$$\begin{cases} \Pi_N DF(\Pi_N \phi + (I - \Pi_N)\phi) = \Pi_N F(\tilde{x}) \\ (I - \Pi_N)DF(\Pi_N DF(\Pi_N + (I - \Pi_N)\phi)) = (I - \Pi_N)F(\tilde{x}) \end{cases}$$

$$\|DF^{-1}(x)F(\tilde{x})\|_X \leq Y_0$$

$$DF\phi = F(\tilde{x})$$

1 無限次元ガウスの消去法

1.1 知識

定義 1 (代数的直和). Banach 空間 X とする. また, X_1, X_2 を X の線形部分空間とする. ただし, X_1 と X_2 のノルムは, X のノルムと同一とする. そのとき, X が X_1 と X_2 の代数的直和であるとは

- $X = X_1 + X_2 := \{x_1 + x_2 \mid \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2\}$
- $X_1 \cap X_2 = \{0\}$

が成立することをいう.

定義 2 (射影). X をノルム空間とする. 定義域を X とした X 上の線形作用素 P が

$$P^2 = P$$

となるとき, 線形作用素, あるいは, 単に射影と呼ぶ.

定理 1. Banach 空間 X がその線形部分空間 X_1, X_2 の代数的直和であるとする. そのとき, $x \in X$ について

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2$$

とし, $\mathcal{D}(P) = X$ となる X 上の線形作用素 P を

$$Px = x_1, \quad (I - P)x = x_2$$

とすると, 線形作用素 P と $I - P$ は射影になる.

い

定理 2. X を Banach 空間, X_1, X_2 を X の代数的直和となる線形部分空間, $\mathcal{L}(x, y)$ を有界な線形作用素集合とする. $L \in \mathcal{L}(x, y)$ と $L \in \mathcal{P} \phi_1 \phi_2 T B C E$

ii

1.2 計算

radii-polynomial approach の Y_0 の評価式に、無限次元ガウスの消去法を用いる.

X, Y を Banach 空間, $\mathcal{L}(X, Y)$ を X から Y への有界線形作用素 $A^\dagger \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ を考え, 作用素 $F: X \rightarrow Y$ が C^1 -Fréchet 微分可能とする. ここで, $\bar{x} \in X$ に対して, 正定数 Y_0 が存在して, 次の式を考える.

$$\|AF(\bar{x})\|_X \leq Y_0 \quad (1)$$

$A = DF(\bar{x})$ とすると, 式 (1) より,

$$\|AF(\bar{x})\|_X = \|DF(\bar{x})F(\bar{x})\| \leq Y_0 \quad (2)$$

となる. $\phi := DF(\bar{x})F(\bar{x})$ とし, これを変形する. Π_N を射影演算子とすると, $DF(\bar{x})\phi = F(\bar{x})$ より,

$$\begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x})\Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x})(I - \Pi_N) \\ (I - \Pi_N)DF(\bar{x})\Pi_N & (I - \Pi_N)DF(\bar{x})(I - \Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

となり, 両辺に A をかけて

$$A \begin{pmatrix} \Pi_N DF(\bar{x})\Pi_N & \Pi_N DF(\bar{x})(I - \Pi_N) \\ (I - \Pi_N)DF(\bar{x})\Pi_N & (I - \Pi_N)DF(\bar{x})(I - \Pi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる. ここで, 線形作用素 T, B, C, E それぞれに対し,

$$\begin{aligned} T &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_1, & B &:= \Pi_N ADF(\bar{x})|_{X_2}: X_2 \rightarrow X_2, \\ C &:= (I - \Pi_N)ADF(\bar{x})|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_2, & E &:= (I - \Pi_N)ADF(\bar{x})|_{X_2}: X_2 \rightarrow X_1 \end{aligned} \quad (5)$$

と定義すると, 式 (3) は以下のように変形できる.

$$\begin{pmatrix} T & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

定理??より, 線形作用素 S を

$$S := E - CT^{-1}B: X_2 \rightarrow X_2 \quad (7)$$

とする. もし, S が全単射ならば,

$$\begin{pmatrix} \Pi_N \phi \\ (I - \Pi_N)\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} + T^{-1}BS^{-1}CT^{-1} & -T^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CT^{-1}S^{-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_N F(\bar{x}) \\ (I - \Pi_N)F(\bar{x}) \end{pmatrix}$$