2014 微分方程式

1

(1) $\frac{dy}{dx} = xe^{-x}(y+1)^2$

$\frac{1}{(y+1)^2}dy = xe^{-x}dx$

両辺を積分すると

$\int (y+1)^{-2}dy = \int xe^{-x}dx$

$-(y+1)^{-1} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$

$-(y+1)^{-1} = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

$(y+1)^{-1} = xe^{-x} + e^{-x} + c$

$\underline{\frac{1}{y+1} = \frac{x+1}{e^x} + c}$ // (cは定数)

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + a = 0$ より $\lambda = \pm\sqrt{a}i$ なので

一般解 $y = \underline{C_1 \cos\sqrt{a}x + C_2 \sin\sqrt{a}x}$ //

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x^2 + x$

特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ より $\lambda = 0, -2$

よって1つの解 $y_0 = C_1 + C_2e^{-2x}$

特殊解 $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ とすると

$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y'' = 6Ax + 2B$

$y'' + 2y' = x^2 + x$ に代入すると

$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + x$

$$\begin{cases} 6A = 1 & A = \frac{1}{6} \\ 6A + 4B = 1 & B = 0 \\ 2B + 2C = 0 & C = 0 \end{cases}$$

よって一般解 $\underline{y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3}$ // (C_1, C_2は定数)