

| | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験 問題用紙 | |
| 対 象 | 機械科学専攻, 電子情報科学専攻, 環境デザイン学専攻 |
| 試験科目名 | 数 学 P. 1 / 1 |

2015 年 8 月 25 日 (火) 10:00 - 11:00

[注意] 1. 問題 [1], [2], [3], [4] のうち, 2 題を選択して解答すること.

2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙の表に書くこと.

[1] (1) 次の微分方程式を解け.

(a) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 10x$

(b) $(x-1)(y^2-9)dx - (x^2+1)(y+2)dy = 0$

(2) 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{6}{x^2} y = 0$ を考える.

(a) $y = x^m$ がこの微分方程式の解となる様な m をすべて求めよ.

(b) (a) で求めた解が 1 次独立であることを示せ.

[2] ベクトル場 $A = (x(y-z) + z^2, y(z-x) + x^2, z(x-y) + y^2)$ と 2 つの曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ と $D: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{div} A$ と $\operatorname{rot} A$ を求めよ.

(2) S と D , それぞれの単位法線ベクトルで z 成分が正であるものを求めよ.

(3) 面積分 $\iint_S A \cdot n dS$ の値を求めよ. ただし, n は (2) で求めた S 上の単位法線ベクトルとする.

[3] 次の問いに答えよ.

(1) 積分

$$\int_C \frac{(z+1)^{2n}}{z^n} dz \quad (n \geq 1)$$

の値を求めよ. ここで, C は正の向きを持つ原点 O を囲む単純閉曲線である.

(2) 積分

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta + a} \quad (a > 1)$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

の値を求めよ. 必要であれば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて良い.

[4] $t \geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ に対するラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

とする.

(1) 微分公式 $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2 \mathcal{L}[f(t)](s) - sf(+0) - f'(+0)$ を示せ. ただし, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f'(t) = 0$ とする.

(2) $\mathcal{L}[t](s)$ ($s > 0$) と $\mathcal{L}[\sinh at](s)$ ($s > |a|$) を求めよ. ただし, $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ ($a \in \mathbb{R}$) である.

(3) 微分方程式の初期値問題

$$x''(t) - a^2 x(t) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

をラプラス変換の方法を用いて解け. ただし, $a > 0$ とする.