H15

3

(1) $f(z) = \left(\frac{z}{z^2+1}\right)^2$

$$= \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

特異点は $z=\pm i$ で
ともに 2位の極

$$Res[i] = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+i}\right)^2 = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$$

$$Res[-i] = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-i}\right)^2 = -\frac{1}{4i} = \frac{1}{4}i$$

(2) $z = Re^{i\theta}$

$dz = iRe^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2}\cdot iRe^{i\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{iR^3e^{i3\theta}}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2}\,d\theta$$

$$|zf(z)| = \left|\frac{z^3}{z^4+2z^2+1}\right|$$

$R\to\infty$ のとき $|zf(z)|\to 0$ なので

ジョルダンの補助定理より.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

(3) 半径 R の上半円と $-R<x<R$ の実軸で囲まれた経路を C とすると

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

偶関数だから

$$= 0 + 2\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$$

ここで C 内にある $f(z)$ の特異点は $z=i$

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,Res[i] = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}$$