金沢大学大学院自然科学研究科	博士前期課程入学試験 問題用紙
対　象	電子情報工学専攻, 機能機械科学専攻, 人間・機械科学専攻, 社会基盤工学専攻
試験科目名	数　　学	P. 1 / 1

2011 年 8 月 22 日（月）10:00 - 11:00

[注意] 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち，２題を選択して解答すること．
2. 解答は各題ごとに分けて，１題を１枚の答案用紙の表に書くこと．

1 次の微分方程式を解け．

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = e^{y^2+x}$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\log x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 4x + 3e^x$

2 a, b を正の定数とする．曲面 $S : \boldsymbol{r}(\theta, t) = (a(1-t)\cos\theta, b(1-t)\sin\theta, t)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq 1$ とベクトル場 $\boldsymbol{A} = (z-y, x-z, y-x)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 曲線 $C : \boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対して $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(3) S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{n}$ の z 成分は正とする．

(4) $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．

3 定数 a $(a > 1)$ に対して，$f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-a)(az-1)}$ とおく．

(1) $f(z)$ の特異点とそこでの留数を求めよ．

(2) 実積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta$ は変換 $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ によって，複素積分 $\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ と表されることを示せ．

(3) 積分 I を求めよ．

4 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos t| e^{-st}\, dt$ を求めよ．

(2) $|\cos t| = |\cos(t+\pi)|$ を用いて，ラプラス変換 $\mathcal{L}\big[|\cos t|\big] = \displaystyle\int_0^{\infty} |\cos t| e^{-st}\, dt$ を計算せよ．

2012 数学

1

(1) $y\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^{y^2}$

$ye^{-y^2}dy=e^x dx$

$\int ye^{-y^2}dy=\int e^x dx$

$-\frac{1}{2}e^{-y^2}=e^x+C$

$\underline{e^{-y^2}=-2e^x+C}$ //

$\int ye^{-y^2}dy=\int y\cdot\frac{1}{-2y}(e^{-y^2})'dy$

$=-\frac{1}{2}\int(e^{-y^2})'dy$

$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}+C$

(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\log x$

$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\log x\,dx+C\right)$

$=e^{\log x^{-1}}\left(\int e^{\log x}\log x\,dx+C\right)$

$=\frac{1}{x}\left(\int x\log x\,dx+C\right)$

$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C\right)$

$\underline{y=\frac{1}{2}x\log x-\frac{1}{4}x+\frac{C}{x}}$ //

$\int x\log x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C$

$(xe^x)'=e^x+xe^x$

$=e^x(1+x)$

$(xe^x)''=e^x(1+x)+e^x$

$=e^x(2+x)$

(3) $(D^2+D-2)y=x$

$(D+2)(D-1)y=x$

一般解を y_1 とすると、

$y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^x$

特殊解を $y_2=Ax+B$ とおき、

与式に代入すると

$A-2(Ax+B)=x$

$\begin{cases}-2A=1\\A-2B=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{4}\end{cases}$

以上より、与式の解は、

$\underline{y=C_1e^{-2x}+C_2e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$ //

(4) $(D^2+D-2)y=4x+3e^x$

特殊解を $y_2=Ax+B+Cxe^x$ とおき、

与式に代入すると

$C(2+x)e^x+A+C(1+x)e^x-2(Ax+B+Cxe^x)=4x+3e^x$

$\begin{cases}-2A=4\\A-2B=0\\3C=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=-1\\C=1\end{cases}$

以上より、与式の解は

$\underline{y=C_1e^{-2x}+C_2e^x-2x-1+xe^x}$ //

[2]

(1) $\mathrm{rot}\, A = (1-(-1),\ 1-(-1),\ 1-(-1))$
$= (2, 2, 2)$

(2) $\dfrac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-a\sin\theta,\ h\cos\theta,\ 0)$

$$\int_C A \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-h\sin\theta,\ a\cos\theta,\ h\sin\theta - a\cos\theta)(-a\sin\theta,\ h\cos\theta,\ 0)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} ah\sin^2\theta + ah\cos^2\theta\ d\theta$$
$$= ah\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi ah$$

(3) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (a(t-1)\sin\theta,\ h(1-t)\cos\theta,\ 0)$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (-a\cos\theta,\ -h\sin\theta,\ 1)$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (h(1-t)\cos\theta,\ a(1-t)\sin\theta,\ -ah(t-1)\sin^2\theta + ah(1-t)\cos^2\theta)$$
$$= (h(1-t)\cos\theta,\ a(1-t)\sin\theta,\ ah(1-t))$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| = \sqrt{h^2(1-t)^2\cos^2\theta + a^2(1-t)^2\sin^2\theta + a^2h^2(1-t)^2}$$
$$= (1-t)\sqrt{h^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + a^2h^2}$$

以上より、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{h^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + a^2h^2}}(h\cos\theta,\ a\sin\theta,\ ah)$$

(4) ストークスの定理より、

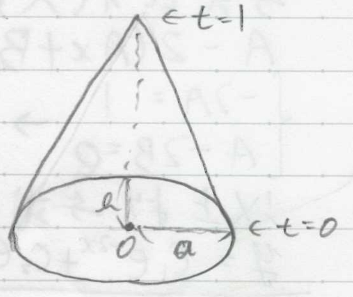
$$\iint_S \mathrm{rot}\, A \cdot \mathbf{n}\, dS$$
$$= \int_C A \cdot d\mathbf{r} \quad (\mathbf{r} = S(t=0))$$

(2)の結果より、

(与式) $= 2\pi ah$

Tips

ガウスの発散定理はSは閉曲面である必要があるが、ストークスの定理はその必要はない。



Date 2024 7.16

2012 数学

3

(1) $\mathrm{Res}[0] = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{(z-a)(az-1)} = \underline{\frac{1}{a}}$ //

$\mathrm{Res}[a] = \lim_{z\to a} \frac{z^2+1}{z(az-1)} = \underline{\frac{a^2+1}{a(a^2-1)}}$ //

$\mathrm{Res}[\frac{1}{a}] = \lim_{z\to \frac{1}{a}} \frac{z^2+1}{z(z-a)a} = \frac{\frac{1+a^2}{a^2}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1-a^2}{a}\cdot a} = \frac{\frac{1+a^2}{a^2}}{\frac{1-a^2}{a}} = \underline{\frac{1+a^2}{a(1-a^2)}}$ //

(2) $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} \Longleftrightarrow d\theta = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{z}dz$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & -a & \to & -a^2 \\
a & -1 & \to & -1 \\
\hline
a & a & & -1-a^2
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{1-2a\cdot\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+a^2}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{z}dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2+1}{z-a(z^2+1)+a^2z}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{z}dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2+1}{z\{z-a(z^2+1)+a^2z\}}dz \\
&= \int_{|z|=1} -\frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2+1}{z\{a(z^2+1)-z-a^2z\}}dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{i}{2}\cdot\frac{z^2+1}{z\{az^2-(1+a^2)z+a\}}dz
\end{aligned}
$$

$\underline{I = \frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z-a)(az-1)}dz}$ //

(3) 留数定理より,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}i\cdot 2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}[0]+\mathrm{Res}[\tfrac{1}{a}]\right) \\
&= -\pi\left(\frac{1}{a}+\frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\right) \\
&= -\pi\cdot\frac{1-a^2+1+a^2}{a(1-a^2)} \\
&= \underline{\frac{2\pi}{a(a^2-1)}}
\end{aligned}
$$ //

No.

Date

平成24年度・平成23年度（10月期） 金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験 問 題 用 紙		
専攻名	電子情報工学専攻	
試験科目名	専門科目 ①電気回路	P. 1／7

注：問1と問2の解答は別々の答案用紙に書くこと．

問1．交流回路および過渡現象に関する以下の問に解答せよ．

(1) 交流回路の複素計算法において，コイルおよびコンデンサのインピーダンスが，それぞれ$j\omega L$と$1/j\omega C$で与えられることを示せ．

(2) 以下に示す電圧信号の実効値を求めよ．

(a) $v_1(t)=V_m\sin\omega t$ (b) $v_2(t)=V_m\sin 2\omega t$ (c) $v_3(t)=\left|V_m\sin\omega t\right|$

(3) 抵抗R，インダクタンスLの直列回路において，周波数fの交流に対するインピーダンス$|Z|$と力率$\cos\varphi$を求めよ．

(4) 電圧 200 V，電流 50 A で 8 kW の電力を消費する回路の力率$\cos\varphi$，インピーダンス$|Z|$ [Ω]，抵抗R[Ω]，リアクタンス$|X|$ [Ω]，皮相電力P[VA]および無効電力P_r[Var]を求めよ．

(5) CR直列回路に直流定電流源（定電流値I）がスイッチを介して接続されている回路を考える．コンデンサの初期電荷をゼロとして，時刻t=0でスイッチを入れた以降の電流源の出力電圧波形を描け．

問2．図1および2に示す2端子対回路に関する以下の問に解答せよ．

(1) 回路1について，$\begin{bmatrix}E_1\\E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$で定義されるインピーダンス行列$Z=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$を求めよ．

(2) 回路1について，$\begin{bmatrix}E_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&F\\G&H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_2\\-I_2\end{bmatrix}$で定義される伝送行列$F=\begin{bmatrix}E&F\\G&H\end{bmatrix}$を求めよ．

(3) 回路2について、

(a) $\begin{bmatrix}E_3\\E_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&J\\K&L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_3\\I_4\end{bmatrix}$で定義されるインピーダンス行列$Z'=\begin{bmatrix}I&J\\K&L\end{bmatrix}$を求めよ．

(b) 回路1と回路2が等価である条件を求めよ．

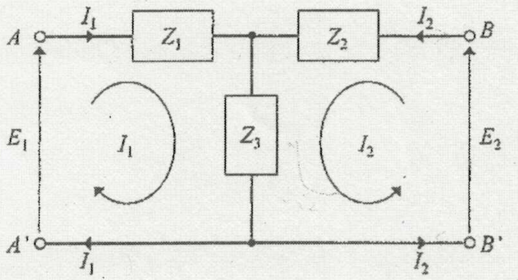


図1 回路1

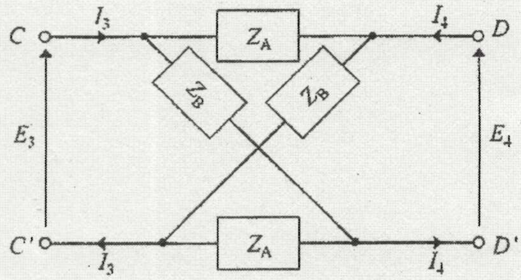


図2 回路2

No.
Date 2024 7.16

2012 電気回路

問1

(1) 複素電流を $i(t)=I_0e^{j\omega t}$ とすると、

$V_L = L\frac{di}{dt}$　　$V_C = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

$V_L = j\omega L\, i(t)$　　$V_C = \frac{1}{j\omega C}\, i(t)$

$Z_L = j\omega L$　　$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

(2) (a) $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$　(b) $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$　(c) $\cancel{|V_m|}$ $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$

(3) $Z = R + j\omega L = R + j2\pi f L$

$|Z| = \sqrt{R^2+\omega^2L^2} = \sqrt{R^2+4\pi^2f^2L^2}$

$\cos\varphi = \frac{Re(Z)}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2+4\pi^2f^2L^2}}$

(4) $\cos\varphi = \frac{8000}{200\cdot 50} = \frac{4}{5}$

$|Z| = \frac{200}{50} = 4$

$R = |Z|\cdot\cos\varphi = \frac{16}{5}$

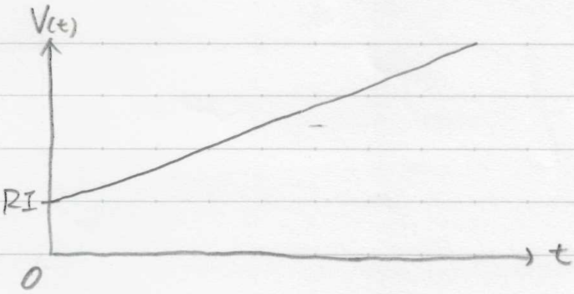
$|Z| = \sqrt{R^2+|X|^2} \Leftrightarrow |X| = \sqrt{|Z|^2-R^2} = \sqrt{\frac{16\cdot 25-16^2}{25}} = \frac{\sqrt{16\cdot 9}}{5} = \frac{12}{5}$

$P = 200\cdot 50 = 1\times 10^4$

$P_r = P - 8k = 2\times 10^3$　　$P_r = \sqrt{P^2-(8k)^2} = \sqrt{1\times 10^8 - 0.64\times 10^8} = 6\times 10^3$

(5) $RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = V(t)$

$V(t) = \frac{I}{C}t + RI$



問2

(1)
$$\begin{cases} E_1 = AI_1 + BI_2 \\ E_2 = CI_1 + DI_2 \end{cases}$$

(i) $I_1 = 0$ のとき

$B = \frac{E_1}{I_2} = \frac{Z_3 I_2}{I_2} = Z_3$

$D = \frac{E_2}{I_2} = Z_2 + Z_3$

(ii) $I_2 = 0$ のとき

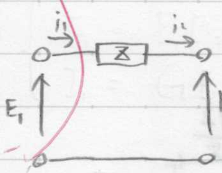
$A = \frac{E_1}{I_1} = Z_1 + Z_3$

$C = \frac{E_2}{I_1} = \frac{Z_3 I_1}{I_1} = Z_3$

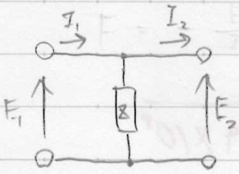
したがって、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}}$$

(2)



$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_2\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) + Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2}{Z_3} + 1 \end{bmatrix} \\
&= \underline{\begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3} & \frac{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

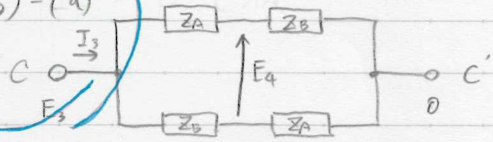
No.

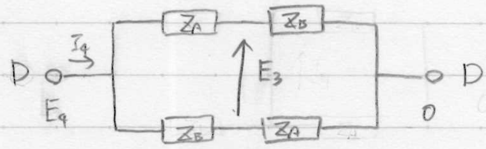
Date

2012 電気回路

問2

(3)-(a)





$I_4 = 0$　　　　$I_3 = 0$

$$I = \frac{E_3}{I_3} = \frac{E_3}{\frac{2E_3}{Z_A+Z_B}} = \frac{Z_A+Z_B}{2} \qquad J = \frac{E_3}{I_4} = \frac{\frac{1}{2}I_4 Z_B - \frac{1}{2}I_4 Z_A}{I_4} = \frac{Z_B - Z_A}{2}$$

$$K = \frac{E_4}{I_3} = \frac{\frac{1}{2}I_3 Z_B - \frac{1}{2}I_3 Z_A}{I_3} = \frac{Z_B - Z_A}{2} \qquad L = \frac{E_4}{I_4} = \frac{E_4}{\frac{2E_4}{Z_A+Z_B}} = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

したがって,

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{Z_A+Z_B}{2} & \frac{Z_B-Z_A}{2} \\ \frac{Z_B-Z_A}{2} & \frac{Z_A+Z_B}{2} \end{bmatrix}$$

(3)-(b)

$$\begin{cases} \frac{Z_A+Z_B}{2} = Z_1 + Z_3 = Z_2 + Z_3 & \cdots ① \\ \frac{Z_B-Z_A}{2} = Z_3 & \cdots ② \end{cases}$$

②より

$Z_B = 2Z_3 + Z_A \quad \cdots ③$

③を①に代入

$\frac{2Z_A+2Z_3}{2} = Z_1 + Z_3$

$Z_A = Z_1 \quad \cdots ④$

④を③に代入

$Z_B = Z_1 + 2Z_3$

以上より,

$$\begin{cases} Z_A = Z_1 = Z_2 \\ Z_B = Z_1 + 2Z_3 = Z_2 + 2Z_3 \end{cases}$$

No.

Date

注：問１と問２の解答は別々の答案用紙に書くこと．

問 1. 半径 a [m] の導体球 A の外側に，内半径 $2a$ [m]，外半径 $3a$ [m] の導体球殻 B が，導体球 A と中心を同じくして配置されている．ここで，a は正の定数であり，球 A の中心からの距離を r [m] とする．導体球 A と導体球殻 B との間 $a \leqq r \leqq 2a$ の領域は，誘電率が r の関数 $\varepsilon(r) = (\varepsilon_0 a)/r$ [F/m] で表される誘電体で満たされている．導体球殻 B を接地し，導体球 A に $Q\ (>0)$ [C] の電荷を与えたとき，以下の問に答えよ．

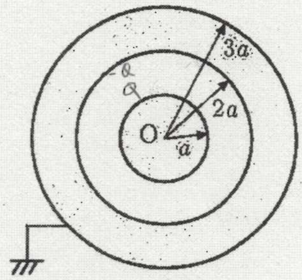


図 1

(1) $0 \leqq r \leqq 3a$ の範囲の電界を r の関数として求めよ．

(2) $0 \leqq r \leqq 3a$ の範囲の静電ポテンシャル（電位）を r の関数として求めよ．

(3) 導体球 A と導体球殻 B とからなるコンデンサの静電容量を求めよ．

(4) 導体間の領域における単位体積あたりの電界のエネルギーを求めよ．さらに，導体間領域に蓄えられる全静電エネルギーを求めよ．

問 2. 以下の問について導出の過程を含めて解答せよ．

(1) 図 2.1 に示すように，磁性体 1 と 2 が平面で境界を形成している．ただし，境界面上の面電流はなく，磁性体 1 と 2 の透磁率はそれぞれ μ_1, μ_2 [H/m] である．磁性体 1 内の磁束密度 B_1 [T] が境界面の法線となす角度は θ_1 である．一方，磁性体 2 内の磁束密度 B_2 [T] が境界面の法線となす角度は θ_2 である．磁束密度 B_1, B_2 の境界面に対する法線方向成分および接線方向成分を，それぞれ B_{1n}, B_{2n}, B_{1t}, B_{2t} (単位はすべて [T]) と表す．磁束密度 B [T] に関して $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$（ガウスの法則）が成り立つことを用いて，境界面上の磁束密度の満たすべき条件を求めよ．

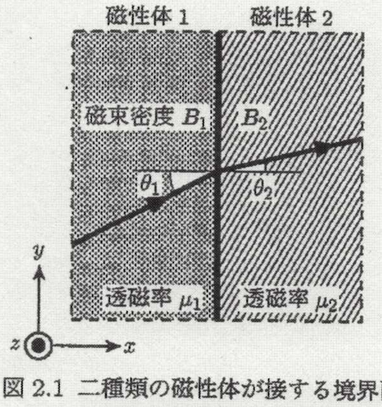


図 2.1 二種類の磁性体が接する境界面

(2) (1) において，磁界 H [A/m] に関して $\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$（アンペアの法則）が成り立つことを用いて，境界面上の磁束密度の満たすべき条件を求めよ．

(3) (1) において，θ_1 と θ_2 の間に成り立つ関係式を求めよ．

(4) 図 2.2 に示すように，無限の大きさを持った磁性体内（透磁率 μ [H/m]）の磁束密度が均一な値 B_0 [T] であるとき，十分に細長い円柱状の空隙（(直径 d [m])/(長さ l [m]) $\ll 1$, 透磁率 μ_0 [H/m]）が B_0 の向きと平行に空いている．この円柱状空隙内の磁束密度 B [T] の大きさと方向を求めよ．

(5) (4) と同様な磁性体中に，極めて薄い正方形平板状の空隙（(厚み g [m])/(辺の長さ l) $\ll 1$, 透磁率 μ_0）が B_0 の向きに垂直に空いている．この空隙内の磁束密度 B の大きさと方向を求めよ．

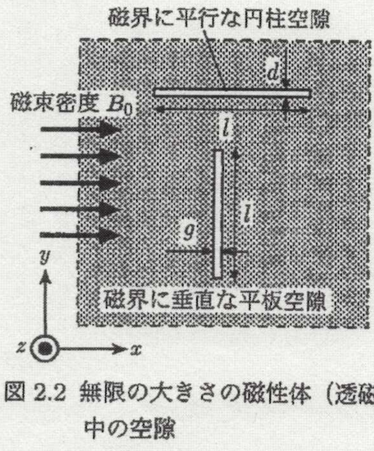


図 2.2 無限の大きさの磁性体（透磁率 μ）中の空隙

No.
Date 2024 7 . 17

2012 電磁気

問1

(1) (i) $2a \leqq r \leqq 3a$

$E(r) = \underline{0}$

(ii) $a \leqq r \leqq 2a$

$\varepsilon(r) \cdot E(r) \cdot 4\pi r^2 = Q$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 a}{r}} = \underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a r}}$

(iii) $0 \leqq r \leqq a$

$\underline{E(r) = 0}$

(2) (i) $2a \leqq r \leqq 3a$

$\underline{V(r) = 0}$

(ii) $a \leqq r \leqq 2a$

$V(r) = -\int_{2a}^{r} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a r} dr$

$= -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\log r\right]_{2a}^{r}$

$= -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log\left(\dfrac{r}{2a}\right)$

$\underline{V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log\left(\dfrac{2a}{r}\right)}$

(iii) $0 \leqq r \leqq a$

$V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log\left(\dfrac{2a}{a}\right)$

$= \underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log 2}$

(3) $C = \dfrac{Q}{V} = \underline{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a}{\log 2}}$

(4) 単位体積あたりのエネルギーは、

$\dfrac{1}{2}\varepsilon(r)E(r)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\varepsilon_0 a}{r} \cdot \dfrac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 a^2 r^2}$

$= \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a r^3}$

したがって、全エネルギーは

$\int_a^{2a} \dfrac{Q^2}{\cancel{32}\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0 a r^{\cancel{3}}} \cdot \cancel{4\pi r^2} dr = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_a^{2a}\dfrac{1}{r}dr$

$= \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[\log r\right]_a^{2a}$

$= \underline{\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\log 2}$

$\dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a}{\log 2} \cdot \left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log 2\right)^2$

$= \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\log 2$

No.

Date

平成24年度・平成23年度（10月期） 金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験		
問 題 用 紙		
専攻名	電子情報工学専攻	
試験科目名	専門科目 ③電子回路	P. 3／7

注：問１と問２の解答は別々の答案用紙に書くこと．

問 1. 図 1 に示すバイポーラトランジスタのエミッタ接地回路について，以下の間に答えよ．ただし，並列記号（ // ）を用いてよい．また，Q はバイポーラトランジスタである．

(1) バイポーラトランジスタのエミッタ接地の小信号等価回路を 1 つ描け．

(2) (1) で描いたバイポーラトランジスタの小信号等価回路を用いて，同図 (a) の小信号等価回路を描け．ただし，交流信号に対して，各コンデンサのインピーダンスは十分小さいものとする．

(3) (2) で描いた小信号等価回路から，電圧利得 $A = v_o/v_i$ を求めよ．

(4) (1) で描いたバイポーラトランジスタの小信号等価回路を用いて，同図 (b) の小信号等価回路を描け．ただし，交流信号に対して，各コンデンサのインピーダンスは十分小さいものとする．また，2 つのバイポーラトランジスタの等価回路及び素子値は同一とする．

(5) (4) で描いた小信号等価回路から，電圧利得 $A = v_2/v_i$ を求めよ．

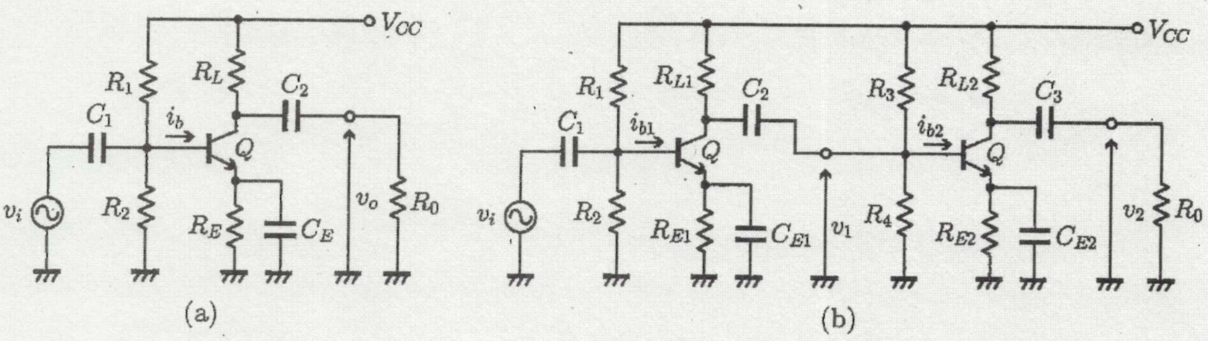


図 1. バイポーラトランジスタのエミッタ接地回路

問 2. オペアンプを用いた図 2 のような回路を考える．ただし，用いるオペアンプは理想オペアンプ (入力インピーダンス = ∞，出力インピーダンス = 0、利得 = ∞，帯域 = ∞) とする．

(1) 出力 V_o を求めよ．

(2) $R_1 = R$，$R_2 = kR$，$R_3 = R$，$R_4 = \alpha kR$ としたときの出力 V_o を求めよ．

(3) (2) の条件で，$V_1 = V_C - V_D/2$，$V_2 = V_C + V_D/2$ とおく．$V_o = A_C V_C + A_D V_D$ と書くときの A_C と A_D を求めよ．

(4) A_D/A_C を同相除去比 (Common-Mode Rejection Ratio: CMRR) と呼ぶ．(2) の条件でのこの回路の CMRR を求めよ．

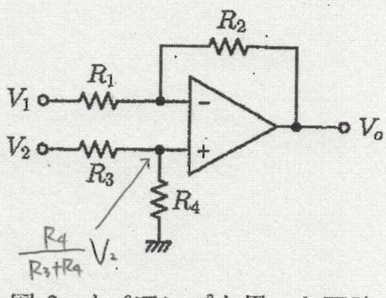


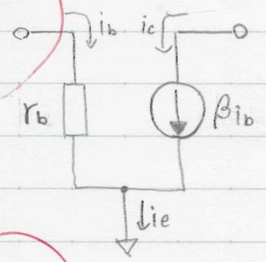
図 2. オペアンプを用いた回路

No.
Date 2024 7. 17

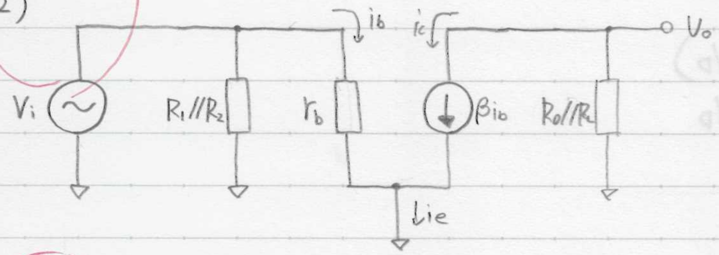
2012 電子回路

問1

(1)

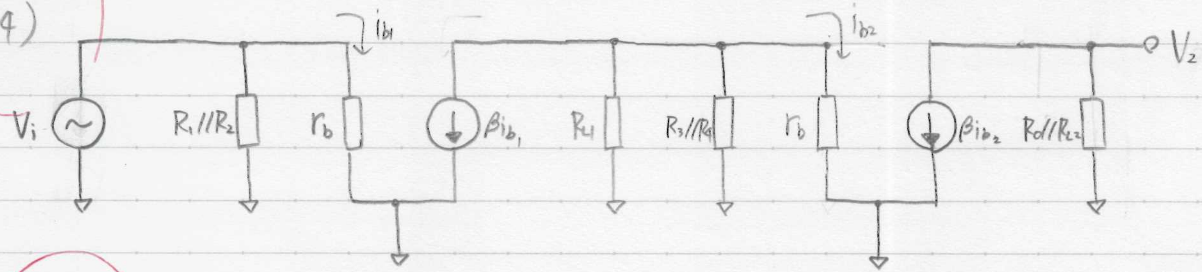


(2)



(3)
$$V_o = -\beta (R_o // R_L) i_b$$
$$= -\beta (R_o // R_L) \frac{V_i}{r_b}$$
$$V_o = -\frac{\beta (R_o // R_L)}{r_b} V_i$$
$$A = -\frac{\beta (R_o // R_L)}{r_b} \quad //$$

(4)



(5)
$$\begin{cases} i_{b1} = \dfrac{V_i}{r_b} & \cdots ① \\ -(R_{L1} // R_3 // R_4)(\beta i_{b1} + i_{b2}) - r_b i_{b2} = 0 & \cdots ② \\ V_2 = -(R_o // R_{L2}) \beta i_{b2} & \cdots ③ \end{cases}$$

②より,
$$(R_{L1} // R_3 // R_4 + r_b) i_{b2} = -(R_{L1} // R_3 // R_4) \beta i_{b1}$$
$$i_{b2} = -\frac{(R_{L1} // R_3 // R_4)\beta}{(R_{L1} // R_3 // R_4) + r_b} i_{b1}$$

ここに ① を代入して,
$$i_{b2} = -\frac{\beta (R_{L1} // R_3 // R_4)}{r_b \{(R_{L1} // R_3 // R_4) + r_b\}} V_i \quad \cdots ④$$

④を ③ に代入して,
$$V_2 = \frac{\beta^2 (R_o // R_{L2})(R_{L1} // R_3 // R_4)}{r_b \{(R_{L1} // R_3 // R_4) + r_b\}} V_i \longrightarrow A = \frac{\beta^2 (R_o // R_{L2})(R_{L1} // R_3 // R_4)}{r_b \{(R_{L1} // R_3 // R_4) + r_b\}} \quad //$$

問2

(1) $V_0 = \frac{R_4}{R_3+R_4}V_2 - \frac{V_1 - \frac{R_4}{R_3+R_4}V_2}{R_1}\cdot R_2$

$= \frac{R_4}{R_3+R_4}V_2 - \frac{R_2}{R_1}V_1 + \frac{R_2R_4}{R_1(R_3+R_4)}V_2$

$V_0 = -\frac{R_2}{R_1}V_1 + \frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1(R_3+R_4)}V_2$ //

(2) $V_0 = -\frac{kR}{R}V_1 + \frac{akR(R+kR)}{R(R+akR)}V_2$

$V_0 = -kV_1 + \frac{ak(1+k)}{1+ak}V_2$ //

(3) $V_0 = -k(V_C - \frac{1}{2}V_D) + \frac{ak(1+k)}{1+ak}(V_C + \frac{1}{2}V_D)$

$= \left(-k + \frac{ak(1+k)}{1+ak}\right)V_C + \left(\frac{1}{2}k + \frac{ak(1+k)}{2(1+ak)}\right)V_D$

$= \frac{-k(1+ak)+ak(1+k)}{1+ak}V_C + \frac{k(1+ak)+ak(1+k)}{2(1+ak)}V_D$

$= \frac{-k+ak}{1+ak}V_C + \frac{k+2ak^2+ak}{2(1+ak)}V_D$

$= \frac{k(a-1)}{1+ak}V_C + \frac{k(2ak+a+1)}{2(1+ak)}V_D$

以上より、

$A_C = \frac{k(a-1)}{1+ak}$, $A_D = \frac{k(2ak+a+1)}{2(1+ak)}$ //

(4) $\frac{A_D}{A_C} = \frac{\frac{k(2ak+a+1)}{2(1+ak)}}{\frac{k(a-1)}{1+ak}} = \frac{2ak+a+1}{2(a-1)}$ //