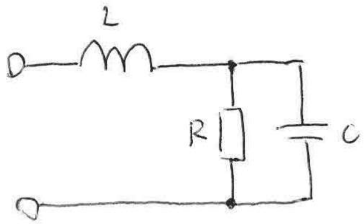
2015 電気回路

問1

(1)



$$Z = j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1}$$
$$= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

(2) (1)より

$$Z = \underbrace{\frac{1/R}{(1/R)^2 + (\omega C)^2}}_{X_1 とおく} + j\left\{\underbrace{\frac{-\omega C}{(1/R)^2 + (\omega C)^2} + \omega L}_{Y_1 とおく}\right\}$$

$$Y_1 - \omega L = -\frac{\omega C}{(1/R)^2 + (\omega C)^2} \quad \cdots ①$$

[redacted]

$$X_1 = \frac{1/R}{(1/R)^2 + (\omega C)^2} \quad \cdots ②$$

②と①の比をとり.

(3) (2)より. 中心が原点にあれば

$|Z|$は常に一定となる.

よって. $\omega L - \frac{1}{2\omega C} = 0$ $\quad L = \frac{1}{2\omega^2 C}$

(4) (1)より.

$$Z = \underbrace{\frac{R}{1 + (\omega CR)^2}}_{X_2 とおく} + j\left\{\underbrace{-\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} + \omega L}_{Y_2 とおく}\right\}$$

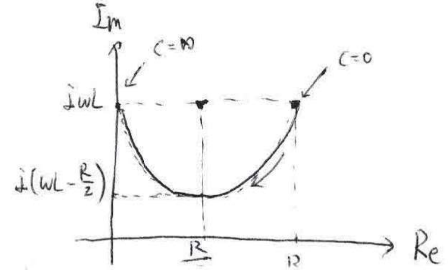
Cを消去したときの X_2, Y_2 の方程式は.

$$\left(X_2 - \overset{\frac{R}{2}}{\cancel{\frac{1}{2R}}}\right)^2 + (Y_2 - \omega L)^2 = \left(\overset{\frac{R}{2}}{\cancel{\frac{1}{2R}}}\right)^2$$

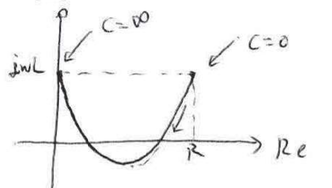
上式は中心 $\left(\overset{\frac{R}{2}}{\cancel{\frac{1}{2R}}}, \omega L\right)$. 半径 $\overset{\frac{R}{2}}{\cancel{\frac{1}{2R}}}$ の円を表すが.

$Y_2 \leq \omega L$ であるため. 下図に示すフェーザ軌跡となる.

(I) $\omega L > \overset{\frac{R}{2}}{\cancel{\frac{1}{2R}}}$ のとき.



(II) $\omega L \leq \frac{R}{2}$ のとき.



$$\frac{X_1}{Y_1 - \omega L} = -\frac{1/R}{\omega C} \quad \cdots ③$$

③を②に代入し、Rを消去。

$$X_1 = \frac{-\frac{\omega C X_1}{Y_1 - \omega L}}{\left(-\frac{\omega C X_1}{Y_1 - \omega L}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

$$X_1 \left\{ \left(-\frac{\omega C X_1}{Y_1 - \omega L}\right)^2 + (\omega C)^2 \right\} = -\frac{\omega C X_1}{Y_1 - \omega L}$$

両辺に $\left(\frac{Y_1 - \omega L}{\omega C}\right)^2 \cdot \frac{1}{X_1}$ をかけて整理すると

$$X_1^2 + (Y_1 - \omega L)^2 + \frac{1}{\omega C}(Y_1 - \omega L) = 0$$

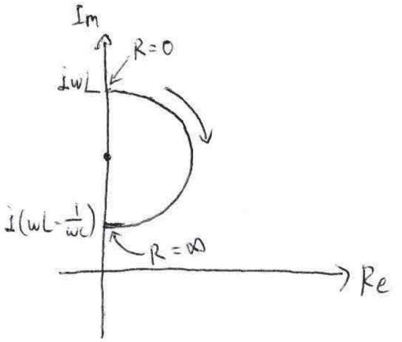
$$X_1^2 + \left\{ Y_1 - \left(\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right) \right\}^2 = \left(\frac{1}{2\omega C}\right)^2$$

したがって上式は

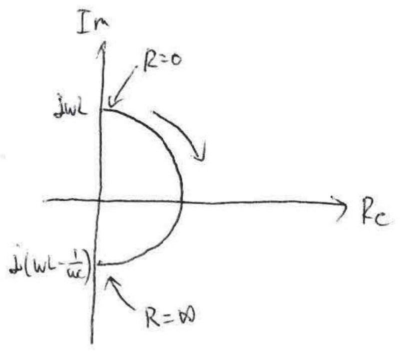
中心 $\left(0, \omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)$、半径 $\frac{1}{2\omega C}$ の円を表すが、

$X_1 \geq 0$ であるため、右半分の半円がフェーザ軌跡となる。

(I). $\omega L - \frac{1}{\omega C} \geq 0$ のとき。



(II). $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ のとき。



(5) (4)より、$\omega L > \frac{R}{2}$ の場合、$0 < C < \infty$ の範囲で

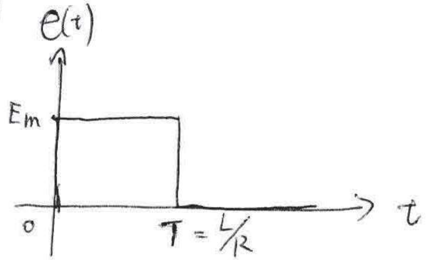
フェーザ軌跡が実軸と交わる(接する)ことはなく、

Zの力率は1とならない。

よって、$\omega L \leq \frac{R}{2}$

問2

(1)



回路方程式は

$$E_m\{u(t)-u(t-T)\} = L\frac{di}{dt} + Ri$$

$$E_m\{u(t)-u(t-\tfrac{L}{R})\} = L\frac{di}{dt} + Ri$$

両辺をラプラス変換すると

$$E_m\left\{\frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{L}{R}s}}{s}\right\} = sLI - L\underbrace{i(0)}_{=0} + RI$$

$$(sL+R)I = \frac{E_m(1-e^{-\frac{L}{R}s})}{s}$$

$$I = \frac{E_m(1-e^{-\frac{L}{R}s})}{s(sL+R)} = \frac{E_m(1-e^{-\frac{L}{R}s})}{R}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right\}$$

$$= \frac{E_m}{R}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L} - \frac{e^{-\frac{L}{R}s}}{s} + \frac{e^{-\frac{L}{R}s}}{s+R/L}\right\}$$

よって

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)]$$

(3)

回路方程式は

$$E_m \sin(\omega t + \theta) = L\frac{di}{dt} + Ri$$

定常解を i_s, 過渡解を i_t とすると

$i(t) = i_s + i_t$ とおける

電流と電圧に複素ベクトル $\dot{I}_s$ と $\dot{E}$ を用いると

$$\dot{E} = (j\omega L + R)\dot{I}_s$$

$$\dot{I}_s = \frac{\dot{E}}{j\omega L + R}$$

従って $i_s(t)$ は振幅 $\dfrac{E}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}$ で

位相は $e(t)$ に対し $\tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ だけ遅れる

$$\therefore\ i_s = \frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

一方、同次方程式 $L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$ の一般解（過渡解）は

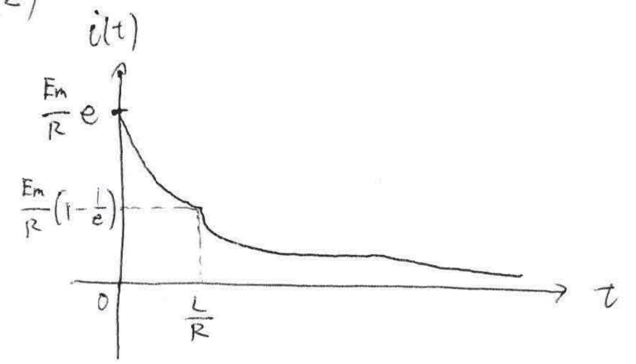
$$i_t = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

よって $i = i_s + i_t = \dfrac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right) + Ae^{-\frac{R}{L}t}$

初期条件 $t=0$ で $i=0$ より

$$= \frac{E_m}{R}\left\{u(t) - e^{-\frac{R}{L}t} - u\left(t-\frac{L}{R}\right) + e^{-\frac{R}{L}\left(t-\frac{L}{R}\right)}\right\}$$

(2)



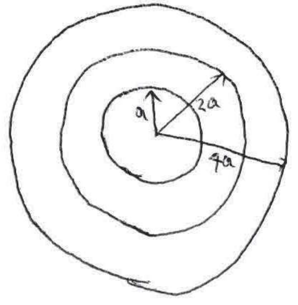
$$A = - \frac{\cdots}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \sin\left(\theta - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

(4) (3) の過渡解 i_t が零となる条件は、

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

2015 電磁気

問1



(1)

$0 \le r \le 2a$ のとき. $E(r) = 0$

$2a < r \le 4a$ 〃 $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

$4a < r$ 〃 $E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(2) $V_c = -\displaystyle\int_{\infty}^{4a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

$V_B = V_c - \displaystyle\int_{4a}^{2a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} dr = \frac{Q}{16\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$

$V_A = V_B$

よって. A, B, C の電位は

$$V_C = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V_B = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q+Q_A}{16\pi\varepsilon_2 a}$$

$$V_A = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q+Q_A}{16\pi\varepsilon_2 a} + \frac{Q_A}{16\pi\varepsilon_1 a}$$

$V_A = V_C$ より.

$$\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q+Q_A}{16\pi\varepsilon_2 a} + \frac{Q_A}{16\pi\varepsilon_1 a}$$

$$\therefore Q_A = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q$$

(5) $0 \sim \infty$ の範囲の電界によって蓄えられる静電エネルギーは. 接続前後で変化しない.

よって. $\dfrac{Q^2}{32\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

(3)

$$U = \int \sum \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dv$$

$$= \int_{4a}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_{2a}^{4a} \frac{1}{2} \varepsilon_2 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \right) 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{4\pi r} \right]_{4a}^{\infty} + \frac{Q^2}{2\varepsilon_2} \left[-\frac{1}{4\pi r} \right]_{2a}^{4a}$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi a} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right)$$

$$\left(= \frac{1}{2} Q V_B \right)$$

(4) 球殻 B に電荷 Q を与えた状態で A と C を接続すると、
A、C に電荷が誘起される。

それぞれ Q_A, Q_C とすると、

電荷保存より、$Q_A + Q_C = 0$

電界は、

(I) $0 \leq r \leq a$ のとき、 $E(r) = 0$

(II) $a < r \leq 2a$ 〃 $E(r) = \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$

(III) $2a < r \leq 4a$ 〃 $E(r) = \dfrac{Q + Q_A}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

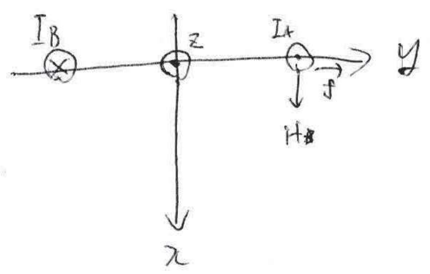
(IV) $4a < r$ 〃 $E(r) = \dfrac{Q + Q_A + Q_C}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

問2

(1) アンペアの法則 $\oint_C \mathbb{H}\cdot d\mathbb{l} = I$ から.

$$\mathbb{H} = \left(\frac{I}{2\pi a}, 0, 0 \right)$$

(2)

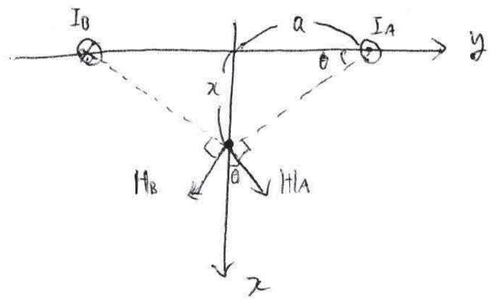


フレミングの法則. $\mathbb{f} = \mathbb{I} \times \mathbb{B}$ から.

力の大きさ $\dfrac{I^2}{4\pi a}$

力の向き y軸 正の向き

(3)



対称性より，$H_{py} = H_{pz} = 0$

上図で，$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

H_A，H_B の大きさは，$\dfrac{I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}}$

$$H_{px} = 2\cos\theta\, H_A$$

$$= \frac{aI}{\pi(a^2+x^2)} \qquad \therefore \left(\frac{aI}{\pi(a^2+x^2)},\ 0,\ 0\right)$$

(4) コイルCを貫く磁束Φは，

$$\Phi = \mu H S = \frac{\mu a b^2 I}{a^2+x^2}$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu a b^2}{a^2+x^2}$$

(5) 系全体の磁気エネルギーUは，

$$U = \frac{1}{2} M I I' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu a b^2 I I'}{a^2+x^2}$$

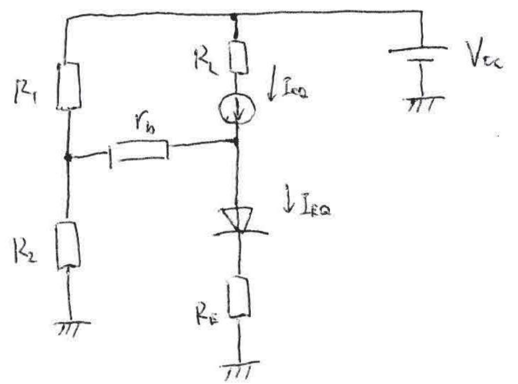
x方向の力は，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu a b^2 I I' x}{(a^2+x^2)^2}$$

2015 電子回路

問1

(1) 全てのコンデンサを開放



(2) $I_{BQ}=0$ より、R_1 と R_2 に流れる電流は等しく、これを I_1 とする。回路方程式は、

$$\begin{cases} V_{CQ} + R_L I_{CQ} = V_{cc} \cdots ① \\ R_2 I_1 = V_{B'E} + R_E I_{CQ} \cdots ② \quad (\because I_{EQ} = I_{CQ}) \\ V_{cc} = (R_1 + R_2) I_1 \cdots ③ \end{cases}$$

②, ③より I_1 を消去

$$V_{B'E} + R_E I_{CQ} = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{cc}$$

(4)、(5)

回路方程式は

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 /\!/ R_2)\, i_1 \cdots ① \\ (R_1 /\!/ R_2)\, i_1 = r_b i_b + r_e \{ i_b + \beta i_b \} \\ \qquad = \{ r_b + r_e (1+\beta) \} i_b \cdots ② \\ v_2 = - R_L \beta i_b \cdots ③ \end{cases}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1 + i_b} = \frac{(R_1 /\!/ R_2)\, i_1}{i_1 + \frac{R_1 /\!/ R_2}{r_b + r_e(1+\beta)} i_1} = \underline{\frac{\{ r_b + r_e (1+\beta) \} R_1 /\!/ R_2}{r_b + r_e(1+\beta) + R_1 /\!/ R_2}}$$

$$Z_{out} = \underline{R_L}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \underline{-\frac{R_L \beta}{r_b + r_e(1+\beta)}}$$

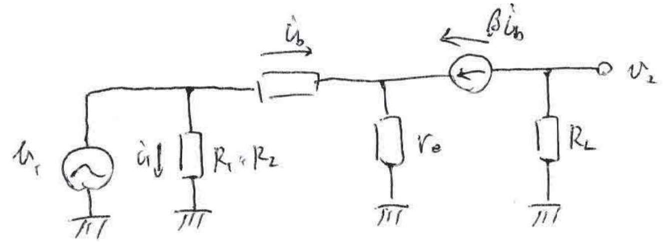
問2

$$I_{CQ} = \frac{R_2}{R_E(R_1+R_2)} V_{CC} - \frac{1}{R_E} V_{B'E} \cdots ④$$

①, ④より I_{CQ} を消去し、整理すると、

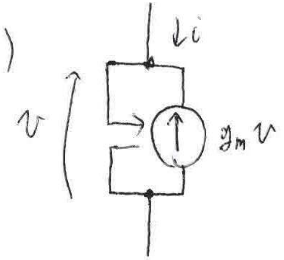
$$V_{CQ} = V_{CC} - \frac{R_L R_2}{R_E(R_1+R_2)} V_{CC} + \frac{R_L}{R_E} V_{B'E}$$

(3) 全てのコンデンサを短絡，$V_{CC} \to 0$ とすると



[2] 2

(1)



$i = -g_m v$ より、

$$\underline{Y_A = -g_m}$$

(2) $Y_B = g_m + \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

Y_B が虚数となる条件は

$\cancel{\omega C - \frac{1}{\omega L} \neq 0}$ $\quad \underline{g_m = -\frac{1}{R}}$

(虚数 → 純虚数)

※ 複素数：$a + bj$

(純)虚数：bj

(3) Z_B が無限大となるのは、$Y_B = 0$ のときで、

$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \qquad \therefore \underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$