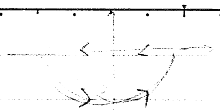
H27 数学 $\boxed{3}$ (3)

NO.

DATE

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx$$



下半円周 Γ が実軸上の区間 $-R \leq x \leq R$ からなる閉曲線を C とし、
複素積分 $I = \int_C e^{-z^2} e^{-i\omega z}\, dz$ を考える。

$e^{-z^2} e^{-i\omega z}$ は C 内で正則。よって $I = 0$ ($\because$ コーシーの積分定理)

ここで $I = \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$R \to \infty$ のとき $|f(z)| \to 0$ なのでジョルダンの補助定理より

$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx$ とおく。

ω で微分する。

$$\frac{dF}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot (-ix)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2}\right) \cdot e^{-i\omega x}\, dx \quad \left(\because \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2x\, e^{-x^2}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left\{ \underbrace{\left[e^{-x^2} e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \left(\frac{d}{dx} e^{-i\omega x}\right) dx \right\}$$

$$= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot i\omega\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= -\frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\frac{dF}{d\omega} = -\frac{\omega}{2} F$$

$$\frac{1}{F}\, dF = -\frac{\omega}{2}\, d\omega$$

両辺積分する。

$$\int \frac{1}{F}\, dF = -\frac{1}{2} \int \omega\, d\omega$$

$$\ln F = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\omega^2 + C$$

$$= -\frac{\omega^2}{4} + C$$

$$F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4} + C}$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = e^C$$

$$\sqrt{\pi} = e^C$$

$$\therefore F(\omega) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$