2018 微分方程式

[1]

(1) (a) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

特性方程式 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda + 12 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 6) = 0$

$(\lambda-2)^2(\lambda^2+3) = 0$

解は $\lambda = 2$（2重解）, $\pm\sqrt{3}i$ なので

一般解は $\underline{y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3\sin\sqrt{3}x + C_4\cos\sqrt{3}x}$ //

（C_1, C_2, C_3, C_4 は定数）

	1	−4	7	−12	12
2)		2	−4	6	−12
	1	−2	3	−6	

	1	−2	3	−6
2)		2	0	6
	1	0	3	

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \sin x$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$ $\lambda = 1$（2重解）

1つの解 $y_0 = C_1e^x + C_2xe^x$

また $P(D) = D^2 - 2D + 1$ とおくと $P(D)y = \sin x$ なので

特殊解は $\frac{1}{P(D)}\sin x = \frac{1}{P(D)}\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\frac{1}{P(D)}(e^{ix} - e^{-ix})$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{P(i)}e^{ix} - \frac{1}{P(-i)}e^{-ix}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix}\right)$

$= \frac{1}{4}e^{ix} + \frac{1}{4}e^{-ix} = \frac{1}{2}\cos x$

$P(i) = i^2 - 2i + 1 = -2i$

$P(-i) = (-i)^2 + 2i + 1 = 2i$

よって一般解は $\underline{y = \frac{1}{2}\cos x + C_1e^x + C_2xe^x}$ //

（C_1, C_2 は定数）

(2) $\left(\frac{1}{x} + xy\right)dx + x^2dy = 0$

(a) $\lambda(x,y) = x^ay^b$ が積分因子となる a, b

両辺に $\lambda(x,y) = x^ay^b$ をかけると

$\left(\frac{1}{x} + xy\right)x^ay^b dx + x^2\cdot x^ay^b dy = 0$

$P(x,y) = \left(\frac{1}{x} + xy\right)x^ay^b = x^{a-1}y^b + x^{a+1}y^{b+1}$

$Q(x,y) = x^2\cdot x^ay^b = x^{a+2}y^b$

$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = bx^{a-1}y^{b-1} + (b+1)x^{a+1}y^b$

$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = (a+2)x^{a+1}y^b$

$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$

$bx^{a-1}y^{b-1} + (b+1)x^{a+1}y^b = (a+2)x^{a+1}y^b$

$b + (b-a-1)x^2y = 0$

$b = 0$, $b - a - 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = 0, a = -1}$ //

完全微分方程式（P21）

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

において C^2-級の $u(x,y)$ に対して

$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$

$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$

となるとき、完全微分方程式という

積分因子（P24）

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

が完全微分方程式でないとき

両辺に $\lambda(x,y)$ をかけると完全

微分方程式になるとき、$\lambda(x,y)$ を

積分因子という

(b) (a)より 積分因子 $\lambda(x,y) = \frac{1}{x}$ なので両辺にかけると

$(x^{-2} + y)dx + x\,dy = 0$

完全微分方程式なので $\frac{\partial}{\partial x}(-x^{-1} + xy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(-x^{-1} + xy)dy = 0$

と書ける。$u(x,y) = \left(-\frac{1}{x} + xy\right)$ とすると $du(x,y) = 0$ と同値

なので $u(x,y) = C$ $\underline{xy - \frac{1}{x} = C}$ //（C は定数）

微分方程式が完全であるとき

$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$