

金沢大学大学院自然科学研究科 入学試験	問 題
科 目 名	対 象
数 学	物理工学専攻, 機械科学専攻 環境基礎工学専攻, 電子情報システム専攻

H15

2003年8月26日(火) 10:45-11:45

- 【注意】 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち, 2 題を選択して解答すること.
2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙に書くこと.

- 1 (1) 微分方程式 $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ を解け. $xy'' + y' = 0$
 × (2) 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos ax$ (a は定数) を解け. $(xy')' = 0$
 △ (3) 微分方程式 $(2y - \sin x)\varphi(x) dx + x\varphi(x) dy = 0$ が完全微分形になるように関数 $\varphi(x)$ を定め, この方程式を解け. $xy'(2y - \sin x) + x^2 dy = 0$

- 2 (1) ベクトル場 $u = (x-y)i + (x-z)j + (y-x)k$ に対して, $\text{rot } u$ を求めよ.

- × (2) 領域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$ の境界上の点 (x, y, z) での外向き単位法線ベクトルを n とする. n および $n \times u$ を x, y, z を用いて表せ.

- △ (3) ベクトル場 $v = (y^2 + z^2 - xy - zx)i + (x^2 + z^2 - yz - xy)j + (x^2 + y^2 - zx - yz)k$ に対し, 積分 $\iint_{x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}} v \cdot dS$ を求めよ.

- 3 複素関数 $f(z) = \left(\frac{z}{z^2+1}\right)^2$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 上半平面にある $f(z)$ の極について, その留数を求めよ.

- (2) 中心が原点にあり半径 $R (> 1)$ の円周の上半部分を C_R とする. $z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ において, $\int_{C_R} f(z) dz$ を θ の積分で表し, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ を示せ.

- (3) 以上を利用して, 広義積分 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$ を計算せよ.

- 4 区間 $[0, \infty)$ で定義された関数 $f(t), g(t)$ に対して,

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

で定義される関数 $h(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の合成積といい, $h = f * g$ で表す.

- (1) $f(t) = g(t) = \sin t$ のとき, $h = f * g$ を求めよ. ⑦

- (2) 一般の $f(t), g(t)$ に対し (それらのラプラス変換が絶対収束するとき), ラプラス変換 \mathcal{L} について次の公式

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 有理関数 $\frac{2}{(s^2+1)^2}$ のラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+1)^2}\right)$ を求めよ.