2018 複素解析

3

(1) $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2-4z+1)}$ $C: |z|=1$ 内にある特異点と留数

$f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(z-(2+\sqrt{3}))(z-(2-\sqrt{3}))}$ であり、

特異点 $z = 0$ (2位の極)、$2\pm\sqrt{3}$ (1位の極) の中で

Cの内部にあるのは、$\underline{z = 0,\ 2-\sqrt{3}}$ //

$z=0$ は2位の極なので留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[0] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)(z)^2 f(z) \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{(z^2+1)^2}{z^2-4z+1} \\
&= \lim_{z\to 0}\left\{\frac{2\cdot 2z(z^2+1)}{z^2-4z+1} - \frac{(2z-4)(z^2+1)^2}{(z^2-4z+1)^2}\right\} \\
&= 0-(-4) = \underline{4} \;//
\end{aligned}$$

$z=2-\sqrt{3}$ は1位の極なので留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[2-\sqrt{3}] &= \lim_{z\to 2-\sqrt{3}}\{z-(2-\sqrt{3})\}f(z) \\
&= \lim_{z\to 2-\sqrt{3}}\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z-(2+\sqrt{3}))} \\
&= \frac{(8-4\sqrt{3})^2}{(7-4\sqrt{3})(-2\sqrt{3})} \\
&= \frac{64-64\sqrt{3}+48}{(7-4\sqrt{3})(-2\sqrt{3})} = \frac{112-64\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(-2\sqrt{3})} \\
&= \frac{16(7-4\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{-2\sqrt{3}} = -\frac{8}{\sqrt{3}} = \underline{-\frac{8}{3}\sqrt{3}} \;//
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{2-\cos\theta}\,d\theta$

$z = e^{i\theta}$ とすると $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$ $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$

θ	$0\to 2\pi$
z	$1\to 1$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}{2-\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}\,dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i}\int_C \frac{(z+z^{-1})^2}{-z^2+4z-1}\frac{z^2}{z^2}\,dz \\
&= \frac{i}{2}\int_C\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2-4z+1)}\,dz \\
&= \frac{i}{2}\int_C f(z)\,dz
\end{aligned}$$

したがって (1)で求めた留数を用いて留数定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\int_C f(z)\,dz &= \frac{i}{2}\cdot 2\pi i\left(\mathrm{Res}[0]+\mathrm{Res}[2-\sqrt{3}]\right) \\
&= -\pi\left(4-\frac{8}{3}\sqrt{3}\right) \\
&= \underline{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}-4\right)\pi} \;//
\end{aligned}$$

$z = \dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} = 2\pm\sqrt{3}$

留数 (k位の極) (P125)
点aがk位の極なら
$\mathrm{Res}[a] = \dfrac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\{(z-a)^k f(z)\}$