2018 ベクトル解析

2

$A = (x+y+z,\ x^2+y^2+z^2,\ xy+yz+zx)$

$S:\ x^2+4y^2+z^2=4,\quad z\geq 0$

$n=(n_x, n_y, n_z)$ は曲面S上の単位法線ベクトル $(n_z \geq 0)$

(1) $f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2$

$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial}{\partial x}f,\ \frac{\partial}{\partial y}f,\ \frac{\partial}{\partial z}f\right)$

$= \underline{(2x,\ 8y,\ 2z)}$ //

(2) 曲面S上の点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \sqrt{2}\right)$ における n

曲面 $S:\ x^2+4y^2+z^2=4$ の法線ベクトルは

$\mathrm{grad}\, f$ であり, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \sqrt{2}\right)$ における法線ベクトルは

(1)を用いて, $\mathrm{grad}\, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \sqrt{2}\right) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ なので,

単位法線ベクトル n は,

$n = \frac{1}{\sqrt{2+24+8}}(\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}) = \underline{\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 2\sqrt{3}, 2)}$ //

曲面 $S:\ f(x,y,z)$ における ∇f は
曲面Sの (x,y,z) における
法線ベクトルであるため
単位法線ベクトルは
$n = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\nabla f$

(3) $\mathrm{rot}\, A = (x+z-2z,\ 1-(y+z),\ 2x-1)$

$= \underline{(x-z,\ 1-y-z,\ 2x-1)}$ //

(4) $\iint_S \mathrm{rot}\, A\cdot n\, dS$

曲面Sの境界の閉曲面CはSが半球面だから,

$C:\ x^2+4y^2=4$ の楕円上だから

ストークスの定理より

$\iint_S \mathrm{rot}\, A\cdot n\, dS = \oint_C A\cdot dr$

$C:\ x^2+4y^2=4$ において媒介変数tを用いると

$r(t) = (2\cos t,\ \sin t,\ 0)\ (0\leq t\leq 2\pi)$ とおくことができる。 $r'(t) = (-2\sin t,\ \cos t,\ 0)$

また, Aを $r(t)$ を用いて表すと,

$A = (2\cos t+\sin t,\ 4\cos^2 t+\sin^2 t,\ 2\sin t\cos t)$

ストークスの定理 (P119)
曲面Sの境界の閉曲面C,
Sの単位法線ベクトルを
$n=(n_1, n_2, n_3)$ とする。
ベクトル場Aが $C\cup S$ 上で
連続な偏導関数をもつなら,
$\iint_S \mathrm{rot}\, A\cdot n\, dS = \oint_C A\cdot t\, ds$
$= \oint_C A\cdot dr$

よって

$\oint_C A\cdot dr = \oint A\cdot r'(t)\cdot dt$

$= \int_0^{2\pi}(-4\sin t\cos t - 2\sin^2 t + 4\cos^3 t + \sin^2 t\cos t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi}(-2\sin^2 t)\, dt$

$= -\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\, dt$

$= -\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$

$= \underline{-2\pi}$ //

被積分関数の中で $\cos t$ をもつ項は0となる。 $(0\sim 2\pi)$