2017年　数学

1

(1) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

特性方程式より、

$$s^4 + 8s^2 + 16 = 0$$
$$(s^2+4)^2 = 0$$
$$s = \pm 2i,\ \pm 2i$$

よって、根は $2i$, $-2i$ でともに2重根であるから

一般解は

$$y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x \quad //$$

教 P.65 参考

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3\sin 2x$

特性方程式 $s^2 + 4 = 0$

$$s = \pm 2i$$

よって基本解は

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

また、未定係数法より特殊解を η として

$$\eta = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$
$$\eta' = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x$$
$$\eta'' = (-4A - 4Bx)\sin 2x + (4B - 4Ax)\cos 2x$$

与式に代入して、

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 3\sin 2x$$

係数比較から、

$$\begin{cases} -4A = 3 \\ 4B = 0 \end{cases} \quad \therefore A = -\frac{3}{4},\ B = 0$$

$$\eta = -\frac{3}{4}x\cos 2x$$

以上より

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x \quad //$$

(3) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 1$

$$\iff \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$s^2 + \frac{1}{3}s = 0$$
$$s = 0,\ -\frac{1}{3}$$

基本解は

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{1}{3}x}$$

特殊解 η_1, η_2, η_3 として

(i) x^2 のとき

$$\eta_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$
$$\eta_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$\eta_1'' = 6Ax + 2B$$

$$3Ax^2 + (18A + 2B)x + (6B + C) = 3x^2$$

$$\begin{cases} 3A = 3 \\ 18A + 2B = 0 \\ 6B + C = 0 \end{cases} \quad \therefore A = 1,\ B = -9,\ C = 54$$

$$\eta_1 = x^3 - 9x^2 + 54x$$

(ii) $\frac{2}{3}x$ のとき

$$\eta_2 = A'x^2 + B'x,\ \eta_2' = 2A'x + B',\ \eta_2'' = 2A'$$

$$2A'x + 6A' + B' = \frac{2}{3}x$$

$$\begin{cases} 2A' = \frac{2}{3} \\ 6A' + B' = 0 \end{cases} \quad \therefore A' = \frac{1}{3},\ B' = -2$$

$$\eta_2 = \frac{1}{3}x^2 - 2x$$

(iii) $-\frac{1}{3}$ のとき

$$\eta_3 = A''x,\ \eta_3' = A''$$
$$A'' = -1$$
$$\eta_3 = -x$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = x^3 - \frac{26}{3}x^2 + 51x$$

よって、

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{1}{3}x} + x^3 - \frac{26}{3}x^2 + 51x \quad //$$

(4)

$$(y^3\sin 2y + 3x^2y)\,dx + (2xy^3\cos 2y - 2x^3)\,dy = 0 \quad (y>0)$$

$M = y^3\sin 2y + 3x^2y$, $N = 2xy^3\cos 2y - 2x^3$ とすると

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2\sin 2y + 2y^3\cos 2y + 3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y^3\cos 2y - 6x^2$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ より、完全微分形でない。

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2\sin 2y + 9x^2$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/ M = \frac{3(y^2\sin 2y + 3x^2)}{y^3\sin 2y + 3x^2y} = \frac{3(y^2\sin 2y + 3x^2)}{y(y^2\sin 2y + 3x^2)}$$

$$= \frac{3}{y}$$

yだけの関数となったので、これを$Q(y)$とおくと、積分因子$e^{-\int Q(y)dy}$は、

$$e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\log y} = e^{\log\frac{1}{y^3}} = \frac{1}{y^3}$$

積分因子を与式の両辺にかけて、

$$\left(\sin 2y + \frac{3x^2}{y^2}\right)dx + \left(2x\cos 2y - \frac{2x^3}{y^3}\right)dy = 0$$

$$(\sin 2y\,dx + 2x\cos 2y\,dy) + \left(\frac{3x^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy\right) = 0$$

$$d(x\sin 2y) + d(x^3y^{-2}) = 0$$

よって、一般解は

$$x\sin 2y + \frac{x^3}{y^2} = C$$

//