金沢大学大学院自然科学研究科		博士前期課程入学試験　問題用紙
対　象	機械科学専攻，電子情報科学専攻，環境デザイン学専攻	
試験科目名	数　　学	P. 1　/　1

2013 年 8 月 27 日（火）10:00 – 11:00

[注意]　1. 問題 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ のうち，２題を選択して解答すること．

2. 解答は各題ごとに分けて，１題を１枚の答案用紙の表に書くこと．

$\boxed{1}$ 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sin 2x$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 11y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 11y = 11x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 11y = \sin x$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (1-z)^2$ に対し，円錐 $V = \{(x,y,z)\,|\,0 \leqq z \leqq 1,\ f(x,y,z) \leqq 0\}$ とベクトル場 $\boldsymbol{u} = (zf(x,y,z), zf(x,y,z), f(x,y,z)+1)$ を考える．また，V の底面 $S_1 = \{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$ と側面 $S_2 = \{(x,y,z)\,|\,0 \leqq z \leqq 1,\ f(x,y,z) = 0\}$ を考え，$S = S_1 \cup S_2$ とし，$\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトルとする．次の問いに答えよ．

(1) S_1 の面積と V の体積を求めよ．また，積分 $\displaystyle\iint_S (x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ．

(2) S_1 における $\boldsymbol{n}$ を求めよ．S_2 における $\boldsymbol{n}$ の z 成分は定数であることを示せ．

(3) S_2 における $\boldsymbol{u}$ および S_2 の面積を求めよ．さらに，積分 $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,dV$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 複素関数 $f(z) = \dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-6z+1)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 複素平面上の $f(z)$ の各孤立特異点における留数を求めよ．

(2) 実積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{3-\cos\theta}\,d\theta$ を，単位円 $\{|z|=1\}$ に沿う $f(z)$ の積分 $I_2 = \displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ で表せ．

(3) 上の積分 I_1 の値を求めよ．

$\boxed{4}$ $0 < \lambda < \pi$ とする．$f_\lambda(x)$ は周期 2π の周期関数で

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -\lambda) \\ \frac{1}{\lambda^2}x + \frac{1}{\lambda} & (-\lambda \leqq x < 0) \\ -\frac{1}{\lambda^2}x + \frac{1}{\lambda} & (0 \leqq x < \lambda) \\ 0 & (\lambda \leqq x < \pi) \end{cases}$$

で定められている．次の問いに答えよ．

(1) $y = f_\lambda(x)$ のグラフを $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で描け．

(2) $f_\lambda(x)$ のフーリエ級数 $f_\lambda(x) \sim \dfrac{a_0(\lambda)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(\lambda)\cos nx + b_n(\lambda)\sin nx\right)$ を求めよ．

(3) 各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle\lim_{\lambda\to+0} a_n(\lambda)$ を求めよ．