2017 複素解析

3

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-4z+5)(z^2+9)}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

(1) $$f(z) = \frac{1}{(z-(2+i))(z-(2-i))(z-3i)(z+3i)}$$

特異点 $z = 2\pm i, \pm 3i$ (1位の極)

すべて1位の極なので留数は

$$\mathrm{Res}[2+i] = \lim_{z\to 2+i} (z-(2+i)) f(z)$$
$$= \lim_{z\to 2+i} \frac{1}{(z-(2-i))(z^2+9)}$$
$$= \frac{1}{2i(12+4i)} = \frac{1}{8(-1+3i)} = \frac{-1-3i}{80}$$ //

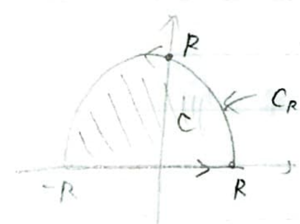
$$\mathrm{Res}[2-i] = \lim_{z\to 2-i} (z-(2-i)) f(z)$$
$$= \lim_{z\to 2-i} \frac{1}{(z-(2+i))(z^2+9)}$$
$$= \frac{1}{(-2i)(12-4i)} = \frac{1}{8(-1-3i)} = \frac{-1+3i}{80}$$ //

$$\mathrm{Res}[3i] = \lim_{z\to 3i} (z-3i) f(z)$$
$$= \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2-4z+5)(z+3i)}$$
$$= \frac{1}{-4-12i}\,\frac{1}{6i} = \frac{1}{24(3-i)} = \frac{3+i}{240}$$ //

$$\mathrm{Res}[-3i] = \lim_{z\to -3i} (z+3i) f(z)$$
$$= \lim_{z\to -3i} \frac{1}{(z^2-4z+5)(z-3i)}$$
$$= \frac{1}{-4+12i}\,\frac{1}{-6i} = \frac{1}{24(3+i)} = \frac{3-i}{240}$$ //

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$C_R : z = Re^{i\theta}$ $(R>0,\ 0\le\theta\le\pi)$ のとき $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$



C_R と x 軸上を $-R$ から R までの直線で囲まれた領域の境界 C を考え、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4x+5)(x^2+9)}\,dx$$ を

$$I = \int_C \frac{1}{(z^2-4z+5)(z^2+9)}\,dz$$ に対応させて考える。

(1)より C 内に含まれる $f(z)$ の特異点は $z = 2+i, 3i$ なので

留数定理より

$$I = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[2+i] + \mathrm{Res}[3i]\right)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{-1-3i}{80} + \frac{3+i}{240}\right)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{-8i}{240}\right)$$
$$= \frac{1}{15}\pi$$

$$I = \int_C f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx\right)$$ だが

$R\to\infty$ のとき $\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$ なので

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = I = \frac{\pi}{15}$ //