H27

3

(1) $\int_C \frac{(z+1)^{2n}}{z^n} dz$

特異点 $z=0$ は C内の点

$z=0$ において $(z+1)^{2n}$ は正則なので

$z=0$ は n 位の極

$$\mathrm{Res}[0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+1)^{2n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{(2n)!}{(n+1)!}(z+1)^{n+1}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n-1)!\cdot(n+1)!}$$

よって

$$\int_C \frac{(z+1)^{2n}}{z^n} dz = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n-1)!\cdot(n+1)!}$$

(2) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta + a}$

$z = e^{i\theta}$ とすると

$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\frac{dz}{d\theta} = i e^{i\theta} = iz$

$$\int_0^\pi \frac{2}{z+z^{-1}+2a} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

$$= \int_0^\pi \frac{2}{i(z^2+2az+1)} dz$$

$z^2+2az+1=0$ とすると

$z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$ で

$z = -a - \sqrt{a^2-1}$ だけ $-1 \leq z \leq 1$ を満たす

$z = -a+\sqrt{a^2-1}$ のとき $\frac{2}{i\{z+(a+\sqrt{a^2-1})\}}$ は正則

よって $z=-a+\sqrt{a^2-1}$ は1位の極

$$\mathrm{Res}[-a+\sqrt{a^2-1}] = \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \frac{2}{i\{z+(a+\sqrt{a^2-1})\}} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$

よって

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta+a} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$