2013 微分方程式

1

(1) $\frac{dy}{dx} + (\cos x) y = \sin 2x$

1階微分方程式なので

$y = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)} \cdot Q(x)\, dx + C\right)$

$P(x) = \int \cos x\, dx$, $Q(x) = \sin 2x$ なので

$y = e^{-\sin x}\left(\int e^{\sin x} \cdot \sin 2x\, dx + C\right)$

$= e^{-\sin x}\left(\int e^{\sin x} \cdot 2\sin x \cos x\, dx + C\right)$

$t = \sin x$ とすると $dt = \cos x\, dx$

$y = e^{-t}\left(\int e^{t} \cdot 2t\, dt + C\right)$

$= 2e^{-t}\left(te^{t} - \int e^{t} + C\right)$

$= 2e^{-t}\left(te^{t} - e^{t} + C\right)$

$= 2t - 2 + 2Ce^{-t}$

$= \underline{2(\sin x - 1) + 2Ce^{-\sin x}}$ (Cは定数)

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 11y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 11 = 0$ より $\lambda = -3 \pm \sqrt{2}i$ なので

$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-44}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}i$

一般解 $y = \underline{C_1 e^{-3x}\cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-3x}\sin\sqrt{2}x}$

(C_1, C_2は定数)

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 11y = 11x$

特殊解 $y = Ax + B$ とすると

$y' = A$, $y'' = 0$

$y'' + 6y' + 11y = 11x$ に代入すると

$6A + 11Ax + 11B = 11x$

$$\begin{cases} 11A = 11 & A = 1 \\ 6A + 11B = 0 & B = -\frac{6}{11} \end{cases}$$

(2)の解と合わせて一般解yは

$y = \underline{C_1 e^{-3x}\cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-3x}\sin\sqrt{2}x + x - \frac{6}{11}}$

(C_1, C_2は定数)

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 11y = \sin x$

特殊解 $y = A\sin x + B\cos x$ とおくと

$y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$y'' + 6y' + 11y = \sin x$ に代入すると

$-A\sin x - B\cos x + 6A\cos x - 6B\sin x + 11A\sin x + 11B\cos x = \sin x$

$$\begin{cases} 10A - 6B = 1 \\ 10B + 6A = 0 \end{cases}$$

$A = -\frac{5}{3}B$

$-\frac{50}{3}B - 6B = 1$

$B = -\frac{3}{68}$, $A = \frac{5}{68}$

よって(2)の解と合わせて一般解yは

$y = \underline{C_1 e^{-3x}\cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-3x}\sin\sqrt{2}x + \frac{5}{68}\sin x - \frac{3}{68}\cos x}$

(C_1, C_2は整数)