2016 複素解析

3

(1) $\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

偶関数なので $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

$z = e^{i\theta}$ とおくと $dz = iz\,d\theta$

$|z| = 1$ $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{3-(z+z^{-1})}\frac{1}{iz}\,dz$$
$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z+z^{-1}}{-z^2+3z-1}\,dz$$
$$= \frac{i}{4}\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z^2-3z+1)}\,dz$$

被積分関数 $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2-3z+1)}$ において

$|z| = 1$ 内に含まれる特異点は $z = 0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ （1位の極）

$z = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

それぞれ留数は

$$\mathrm{Res}[0] = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{z^2-3z+1} = 1$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] = \lim_{z\to\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(z-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) f(z)$$
$$= \lim_{z\to\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{z^2+1}{z\left(z-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}(14-6\sqrt{5})+1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}(-\sqrt{5})} = \frac{18-6\sqrt{5}}{2(5-3\sqrt{5})}$$
$$= \frac{(18-6\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})}{2(25-45)} = -\frac{3}{20}(15-5\sqrt{5}+9\sqrt{5}-15) = -\frac{12}{20}\sqrt{5}$$
$$= -\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

留数定理より

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta = \frac{i}{4}2\pi i\left(\mathrm{Res}[0] + \mathrm{Res}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{5}\right) = \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\pi$$

(2) $\int_C \frac{\sin z}{z^n}\,dz$

被積分関数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^n}$ において 特異点は $z=0$ （n重解）

n位の極 $z=0$ において 留数は

$$\mathrm{Res}[0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} z^n f(z)$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \sin z$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}\right)$$

マクローリン展開

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\begin{cases} 0 & (n=\text{奇数}) \\ -(n-1)! & (n=2m) \\ (n-1)! & (n=2m+2) \end{cases}$$

?

$$= \begin{cases} 0 & (n=\text{奇数}) \\ -1 & (n=2m) \\ 1 & (n=2m+2) \end{cases}$$

留数定理より

$$\int_C \frac{\sin z}{z^n}\,dz = \begin{cases} 0 & (n=\text{奇数}) \\ -2\pi i & (n=4m-2) \\ 2\pi i & (n=4m) \end{cases} \quad (m=1,2,3\cdots)$$