2014 複素解析

$\boxed{3}$

$$f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}$$

(1) $f(z)$ の特異点

$f(z)=\dfrac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$ より　$z(\sin z)=0$

特異点は　$\underline{z=0,\ n\pi}$ //（nは整数）

(2) 極における留数

マクローリン展開を用いると

$$f(z)=\frac{z\cos z-\sin z}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{z\cos z-\sin z}{z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)}$$

となるが　点$z=0$で　$\dfrac{z\cos z-\sin z}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}$　は0であり，

正則でないので　$z=0$は1位の極であり，留数は

$$\mathrm{Res}[0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{\sin z}$$

$z=0$で　$z\cos z-\sin z$ と $\sin z$はともに正則で，

$0\cos 0-\sin 0$ と $\sin 0$はともに0となるので

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z\cos z-\sin z)'}{(\sin z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-z\sin z-\cos z}{\cos z}$$

$$=\frac{1-0-1}{1}=\underline{0}\ //$$

$f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$　（$h(z)=\dfrac{z\cos z-\sin z}{z}$，$g(z)=\sin z$）とおくと

$h(z)$は正則で，$g(n\pi)=0$，$g'(n\pi)=\cos n\pi\neq 0$ なので

留数は

$$\mathrm{Res}[n\pi]=\frac{h(n\pi)}{g'(n\pi)}=\frac{\frac{z\cos z-\sin z}{z}}{\cos z}=1-\frac{1}{n\pi}\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi}$$

$$=\underline{1}\ //$$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{5}{2}\pi} f(z)\,dz$

$f(z)$の特異点 $z=0,\ n\pi$ に対して，$|z|=\frac{5}{2}\pi$ の内にあるのは，

$z=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi$ の5つであり，留数定理を用いると

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}\pi} f(z)\,dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}[0]+\mathrm{Res}[-\pi]+\mathrm{Res}[\pi]+\mathrm{Res}[2\pi]+\mathrm{Res}[-2\pi]\right)$$

$$=2\pi i\times 4=\underline{8\pi i}\ //$$

マクローリン展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

$$=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

主なマクローリン展開

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

k位の極である条件 (P120)

点$z=a$で正則な関数$h(z)$が

$h(a)\neq 0$ かつ $f(z)=\dfrac{h(z)}{(z-a)^k}$ と

書けるとき　$z=a$は$f(z)$のk位の

極である．

ロピタルの定理 (P122)

$h(z)$と$g(z)$がともに$z=\alpha$で正則で

$h(\alpha)=g(\alpha)=0$ かつ $g'(\alpha)\neq 0$ のとき

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{h(z)}{g(z)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{h'(z)}{g'(z)}=\frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

留数 (P125)

$f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$ が点aで1位の

極をもち，$z=a$で$h(z)$が正則で

あり，かつ $g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$ のとき

$$\mathrm{Res}[a]=\frac{h(a)}{g'(a)}$$