平成３０年度（１０月期）及び平成３１年度　金沢大学大学院自然科学研究科　博士前期課程入学試験 **解　答　例**	
専　攻　名	機械科学専攻，電子情報科学専攻，環境デザイン学専攻
試験科目名	数学

以下は略解である．採点においては，解答のプロセスや記述の論理性も重視し，別解も広く認めている．

$\boxed{1}$ (1)

(a)　特性方程式は $\rho^4-4\rho^3+7\rho^2-12\rho+12=(\rho-2)^2(\rho^2+3)=0$ なので，
一般解は $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3\sin\sqrt{3}x+c_4\cos\sqrt{3}x$　(c_1,c_2,c_3,c_4 は定数).

(b)　特殊解は $\dfrac{1}{(D-1)^2}[\sin x]=\dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{(D-1)^2}[e^{ix}-e^{-ix}]=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{4}=\dfrac{\cos x}{2}$ なので，
補助方程式の解と合わせて，一般解は $y=(c_1+c_2x)e^x+\dfrac{\cos x}{2}$　(c_1,c_2 は定数).

(2)

(a)　$\lambda(x,y)=x^ay^b$ を $(*)$ に掛けて $P\,dx+Q\,dy=0$ とし，完全微分方程式の必要十分条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ を用いて係数比較すると，$a=-1,b=0$ を得る．

(b)　(a) より，$\lambda(x,y)=\frac{1}{x}$ を $(*)$ に掛けることにより，$xy-\frac{1}{x}=C$　(C は定数) を得る．

$\boxed{2}$ (1)　$\mathrm{grad}\,f=(2x,8y,2z)$.

(2)　$\mathrm{grad}\,f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{4},\sqrt{2}\right)$ を単位化すると，$\boldsymbol{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{4},\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{17}}(1,2\sqrt{3},2)$.

(3)　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x-z\\1-y-z\\2x-1\end{pmatrix}$.

(4)　ストークスの定理 $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_{\partial S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ の右辺を計算することにより，-2π を得る．

$\boxed{3}$ (1)　$z^2-4z+1=0$ の解を $\alpha=2-\sqrt{3},\beta=2+\sqrt{3}$ とすると，$|\alpha|<1,|\beta|>1$ で，
$f(z)$ の，C の内部にある特異点は $z=0$（2 位の極），$\alpha=2-\sqrt{3}$（1 位の極）．
$f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot(1+4z+(2\text{ 次以上}))$ より，$z=0$ での留数 $\mathrm{Res}\,[0;f]=4$.
$f(z)=\dfrac{1}{z-\alpha}\cdot\dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(z-\beta)}$ より，$z=2-\sqrt{3}$ での留数 $\mathrm{Res}\,[\alpha;f]=\dfrac{(\alpha^2+1)^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}=-\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$.

(2)　$z=e^{i\theta}$ とすると $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{2-\cos\theta}\,d\theta=\frac{i}{2}\int_C f(z)\,dz$ で，さらに (1) と留数定理より，
$\displaystyle\frac{i}{2}\int_C f(z)\,dz=\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,[0;f]+\mathrm{Res}\,[\alpha;f])=\frac{4\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3}\pi$ を得る．

$\boxed{4}$ (1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{3}{2}\pi$.

(2)　部分積分により，$\displaystyle\int x\cos ax\,dx=\frac{1}{a}x\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax+C$　(C は定数).

(3)　$\displaystyle f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ において，$f(x)$ は偶関数であるので $b_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$.
(1) より、$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{3}{4}$.

$n=1,2,\ldots$ のとき $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = -\left(\dfrac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos n\pi - \cos\dfrac{n\pi}{2}\right)$ より,

$f(x) \sim \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x - \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos 2(2k-1)x$ を得る.

(4) (3) で $x=0$ における等号成立性より, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$ を得る.