H16

③

(1) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

$z=e^{i\theta}$

$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}=iz$

$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$

$I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{5-2(z+z^{-1})}\frac{1}{zi}\,dz=\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(-2i)z(2z^2-5z+2)}\,dz$

(2) $f(z)=\frac{1}{-2i}\frac{z^2+1}{2z(z-2)(z-\frac{1}{2})}$

特異点は 0. 2. $\frac{1}{2}$ で
全て 1位の極である

$Res[0]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{-2i(z-2)(z-\frac{1}{2})2}=\frac{1}{-4i}=\frac{i}{4}$

$Res[2]=\lim_{z\to 2}\frac{z^2+1}{-2i\cdot 2z(z-\frac{1}{2})}=\frac{5}{-12i}=\frac{5}{12}i$

$Res[\frac{1}{2}]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^2+1}{-2i\cdot 2z(z-2)}=\frac{\frac{1}{4}+1}{3i}=\frac{5}{12i}$

(3) $|z|=1$ 内にある特異点は $z=0, \frac{1}{2}$

$I=2\pi i\left(Res[0]+Res[\tfrac{1}{2}]\right)$

$=2\pi i\left(\frac{i}{4}-\frac{5}{12}i\right)$

$=\frac{\pi}{3}$