

2006

H18

金沢大学大学院自然科学研究科		博士前期課程入学試験 問題用紙	
対 象	電子情報工学専攻, 機能機械科学専攻, 人間・機械科学専攻, 社会基盤工学専攻		
試験科目名	数 学	P.1	/ 1

2006年8月29日(火) 10:45 - 11:45

- [注意] 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち, 2 題を選択して解答すること.
2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙の表に書くこと.

1 次の微分方程式を解け. 2 式

△ (1) $\frac{dy}{dx} = (2-y)y$ ベルヌーイ ○ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 5x$

○ (3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10\sin x$ ○ (4) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10(x + \sin x)$

2 ベクトル場 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ を求めよ.

(2) 曲線 $C: \mathbf{r}(t) = (\sqrt{2-c}\cos t, \sqrt{2-c}\sin t, c)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に対して, 線積分

$$\int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ. ただし $c < 2$ とする.

× (3) 曲面 $S: z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ に対して, 面積分

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ. ただし S の単位法線ベクトル \mathbf{n} の z 成分は正とする.

3 複素関数 $g(z) = \sin(\pi z)$ について $f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 原点の周りで $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ と展開できる. このとき, 定数 a_{-1} , a_0 , a_1 を求めよ.

(2) 留数 $\text{Res}\left[\frac{f(z)}{z^2}, 0\right]$ を求めよ.

(3) 円 $C = \{z: |z| = \frac{1}{2}\}$ に対して, 積分

$$\int_C \left(\pi^2 + \frac{2\pi i}{z} + \frac{3}{z^2}\right) f(z) dz$$

の値を求めよ.

4 $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ を関数 $f(t)$ と $g(t)$ のたたみ込みとする.

(1) $\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = g'(t) * f(t) + g(0)f(t)$ を両辺のラプラス変換を計算することによって示せ.
ただし $g'(t) = \frac{d}{dt}g(t)$ とする.

(2) (1) を利用して $\frac{d^2}{dt^2}(f(t) * g(t)) = g''(t) * f(t) + g'(0)f(t) + g(0)f'(t)$ を示せ.
ただし $g''(t) = \frac{d^2}{dt^2}g(t)$ とする.

(3) ラプラス変換を用いて, $\frac{d^2}{dt^2}(f(t) * t) + f''(t) + 2f'(t) = 0$ を $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ の条件のもとで解け.