

金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験 問題用紙		
対 象	機械科学専攻, 電子情報科学専攻, 環境デザイン学専攻	
試験科目名	数 学	P. 1 / 1

2015 年 8 月 25 日 (火) 10:00 - 11:00

- [注意] 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち, 2 題を選択して解答すること.  
2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙の表に書くこと.

1 (1) 次の微分方程式を解け.

(a)  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 10x$

(b)  $(x-1)(y^2-9)dx - (x^2+1)(y+2)dy = 0$

(2) 微分方程式  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{6}{x^2} y = 0$  を考える.

(a)  $y = x^m$  がこの微分方程式の解となる様な  $m$  をすべて求めよ.

(b) (a) で求めた解が 1 次独立であることを示せ.

2 ベクトル場  $\mathbf{A} = (x(y-z) + z^2, y(z-x) + x^2, z(x-y) + y^2)$  と 2 つの曲面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  と  $D: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  を考える. 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を求めよ.

(2)  $S$  と  $D$ , それぞれの単位法線ベクトルで  $z$  成分が正であるものを求めよ.

(3) 面積分  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  の値を求めよ. ただし,  $\mathbf{n}$  は (2) で求めた  $S$  上の単位法線ベクトルとする.

3 次の問いに答えよ.

(1) 積分

$$\int_C \frac{(z+1)^{2n}}{z^n} dz \quad (n \geq 1)$$

の値を求めよ. ここで,  $C$  は正の向きを持つ原点  $O$  を囲む単純閉曲線である.

(2) 積分

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta + a} \quad (a > 1)$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

の値を求めよ. 必要であれば  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  を用いて良い.

4  $t \geq 0$  で定義された関数  $f(t)$  に対するラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

とする.

(1) 微分公式  $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2 \mathcal{L}[f(t)](s) - sf(+0) - f'(+0)$  を示せ. ただし,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f'(t) = 0$  とする.

(2)  $\mathcal{L}[t](s)$  ( $s > 0$ ) と  $\mathcal{L}[\sinh at](s)$  ( $s > |a|$ ) を求めよ. ただし,  $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) である.

(3) 微分方程式の初期値問題

$$x''(t) - a^2 x(t) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

をラプラス変換の方法を用いて解け. ただし,  $a > 0$  とする.