2017 微分方程式

$\boxed{1}$

(1) $\frac{d^4y}{dx^4} + 8\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

特性方程式 $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$

$(\lambda^2+4)^2 = 0$

$((\lambda+2i)(\lambda-2i))^2 = 0 \quad \lambda = \pm 2i$ (2重解)

よって一般解は

$y = C_1 e^{2i} + C_2 e^{-2i} + C_3 x e^{2i} + C_4 x e^{-2i}$

$= C_1(\cos 2x + \sin 2x) + C_2(\cos 2x - \sin 2x)$

$+ C_3 x(\cos 2x + \sin 2x) + C_4 x(\cos 2x - \sin 2x)$

$= \underline{C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x + C_3' x \cos 2x + C_4' x \sin 2x}$ //

(C_1', C_2', C_3', C_4' は定数)

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3\sin 2x$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ より $\lambda = \pm 2i$

一つの解 $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

特殊解を $y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ とおくと

$y' = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x$

$y'' = -2A\sin 2x - 2A\sin 2x - 4Ax\cos 2x$

$+ 2B\cos 2x + 2B\cos 2x - 4Bx\sin 2x$

$y'' + 4y = (-4A - 4Bx + 4xB)\sin 2x + (4Ax - 4Ax + 4B)\cos 2x$

となり、$3\sin 2x$ と比較すると

$-4A = 3 \quad A = -\frac{3}{4}$

$4B = 0 \quad B = 0 \quad y = -\frac{3}{4}x\cos 2x$

よって、一般解 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$ (C_1, C_2 は定数)

(3) $3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 1$

特性方程式 $3\lambda^2 + \lambda = 0$ より $\lambda = 0, -\frac{1}{3}$

一つの解 $y_0 = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$

特殊解 $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ とおくと

$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y'' = 6Ax + 2B$ なので

$3(6Ax + 2B) + 3Ax^2 + 2Bx + C = 3x^2 + 2x - 1$

$3Ax^2 + (18A + 2B)x + C + 6B = 3x^2 + 2x - 1$

$$\begin{cases} 3A = 3 & A = 1 \\ 18A + 2B = 2 & B = -8 \\ C + 6B = -1 & C = 47 \end{cases}$$

一般解は $y = \underline{C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{3}x} + x^3 - 8x^2 + 47x}$ // (C_1, C_2 は定数)