② 2015 電気回路

問1

(1) $Z = j\omega L + \dfrac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$

$= j\omega L + \dfrac{R}{1 + j\omega CR}$

(2) $Z = \dfrac{R - j\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2} + j\omega L$

$\cancel{= \dfrac{R + j\omega(L + \omega^2C^2LR^2 - CR^2)}{1+\omega^2C^2R^2}}$

$\cancel{\equiv X + jY}$

$= \dfrac{R}{1+\omega^2C^2R^2} + j\left(\omega L - \dfrac{\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2}\right)$

$\equiv X + jY$

$\dfrac{Y-\omega L}{X} = -\omega CR$

$R = \dfrac{\omega L - Y}{\omega CX}$

$X = \dfrac{\frac{\omega L - Y}{\omega CX}}{1 + \omega^2C^2 \frac{(\omega L - Y)^2}{\omega^2C^2X^2}}$

$= \dfrac{\frac{\omega L - Y}{\omega C} X}{X^2 + (\omega L - Y)^2}$

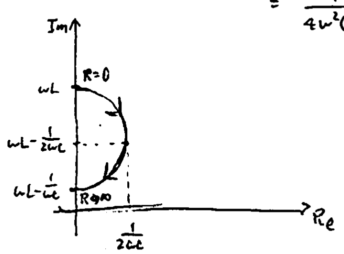
$X^2 + (Y-\omega L)^2 = \dfrac{\omega L - Y}{\omega C}$

$X^2 + Y^2 - 2\omega LY + \omega^2L^2 + \dfrac{Y - \omega L}{\omega C} = 0$

$X^2 + Y^2 + Y\left(\dfrac{1}{\omega C} - 2\omega L\right) + \omega^2L^2 - \dfrac{L}{C} = 0$

$X^2 + \left(Y + \left(\dfrac{1}{2\omega C} - \omega L\right)\right)^2 = \dfrac{L}{C} - \omega^2L^2 + \dfrac{1}{4\omega^2C^2} + \omega^2L^2 - \dfrac{L}{C}$

$= \dfrac{1}{4\omega^2C^2}$



$\lim_{R\to 0} \mathrm{Re}(Z) = 0,\ \lim_{R\to 0} \mathrm{Im}(Z) = \omega L$

$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}(Z) = 0,\ \lim_{R\to\infty} \mathrm{Im}(Z) = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$

(3) $\cancel{|Z| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (\omega L + \omega^3LC^2R^2 - \omega CR^2)^2}}{1+\omega^2C^2R^2}}$

(2)から、

$\omega L - \dfrac{1}{2\omega C} = 0$ のとき $|Z| = \mathrm{Const.}$

よって、

$L = \dfrac{1}{2\omega^2 C}$

(4) $\dfrac{Y-\omega L}{X} = -\omega CR$ より、

$C = -\dfrac{Y-\omega L}{\omega RX}$

$X = \dfrac{R}{1 + \omega^2R^2\frac{(Y-\omega L)^2}{\omega^2R^2X^2}}$

$= \dfrac{X^2R}{X^2 + (Y-\omega L)^2}$

$X^2 + (Y-\omega L)^2 = RX$

$\left(X - \dfrac{R}{2}\right)^2 + (Y-\omega L)^2 = \dfrac{R^2}{4}$

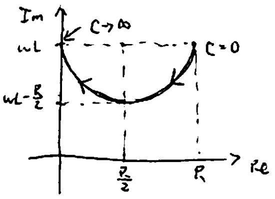
$\cancel{\lim_{C\to 0} \mathrm{Re}(Z) =}$

$\lim_{C\to 0} Z = R + j\omega L$

$\lim_{C\to\infty} Z = 0 + j(\omega L - 0)$

$= j\omega L$

C増加 → Im(Z)減少



(5) $\mathrm{Im}(Z) = 0$ のとき、

力率が1になる。

よって、

$\omega L - \dfrac{R}{2} \leq 0$

$\omega L \leq \dfrac{R}{2}$

問2

(1) $e(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t)$

$\mathcal{L}[e(t)]$

$= \dfrac{E_m}{s} - \int_T^\infty E_m e^{-st} dt$

$= \dfrac{E_m}{s} + \dfrac{E_m}{s}(-e^{-sT})$

$= \dfrac{E_m}{s}(1 - e^{-sT})$

$LsI(s) + RI(s) = \dfrac{E_m}{s}(1 - e^{-sT})$

$I(s) = \dfrac{E_m}{s} \cdot \dfrac{1 - e^{-sT}}{Ls + R}$

$= \dfrac{E_m}{L} \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1 - e^{-sT}}{s + \frac{R}{L}}$

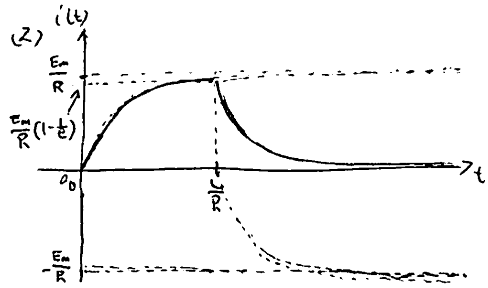
$= \dfrac{E_m}{R}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s + \frac{R}{L}}\right)(1 - e^{-sT})$

よって、

$i(t) = \dfrac{E_m}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \dfrac{E_m}{R}\overbrace{\left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{L}{R})}\right)}^{u(t-T)}$

$= \dfrac{E_m}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \dfrac{E_m}{R}\, u\!\left(t - \dfrac{L}{R}\right)\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t + 1}\right)$

(2)



(3) $\mathcal{L}[e(t)]$

$= \int_0^\infty E_m \sin(\omega t + \theta) e^{-st} dt$

$= E_m\left\{\left[-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\theta) e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \dfrac{s}{\omega}\cos(\omega t + \theta) e^{-st} dt\right\}$

$= E_m\left\{\left[-\dfrac{e^{-st}}{\omega}\cos(\omega t+\theta) - \dfrac{s}{\omega^2}\sin(\omega t+\theta) e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \dfrac{s^2}{\omega^2}\sin(\omega t + \theta) e^{-st} dt\right\}$

$= \dfrac{E_m}{1 + \frac{s^2}{\omega^2}}\left(\dfrac{1}{\omega}\cos\theta + \dfrac{s}{\omega^2}\sin\theta\right)$

$= \dfrac{E_m}{s^2 + \omega^2}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)$

より、

$I(s) = \dfrac{1}{Ls+R} \cdot \dfrac{E_m}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)$

$= \dfrac{E_m}{L} \cdot \dfrac{1}{s + \frac{R}{L}}\left(\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta + \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\sin\theta\right)$

$e(t) = (j\omega L + R)\, i_s(t)$ ($i_s(t)$: 定常解)

$i_s(t) = \dfrac{E_m}{R + j\omega L}\sin(\omega t + \theta)$

$= \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right)$

過渡解 $i_t(t)$ は、

$L\dfrac{di_t}{dt} + Ri_t = 0$

$Ls + R = 0 \Rightarrow s = -\dfrac{R}{L}$

$i_t(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$

よって、

$i(t) = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

$i(0) = 0$ より、

$C = -\dfrac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right)$

よって、

$i(t) = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right) - \sin\left(\theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

(4) $\theta - \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R} = 0$

より、

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$

である。

② 2015 電磁気

問1

(1) ・$0 \le r < 2a$

電荷がないため、

$E(r) = 0$

・$2a < r < 4a$

ガウスの法則より、

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

・$4a < r$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(2) $V_C = -\int_{\infty}^{4a} E(r)\,dr$

$= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r}\right]_{\infty}^{4a}$

$= \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

$V_B = V_C - \int_{4a}^{2a} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\,dr$

$= V_C + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{4a}\right)$

$= \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_2 a}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{Q}{16\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

$V_A = V_B = \dfrac{Q}{16\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

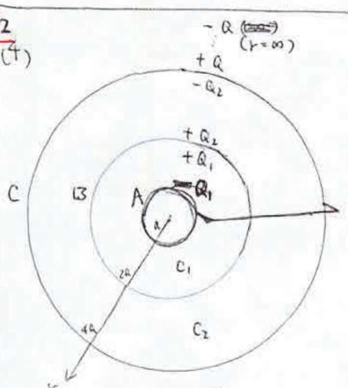
P92

(3) $U = \dfrac{1}{2} Q V_B$

$= \dfrac{Q^2}{32\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

P92

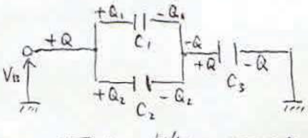
(4)



図のように容量 C_1、C_2、C_3 を考える。

(C_3 は無限遠点との容量)

このとき、球殻Bに電荷Qを与えると、図Aと等価の回路になる。



図A 等価回路

$Q_1 + Q_2 = Q$ …①

とした。このとき、

・$0 \le r < a$

$E(r) = 0$

・$a < r < 2a$

$E(r) = \dfrac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$

・$2a < r < 4a$

$E(r) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

・$4a < r$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

だから、

$V_C = \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

$V_B = -\int_{4a}^{2a} \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\,dr + V_C$

$= \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{4a}\right) + V_C$

$= \dfrac{Q_2}{16\pi\varepsilon_2 a} + \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

$V_A = -\int_{2a}^{a} \dfrac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\,dr + V_B$

$= -\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2a}\right) + V_B$

$= -\dfrac{Q_1}{8\pi\varepsilon_1 a} + \dfrac{Q_2}{16\pi\varepsilon_2 a} + \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

ここで、$V_A = V_C$ より、

$0 = -\dfrac{Q_1}{8\pi\varepsilon_1 a} + \dfrac{Q_2}{16\pi\varepsilon_2 a}$ …②

① より、$Q_2 = Q - Q_1$ だから、

$\dfrac{Q_1}{8\pi\varepsilon_1 a} + \dfrac{Q_1}{16\pi\varepsilon_2 a} = \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_2 a}$

$\dfrac{Q_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{Q_1}{2\varepsilon_2} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_2}$

$Q_1 = \dfrac{Q}{2\varepsilon_2} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{2\varepsilon_2}}$

$= \dfrac{Q}{2\varepsilon_2} \cdot \dfrac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$

$= \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} Q$

$Q_2 = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} Q$

したがって、電界は、

・$0 \le r < a$

$E(r) = 0$

・$a < r < 2a$

$E(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \cdot \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$

・$2a < r < 4a$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \cdot \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$

・$4a < r$

$E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

となる。

(5) $U' = \dfrac{1}{2} Q V_B$

$= \dfrac{Q}{2} \cdot \dfrac{Q}{16\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} \cdot \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\right)$

$= \dfrac{Q^2}{16\pi a}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} + \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\right)$

問2

(1) アンペアの法則から、

$H_x = \dfrac{I}{2\pi a}$

よって、

$\mathbb{H} = \left(\dfrac{I}{2\pi a}, 0, 0\right)$

(2) 単位長あたりの力 f は、

この場合、Hは B の A に対する磁界

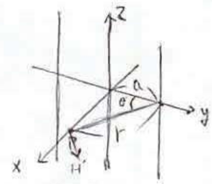
$\mathbb{f} = \mathbb{I} \times \mathbb{B} = \mu_0 H I \mathbf{j}$

$\cancel{H = \dfrac{I}{2\pi a} + \dfrac{I}{2\pi a} = \dfrac{I}{\pi a}}$ $H = \dfrac{I}{4\pi a}$

よって、

$f = \dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi a}$ y軸正方向

(3) $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ として、図Bのように θ を決める。



図B

片方の導線による磁界 H′ は、

$H' = \dfrac{I}{2\pi r}$

磁界の合計 $\mathbb{H}_P$ は、

$|\mathbb{H}_P| = 2 \cdot \dfrac{I}{2\pi r}\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ だから、

$|\mathbb{H}_P| = \dfrac{aI}{\pi r^2} = \dfrac{aI}{\pi(x^2 + a^2)}$

~~y~~ x軸方向以外の磁界は打ち消される。

よって、

$\mathbb{H}_P = \left(\dfrac{aI}{\pi(x^2 + a^2)}, 0, 0\right)$

(4) コイルCに鎖交する磁束は、

$\Phi = \mu_0 H_{Px} \cdot \pi b^2 \cdot 1 = \dfrac{\mu_0 ab^2 I}{(x^2 + a^2)}$

よって、

$M = \dfrac{\Phi}{I} = \dfrac{\mu_0 ab^2}{(x^2 + a^2)}$

(5) 蓄えられている磁気エネルギー U は、

$U = MII' = \dfrac{\pi\mu_0 ab^2 II'}{\pi(x^2 + a^2)}$

x が増加する向きを正として、

$F = \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\mu_0 ab^2 II'}{1}(-1)\dfrac{2x}{(x^2 + a^2)^2}$

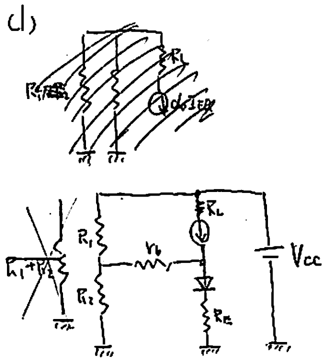
$= -\dfrac{2\mu_0 ab^2 II' x}{(x^2 + a^2)^2}$

x軸負の方向である。

② 2015 電子回路

問1

(1)



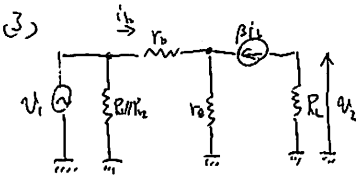
---

(2) $V_{CQ} = \cancel{\alpha_0 I_{EQ} R_L + V_{B'E}}$

$V_{CC} - \alpha_0 I_{EQ} R_L$

---

(3)



---

(4) $\cancel{Z_{in} = (R_1/\!/R_2)/\!/(r_b + r_e)}$

$Z_{out} = R_L$

---

(5)
$$\begin{cases} v_1 = \{r_b + (1+\beta) r_e\} i_b \\ v_2 = -\beta R_L i_b \end{cases}$$

より,

$$A_v = -\frac{\beta R_L}{r_b + (1+\beta) r_e}$$

---

(2)続き

$V_{CC} = (R_1 + R_2) I_1$

$R_2 I_1 = V_{B'E} + R_E I_{EQ}$

$I_1 = \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2}$

$R_E I_{EQ} = R_2 \cdot \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} - V_{B'E}$

$I_{EQ} = \frac{R_2}{R_E} \cdot \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} - \frac{1}{R_E} V_{B'E}$

よって,

$$V_{CQ} = V_{CC} - \alpha_0 R_L \left(\frac{R_2}{R_E} \cdot \frac{V_{CC}}{R_1 + R_2} - \frac{V_{B'E}}{R_E} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{\alpha_0 R_L R_2}{R_E (R_1 + R_2)}\right) V_{CC} + \frac{\alpha_0 R_L}{R_E} V_{B'E}$$
$$= \frac{R_E (R_1 + R_2) - \alpha_0 R_L R_2}{R_E (R_1 + R_2)} V_{CC} + \frac{\alpha_0 R_L}{R_E} V_{B'E}$$

---

(4)続き

$v_1 = (R_1/\!/R_2) i_1 = \{r_b + (1+\beta) r_e\} i_b$

$i_1 = \frac{1}{R_1/\!/R_2} \{r_b + (1+\beta) r_e\} i_b$

よって,

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1 + i_b}$$
$$= \frac{\{r_b + (1+\beta) r_e\} i_b}{\left(1 + \frac{1}{R_1/\!/R_2}\{r_b + (1+\beta) r_e\}\right) i_b}$$
$$= \frac{(R_1/\!/R_2)(r_b + (1+\beta) r_e)}{R_1/\!/R_2 + r_b + (1+\beta) r_e}$$

問2

(1) $i = -g_m v$

より,

$Y_A = \frac{i}{v} = -g_m$

---

(2) $Y_B = Y_A + \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$

$= \frac{1}{R} - g_m + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

虚数となるのは,

$$\left(\begin{array}{l} \omega C \neq \frac{1}{\omega L} \\ \omega \neq \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{array} \right) \frac{1}{R} = g_m$$

のときである。

---

(3) Y_B が~~最大~~0になれば良いから,

$Y_B = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$