

金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験 問題用紙		
対 象	機械科学専攻, 電子情報科学専攻, 環境デザイン学専攻	
試験科目名	数 学	P.1 / 1

2013 年 8 月 27 日 (火) 10:00 - 11:00

- [注意] 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち, 2 題を選択して解答すること.
2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙の表に書くこと.

1 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sin 2x \quad (2) \frac{d^2y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 11y = 0$$

$$(3) \frac{d^2y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 11y = 11x \quad (4) \frac{d^2y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 11y = \sin x$$

2 関数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - (1 - z)^2$ に対し, 円錐 $V = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1, f(x, y, z) \leq 0\}$ とベクトル場 $u = (zf(x, y, z), zf(x, y, z), f(x, y, z) + 1)$ を考える. また, V の底面 $S_1 = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ と側面 $S_2 = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1, f(x, y, z) = 0\}$ を考え, $S = S_1 \cup S_2$ とし, n を S の外向き単位法線ベクトルとする. 次の問いに答えよ.

- (1) S_1 の面積と V の体積を求めよ. また, 積分 $\iint_S (x, y, z) \cdot n \, dS$ の値を求めよ.
(2) S_1 における n を求めよ. S_2 における n の z 成分は定数であることを示せ.
(3) S_2 における u および S_2 の面積を求めよ. さらに, 積分 $\iiint_V \operatorname{div} u \, dV$ の値を求めよ.

3 複素関数 $f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - 6z + 1)}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 複素平面上の $f(z)$ の各孤立特異点における留数を求めよ.
(2) 実積分 $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{3 - \cos \theta} d\theta$ を, 単位円 $\{|z| = 1\}$ に沿う $f(z)$ の積分 $I_2 = \int_{|z|=1} f(z) dz$ で表せ.
(3) 上の積分 I_1 の値を求めよ.

4 $0 < \lambda < \pi$ とする. $f_\lambda(x)$ は周期 2π の周期関数で

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < -\lambda) \\ \frac{1}{\lambda^2}x + \frac{1}{\lambda} & (-\lambda \leq x < 0) \\ -\frac{1}{\lambda^2}x + \frac{1}{\lambda} & (0 \leq x < \lambda) \\ 0 & (\lambda \leq x < \pi) \end{cases}$$

で定められている. 次の問いに答えよ.

- (1) $y = f_\lambda(x)$ のグラフを $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で描け.
(2) $f_\lambda(x)$ のフーリエ級数 $f_\lambda(x) \sim \frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(\lambda) \cos nx + b_n(\lambda) \sin nx)$ を求めよ.
(3) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow +0} a_n(\lambda)$ を求めよ.