

2007
H19

金沢大学大学院自然科学研究科		博士前期課程入学試験 問題用紙	
対 象	電子情報工学専攻, 機能機械科学専攻, 人間・機械科学専攻, 社会基盤工学専攻		
試験科目名	数 学	P.1 / 1	

2007年8月28日(火) 10:00 - 11:00

- [注意] 1. 問題 ①, ②, ③, ④ のうち, 2題を選択して解答すること.
2. 解答は各題ごとに分けて, 1題を1枚の答案用紙の裏に書くこと.

- ① (1) $\frac{dy}{dx} = (2-y)y$ の一般解と, $x=0$ のとき $y=1$ となる特解を求めよ.
(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ の一般解と, $x=0$ のとき $y=1, \frac{dy}{dx} = 2$ となる特解を求めよ.
(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$ の一般解と, $x=0$ のとき $y=2, \frac{dy}{dx} = 3$ となる特解を求めよ.
- ② ベクトル場 $u = (-y, x, z), v = (x^2 + z, xy - y, x^2 - 3xz)$ に対して, 次の問いに答えよ. a, b, c は正の定数とする.
- (1) $\text{rot } u$ および $\text{div } v$ を求めよ.
(2) 曲線 $C: r(t) = (a \cos t, b \sin t, 0) \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ に対して, 線積分

$$\frac{1}{2} \int_C u \cdot dr$$

を求めよ.

- (3) 立体 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq c$ の表面 S 上の面積分

$$\iint_S v \cdot n dS$$

を求めよ. ただし n は S の外向き単位法線ベクトルとする.

- ③ (1) 実数 $R > 1$ に対し, 曲線 $C_j \ (j=1, 2, 3)$ をそれぞれ
- $$C_1 = \{z = x \mid 0 \leq x \leq R\}, \quad C_2 = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi/3\}$$
- $$C_3 = \{z = ze^{2\pi i/3} \mid 0 \leq z \leq R\}$$
- で定める. このとき各曲線 C_j に沿う複素関数 $\frac{1}{z^3+1}$ の積分 $I_j = \int_{C_j} \frac{dz}{z^3+1}$ を, パラメータ x または θ を用いて表せ.
- (2) 単一閉曲線 $C = C_1 + C_2 - C_3$ に沿う積分 $I = \int_C \frac{dz}{z^3+1}$ の値が $\frac{2\pi i}{3} e^{-2\pi i/3}$ となることを示せ.
- (3) $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2 = 0$ となることを利用して, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ.
- ④ (1) $t \geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ と, $0 \leq t < \lambda$ のとき $g(t) = 0, t \geq \lambda$ のとき $g(t) = f(t-\lambda)$ で与えられる関数 $g(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[g(t)]$ の関係式を求めよ. ただし, $\lambda > 0$ とする.
- (2) $t \geq 0$ で定義された周期が 1 の周期関数 $f(t) = t(1-t) \ (0 \leq t \leq 1), f(t+1) = f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ.