H24

④続き

(2)

$|z|=\sqrt{3}$ 内にある $f(z)$ の特異点は

$z = 1 \pm i$

よって

$$\int_{|z|=\sqrt{3}} f(z)\, dz = 2\pi i \left(Rec[1+i] + Rec[1-i] \right)$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4(1+2i)} - \frac{1}{4(1-2i)} \right) = -\frac{\pi}{5} i$$

(3)

C_R と実軸上の $-R \leqq x \leqq R$ で囲む経路を C とすると

C 内にある $f(z)$ の特異点は

$z = 2i,\ 1+i$ の2点である.

よって

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \left(Res[2i] + Res[1+i] \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{8(2-i)} - \frac{1}{4(1-2i)} \right) = \frac{3}{20}\pi$$

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0 \text{ より}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_C f(z)\, dz$$

$$= \frac{3}{20}\pi$$