2016 ベクトル解析

2

$A = (x^2 z,\ yz,\ z^2)$　　$S_1 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \leqq 1$

$S_2 : x^2+y^2 \leqq 3,\ z = 1$

$S = S_1 \cup S_2$

(1) $\mathrm{div}\,A$

$\mathrm{div}\,A = 2xz + z + 2z = \underline{2xz + 3z}$

(2) $\iint_{S_2} A \cdot n\, dS$

S_2は xy平面に垂直なので単位法線ベクトルn_2は

$n_2 = (0, 0, 1)$ なので

$\iint_{S_2} A \cdot n_2\, dS = \iint_{S_2} (x^2 z, yz, z^2)(0,0,1)\, dS$

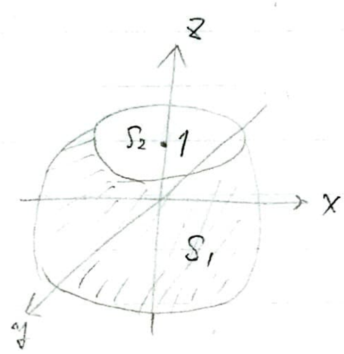
$= \iint_{S_2} z^2\, dS$

$z = 1$なので $= \iint_{S_2} dS$

S_2の面積は半径$\sqrt{3}$の円なので $\pi \times \sqrt{3}^2 = 3\pi$

$\iint_{S_2} dS = 3\pi$

よって $\iint_{S_2} A \cdot n\, dS = \underline{3\pi}$



(3) $\iint_{S_1} A \cdot n\, dS$

$\iint_S A \cdot n\, dS = \iint_{S_1} A \cdot n\, dS + \iint_{S_2} A \cdot n\, dS$ なので

$\iint_S A \cdot n\, dS$ を求める.

閉曲面S ($S_1 \cup S_2$)で囲まれる領域をVとすると

ガウスの発散定理より

$\iint_S A \cdot n\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\,A\, dV$

(2)より $= \iiint_V (2xz + 3z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_x \int_y \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{1} (2xz + 3z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_x \int_y \left[xz^2 + \frac{3}{2} z^2 \right]_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{1} dy\, dx$

$= \int_x \int_y \left(x + \frac{3}{2} - x(4-x^2-y^2) - \frac{3}{2}x(4-x^2-y^2) \right) dy\, dx$

ここで $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ $(0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$とすると

ヤコビ行列より $dx\, dy = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$

$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta + \frac{3}{2} - r\cos\theta \cdot (4 - r^2) - \frac{3}{2}(4 - r^2) \right) r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(r^4 \cos\theta - 3r^2 \cos\theta - \frac{9}{2} r + \frac{3}{2} r^3 \right) dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{5} r^5 - r^3 \right) \cos\theta - \frac{9}{4} r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right]_0^2 d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{32}{5} - 8 \right) \cos\theta - 9 + 6 \right) d\theta$

$= \left[-\frac{8}{5} \sin\theta - 3\theta \right]_0^{2\pi}$

$= -6\pi$

$\iint_S A \cdot n\, dS = \iint_{S_1} A \cdot n\, dS + \iint_{S_2} A \cdot n\, dS$

$-6\pi = \iint_{S_1} A \cdot n\, dS + 3\pi$

$\iint_{S_1} A \cdot n\, dS = \underline{-9\pi}$

$= \int_0^2 \left[(r^4 - 3r^2) \sin\theta + \left(\frac{3}{2} r^3 - \frac{9}{2} r \right) \cdot \theta \right]_0^{2\pi} dr$

$= \int_0^2 (3r^3 - 9r)\pi\, dr$

$= \pi \left[\frac{3}{4} r^4 - \frac{9}{2} r^2 \right]_0^2$

$= (12 - 18)\pi = -6\pi$