H19

問1

(1) 内導体にQの電荷が与えられたとし、
軸方向に長さ1[m]、半径rの
円筒状の閉曲面を考える
まず、電界分布を求める

・ $0 \leq r \leq a$ のとき

閉曲面内に電荷は存在しないので

$$E_1(r) = 0$$

・ $a \leq r \leq b$ のとき

ガウスの定理より

$$\int E_2(r)\, dr = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2(r) = \frac{Q}{2\pi r \varepsilon_0}$$

次に電位分布を求める

・ $a \leq r \leq b$ のとき

$$\phi_2(r) = -\int_\infty^b \overset{=0}{E\, dr} - \int_b^r E_2(r)\, dr$$

$$= 0 + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{b}{r}$$

$$\phi_1(r) = \phi_2(a) + \int_a^r \overset{=0}{E_1(r)}\, dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

導体間の電位差Vは

$$V = \phi_2(a) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

よって $Q = CV$ より

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log \frac{b}{a}}$$

(2) (1) より

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log \frac{b}{a}} V$$

導体間の電界Eは

$$E = \frac{Q}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$$= \frac{V}{r \log \frac{b}{a}}$$

$a \leq r \leq b$ なので

$r = a$ のとき E は最大.

その値は $\dfrac{V}{a \log \frac{b}{a}}$

$$r_{E\,max} = a, \quad E_{max} = \frac{V}{a \log \frac{b}{a}}$$

(3) $E_{max} = \dfrac{V}{a \log \frac{b}{a}}$

$f(a) = a \log \frac{b}{a}$ とすると

$f(a)$ が最大で E_{max} が最小

$$f'(a) = \log \frac{b}{a} - 1 = 0$$

$$\log \frac{b}{a} = 1$$

$$\frac{b}{a} = e$$

$$a = \frac{b}{e}$$

よって

$$E_{min} = \frac{V}{\frac{b}{e} \log \frac{b}{b} e} = \frac{eV}{b}$$

(4) $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log \frac{b}{a}} = 2\pi\varepsilon_0$$

a, bによらない