2013 ベクトル解析

$\boxed{2}$

$f(x,y,z) = x^2+y^2-(1-z)^2 \qquad V = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1,\ f(x,y,z) \le 0\}$

$\boldsymbol{u} = (z f(x,y,z),\ z f(x,y,z),\ f(x,y,z)+1)$

Vの底面 $S_1 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 1\}$

側面 $S_2 = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1,\ f(x,y,z) = 0\}$

$S = S_1 \cup S_2$

(1) S_1の面積とVの体積、$\iint_S (x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\, dS$

(S_1の面積) $= \pi \cdot 1^2 = \underline{\pi}$

Vの体積は zを定数とすると xy平面で半径 $1-z$ の円だから

$\pi(1-z)^2$ となり、$0 \le z \le 1$ なので

$V = \int_0^1 \pi(1-z)^2\, dz = \left[-\frac{1}{3}\pi(1-z)^3\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{3}}$

$\iint_S (x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\, dS$ において SはVの境界なのでガウスの発散定理より

$\iint_S (x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}(x,y,z)\, \boldsymbol{n}\, dS = 3\iiint_V dV = 3 \times \frac{\pi}{3} = \underline{\pi}$

(2) S_1における$\boldsymbol{n}_1$、S_2における$\boldsymbol{n}_2$のz成分が定数

S_1において $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$ とすると

$\boldsymbol{r}(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (0, 0, 1)$

$\boldsymbol{n} = \frac{1}{1}(0,0,1) = (0,0,1)$ 外向き単位法線ベクトルなので $\underline{(0,0,-1)}$

S_2において、$x = u,\ y = v$ とすると

$\boldsymbol{r}(u,v) = (u,\ v,\ 1-\sqrt{u^2+v^2})$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$

$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

z成分は定数」

(3) S_2における$\boldsymbol{u}$、S_2の面積、$\iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\, dV$

S_2では $f(x,y,z) = 0$ なので

$\underline{\boldsymbol{u}_2 = (0,0,1)}$

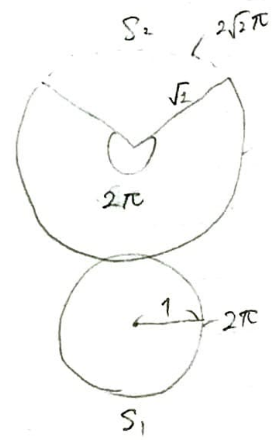
(S_2の面積) $= \sqrt{2}^2 \times \pi \times \frac{2\pi}{2\sqrt{2}\pi} = \underline{\sqrt{2}\pi}$

$\iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\, dV = \iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{S_1} \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\, dS + \iint_{S_2} \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{n}_2\, dS$

$= \iint_{S_1} (0, 0, x^2+y^2)\cdot(0,0,-1)\, dS + \iint_{S_2} (0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \iint_{S_1} -(x^2+y^2)\, dS + \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_2} dS$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\pi = \underline{\frac{\pi}{2}}$



$\iint_{S_1} (x^2+y^2)\, dS \qquad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}$