2015 ベクトル解析

2

$A = (x(y-z)+z^2,\ y(z-x)+x^2,\ z(x-y)+y^2)$

$S:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$

$D:\ x^2+y^2 \leq 1 \quad z=0$

(1) $\mathrm{div} A$, $\mathrm{rot} A$

$\mathrm{div} A = (y-z)+(z-x)+(x-y) = \underline{0}$

$\mathrm{rot} A = (-z+2y-y,\ -x+2z-z,\ -y+2x-x)$

$= \underline{(y-z,\ z-x,\ x-y)}$

(2) S と D、それぞれの単位法線ベクトル ($z \geq 0$)

$S:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$

$x=u,\ y=v$ とすると $r(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

$\frac{\partial r}{\partial u} = (1,0,\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}})$, $\frac{\partial r}{\partial v} = (0,1,\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}})$

$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ 1)$

$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{1-u^2-v^2}+\frac{v^2}{1-u^2-v^2}+\frac{1-u^2-v^2}{1-u^2-v^2}}}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)$

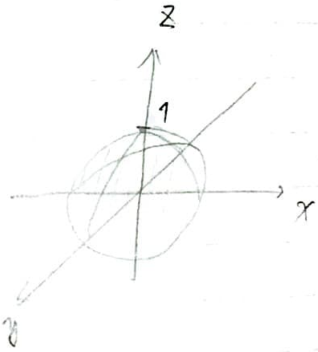
$= (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) = \underline{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})}$

$D:\ x^2+y^2 \leq 1 \quad z=0$

$x=u,\ y=v$ とすると $r(u,v)=(u,v,0)$

$\frac{\partial r}{\partial u} = (1,0,0)$, $\frac{\partial r}{\partial v} = (0,1,0)$

$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v} = (0,0,1) \qquad n = \frac{1}{1}(0,0,1) = \underline{(0,0,1)}$



(3) $\iint_S A\cdot n\, dS$

$S \cup D$ である閉曲面を S' とし、S' で囲まれる領域を V とすると

ガウスの発散定理より

$\iint_{S'} A\cdot n\, dS = \iiint_V \mathrm{div} A\, dV = 0$ ((1)より)

また $\iint_D A\cdot n_D\, dS = \iint_D (zx-zy+y^2)\, dS$

$z=0$ なので $= \iint_D y^2\, dS$

D において $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ $(0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$ とすると

ヤコビ行列より $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$\iint_D A\cdot n_D\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\theta\cdot r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\sin^2\theta\right]_0^1 d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$

$\iint_{S'} A\cdot n\, dS = \iint_S A\cdot n\, dS + \iint_D A\cdot n\, dS$

$0 = \iint_S A\cdot n\, dS + \frac{\pi}{4}$

$\iint_S A\cdot n\, dS = \underline{-\frac{\pi}{4}}$