2014 ベクトル解析

2

$V: x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \leq 1$, $A=(x, y, \frac{z}{4})$

S は V の境界 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$

(1) V において z を定数とすると

$x^2+y^2 \leq 1-\frac{z^2}{4}$ なので面積は

$\pi \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}^2 = \pi\left(1-\frac{z^2}{4}\right)$

$-2 \leq z \leq 2$ なので

$(V\text{の体積}) = \int_{-2}^{2} \pi\left(1-\frac{z^2}{4}\right) dz$

$= \pi\left[z-\frac{1}{12}z^3\right]_{-2}^{2} = \pi\left(4-\frac{2}{12}8\right) = \underline{\frac{8}{3}\pi}$ //

(2) S 上の点 (x, y, z) における外向き単位法線ベクトル n と $A \cdot n$

$z \geq 0$ と $z<0$ で場合分けする。
分けても $A \cdot n$ は一致する。

$x=u$, $y=v$ とすると $r(u, v)=(u, v, 2\sqrt{1-u^2-v^2})$

$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-2u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$, $\frac{\partial r}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-2v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$

$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{2u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{2v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$

$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{4u^2}{1-u^2-v^2}+\frac{4v^2}{1-u^2-v^2}+\frac{1-u^2-v^2}{1-u^2-v^2}}}\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1+3u^2+3v^2}}\left(2u, 2v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$

$= \underline{\frac{1}{\sqrt{1+3x^2+3y^2}}\left(2x, 2y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)}$ //

$A \cdot n = \left(x, y, \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}\right) \cdot n$

$= \frac{1}{\sqrt{1+3x^2+3y^2}}\left(2x^2+2y^2+\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+3x^2+3y^2}}\left(1+3x^2+3y^2\right) = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{1+3x^2+3y^2}}$ //

(3) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{16}}\, dS$

S において $z=2\sqrt{1-x^2-y^2}$ なので

$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)}\, dS$

$= \iint_S \frac{1}{2}\sqrt{1+3x^2+3y^2}\, dS$

(2)より $= \iint_S A \cdot n\, dS$

S は V の境界なのでガウスの発散定理より

$\iint_S A \cdot n\, dS = \iiint_V \operatorname{div} A\, dV$

$\operatorname{div} A = 1+1+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ なので

$\iiint_V \operatorname{div} A\, dV = \frac{9}{4}\iiint_V dV$

(1)を用いて $= \frac{9}{4} \times \frac{8}{3}\pi = 6\pi$

よって $\iint_S \sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{16}}\, dS = \underline{6\pi}$ //