2017 ベクトル解析

[2]

$A = (y-x,\ z-y,\ x-z)$ 、 $B = (z, x, y)$

(1) $\mathrm{rot}(A\times B) = \nabla\times(A\times B)$

$A\times B = (y(z-y) - x(x-z),\ z(x-z) - y(y-x),\ x(y-x) - z(z-y))$

$\nabla\times(A\times B) = (x+z-x+2z,\ x+y-y+2x,\ y+z-z+2y)$

$= \underline{(3z, 3x, 3y)}$

(2) 曲線 C ; $H(t) = (1, t, t^2)$ $(0\le t\le 1)$

$\int_C B\cdot dH$

B を $H(t)$ を用いて表すと

$B = (t^2, 1, t)$

また $\frac{dH}{dt} = (0, 1, 2t)$ なので

$\int_C B\cdot dH = \int_0^1 (t^2, 1, t)\cdot(0, 1, 2t)\,dt$

$= \int_0^1 (1+2t^2)\,dt = [t+\frac{2}{3}t^3]_0^1 = \underline{\frac{5}{3}}$

(3) 楕円面 S : $x^2+4y^2+9z^2=1$

$\iint_S \{\mathrm{grad}(B\cdot(\mathrm{rot}(A\times B)))\}\cdot n\,dS$

閉曲面 S で囲まれた領域を V とすると

ガウスの発散定理より

$\iint_S \{\mathrm{grad}(B\cdot(\mathrm{rot}(A\times B)))\}\cdot n\,dS$

$= \iiint_V \mathrm{div}\{\mathrm{grad}(B\cdot(\mathrm{rot}(A\times B)))\}\,dV$

ここで (1) より

$\mathrm{rot}(A\times B) = (3z, 3x, 3y)$

$B\cdot\mathrm{rot}(A\times B) = 3z^2+3x^2+3y^2$

$\mathrm{grad}(B\cdot\mathrm{rot}(A\times B)) = (6x, 6y, 6z)$

$\mathrm{div}\{\mathrm{grad}(B\cdot\mathrm{rot}(A\times B))\} = 6+6+6 = 18$

よって $\iiint_V \mathrm{div}\{\mathrm{grad}(B\cdot(\mathrm{rot}(A\times B)))\}\,dV$

$= 18\iiint_V dV$

$\iiint_V dV$ において z を定数としたとき

S : $x^2+4y^2 = 1-9z^2$

$\frac{1}{1-9z^2}x^2 + \frac{4}{1-9z^2}y^2 = 1$

面積は $\pi\cdot\sqrt{1-9z^2}\cdot\frac{\sqrt{1-9z^2}}{2} = \frac{\pi}{2}(1-9z^2)$ なので $-\frac{1}{3}\le z\le\frac{1}{3}$ から

$\iiint_V dV = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{2}(1-9z^2)\,dz$

$= [\frac{\pi}{2}(z-3z^3)]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{2}(\frac{2}{3} - (\frac{1}{9}+\frac{1}{9})) = \frac{4}{18}\pi$

よって $\iint_S \{\mathrm{grad}(B\cdot(\mathrm{rot}(A\times B)))\}\cdot n\,dS = 18\cdot\frac{4}{18}\pi = \underline{4\pi}$

楕円の面積

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ のとき

$S = \pi ab$