H22

$\boxed{2}$

(1)

(i) $z \leq 0$ のとき

$z = x^2+y^2-1$ より 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (1,\ 0,\ 2x), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0,\ 1,\ 2y)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (-2x,\ -2y,\ 1)$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

外向き法線ベクトルであることに注意して

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x,\ 2y,\ -1)$$

(ii) $z > 0$ のとき

$z = 1-x^2-y^2$ より 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ 1-x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (1,\ 0,\ -2x), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0,\ 1,\ -2y)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (2x,\ 2y,\ 1)$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

外向き法線ベクトルであることに注意して

$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x,\ 2y,\ 1)$$

(2)

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} & (z \leq 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x^2+2y^2-1) & (z > 0) \end{cases}$$