H28　電磁気

問1

(1)

(i) $0 \leq r \leq a$

閉曲面内に電荷が存在しないので

$$E = 0$$

(ii) $a \leq r \leq 2a$

(i)と同様に

$$E = 0$$

(iii) $2a \leq r \leq 4a$

ガウスの定理より

$$\int E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$

(iv) $4a < r$

ガウスの定理より

$$\int E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(2)

(i) $4a < r$

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(ii) $2a < r < 4a$

$$\phi(r) = -\int_\infty^{4a} E\,dr - \int_{4a}^{r} E\,dr$$

$$= \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4a}\right)$$

(iii) $0 \leq r \leq 2a$

$$\phi(r) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} - \int_{4a}^{2a} E\,dr - \int_{2a}^{r} E\,dr$$

$$= \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{16\pi\varepsilon_2 a} + 0$$

$$= \frac{Q}{16\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

(3)

$$U = \frac{1}{2}QV$$

$$= \frac{1}{2}Q \cdot \frac{Q}{16\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

(4)

球殻Aに電荷Q'が与えられたとすると

中心からrの距離の電界の大きさは

(i) $0 \leq r \leq a$

$$E = 0$$

(ii) $a \leq r \leq 2a$

$$E = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$$

(iii) $2a \leq r \leq 4a$

$$E = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$

(iv) $4a \leq r$

$$E = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

球殻CとAの電位が同じになるので

$$-\int_\infty^{4a} \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\int_\infty^{4a} \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \int_{4a}^{2a} \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\,dr - \int_{2a}^{a} \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\,dr$$

$$0 = \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{4a}\right) + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \frac{Q+Q'}{16\pi\varepsilon_2 a} + \frac{Q'}{8\pi\varepsilon_1 a}$$

$$= \varepsilon_1(Q+Q') + 2\varepsilon_2 Q'$$

$$Q' = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}Q$$