

2008

H20

金沢大学大学院自然科学研究科 博士前期課程入学試験 問題用紙	
対 象	電子情報工学専攻, 機能機械科学専攻, 人間・機械科学専攻, 社会基盤工学専攻
試験科目名	数 学 P. 1 / 1

2008年8月26日(火) 10:00 - 11:00

[注意] 1. 問題 1, 2, 3, 4 のうち, 2 題を選択して解答すること。

2. 解答は各題ごとに分けて, 1 題を 1 枚の答案用紙の表に書くこと。

1. 次の微分方程式を解け。

$$(1) (1+x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}. \quad (3) \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2.$$

2. 平面  $P: x+y+z=\sqrt{3}$ , 球面  $S: x^2+y^2+z^2=4$ , 円  $C=P \cap S$  を考える。次の問いに答えよ。(1)  $P$  と原点との距離,  $C$  の半径およびそれに囲まれた円板の面積を求めよ。(2)  $u = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$ ,  $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  とする。  $\text{rot } u$  および  $\text{rot } u \cdot n$  を求めよ。(3)  $C$  が向きづけられたとする。(1), (2) の結果を利用して, 線積分

$$\int_C \{(2z - 3y)dx + (3x - z)dy + (y - 2x)dz\}$$

の絶対値を求めよ。

3. 複素関数  $f(z)$  が円  $C = \{z: |z|=3\}$  上およびその内部  $D = \{z: |z|<3\}$  で正則であるとする。(1) 領域  $D$  内の各点  $z$  において,  $f(z)$  の値と  $C$  に沿う複素積分  $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  の関係について述べよ。

(2) 等式

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta(\zeta - 1)} + \frac{z(z-1)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)} + \frac{z(z-1)(z-2)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)(\zeta-z)}$$

を利用すると,  $D$  内で

$$f(z) = f(0) + a_1 z + \frac{a_2}{2} z(z-1) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z(z-1)(z-2)f(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)(\zeta-z)} d\zeta$$

が成り立つことがわかる。定数  $a_1$  と  $a_2$  を  $f(z)$  の値を用いて表せ。(3) 正の整数  $n$  について, 円  $C_n = \{z: |z|=n+1\}$  を考える。このとき  $n < |z| < n+1$  となる複素数  $z$  について

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z-1)\cdots(z-n) \sin \pi \zeta}{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-n)(\zeta-z)} d\zeta = \sin \pi z$$

が成り立つことを示せ。

4. 有界で微分可能な関数  $f(x)$ ,  $0 \leq x < \infty$  に対し, そのラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

とし, またその逆変換を  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  と表す。(1)  $\mathcal{L}[\sin \lambda t]$  を上の定義に従って求めよ。(2)  $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$  を示せ。(3)  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(z) dz\right] = \frac{1}{s} F(s)$  を (2) を用いて示せ。(4)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + \lambda^2)}\right]$  を (1) と (3) を用いて求めよ。