Доказательство принципа максимума и модель Рамсея

Задачи на принцип максимума

Задачи из этой секции обязательно прорешать при подготовке к экзамену!

Упражнение 1.

$$J = x_2(1) \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u_1 x_1 + u_1^2 x_2, & |u_1| \leqslant 1 \\ \dot{x}_2 = u_2 x_1 - 3u_1^2 x_2, & |u_2| \leqslant 1 \end{cases}$$

Упражнение 2.

$$J = \int\limits_0^1 \left[u_1^2 + x_1 x_2 - u_2\right] dt + x_1(0)x_2(0) - x_1(1)x_2^2(0) \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 x_2, & |u_1| \leqslant 1 \\ \dot{x}_2 = u_2 x_1, & |u_2| \leqslant 1 \end{cases}$$

*PS. Изначально этот раздел был в самом конце, но я изменил компоновку, чтобы вы точно его увидели. **Обязательно** научитесь решать такие задачи, на экзамене по крайней по одной такой будет у каждого.*

1 Абстрактная задача нелинейного программирования (АЗНЛП)

Пусть задано некоторое множество произвольной природы. *Например, это множество специй, которые Вы собираетесь добавить в суп.*

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\begin{cases} J_0(s) \to \inf, \quad s \in S, \\ J_1(s) = J_2(s) = \ldots = J_3(s) = 0. \end{cases}$$

Идея для построение решения задачи в такой постановке: ввести конечномерную параметризацию.

Пусть $s^* \in S$ — оптимальная точка, $\bar{J} = [J_0, J_1, \ldots, J_k]^T$. Пусть некоторые параметры $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{k+1})$ заданы таким образом, что для всех элементов s из окрестности s^* выполнено

$$s = \zeta(\rho), \quad s^* = \zeta(0).$$

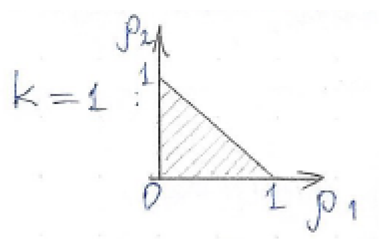
При этом при выборе параметризации подберём $\zeta(\cdot)$ таким образом, чтобы значения параметров ρ_i были неотрицательными:

$$\rho_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k+1.$$

Запишем ограничения, накладываемые на описанную параметризацию, более формально.

Пусть $e_1, \ldots, e_{k+1}$ — стандартный ОНБ в $\mathbb{R}^{k+1}$, *то есть* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, *где 1 стоит на i-ом месте.* Рассмотрим симплекс следующего вида:

$$C = \operatorname{conv}\left\{(0, \ldots, 0)^T, e_1, \ldots, e_k\right\}$$



Тогда, ввиду нашего требования неотрицательности для ρ_i,

$$\exists \eta > 0\colon \quad \rho \in \eta C,$$

где $\eta C = \operatorname{conv}\{(0, \ldots, 0), \eta e_1, \ldots, \eta e_k\}$;

Тогда $\zeta\colon \eta C \to S$. Чаще всего удаётся построить непрерывную параметризацию $\zeta(\cdot)$, но, вообще говоря, непрерывной она быть не обязана.

Непрерывность мы потребуем от $\bar{J}(\zeta(\cdot))$ — эта функция обязательно должна быть непрерывной в ηC. Свойства же каждой из двух функций нам, вообще говоря, не важны.

Определение 1. $\bar{M} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ — *конический дифференциал от $\bar{J}$ в s^* вдоль $\zeta(\rho)$, если*

$$\bar{J}(\zeta(\rho)) = \bar{J}(\zeta(0)) + \bar{M}\rho + \bar{o}(\|\rho\|).$$

Определение 2. *Конус $\bar{K} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ — конус вариации $\bar{J}$ в s^*, если для любых линейно-независимых векторов $\forall \bar{d}^1, \ldots, \bar{d}^{k+1} \in \bar{K}$ $\exists\, \eta > 0, \zeta:$*

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{d}^1 & \ldots & \bar{d}^{k+1} \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{— конический дифференциал.}$$

Теорема 1 (абстрактное правило множителей Лагранжа)**.** *Пусть $s^* \in S$, s^* — решение АЗНЛП, то есть*

$$J_1(s^*) = \ldots = J_k(s^*) = 0, \quad J_0(s^*) \leqslant J_0(s)\, \forall s \in S.$$

*Пусть $\bar{K}$ — **выпуклый** конус вариаций в s^*.*

Тогда существует $\exists\, \bar{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_k)^T \neq 0$ такой, что $\lambda_0 \leqslant 0$ и

$$\left\langle \bar{\lambda}, \bar{d} \right\rangle \leqslant 0,\ \forall \bar{d} \in \bar{K}$$

Идея доказательства. Рассмотрим

$$\bar{l} = \left\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^{k+1},\ y_0 \leqslant 0, y_1 = \ldots = y_k = 0 \right\}.$$

$\bar{K}$ и $\bar{l}$ отделимы, то есть

$$\exists \bar{\lambda} \neq 0\colon \forall \bar{y} \in \bar{l}\, \forall \bar{d} \in \bar{K} \Rightarrow \left\langle \bar{\lambda}, \bar{d} \right\rangle \leqslant 0 \leqslant \left\langle \bar{\lambda}, \bar{y} \right\rangle,$$

поскольку $0 \in \bar{l} \cap \bar{K}$. При этом $\left\langle \bar{\lambda}, \bar{y} \right\rangle = \lambda_0 y_0 \geqslant$, что, совместно с условием $y_0 \leqslant 0$, даёт нам $\lambda_0 \leqslant 0$.

Если они не отделимы, то найдётсся s, удовлетворяющее ограничениям, такое, что $J_0(s) < J_0(s^*)$. ■

2 Доказательство принципа максимума

Итак, $s = \{t_0, t_1, x^0, u(\cdot)\} \in S$. u^* является кусочно-непрерывной, в точке $t = t_0$ — непрерывной справа и всюду непрерывной слева.

Выписываем в привычном нам виде $e = (t_0, x^0, t_1, x^1)$, $\varphi_0(e) \to \min$, $\varphi_1(e) = \ldots = \varphi_k(e) = 0$,

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \ldots \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \quad s^* = \{t_0^*, t_1^*, x^{0*}, u^*(\cdot)\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $e^* = (t_0^*, x^{0*}, t_1^*, x^{1*})$. *Определим векторы*

(i) $\pm\left[\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial t_0} + \dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^0}(e^*)f(t_0^*, x^*(t_0^*), u^*(t_0^*))\right]$;

(ii) $\pm\left[\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial t_1} + \dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^1}(e^*)f(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*))\right]$;

(iii) $\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^0}(e^*)\delta x^0 + \dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^1}(e^*)\delta x^{(0)}(t_1^*)$, *где*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta x^{(0)}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\delta x^{(0)}(t), \\ \delta x^{(0)}(t_0^*) = \delta x^0; \end{cases}$$

(iv) $\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^1}(e^*)\delta x(t_1^*)$, *где*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\delta x(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\delta x(t), \\ \delta x(\tau) = f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)); \end{cases}$$

Тогда выпуклый конус $\bar K$, *порождённый* $(i), (ii), (iii), (iv)$, *является конусом вариаций.*

Доказательство. Без доказательства. ■

Замечание 1. *Эти вариации получены при варьировании каждой из* $\bar\varphi(e^*) = t_0^*, x^{0*}, t_1^*, x^{1*}$.
(i) и (ii) — проварьировали $t_0 = t_0^* + \delta t_0$ *и* $t_1 = t_1^* + \delta t_1$ *соответственно.*
(iii) получается при варьировании $x^0 = x^{0*} + \delta x^0$ *аналогично тому, как мы делали в доказательстве теоремы о зависимости от начальных параметров; отсюда и такая знакомая и похожая система на вариацию.*
(iv) — проварьировали по x^1, *что возможно только при варьировании управления. Отсюда здесь возникает* τ *— это момент времени, в который мы подставили «иголку». Используя игольчатую вариацию, получим соответствующее изменение* x^1, *которое мы варьируем в* $\bar\varphi$.

Теперь мы готовы доказать принцип максимума, сформулированный в прошлый раз.

Теорема 3. *Пусть* $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ *— оптимальная пара с* $e^* = (t_0^*, x^{0*}, t_1^*, x^{1*})$. *Тогда … (ПМП).*

Доказательство. По абстрактному правилу множителей Лагранжа $\exists\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_K)^T \neq 0$:

$$\lambda_0 \leqslant 0, \left\langle \bar{\lambda}, \bar{d} \right\rangle \leqslant 0 \quad \forall \bar{d} \in \bar{K}.$$

Обозначим (СС):

$$\dot{\psi}^*(t) = -\left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right|_{\ldots} = -\left[\frac{\partial f(t, x^*(t), u^*(t))}{\partial x}\right]^T \psi^*(t),$$

начальное условие (одно из УТ)

$$\psi^*(t_1^*) = \left(\frac{\partial \varphi(e^*)}{\partial x^1}\right)^T \bar{\lambda}$$

Для любого $\tau \in (t_0^*, t_1^*)$, $\forall v \in \mathscr{P}$:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \psi^*(t), \delta x(t) \right\rangle = \left\langle -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T \psi^*, \delta x(t) \right\rangle + \left\langle \psi^*, \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \delta x \right\rangle = 0.$$

$$\left\langle \psi^*(t_1^*), \delta x(t_1*) \right\rangle = \left\langle \psi^*(\tau), \delta x(\tau) \right\rangle.$$

Поскольку (из (iv)):

$$\psi^*(t_1^*) = \left[\frac{\partial \bar{\varphi}(e^*)}{\partial x^1}\right]^T \bar{\lambda} = \left\langle \bar{\lambda}, \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^1}\right] \delta x(t_1^*) \right\rangle = \left\langle \bar{\lambda}, \bar{d} \right\rangle \leqslant 0,$$

а

$$\delta x(\tau) = f(\tau, x^*(\tau), v) - f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)),$$

отсюда получаем (УМ):

$$\left\langle \psi^*(\tau), f(\tau, x^*(\tau), v) \right\rangle \leqslant \left\langle \psi^*(\tau), f(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) \right\rangle.$$

Аналогично $\frac{d}{dt}\left\langle \psi^*(t), \delta x^{(0)}(t) \right\rangle = 0$, $\delta x^{(0)}(t_0^*) = \delta x^0$,

$$\psi^*(t_1^*) = \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^1}\right]^T \bar{\lambda} = \left\langle \bar{\lambda}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^1} \delta x^{(0)}(t_1^*) \right\rangle$$

Подставив эти значения и прибавив в обоих частях выражение $\left\langle \bar{\lambda}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^0} \delta x^0 \right\rangle$, получим (с учётом (iii)):

$$\left\langle \psi^*(t_0^*), \delta x^0 \right\rangle + \left\langle \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^0}\right]^T, \delta x^0 \right\rangle = \left\langle \bar{\lambda}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^1} \delta x^{(0)}(t_1^*) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^0} \delta x^0 \right\rangle \leqslant 0.$$

То есть
$$\left\langle \psi^*(t_0^*) + \left[\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x^0}\right]^T \bar\lambda, \delta x^0 \right\rangle \leqslant 0, \quad \forall \delta x^0 \in \mathbb{R}^n.$$
Положим $\psi^*(t_0^*) = -\left[\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x^0}\right]^T \bar\lambda$, получим второе условие трансверсальности.

Пусть теперь $j = 0, 1$. Используем (i) и (ii), из них следует, что $\left\langle \bar\lambda, \bar d \right\rangle \leqslant 0$, и одновременно с этим $\left\langle \bar\lambda, -\bar d \right\rangle \leqslant 0$, то есть $\left\langle \bar\lambda, \bar d \right\rangle = 0$.

Тогда
$$\left\langle \bar\lambda, \frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial t_j} + \frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial x^j} f(t_j^*, x^*(t_j^*), u^*(t_j^*)) \right\rangle = 0.$$
Подставляя в
$$\left\langle \frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial t_j}, \bar\lambda \right\rangle + \left\langle \left[\frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial x^j}\right]^T \bar\lambda, f(t_j^*, x^*(t_j^*), u^*(t_j^*)) \right\rangle = 0$$
значения
$$\left[\frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial x^0}\right]^T \bar\lambda = -\psi^*(t_0^*),$$
$$\left[\frac{\partial\bar\varphi(e^*)}{\partial x^1}\right]^T \bar\lambda = \psi^*(t_1^*),$$
получим (УТ) по времени.

Мы доказали принцип максимума. ■

Пусть теперь $\exists \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Существует ли производная
$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t, x^*(t), \psi^*(t), u^*(t))?$$
Рассмотрим $h(t, v) = \langle \psi^*(t), f(t, x^*(t), v)\rangle$. Эта функция непрерывна по t и, в силу (УМ),
$$\max_{v\in\mathscr{P}} h(t, v) = h(t, u^*(t)),$$
u^* — кусочно-непрерывная, непрерывная слева. $\forall t \in (t_0^*, t_1^*)$ подберём Δt: $t + \Delta t \in (t_0^*, t_1^*)$. Тогда
$$h(t, u^*(t+\Delta t)) \leqslant h(t, u^*(t)),$$
$$h(t+\Delta t, u^*(t)) \leqslant h(t+\Delta t, u^*(t+\Delta t)).$$

Устремляем $\Delta t \to 0$:

$$h(t, u^*(t \pm 0)) \leqslant h(t, u^*(t)) \leqslant h(t, u^*(t \pm 0)),$$

то есть $h(t, u^*(t))$ — непрерывна по t.

Снова воспользуемся свойством h: при $\Delta t > 0$

$$\begin{gathered}\Delta h = h(t+\Delta t, u^*(t+\Delta t)) - h(t, u^*(t)) \Rightarrow \\ \Delta h \leqslant h(t+\Delta t, u^*(t+\Delta t)) - h(t, u^*(t+\Delta t)), \\ \Delta h \geqslant h(t+\Delta t, u^*(t)) - h(t, u^*(t)).\end{gathered}$$

Пусть t — точка непрерывности $u^*(\cdot)$ (такие точки п.в.), тогда можем оба неравенства разделить на $\Delta t \to 0$ и получить

$$\frac{d}{dt} h(t, u^*(t)) = \frac{\partial h(t, u^*(t))}{\partial t} = \left.\frac{\partial h(t, v)}{\partial t}\right|_{v=u^*(t)}.$$

Таким образом, перешли от полной производной к частной.

С другой стороны,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left\langle -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T \psi^*(t), f(t, x^*(t), v)\right\rangle + \left\langle \psi^*(t), \frac{\partial f}{\partial t}(t, x^*(t), v)\right\rangle + \\ + \left\langle \psi^*(t), \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x^*(t), u^*(t))\right\rangle.$$

Приводя слагаемые, получаем

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{v=u^*(t)} = \left\langle \psi^*(t), \frac{\partial f}{\partial t}(t, x^*(t), u^*(t))\right\rangle.$$

Следствие 1.

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \mathcal{H}(t_0^*, x^*(t_0^*), \psi^*(t_0^*), u^*(t_0^*)) + \\ + \int\limits_{t_0^*}^{t} \left\langle \psi^*(\tau), \frac{\partial f}{\partial t}(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau))\right\rangle d\tau.$$

Кроме того, в случае, когда система автономная, последний интеграл равен нулю, откуда следует $\mathcal{H} \equiv \mathrm{const}$.

3 Модель Рамсея

Рассмотрим классическую модель из области мат. экономики — модель Рамсея. На её примере мы продемонстрируем, как абстрактное правило множителей Лагранжа может применяться к решению задач управления.

Введём необходимые обозначения.

K — капитал, объём основных фондов. *Не ограничивается только деньгами. Например, если денег во время карантина у Вашей организации много, но Вы снабжаете сотрудников одноразовыми масками, чтобы они могли работать, количество масок станет для Вас важным ресурсом, за которым Вы будете следить.*

L — люди, рабочая сила.

Производственная функция определена как

$$Y = \mathcal{F}(K, L)$$

и представляет собой величину, на которую за единицу времени растёт капитал K при фиксированных значениях (K, L). Это значение мы разделим на две разные по смыслу части: инвестиции в производство I и потребление C *(по сути это и есть наш доход)*:

$$Y = I + C$$

В этой системе управлять мы будем долей Y, возвращаемой обратно в производство:

$$I = u\mathcal{F}, \qquad C = (1-u)\mathcal{F}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Пусть, кроме того, в процессе производства происходит амортизация, определяемая коэффициентом $\mu > 0$.

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающую функционирование описанной динамической системы.

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = \mathcal{F}(K, L)u(t) - \mu K, \\ C(t) = (1 - u(t))\mathcal{F}(K, L). \end{cases}$$

Мы будем предполагать, что производственная функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{F}} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \mathcal{F}(\alpha K, \alpha L) = \alpha \mathcal{F}(K, L), \ \alpha > 0.$$

Первые два условия следуют из интерпретации: мы ожидаем, что если мы увеличим доступный нам капитал или же рабочую силу (наймём дополнительных сотрудников, например), то объёмы производства вырастут. Свойство положительной однородности определяет характер этого роста *(в данном случае,* *прирост будет линейным: например, если мы в 2 раза увеличим количество касс в метро и посадим за них в 2 раза больше билетёров, то они смогут продавать в 2 раза больше билетиков в единицу времени).*

Введём переобозначения, которые упростят нашу систему.

Пусть $k = \dfrac{K}{L}$ — удельный капитал *(капитал на единицу рабочей силы)*, $c = \dfrac{C}{L}$ — доход на душу. Тогда

$$\frac{\mathcal{F}(K,L)}{L} = \mathcal{F}(k,1) \equiv f(k), \qquad c = \frac{C}{L} = (1-u)f(k).$$

Тогда получим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{k} = uf(k) - \mu k, \\ c(t) = (1-u(t))f(k(t)), \\ k(0) = k_0 > 0. \end{cases}$$

Условия на f:

1. $f \in C^2, \quad k > 0$; $f(+\infty) = +\infty$;
2. $f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, k > 0$; $f'(+0) = +\infty,\ f'(+\infty) = 0$;
3. $f''(k) < 0, k > 0$.

Пример производственной функции: функция Кобба-Дугласа

$$f(k) = k^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где α — коэффициент эластичности.

Перейдём непосредственно к постановке задачи управления.

Пусть $t \in [0,T] \Rightarrow k(T) \geqslant k_T > 0$. Будем решать задачу вида

$$\int\limits_0^T \mathbf{e}^{-\rho t} c(t) dt \to \max,$$

то есть стремиться постоянно поддерживать максимальный уровень доходов (а не только в конечный момент времени). Здесь $\rho > 0$ — коэффициент дисконтирования, а $\mathbf{e}^{-\rho t}$ — дисконтирующий множитель. Он всюду убывает и имеет следующую интерпретацию: чем дальше время получения прибыли, тем менее она для нас ценна. *Это может показаться немного странным, поэтому приведём пример. Представьте, что Вы заняли 200 рублей другу. Если он вернёт деньги завтра — считайте, что и не заметили. Если он вернёт их через месяц — уже* *немного неприятно, на них можно было сходить пообедать не в столовую, а куда-то ещё, но пришлось идти в столовую. Если Вы получите эти деньги через год, то, считайте, что они уже почти ничего не стоят — сегодня на них можно купить бизнес-ланч, а через год только половину бизнес-ланча. Так и работает дисконтирование — чем более отдалена дата выплаты, тем меньшую ценность для нас имеет одна и та же сумма.*

Вернёмся к нашей задаче.

$$\begin{cases} \dot{k} = uf(k) - \mu k, \\ k(0) = k_0,\ k(T) \geqslant k_T > 0, \\ J = \displaystyle\int_0^T \mathbf{e}^{-\rho t}(1-u)f(k)dt \to \max. \end{cases}$$

Обобщим её:

$$\dot{x} = f(x,u),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{-\rho t} f^0(x,u)dt \to \max.$$

Функция Гамильтона-Понтрягина для этой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \psi_0 \mathbf{e}^{-\rho t} f^0(x,u) + \langle \psi, f(x,u)\rangle = \\ = \mathbf{e}^{-\rho t}\left(\psi_0 f^0(x,u) + \left\langle \psi \mathbf{e}^{\rho t}, f(x,u)\right\rangle\right) = \\ = \mathbf{e}^{-\rho t}\left(\eta_0 f^0(x,u) + \langle \eta, f(x,u)\rangle\right) = \mathbf{e}^{-\rho t}\tilde{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы перешли от сопряжённых переменных

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi} = -\psi_0 \mathbf{e}^{-\rho t}\dfrac{\partial f^0}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi, \end{cases}$$

к переменным

$$\begin{cases} \dot{\eta}_0 = 0, \\ \dot{\eta} = \rho\eta - \eta_0 \dfrac{\partial f^0}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T \eta. \end{cases}$$

В терминах нашей исходной системы (на $k(\cdot)$):

$$\tilde{\mathcal{H}} = \eta_0(1-u)f(k) + \eta(uf(k) - \mu k),$$

(СС) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_0 = 0, \\ \dot{\eta} = \rho\eta - \eta_0(1-u)f'(k) - \eta(uf' - \mu). \end{cases}$$

Нормальный случай

$$\eta_0 = 0 \Rightarrow \qquad u = \begin{cases} 1, & \eta > 1, \\ [0,1], & \eta = 1, \\ 0, & \eta < 1. \end{cases}$$

$\boldsymbol{\eta > 1}$**:**

$$\begin{cases} \dot k = f(k) - \mu k, \\ \dot\eta = \eta(\rho - f' + \mu) \end{cases}$$

$\boldsymbol{\eta < 1}$**:**

$$\begin{cases} \dot k = \mu k, \\ \dot\eta = \eta(\rho + \mu) - f'. \end{cases}$$

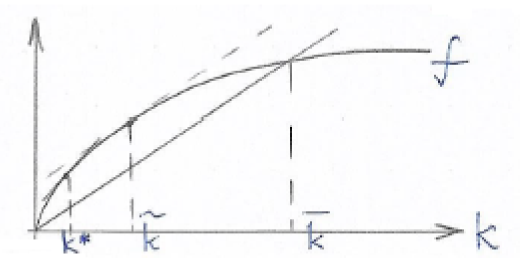
Особый режим? Пусть $\eta = 1$ на $[t_1, t_2]$:

$$0 = \dot\eta = \rho - (1-u)f' - uf' + \mu \Rightarrow f' = \rho + \mu$$
$$\Rightarrow \exists!\, k^*\colon\, f'(k^*) = \rho + \mu \;\Rightarrow\; k = \mathrm{const}$$
$$\Rightarrow\; 0 = \dot k = uf(k^*) - \mu k^* \;\Rightarrow\; u_{oc} = \frac{\mu k^*}{f(k^*)}$$

По условию $u \leqslant 1 \Rightarrow u_{oc} \leqslant 1 \Rightarrow \mu k^* \leqslant f(k^*)$. Выполняется ли это условие?

Рассмотрим $\bar k\colon\, f(\bar k) = \mu \bar k$. Оно существует поскольку

$$f(k) - \mu k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty, \qquad f'(k) - \mu \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\mu,$$

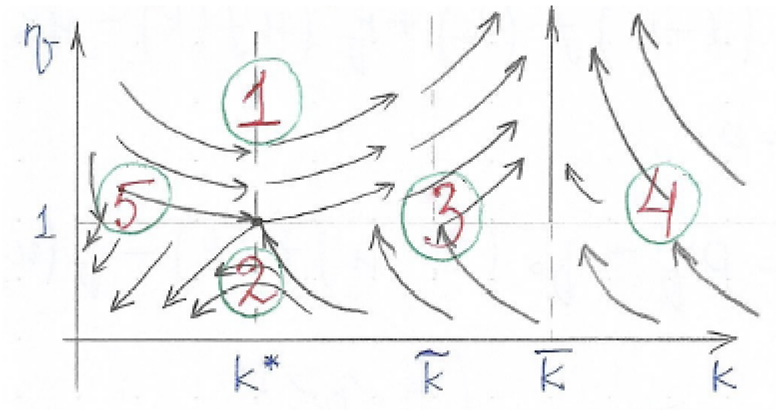


$\exists \tilde k\colon\; f'(\tilde k) = \mu\colon\; \bar k > \tilde k > k^*$.
$f'(k^*) > \mu \;\Rightarrow\; \mu k^* < f(k^*)$, то есть $u_{oc} < 1$.
Типичным при решении задач является случай, когда

$$k_0, k_T < \bar k, \qquad (k(0) = k_0, \quad k(T) \geqslant k_T > 0).$$

1:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \mu k,$$
$$\frac{dk}{f(k) - \mu k} = dt \;\Rightarrow\; T_1 = \int\limits_{k_0}^{k_T} \frac{dk}{f(k)} - \mu k$$



2: $k_0 \leqslant k_T$,

$$\dot{k} = -\mu k \Rightarrow \frac{dk}{\mu k} = -dt \Rightarrow T_2 = \int\limits_{kT}^{k_0} \frac{dk}{\mu k}$$

3: Аналогично

$$T_3 = \int\limits_{k_*}^{k_0} \frac{dk}{\mu k} + \int\limits_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{f(k) - \mu k}$$

5:

$$T_5 = \int\limits_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{f(k) - \mu k} + \int\limits_{k_T}^{k^*} \frac{dk}{\mu k}$$

Обозначим $\bar{T} = \max(T_1, T_2, T_3, T_5)$.

На основании всего проведённого исследования системы, можем сформулировать следующий результат.

Теорема 4. *Если $T > \bar{T}$, то существуют $\tau_1 < \tau_2$: $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$, где $\tau_1, T - \tau_2$ ограничены (в случае $T \to +\infty$ — функциями от k_0, k_T, k^*), такие, что при $t \in [\tau_1, \tau_2] \Rightarrow$*

$$u^*(t) \equiv \frac{\mu k}{f(k^*)}.$$

Ещё одна постановка задачи

K — капитал,
Q — уровень технологий,
L — количество трудовых ресурсов.

$$\tilde{\mathcal{F}}(K, L, Q) = A(Q)\mathcal{F}(K, L) = A(Q)g(K)h(L),$$

где $g(K) = K^{\alpha}$, $h(L) = L^{\beta}$.

$A \in C^1,\ A(0) = 1,\ A' > 0,\ A'' < 0,\ A(+\infty) = +\infty,$
$A'(+\infty) = 0,\ A'(+0) = +\infty$. Мы будем рассматривать
$A(Q) = 1 + Q^{\gamma}, 0 < \gamma < 1$.

При этом у нас будет $\mathcal{F}(K, L) = K^{\alpha}L^{\beta}$, где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{K} = uA(Q)g(K)h(L), \\ \dot{Q} = (1-u)A(Q)g(K)h(L), \\ \dot{L} = p(L), \end{cases}$$

где $p(L) = \delta L, \delta > 0$, а управление снова $0 \leqslant u \leqslant 1$.

$K(0) = K_0,\ Q(0) = Q_0,\ L(0) = L_0,$
$K(T) = \bar{K} > K_0,\ T \to \min.$

Таким образом, мы моделируем задачу быстродействия для поднятия производства на заданный уровень.

В этой задаче

$$\mathcal{H} = \psi_1(uAgh) + \psi_2(1-u)Agh + \psi_3 p,$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_1 uAg'h - \psi_2(1-u)Ag'h, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 uA'gh - \psi_2(1-u)A'gh, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_1 uAgh' - \psi_2(1-u)Agh' - \psi_3 p'. \end{cases}$$

Из (УМ):

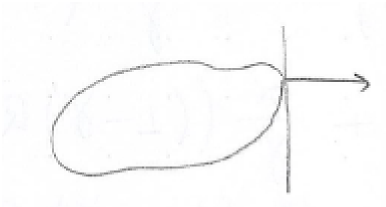
$$u^* = \begin{cases} 1, & \psi_1 > \psi_2, \\ [0,1], & \psi_1 = \psi_2, \\ 0, & \psi_1 < \psi_2. \end{cases}$$

Выпишем условия φ:

$$\begin{gathered} \varphi_0 = t_1, \\ \varphi_1 = t_0 - 0, \\ \varphi_2 = x_1^0 - K_0, \\ \varphi_3 = x_2^0 - Q_0, \\ \varphi_4 = x_0^3 - L_0, \\ \varphi_5 = x_1^1 - \bar{K}. \end{gathered}$$

(УТ):

$$\begin{cases} \psi_1(t_1) = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1^1} = \lambda_5 \neq 0, \\ \psi_2(t_1) = \psi_3(t_1) = 0. \end{cases}$$



Поскольку ψ — внешняя нормаль к $\mathscr{X}$, то $\lambda_5 > 0$, следовательно, положим $\lambda_5 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \psi_2(T) = 0, \\ \psi_3(T) = 0, \\ \psi_1(T) = 1. \end{cases}$$

То есть на последнем участке движения системы будет $u^* = 1$.

Исследуем особый режим: $\psi_1 = \psi_2 \Rightarrow$

$$0 = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 = -\psi_1 u(Ag' - A'g)h - \psi_2 h(1-u)(Ag' - A'g) = \\ -\psi_1(Ag' - A'g)h[u + 1 - u].$$

$\psi_1 \neq 0$, т.к. иначе $\psi_1 \equiv 0$, а $h() > 0$, значит,

$$Ag' = A'g \Rightarrow \frac{A(Q)}{A'(Q)} = \frac{g(K)}{g'(K)} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + Q^\gamma}{\gamma Q^{\gamma-1}} = \frac{K^\alpha}{\alpha K^{\alpha-1}} \Rightarrow K = \frac{\alpha}{\gamma}(Q^{1-\gamma} + Q) -$$

вогнутая функция.

$K'_Q = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\alpha}{\gamma}(1-\gamma)Q^{-\gamma} > 0$

Продифференцируем $K = \dfrac{\alpha}{\gamma}(Q^{1-\gamma} + Q)$:

$$uAgh - \frac{\alpha}{\gamma}\big((1-\gamma)Q^{-\gamma} + 1\big)(1-u)Agh$$

$$u(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\big((1-\gamma)Q^{-\gamma} + 1\big)) = \frac{\alpha}{\gamma}\big((1-\gamma)Q^{-\gamma} + 1\big)$$

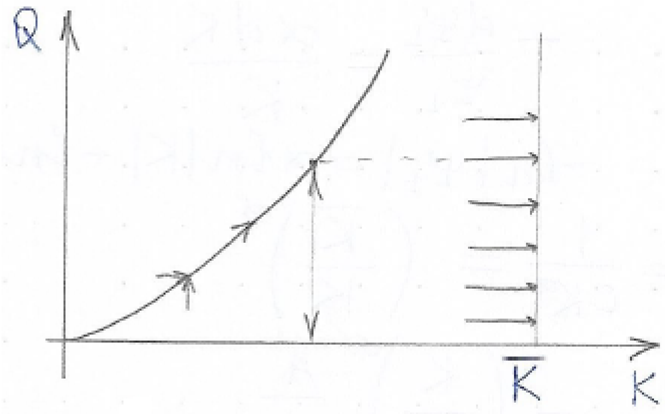
$$\Rightarrow u_{oc} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}((1-\gamma)Q^{-\gamma} + 1)}{1 + \frac{\alpha}{\gamma}((1-\gamma)Q^{-\gamma} + 1)}.$$

Это не статический ОР, при нахождении в нём K и Q изменяются.

Теперь рассмотрим поведение траекторий в конце. Произведём замену независимой переменной: $K = K(t) \to t = t(K)$. Вспомним, что ранее мы показали, что в конце всегда $u = 1$, поэтому

$$\frac{dQ}{dt} = (1-u)Agh = 0 \Rightarrow Q \equiv \bar{Q},$$

$$\frac{dK}{dt} = uAgh = Agh.$$



Отсюда

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_1}{dK}\frac{dK}{dt} = \frac{d\psi_1}{dK}Agh.$$

Подставляя $u = 1$ в (СС)

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_1 uAg'h, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 uA'gh, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dK} = -\dfrac{\psi_1 g'}{g} = -\dfrac{\psi_1 \alpha}{K}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dK} = -\dfrac{\psi_1 A'}{A}. \end{cases}$$

Вспомним теперь, что $\psi_1(\bar{K}) = 1$, $\psi_2(\bar{K}) = 0$, получим, проинтегрировав эту систему,

$$\psi_1 = \left(\frac{\bar{K}}{K}\right)^{\alpha},$$

$$\psi_2 = \frac{A'(\bar{Q})}{A(\bar{Q})(1-\alpha)}\left(\bar{K} - K\left(\frac{\bar{K}}{K}\right)^{\alpha}\right).$$

В какой момент мы переключимся в такой режим движения? В момент, когда $\psi_1 = \psi_2$. Получим описание кривой этого переключения:

$$\frac{A'(\bar{Q})}{A(\bar{Q})(1-\alpha)}[\bar{K}^{1-\alpha}K^{\alpha} - K]\left(\frac{\bar{K}}{K}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\bar{K}}{K}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{K}^{1-\alpha}K^{\alpha} - K = \frac{(1-\alpha)A}{A'} = (1-\alpha)\frac{1+Q^{\gamma}}{\gamma Q^{\gamma-1}} = \frac{1-\alpha}{\gamma}(Q^{1-\gamma}+Q),$$

где $Q = Q(K)$. Продифференцируем последнее соотношение по dK, чтобы отыскать точку максимума этой кривой:

$$\alpha\bar{K}^{1-\alpha}K^{\alpha-1} = 1 \Rightarrow K^* = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{K}.$$

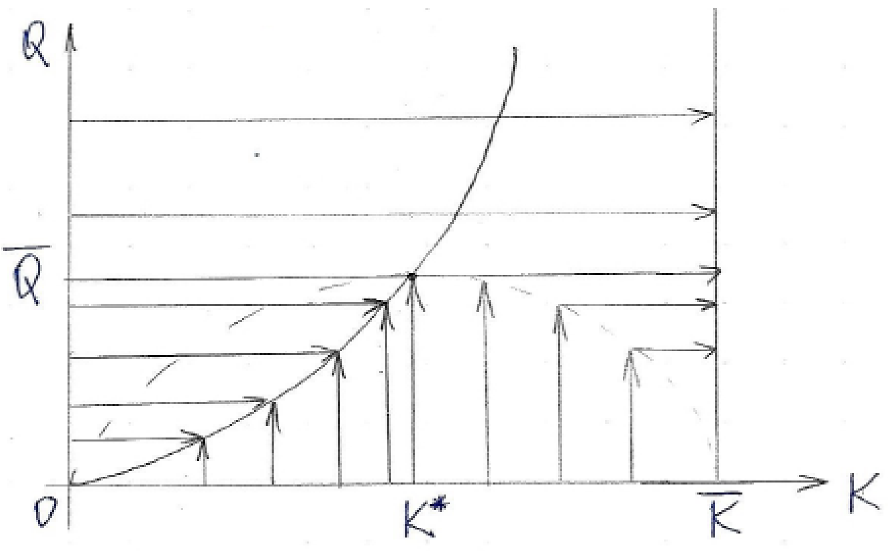
Подставим её в левую часть уравнения кривой:

$$\bar{K}^{1-\alpha}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\bar{K}^{\alpha} - \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{K} = \ldots = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\bar{K}.$$

Тогда

$$K^* = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{K} = \frac{\alpha}{\gamma}(Q^{1-\gamma}+Q).$$

Сравнив выражение в правой части с уравнением кривой OP, построим картину синтеза.



Таким образом, в данном примере движение в особом режиме существенно определяет поведение системы.