Существование оптимального управления

Сегодняшнее занятие начнём сразу с контрпримеров, демонстрирующих невозможность отыскать оптимальное управление при помощи ПМП.

1 Контрпримеры

Пример 1.

$$\dot{x} = u,$$
$$J = \int_0^1 x^2(t)dt \to \inf,$$
$$x(0) = 1,\ x(1) = 0.$$

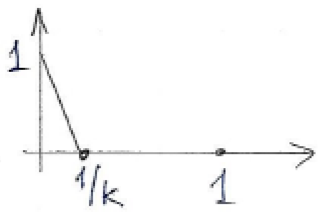
Введём нулевую координату, отвечающую интегралу, и перепишем:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1^2, \\ \dot{x}_1 = u. \end{cases}$$

В этой задаче

$$\mathcal{H} = \psi_0 x_1^2 + \psi_1 u,$$
$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2\psi_0 x_1. \end{cases}$$

Покажем, что $\inf J[u(\cdot)] = 0$. *Рассмотрим последовательность*



$$x_k(t) = \begin{cases} 1 - kt, & t \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right], \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

отвечающую управлению

$$u_k(t) = \begin{cases} -k, & t \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $J[u_k(\cdot)] = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} (-1+kt)^2 dt = \dfrac{1}{3k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Однако этот inf *не достигается в силу непрерывности* x. *Это плохая задача. ПМП в ней не даёт решения (см. самую первую лекцию).*

Пример 2.

$$\dot{x} = u,$$
$$J = \int_0^1 [x^2(t) + (1-u^2(t))^2]dt \to \inf,$$
$$x(0) = x(1) = 0.$$

В этой задаче

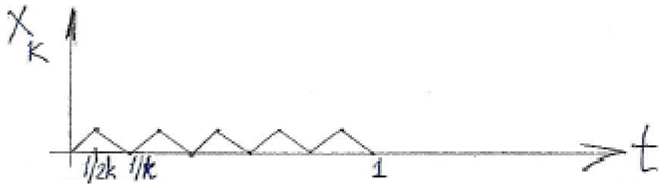
$$\mathcal{H} = \psi_0(u_1^2 + (1-u^2)^2) + \psi_1 u,$$
$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -2\psi_0 x_1. \end{cases}$$

Задача автономная, значит, $\mathcal{H} = const$, *значит,*

$$\psi_0[2(1-u^2)(-2u)] + \psi_1 = 0.$$

Отсюда можно найти u^* *и как бы получить решение задачи.*

Покажем, что $\inf J[u(\cdot)] = 0$.



Рассмотрим минимизирующую последовательность (своеобразные "пилы")

$$x_k(t) = \begin{cases} t - \dfrac{2j}{2k}, & t \in \left[\dfrac{2j}{2k}, \dfrac{2j+1}{2k}\right], \\ -t + \dfrac{2j+2}{2k}, & t \in \left[\dfrac{2j+1}{2k}, \dfrac{2j+2}{2k}\right], \end{cases}$$

отвечающую управлению

$$u_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\dfrac{2j}{2k}, \dfrac{2j+1}{2k}\right], \\ -1, & t \in \left[\dfrac{2j+1}{2k}, \dfrac{2j+2}{2k}\right], \end{cases}$$

Тогда

$$J[u_k(\cdot)] = k \int\limits_0^{\frac{1}{k}} x_k^2(t)dt = 2k \int\limits_0^{\frac{1}{2k}} t^2 dt = \frac{1}{3(2k)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Но этот inf *не достигается по тем же причинам, что и в примере 1. При ограничениях* $|u| \leqslant 1$ *— тот же результат. Это плохая задача. ПМП при этом даёт результат, но неправильный.*

Мораль: поскольку ПМП носит необходимый характер, важно всегда проверять на адекватность решение, найденное через него.

Пример 3.

$$\begin{gathered} \dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \\ t_0 = 0,\ x(0) = 0 = x^0, \\ t_1 x(t_1) = 1, \\ J = x(t_1) \to \inf. \end{gathered}$$

Выписываем ограничения по нашему общему виду ПМП (здесь более простые из первой половины семестра не применимы — условия на концах специфичные).

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= x_1^1 & \varphi_2 &= t_0 - 0 \\ \varphi_1 &= t_1 x_1^1 - 1 & \varphi_3 &= x_1^0 - 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \psi_1 u \quad \Rightarrow \quad u^* = \begin{cases} 1, & \psi_1 > 0, \\ [-1, 1], & \psi_1 = 0, \\ -1, & \psi_1 < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1 = 0 \\ &\psi_1[0] = -\lambda_3 & &\mathcal{H}|_{t=t_0} = \lambda_2 \\ &\psi_1[t_1] = \lambda_0 + \lambda_1 t_1 & &\mathcal{H}|_{t=t_1} = -\lambda_1 x(t_1) \end{aligned}$$

Фиксируем $\tau > 0$.

$$\begin{aligned} u(t) &= 0,\ t \in [0, \tau], & x(t) &= 0, \\ u(t) &= 1,\ t > \tau, & x(t) &= t - \tau \end{aligned}$$

$$x(t_1)t_1 = 0 \Rightarrow t_1^2 - \tau t_1 - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2+4}}{2}$$

$$\tau \to \infty \Rightarrow t_1 \to \infty,\ x(t_1) = \frac{1}{t_1} \to 0,$$

то $\inf = 0$*, но он не достигается.*

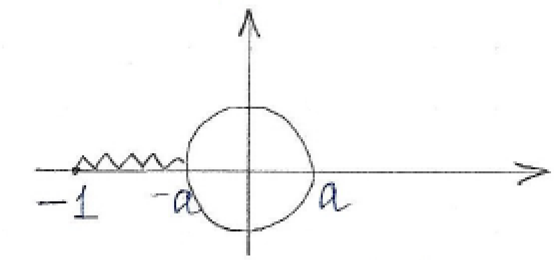
Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2)^2 + u^2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ |u| \leqslant 1. \end{cases}$$

$$t_0 = 0,\ x(0) = (-1, 0)^T = x^0$$

Целевое множество $\mathscr{X}^1 = \{x_1^2 + x_2^2 = a^2\}$, $a \in (0,1)$. *Критерий:*

$$J = t_1 \to \infty.$$



Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, \ldots, N-1$*, где* N *— некоторый введённый нами параметр.*

$$x_{2,k}(t) = \begin{cases} t - \dfrac{2j}{2k}, & t \in \left[\dfrac{2j}{2k}, \dfrac{2j+1}{2k}\right], \\ -t + \dfrac{2j+2}{2k}, & t \in \left[\dfrac{2j+1}{2k}, \dfrac{2j+2}{2k}\right], \end{cases}$$

отвечающую управлению

$$u_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left(\dfrac{2j}{2k}, \dfrac{2j+1}{2k}\right] \bigcup \{0\}, \\ -1, & t \in \left(\dfrac{2j+1}{2k}, \dfrac{2j+2}{2k}\right], \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{2,k}(t) \leqslant \frac{1}{2k}, \qquad \dot{x}_1 = -x_2^2 + 1 \geqslant 1 - \frac{1}{(2k)^2} > 0$$

$$\exists\, t_1(k)\colon x_{1,k}^2(t_1) + x_{2,k}^2(t_1) = a^2$$

Покажем, что $t_1(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1-a$*:*

$$1-a \leqslant t_1(k) \leqslant \frac{1-a}{1-\frac{1}{(2k)^2}} + \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1-a.$$

Левая оценка следует из неравенства $\dot{x}_1 = 1 - x_2^2 \leqslant 1$ *(проинтегрируем на* $0, t_1(k)$ *и получим результат). Правая оценка состоит из двух слагаемых; первое — время, за которое мы доезжаем до* $x_1 = -a$*, второе — время, необходимое, чтобы проехать ещё 1 "зубчик".*

Таким образом, $J_* = \inf J = 1-a$*, но этот* $\inf$ *не достигается.*

2 Достаточные условия существования решения задачи ОУ

Теорема 1. *Пусть*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), u(t) \in \mathscr{P},$$

f *удовлетворяет основным условиям (см. лекцию про решение по Каратеодори).*

Задача ОУ:

$$\varphi_0(e) \to \inf, \qquad \varphi_1(e) = \ldots = \varphi_k(e) = 0.$$

Пусть, кроме того, выполнены следующие условия.

а) Множество допустимых пар $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ *не пусто, т. е.*

$$S' = \left\{\left\{t_0, t_1, x^0, u(\cdot)\right\} \in S \middle| \varphi(e) = 0,\ e = e(t_0, t_1, x^0, u(\cdot))\right\} \neq \emptyset$$

(контрпример: $\dot{x} = 0, x(0) = 1, x(1) = 0$*)*

б) $\mathscr{P} \in \mathrm{comp}\mathbb{R}^m$ *(контрпример: пример 1)*

в) $E = \{e = (t_0, x^0, t_1, x^1) \in \mathbb{R}^{2n+2} \colon\ \varphi(e) = 0\}$ *— компакт,* $\bar{\varphi} \in C(E)$ *(контрпример: пример 3)*

г) $\mathcal{F}(t,x) = \bigcup\limits_{u\in\mathscr{P}} \{f(t,x,u)\}$ *— множество возможных скоростей (векторграмма),* $\mathcal{F}(t,x) \in \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ *(контрпример: примеры 2 и 4).*

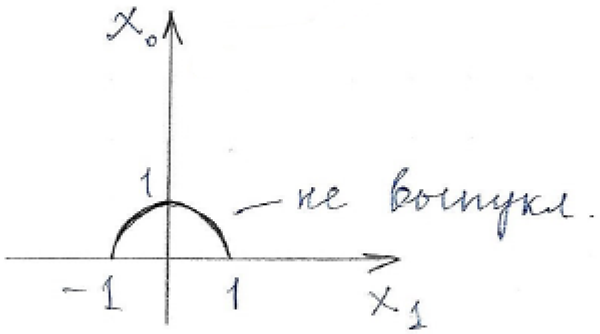
Тогда решение рассматриваемой задачи ОУ существует.

Замечание 1. *К пункту г).*

Во втором примере:

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \bigcup_{|u|\leqslant 1} \begin{bmatrix} (1-u^2)^2 \\ u \end{bmatrix}$$

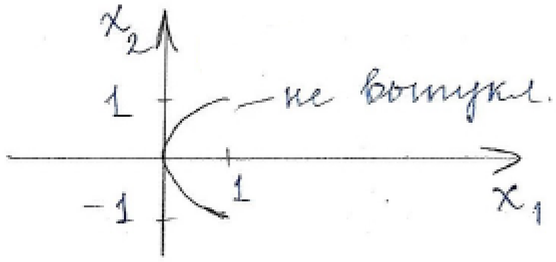
Второе слагаемое:



В четвёртом примере:

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \bigcup_{|u|\leqslant 1} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \end{bmatrix}$$

Второе слагаемое:



Замечание 2. *Иногда удобно рассматривать дифференциальное включение*

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(t, x(t)).$$

Множество траекторий ДВ всюду плотно во множестве траекторий релаксированной задачи

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{conv}\mathcal{F}(t, x(t)),$$

где conv *— выпуклая оболочка.*

Как следствие, если система квазилинейна по u, т. е.

$$f(t,x,u) = f^0(t,x) + G(t,x)u,$$

то условие г) можно заменить на условие г') $\mathscr{P} \in conv\mathbb{R}^m$ (условие б) тогда автоматически выполнено).

(теоремы). Пусть $\{t_0^k, t_1^k, x^{0,k}, u_k(\cdot)\}$ — минимизирующая последовательность.

В силу в),

$$\min_{e\in E} \varphi_0(e) \leqslant J_* = \inf J \;\Rightarrow\; J_* > -\infty.$$

Выпишем определение инфинума.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{t_0, t_1, x^0, u(\cdot)\} \colon J_* \leqslant J < J_* + \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $e_k = (t_0^k, x^{0,k}, t_1^k, x^{1,k})$. Дано: $J(e_k) \to J_*$.

Доказательство проведём в два этапа: сначала мы покажем, что $x_k \to x^*$, а затем — что эта траектория порождается некоторым допустимым управлением.

Обозначим через $x_k(\cdot)$ траектории, отвечающие $u_k(\cdot)$. Покажем, что последовательность $\{x_k(\cdot)\}$ — равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

1. Из условия сублинейного роста: $\|f(t,x,u)\| \leqslant A\|x\| + B$ следует, что $\exists\, M_1 > 0 \colon \|x(t)\| \leqslant M_1$. Покажем, что это действительно так. Для этого продифференцируем квадрат нормы $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\,\langle x, f(t,x,u)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant 2\|x\|\|f\| \leqslant 2A\|x\|^2 + 2B\|x\| = (2A+1)\|x\|^2 + \tilde{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\|x(t)\|^2 \mathbf{e}^{-(2A+1)t}\right) \leqslant \tilde{B}\mathbf{e}^{-(2A+1)t}$$

$$\|x(t)\|^2 \mathbf{e}^{-(2A+1)t} - \|x(t_0)\|^2\,\mathbf{e}^{-(2A+1)t_0} \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{B}\mathbf{e}^{-(2A+1)s} ds$$

$$\|x_k(t)\|^2 \leqslant \left\|x_k(t_0^k)\right\| \mathbf{e}^{(2A+1)(t-t_0^k)} + \mathbf{e}^{(2A+1)t} \int\limits_{t_0^k}^{t} \tilde{B}\mathbf{e}^{-(2A+1)s} ds.$$

   Правая часть ограничена, следовательно, $\{x_k(\cdot)\}$ равномерно ограничена. Если требуется, расширяем область определения.

Равностепенная непрерывность ($t' \leqslant t''$):

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} \|f(t, x_k(t), u_k(t))\|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant AM_1 + B = L\,|t'' - t'| < \varepsilon$$

Тогда по теореме Арцела-Асколи $x_k(\cdot) \rightrightarrows x^*(\cdot)$. Тогда в последнем соотношении перейдём к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\|x^*(t') - x^*(t'')\| \leqslant L\,|t'' - t'|\,,$$

то есть $x^* \in Lip \Rightarrow x^* \in AC$.

2. Докажем, что $\dfrac{dx^*(t)}{dt} \in \mathcal{F}(t, x^*(t))$ для почти всех t.

Пусть t такового, что $\exists\, \frac{d}{dt}x^*(t)$. Обозначим

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,t} = \mathcal{F}_t + B_\varepsilon(0) \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n.$$

f — непрерывна по (t, x, u), $\exists T_0 < T_1$: $T_0 \leqslant t_0^k \leqslant t_1^k \leqslant T_1$; по теореме Кантора f — равномерно непрерывна на $[T_0, T_1] \times B_{M_1}(0) \times \mathscr{P}$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall (t', x', u'), (t'', x'', u'') \in [T_0, T_1] \times B_{M_1}(0) \times \mathscr{P}$$
$$|t' - t''| + \|x' - x''\| + \|u' - u''\| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|f(t', x', u') - f(t'', x'', u'')\| < \varepsilon$$

Возьмём $u' = u'' = u$, тогда $\forall (\tau, x) \in [T_0, T_1] \times B_{M_1}(0)$:

$$|\tau - t| + \|x - x^*(t)\| < \delta \Rightarrow \Delta f = \|f(\tau, x, u) - f(t, x^*, u)\| \leqslant \varepsilon$$

По определению Δf: $\forall u \in \mathscr{P} \Rightarrow f(\tau, x, u) = f(t, x^*(t), u) + \Delta f$. Отсюда

$$\mathcal{F}(\tau, x) = \bigcup_{u \in \mathscr{P}} \{f(\tau, x, u)\} \subseteq \bigcup_{u \in \mathscr{P}} \{f(t, x^*, u)\} + \varepsilon B_1(0) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|x_k(\tau) - x^*(t)\| \leqslant \|x_k(\tau) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x^*(t)\|\,.$$

В силу равномерной сходимости x_k: $\exists K:\ |\tau - t| < \tilde{\delta} \leqslant \frac{\delta}{2}$

$$\forall k \geqslant K \Rightarrow \|x_k(t) - x^*(t)\| \leqslant \frac{\delta}{4}.$$

Для первого слагаемого: $\|x_k(\tau) - x_k(t)\| \leqslant L\,|\tau - t| < \frac{\delta}{4}$, при этом будем выбирать τ таким, чтобы выполнялось $|\tau - t| < \min(\frac{\delta}{4L}, \frac{\delta}{2})$.

Таким образом, $\mathcal{F}(\tau, x_k(\tau)) \subseteq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}$.

Рассмотрим последовательность

$$z_k(s) = f(s, x_k(s), u_k(s)).$$

Для неё

$$\frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} z_k(s)ds,$$

$|h| < \tilde{\delta}$, $t + h \in [T_0, T_1]$.

$z_k(s) \in \mathcal{F}(s, x_k(s)) \subseteq \mathcal{F}_{\varepsilon,t} \Rightarrow$ (в силу г))

$$\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} z_k(s)ds \in \mathcal{F}_{\varepsilon,t}.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} \in \mathcal{F}_{\varepsilon,t} && \Big|\lim_{k\to\infty}\\
&\Rightarrow \frac{x^*(t+h) - x^*(t)}{h} \in \mathcal{F}_{\varepsilon,t} && \Big|\lim_{h\to\infty}\\
&\Rightarrow \frac{dx^*(t)}{dt} \in \mathcal{F}_{\varepsilon,t}\ \forall\varepsilon > 0 && \Big|\lim_{\varepsilon\to 0+0}\\
&\Rightarrow \frac{dx^*(t)}{dt} \in \mathcal{F}(t, x^*(t)).
\end{aligned}$$

Как найти $u^*(\cdot)$?

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = \{\text{п. в. } t\} = f(t, x^*(t), u^*(t))$$

Рассмотрим

$$\mathscr{P}^*(t) = \left\{u \in \mathscr{P} \colon f(t, x^*(t), u) = \frac{dx^*(t)}{dt}\right\}.$$

$\mathscr{P}^*$ определена во всех точках t, где $\exists\dfrac{dx^*}{dt}$, $\mathscr{P}^* \neq \emptyset$

Верно ли, что $\mathscr{P}^*$ — измеримо по t?

Для использования теоремы Лузина надо показать, что

$$\forall \tilde{\varepsilon} < 0\colon \{\exists\, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1\colon T_0 \leqslant \tilde{T}_0 < \tilde{T}_1 \leqslant T\}$$
$$\exists\, Z \subseteq [T_0, T_1]\colon \mu(Z) < \tilde{\varepsilon}\colon$$

$\mathscr{P}^*|_{[T_0,T_1]\setminus Z}$ — п/н сверху *(ослабили непрерывность).*

$\dfrac{dx^*}{dt}$ — измерима, возьмём Z такое, что $\dfrac{dx^*}{dt}$ непрерывна на $[T_0, T_1] \setminus Z$.

$t_k \in [T_0, T_1] \setminus Z, \qquad t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{t}$

Тогда

$$u_k \in \mathscr{P}^*(t_k) \to \bar{u} \in \mathscr{P}$$
$$\frac{dx^*(t_k)}{dt} = f(t_k, x^*(t_k), u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{t}, x^*(\bar{t}, \bar{u})),$$
$$\frac{dx^*(t_k)}{dt} \to \frac{dx^*(\bar{t})}{dt}.$$

Таким образом, $\bar{u} \in \mathscr{P}^*(\bar{t})$, следовательно, $\mathscr{P}^*$ — измеримо $\Rightarrow$ существует измеримый селектор $u^*(t) \in \mathscr{P}^*(t)$.

Теорема доказана. ■

Замечание 3. *Компактность E можно заменить на компактность $E \cap \{e\colon \varphi_k(e) \leqslant \mu\}$, где $\mu > J_*$.*