

Ruprecht-Karls Universität Heidelberg

Bachelorarbeit

# **Fenchel-Nielsen Koordinaten auf Teichmüllerräumen**

Yannick M. Krifka

7. Januar 2013

Betreut durch Prof. Dr. W. Kohnen



Für meine Eltern.



## Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es Fenchel-Nielsen Koordinaten auf Teichmüllerräumen auf möglichst elementare Weise einzuführen. Hierzu werden zunächst die Grundlagen der Topologie und der Theorie Riemann'scher Flächen in Kapitel 1 erläutert. In Kapitel 2 wird dann die obere Halbebene genauer studiert. Dabei werden zunächst Möbiustransformationen betrachtet und später in Zusammenhang mit der hyperbolischen Geometrie der oberen Halbebene gebracht. Kapitel 3 beschäftigt sich dann mit dem Beweis eines ersten Klassifizierungssatzes kompakter Riemann'scher Flächen aufbauend auf dem Uniformisierungssatz. Dieser bildet die Grundlage für die Betrachtungen in Kapitel 4. Dort wird zunächst der Modulraum von Tori als  $\mathbb{H}/PSL(2;\mathbb{Z})$  berechnet und auf den Teichmüllerraum von Tori eingegangen. Der letzte Teil befasst sich dann mit den Teichmüllerräumen zu Flächen höheren Geschlechtes und es werden die Fenchel-Nielsen Koordinaten auf diesen eingeführt.

## Abstract

The aim of this thesis is to give an elementary introduction to the topic of Fenchel-Nielsen Coordinates on Teichmüller spaces. Therefore we explain some basic notions of topology and Riemann surfaces in chapter 1. In chapter 2 we study the upper half-plane. Thereby we consider Möbius transformations and outline their connection to the hyperbolic geometry of the upper half-plane. In Chapter 3 we prove a classification theorem for compact Riemann surfaces based on the uniformization theorem, which is crucial for the further examinations in chapter 4. First we consider the moduli space of tori and compute it to be  $\mathbb{H}/PSL(2;\mathbb{Z})$  in chapter 4 and examine the Teichmüller space of tori. At last we study the Teichmüller spaces of compact Riemann surfaces with genus  $g \geq 2$  and introduce Fenchel-Nielsen coordinates.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig unter Anleitung verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, der 7. Januar 2013

\_\_\_\_\_

Yannick Krifka





# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1. Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1. Topologie . . . . .	5
1.2. Homotopie und die Fundamentalgruppe . . . . .	8
1.3. Überlagerungen . . . . .	11
1.4. Riemann'sche Flächen . . . . .	16
1.5. Riemann'sche Flächen als Quotientenräume . . . . .	24
<b>2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie</b>	<b>29</b>
2.1. Die obere Halbebene . . . . .	29
2.2. Hyperbolische Geometrie . . . . .	39
<b>3. Klassifizierung Riemann'scher Flächen</b>	<b>57</b>
3.1. Der Uniformisierungssatz . . . . .	57
<b>4. Teichmüllerräume</b>	<b>61</b>
4.1. Teichmüllerraum von Tori . . . . .	61
4.1.1. Der Modulraum von Tori . . . . .	61
4.1.2. Der Teichmüllerraum von Tori . . . . .	63
4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes . . .	66
4.2.1. Motivation und Definition von Teichmüllerräumen . . . . .	66
4.2.2. Hyperbolische Flächen . . . . .	67
4.2.3. Operationen auf hyperbolischen Flächen . . . . .	71
4.2.4. Die universelle Überlagerung . . . . .	72
4.2.5. Kürzeste Wege . . . . .	73
4.2.6. Geschlossene Geodätische . . . . .	74
4.2.7. Existenz und Eindeutigkeit von Hosen . . . . .	75
4.2.8. Fenchel-Nielsen Koordinaten . . . . .	80
<b>A. Anhang</b>	<b>89</b>
A.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	89
A.2. Gruppenoperationen . . . . .	90
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>



# Einleitung

Die Theorie Riemann'scher Flächen ist einer der Grundpfeiler der modernen Funktionentheorie. Ihren historischen Ursprung haben die Riemann'schen Flächen in der Untersuchung der analytischen Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen. Setzt man beispielsweise den komplexen Logarithmus entlang verschiedener Wege analytisch fort, so ergeben sich unterschiedliche Funktionswerte. Dieses Problem wurde von Bernhard Riemann gelöst, indem er den Definitionsbereich der fortzusetzenden Funktion durch eine mehrblättrige Fläche ersetzte, welche über jedem Punkt genau so viele Blätter besitzt wie es unterschiedliche analytische Fortsetzungen in diesem Punkt gibt. Diese Überlagerungsflächen sollten dann später zu den Riemann'schen Flächen werden, wie wir sie heute kennen. Neben der analytischen Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen gibt es noch zahlreiche weitere Anwendungen. So lassen sich beispielsweise mit Hilfe Riemann'scher Flächen Dimensionsformeln für die Räume von Modulformen zu Kongruenzuntergruppen der  $SL(2; \mathbb{Z})$  herleiten, welche wiederum zahlentheoretische Anwendungen besitzen.

Als Objekte von so besonderer Bedeutung stellt sich natürlich die Frage, wie viele verschiedene Riemann'sche Flächen es gibt, bzw. ob man diese klassifizieren kann. Für kompakte Riemann'sche Flächen, welche in dieser Arbeit betrachtet werden, führt diese Frage direkt zu dem Begriff des Modulraums  $\mathcal{M}_g$  kompakter Riemann'scher Flächen vom Geschlecht  $g \geq 0$ . Dieser ist gerade die Menge aller kompakten Riemann'schen Flächen vom Geschlecht  $g$  bis auf biholomorphe Äquivalenz.

Ein erster Schritt in Richtung Klassifikation kompakter Riemann'scher Flächen ist ein grober Klassifikationssatz, welchen wir in Kapitel 3 beweisen werden. Dieser besagt, dass  $\mathcal{M}_g$  für Geschlecht  $g = 0$  nur die Riemann'sche Zahlkugel  $\mathbb{P}^1$ , für Geschlecht  $g = 1$  nur Tori der Form  $\mathbb{C}/\Lambda$ , wobei  $\Lambda$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$  ist, und für Geschlecht  $g \geq 2$  nur Flächen der Form  $\mathbb{H}/\Gamma$ , wobei  $\Gamma \subseteq PSL(2; \mathbb{R})$  eine Untergruppe mit gewissen Eigenschaften ist, beinhaltet.

Mit diesem Satz lassen sich für die Fälle  $g = 0$  (Kugeln) und  $g = 1$  (Tori) die Modulräume noch explizit zu  $\mathcal{M}_0 = \{\mathbb{P}^1\}$  und  $\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z})$  berechnen. Für den Fall  $g \geq 2$  wird dies jedoch wesentlich komplizierter. Es lässt sich zwar eine Topologie auf  $\mathcal{M}_g$  einführen, jedoch besitzt  $\mathcal{M}_g$  mit dieser Topologie Singularitäten und ist beispielsweise keine Mannigfaltigkeit mehr.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen führte Oswald Teichmüller eine schwächere Identifikation als biholomorphe Äquivalenz ein und gelangte so zu dem Begriff des Teichmüllerraumes  $\mathcal{T}_g$  zum Geschlecht  $g$ . In der Tat lassen sich so genannte Fenchel-Nielsen Koordinaten auf  $\mathcal{T}_g$  für  $g \geq 2$  einführen, welche eine Bijektion zwischen  $\mathcal{T}_g$  und  $\mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$  darstellen.

Ziel dieser Arbeit ist es eine möglichst elementare und in sich geschlossene Einführung in die Theorie der Teichmüllerräume und Fenchel-Nielsen Koordinaten zu geben. Vorkenntnisse in Algebraischer Topologie oder der Theorie Riemann'scher Flächen werden daher nicht vorausgesetzt. Kapitel 1 wird deshalb die benötigten Vorkenntnisse aus diesen Bereichen zusammentragen. Es wird dabei insbesondere auf die Überlagerungstheorie eingegangen, welche im weiteren Verlauf immer wieder benötigt wird. Das erste Zwischenziel auf dem Weg zu den Fenchel-Nielsen Koordinaten ist nach dem Grundlagenkapitel der bereits oben erwähnte Klassifizierungssatz. Um diesen beweisen zu können werden im ersten Teil von Kapitel 2 Möbiustransformationen genauer betrachtet und die Automorphismengruppe der oberen Halbebene berechnet. Der zweite Teil knüpft thematisch an den ersten Teil an, indem er die hyperbolische Geometrie auf der oberen Halbebene einführt, welche ebenfalls in Zusammenhang mit den Möbiustransformationen auf  $\mathbb{H}$  steht. Diese Geometrie wird von fundamentaler Bedeutung für die Entwicklung der Fenchel-Nielsen Koordinaten. In Kapitel 3

wird wie angekündigt der Klassifizierungssatz bewiesen. Hierbei spielen die Überlagerungstheorie und die in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Eigenschaften von Möbiustransformationen eine zentrale Rolle. Kapitel 4 beschäftigt sich dann mit den Teichmüllerräumen. Zunächst betrachten wir in 4.1 jedoch den Modulraum von Tori und berechnen diesen zu  $\mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z})$ . Danach werden wir den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_1$ , welchen man auch für Tori definieren kann, studieren und zu  $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}$  berechnen. Abschnitt 4.2 geht dann auf Teichmüllerräume zum Geschlecht  $g \geq 2$  ein und es werden die Fenchel-Nielsen Koordinaten eingeführt. Hierzu werden wir sogenannte hyperbolische Flächen untersuchen, welche später die grundlegenden Bausteine für die Konstruktion der Fenchel-Nielsen Koordinaten darstellen.

# 1. Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir einige Definitionen und Sätze zur Verfügung stellen auf denen die nachfolgenden Kapitel aufbauen werden. Hierbei ist neben den grundlegenden Definitionen, wie beispielsweise der einer Riemann'schen Fläche, insbesondere der Teil über Überlagerungstheorie ist von besonderer Bedeutung.

## 1.1. Topologie

Zunächst erörtern wir in diesem Abschnitt kurz die grundlegenden Begrifflichkeiten der Topologie.

**Definition 1.1.1** (Topologie). Sei  $X$  eine Menge. Eine *Topologie* auf  $X$  ist ein Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \text{Pot}(X)$ , welches die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
- (iii) Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{T} \forall i \in I$ . Dann gilt:  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Eine Menge  $U \in \mathcal{T}$  wird *offen* in  $X$  genannt. Man schreibt hierfür auch " $U \subseteq X$  offen".

**Definition 1.1.2** (Topologischer Raum). Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ . Dann nennt man das Tupel  $(X, \mathcal{T})$  einen topologischen Raum.

*Anmerkung.* Häufig lässt man die Topologie  $\mathcal{T}$  weg und spricht nur von dem *topologischen Raum*  $X$  und offenen Mengen  $U \subseteq X$ .

**Definition 1.1.3** (Basis, Subbasis). Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Eine Familie  $\mathcal{B}$  von offenen Teilmengen von  $X$  heißt *Basis* (für die Topologie von  $X$ ), wenn es für jede offene Menge  $U \subseteq X$  eine Familie  $(B_i)_{i \in I}$  von Mengen in  $\mathcal{B}$  gibt, so dass  $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ .
- (ii) Eine Familie  $\mathcal{S}$  von offenen Teilmengen von  $X$  heißt *Subbasis* (für die Topologie von  $X$ ), wenn  $\hat{\mathcal{S}} := \{\bigcap_{i=1}^n S_i \mid n \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S} \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis für die Topologie von  $X$  ist.

**Definition 1.1.4** (zweites Abzählbarkeitsaxiom). Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn  $X$  eine abzählbare Basis besitzt.

Man sagt dann auch:  $X$  ist *zweitabzählbar*.

Die folgenden Bemerkung besagt, dass man sich eine Subbasis für eine Topologie vorgeben kann.

**Bemerkung 1.1.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{S} \subseteq \text{Pot}(X)$  eine Familie von Teilmengen, welche  $X$  überdeckt (d.h.  $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ ). Dann ist auf  $X$  durch die folgende Definition eine Topologie gegeben:

$$U \subseteq X \text{ offen} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists (B_i)_{i \in I} \subseteq \hat{\mathcal{S}} : U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

wobei  $\hat{\mathcal{S}}$  wie in Definition 1.1.3 (ii) definiert sei. Man sagt dann auch  $\mathcal{S}$  induziert eine Topologie auf  $X$ .

## 1. Grundlagen

*Beweis.* Die Punkte (i) und (iii) von Definition 1.1.1 sind klar.

Zu Punkt (ii): Seien  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  und  $V = \bigcup_{j \in J} V_j$  offen mit  $(U_i)_{i \in I}, (V_j)_{j \in J} \subseteq \hat{\mathcal{S}}$ . Dann gilt:

$$U \cap V = \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} V_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} \underbrace{(U_i \cap V_j)}_{\in \hat{\mathcal{S}}}$$

Also ist mit  $U$  und  $V$  auch  $U \cap V$  offen. Dies verifiziert (ii).  $\square$

*Anmerkung.*  $\mathcal{S}$  wird dann zu einer Subbasis auf dem so topologisierten Raum.

**Definition 1.1.6** (abgeschlossen). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt *abgeschlossen*, wenn sie das Komplement einer offenen Menge in  $X$  ist, d.h.  $\exists U \subseteq X$  offen :  $A = X \setminus U$

**Definition 1.1.7** (Stetige Abbildungen). Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge  $V \subseteq Y$  ihr Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist.

**Bemerkung 1.1.8.** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:  $f$  ist genau dann stetig, wenn für alle abgeschlossenen Mengen  $A \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(A) \subseteq X$  abgeschlossen ist.

*Beweis.* "⇒"

Sei  $f$  stetig und  $A \subseteq Y$  abgeschlossen. Dann gilt:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

Also ist das Komplement von  $f^{-1}(A)$  offen, da  $Y \setminus A$  offen und  $f$  stetig ist.  
"⇐"

Gelte umgekehrt für jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq Y$ , dass  $f^{-1}(A) \subseteq X$  abgeschlossen ist. Sei  $U \subseteq Y$  offen. Dann ist  $A := Y \setminus U$  abgeschlossen und analog wie oben ergibt sich  $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(A) \subseteq X$  offen. Also ist  $f$  stetig.  $\square$

**Definition 1.1.9** (Offene Abbildung). Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  heißt *offen*, wenn gilt:

$$\forall U \subseteq X \text{ offen} : f(U) \subseteq Y \text{ offen}$$

**Definition 1.1.10** (Homöomorphismus). Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  heißt *Homöomorphismus*, wenn  $f$  bijektiv, stetig und  $f^{-1}$  stetig ist.

$X$  und  $Y$  heißen dann *homöomorph* und man schreibt  $X \cong Y$ .

**Definition 1.1.11** (Lokaler Homöomorphismus). Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig.  $f$  heißt *lokaler Homöomorphismus*, falls es für jeden Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  gibt (vgl. Def. 1.1.12), so dass:

(i)  $f(U) \subseteq Y$  eine offene Umgebung von  $f(x)$  ist.

(ii)  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus ist.

**Definition 1.1.12** (Umgebungen). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Eine *Umgebung* von  $x$  ist eine Menge  $V \subseteq X$ , so dass es eine offene Menge  $U \subseteq X$  gibt mit  $x \in U \subseteq V$ . Die Menge aller Umgebungen eines Punktes  $x \in X$  wird oft mit  $\mathcal{U}(x)$  bezeichnet und nennt sich der Umgebungsfilter von  $x$ .

**Definition 1.1.13** (Umgebungsbasis). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$  heißt *Umgebungsbasis von  $x$* , wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists B \in \mathcal{B}(x) : B \subseteq U$$

*Anmerkung.* Viele Eigenschaften topologischer Räume werden auch mit dem Zusatz "lokal" versehen. Dies bedeutet dann meist, dass die geforderte Eigenschaft nicht auf dem ganzen Raum gelten soll, sondern dass jeder Punkt eine Umgebungsbasis besitzen soll, so dass jedes Element dieser Umgebungsbasis die Eigenschaft als Teilraum erfüllt (vgl. 1.1.19).

**Definition 1.1.14** (hausdorff'sch). Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *hausdorff'sch* falls es für je zwei verschiedene Punkte  $x, y \in X$  offenen Umgebungen  $U_x \subseteq X$  zu  $x$  und  $U_y \subseteq X$  zu  $y$  gibt, so dass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

$X$  heißt dann auch *Hausdorffraum*.

**Definition 1.1.15** (zusammenhängend). Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn es keine nichtleeren offenen Mengen  $U, V \subseteq X$  gibt, so dass  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$

**Bemerkung 1.1.16.** Sei  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum und  $U \subseteq X$  offen und abgeschlossen. Dann gilt  $U = X$  oder  $U = \emptyset$ .

*Beweis.* Sei  $U \subseteq X$  offen und abgeschlossen. Betrachte nun  $V := X \setminus U$ .  $V$  ist offen, da  $U$  nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Außerdem gilt nach Definition:  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Da aber  $X$  zusammenhängend ist, muss  $U$  oder  $V$  leer sein. Dies ist äquivalent zu  $U = \emptyset$  oder  $U = X$ .  $\square$

*Anmerkung.* Diese Bemerkung wird oft dazu verwendet um auf zusammenhängenden Räumen zu zeigen, dass eine Eigenschaft für alle Punkte des Raumes gilt. Dazu muss dann nur noch gezeigt werden, dass die Menge aller Punkte mit der gewünschten Eigenschaft offen, abgeschlossen und nicht leer ist.

**Definition 1.1.17** (Weg). Eine stetige Abbildung  $g : [0, 1] \rightarrow X$  heißt *Weg* von  $g(0)$  nach  $g(1)$  in  $X$ . Gilt  $g(0) = g(1)$ , so heißt  $g$  *geschlossen* mit Basispunkt  $g(0)$ .

**Definition 1.1.18** (wegzusammenhängend). Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  in  $X$  gibt.

**Definition 1.1.19** (lokal wegzusammenhängend). Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jedes  $x \in X$  eine Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  besitzt, so dass jedes  $U \in \mathcal{B}(x)$  wegzusammenhängend ist.

**Definition 1.1.20** (Offene Überdeckung). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Familie von Mengen  $(U_i)_{i \in I}$  ( $I$  beliebige Indexmenge) heißt *offene Überdeckung* von  $X$ , wenn  $U_i \subseteq X$  offen ist für jedes  $i \in I$  und  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

**Definition 1.1.21** (Kompaktheit). Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt *kompakt* falls jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. es gibt  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i_1, \dots, i_k \in I$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^k U_{i_j} = X$ .

**Lemma 1.1.22.** Sei  $X$  ein Hausdorffraum und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass es um jeden Punkt  $x \in X \setminus K =: K^c$  eine offene Umgebung  $U_x \subseteq K^c$  gibt, da dann  $K^c = \bigcup_{x \in X} U_x$ , also offen ist und somit  $K$  abgeschlossen ist.

Sei also  $x \in K^c$ . Dann gibt es zu jedem  $y \in K$  offene Umgebungen  $U_y$  um  $x$  und  $V_y$  um  $y$  mit  $U_y \cap V_y = \emptyset$ , weil  $X$  hausdorff'sch ist. Dann ist  $\{V_y\}_{y \in K}$  eine offene Überdeckung von  $K$  und man kann eine endliche Teilüberdeckung  $\{V_i\}_{i=1}^n$  auswählen mit  $V_i := V_{y_i}$  für  $i = 1, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$  geeignet).  $U_x := \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$  ist dann offen und es gilt  $x \in U_x \subseteq K^c$ .  $\square$

## 1. Grundlagen

**Definition 1.1.23** (Teilraumtopologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $G \subseteq X$  eine Teilmenge. Man erhält auf  $G$  eine Topologie  $\mathcal{T}_G$  durch:

$$\mathcal{T}_G := \{U \cap G \mid U \subseteq X \text{ offen}\}$$

Diese nennt man dann die *Teilraumtopologie von  $G$* .

**Definition 1.1.24** (Produkttopologie). Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Wir definieren die sogenannte *Produkttopologie* auf  $X \times Y$ , indem wir uns wie in Bemerkung 1.1.5 eine Subbasis vorgeben:

$$\mathcal{S} := \{U \times V \subseteq X \times Y \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}$$

*Anmerkung.* Offensichtlich überdeckt  $\mathcal{S}$  hier  $X \times Y$ . Durch diese Topologie auf  $X \times Y$  werden die kanonischen Projektionen  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  stetig.

**Definition 1.1.25** (Quotiententopologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  eine Menge und  $\pi : X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung. Auf  $Y$  lässt sich über dieses  $\pi$  nun die sogenannte *Quotiententopologie* einführen:

$$V \subseteq Y \text{ offen} \quad :\Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(V) \subseteq X \text{ offen}$$

Mit dieser Topologie auf  $Y$  wird  $\pi$  zu einer stetigen Abbildung.

*Anmerkung.* Man rechnet leicht nach, dass das so definierte Mengensystem der offenen Mengen auf  $Y$  tatsächlich eine Topologie nach Definition 1.1.1 darstellt.

**Definition 1.1.26** (Verkleben/Anheften). Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subseteq X$  und  $f : A \rightarrow Y$  stetig. Wir verkleben nun  $X$  und  $Y$  miteinander, indem  $A$  mit seinem Bild  $f(A)$  identifiziert wird. Dazu betrachten wir  $X \sqcup Y / \sim$ , wobei die Äquivalenzrelation durch folgende Partitionierung von  $X \sqcup Y$  gegeben sei <sup>1</sup>:

$$\{\{x\} \mid x \in X \setminus A\} \cup \{\{y\} \mid y \in Y \setminus f(A)\} \cup \{\{y\} \cup f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\}$$

Durch die Projektion auf die Äquivalenzklasse  $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y / \sim, x \mapsto [x]$  ist eine surjektive Abbildung gegeben und man führt die Quotiententopologie auf  $X \sqcup Y / \sim$  ein.

Der so entstehende topologische Raum  $X \cup_f Y := X \sqcup Y / \sim$  heißt die *Verklebung von  $X$  und  $Y$  via  $f$* .

*Anmerkung.* Die Topologie auf  $X \sqcup Y$  ist hier durch  $\mathcal{T}_X \sqcup \mathcal{T}_Y$  gegeben, wobei  $\mathcal{T}_X$  und  $\mathcal{T}_Y$  jeweils die Topologien auf  $X$  und  $Y$  seien.

## 1.2. Homotopie und die Fundamentalgruppe

Ein wichtiges Hilfsmittel der Algebraischen Topologie ist die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese wollen wir im Folgenden einführen.

Im diesem Abschnitt seien  $X$  und  $Y$  immer topologische Räume, sofern nicht anders verlangt.

**Definition 1.2.1** (Homotopie). Stetige Abbildungen  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  sind *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt, so dass gilt:

$$F(x, 0) = f_1(x) \quad \forall x \in X$$

$$F(x, 1) = f_2(x) \quad \forall x \in X$$

Man schreibt dann auch  $f_1 \simeq f_2$ . Ein solches  $F$  heißt dann *Homotopie* von  $f_1$  nach  $f_2$ .

<sup>1</sup>Mit  $\sqcup$  bezeichnen wir die disjunkte Vereinigung



**Definition 1.2.2** (Homotope Wege). Seien  $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege mit

$$g_1(0) = g_2(0) =: p_0$$

$$g_1(1) = g_2(1) =: p_1$$

$g_1$  und  $g_2$  heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  gibt, so dass:

$$\begin{aligned} G(0, s) &= p_0, & G(1, s) &= p_1 & \forall s \in [0, 1] \\ G(t, 0) &= g_1(t), & G(t, 1) &= g_2(t) & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

d.h. die Endpunkte der Wege werden durch die Homotopie fixiert. Auch hier schreibt man, dann  $g_1 \simeq g_2$ .  $G$  nennt sich ebenfalls *Homotopie* von  $g_1$  nach  $g_2$ .

*Anmerkung.* Man bemerke hier eine gewisse "Doppel"-Definition des Begriffes "homotop", da jede Kurve insbesondere eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist. Im Folgenden werden wir um Verwirrung zu vermeiden im Kontext von Wegen immer die obige Definition 1.2.2 verwenden.

**Lemma 1.2.3.** (i) *Homotopie zwischen Abbildungen im Sinne von Definition 1.2.1 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Für eine stetig Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bezeichne  $[f]$  die entsprechende Äquivalenzklasse, die sog. Homotopieklasse von  $f$ .*

(ii) *Homotopie zwischen Wegen im Sinne von Definition 1.2.2 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in  $X$  mit fixem (nicht notwendigerweise gleichem) Anfangs- und Endpunkt. Für einen Weg  $g : [0, 1] \rightarrow X$  bezeichne  $[g]$  die entsprechende Äquivalenzklasse, die sog. Homotopieklasse von  $g$ .*

*Beweis.* Nachrechnen. □

**Lemma 1.2.4.** *Sei  $g : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg und  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $\tau(0) = 0$  und  $\tau(1) = 1$ . Dann gilt:*

$$g \simeq g \circ \tau$$

*Beweis.* Eine Homotopie ist gegeben durch:

$$G(t, s) := g((1 - s)t + s\tau(t))$$

□

**Definition 1.2.5** (Produkt von Kurven). Seien  $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege mit  $g_1(1) = g_2(0)$ . Dann definieren wir das *Produkt*  $g_1 \cdot g_2 := g$  durch:

$$g(t) := \begin{cases} g_1(2t) & , \text{ für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_2(2t - 1) & , \text{ für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Lemma 1.2.6.** *Seien  $g_1, g'_1, g_2, g'_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege mit  $g_1(1) = g_2(0)$  und  $g'_1(1) = g'_2(0)$ . Weiter gelte  $g_1 \simeq g'_1$  und  $g_2 \simeq g'_2$ . Dann gilt:*

$$g_1 \cdot g_2 \simeq g'_1 \cdot g'_2$$

*Beweis.* Man verkette die bestehenden Homotopien entsprechend. □

## 1. Grundlagen

Wir wollen nun die Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen mit fixem Basispunkt betrachten. Lemma 1.2.6 besagt nun, dass wir auf dieser Menge mittels der Setzung  $[g_1] \cdot [g_2] := [g_1 \cdot g_2]$  eine wohldefinierte Verknüpfung haben. Diese Verknüpfung induziert sogar eine Gruppenstruktur.

**Definition 1.2.7** (Fundamentalgruppe). Sei  $p_0 \in X$ . Mit  $\pi_1(X, p_0)$  bezeichnet man die Menge aller Homotopieklassen geschlossenen Wege  $g : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $g(0) = g(1) = p_0$ .  $\pi_1(X, p_0)$  heißt die *Fundamentalgruppe* (zum Basispunkt  $p_0$  in  $X$ ).

*Anmerkung.* Der folgende Satz rechtfertigt die Bezeichnung "Gruppe".

**Satz 1.2.8.** Sei  $p_0 \in X$ . Durch die Verknüpfung

$$\cdot : \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(X, p_0), ([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1 \cdot g_2]$$

wird  $\pi_1(X, p_0)$  zu einer Gruppe.

*Beweis.* Für einen Beweis der Assoziativität siehe [Hat10, S. 27]. Aus Lemma 1.2.4 folgt, dass durch den konstanten Weg

$$g_0 : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto p_0$$

das neutrale Element  $[g_0] \in \pi_1(X, p_0)$  gegeben ist. Zu  $[g] \in \pi_1(X, p_0)$  ist das Inverselement  $[g]^{-1}$  durch die Homotopieklasse des Inversenweges

$$g^{-1} : [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto g(1 - t)$$

gegeben. Eine Homotopie von  $g_0$  nach  $g \cdot g^{-1}$  ist hierbei

$$G(t, s) := \begin{cases} g(2st) & , \text{ für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g^{-1}(1 + 2s(t - 1)) = g(2s(1 - t)) & , \text{ für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

**Lemma 1.2.9.** Seien  $p_0, p_1 \in X$ . Gibt es einen Weg  $g : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $g(0) = p_0$  und  $g(1) = p_1$ , dann gilt:

$$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(X, p_1)$$

d.h. die Gruppen sind isomorph.

*Beweis.* Die Abbildung

$$\beta_g : \pi_1(X, p_1) \rightarrow \pi_1(X, p_0), [h] \mapsto [g \cdot h \cdot g^{-1}]$$

ist ein Gruppenisomorphismus mit Umkehrabbildung  $\beta_{g^{-1}}$ , vgl. [Hat10, S.28].

□

*Anmerkung.* Es ist wichtig zu beobachten, dass der angegebene Isomorphismus in der Regel von dem gewählten Weg  $g$  abhängt; nicht jedoch wenn die Fundamentalgruppen abelsch sind.

**Bemerkung 1.2.10.** Seien  $p_0, p_1 \in X$  und  $\pi_1(X, p_0)$  abelsch (dann auch zu beliebigen Basispunkt). Dann sind  $\pi_1(X, p_0)$  und  $\pi_1(X, p_1)$  kanonisch isomorph unter dem Isomorphismus  $\beta_g$ , wobei  $g$  wieder ein Weg von  $p_0$  nach  $p_1$  ist.

*Beweis.* Sei  $[h] \in \pi_1(X, p_1)$ . Dann gilt:

$$(\beta_g \circ \beta_g^{-1})([h]) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}([h])) = [g^{-1} \cdot g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g] = [g^{-1} \cdot g] \cdot [h] \cdot [g^{-1} \cdot g] = [h]$$

□

**Definition 1.2.11** (einfach zusammenhängend). Ist  $X$  wegzusammenhängend, so heißt  $X$  *einfach zusammenhängend*, wenn  $\pi_1(X, p) = 1$  für ein (dann jedes!)  $p \in X$  gilt.

**Definition 1.2.12** (lokal einfach zusammenhängend).  $X$  heißt *lokal einfach zusammenhängend*, wenn jedes  $x \in X$  eine Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  besitzt, so dass jedes  $U \in \mathcal{B}(x)$  einfach zusammenhängend ist.

**Definition 1.2.13** (nullhomotop). Ein geschlossener Weg  $g : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $g(0) = g(1) =: p_0$ , welcher homotop zum konstanten Pfad  $g_0 \equiv p_0$  ist, heißt *nullhomotop*.

**Lemma 1.2.14.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $p_0 \in X$  und  $q_0 := f(p_0) \in Y$ . Dann induziert  $f$  einen Homomorphismus

$$f_* : \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, p_1), [g] \mapsto [f \circ g]$$

zwischen den Fundamentalgruppen.

*Beweis.*  $f_*$  ist wohldefiniert, denn: Seien  $g_1, g_2$  geschlossene Wege in  $X$  mit Basispunkt  $p_0$  und  $g_1 \simeq g_2$ . Dann sind  $f \circ g_1$  und  $f \circ g_2$  geschlossene Wege in  $Y$  mit Basispunkt  $q_0 = f(p_0)$  und  $f \circ g_1 \simeq f \circ g_2$ , da  $f$  stetig ist. Man rechnet leicht nach, dass  $f_*$  ein Homomorphismus ist.  $\square$

## 1.3. Überlagerungen

Wie die Fundamentalgruppe ist auch die Überlagerungstheorie ein wichtiges Werkzeug in der Algebraischen Topologie. Diese wird auch in den nachfolgenden Kapiteln eine zentrale Rolle einnehmen. So werden wir mit ihrer Hilfe den Klassifizierungssatz in Kapitel 3 beweisen, und den Modulraum  $\mathcal{M}_1$  und Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_1$  von Tori in Kapitel 4 berechnen.

In diesem Abschnitt seien  $X, Y$  und  $\tilde{X}$  immer wegzusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und lokal einfach zusammenhängende topologische Räume. Später wird man leicht sehen, dass Riemann'sche Flächen diese Voraussetzungen erfüllen.

**Definition 1.3.1** (Überlagerung). Eine stetige Abbildung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *Überlagerung* von  $X$ , falls jeder Punkt  $x \in X$  eine offene wegzusammenhängende Umgebung  $U$  besitzt, so dass  $\pi^{-1}(U)$  eine nichtleere, disjunkte Vereinigung  $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$  ist und  $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist ( $\forall i \in I$ ).  $U$  heißt dann *gleichmäßig überlagert* und  $\{V_i \mid i \in I\}$  heißen die *Blätter* über  $U$ . Oft wird dann auch das Tripel  $(\tilde{X}, \pi, X)$  oder schon der Raum  $\tilde{X}$  Überlagerung (von  $X$ ) genannt.

Das folgende Lemma werden wir in Abschnitt 1.5 wiederverwenden, wenn wir die universelle Überlagerung einer Riemann'schen Fläche betrachten.

**Lemma 1.3.2.** Sei  $Y$  hausdorff'sch und  $\pi : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung. Dann ist bereits  $X$  hausdorff'sch.

*Beweis.* Seien  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$ .

1. Fall:  $\pi(x_1) = \pi(x_2) =: y$

Wenn  $x_1$  und  $x_2$  in unterschiedlichen Blättern über  $y$  liegen, können wir diese Blätter als offene disjunkte Umgebungen verwenden und sind fertig. Wenn  $x_1$  und  $x_2$  im selben Blatt über  $y$  liegen, müssen sie bereits gleich sein aufgrund der lokalen Umkehrbarkeit von  $\pi$ . Widerspruch!

2. Fall:  $y_1 := \pi(x_1) \neq \pi(x_2) =: y_2$

Da  $Y$  hausdorff'sch ist gibt es offene disjunkte Umgebungen  $V_1$  von  $y_1$  und  $V_2$  von  $y_2$ , welche

## 1. Grundlagen

o.B.d.A. gleichmäßig überlagert sind. Sei  $U_1$  das Blatt über  $V_1$ , welches  $x_1$  enthält, und  $U_2$  das Blatt über  $V_2$ , welches  $x_2$  enthält. Angenommen  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$V_1 \cap V_2 = \pi(U_1) \cap \pi(U_2) \supseteq \pi(U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$$

Im Widerspruch zur Wahl von  $V_1$  und  $V_2$ . Also haben wir mit  $U_1$  und  $U_2$  disjunkte offene Umgebungen von  $x_1$  und  $x_2$  gefunden. □

**Definition 1.3.3** (Lift). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  heißt *Lift* von  $f$  bzgl.  $\pi$ , falls  $f = \pi \circ \tilde{f}$ , d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Man kann sich nun fragen, wann es einen solchen Lift gibt und inwiefern dieser eindeutig ist. Dies beantworten die folgenden Lemmata und Sätze.

**Lemma 1.3.4** (Kurvenliftungseigenschaft). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $g : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg mit  $x_0 := g(0)$  und  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Dann gibt es einen Lift  $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  von  $g$  bzgl.  $\pi$ . Dieser Lift ist eindeutig durch die Wahl von  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$  bestimmt.

*Beweis.* Siehe [Hat10, S. 60-61]. □

**Lemma 1.3.5** (Homotopieliftungseigenschaft). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie zwischen den Wegen  $g_0(t) := G(t, 0)$  und  $g_1(t) := G(t, 1)$  mit fixen Endpunkten  $x_0 = g_0(0) = g_1(0)$  und  $x_1 = g_0(1) = g_1(1)$ . Weiter sei  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Dann gilt: Es gibt einen Lift  $\tilde{G} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  von  $G$  bzgl.  $\pi$  mit  $\tilde{G}(0, s) = \tilde{x}_0$  ( $\forall s \in [0, 1]$ ) und fixem Endpunkt  $\tilde{G}(1, s) =: \tilde{x}_1$  ( $\forall s \in [0, 1]$ ).

Daher ist  $\tilde{G}$  eine Homotopie zwischen den (eindeutigen) Lifts  $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1$  von  $g_0, g_1$  bei  $\tilde{x}_0$ . Insbesondere haben  $\tilde{g}_0$  und  $\tilde{g}_1$  denselben Endpunkt  $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_1)$  und sind homotop.

*Beweis.* Siehe [Hat10, S. 60-61]. □

**Satz 1.3.6** (Allgemeiner Hochhebungssatz). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Weiter seien  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$  und  $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ . Dann gilt: Es gibt genau dann einen Lift  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  von  $f$  mit  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ , wenn  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

*Beweis.* Siehe [Hat10, S. 62]. □

**Satz 1.3.7** (Eindeutigkeit des Lifts). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung mit Lifts  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ , welche in einem Punkt übereinstimmen. Dann sind  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{f}_2$  bereits identisch.

*Beweis.* Siehe [Hat10, S. 62-63]. (Man beachte, dass  $Y$  wegzusammenhängend, also insbesondere zusammenhängend, ist). □

Eine ausgezeichnete Position nimmt die sogenannte universelle Überlagerung eines Raumes ein. Diese wird auch in Abschnitt 1.5 und Kapitel 3 von großer Bedeutung sein.

**Definition 1.3.8** (Universelle Überlagerung). Eine Überlagerung  $(\tilde{X}, \pi, X)$  heißt universelle Überlagerung, falls  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

**Satz 1.3.9.** Zu jedem wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden topologischen Raum, gibt es eine universelle Überlagerung.

*Beweis.* Siehe [Hat10, S. 64-65]. □

**Lemma 1.3.10.** Seien  $(\tilde{X}_1, \pi_1, X)$  und  $(\tilde{X}_2, \pi_2, X)$  universelle Überlagerungen von  $X$ . Dann gilt:

$$\tilde{X}_1 \cong \tilde{X}_2$$

*Beweis.* Sei  $x \in X$ ,  $y_1 \in \pi_1^{-1}(x)$  und  $y_2 \in \pi_2^{-1}(x)$ . Da sowohl  $\tilde{X}_1$  als auch  $\tilde{X}_2$  einfach zusammenhängend sind, existieren sowohl von  $\pi_2$  bzgl.  $\pi_1$  als auch von  $\pi_1$  bzgl.  $\pi_2$  Lifts  $\tilde{\pi}_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$  und  $\tilde{\pi}_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  mit  $\tilde{\pi}_2(y_2) = y_1$  und  $\tilde{\pi}_1(y_1) = y_2$ . Aus  $\pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{\pi}_1$  und  $\pi_2 = \pi_1 \circ \tilde{\pi}_2$  folgt:

$$\pi_1 = \pi_1 \circ (\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1) \tag{1.1}$$

$$\pi_2 = \pi_2 \circ (\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2) \tag{1.2}$$

$$y_1 = (\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1)(y_1) \tag{1.3}$$

$$y_2 = (\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2)(y_2) \tag{1.4}$$

Also ist  $(\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2)$  ein Lift von  $\pi_2$  bzgl. sich selbst und  $(\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1)$  ein Lift von  $\pi_1$  bzgl. sich selbst. Aus (1.3) und (1.4) folgt dann mit dem Eindeutigkeitssatz, dass  $(\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1) = id$  und  $(\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2) = id$ . Damit ist dann  $\tilde{\pi}_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung  $\tilde{\pi}_2$ . □

In Zusammenhang mit der universellen Überlagerung sind auch die sogenannten Decktransformationen wichtig. Diese werden es uns ermöglichen in Abschnitt 1.5 Riemann'sche Flächen als gewisse Quotientenräume darzustellen.

**Definition 1.3.11** (Decktransformationen). Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus  $\gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi \circ \gamma = \pi$  nennen wir eine *Decktransformation*. Diese bilden die Gruppe der Decktransformationen  $Deck(\tilde{X}, \pi, X)$  bzw.  $Deck(\pi)$ .

Im Folgenden sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung von  $X$ .

**Bemerkung 1.3.12.** Jede stetige Abbildung  $\gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi \circ \gamma = \pi$  ist ein Homöomorphismus, d.h. eine Decktransformation.

*Beweis.* Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  und  $\tilde{y} := \gamma(\tilde{x}) \in \tilde{X}$ . Dann gilt insbesondere  $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ . Da  $\tilde{X}$  als universelle Überlagerung einfach zusammenhängend ist, sind die Voraussetzungen des Allgemeinen Hochhebungssatzes trivialerweise erfüllt und es gibt somit eine stetige Abbildung  $\gamma_2 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi \circ \gamma_2 = \pi$  und  $\gamma_2(\tilde{y}) = \tilde{x}$ . Dann ist wegen

$$\pi \circ \gamma_2 \circ \gamma = \pi \circ \gamma = \pi$$

auch  $\gamma_2 \circ \gamma$  ein Lift von  $\pi$  bzgl.  $\pi$  mit  $\gamma_2(\gamma(\tilde{x})) = \tilde{x}$ . Aufgrund der Eindeutigkeit von Lifts gilt dann  $\gamma_2 \circ \gamma = id$ . Analog sieht man  $\gamma \circ \gamma_2 = id$  und somit ist  $\gamma$  ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung  $\gamma_2$ . □

**Lemma 1.3.13.** Es gilt:

- (i) Für alle  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$  mit  $\pi(\tilde{x}_1) = \pi(\tilde{x}_2)$  gibt es ein  $\gamma \in Deck(\pi)$ , so dass  $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ .
- (ii) Für jedes  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  gibt es eine Umgebung  $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ , so dass  $\gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset \quad \forall \gamma \in Deck(\pi) \setminus \{id\}$ . Insbesondere hat jede Decktransformation, außer der Identität, keine Fixpunkte.

## 1. Grundlagen

*Beweis.* Zu (i): Da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, wird die Voraussetzung des Allgemeinen Hebe-  
hebungssatzes, trivialerweise von  $\pi$  erfüllt. Somit gibt es einen Lift  $\gamma \in \text{Deck}(\pi)$  von  $\pi$  bzgl.  $\pi$  mit  
 $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ .

Zu (ii): Wähle um  $\tilde{x}$  eine Umgebung  $\tilde{U}$ , so dass  $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \pi(\tilde{U})$  ein Homöomorphismus ist.  
Sei  $\gamma \in \text{Deck}(\pi)$  mit  $\gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ . Wähle nun ein  $\tilde{y} \in \gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U}$  und  $\tilde{x} \in \tilde{U}$  mit  $\tilde{y} = \gamma(\tilde{x})$ . Aus  
 $\pi \circ \gamma = \pi$  folgt dann insbesondere  $\pi(\tilde{y}) = \pi(\gamma(\tilde{x})) = \pi(\tilde{x})$ . Da  $\pi|_{\tilde{U}}$  bijektiv ist, folgt  $\tilde{x} = \tilde{y}$  und  
damit  $\tilde{x} = \gamma(\tilde{x})$ . Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist dann  $\gamma = \text{id}$ .  $\square$

Wir wollen nun gewisse Gruppenoperationen auf der Faser  $\pi^{-1}(x_0)$  über einem Punkt  $x_0 \in X$   
betrachten. Wir werden sehen, dass die Fundamentalgruppe bei  $x_0$  von rechts und die Gruppe der  
Decktransformationen von links auf dieser operiert. Über diese Operationen werden wir dann einen  
Zusammenhang zwischen der Decktransformationsgruppe und der Fundamentalgruppe herleiten,  
welcher insbesondere in Kapitel 4 bei der Betrachtung von Tori wichtig sein wird (vgl. auch Beispiel  
1.3.23).

**Definition 1.3.14** (Rechtsoperation von  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $\pi^{-1}(x_0)$ ). Sei  $x_0 \in X$ . Man kann dann eine  
Rechtsoperation von  $\pi_1(X, x_0)$  auf der Faser  $\pi^{-1}(x_0)$  (s. Anhang) definieren:

$$\cdot : \pi^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_0), (x, [g]) \mapsto x \cdot [g] := \tilde{g}(1)$$

wobei  $\tilde{g}$  der eindeutige Lift von  $g$  bei  $x$  sei.

**Bemerkung 1.3.15.** Die oben definierte Rechtsoperation ist wohldefiniert und transitiv.

*Beweis.* Sei  $x \in \pi^{-1}(x_0)$  und  $[g] = [g'] \in \pi_1(X, x_0)$ . Dann gilt  $g \simeq g'$  und wegen der Homoto-  
pieliftungseigenschaft auch  $\tilde{g} \simeq \tilde{g}'$ , wobei  $\tilde{g}$  bzw.  $\tilde{g}'$  jeweils die Lifts zu  $g$  bzw.  $g'$  bei  $x$  sind. Da  
Homotopien die Endpunkte fest lassen, gilt daher  $\tilde{g}(1) = \tilde{g}'(1)$ . Wegen  $x_0 = g(1) = \pi(\tilde{g}(1))$  gilt  
auch wie gewünscht  $\tilde{g}(1) \in \pi^{-1}(x_0)$ . Also ist die Abbildung wohldefiniert.

Offenbar gilt für die konstante Kurve  $g_0$  bei  $x_0$ , dass ihr Lift bei  $x$  gerade die konstante Kurve  
 $\tilde{g}_0$  ist. Somit hat man  $x \cdot [g_0] = \tilde{g}_0(1) = x$ . Weiter gilt  $(x \cdot [g]) \cdot [g'] = x \cdot ([g] \cdot [g']) = x \cdot [g \cdot g']$ , denn  
ist  $\tilde{g}$  ein Lift von  $g$  bei  $x$  und  $\tilde{g}'$  ein Lift von  $g'$  bei  $\tilde{g}(1)$ , so ist  $\tilde{g} \cdot \tilde{g}'$  ein Lift von  $g \cdot g'$  bei  $x$ . Somit  
ist die Abbildung eine Rechtsoperation.

Bleibt noch zu zeigen, dass sie transitiv ist. Hierzu seien  $x, y \in \pi^{-1}(x_0)$ . Wir wählen nun einen  
Weg  $\tilde{g}$  von  $x$  nach  $y$  und betrachten sein Bild  $g := \pi \circ \tilde{g}$ . Dann ist  $y = x \cdot [g]$  nach Definition von  
 $g$ , also ist die Rechtsoperation transitiv.  $\square$

**Definition 1.3.16** (Linksoperation von  $\text{Deck}(\pi)$  auf  $\pi^{-1}(x_0)$ ). Sei  $x_0 \in X$ . Man kann eine Links-  
operation von  $\text{Deck}(\pi)$  auf der Faser  $\pi^{-1}(x_0)$  definieren:

$$\cdot : \text{Deck}(\pi) \times \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_0), (\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x := \gamma(x)$$

**Bemerkung 1.3.17.** Die oben definierte Linksoperation ist wohldefiniert.

*Beweis.* Sei  $x \in \pi^{-1}(x_0)$  und  $\gamma, \gamma' \in \text{Deck}(\pi)$ .  $x_0 = \pi(x) = \pi(\gamma(x)) = \pi(\gamma \cdot x)$ . Also ist  $\gamma \cdot x$  wie  
gewünscht in  $\pi^{-1}(x_0)$ . Außerdem gilt  $\text{id} \cdot x = \text{id}(x) = x$  und

$$\gamma \cdot (\gamma' \cdot x) = \gamma \cdot \gamma'(x) = \gamma(\gamma'(x)) = (\gamma \circ \gamma')(x) = (\gamma \circ \gamma') \cdot x$$

Daher definiert die Abbildung  $\cdot$  eine Linksoperation von  $\text{Deck}(\pi)$  auf der Faser  $\pi^{-1}(x_0)$ .  $\square$

**Lemma 1.3.18.** Sei  $x_0 \in X$  und  $F := \pi^{-1}(x_0)$ . Dann gilt für alle  $x \in F, \gamma \in \text{Deck}(\pi), [g] \in$   
 $\pi_1(X, x_0)$ :

$$(\gamma \cdot x) \cdot [g] = \gamma \cdot (x \cdot [g])$$

*Beweis.* Ist  $\tilde{g}$  ein Lift von  $g$  bei  $x$ , dann ist  $\gamma \circ \tilde{g}$  ein Lift von  $g$  bei  $\gamma(x)$ , da  $\gamma$  eine Decktransformation ist. Also:

$$\gamma \cdot (x \cdot [g]) = \gamma(\tilde{g}(1)) = (\gamma \circ \tilde{g})(1) = \gamma(x) \cdot [g] = (\gamma \cdot x) \cdot [g]$$

□

**Definition 1.3.19.** Sei  $x_0 \in X$  und  $x \in \pi^{-1}(x_0)$ . Wir definieren:

$$\theta_x : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Deck}(\pi), [g] \mapsto \gamma_g$$

wobei  $\gamma_g$  die eindeutige Decktransformation ist mit  $\gamma_g(x) = x \cdot [g]$ .

**Satz 1.3.20.** Sei  $x_0 \in X$  und  $x \in \pi^{-1}(x_0)$ . Dann ist  $\theta_x : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Deck}(\pi)$  wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere gilt also  $\text{Deck}(\pi) \cong \pi_1(X, x_0)$ .

*Beweis.* Wohldefiniertheit:

Sei  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ . Dann gibt es nach Lemma 1.3.13 ein  $\gamma_g \in \text{Deck}(\pi)$ , so dass  $\gamma_g(x) = x \cdot [g]$ . Dieses ist eindeutig bestimmt nach Satz 1.3.7, denn Decktransformationen sind nach Definition Lifts von  $\pi$  bzgl. sich selbst. Daher ist  $\theta_x$  wohldefiniert.

Gruppenhomomorphismus:

Seien nun  $[g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$ . Dann gilt  $\theta_x([g] \cdot [h]) = \theta_x([g \cdot h]) = \gamma_{gh} \in \text{Deck}(\pi)$ . Zu zeigen:

$$\theta_x([g] \cdot [h]) = \theta_x([g]) \circ \theta_x([h]) \quad , \text{ d.h. } \gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h$$

Wieder wegen der Eindeutigkeit von Lifts (Satz 1.3.7) reicht es diese Gleichung in dem Punkt  $x \in \tilde{X}$  zu prüfen:

$$\gamma_{gh}(x) = x \cdot [g \cdot h] = (x \cdot [g]) \cdot [h] = (\gamma_g \cdot x) \cdot [h] = \gamma_g \cdot (x \cdot [h]) = (\gamma_g \circ \gamma_h)(x)$$

Daher ist  $\theta_x$  ein Gruppenhomomorphismus.

Surjektiv:

Sei  $\gamma \in \text{Deck}(\pi)$ . Es gibt nun einen Weg  $\tilde{g}$  von  $x \in \pi^{-1}(x_0)$  nach  $\gamma(x) \in \pi^{-1}(x_0)$ . Wir setzen  $g := \pi \circ \tilde{g}$ . Dann gilt:

$$\theta_x([g])(x) = \gamma_g(x) = x \cdot [g] = \tilde{g}(1) = \gamma(x)$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt  $\theta_x([g]) = \gamma$  und daher ist  $\theta_x$  surjektiv.

Injektiv:

Sei  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$  mit  $\theta_x([g]) = id$ . Dann gilt

$$x = \gamma_g(x) = x \cdot [g] = \tilde{g}(1)$$

wobei  $\tilde{g}$  ein Lift von  $g$  bei  $x$  ist. Daher ist  $\tilde{g}$  geschlossen und, weil  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, gilt  $[\tilde{g}] = 1$ . Es folgt  $1 = [\pi \circ \tilde{g}] = [g]$ . Wir haben also gezeigt: Kern  $\theta_x = \{1\}$ , d.h.  $\theta_x$  ist injektiv. □

Es stellt sich nun natürlich die Frage, inwiefern der Isomorphismus  $\theta_x$  von der Wahl des Faserpunktes  $x \in \pi^{-1}(x_0)$  abhängt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage.

**Satz 1.3.21.** Sei  $x_0 \in X$ ,  $x, y \in \pi^{-1}(x_0)$  und  $\gamma \in \text{Deck}(\pi)$  die eindeutig bestimmte Decktransformation mit  $\gamma(x) = y$ . Dann gilt für alle  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ :

$$\gamma \circ \theta_x([g]) \circ \gamma^{-1} = \theta_y([g])$$

## 1. Grundlagen

*Beweis.* Sei  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ . Wir bezeichnen mit  $\tilde{g}_x$  den Lift von  $g$  bei  $x$  und mit  $\tilde{g}_y$  den Lift von  $g$  bei  $y$ . Weil  $\gamma \circ \tilde{g}_x$  dann auch ein Lift von  $g$  bei  $y$  ist, muss wegen der Eindeutigkeit  $\tilde{g}_y = \gamma \circ \tilde{g}_x$  gelten. Also gilt:

$$(\gamma \circ \theta_x([g]) \circ \gamma^{-1})(y) = \gamma(\theta_x([g])(x)) = \gamma(\tilde{g}_x(1)) = \tilde{g}_y(1) = \theta_y([g])(y)$$

Weil Decktransformationen als Lifts von  $\pi$  bzgl. sich selbst schon durch ihr Bild an einem einzigen Punkt eindeutig bestimmt sind (Satz 1.3.7), ist somit  $\gamma \circ \theta_x([g]) \circ \gamma^{-1} = \theta_y([g])$ .  $\square$

**Korollar 1.3.22.** Seien  $x_0 \in X$  und  $x, y \in \pi^{-1}(x_0)$ . Ist  $\text{Deck}(\pi)$  abelsch, dann gilt für alle  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ :

$$\theta_x([g]) = \theta_y([g]) =: \theta([g])$$

Das folgende Beispiel werden wir in Abschnitt 4.1 wieder aufgreifen. Insbesondere die im Folgenden eingeführte Gitterkorrespondenz werden wir zur Definition des Teichmüllerraums  $\mathcal{T}_1$  benutzen.

**Beispiel 1.3.23** (Torus). Seien  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige komplexe Zahlen, d.h.  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ . Wir betrachten nun den von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ . Auf  $\mathbb{C}$  kann man nun folgende Äquivalenzrelation einführen:

$$z \sim z' :\Leftrightarrow \exists \omega \in \Lambda : z = z' + \omega$$

Die Äquivalenzklasse einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  bzgl. dieser Äquivalenzrelation wollen wir mit  $[z]$  bezeichnen. Die Menge aller solcher Äquivalenzklassen nennt man dann den Torus  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  und  $\Lambda$  das zugehörige *Gitter*. Die so eingeführte Äquivalenzrelation entspricht dann auch der Definition eines Quotienten von  $\mathbb{Z}$ -Moduln bzw. abelschen Gruppen, d.h.  $T$  hat insbesondere auch die Struktur eines  $\mathbb{Z}$ -Moduls bzw. einer abelschen Gruppe. Der Torus wird mit der durch die Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda = T, z \mapsto [z]$  induzierten Quotiententopologie zu einem kompakten zusammenhängenden Hausdorffraum und  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T$  zu einer universellen Überlagerung.

Nach der Definition von  $T$  ist dann klar, dass die Gruppe der Decktransformationen frei durch die Abbildungen  $\tilde{\omega}_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \omega_1$  und  $\tilde{\omega}_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \omega_2$  erzeugt wird, d.h.  $\text{Deck}(\pi)$  ist abelsch.

Durch  $\Phi : \text{Deck}(\pi) \rightarrow \Lambda, \gamma \mapsto \gamma(0)$  ist ein Gruppenisomorphismus gegeben mit  $\Phi(\tilde{\omega}_i) = \omega_i$  für  $i = 1, 2$ .

Sei nun  $x_0 \in T$ .  $\Xi := \Phi \circ \theta : \pi_1(T, x_0) \rightarrow \Lambda$  ist dann ein Isomorphismus, der jedem Element der Fundamentalgruppe zum Basispunkt  $x_0$  ein Element des Gitters zuordnet. Wir sagen auch  $[g] \in \pi_1(X, x_0)$  *korrespondiert* zu  $\Xi([g]) \in \Lambda$ . Sind  $[A], [B]$  die Erzeuger von  $\pi_1(T, x_0) \cong \text{Deck}(\pi)$ , gilt  $\Xi([A]) = \omega_i$  und  $\Xi([B]) = \omega_j$  ( $i, j \in 1, 2, i \neq j$ ). Daraus folgt, dass für die Lifts  $\tilde{A}$  von  $A$  und  $\tilde{B}$  von  $B$  bei einem beliebigen Punkt der Faser  $\pi^{-1}(x_0)$  gilt:  $\tilde{A}(1) - \tilde{A}(0) = \Xi([A]) = \omega_i$  und  $\tilde{B}(1) - \tilde{B}(0) = \Xi([B]) = \omega_j$ .

**Definition 1.3.24** (Gitterkorrespondenz). Sei  $\mathbb{C}/\Lambda$  ein Torus,  $p \in \mathbb{C}/\Lambda$  und  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  die kanonische Projektion. Die in Beispiel 1.3.23 definierte Abbildung  $\Xi : \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda, p) \rightarrow \Lambda$  nennen wir dann die *Gitterkorrespondenz* bzgl.  $\pi$ .

## 1.4. Riemann'sche Flächen

Wir wollen nun den zentralen Gegenstand unserer weiteren Betrachtungen einführen, die Riemann'schen Flächen. Nach den grundlegenden Definitionen wollen wir noch den Tangentialraum betrachten. Dieser wird es uns dann ermöglichen eine Geometrie auf Riemann'schen Flächen zu erklären.



**Definition 1.4.1** (Karten). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine (*komplexe*) *Karte* auf/für  $X$  ist ein Tupel  $(U, \phi)$  bestehend aus einer offenen Menge  $U \subseteq X$  und einem Homöomorphismus  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{C}$ , so dass  $\phi(U)$  offen in  $\mathbb{C}$  ist.

Ist  $p \in X$  und  $(U, \phi)$  eine Karte auf  $X$  mit  $p \in U$ , so sagt man auch, dass  $(U, \phi)$  eine Karte um  $p$  ist.

**Definition 1.4.2** (Kartenwechsel). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(U, \phi), (V, \psi)$  zwei Karten auf  $X$ . Der Homöomorphismus

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

heißt der *Kartenwechsel* von  $(U, \phi)$  nach  $(V, \psi)$ . Ist der Kartenwechsel biholomorph, so sagen wir, dass die beiden Karten *kompatibel* sind.

**Definition 1.4.3** (Atlas). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Menge an Karten auf  $X$ , deren Kartengebiete ganz  $X$  überdecken, heißt *Atlas* für  $X$ . Der Atlas heißt *komplex*, wenn alle seine Karten kompatibel sind. Zwei komplexe Atlanten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen *äquivalent*, wenn auch  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  komplex ist.

**Definition 1.4.4** (komplexe Struktur). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein komplexer Atlas  $\Sigma$  für  $X$  heißt *maximal*, wenn jede Karte  $(U, \phi)$  auf  $X$ , welche mit den Karten in  $\Sigma$  kompatibel ist, bereits in  $\Sigma$  enthalten ist. Ein maximaler komplexer Atlas für  $X$  heißt *komplexe Struktur* für  $X$ . Ist  $\mathfrak{A}$  ein komplexer Atlas für  $X$  so bezeichne  $\Sigma(\mathfrak{A})$  die Menge aller Karten auf  $X$ , welche mit denen aus  $\mathfrak{A}$  kompatibel sind.  $\Sigma(\mathfrak{A})$  ist somit eine komplexe Struktur für  $X$ .

**Definition 1.4.5** (Riemann'sche Fläche). Sei  $R$  ein zusammenhängender Hausdorffraum und  $\Sigma$  eine komplexe Struktur für  $R$ . Das Tupel  $(R, \Sigma)$  heißt dann *Riemann'sche Fläche*.

Oft spricht man auch nur von der Riemann'schen Fläche  $R$  und lässt die komplexe Struktur weg.

**Beispiel 1.4.6.** 1. Das wohl einfachste Beispiel für eine Riemann'sche Fläche ist  $\mathbb{C}$ :

Durch  $\mathfrak{A} := \{(\mathbb{C}, Id)\}$  ist schon ein komplexer Atlas gegeben und man erhält deshalb die Riemann'sche Fläche  $(\mathbb{C}, \Sigma(\mathfrak{A}))$ .

2. Jedes Teilgebiet  $G$  (offen und zusammenhängend) einer Riemann'schen Fläche  $(R, \Sigma)$  ist ebenfalls eine Riemann'sche Fläche.  $G$  wird als Gebiet mit der Teilraumtopologie zu einem zusammenhängenden Hausdorffraum. Ein Atlas auf  $G$  erhält man dann durch Einschränkung der bestehenden Karten aus  $R$  auf  $G$ :

$$\mathfrak{B} := \{(U \cap G, \phi|_{U \cap G}) \mid (U, \phi) \in \Sigma, U \cap G \neq \emptyset\}$$

$(G, \Sigma(\mathfrak{B}))$  ist dann eine Riemann'sche Fläche. Insbesondere ist also auch jedes Gebiet in  $\mathbb{C}$  eine Riemann'sche Fläche.

Wir wollen nun noch eine anschauliche Definition für das Geschlecht einer Fläche geben.

**Definition 1.4.7** (Geschlecht). <sup>2</sup> Eine kompakte Riemann'sche Fläche hat *Geschlecht*  $g \in \mathbb{N}_0$ , wenn sie homöomorph zu einer Kugel mit  $g$  Henkeln ist. Für  $g \geq 1$  erhält man denselben Raum, wenn man  $g$  Tori aneinander klebt. Diesen wollen wir im Folgenden mit  $S_g$  bezeichnen (siehe Abb. 1.1).

*Anmerkung.* Diese Definition ist wohldefiniert, da jede kompakte Riemann'sche Fläche insbesondere eine geschlossene orientierbare 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Nach dem Klassifikationssatz geschlossener 2-dimensionaler topologischer Mannigfaltigkeiten ist jede solcher Mannigfaltigkeit, wenn sie orientierbar ist, homöomorph zu einem  $S_g$ . Einen Beweis dieses Satzes findet man bei [Mas91] in Kapitel 1 oder [tom00] (Satz 4.9 in II).

## 1. Grundlagen

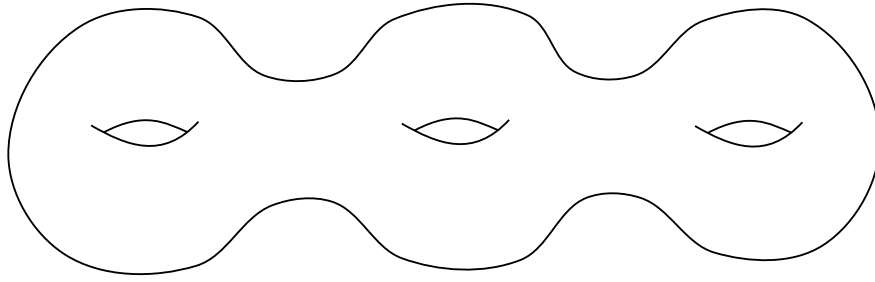


Abbildung 1.1.:  $S_g$  für  $g = 3$

**Beispiel 1.4.8** (Riemann'sche Zahlkugel). Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung  $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  betrachten. Hierbei ist " $\infty$ " zunächst nur ein Symbol, welches erst durch eine Topologie auf  $\mathbb{P}^1$  mit Bedeutung versehen wird. Diese wollen wir nun einführen, indem wir eine Subbasis  $\mathcal{B}$  für diese angeben (vgl. Bem. 1.1.5). Wir betrachten hierzu:

$$\mathcal{B} := \{U \subseteq \mathbb{C} \mid U \text{ offen}\} \cup \{(\mathbb{C} \setminus K) \sqcup \{\infty\} \mid K \subseteq \mathbb{C} \text{ kompakt}\}$$

(Diese Topologisierung entspricht in der Parlanze der Topologie der *Einpunktkompaktifizierung* von  $\mathbb{C}$ ). Man sieht leicht, dass  $\mathcal{B}$   $\cap$ -stabil ist und deshalb sogar eine Basis der so induzierten Topologie auf  $\mathbb{P}^1$  bildet. Wir wollen ab jetzt  $\mathbb{P}^1$  immer mit dieser Topologie versehen als topologischen Raum auffassen. Es lässt sich nun zeigen, dass  $\mathbb{P}^1$  homöomorph zu einer Kugel ist; insbesondere ist  $\mathbb{P}^1$  hausdorff'sch, kompakt und einfach zusammenhängend.

Auf  $\mathbb{P}^1$  ist durch  $\mathfrak{A} := \{(U, \phi), (V, \psi)\}$  ein komplexer Atlas gegeben mit  $U := \mathbb{C}, \phi := id_{\mathbb{C}}$  und

$$V := \mathbb{C}^* \sqcup \{\infty\}, \psi(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & , z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & , z = \infty \end{cases}$$

Man versteht  $\mathbb{P}^1$  nun mit dem zugehörigen maximalen Atlas  $\Sigma(\mathfrak{A})$  als komplexe Struktur. Die so entstehende Riemann'sche Fläche  $\mathbb{P}^1$  nennt man dann *Riemann'sche Zahlkugel*. Wie bereits erwähnt ist  $\mathbb{P}^1$  kompakt und homöomorph zu einer Kugel, d.h.  $\mathbb{P}^1$  hat Geschlecht 0.

**Definition 1.4.9** (Torus). Hat eine Riemann'sche Fläche Geschlecht 1 bzw. ist diese homöomorph zu einer Torus, so nennen wir diese ebenfalls einen *Torus*.

Für den Rest dieses Abschnittes seien  $(R, \Sigma)$  und  $(S, \Sigma')$  Riemann'sche Flächen.

**Lemma 1.4.10.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow R$  ein lokaler Homöomorphismus. Dann gibt es zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  von  $x$  und eine Karte  $(V, \psi) \in \Sigma$ , so dass  $f|_U$  ein Homöomorphismus ist und  $V = f(U)$ .

*Beweis.* Sei  $x \in X$ . Wähle nun eine offene Umgebung  $U_0$  von  $x$ , so dass  $f|_{U_0}$  ein Homöomorphismus ist. Wähle weiter eine Karte  $(V_0, \psi_0) \in \Sigma$ , so dass  $f(x) \in V_0$ . Setze nun:

$$\begin{aligned} U &:= U_0 \cap f^{-1}(V_0) \subseteq U_0 \\ V &:= f(U) = f(U_0) \cap V_0 \subseteq V_0 \\ \psi &:= \psi_0|_V \end{aligned}$$

Damit ist  $(V, \psi) \in \Sigma$ , denn  $\Sigma$  ist ein maximaler Atlas und die Kartenwechselabbildung zwischen  $(V_0, \psi_0)$  und  $(V, \psi)$  ist die Identität. Also erfüllen  $U$  und  $(V, \psi)$  die geforderten Eigenschaften.  $\square$

<sup>2</sup>Es ist möglich diese Definition mathematische präziser zu fassen. Allerdings wäre hierzu der Begriff der Homologie notwendig, den wir hier nicht einführen wollen.

**Satz 1.4.11** (Pullback komplexer Strukturen). *Sei  $X$  ein zusammenhängender Hausdorffraum und  $f : X \rightarrow R$  ein lokaler Homöomorphismus. Dann kann man auf  $X$  eine komplexe Struktur  $f^*(\Sigma)$  definieren, welche durch  $\Sigma$  eindeutig bestimmt ist.  $(X, f^*(\Sigma))$  wird dann zu einer Riemann'schen Fläche und  $f^*(\Sigma)$  nennt man den Pullback der komplexen Struktur  $\Sigma$  unter  $f$ .*

*Beweis.* Wir beginnen, indem wir um jeden Punkt  $x \in X$  Karten definieren. Hierzu wählen wir wie in Lemma 1.4.10 eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  und eine Karte  $(V, \psi)$  auf  $R$ . Nun definieren wir um  $x$  die Karte  $(U, \psi \circ f)$  und bezeichnen die Menge aller so konstruierten Karten mit  $\mathfrak{A}$ . Wir wollen zeigen, dass  $\mathfrak{A}$  ein komplexer Atlas ist, d.h. je zwei Karten miteinander kompatibel sind. Seien hierzu  $(U_1, \psi_1 \circ f)$  und  $(U_2, \psi_2 \circ f)$  zwei solche Karten mit  $U_i, V_i, \psi_i$  ( $i = 1, 2$ ) wie in Lemma 1.4.10 und  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\psi_2 \circ f) \circ (\psi_1 \circ f)|_{\psi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)} &= \psi_2|_{V_1 \cap V_2} \circ f|_{U_1 \cap U_2} \circ f|_{V_1 \cap V_2}^{-1} \circ \psi_1|_{\psi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)}^{-1} \\ &= \psi_2 \circ \psi_1|_{\psi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)}^{-1} \end{aligned}$$

Also entspricht die Kartenwechselabbildung der ursprünglichen auf  $R$  und ist somit biholomorph. Damit ist  $\mathfrak{A}$  ein Atlas und wir setzen:

$$f^*(\Sigma) := \Sigma(\mathfrak{A})$$

□

**Bemerkung 1.4.12.** *Sei  $f : R \rightarrow S$  stetig,  $p \in R$  und  $(V, \psi)$  eine Karte von  $S$  um  $f(p)$ . Dann gibt es eine Karte  $(U, \phi)$  auf  $R$  um  $p$  mit  $f(U) \subseteq V$ .*

*Beweis.* Wir betrachten  $f^{-1}(V) \subseteq R$  und eine Karte  $(U_0, \phi_0)$  auf  $R$  um  $p$ . Da  $f$  stetig ist, ist  $f^{-1}(V)$  offen. Also ist auch  $U := f^{-1}(V) \cap U_0$  offen. Durch  $\phi := \phi_0|_U$  wird dann  $(U, \phi)$  zu der gewünschten Karte auf  $R$ . □

**Definition 1.4.13.** Sei  $f : R \rightarrow S$  stetig,  $p \in R$  und  $(U, \phi) \in \Sigma$ ,  $(V, \psi) \in \Sigma'$  mit  $f(U) \subseteq V$ . Man sagt dann  $f$  hat eine lokale Eigenschaft bezüglich der Karten  $(U, \phi)$  und  $(V, \psi)$  bei  $p$ , wenn die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

diese Eigenschaft bei  $\phi(p)$  hat. Ist die Eigenschaft unabhängig von der Wahl solcher Karten, so sagen wir kurz: " $f$  hat die Eigenschaft bei  $p$ ".

Im Folgenden sei  $G \subseteq \mathbb{R}$  ein beliebiges nicht degeneriertes Intervall oder ganz  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.4.14.** Sei  $f : G \rightarrow R$  stetig. Weiter sei  $x \in G$  und  $(U, \phi)$  eine Karte auf  $R$  um  $f(x)$ . Man sagt dann  $f$  hat eine lokale Eigenschaft bezüglich der Karte  $(U, \phi)$  bei  $x$ , wenn die Abbildung

$$\phi \circ f : G \cap f^{-1}(U) \rightarrow \phi(U)$$

diese Eigenschaft bei  $x$  hat. Ist die Eigenschaft unabhängig von der Wahl einer solchen Karte, so sagen wir kurz: " $f$  hat die Eigenschaft bei  $x$ ".

**Definition 1.4.15.** Sei  $f : R \rightarrow G$  stetig. Weiter sei  $p \in R$  und  $(U, \phi)$  eine Karte auf  $R$  um  $p$ . Man sagt dann  $f$  hat eine lokale Eigenschaft bezüglich der Karte  $(U, \phi)$  bei  $p$ , wenn die Abbildung

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow G$$

diese Eigenschaft bei  $\phi(p)$  hat. Ist die Eigenschaft unabhängig von der Wahl einer solchen Karte, so sagen wir kurz: " $f$  hat die Eigenschaft bei  $p$ ".

## 1. Grundlagen

Durch die vorangegangenen Definitionen lassen sich nun leicht die Eigenschaften der Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie für die angegebenen Typen von Abbildungen definieren.

**Definition 1.4.16.** Sei  $f : R \rightarrow S$ ,  $g : G \rightarrow R$ ,  $h : R \rightarrow G$  stetig,  $k \in \mathbb{N}$ .

Die Abbildung  $f$  heißt *k-mal (stetig) differenzierbar/glatt/holomorph*, wenn sie es für jedes  $p \in R$  bei  $p$  ist.

Die Abbildung  $g$  (bzw.  $h$ ) heißt *k-mal (stetig) differenzierbar/glatt* wenn sie es für jedes  $x \in G$  bei  $x$  (bzw. für jedes  $p \in R$  bei  $p$ ) ist.

$f$  heißt *biholomorph*, wenn  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  holomorph sind.

*Anmerkung.* "glatt" bedeutet hier "beliebig oft (stetig) differenzierbar". Die Unabhängigkeit dieser Eigenschaften von der Wahl der Karten folgt aus der Biholomorphie der Kartenwechselabbildungen.

**Definition 1.4.17.** Zwei Riemann'sche Flächen  $(R, \Sigma)$ ,  $(S, \Sigma')$  heißen *biholomorph äquivalent*, wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt. Man schreibt dann auch  $(R, \Sigma) \cong (S, \Sigma')$  oder kurz  $R \cong S$ .

**Definition 1.4.18.** Eine biholomorphe Selbstabbildung  $\Phi : R \rightarrow R$  heißt *Automorphismus von R*. Die Menge aller solcher Abbildungen bildet eine Gruppe, welche man mit  $\text{Aut}(R)$  bezeichnet.

**Definition 1.4.19** (lokal biholomorph). Eine stetige Abbildung  $f : R \rightarrow S$  heißt *lokal biholomorph*, falls jedes  $p \in R$  eine offene Umgebung  $U$  besitzt, so dass

(i)  $f(U) \subseteq S$  offen ist

(ii)  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  biholomorph ist

**Beispiel 1.4.20.** Die Abbildung  $f : X \rightarrow R$  aus Satz 1.4.11 wird lokal biholomorph, wenn wir  $X$  mit der komplexen Struktur  $f^*(\Sigma)$  ausstatten.

**Definition 1.4.21** (Tangentialraum). Sei  $p \in R$ . Es bezeichne

$$\Sigma_p(R) := \{(U, \phi) \in \Sigma \mid p \in U\}$$

die Menge aller Karten um  $p$ . Unter einem *Tangentialvektor*  $v$  an  $R$  in  $p$  verstehen wir eine Abbildung

$$v : \Sigma_p(R) \rightarrow \mathbb{C}$$

so dass für alle  $(U, \phi), (V, \psi) \in \Sigma_p(R)$  gilt:

$$v(V, \psi) = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \cdot v(U, \phi) \quad (1.5)$$

Der Vektorraum aller solcher Tangentialvektoren an  $R$  in  $p$  heißt *Tangentialraum* von  $R$  bei  $p$  und wird mit  $T_p(R)$  bezeichnet.

*Anmerkung.* Man beachte, dass eine Abbildung  $v \in T_p(R)$  durch Gleichung (1.5) bereits durch das Bild  $v(U, \phi)$  eines einzigen  $(U, \phi) \in \Sigma_p(M)$  eindeutig bestimmt ist.

**Definition 1.4.22.** Sei  $p \in R$  und  $(U, \phi) \in \Sigma_p(R)$  mit  $\phi = x + iy$ . Wir betrachten nun bei  $p$  die Tangentialvektoren:

$$\partial_x : \Sigma_p(R) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \partial_x(U, \phi) = 1$$

$$\partial_y : \Sigma_p(R) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \partial_y(U, \phi) = i$$

$\partial_x$  und  $\partial_y$  heißen die (*kanonischen*) *Basisvektoren von  $T_p(R)$  bezüglich der Karte  $(U, \phi)$*  oder auch einfach nur die *Basis bzgl.  $(U, \phi)$* .

Dass diese wirklich eine Basis von  $T_p(R)$  bilden, zeigt die folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 1.4.23.** Sei  $p \in R$  und  $(U, \phi) \in \Sigma_p(R)$  mit  $\phi = x + iy$ . Dann gilt:

$T_p(R)$  ist ein reeller Vektorraum und die kanonischen Basisvektoren  $\partial_x$  und  $\partial_y$  bezüglich der Karte  $(U, \phi)$  bilden eine Basis.

Insbesondere gilt:  $T_p(R) \cong \mathbb{C}$

*Beweis.* Da für eine beliebige Menge  $L$  bereits  $\text{Abb}(L, \mathbb{C})$  ein Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass  $T_p(R)$  ein Untervektorraum von  $\text{Abb}(\Sigma_p(R), \mathbb{C})$  ist. Offensichtlich ist  $T_p(R)$  nicht leer. Seien also  $u, v \in T_p(R)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen ist:  $u + \lambda v \in T_p(R)$ . Hierzu reicht es Bedingung (1.5) für  $u + \lambda v$  nachzuprüfen. Seien also weiter  $(W, \pi), (V, \psi) \in \Sigma_p(M)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (u + \lambda v)(V, \psi) &= u(V, \psi) + \lambda v(V, \psi) \\ &= (\psi \circ \pi^{-1})'(\pi(p)) \cdot u(W, \pi) + \lambda((\psi \circ \pi^{-1})'(\pi(p)) \cdot v(W, \pi)) \\ &= (\psi \circ \pi^{-1})'(\pi(p)) \cdot (u(W, \pi) + \lambda v(W, \pi)) \\ &= (\psi \circ \pi^{-1})'(\pi(p)) \cdot (u + \lambda v)(W, \pi) \end{aligned}$$

Also ist  $T_p(R)$  ein Untervektorraum.

Nun zur Basis  $(\partial_x, \partial_y)$ :

Sei  $v \in T_p(R)$  mit  $v(U, \phi) = x_1 + iy_1$ . Dann gilt:

$$v(U, \phi) = x_1 \partial_x(U, \phi) + y_1 \partial_y(U, \phi) = (x_1 \partial_x + y_1 \partial_y)(U, \phi)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit also  $v = x_1 \partial_x + y_1 \partial_y$ .

Es seien nun  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , so dass:

$$\lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y = 0$$

Dann gilt insbesondere für  $(U, \phi)$ :

$$0 = \lambda_1 \partial_x(U, \phi) + \lambda_2 \partial_y(U, \phi) = \lambda_1 + i\lambda_2$$

Weil aber 1 und  $i$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  sind, folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Also ist  $(\partial_x, \partial_y)$  eine Basis von  $T_p R$ .  $\square$

Eine holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemann'schen Flächen induziert nun einen Vektorraumhomomorphismus zwischen den Tangentialräumen.

**Definition 1.4.24** (Differential). Sei  $p \in R$  und  $f : R \rightarrow S$  bei  $p$  holomorph. Seien weiter  $(U, \phi) \in \Sigma_p(R)$  und  $(V, \psi) \in \Sigma_{f(p)}(S)$  mit  $f(U) \subseteq V$ . Dann ist durch

$$df_p(v)(V, \psi) := (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(p) \cdot v(U, \phi) \quad \forall v \in T_p(R)$$

ein Vektorraumhomomorphismus  $df_p : T_p(R) \rightarrow T_{f(p)}(S)$  gegeben.  $df_p$  heißt das *Differential* von  $f$  am Punkt  $p$ . Manchmal schreibt man auch  $df|_p$  statt  $df_p$ .

*Anmerkung.* Die Wohldefiniertheit von  $df_p$  folgt aus der Kettenregel.

**Definition 1.4.25** (Immersion). Eine holomorphe Abbildung  $f : R \rightarrow S$  heißt *Immersion*, wenn in jedem Punkt  $p \in R$ , das Differential  $df_p : T_p R \rightarrow T_{f(p)} S$  injektiv ist.

**Definition 1.4.26** (Richtungsvektor einer Kurve). Sei  $a < b$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow R$  differenzierbar,  $t \in [a, b]$  und  $(U, \phi) \in \Sigma_{\gamma(t)}(R)$ . Wir setzen

$$\gamma'(t) := \text{Re}(\phi \circ \gamma)'(t) \cdot \partial_x + \text{Im}(\phi \circ \gamma)'(t) \cdot \partial_y \in T_{\gamma(t)}(R)$$

wobei hier  $\partial_x, \partial_y$  die Basis bzgl.  $(U, \phi)$  sei.  $\gamma'(t)$  heißt der *Tangential-* oder *Richtungsvektor* an  $\gamma$  in  $t$ . Aus der Kettenregel folgt, dass  $\gamma'(t)$  unabhängig von der Wahl der Karte  $(U, \phi)$  ist.

## 1. Grundlagen

Indem man sich nun in dem Tangentialraum eines jeden Punktes ein Skalarprodukt definiert, kann man in gewisser Weise eine Geometrie auf einer Riemann'schen Fläche erklären.

**Definition 1.4.27** (Metrik). Eine (Riemann'sche) Metrik auf  $R$  ist eine Familie  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in R}$  von Skalarprodukten, so dass für jede Karte  $(U, \phi) \in \Sigma$  die Komponentenfunktionen:

$$\begin{aligned} g_{xx} : U &\rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle \partial_x, \partial_x \rangle_p \\ g_{xy} : U &\rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle \partial_x, \partial_y \rangle_p \\ g_{yy} : U &\rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle \partial_y, \partial_y \rangle_p \end{aligned}$$

differenzierbar sind. Hierbei bezeichnen  $\partial_x$  und  $\partial_y$  die im jeweiligen Punkt  $p \in U$  durch die Karte  $(U, \phi)$  gegebenen Basisvektoren von  $T_p(R)$ . Den Index "p" in der Notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  wollen wir nur dann führen, wenn er zur Klarstellung erforderlich ist, sonst schreiben wir:  $\langle v, w \rangle := \langle v, w \rangle_p$  für  $v, w \in T_p(R)$ . Durch eine Metrik wird insbesondere eine Norm auf dem Tangentialraum  $T_p(R)$  durch die folgende kanonische Definition gegeben:

$$\|v\|_p := \sqrt{\langle v, v \rangle_p} \quad \forall v \in T_p(R)$$

Oft schreibt man auch in lokalen Koordinaten  $(U, \phi) \in \Sigma$  die Metrik in folgender Form:

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

Hierbei sind  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Dies bedeutet, dass das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  im Punkt  $p \in U \subseteq R$  bzgl. der Basis  $(\partial_x, \partial_y)$  die folgende Darstellungsmatrix besitzt:

$$\begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}$$

$E$  entspricht also  $g_{xx}$ ,  $F$  entspricht  $g_{xy}$  und  $G$  entspricht  $g_{yy}$ .

Ein Beispiel für eine solche Metrik werden wir in Abschnitt 2.2 ausführlich kennenlernen, indem wir die obere Halbebene mit der sogenannten hyperbolischen Metrik versehen.

Im Folgenden seien nun  $(R, \Sigma)$  mit einer Riemann'schen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $(S, \Sigma')$  mit einer Riemann'schen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  ausgestattet.

**Definition 1.4.28** (Isometrie). Eine biholomorphe Abbildung  $f : R \rightarrow S$  heißt *Isometrie* wenn für alle  $p \in R, u, v \in T_p R$  gilt:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

Die Menge aller Automorphismen von  $R$ , welche Isometrien sind bilden eine Gruppe; die sogenannte *Isometriegruppe*  $\text{Isom}(R)$ .

Isometrien sind also gerade die Abbildungen, welche mit den komplexen Strukturen und den Riemann'schen Metriken verträglich sind.

**Definition 1.4.29** (lokal isometrisch). Eine lokal biholomorphe Abbildung  $f : R \rightarrow S$  heißt lokal isometrisch, wenn es für alle  $p \in R$  eine Umgebung  $U$  um  $p$  gibt, so dass  $f$  auf  $U$  biholomorph ist und für alle  $q \in U, u, v \in T_q R$  gilt:

$$\langle u, v \rangle_q = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(q)}$$

Sei im Folgenden  $I := [a, b]$  ( $a < b$ ) ein beliebiges Intervall in  $\mathbb{R}$ . Es lässt sich nun mit Hilfe der Riemann'schen Metrik die Länge eines Weges definieren.

**Definition 1.4.30** (Länge eines Weges). Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow R$  stückweise stetig differenzierbar. Wir setzen

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

$L(\gamma)$  nennt sich dann die *Länge von  $\gamma$* .

*Anmerkung.* Die Differenzierbarkeit der Komponentenfunktionen von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sichert hier die Integrierbarkeit.

**Lemma 1.4.31.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow R$  stückweise stetig differenzierbar und  $J : [c, d] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus<sup>3</sup>. Dann gilt:

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ J)$$

Die Länge eines Weges ist also unabhängig von dessen Parametrisierung.

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ J) &= \int_c^d \|(\gamma \circ J)'(t)\|_{\gamma(J(t))} dt = \int_c^d \|\gamma'(J(t))\|_{\gamma(J(t))} |J'(t)| dt \\ &=_{\text{Subst.}} \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|_{\gamma(\tau)} d\tau = L(\gamma) \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.4.32.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow R$  stückweise stetig differenzierbar und  $\Phi \in \text{Isom}(R)$ . Dann gilt:

$$L(\gamma) = L(\Phi \circ \gamma)$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus:

$$\|(\Phi \circ \gamma)'(t)\|_{\Phi(\gamma(t))} = \|d\Phi_{\gamma(t)} \gamma'(t)\|_{\Phi(\gamma(t))} =^* \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$$

für alle  $t \in [a, b]$ . In  $\star$  geht die Isometrieeigenschaft und die Definition der Norm ein. □

**Definition 1.4.33.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow R$  stetig differenzierbar.  $\gamma$  heißt *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, wenn

$$\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} = c$$

mit  $c > 0$  geeignet. Ist  $c = 1$  so heißt  $\gamma$  *nach Bogenlänge parametrisiert*.

$\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$  heißt auch die *Geschwindigkeit* von  $\gamma$  bei  $t$  und man sagt zu proportional zur Bogenlänge parametrisierten Wegen auch Wege mit konstanter Geschwindigkeit.

**Definition 1.4.34.** Wir wollen nun  $R$  mithilfe der Riemann'schen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zu einem metrischen Raum machen. Hierzu setzt man für  $p, q \in R$ :

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \text{SC}_I^1(p, q)\}$$

wobei  $\text{SC}_I^1(p, q) := \{\gamma : I \rightarrow R \mid \gamma \text{ stückweise stetig differenzierbar und } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$  die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven von  $p$  nach  $q$  bezeichne.  $d(\cdot, \cdot)$  definiert dann eine Metrik auf  $R$ .

*Anmerkung.* Weil die Länge eines Weges unabhängig von dessen Parametrisierung ist, hängt obige Definition nicht von dem Intervall  $I$  ab und ist damit wohldefiniert.

<sup>3</sup>D.h.  $J$  ist bijektiv, stetig differenzierbar und  $J^{-1}$  ist stetig differenzierbar

## 1. Grundlagen

**Bemerkung 1.4.35.** *Es gilt:*

- (i)  $d(.,.)$  ist tatsächlich eine Metrik auf  $R$ , d.h.  $(R, d)$  wird zu einem metrischen Raum.
- (ii) Die durch  $d(.,.)$  induzierte Topologie auf  $R$  entspricht der ursprünglichen auf  $R$ , d.h.  $\text{id} : (R, \mathcal{T}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_d)$  ist ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichne  $\mathcal{T}$  die ursprüngliche Topologie auf  $R$  und  $\mathcal{T}_d$ , die durch die Metrik induzierte Topologie auf  $R$ .

*Beweis.* Siehe [Bri09, S. 39 f.]. □

Ferner hat man wie erwartet:

**Bemerkung 1.4.36.** *Für alle  $p, q \in R$  und  $\Phi \in \text{Isom}(R)$  gilt:*

$$d(\Phi(p), \Phi(q)) = d(p, q)$$

*Beweis.* Weil  $\Phi$  biholomorph ist, erhält man durch  $\gamma \mapsto \Phi \circ \gamma$  eine Bijektion von  $\text{SC}_I^1(p, q)$  nach  $\text{SC}_I^1(\Phi(p), \Phi(q))$ . Daher gilt:

$$d(\Phi(p), \Phi(q)) = \inf\{L(\Phi \circ \gamma) \mid \gamma \in \text{SC}_I^1(p, q)\} = \inf\{L(p, q) \mid \gamma \in \text{SC}_I^1(p, q)\} = d(p, q)$$

□

## 1.5. Riemann'sche Flächen als Quotientenräume

Ziel dieses Abschnittes ist es Riemann'sche Flächen als Quotient ihrer universellen Überlagerung darzustellen. Hierzu zeigen wir zunächst, dass man die universelle Überlagerung einer Riemann'schen Fläche ebenfalls zu einer Riemann'schen Fläche machen kann, indem man die komplexe Struktur über die Überlagerungsabbildung zurückzieht (Pullback). Dann werden wir die Decktransformationsgruppe auf der universellen Überlagerung operieren lassen und den entstehenden Orbitraum mit einer komplexen Struktur versehen. Dieser ist dann biholomorph äquivalent zu der betrachteten Riemann'schen Fläche.

Als erstes wollen wir jedoch sehen, dass jede Riemann'sche Fläche eine universelle Überlagerung besitzt.

**Bemerkung 1.5.1.** *Jede Riemann'sche Fläche ist wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche und  $p \in R$ . Sei  $U' \subseteq R$  eine Umgebung von  $p$  und  $(U, \phi) \in \Sigma_p(R)$  mit  $U \subseteq U'$ . Wir wählen nun eine Kugelumgebung  $B_r(\phi(p)) \subseteq \phi(U) \subseteq \mathbb{C}$  ( $r > 0$ ), und setzen  $V := \phi^{-1}(B_r(\phi(p)))$ . Dann ist auch  $V$  eine Umgebung von  $p$ , homöomorph zu einer Kugelumgebung in  $\mathbb{C}$  und somit insbesondere wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Also ist  $R$  lokal wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.

Wir betrachten nun

$$W := \{q \in R \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow R \text{ stetig mit } \gamma(0) = p \text{ und } \gamma(1) = q\}$$

Offenbar ist  $W$  nicht leer, da  $p \in W$ . Nun reicht es zu zeigen, dass  $W$ , sowohl abgeschlossen als auch offen in  $R$  ist, da  $R$  als Riemann'sche Fläche zusammenhängend ist. Hieraus folgt dann nach Definition, dass  $R$  wegzusammenhängend ist.

$W$  ist offen: Sei  $q \in W$ . Dann gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung  $V$  um  $q$ , da  $R$  lokal wegzusammenhängend ist, wie wir bereits gesehen haben. Somit ist also  $q \in V \subseteq W$  und  $W$  deshalb



offen.

$W$  ist abgeschlossen: Sei  $q \in R \setminus W$ . Angenommen für jede offene Umgebung  $V$  um  $q$  gibt es ein  $q' \in W$ . Dann können wir insbesondere eine wegzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $q$  wählen und ein  $q' \in V \cap W$  finden. Also gibt es Wege  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow R$  mit  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q', \gamma'(0) = q', \gamma'(1) = q$ . Dann ist  $\gamma \cdot \gamma'$  ein Weg von  $p$  nach  $q$ . Im Widerspruch zu  $q' \notin W$ . Also muss es eine offene Umgebung um  $q$  ganz in  $R \setminus W$  geben und  $W$  ist abgeschlossen.  $\square$

Wegen Satz 1.3.9 gibt es also zu jeder Riemann'schen Fläche  $(R, \Sigma)$  eine universelle Überlagerung  $(\tilde{R}, \pi, R)$ . Aus Lemma 1.3.2 erhalten wir, dass  $\tilde{R}$  hausdorff'sch ist. Außerdem lässt sich Satz 1.4.11 anwenden und wir erhalten eine komplexe Struktur auf  $\tilde{R}$  durch  $\tilde{\Sigma} := \pi^*(\Sigma)$ . Zunächst hängt nun die komplexe Struktur noch von der konkreten universellen Überlagerung ab  $(\tilde{R}, \pi, R)$ . Dass dies jedoch nicht so ist, folgt aus dem Monodromiesatz:

**Satz 1.5.2** (Monodromiesatz). *Seien  $(R, \Sigma)$  und  $(S, \Sigma')$  Riemann'sche Flächen mit universellen Überlagerungen  $(\tilde{R}, \pi_R, R)$  und  $(\tilde{S}, \pi_S, S)$ . Weiter sei  $f : R \rightarrow S$  holomorph,  $p \in R$ ,  $q := f(p) \in S$ ,  $\tilde{p} \in \pi_R^{-1}(p)$  und  $\tilde{q} \in \pi_S^{-1}(q)$ . Dann gibt es eine holomorphe Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$  mit  $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  und  $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \tilde{f}$ , d.h. das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S} \\ \pi_R \downarrow & & \downarrow \pi_S \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

*Beweis.* Da  $\tilde{R}$  und  $\tilde{S}$  einfach zusammenhängend sind, lässt sich der Allgemeine Hochhebungssatz auf die Abbildung  $f \circ \pi_R$  anwenden. Also gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$ , so dass  $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  und  $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \tilde{f}$ . Sei nun  $\tilde{x} \in \tilde{R}$  und  $\tilde{y} := \tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{S}$ . Wie wir bereits gesehen haben sind  $\pi_R$  und  $\pi_S$  lokal biholomorph (Bsp. 1.4.20).

Also gibt es eine offene Umgebung  $\tilde{U}_2 \subseteq \tilde{S}$  um  $\tilde{y}$ , so dass  $\pi_S|_{\tilde{U}_2} : \tilde{U}_2 \rightarrow U_2 := \pi_S(\tilde{U}_2)$  biholomorph ist und  $U_2 \subseteq S$  offen. Betrachte nun die offene Menge  $V := \tilde{f}^{-1}(U_2)$  ( $f$  ist stetig) und die offenen Umgebungen  $\tilde{V}_1 \subseteq \tilde{R}$  um  $\tilde{x}$  und  $V_1 \subseteq R$ , so dass  $\pi_R|_{\tilde{V}_1} : \tilde{V}_1 \rightarrow V_1$  biholomorph ist. Setze nun  $U_1 := V \cap V_1$  und  $\tilde{U}_1 := \pi_R^{-1}(U_1)$ . Dann ist auch  $\pi_R|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$  biholomorph.

Somit gilt

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}_1} = \pi_S^{-1}|_{U_2} \circ f \circ \pi_R|_{\tilde{U}_1}$$

,d.h.  $\tilde{f}$  ist auf  $\tilde{U}_1$  holomorph. Da  $\tilde{x} \in \tilde{R}$  beliebig war, ist  $\tilde{f}$  in jedem Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{R}$  holomorph. Kurz:  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$  ist holomorph.  $\square$

**Korollar 1.5.3.** *Seien  $(R, \Sigma)$  und  $(S, \Sigma')$  Riemann'sche Flächen mit universellen Überlagerungen  $(\tilde{R}, \pi_R, R)$  und  $(\tilde{S}, \pi_S, S)$ . Weiter sei  $f : R \rightarrow S$  biholomorph,  $p \in R$ ,  $q := f(p) \in S$ ,  $\tilde{p} \in \pi_R^{-1}(p)$  und  $\tilde{q} \in \pi_S^{-1}(q)$ . Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$  mit  $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  und  $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \tilde{f}$ .*

*Beweis.* Nach Satz 1.5.2 gibt es eine holomorphe Funktion  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{S}$ , so dass  $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  und  $f \circ \pi_R = \pi_S \circ \tilde{f}$ . Außerdem gibt es wieder nach Satz 1.5.2 eine holomorphe Funktion  $\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{R}$ , so dass  $\tilde{g}(\tilde{q}) = \tilde{p}$  und  $f^{-1} \circ \pi_S = \pi_R \circ \tilde{g}$ . Dann gilt

$$\pi_R \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = f^{-1} \circ \pi_S \circ \tilde{f} = f^{-1} \circ f \circ \pi_R = \pi_R$$

und  $\tilde{g}(\tilde{f}(\tilde{p})) = \tilde{p}$ . Also ist  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  ein Lift von  $\pi_R$  bzgl  $\pi_R$  und wegen der Eindeutigkeit (Satz 1.3.7) gilt  $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id$ . Analog sieht man  $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id$  und somit ist  $\tilde{f}$  biholomorph.  $\square$

## 1. Grundlagen

**Korollar 1.5.4.** *Je zwei universelle Überlagerungen einer Riemann'schen Fläche sind biholomorph äquivalent.*

*Beweis.* Sei  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche und  $(\tilde{R}, \pi, R), (\tilde{R}', \pi', R)$  zwei universelle Überlagerungen. Dann induziert nach dem Monodromiesatz die biholomorphe Abbildung  $id : R \rightarrow R$  eine biholomorphe Abbildung zwischen  $\tilde{R}$  und  $\tilde{R}'$ .  $\square$

**Korollar 1.5.5.** *Sei  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche mit universeller Überlagerung  $(\tilde{R}, \pi, R)$ . Dann ist jede Decktransformation biholomorph, d.h.  $Deck(\pi) \subseteq Aut(\tilde{R})$ .*

*Beweis.* Sei  $\gamma \in Deck(\pi)$  und  $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{R}$  mit  $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$ . Wir wenden nun Korollar 1.5.3 für  $f = id$  an. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung  $\hat{\gamma} : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$ , so dass  $\hat{\gamma}(\tilde{p}) = \tilde{q}$  und  $\pi \circ \hat{\gamma} = \pi$ . Dann sind  $\hat{\gamma}$  und  $\gamma$  Lifts von  $\pi$  bzgl.  $\pi$  und aufgrund der Eindeutigkeit gilt  $\gamma = \hat{\gamma}$ . Also ist  $\gamma$  biholomorph.  $\square$

**Lemma 1.5.6.** *Sei  $(\tilde{R}, \pi, R)$  eine universelle Überlagerung und  $\Gamma = Deck(\pi)$ . Dann gilt:*

- (i) *Für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq \tilde{R}$  gibt es höchstens endlich viele  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$*
- (ii) *Für alle kompakten Teilmengen  $K_1, K_2 \subseteq \tilde{R}$  gilt:*

$$\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} < \infty$$

*Beweis.* Zu (i):

Angenommen es gibt eine Folge  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$  bestehend aus paarweise verschiedenen Elementen, so dass  $\gamma_n(K) \cap K \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zwei Punkte  $\tilde{q}_n, \tilde{r}_n \in K$  mit  $\tilde{r}_n = \gamma_n(\tilde{q}_n)$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es konvergente Teilfolgen von  $(\tilde{q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , welche wir ebenfalls mit  $(\tilde{q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(\tilde{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnen und setzen  $\tilde{q}_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}_n \in K$  und  $\tilde{r}_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n \in K$ . Da  $\pi \circ \gamma_n = \pi$ , gilt  $\pi(\tilde{q}_n) = \pi(\tilde{r}_n)$  und, weil  $\pi$  stetig ist,  $\pi(\tilde{q}_0) = \pi(\tilde{r}_0)$ . Wir wählen nun eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $U$  von  $\pi(\tilde{q}_0)$  und bezeichnen mit  $\tilde{U}$  das Blatt über  $U$  mit  $\tilde{q}_0 \in \tilde{U}$  und  $\tilde{V}$  das Blatt über  $U$  mit  $\tilde{r}_0 \in \tilde{V}$ . Da  $\gamma_n(\tilde{q}_n) \rightarrow \tilde{r}_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\gamma_n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$  für alle  $n > N$ . Weil  $\gamma_n(\tilde{U})$  ebenfalls ein Blatt über  $U$  ist und verschiedene Blätter nach Definition disjunkt sind, folgt  $\gamma_n(\tilde{U}) = \tilde{V}$  für alle  $n > N$ . Insbesondere also  $\gamma_{n+1}^{-1} \gamma_n(\tilde{U}) = \tilde{U}$  für  $n > N$ . Somit haben wir, weil  $\pi|_{\tilde{U}}$  ein Homöomorphismus ist:

$$\pi|_{\tilde{U}} = \pi|_{\tilde{U}} \circ (\gamma_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n)|_{\tilde{U}} \implies id|_{\tilde{U}} = (\gamma_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n)|_{\tilde{U}}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von Lifts bzw. dem Identitätssatz für (bi-)holomorphe Funktionen hat man dann  $\gamma_{n+1}^{-1} \circ \gamma_n = id$  bzw.  $\gamma_n = \gamma_{n+1}$  für alle  $n > N$ . Im Widerspruch zur Annahme.

Zu (ii):

Sei  $\gamma \in \Gamma$ . Dann gilt:

$$\gamma(K_1 \cup K_2) \cap (K_1 \cup K_2) = (\gamma(K_1) \cap K_1) \cup (\gamma(K_1) \cap K_2) \cup (\gamma(K_2) \cap K_1) \cup (\gamma(K_2) \cap K_2)$$

Und somit:

$$\gamma(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset \implies \gamma(K_1 \cup K_2) \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$$

Daraus folgt dann die Behauptung aus (i), weil  $K_1 \cup K_2$  ebenfalls kompakt ist:

$$\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \leq \#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K_1 \cup K_2) \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset\} < \infty$$

$\square$

Im Folgenden sei  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche und  $(\tilde{R}, \pi, R)$  eine universelle Überlagerung. Außerdem wollen wir mit  $\Gamma := Deck(\pi)$  ihre Decktransformationengruppe bezeichnen.

**Definition 1.5.7.** Seien  $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{R}$ . Dann ist durch

$$\tilde{p} \sim \tilde{q} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \gamma \in \Gamma : \gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\tilde{R}$  gegeben. Gilt  $\tilde{p} \sim \tilde{q}$ , so nennt man  $\tilde{p}$  und  $\tilde{q}$   $\Gamma$ -äquivalent. Mit  $[\tilde{p}]$  bezeichnet man dann die Äquivalenzklasse von  $\tilde{p}$  und die Menge aller solcher Äquivalenzklassen mit  $\tilde{R}/\Gamma$ . Man kann auch sagen, dass  $\Gamma$  von links auf  $\tilde{R}$  operiert. Die Bahnen entsprechen dann gerade den Äquivalenzklassen und der Orbitraum der Menge der Äquivalenzklassen  $\tilde{R}/\Gamma$ .

Wir definieren nun die Projektion  $\rho : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/\Gamma, \tilde{p} \mapsto [\tilde{p}]$  und führen über diese die Quotiententopologie auf  $\tilde{R}/\Gamma$  ein.

**Bemerkung 1.5.8.** Die Projektion  $\rho : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/\Gamma$  ist offen.

*Beweis.* Sei  $U \subseteq \tilde{R}$  offen. Dann gilt:

$$\rho(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U)$$

Weil jedes  $\gamma \in \Gamma \subseteq \text{Aut}(\tilde{R})$  ein Homöomorphismus ist, ist somit jedes  $\gamma(U)$  offen. Also ist  $\rho(U)$  offen.  $\square$

**Satz 1.5.9.**  $\tilde{R}/\Gamma$  ist ein zusammenhängender Hausdorffraum. Außerdem gibt es eine komplexe Struktur auf  $\tilde{R}/\Gamma$ , so dass  $\rho$  lokal biholomorph ist und die Abbildung

$$\Psi : \tilde{R}/\Gamma \rightarrow R, [\tilde{p}] \mapsto \pi(\tilde{p})$$

biholomorph ist. Insbesondere ist also  $R$  biholomorph äquivalent zu  $\tilde{R}/\Gamma$ .

*Beweis.*  $\tilde{R}/\Gamma$  ist zusammenhängend, weil  $\tilde{R}$  zusammenhängend und  $\rho$  stetig ist.

$\tilde{R}/\Gamma$  ist hausdorff'sch:

Seien  $[x], [y] \in \tilde{R}/\Gamma$  mit  $[x] \neq [y]$ . Wir wählen nun offene Umgebungen  $U_1$  um  $x$  und  $U_2$  um  $y$  in  $\tilde{R}$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Weil  $\tilde{R}$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist, findet man nun Kompakte  $K_1, K_2 \subseteq \tilde{R}$ , so dass  $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$  und es offene Umgebungen  $V_1 \subset K_1$  um  $x$  und  $V_2 \subset K_2$  um  $y$  gibt. Dann gilt nach Lemma 1.5.6

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$ . Wir finden nun wiederum offene Umgebungen  $W_i^{(1)}$  um  $\gamma_i(x)$  und  $W_i^{(2)}$  um  $y$ , so dass  $W_i^{(1)} \cap W_i^{(2)} = \emptyset$  für  $i = 1, \dots, n$ , weil  $y \notin \Gamma x$  bzw.  $[x] \neq [y]$ . Nun setzt man:

$$W_1 := V_1 \cap \left( \bigcap_{i=1}^n \gamma_i^{-1}(W_i^{(1)}) \right), \quad W_2 := V_2 \cap \left( \bigcap_{i=1}^n W_i^{(2)} \right)$$

Dann sind  $W_1$  und  $W_2$  offen und es gilt  $\Gamma W_1 \cap W_2 = \emptyset$  und  $x \in W_1, y \in W_2$ . Denn:

Angenommen es gibt ein  $\gamma \in \Gamma$ , so dass  $\gamma(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$ , dann ist  $\gamma = \gamma_j$  für ein geeignetes  $j \in \{1, \dots, n\}$ , weil  $W_1 \subseteq V_1 \subseteq K_1$  und  $W_2 \subseteq V_2 \subseteq K_2$ . Dann gilt

$$\gamma_j(W_1) = \gamma_j(V_1) \cap \gamma_j \left( \bigcap_{i=1}^n \gamma_i^{-1}(W_i^{(1)}) \right) \subseteq W_j^{(1)}$$

und

$$W_2 = V_2 \cap \left( \bigcap_{i=1}^n W_i^{(2)} \right) \subseteq W_j^{(2)}$$

## 1. Grundlagen

Daraus folgt nun aber:

$$\gamma_j(W_1) \cap W_2 \subseteq W_j^{(1)} \cap W_j^{(2)} = \emptyset$$

Im Widerspruch zur Annahme. Außerdem gilt nach Definition  $x \in V_1$  und  $\gamma_i(x) \in W_i^{(1)}$  bzw.  $x \in \gamma_i^{-1}(W_i^{(1)})$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und  $y \in V_2$  und  $y \in W_i^{(2)}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , d.h.  $x \in W_1$  und  $y \in W_2$ .

Also ist  $\rho(W_1)$  eine offene Umgebung um  $[x]$  und  $\rho(W_2)$  eine offene Umgebung um  $[y]$ , und es gilt  $\rho(W_1) \cap \rho(W_2) = \emptyset$ , d.h.  $\tilde{R}/\Gamma$  ist hausdorff'sch.

Die komplexe Struktur auf  $\tilde{R}/\Gamma$ :

Sei  $[x] \in \tilde{R}/\Gamma$ . Wir wählen nun wie in Lemma 1.3.13 (ii) eine Umgebung  $U \subseteq \tilde{R}$  um  $x$ , so dass

$$\forall \gamma \in \Gamma : \gamma(U) \cap U \neq \emptyset \implies \gamma = id$$

Das bedeutet, dass  $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$  bijektiv, insbesondere also ein Homöomorphismus, ist. Nun gibt es um  $x$  eine Karte  $(V, \phi)$  auf  $\tilde{R}$  mit  $V \subseteq U$  und wir nehmen als Karte um  $[x]$  das Tupel  $(\rho(V), \phi \circ \rho|_V^{-1})$ . Der Atlas aller solcher Karten um Punkte  $[x] \in \tilde{R}/\Gamma$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}$ . Wir möchten nun zeigen, dass je zwei solche Karten kompatibel sind. Seien also  $(\rho(V_1), \phi_1 \circ \rho|_{V_1}^{-1}), (\rho(V_2), \phi_2 \circ \rho|_{V_2}^{-1}) \in \mathfrak{A}$  mit  $W = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  bzw.  $\rho(W) = \rho(V_1) \cap \rho(V_2) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\phi_2 \circ \rho|_{V_2}^{-1} \circ (\phi_1 \circ \rho|_{V_1}^{-1})^{-1})|_{\rho(W)} &= \phi_2|_W \circ \rho|_W^{-1} \circ \rho|_W \circ \phi_1|_W^{-1} \\ &= \phi_2|_{V_1 \cap V_2} \circ \phi_1|_{V_1 \cap V_2}^{-1} \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Kartenwechsel biholomorph und die Karten somit kompatibel. Als komplexe Struktur auf  $\tilde{R}/\Gamma$  setzt man nun naheliegend  $\Sigma(\mathfrak{A})$ .

Es ist nun nach Definition der komplexen Struktur klar, dass  $\rho$  auf den Karten  $(U, \phi) \in \mathfrak{A}$  biholomorph ist. Also ist  $\rho$  lokal biholomorph.

$\Psi$  ist wohldefiniert:

Seien  $x, y \in \tilde{R}$  mit  $[x] = [y]$ , d.h.  $\exists \gamma \in \Gamma : \gamma(x) = y$ . Somit gilt nun, weil  $\gamma$  eine Decktransformation ist:  $\pi(\gamma(x)) = \pi(y)$ , d.h.  $\Psi$  ist wohldefiniert.

$\Psi$  ist bijektiv:

Seien  $[x], [y] \in \tilde{R}/\Gamma$  mit  $\Psi([x]) = \Psi([y])$ , d.h.  $\pi(x) = \pi(y)$ . Aus Lemma 1.3.13 (i), folgt nun, dass es ein  $\gamma \in \Gamma$  gibt, so dass  $\gamma(x) = y$ . Also ist  $[x] = [y]$ , d.h.  $\Psi$  ist injektiv.

Sei  $x \in R$  und  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \subseteq \tilde{R}$ . Dann gilt  $\Psi([\tilde{x}]) = \pi(\tilde{x}) = x$ , d.h.  $\Psi$  ist surjektiv.

$\Psi$  ist biholomorph:

Sei  $[x] \in \tilde{R}/\Gamma$ . Weil  $\pi : \tilde{R} \rightarrow R$  und  $\rho : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/\Gamma$  lokal biholomorph sind, finden wir  $\tilde{U} \subseteq \tilde{R}$  offen, so dass  $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \pi(\tilde{U})$  und  $\rho|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \rho(\tilde{U})$  biholomorph sind mit  $[x] \in \rho(\tilde{U})$ . Dann gilt:

$$\Psi|_{\rho(\tilde{U})} = \pi|_{\tilde{U}} \circ \rho|_{\tilde{U}}^{-1}$$

Also ist  $\Psi|_{\rho(\tilde{U})} : \rho(\tilde{U}) \rightarrow \pi(\tilde{U})$  biholomorph. Da  $[x]$  beliebig war, ist  $\Psi$  in jedem Punkt biholomorph.  $\square$

Dieser Satz bildet die Grundlage für die grobe Klassifikation kompakter Riemann'scher Flächen in Kapitel 3.

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit der oberen Halbebene genauer auseinandersetzen, da diese - wie wir in Kapitel 3 sehen werden - gerade die universelle Überlagerung von kompakten Riemann'schen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  ist. Dies wird es uns dann ermöglichen einen ersten Klassifizierungssatz zu beweisen. Später werden wir dann die in Abschnitt 2.2 eingeführte hyperbolische Geometrie der oberen Halbebene via der universellen Überlagerung auf kompakte Riemann'sche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  übertragen, was die Konstruktion der Fenchel-Nielsen Koordinaten überhaupt erst zulässt.

### 2.1. Die obere Halbebene

Wir werden nun zunächst Möbiustransformationen betrachten. Diese werden wir dann benutzen um die Automorphismen der oberen Halbebene zu berechnen. Die Kenntnis der genauen Form dieser Automorphismen wird es uns unter anderem in Abschnitt 2.2 ermöglichen die Isometriegruppe der oberen Halbebene zu bestimmen. Zum Schluss dieses Abschnittes werden wir dann noch auf ein paar elementare Eigenschaften der Fixpunkte von Möbiustransformationen eingehen.

Die Primärquelle für diesen Abschnitt bildet [KK07, Kap. 2 §1].

**Definition 2.1.1.** Die obere Halbebene ist die Menge aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil:

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

Man hat auf  $\mathbb{H}$  einen komplexen Atlas  $\mathcal{A} := \{(\mathbb{H}, id)\}$  und bekommt somit eine komplexe Struktur  $\Sigma(\mathcal{A})$  auf  $\mathbb{H}$ . Die obere Halbebene ist also (wie jede offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ) eine Riemann'sche Fläche.

**Definition 2.1.2.** Die Menge der invertierbaren komplexen  $2 \times 2$  Matrizen sei:

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

Im Folgenden werden wir, sofern nicht anders verlangt, davon ausgehen, dass jede Matrix die Komponenten  $a, b, c, d$  wie oben besitzt. Man verwendet wie üblich:

$$\det M = ad - bc$$

$$\operatorname{Sp} M = a + d$$

für die Determinante und die Spur einer Matrix  $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, wird die Inverse einer Matrix  $M \in GL(2, \mathbb{C})$  durch die folgende Matrix gegeben:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

**Definition 2.1.3** (Möbiustransformationen). Sei  $M \in GL(2, \mathbb{C})$ . Wir setzen für  $z \in \mathbb{C}$

$$M\langle z \rangle := \frac{az + b}{cz + d}$$

wenn der Ausdruck rechts wohldefiniert ist, d.h. entweder  $c = 0$  oder  $z \neq -d/c$ . Die Abbildung

$$\Phi_M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto M\langle z \rangle$$

ist dann eine meromorphe Funktion. Für  $c = 0$  ist sie sogar ganz. Ansonsten hat  $\Phi_M$  bei  $-d/c$  einen Pol erster Ordnung und man setzt  $\Phi_M(-d/c) = \infty$ .  $\Phi_M$  heißt auch *Möbiustransformation*.

*Anmerkung.* Man schreibt auch nur  $Mz$  statt  $M\langle z \rangle$ , wenn aus dem Kontext heraus keine Missverständnisse entstehen können.

Wir wollen nun noch gewisse Regeln für das Rechnen mit  $\infty$  festlegen:

**Definition 2.1.4.**

$$M\infty = \begin{cases} \infty & , \text{ für } c = 0 \\ a/c & , \text{ für } c \neq 0 \end{cases}$$

*Anmerkung.* Durch die obige Konvention für das Rechnen mit  $\infty$  wird dann  $\Phi_M$  ein Automorphismus der Riemann'schen Zahlkugel.

**Bemerkung 2.1.5.** Für  $M \in GL(2; \mathbb{C})$  fixiert  $\Phi_M$  genau dann  $\infty$ , wenn  $c = 0$  gilt.

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition. □

**Satz 2.1.6.** Ist  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ , so gibt es ein  $M \in GL(2; \mathbb{C})$ , so dass  $\Phi(p) = \Phi_M(p) \forall p \in \mathbb{P}^1$ .

*Beweis.* Siehe [FB06, S.160-161] oder [IT92, S.33]. □

**Korollar 2.1.7.** Jeder Automorphismus  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  der Zahlenebene  $\mathbb{C}$  lässt sich schreiben als:

$$\varphi(z) = az + b \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

*Beweis.* Man kann leicht sehen, dass jeder Automorphismus  $\varphi$  von  $\mathbb{C}$  sich zu einem Automorphismus von  $\mathbb{P}^1$  fortsetzen lässt, indem man  $\varphi(\infty) = \infty$  setzt. Also gibt es ein  $M \in GL(2; \mathbb{C})$ , so dass  $\varphi = \Phi_M|_{\mathbb{C}}$ . Für dieses  $M$  gilt dann  $c = 0$ , da ja  $M \infty$  fixiert. Weil  $\det M \neq 0$ , muss außerdem  $a = d^{-1} \neq 0$  gelten und somit gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\varphi(z) = (a/d)z + (b/d)$$

□

**Bemerkung 2.1.8.** Jede Möbiustransformation besitzt mindestens einen Fixpunkt.

*Beweis.* Sei  $M \in GL(2; \mathbb{C})$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\Phi_M$  nicht  $\infty$  als Fixpunkt hat. Also gilt  $c \neq 0$ . Besitzt  $\Phi_M$  einen Fixpunkt  $z \in \mathbb{C}$ , so ist dies äquivalent zu:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es ein  $z \in \mathbb{C}$ , welches die Gleichung erfüllt und daher ein Fixpunkt von  $\Phi_M$  ist. □

**Lemma 2.1.9.** Seien  $L, M \in GL(2, \mathbb{C})$  und  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ . Für  $z, z' \in \mathbb{C}$  gilt:

$$Ez = z, \text{ d.h. } \Phi_E = id \quad (2.1)$$

$$(\lambda M)z = Mz, \text{ d.h. } \Phi_{\lambda M} = \Phi_M \quad (2.2)$$

$$(LM)z = L(Mz), \text{ d.h. } \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M \quad (2.3)$$

Außerdem gilt

$$Mz' - Mz = \frac{\det M}{(cz' + d)(cz + d)} \cdot (z' - z) \quad (2.4)$$

$$\Phi'_M(z) = \frac{\det M}{(cz + d)^2} \quad (2.5)$$

*Beweis.* Die ersten vier Gleichungen ergeben sich durch direktes Einsetzen der Definition und Umformung der Gleichungen. Gleichung (2.5) ergibt sich aus Gleichung (2.4) durch Grenzübergang  $z' \rightarrow z$ .  $\square$

Durch den folgenden Satz erhält man nun auch ein geometrisches Verständnis für Möbiustransformationen.

**Satz 2.1.10.** Möbiustransformationen bilden die Menge der Kreise und Geraden in  $\mathbb{C}$  in sich ab, d.h. das Bild eines Kreises oder einer Gerade unter einer Möbiustransformation ist ein Kreis oder eine Gerade.

*Beweis. Beh.:*

- (i) Für alle  $A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0$  und  $B \in \mathbb{C}$  mit  $|B|^2 > AC$  beschreibt

$$Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0 \quad (2.6)$$

einen Kreis in  $\mathbb{C}$ . Umgekehrt erfüllt jeder Kreis eine Gleichung der obigen Form.

- (ii) Für alle  $B \in \mathbb{C}^*, C \in \mathbb{R}$  beschreibt

$$Bz + \overline{Bz} + C = 0 \quad (2.7)$$

eine Gerade in  $\mathbb{C}$ . Umgekehrt erfüllt jede Gerade eine Gleichung der obigen Form.

*Bew.:*

- (i) Jeder Kreis in  $\mathbb{C}$  wird durch eine Gleichung der Form

$$r^2 = |z - m|^2$$

beschrieben, wobei  $r > 0, m \in \mathbb{C}$  ist. Diese lässt sich unter Verwendung von  $z\bar{z} = |z|^2$  in folgende äquivalente Gleichung umformen:

$$0 = z\bar{z} + \overline{(-m)}z + \overline{(-m)}\bar{z} + |m|^2 - r^2$$

Für  $A = 1, B = \overline{-m}, C = |m|^2 - r^2 = |B|^2 - r^2$  entspricht dies Gleichung (2.6). Außerdem gilt die Beziehung  $|B|^2 > AC$ , wegen  $r > 0$ .

Ist umgekehrt eine Gleichung der Form (2.6) gegeben mit  $A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0$  und  $B \in \mathbb{C}$ , so erhält man durch Division durch  $A$  die äquivalente Gleichung:

$$z\bar{z} + (B/A)z + \overline{(B/A)}\bar{z} + C/A = 0$$

Setzt man nun  $m := -\overline{(B/A)}$  und  $r := \sqrt{|m|^2 - C/A}$ . So ergibt sich wie oben:

$$0 = z\bar{z} + \overline{(-m)}z + \overline{(-m)}\bar{z} + |m|^2 - r^2$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

- (ii) Es ist bekannt, dass je zwei Geraden durch eine affin lineare Transformation  $z \mapsto \alpha z + \beta$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{R}$  ineinander übergehen. Also gibt es zu jeder Geraden eine affin lineare Transformation, welche diese auf die Imaginärachse abbildet. Die Imaginärachse ist eindeutig durch die Gleichung  $z = -\bar{z}$  beschrieben. Also ist jede Gerade durch eine Gleichung der Form

$$-\overline{\alpha z + \beta} = \alpha z + \beta \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{R}$$

beschrieben. Diese ist äquivalent zu

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + 2\beta = 0$$

und entspricht genau (2.7) mit  $B = \alpha$  und  $C = 2\beta$ .

Man kann nun zeigen, dass jede Gleichung des Typs (2.6) in eine Gleichung desselben Typs überführt wird und die Ungleichungsnebenbedingung  $|B|^2 > AC$  für diesen Typ ebenfalls gilt. Im Fall  $A = 0$  besagt diese Nebenbedingung gerade, dass  $B \in \mathbb{C}^*$  gilt. Also werden Kreise und Geraden in Kreise und Geraden durch Möbiustransformationen überführt.  $\square$

Wir wollen nun die konkrete Form der Automorphismen von  $\mathbb{H}$  bestimmen. Hierfür ist der folgende Zusammenhang zwischen der oberen Halbebene und der komplexen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  sehr nützlich.

**Satz 2.1.11.** *Die Abbildung*

$$\Phi_C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \tau \mapsto C\tau = \frac{\tau - i}{\tau + i}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

*ist biholomorph mit Umkehrabbildung*

$$\Phi_{C^{-1}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, \tau \mapsto C^{-1}z = i \cdot \frac{1 + z}{1 - z}$$

*Insbesondere ist  $\mathbb{E}$  biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{H}$ .*

*Man nennt  $\Phi_C$  auch Cayley-Transformation.*

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\Phi_C$  holomorph, da für  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt:

$$\operatorname{Im}(\tau + i) = \operatorname{Im}(\tau) + 1 \geq 1$$

Somit ist  $\tau + i \neq 0 \forall \tau \in \mathbb{H}$ . Weiter gilt:

$$|\Phi_C(\tau)|^2 = \frac{x^2 + (y - 1)^2}{x^2 + (y + 1)^2} < 1 \quad \text{für } \tau = x + iy \in \mathbb{H}$$

denn aus  $y > 0$  ergibt sich  $|y - 1| < y + 1$ . Also gilt  $\Phi_C(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{E}$ .

Die Abbildung  $\Phi_{C^{-1}}$  ist holomorph, da  $|1 - z| \geq 1 - |z| > 0$  für alle  $z \in \mathbb{E}$ . Außerdem gilt:

$$\operatorname{Im} \Phi_{C^{-1}} = \operatorname{Re} \left( \frac{z + 1}{-z + 1} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} > 0$$

und daher  $\Phi_{C^{-1}}(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{H}$ . Aus Lemma 2.1.9 folgt nun:

$$\Phi_{C^{-1}} \circ \Phi_C = id_{\mathbb{H}}, \quad \Phi_C \circ \Phi_{C^{-1}} = id_{\mathbb{E}}$$

$\square$



**Korollar 2.1.12.** *Es gilt:*

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \Phi_{C^{-1}} \circ \text{Aut}(\mathbb{E}) \circ \Phi_C$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Biholomorphie von  $\Phi_C$ . □

Wir haben also gesehen, dass es zur Bestimmung der Automorphismen der oberen Halbebene genügt die des Einheitskreises zu bestimmen. Hierzu verwenden wir das Lemma von Schwarz:

**Lemma 2.1.13** (Schwarz). *Sei  $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  holomorph mit  $\varphi(0) = 0$ . Dann gilt:*

$$|\varphi(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{E} \quad \text{und} \quad |\varphi'(0)| \leq 1$$

*Gibt es ein  $a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$  mit  $|\varphi(a)| = |a|$  oder gilt  $|\varphi'(0)| = 1$ , so existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:*

$$\varphi(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{E}$$

*Beweis.* Siehe [FB06, S. 125 f.]. □

**Lemma 2.1.14.** *Für  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$  gilt genau dann  $\varphi(0) = 0$ , wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt mit*

$$\varphi(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{E} \tag{2.8}$$

*Beweis.* Ist  $\varphi$  von der Form wie in (2.8), so gilt offensichtlich  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$  und  $\varphi(0) = 0$ . Sei nun  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$  mit  $\varphi(0) = 0$ . Dann gilt nach Lemma 2.1.13:  $|\varphi(z)| \leq |z|$  für alle  $z \in \mathbb{E}$ . Der gleiche Schluss für  $\varphi^{-1}$  liefert  $|\varphi^{-1}(z)| \leq |z|$ . Und somit:

$$|z| = |\varphi(\varphi^{-1}(z))| \leq |\varphi^{-1}(z)| \leq |z|$$

Also:

$$|\varphi(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{E}$$

Nach Lemma 2.1.13 hat dann  $\varphi$  die Form (2.8). □

**Definition 2.1.15.** Wir setzen:

$$SL(2; \mathbb{R}) := \{M \in GL(2; \mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

**Lemma 2.1.16.** *Für  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  gilt:*

$$\text{Im } M\tau = \frac{\text{Im } \tau}{|c\tau + d|^2} \quad \forall \tau \in \mathbb{H}$$

*Beweis.* Es gilt für  $\tau \in \mathbb{H}$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } M\tau &= \frac{1}{2i}(M\tau - \overline{M\tau}) = \frac{1}{2i}(M\tau - M\bar{\tau}) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{\det M}{(c\tau + d)(c\bar{\tau} + d)} \cdot (\tau - \bar{\tau}) = \frac{\text{Im } \tau}{|c\tau + d|^2} \end{aligned}$$

□

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  berechnen.

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

**Satz 2.1.17.** Die Automorphismen von  $\mathbb{H}$  sind genau die Transformationen

$$\Phi_M : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \tau \mapsto M\tau, \quad M \in SL(2; \mathbb{R})$$

mit Umkehrabbildung  $\Phi_{M^{-1}}$ . Die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  operiert transitiv auf  $\mathbb{H}$  und ist isomorph zur Faktorgruppe

$$PSL(2; \mathbb{R}) := SL(2; \mathbb{R}) / \{\pm E\}$$

Durch  $\Phi : PSL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}), M \mapsto \Phi_M$  ist hierbei ein Gruppenisomorphismus gegeben.

*Beweis.* Aus Lemma 2.1.16 erhält man direkt  $\Phi_M(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$  für  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ . Wegen Lemma 2.1.9 hat man auch:

$$\Phi_M \circ \Phi_{M^{-1}} = \Phi_{M^{-1}} \circ \Phi_M = \Phi_E = id$$

Also ist  $\Phi_M$  biholomorph für  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ . Aus Lemma 2.1.9 folgt ebenfalls, dass

$$\Phi : SL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}), M \mapsto \Phi_M$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Für den Kern gilt:

$$\text{Kern } \Phi = \{M \in SL(2; \mathbb{R}) \mid \Phi_M = id\} = \{\pm E\}$$

Denn für  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_M = id &\Leftrightarrow M\tau = \tau \quad \forall \tau \in \mathbb{H} \\ &\Leftrightarrow c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{H} \\ &\Leftrightarrow c = 0, d-a = 0, b = 0 \\ &\Leftrightarrow M = \pm E \text{ wegen } ad-bc = 1 \end{aligned}$$

Also gilt wegen des Homomorphiesatzes für Gruppen:

$$\Phi(SL(2; \mathbb{R})) \cong SL(2; \mathbb{R}) / \{\pm E\} = PSL(2; \mathbb{R})$$

Für die Transitivität reicht es zu zeigen, dass man jedes beliebige  $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$  durch ein Möbiustransformation auf  $i$  abbilden kann. Setzt man

$$M := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

ist es leicht zu verifizieren, dass  $M\tau = i$  gilt.

Sei nun  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  beliebig. Dann gibt es eine Matrix  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $\Psi := \Phi_M \circ \varphi$  bereits  $\Psi(i) = i$  erfüllt. Daher ist

$$\Psi^* := \Phi_C \circ \Psi \circ \Phi_{C^{-1}} \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \text{ mit } \Psi^*(0) = 0$$

Also gibt es nach Lemma 2.1.14 ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\Psi^*(z) = e^{2i\lambda} \cdot z = \Phi_K(z), \quad K = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$\varphi = \Phi_{M^{-1}} \circ \Psi = \Phi_{M^{-1}} \circ \Phi_{C^{-1}} \circ \Psi^* \circ \Phi_C = \Phi_L$$

$$L = M^{-1} \cdot C^{-1} \cdot K \cdot C = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

Also hat man  $\Phi(SL(2; \mathbb{R})) = \text{Aut}(\mathbb{H})$ . □

Daher ist es nun möglich Erzeuger von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  bzw.  $PSL(2; \mathbb{R})$  anzugeben.

**Lemma 2.1.18.** *Die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  wird von den Abbildungen*

$$\tau \mapsto \tau + \alpha, \quad \tau \mapsto \lambda\tau, \quad \tau \mapsto -1/\tau$$

*erzeugt, wobei  $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ . Unter Verwendung des Isomorphismus  $\Phi : PSL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}), M \mapsto \Phi_M$  impliziert dies, dass  $PSL(2; \mathbb{R})$  von den Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

*erzeugt wird und, weil mit  $\lambda = \pm 1$ , sowohl die positive als auch die negative Einheitsmatrix erzeugt wird, wird auch  $SL(2; \mathbb{R})$  durch die obigen Matrizen erzeugt.*

*Beweis.* Sei  $\varphi = \Phi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  mit  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ . Dann gilt für  $c = 0$ :

$$M\tau = \frac{a}{d}\tau + \frac{b}{d} = \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d}$$

Für  $c \neq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + d/c} &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2\tau + cd} = \frac{a(c\tau + d) - 1}{c^2\tau + cd} \\ &= \frac{ac\tau + ad - 1}{c^2\tau + cd} = \frac{c(a\tau + b)}{c(c\tau + d)} \\ &= M\tau \end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$M\tau = \begin{cases} \frac{\tau}{d^2} + \frac{b}{d} & , \text{ für } c = 0 \\ \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\tau + d/c} & , \text{ für } c \neq 0 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich nun leicht die Behauptung durch Verkettung der passenden Abbildungen.  $\square$

Wir betrachten nun in Analogie zu Satz 2.1.10 die Menge aller Kreise und Geraden in  $\mathbb{H}$ , welche durch Möbiustransformationen der  $SL(2; \mathbb{R})$  invariant bleiben. In Abschnitt 2.2 werden wir diese in Zusammenhang mit den Geodätischen der oberen Halbebene bringen.

**Definition 2.1.19** (Orthogonalkreise). Ein *Orthogonalkreis in  $\mathbb{H}$*  ist eine Parallele zur Imaginärachse in  $\mathbb{H}$  oder der in  $\mathbb{H}$  gelegene Teil eines Kreises dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt.

**Lemma 2.1.20.** *Unter den Automorphismen von  $\mathbb{H}$  gehen Orthogonalkreise in Orthogonalkreise über.*

*Beweis.* Es reicht die Aussage für die Erzeuger der Automorphismen nachzuweisen. Für die Abbildungen  $\tau \mapsto \tau + \alpha$  und  $\tau \mapsto \lambda\tau$  ist die Aussage trivial ( $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ ). Also müssen wir diese nur noch für  $\tau \mapsto -1/\tau$  zeigen. Wie im Beweis zu Satz 2.1.10 zeigt man, dass jeder Orthogonalkreis durch eine Gleichung

$$A\tau\bar{\tau} + B(\tau + \bar{\tau}) + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ und } B^2 > AC$$

beschrieben wird. Setzt man nun  $\tau \mapsto -1/\tau$  ein, so bekommt man:

$$0 = \frac{A}{|\tau|^2} + B\left(\frac{1}{\bar{\tau}} - \frac{1}{\tau}\right) + C = \frac{A}{|\tau|^2} + \frac{B}{|\tau|^2}(\tau - \bar{\tau}) + C$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

Weil  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt, ist dies via Multiplikation mit  $|\tau|^2$  äquivalent zu:

$$0 = A + B(\tau - \bar{\tau}) + C\tau\bar{\tau}$$

Diese Gleichung ist wieder vom angegebenen Typ mit  $A' = C, B' = B, C' = A$ . Es gilt weiterhin  $B'^2 > A'C'$ .  $\square$

**Lemma 2.1.21.** Für  $K \in SL(2; \mathbb{R})$  sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)

$$Ki = i$$

(ii)

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

(iii)

$$K \in SO(2) := \{M \in SL(2; \mathbb{R}) \mid M \text{ orthogonal}\}$$

(iv) Für  $C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  gilt  $C \cdot K \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$  mit einem  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Ki = i &\Leftrightarrow \alpha i + \beta = i(\gamma i + \delta) = -\gamma + i\delta \\ &\Leftrightarrow \alpha = \delta, \beta = -\gamma \end{aligned}$$

Die Determinantenbedingung  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  wird dann zu  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Dies zeigt (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

Die Äquivalenzen (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) und (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) rechnet man leicht nach, indem man benutzt, dass es für jedes  $M \in SO(2)$  ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  gibt, so dass:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\square$

*Anmerkung.* Insbesondere Aussage (iv) ist hier interessant. Unter der bereits erwähnten Beziehung  $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \Phi_{C^{-1}} \circ \text{Aut}(\mathbb{E}) \circ \Phi_C$  bzw.  $\text{Aut}(\mathbb{E}) = \Phi_C \circ \text{Aut}(\mathbb{H}) \circ \Phi_{C^{-1}}$  besagt diese gerade, dass die Möbiustransformationen welche  $i$  stabilisieren unter Konjugation mit der Cayley-Transformationen den Drehungen um 0 in  $\text{Aut}(\mathbb{E})$  entsprechen.

**Satz 2.1.22.** Seien  $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$  mit  $\tau \neq \tau'$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1$  und eine eindeutig bestimmte Möbiustransformation  $\tau \mapsto M\tau, M \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass:

$$M\tau = i \quad \text{und} \quad M\tau' = \lambda i$$

*Beweis.* Zunächst zur Existenz eines solchen  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  und  $\lambda > 1$ :

Da die  $SL(2; \mathbb{R})$  transitiv auf  $\mathbb{H}$  operiert gibt es ein  $M_0 \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $M_0\tau = i$ . Es muss jetzt nur noch ein  $K \in SL(2; \mathbb{R})$  mit  $Ki = i$  gefunden werden, so dass  $KM_0\tau' = \lambda i$  für ein  $\lambda > 1$ . Das Bild von  $\{iy \in \mathbb{H} \mid y > 1\}$  unter  $\Phi_C$  ist gerade das Intervall  $(0, 1) \subset \mathbb{E}$ . Also genügt es nach obiger Anmerkung eine Drehung  $\varphi_0 \in \text{Aut}(\mathbb{E})$  zu finden, so dass  $\varphi_0(CM_0\tau')$  auf  $(0, 1) \subset \mathbb{E}$  liegt. Eine solche ist leicht zu finden und es gibt dann ein  $K \in SO(2)$ , so dass  $\Phi_C \circ \Phi_K \circ \Phi_{C^{-1}} = \varphi_0$ . Für dieses  $K$  gilt

dann wie gewünscht  $KM_0\tau' \in \{iy \in \mathbb{H} \mid y > 1\}$  und somit haben wir mit  $M = KM_0 \in SL(2; \mathbb{R})$  die gesuchte Matrix gefunden.

Zur *Eindeutigkeit*: Es seien  $M, M' \in SL(2; \mathbb{R})$  und  $\lambda, \lambda' > 1$  mit  $M\tau = i = M'\tau$ ,  $M\tau' = \lambda i$  und  $M'\tau' = \lambda' i$ . Dann gilt:

$$Ki = i \quad \text{und} \quad K\lambda i = \lambda' i \quad \text{für} \quad K = M'M^{-1} \in SL(2; \mathbb{R})$$

Nach Lemma 2.1.21 folgt

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha\lambda i + \beta = i\lambda'(-\beta\lambda i + \alpha) = \beta\lambda\lambda' + \alpha\lambda' i$$

Daraus folgt nun  $\alpha = \pm 1$ ,  $\lambda = \lambda'$  und  $\beta = 0$ . Somit ist die Matrix modulo  $\{\pm E\}$  eindeutig bestimmt und damit auch die Möbiustransformation (vgl. Satz 2.1.17).  $\square$

**Korollar 2.1.23.** *Durch je zwei  $\tau, \tau' \in \mathbb{H}, \tau \neq \tau'$  läuft genau ein Orthogonalkreis.*

*Beweis.* Wir finden nach obigem Satz eine eindeutig bestimmte Möbiustransformation  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass  $\Phi(\tau) = i$  und  $\Phi(\tau') = \lambda i$  mit  $\lambda > 1$ . Die imaginäre Achse ist nun offensichtlich der einzige Orthogonalkreis, der durch  $i$  und  $\lambda i$  läuft. Da unter Möbiustransformationen Orthogonalkreise in Orthogonalkreise übergehen und  $\Phi$  eindeutig bestimmt ist, ist  $\Phi^{-1}(\{it \mid t > 0\})$  der einzige Orthogonalkreis durch  $\tau$  und  $\tau'$ .  $\square$

Zum Schluss wollen wir noch die Fixpunkte von Möbiustransformationen der  $SL(2; \mathbb{R})$  untersuchen.

**Lemma 2.1.24** (Fixpunkte). *Für jedes  $M \in SL(2; \mathbb{R}) \setminus \{E\}$  gilt eine der drei Aussagen:*

- (i)  $\Phi_M$  hat genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{H} \Leftrightarrow |Sp M| < 2$   
In diesem Fall nennt man  $M$  bzw. auch  $\Phi_M$  elliptisch.
- (ii)  $\Phi_M$  hat genau einen Fixpunkt auf  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} =: \partial\mathbb{H} \Leftrightarrow |Sp M| = 2$   
In diesem Fall nennt man  $M$  bzw. auch  $\Phi_M$  parabolisch.
- (iii)  $\Phi_M$  hat genau zwei Fixpunkte auf  $\partial\mathbb{H} \Leftrightarrow |Sp M| > 2$   
In diesem Fall nennt man  $M$  bzw. auch  $\Phi_M$  hyperbolisch.

*Beweis.* Jeder Fixpunkt von  $\Phi_M$  erfüllt definitionsgemäß die Gleichung:

$$\Phi_M(\tau) = \tau \Leftrightarrow c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0$$

Also:

$$\tau = \frac{a - d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a - d)^2 + 4bc}{4c^2}} = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a + d)^2 - 4}$$

Die Behauptung folgt nun leicht unter Verwendung dieser Gleichung.  $\square$

**Definition 2.1.25.** Für ein  $\Phi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  mit  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  bezeichne  $\text{Fix}(M) = \text{Fix}(\Phi_M) \subseteq \overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  die Menge aller Fixpunkte von  $\Phi_M$ . Man nennt diese auch die Fixpunkte von  $M$ .

**Bemerkung 2.1.26.** Seien  $M_1, M_2 \in SL(2; \mathbb{R})$  und es gebe ein  $L \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $M_1 = LM_2L^{-1}$ . Dann gilt:

$$\text{Fix}(M_1) = L\text{Fix}(M_2)$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned}\tau \in \text{Fix}(M_1) &\Leftrightarrow M_1\tau = \tau \Leftrightarrow LM_2L^{-1}\tau = \tau \Leftrightarrow M_2L^{-1}\tau = L^{-1}\tau \\ &\Leftrightarrow L^{-1}\tau \in \text{Fix}(M_2) \Leftrightarrow \tau \in L\text{Fix}(M_2)\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.1.27.** Für jedes  $\tau \in \partial\mathbb{H}$  gibt es ein  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $M\tau = \infty$ .

Außerdem gilt  $M\partial\mathbb{H} = \partial\mathbb{H}$  für jedes  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ .

*Beweis.* Sei  $\tau \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Falls  $\tau = \infty$ , so können wir  $M = E$  setzen und sind fertig. Sei also  $\tau \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es ein  $M_1 \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $M_1\tau = 0$ , nämlich:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

Für

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

gilt  $M_2 0 = \infty$ . Also ist mit  $M := M_2 M_1$  das gesuchte  $M$  gegeben. Für die zweite Aussage genügt es diese für die erzeugenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

von  $SL(2; \mathbb{R})$  nachzuprüfen. Die ersten beiden Typen fixieren  $\infty$  und bilden  $\mathbb{R}$  bijektiv auf sich selbst ab. Für die letzte Matrix ist zu bemerken, dass diese 0 mit  $\infty$  vertauscht und  $\mathbb{R}_+$  bijektiv auf  $\mathbb{R}_-$  abbildet. □

**Satz 2.1.28.** Sei  $M \in SL(2; \mathbb{R}) \setminus \{E\}$ . Dann gilt:

(i)  $M$  ist genau dann parabolisch, wenn  $M$   $SL(2; \mathbb{R})$ -konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}^*$$

ist.

(ii)  $M$  ist genau dann hyperbolisch, wenn  $M$   $SL(2; \mathbb{R})$ -konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda \neq 0$$

ist.

*Beweis.* Zu (i):

Ist  $M$  parabolisch, dann hat  $M$  genau einen Fixpunkt  $\tau^* \in \partial\mathbb{H}$ . Nun gibt es ein  $L \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $L\tau^* = \infty$  und somit  $\text{Fix}(LML^{-1}) = \{\infty\}$ . Insbesondere ist  $LML^{-1}$  ebenfalls parabolisch. Es gelte

$$LML^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

Weil  $LML^{-1}$  parabolisch ist gilt dann:

$$a \neq 0, |a + d| = 2, ad = 1 \implies a + a^{-1} = \pm 2 \implies a^2 \mp 2a + 1 = 0 \implies (a \mp 1)^2 = 0 \implies a = \pm 1$$

Gibt es umgekehrt ein  $L \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $M = LM'L^{-1}$ , wobei  $M'$  die beschriebene Form habe, so hat  $M$  immer noch genau einen Fixpunkt in  $\partial\mathbb{H}$  und ist somit parabolisch.

Zu (ii):

Ist  $M$  hyperbolisch mit den Fixpunkten  $\tau_1, \tau_2 \in \partial\mathbb{H}, \tau_1 \neq \tau_2$ , dann gibt es ein  $L_1 \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $L_1 M \tau_1 = \infty$  und  $L_1 \tau_2 \in \mathbb{R}$ . Die Matrix

$$L_2 := \begin{pmatrix} 1 & -L_1 \tau_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

fixiert dann  $\infty$ , insbesondere  $L_2 L_1 M \tau_1 = \infty$ , und es gilt  $L_2 L_1 M \tau_2 = 0$ . Hat  $M' = L_2 L_1 M (L_2 L_1)^{-1}$  die Form

$$M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R})$$

so gilt  $c = 0$  wegen  $M' \infty = \infty$ . Außerdem gilt, wegen  $M' 0 = 0$ :

$$0 = (a/d)0 + (b/d) \implies b = 0$$

Und wegen  $1 = ad - bc = ad \implies d = a^{-1}$  ist  $M'$  von der verlangten Form.  $\square$

## 2.2. Hyperbolische Geometrie

Wie wir bereits zu Beginn von 2.1 festgestellt haben, ist  $\mathbb{H}$  trivialerweise eine Riemann'sche Fläche. Im Folgenden möchten wir eine Metrik auf  $\mathbb{H}$  im Sinne von Definition 1.4.27 einführen. Die sogenannte *hyperbolische Metrik*.

**Definition 2.2.1** (hyperbolische Metrik). Die *hyperbolische Metrik* ist bezüglich der Karte  $(\mathbb{H}, id = x + iy)$  auf  $\mathbb{H}$  gegeben durch

$$\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

Diese Metrik wollen wir im Folgenden mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnen. Wir wollen nun den Tangentialraum  $T_\tau \mathbb{H}$  für ein  $\tau \in \mathbb{H}$  kanonisch mit  $\mathbb{C}$  identifizieren, indem wir  $v \in T_\tau \mathbb{H}$  mit  $v(\mathbb{H}, id)$  identifizieren ( $(\mathbb{H}, id)$  ist eine Karte um jeden Punkt in  $\mathbb{H}$ ). Durch diese Identifikation erhalten wir ein Skalarprodukt in jedem Punkt  $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ :

$$\langle u, v \rangle_\tau^\mathbb{H} := \frac{1}{y^2}(u_1 v_1 + u_2 v_2) = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$$

für  $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C} \cong T_\tau \mathbb{H}$  und  $\hat{u}, \hat{v} \in T_\tau \mathbb{H}$  mit  $\hat{u}(\mathbb{H}, id) = u, \hat{v}(\mathbb{H}, id) = v$ .

Bezüglich dieser Metrik erhält man mit den Definitionen aus Kapitel 1:

**Bemerkung 2.2.2.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  ( $a < b$ ) stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt:

(i)

$$L(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt$$

(ii)  $\gamma$  ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt:

$$\frac{|\gamma'|}{\text{Im } \gamma} \equiv \text{konst.}$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

Im Folgenden sei  $I := [a, b]$  ( $a < b$ ) ein beliebiges Intervall in  $\mathbb{R}$ .

**Definition 2.2.3.** Die Metrik  $d(.,.)$  nennt man in unserem Fall auch *hyperbolischen Abstand*.

Nun möchten wir noch die Isometriegruppe von  $\mathbb{H}$  bezüglich der hyperbolischen Metrik bestimmen.

**Satz 2.2.4** (Isometriegruppe). *Die Isometriegruppe bezüglich der hyperbolischen Metrik auf  $\mathbb{H}$  ist gerade die Gruppe aller Automorphismen auf  $\mathbb{H}$ , d.h.  $\text{Isom}(\mathbb{H}) = \text{Aut}(\mathbb{H})$ .*

*Beweis.* Sei  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $u, v \in T_\tau \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$  und  $\Phi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  mit  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ . Dann ist zu zeigen:

$$\langle u, v \rangle_\tau^{\mathbb{H}} = \langle \Phi'_M(\tau)u, \Phi'_M(\tau)v \rangle_{\Phi(\tau)}^{\mathbb{H}}$$

Mit  $\tau = x + iy$ ,  $u = u_1 + iu_2$  und  $v = v_1 + iv_2$  ist dies äquivalent zu:

$$\frac{1}{y^2}(u_1v_1 + u_2v_2) = \frac{1}{(\text{Im } M\tau)^2} (\text{Re } (\Phi'_M(\tau)u)\text{Re } (\Phi'_M(\tau)v) + \text{Im } (\Phi'_M(\tau)u)\text{Im } (\Phi'_M(\tau)v))$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\text{Im } M\tau)^2} (\text{Re } (\Phi'_M(\tau)u)\text{Re } (\Phi'_M(\tau)v) + \text{Im } (\Phi'_M(\tau)u)\text{Im } (\Phi'_M(\tau)v)) \\ &= \frac{1}{(\text{Im } M\tau)^2} \text{Re } (\Phi'_M(\tau)u \overline{\Phi'_M(\tau)v}) = \frac{|c\tau + d|^4}{y^2} \frac{1}{|c\tau + d|^4} \text{Re } (u\bar{v}) \\ &= \frac{1}{y^2}(u_1v_1 + u_2v_2) \end{aligned}$$

□

Somit erhält man aus Bemerkung 1.4.36:

**Lemma 2.2.5** (Invarianz). *Sei  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  und  $z, w \in \mathbb{H}$ . Dann gilt:*

$$d(z, w) = d(Mz, Mw)$$

Man kann in der hyperbolischen Geometrie natürlich auch Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren messen. Dies geschieht genauso, wie in der euklidischen Geometrie.

**Definition 2.2.6** (Winkel). Seien  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $u, v \in T_\tau \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$  mit  $u, v \neq 0$ . Dann ist der orientierte Winkel  $\angle(u, v) \in (-\pi, \pi]$  zwischen  $u$  und  $v$  gerade gegeben durch:

$$\angle(u, v) := \text{Arg}(u/v)$$

Hierbei ist  $\text{Arg } z$  das Argument einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$ , d.h. die eindeutig bestimmte reelle Zahl  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  mit  $z = |z| \exp(i\varphi)$ .

Die Interpretation des obigen Winkels ist einfach. Sind  $u, v \in \mathbb{C}$  und  $\angle(u, v) = \varphi$ , dann gilt

$$u/|u| = (v/|v|) \exp(i\varphi)$$

Ist  $\varphi \geq 0$ , so geht  $\hat{u} = u/|u|$  aus  $\hat{v} = v/|v|$  durch eine Drehung um  $\varphi$  im mathematisch positiven Sinn hervor. Ist  $\varphi < 0$  hingegen, so geht  $\hat{u}$  aus  $\hat{v}$  durch eine Drehung um  $|\varphi|$  im mathematisch negativen Sinn hervor.

Winkel werden nun durch Isometrien erhalten:



**Bemerkung 2.2.7.** Seien  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $u, v \in T_\tau \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ ,  $u, v \neq 0$  mit  $\angle(u, v) = \varphi$  und  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ . Dann gilt:

$$\angle(u, v) = \angle(d\Phi|_\tau u, d\Phi|_\tau v)$$

*Beweis.* Unter der Identifikation  $T_\tau \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$  ist zu zeigen, dass

$$\angle(u, v) = \angle(\Phi'(\tau)u, \Phi'(\tau)v)$$

Da  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  ist, gilt  $\Phi'(\tau) \neq 0$  und somit  $\Phi'(\tau)u, \Phi'(\tau)v \neq 0$ . Also ist der Winkel definiert und man hat:

$$\angle(\Phi'(\tau)u, \Phi'(\tau)v) = \text{Arg} \left( \frac{\Phi'(\tau)u}{\Phi'(\tau)v} \right) = \text{Arg}(u/v) = \angle(u, v)$$

□

Wir interessieren uns nun im Folgenden für die kürzesten Wege bezüglich der hyperbolischen Metrik. Dazu betrachten wir zunächst die sogenannte Energie eines Weges und bringen diese dann in Zusammenhang mit der Länge des Weges.

**Definition 2.2.8** (Energie). Seien  $z, w \in \mathbb{H}$  und  $\gamma \in \text{SC}_I^1(z, w)$ . Dann nennt man

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|^2}{(\text{Im } \gamma(t))^2} dt$$

die *Energie* von  $\gamma$ .

**Lemma 2.2.9.** Seien  $z, w \in \mathbb{H}$  und  $\gamma \in \text{SC}_I^1(z, w)$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{2} L^2(\gamma) \leq (b-a) E(\gamma) \quad (2.9)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\frac{|\gamma'|}{\text{Im } \gamma} \equiv \text{konst.}$$

d.h. wenn  $\gamma$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} L^2(\gamma) &= \left( \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt \right) \cdot \left( \int_a^b \frac{|\gamma'(\tau)|}{\text{Im } \gamma(\tau)} d\tau \right) = \int_a^b \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} \cdot \frac{|\gamma'(\tau)|}{\text{Im } \gamma(\tau)} dt d\tau \\ &\leq_{\star}^{\text{Hölder}} \int_a^b \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|^2}{(\text{Im } \gamma(t))^2} dt d\tau = 2(b-a) E(\gamma) \end{aligned}$$

★: Hier wurde die Hölder'sche Ungleichung auf die Funktionen

$$f, g : I^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, \tau) := \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)}, \quad g(t, \tau) := \frac{|\gamma'(\tau)|}{\text{Im } \gamma(\tau)}$$

in  $\mathcal{L}^1(I^2)$  angewandt. Es gelte nun Gleichheit in 2.9. Dies lässt sich mit den obigen Funktionen und dem  $\mathcal{L}^2(I^2)$ -Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  und der  $\mathcal{L}^2(I^2)$ -Norm  $\|\cdot\|_2$  schreiben als:

$$\langle f, g \rangle_2 = \|f\|_2^2$$

Offenbar gilt nach dem Satz von Fubini und aus Symmetriegründen  $\|f\|_2^2 = \|g\|_2^2$ . Damit gilt:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\langle f, g \rangle_2 + \|g\|_2^2 = 0$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

Also gilt  $f = g$ , da sowohl  $f$  als auch  $g$  stetig sind. Und schließlich:

$$\begin{aligned} f(t, a) = g(t, a) \quad \forall t \in I &\implies \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t)} = \frac{|\gamma'(a)|}{\operatorname{Im} \gamma(a)} \quad \forall t \in I \\ &\implies \frac{|\gamma'|}{\operatorname{Im} \gamma} \equiv \text{konst.} \end{aligned}$$

Die andere Richtung ist trivial. □

Dieses Resultat rechtfertigt, dass man zunächst die Energie minimierenden Wege zwischen zwei Punkten  $z, w \in \mathbb{H}$  betrachtet. Man hat also folgendes Minimierungsproblem

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|^2}{(\operatorname{Im} \gamma(t))^2} dt \rightarrow \min! \quad (2.10)$$

wobei man jetzt zur Vereinfachung über alle zweimal stetig differenzierbaren Wege von  $z$  nach  $w$  minimiert. Daher auch folgende verkürzende Notation:

**Definition 2.2.10.** Für  $z, w \in \mathbb{H}$  setzen wir:

$$C_I^2(z, w) := \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{H} \mid \gamma(a) = z, \gamma(b) = w, \gamma \text{ zweimal stetig differenzierbar}\} \subset \operatorname{SC}_I^1(z, w)$$

Minimierungsproblem der Form (2.10) treten häufig in der Physik, insbesondere der Hamilton'schen Mechanik, auf und man hat schon früh Differentialgleichungen gefunden, welche eine notwendige Bedingung für die Lösung dieses Minimierungsproblems darstellen; die sogenannten *Euler-Lagrange'schen-Differentialgleichungen*

**Satz 2.2.11** (Euler-Lagrange'sche DGL). Sei  $d \in \mathbb{N}$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und

$$f : I \times G \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, q) \mapsto f(t, x, q)$$

eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Für  $\alpha, \beta \in G$  setzen wir

$$K(\alpha, \beta) := \{v : I \rightarrow G \mid v \text{ zweimal stetig differenzierbar}, v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$$

und betrachten die Abbildung  $F : K(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto F(v)$  mit

$$F(v) := \int_a^b f(t, v(t), v'(t)) dt$$

Ist nun  $u \in K(\alpha, \beta)$  mit

$$F(u) = \inf\{F(v) \mid v \in K(\alpha, \beta)\}$$

so genügt diese notwendig dem folgenden System von Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i}(t, u(t), u'(t)) \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b], i = 1, \dots, d \quad (2.11)$$

*Beweis.* Siehe [Ran11, S. 57-60]. □

Diese verwenden wir nun für unser konkretes Minimierungsproblem und erhalten folgende Differentialgleichungen

**Korollar 2.2.12.** Seien  $z, w \in \mathbb{H}$  und  $\gamma \in C^2(z, w)$ , so dass

$$E(\gamma) = \inf\{E(\hat{\gamma}) \mid \hat{\gamma} \in C_I^2(z, w)\}$$

gilt. Dann muss  $\gamma$  die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\gamma'' - \frac{2}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma'^2 = 0 \quad (2.12)$$

bzw. komponentenweise für  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

$$x'' - 2 \frac{x' y'}{y} = 0 \quad (2.13)$$

$$y'' + \frac{x'^2 - y'^2}{y} = 0 \quad (2.14)$$

Außerdem ist jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (2.12) proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

*Beweis.* In unserem Fall ist  $f : [0, 1] \times \mathbb{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t, x, q) = \frac{\|q\|^2}{2x_2^2}$$

wobei hier  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm ist. Seien  $z, w \in \mathbb{H}$  und  $\gamma \in C_I^2(z, w)$  mit

$$E(\gamma) = \inf\{E(\gamma) \mid \gamma \in C_I^2(z, w)\}$$

Dann ergibt Einsetzen in (2.11):

$$0 = \frac{x''}{y^2} - 2 \frac{x' y'}{y^3} \quad (2.15)$$

$$-\frac{x'^2 + y'^2}{y^3} = \frac{y''}{y^2} - 2 \frac{y'^2}{y^3} \Leftrightarrow 0 = \frac{y''}{y^2} + \frac{x'^2 - y'^2}{y^3} \quad (2.16)$$

wobei  $\gamma = x + iy$ . Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'' - \frac{2}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma'^2 &= x'' + iy'' + \frac{i}{y} (x'^2 - y'^2 + 2ix'y') \\ &= x'' - 2 \frac{x' y'}{y} + i \left( y'' + \frac{x'^2 - y'^2}{y} \right) \end{aligned}$$

Wegen  $y > 0$  sieht man nun, dass der Realteil dieses Ausdrucks genau dann verschwindet, wenn (2.15) gilt, und der Imaginärteil genau dann verschwindet, wenn (2.16) gilt. Somit entspricht

$$\gamma'' - \frac{2}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma'^2 = 0$$

den Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen.

Zur Parametrisierung: Sei  $\gamma = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  zweimal stetig differenzierbar und erfülle (2.12). Dann gilt:

$$\frac{\|\gamma'\|}{y} \equiv \text{konst.} \Leftrightarrow \frac{\|\gamma'\|^2}{y^2} \equiv \text{konst.} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\|\gamma'\|^2}{y^2} = 0$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

Die rechte Gleichung ist äquivalent zu

$$0 = \frac{x'x'' + y'y''}{y^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{y^3}y'$$

(2.15) und (2.16) implizieren nun genau dies:

$$\begin{aligned} \frac{x'x'' + y'y''}{y^2} - \frac{x'^2 + y'^2}{y^3}y' &\stackrel{(2.16)}{=} \frac{x'x'' + y'y''}{y^2} + \left(\frac{y''}{y^2} - 2\frac{y'^2}{y^3}\right)y' \\ &= \frac{x'x''}{y^2} + 2\frac{y'y''}{y^2} - 2\frac{y'^3}{y^3} \\ &\stackrel{(2.15)}{=} 2x'\frac{x'y'}{y^3} + 2\frac{y'y''}{y^2} - 2\frac{y'^3}{y^3} \\ &= 2y'\left(\frac{x'^2 - y'^2}{y^3} + \frac{y''}{y^2}\right) \stackrel{(2.16)}{=} 0 \end{aligned}$$

□

Den Lösungen dieser Differentialgleichungen geben wir nun den Namen *Geodätische*.

**Definition 2.2.13** (Geodätische). Jeder zweimal stetig differenzierbarer Weg  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{H}$ , welcher (2.12) erfüllt heißt *Geodätische*. Hierbei lassen wir für  $J$  beliebige nicht degenerierte Intervalle in  $\mathbb{R}$  oder auch ganz  $\mathbb{R}$  zu.

Ist  $J = \mathbb{R}$  so sprechen wir auch von einer *globalen* Geodätischen.

**Bemerkung 2.2.14.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  eine Geodätische. Dann gilt:

$$\frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} = \frac{L(\gamma)}{b-a} \quad \forall t \in I$$

*Beweis.* Da  $\gamma$  eine Geodätische ist, ist  $\gamma$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d.h. es gibt ein  $C > 0$ , so dass

$$C = \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} \quad \forall t \in I$$

Dann folgt aus der Definition der Länge:

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt = (b-a)C \implies \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} = \frac{L(\gamma)}{b-a} \quad \forall t \in I$$

□

Allgemeine Sätze aus der Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (s. Anhang) liefern nun das folgende Resultat.

**Satz 2.2.15.** Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Für jedes Paar von Anfangswerten  $z_0 \in \mathbb{H}$ ,  $v_0 \in \mathbb{C}$  gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  von (2.12) mit  $\gamma(t_0) = z_0$  und  $\gamma'(t_0) = v_0$ , wobei  $I$  ein Existenzintervall um  $t_0$  in  $\mathbb{R}$  ist.

*Beweis.* Wir betrachten das System der Differentialgleichungen (2.15) und (2.16). Dieses überführen wir mit den Hilfsfunktionen  $u_1 = x$ ,  $u_2 = x'$  und  $u_3 = y$ ,  $u_4 = y'$  in die äquivalente (autonome) Standardform:

$$u' = f(u)$$

mit  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $f(x) = \left(x_2, 2\frac{x_2x_4}{x_3}, x_4, \frac{x_4^2 - x_2^2}{x_3}\right)^T \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in G$  und  $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .  $f$  ist dann stetig differenzierbar auf  $G$  und daher lokal Lipschitz. Die Aussage folgt nun aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz A.1.3). □

Dieses Resultat lässt sich noch verbessern, indem man folgende Invarianzeigenschaft der DGL (2.12) ausnutzt.

**Lemma 2.2.16.** *Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Die Differentialgleichung (2.12) ist invariant unter Möbiustransformationen, d.h.:*

*Für jede zweimal stetig differenzierbare Lösung  $\gamma$  von (2.12) zu den Anfangswerten  $\gamma(t_0) = z_0 \in \mathbb{H}$ ,  $\gamma'(t_0) = v_0 \in \mathbb{C}$  und  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  ist  $\Phi_M \circ \gamma = M\gamma$  auch eine Lösung von (2.12) zu den Anfangswerten  $M\gamma(t_0) = Mz_0$ ,  $(M\gamma)'(t_0) = \Phi'_M(z_0) \cdot v_0$*

*Anmerkung.* Das heißt also, dass Geodätische durch Möbiustransformationen ineinander überführt werden.

*Beweis.* Es sei  $\gamma$  eine Lösung zu den Anfangswerten  $z_0, v_0$  bei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\gamma'' - \frac{2}{\gamma - \bar{\gamma}} \gamma'^2 = 0, \quad \gamma(t_0) = z_0, \quad \gamma'(t_0) = v_0$$

Zunächst gilt für  $M\gamma$ :

$$M\gamma(t_0) = Mz_0, \quad (M\gamma)'(t_0) = \Phi'_M(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \Phi'_M(z_0) \cdot v_0$$

Außerdem hat man nach Lemma 2.1.9:

$$\begin{aligned} (M\gamma)'' - \frac{2}{M\gamma - \overline{M\gamma}} (M\gamma')^2 &= \Phi''_M(\gamma) \cdot (\gamma')^2 + \Phi'_M(\gamma) \cdot \gamma'' - \frac{2}{\gamma - \bar{\gamma}} (\gamma')^2 \cdot \Phi'_M(\gamma)^2 \cdot |c\gamma + d|^2 \\ &= \frac{-2c}{(c\gamma + d)^3} (\gamma')^2 + \frac{\gamma''}{(c\gamma + d)^2} - \frac{c\bar{\gamma} + d}{(c\gamma + d)^3} \gamma'' \\ &= \frac{-c(\gamma - \bar{\gamma})\gamma''}{(c\gamma + d)^3} (\gamma')^2 + \frac{\gamma''}{(c\gamma + d)^2} - \frac{c\bar{\gamma} + d}{(c\gamma + d)^3} \gamma'' \\ &= \frac{\gamma''}{(c\gamma + d)^3} (-c(\gamma - \bar{\gamma}) + (c\gamma + d) - (c\bar{\gamma} + d)) = 0 \end{aligned}$$

Also erfüllt  $M\gamma$  nicht nur die Anfangswerte sondern auch die Differentialgleichung.  $\square$

Hiermit können wir unter Verwendung geschickter Möbiustransformationen eine globale Lösung angeben.

**Satz 2.2.17.** *Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

- (i) *Für jedes  $\lambda > 0$  ist die eindeutige globale Lösung  $\gamma_{\lambda, t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  von (2.12) mit  $\gamma_{\lambda, t_0}(t_0) = i$  und  $\gamma'_{\lambda, t_0}(t_0) = \lambda i$  durch*

$$\gamma_{\lambda, t_0}(t) := i \exp(\lambda(t - t_0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

*gegeben.*

- (ii) *Seien  $z_0 \in \mathbb{H}$ ,  $v_0 \in \mathbb{C}$  und  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  eine Geodätische auf einem Existenzintervall  $I$  um  $t_0$  mit  $\gamma(t_0) = z_0$  und  $\gamma'(t_0) = v_0$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Möbiustransformation  $\Phi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  ( $M \in SL(2; \mathbb{R})$ ) und ein eindeutig bestimmtes  $\lambda > 0$ , so dass  $\gamma(t) = (\Phi_M \circ \gamma_{\lambda, t_0})(t) \forall t \in I$ . Insbesondere lässt sich  $\gamma$  zu der globalen Geodätischen  $\hat{\gamma} = \Phi_M \circ \gamma_{\lambda, t_0}$  fortsetzen.*

- (iii) *Die Abbildung  $\gamma^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $(t; t_0, z_0, v_0) \mapsto \hat{\gamma}(t)$  ist stetig differenzierbar, wobei  $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  die eindeutige globale Geodätische mit  $\hat{\gamma}(t_0) = z_0$  und  $\hat{\gamma}'(t_0) = v_0$  ist.*

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

*Beweis.* Zu (i):

Mit  $\gamma_{\lambda,t_0} = x + iy$  erhält man  $x(t) = 0$  und  $y(t) = \exp(\lambda(t - t_0))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Also gilt:

$$(2.15) \Leftrightarrow x'' = 2 \frac{x'y'}{y} \Leftrightarrow 0 = 0$$

und

$$(2.16) \Leftrightarrow 0 = y''(t) + \frac{(x'(t))^2 - (y'(t))^2}{y(t)} = \lambda^2 \exp(\lambda(t - t_0)) - \frac{\lambda^2 \exp(\lambda(t - t_0))^2}{\exp(\lambda(t - t_0))} = 0$$

Außerdem sind die Anfangswerte erfüllt:

$$\gamma_{\lambda,t_0}(t_0) = i \exp(0) = i \quad \text{und} \quad \gamma'_{\lambda,t_0}(t_0) = i\lambda \exp(0) = i\lambda$$

Zu (ii):

Man findet zunächst ein  $L \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $Lz_0 = i$ . Wir setzen nun  $v := \Phi'_L(z_0) \cdot v_0$ . Für jedes  $K \in SO(2)$ , etwa

$$K = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

mit  $\varphi \in \mathbb{R}$  gilt

$$\Phi'_K(i) = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2} = \exp(-2\varphi i)$$

Daher findet man ein  $K \in SO(2)$ , so dass  $\Phi'_K(i) \cdot v = \lambda i$  mit  $\lambda > 0$ . Wir haben dann mit  $M := KL \in SL(2; \mathbb{R})$ :

$$\Phi_M(i) = \Phi_K(\Phi_L(z_0)) = \Phi_K(i) = i$$

und

$$\Phi'_M(z_0) \cdot v_0 = (\Phi_K \circ \Phi_L)'(z_0) \cdot v_0 = \Phi'_K(i) \cdot \Phi'_L(z_0) \cdot v_0 = \Phi'_K(i) \cdot v = \lambda i$$

Also gilt aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen  $\gamma(t) = (\Phi_{M^{-1}} \circ \gamma_{\lambda,t_0})(t) \forall t \in I$ .

Zur Eindeutigkeit von  $\Phi_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  und  $\lambda > 0$ : Seien  $M_1, M_2 \in SL(2; \mathbb{R})$  und  $\lambda_1, \lambda_2$  mit  $\Phi_{M_1} \circ \gamma_{\lambda_1,t_0} = \Phi_{M_2} \circ \gamma_{\lambda_2,t_0}$  auf  $I$ . Dann gilt insbesondere

$$\Phi_{M_1}(\gamma_{\lambda_1,t_0}(t_0)) = \Phi_{M_2}(\gamma_{\lambda_2,t_0}(t_0)) \implies \Phi_{M_1}(i) = \Phi_{M_2}(i) \implies K := M_1^{-1}M_2 \in SO(2)$$

Weiterhin gilt:

$$\gamma'_{\lambda_1,t_0}(t_0) = \Phi'_K(i) \cdot \gamma'_{\lambda_2,t_0}(t_0) = \exp(-2i\alpha) \cdot \gamma'_{\lambda_2,t_0}(t_0)$$

für

$$K = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$i\lambda_1 = \exp(-2i\alpha)i\lambda_2 \implies \lambda_1 = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \lambda_2$$

und daher

$$\exp(-2i\alpha) = 1 \implies -2\alpha \in 2\pi\mathbb{Z} \implies \alpha \in \pi\mathbb{Z} \implies K = \pm E \implies \Phi_{M_1} = \Phi_{M_2}$$

Zu (iii):

Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von Lösungen (Satz A.1.4).  $\square$

Nun wissen wir welche Form Geodätische haben:

**Korollar 2.2.18.** *Geodätische sind Abschnitte von Orthogonalkreisen und globale Geodätische gerade volle Orthogonalkreise.*

*Beweis.* Im Beweis von Satz 2.2.17 haben wir gesehen, dass wir jede globale Geodätische als  $\Phi_M \circ \gamma_{\lambda, t_0}$  mit  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  schreiben können.  $\gamma_{\lambda, t_0}$  ist eine Parametrisierung der imaginären Achse und insbesondere also ein Orthogonalkreis. Da Möbiustransformationen Orthogonalkreise in Orthogonalkreise überführen, folgt die Aussage.  $\square$

**Lemma 2.2.19.** *Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  und  $\mu > 1$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $\gamma(a) = i$  und  $\gamma(b) = i\mu$ . Diese ist dann gegeben durch:*

$$\gamma(t) = \gamma_{\lambda, a}(t) \quad \forall t \in [a, b] \quad \text{mit } \lambda := \frac{\log \mu}{b - a}$$

*Beweis.* Für  $\tilde{\gamma} := \gamma_{\lambda, a}|_{[a, b]}$  gilt:

$$\tilde{\gamma}(a) = i \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}(b) = i \exp(\log(\mu)) = i\mu$$

Also ist  $\tilde{\gamma}$  eine Geodätische zwischen  $i$  und  $i\mu$ .

Zur Eindeutigkeit: Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  zwei Geodätische mit  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = i$  und  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = i\mu$ . Weil Geodätische Abschnitte von Orthogonalkreisen sind und es offenbar nur einen Orthogonalkreis, nämlich die imaginäre Achse, durch  $i$  und  $i\mu$  gibt, muss es ein  $\lambda_1, \lambda_2 > 1$  geben, so dass  $\gamma_1'(a) = i\lambda_1$  und  $\gamma_2'(a) = i\lambda_2$ , d.h.  $\gamma_1(t) = \gamma_{\lambda_1, a}(t) = i \exp(\lambda_1(t - a))$  und  $\gamma_2(t) = \gamma_{\lambda_2, a}(t) = i \exp(\lambda_2(t - a))$  für alle  $t \in [a, b]$ . Nun gilt:

$$\begin{aligned} i\mu = \gamma_1(b) &= i \exp(\lambda_1(b - a)) \implies \lambda_1 = \frac{\log \mu}{b - a} \\ i\mu = \gamma_2(b) &= i \exp(\lambda_2(b - a)) \implies \lambda_2 = \frac{\log \mu}{b - a} \end{aligned}$$

Also  $\lambda_1 = \lambda_2$  und somit  $\gamma_1 = \gamma_2$ .  $\square$

**Satz 2.2.20.** *Seien  $z, w \in \mathbb{H}, z \neq w$  und  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dann gibt es genau eine Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , so dass  $\gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = w$ .*

*Beweis.* Wir finden eindeutig bestimmte  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ ,  $\mu > 1$ , so dass  $\Phi(z) = i$  und  $\Phi(w) = i\mu$ . Mit der eindeutig bestimmten Geodätischen  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  aus obigem Lemma ergibt sich, dass  $\Phi^{-1} \circ \gamma$  die eindeutig bestimmte Geodätische zwischen  $z$  und  $w$  ist.  $\square$

Nun haben wir einige nützliche Resultate über Geodätische zusammengetragen. Allerdings ist die Frage noch nicht geklärt, ob diese wirklich die Längen minimierenden Wege sind. Dass dies wirklich so ist, zeigt folgender Satz.

**Satz 2.2.21.** *Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  eine Geodätische. Dann gilt:*

(i)

$$L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$$

(ii) Für  $\mu \geq 1$  gilt:

$$d(i, i\mu) = \log \mu$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

*Beweis.* Weil  $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$  und  $d(\cdot, \cdot)$  und  $L(\cdot)$  invariant unter Isometrien sind, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $\gamma(a) = i$  und  $\gamma(b) = i\mu$  mit  $\mu > 1$ . Also hat  $\gamma$  die spezielle Form:

$$\gamma(t) = i \exp(\lambda(t - a)) \quad \forall t \in [a, b] \quad \text{mit } \lambda = \frac{\log \mu}{b - a}$$

Es ist nach Definition des hyperbolischen Abstands klar, dass  $L(\gamma) \geq d(i, i\mu)$ . Für die Abschätzung nach oben, wählen wir ein  $\tilde{\gamma} = x + iy \in \text{SC}_I^1(i, i\mu)$ . Dann hat man:

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \frac{|\tilde{\gamma}'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = [\log(|y(t)|)]_0^1 = \log \mu$$

Für  $\gamma$  gilt nun aber:

$$L(\gamma) = \int_a^b \lambda \cdot \frac{\exp(\lambda(t - a))}{\exp(\lambda(t - a))} dt = (b - a)\lambda = \log \mu$$

Also gilt  $L(\gamma) = d(i, i\mu) = \log \mu$  und die Aussage folgt.  $\square$

**Korollar 2.2.22.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  eine Geodätische und  $z = \gamma(a), w = \gamma(b)$ . Dann gilt:

$$E(\gamma) = \inf\{E(c) \mid c \in \text{SC}_I^1(z, w)\} = \inf\{E(c) \mid c \in C_I^2(z, w)\}$$

*Beweis.* Wir haben in Satz 2.2.21 gesehen, dass  $L(\gamma) = d(z, w) = \inf\{L(c) \mid c \in \text{SC}_I^1(z, w)\}$  gilt, d.h. für alle  $c \in \text{SC}_I^1(z, w)$  gilt:

$$L(\gamma) \leq L(c) \implies \underbrace{\frac{1}{2(b-a)} L^2(\gamma)}_{=E(\gamma)} \leq \underbrace{\frac{1}{2(b-a)} L^2(c)}_{\leq E(c)} \implies E(\gamma) \leq E(c)$$

Also wie behauptet:

$$E(\gamma) = \inf\{E(c) \mid c \in \text{SC}_I^1(z, w)\} \leq \inf\{E(c) \mid c \in C_I^2(z, w)\} = E(\gamma)$$

$\square$

**Satz 2.2.23.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  und  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  zwei Geodätische mit  $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Automorphismus  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass gilt:

$$\Phi \circ \gamma_1 = \gamma_2$$

*Beweis.* Wir finden eindeutige Automorphismen  $\Phi_1, \Phi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  und eindeutige  $\mu_1, \mu_2 > 1$ , so dass gilt:

$$\Phi_1(\gamma_1(a)) = i = \Phi_2(\gamma_2(a)), \quad \Phi_1(\gamma_1(b)) = i\mu_1, \quad \Phi_2(\gamma_2(b)) = i\mu_2$$

Weiter hat man:

$$L(\gamma_1) = d(i, i\mu_1) = \log \mu_1 \quad \text{und} \quad L(\gamma_2) = d(i, i\mu_2) = \log \mu_2$$

Aus  $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$  folgt dann  $\mu_1 = \mu_2$  und somit  $\Phi_1 \circ \gamma_1 = \Phi_2 \circ \gamma_2$ . Da  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  eindeutig bestimmt waren, ist durch  $\Phi := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  der eindeutige Automorphismus gegeben mit

$$\Phi \circ \gamma_1 = \gamma_2$$

$\square$



Durch Aussage (ii) von Satz 2.2.21 lässt sich nun eine explizite Abstandsformel herleiten. Dazu führen wir jedoch zunächst eine weitere Invariante unter Möbiustransformationen ein; das sog. Doppelverhältnis.

**Definition 2.2.24** (Doppelverhältnis). Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ . Wir definieren das *Doppelverhältnis* als

$$D(z, w) := \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$$

**Lemma 2.2.25.** Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ ,  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  und  $\lambda \geq 1$ . Dann gilt

(i)

$$D(Mz, Mw) = D(z, w)$$

(ii)

$$D(i, \lambda i) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

(iii)

$$0 \leq D(z, w) < 1$$

(iv)

$$D(z, w) = D(w, z)$$

*Beweis.* Zu (i):

$$\begin{aligned} D(Mz, Mw) &= \frac{|Mz - Mw|}{|Mz - M\bar{w}|} = \frac{|z - w|}{|cz + d||cw + d|} \cdot \frac{|cz + d||c\bar{w} + d|}{|z - \bar{w}|} \\ &= \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} = D(z, w) \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$D(i, \lambda i) = \frac{|i - \lambda i|}{|i + \lambda i|} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

Zu (iii):

Nach Satz 2.1.22 gibt es ein  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $Mz = i$ ,  $Mw = \lambda i$  mit  $\lambda \geq 1$ . Dann gilt nach (i) und (ii):

$$D(z, w) = D(Mz, Mw) = D(i, \lambda i) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \in [0, 1)$$

Zu (iv):

$$D(z, w) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} = \frac{|-(z - w)|}{|-(z - \bar{w})|} = D(w, z)$$

□

Nun können wir eine explizite Abstandsformel angeben.

**Satz 2.2.26** (Explizite Abstandsformel). Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ . Dann gilt

$$d(z, w) = \log \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

*Beweis.* Nach Satz 2.1.22 gibt es ein  $M \in SL(2; \mathbb{R})$ , so dass  $Mz = i$ ,  $Mw = \lambda i$  mit  $\lambda \geq 1$  und nach Satz 2.2.21 und Lemma 2.2.5:

$$d(z, w) = d(Mz, Mw) = d(i, \lambda i) = \log \lambda$$

Weiter gilt nach vorigem Lemma:

$$D(z, w) = D(Mz, Mw) = D(i, \lambda i) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

Und somit:

$$\lambda = \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)}$$

Also folgt:

$$d(z, w) = \log \lambda = \log \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

□

Aus dieser Formel folgen nun eine Reihe weiterer Beziehungen für den Abstand zweier Punkte (siehe [Bea95]). Hier sei nur eine weitere genannt.

**Korollar 2.2.27.** *Seien  $z, w \in \mathbb{H}$ . Dann gilt:*

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w)}$$

*Beweis.* Nach Definition gilt:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Seien nun  $z, w \in \mathbb{H}$ . Durch Einsetzen der expliziten Abstandsformel erhält man:

$$\begin{aligned} \cosh d(z, w) &= \frac{1}{2} \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} + \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{(|z - \bar{w}| + |z - w|)^2 + (|z - \bar{w}| - |z - w|)^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2|z - \bar{w}|^2 + 2|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right) \\ &= 1 + \frac{4|z - w|^2}{2|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= |z|^2 - zw - \bar{w}\bar{z} + |w|^2 - (|z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2) \\ &= z(\bar{w} - w) + \bar{z}(w - \bar{w}) = -(z - \bar{z})(w - \bar{w}) \\ &= -2i(\operatorname{Im} z)(2i)(\operatorname{Im} w) = 4(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w) \end{aligned}$$

Also insgesamt wie behauptet:

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{1}{2} \frac{4|z - w|^2}{4(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w)} = 1 + \frac{|z - w|^2}{2(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w)}$$

□

Wir interessieren uns nun für die Lage von Orthogonalkreisen bzw. globalen Geodätischen zueinander. Wir werden drei Fälle unterscheiden, welche wir unter anderem an der Lage der "Endpunkte" der Orthogonalkreise definieren werden. Da es im Folgenden nicht mehr auf die Parametrisierung einer Geodätischen  $\gamma$  ankommt, werden wir diese unter leichtem Missbrauch der Notation als Menge in der oberen Halbebene betrachten und schreiben ebenfalls  $\gamma$  für diese Menge.

**Definition 2.2.28** (Endpunkte). Sei  $\gamma$  ein Orthogonalkreis/eine globale Geodätische.  $\gamma$  hat nun zwei *Endpunkte* in  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

- (i) Falls  $\gamma$  ein Halbkreis ist mit Mittelpunkt auf  $\mathbb{R}$ , dann sind die Endpunkte von  $\gamma$  gerade die Schnittpunkte von  $\gamma$ , welche entstehen, wenn man  $\gamma$  nach  $\mathbb{R}$  fortsetzt.
- (ii) Falls  $\gamma$  eine Parallele zur imaginären Achse ist, dann sind die Endpunkte von  $\gamma$  gerade  $\infty$  und der Fußpunkt von  $\gamma$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 2.2.29.** Aus dieser Definition folgt nun sofort, dass zwei Orthogonalkreise/globale Geodätische (als Mengen) gleich sind, wenn sie dieselben Endpunkte haben.

**Definition 2.2.30.** Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  unterschiedliche Orthogonalkreise/globale Geodätische. Man sagt:

- (i)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind *parallel* genau dann, wenn sie genau einen Endpunkte gemeinsam haben.
- (ii)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  *schneiden sich* genau dann, wenn sie keinen Endpunkt gemeinsam haben und  $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ .
- (iii)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind *disjunkt* genau dann, wenn sie keinen Endpunkt gemeinsam haben und  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ .

Wir möchten nocheinmal die Definition des Abstandes zweier Mengen in einem metrischen Raum wiederholen und bzgl. unserer Situation in  $\mathbb{H}$  mit dem hyperbolischen Abstand  $d(.,.)$  formulieren.

**Definition 2.2.31.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{H}$  Mengen. Der Abstand von  $A$  und  $B$  wird dann wie üblich definiert durch

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Ist  $A = \{a\}$  bzw.  $B = \{b\}$  einelementig so lassen wir die Mengenklammern weg und schreiben  $\text{dist}(a, B) = \text{dist}(\{a\}, B)$  bzw.  $\text{dist}(A, b) = \text{dist}(A, \{b\})$ .

Da  $d(.,.)$  invariant unter Möbiustransformationen ist, erhält man sofort:

**Bemerkung 2.2.32.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{H}$  Mengen und  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ . Dann gilt:

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\Phi(A), \Phi(B))$$

Aus der euklidischen Geometrie ist bekannt, dass der kürzeste Weg von einem Punkt zu einer Gerade durch eine senkrecht auf der Geraden stehenden Linie durch den Punkt beschrieben wird. In der hyperbolischen Geometrie übernehmen die Rolle von Geraden die Orthogonalkreise. Dies legt die Vermutung nahe, dass bezüglich des hyperbolischen Abstandes die kürzeste Strecke zwischen einem Orthogonalkreis und einem Punkt durch eine Geodätische, welche senkrecht auf dem Orthogonalkreis steht und in dem Punkt endet, gegeben ist.

**Satz 2.2.33.** Sei  $\gamma$  ein Orthogonalkreis,  $z \in \mathbb{H}$  mit  $z \notin \gamma$  und  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $\hat{\gamma}(a) = z$  und  $\hat{\gamma}(b) \in \gamma$ , so dass  $\text{dist}(z, \gamma) = d(z, \hat{\gamma}(b)) = L(\hat{\gamma})$ .

$\hat{\gamma}$  schneidet dann  $\gamma$  bei  $\hat{\gamma}(b)$  orthogonal.

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

*Beweis.* Unter Verwendung eines  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\gamma$  die imaginäre Achse ist. Die Aussage folgt bereits, wenn wir zeigen können, dass  $\text{dist}(\gamma, z) = d(i|z|, z)$ , da wir dann für  $\hat{\gamma}$  die eindeutig bestimmte Geodätische mit  $\hat{\gamma}(a) = z$  und  $\hat{\gamma}(b) = i|z|$  nehmen können. Weil Geodätische Orthogonalkreisbögen sind und es durch  $z$  und  $i|z|$  nur einen einzigen Orthogonalkreis gibt, nämlich der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius  $|z|$ , ist  $\hat{\gamma}$  Teil dieses Orthogonalkreises und schneidet somit  $\gamma$  in  $\hat{\gamma}(b)$  orthogonal. Es gilt nun für alle  $t > 0$  und  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} \cosh d(z, it) &= 1 + \frac{|z - it|^2}{2yt} = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2yt + t^2}{2yt} = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\ &= \frac{|z|}{2y} \left( \frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y} \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung erhält man durch eine Analyse der Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, s \mapsto (s + 1/s)$ . Diese nimmt ihr Minimum, wie man leicht nachrechnet, bei  $s = 1$  an. Weil  $\cosh(\cdot)$  auf  $\mathbb{R}_+$  streng monoton wachsend ist, nimmt die Funktion  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto d(z, it)$  ihr Infimum bei  $t = |z|$  an. Daraus folgt:

$$\text{dist}(\gamma, z) = \inf\{g(t) \mid t > 0\} = d(i|z|, z)$$

□

Nun benötigen wir noch ein kleines technisches Lemma:

**Lemma 2.2.34.** *Es gilt:*

(i) *Seien  $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:*

$$|D(z, w)^2 - 1| = \frac{4vy}{(x - u)^2 + (y + v)^2}$$

(ii) *Seien  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ . Dann gilt:*

$$|D(z_n, w_n)^2 - 1| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \implies d(z_n, w_n) \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$$

*Beweis.* Zu (i):

$$\begin{aligned} |D^2(z, w) - 1| &= \left| \frac{(x - u)^2 + (y - v)^2}{(x - u)^2 + (y + v)^2} - 1 \right| = \left| \frac{(y - v)^2 - (y + v)^2}{(x - u)^2 + (y + v)^2} \right| \\ &= \frac{4vy}{(x - u)^2 + (y + v)^2} \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$1 - D(z_n, w_n) = |1 - D(z_n, w_n)| = \frac{|D(z_n, w_n)^2 - 1|}{|D(z_n, w_n) + 1|} < |D(z_n, w_n)^2 - 1| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Daraus folgt nun:

$$d(z_n, w_n) = \log \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} < \log \frac{2}{1 - D(z, w)} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

**Satz 2.2.35.** Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  disjunkte Orthogonalkreise, und  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , so dass gilt:

$$\gamma(a) \in \gamma_1, \quad \gamma(b) \in \gamma_2 \quad \text{und} \quad \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = L(\gamma)$$

$\gamma$  schneidet dann  $\gamma_1$  in  $\gamma(a)$  und  $\gamma_2$  in  $\gamma(b)$  jeweils orthogonal.

*Beweis.* Wieder unter Verwendung eines  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $\gamma_1$  die Imaginärachse ist und  $\gamma_2 = \{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid (x - m)^2 + y^2 = r^2\}$  mit  $m > r > 0$  geeignet.

Wir zeigen zunächst, dass das Infimum tatsächlich angenommen wird, d.h. dass es zwei Punkte  $z \in \gamma_1$  und  $w \in \gamma_2$  gibt mit  $d(z, w) = \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Hierzu betrachten wir zunächst die Kompaktifizierung  $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  von  $\mathbb{H}$  in der Riemann'schen Zahlkugel. Dann lassen sich  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zu kompakten Mengen  $\bar{\gamma}_1 := \gamma_1 \cup \{0, \infty\}$  und  $\bar{\gamma}_2 := \gamma_2 \cup \{m - r, m + r\}$  erweitern. Seien nun  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \gamma_1^{\mathbb{N}}$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \gamma_2^{\mathbb{N}}$  Folgen mit  $d(z_n, w_n) \rightarrow \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da dies auch Folgen in den kompakten Mengen  $\bar{\gamma}_1$  bzw.  $\bar{\gamma}_2$  sind, konvergieren diese, d.h.  $z_n \rightarrow z^* \in \bar{\gamma}_1$  und  $w_n \rightarrow w^* \in \bar{\gamma}_2$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es reicht nun zu zeigen, dass  $z^* \in \gamma_1$  und  $w^* \in \gamma_2$  gilt. Hierzu schreiben wir  $z_n = x_n + iy_n$  und  $w_n = u_n + iv_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und benutzen das Lemma, welches wir zuvor bewiesen haben.

Nehmen wir also an, dass  $z^* \in \{0, \infty\}$  oder  $w^* \in \mathbb{R}$ .

1. Fall: Sei  $z^* = 0$ . Dann gilt:

$$|D(z_n, w_n)^2 - 1| = \frac{4v_n y_n}{(x_n - u_n)^2 + (y_n + v_n)^2} < \frac{4K_1 y_n}{K_2^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

wobei  $|x_n - u_n| > K_2$  und  $v_n < K_1$  mit  $K_1, K_2 > 0$  geeignet.

2. Fall: Sei  $z^* = \infty$ . Dann gilt:

$$|D(z_n, w_n)^2 - 1| = \frac{4v_n y_n}{(x_n - u_n)^2 + (y_n + v_n)^2} < \frac{4K_1}{(K_2^2/y_n) + y_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

wobei  $|x_n - u_n| > K_2$  und  $v_n < K_1$  mit  $K_1, K_2 > 0$  geeignet.

3. Fall: Sei  $w^* \in \mathbb{R}$  und  $z^* \in \gamma_1$ ; insb.  $y_n < M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $M > 0$  geeignet. Dann gilt:

$$|D(z_n, w_n)^2 - 1| = \frac{4v_n y_n}{(x_n - u_n)^2 + (y_n + v_n)^2} < \frac{4M v_n}{K_2^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

wobei  $|x_n - u_n| > K_2$  mit  $K_2 > 0$  geeignet.

In allen drei Fällen folgt dann nach dem Lemma:

$$d(z_n, w_n) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

Das ist ein Widerspruch zu

$$d(z_n, w_n) \rightarrow \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2) < \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also muss  $z^* \in \gamma_1$  und  $w^* \in \gamma_2$  gelten und damit  $d(z^*, w^*) = \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Wir können nun die eindeutig bestimmte Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $\gamma(a) = z^* \in \gamma_1$  und  $\gamma(b) = w^* \in \gamma_2$  betrachten. Für diese gilt dann  $L(\gamma) = d(z^*, w^*) = \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$ . Also insbesondere auch  $L(\gamma) = \text{dist}(z^*, \gamma_2)$  bzw.  $L(\gamma) = \text{dist}(w^*, \gamma_1)$ . Also muss  $\gamma$  die Orthogonalkreise  $\gamma_1$  bei  $\gamma(a)$  und  $\gamma_2$  bei  $\gamma(b)$  jeweils orthogonal schneiden.  $\square$

Zum Schluss wollen wir nun noch sogenannte konvexe Mengen betrachten.

## 2. Die obere Halbebene und ihre hyperbolische Geometrie

**Definition 2.2.36** (Konvexe Mengen). Sei  $E \subseteq \mathbb{H}$  eine Menge.  $A$  heißt *konvex*, wenn für alle  $z, w \in \mathbb{H}$  die eindeutige Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  mit  $\gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = w$  ganz in  $E$  liegt, d.h.  $\gamma \subseteq E$ .

*Anmerkung.* Auch hier sieht man wieder, dass die Geodätischen die Rolle der Geraden aus der euklidischen Geometrie übernehmen.

**Bemerkung 2.2.37.** Es gilt:

(i)  $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(\tau) < 0\} \subseteq \mathbb{H}$  ist konvex

(ii) Für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} \tau$  ist der Ball  $B_\varepsilon(\tau) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \tau| < \varepsilon\}$  konvex.

*Beweis.* Dies verifiziert man durch elementare geometrische Überlegungen, indem man ausnutzt, dass Geodätische gerade Orthogonalkreisbögen sind.  $\square$

**Satz 2.2.38.** Es gilt:

(i) Ist  $E$  konvex, dann ist auch  $\gamma(E)$  konvex für alle  $\gamma \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H})$ .

(ii) Ist  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge konvexer Mengen mit  $E_k \subseteq E_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ , dann ist auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  konvex.

(iii) Ist  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  eine Familie konvexer Mengen ( $A$  beliebige Indexmenge), dann ist auch  $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$  konvex.

*Beweis.* Zu (i):

Sei  $E \subseteq \mathbb{H}$  konvex und  $\psi \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H})$ . Weiter seien  $z' = \psi(z), w' = \psi(w) \in \psi(E)$  mit  $z, w \in E$  und  $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  die eindeutige Geodätische mit  $\gamma'(a) = z'$  und  $\gamma'(b) = w'$ . Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  die eindeutige Geodätische in  $E$  mit  $\gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = w$ , dann ist  $\psi(\gamma(a)) = z', \psi(\gamma(b)) = w'$  und somit aufgrund der Eindeutigkeit  $\psi \circ \gamma = \gamma'$ ; insbesondere als  $\gamma' \subseteq \psi(E)$ .

Zu (ii):

Sei  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge konvexer Mengen mit  $E_k \subseteq E_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ . Weiter seien  $z, w \in E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , d.h. es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $z, w \in E_N$ . Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  nun die eindeutige Geodätische von  $z$  nach  $w$ , dann gilt  $\gamma \subseteq E_N \subseteq E$ , weil  $E_N$  konvex ist. Also ist  $E$  konvex.

Zu (iii):

Sei  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  eine Familie konvexer Mengen. Weiter seien  $z, w \in E := \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ , d.h.  $z, w \in E_\alpha \forall \alpha \in A$ . Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  die Geodätische von  $z$  nach  $w$ , dann ist  $\gamma \subseteq E_\alpha \forall \alpha \in A$ , weil jedes  $E_\alpha$  konvex ist. Somit gilt  $\gamma \subseteq E$  und  $E$  ist konvex.  $\square$

Mit diesen Begriffen können wir nun noch den folgenden Satz zeigen.

**Satz 2.2.39.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{H}$  offen,  $f : U \rightarrow V$  eine Isometrie und  $\gamma : J \rightarrow U$  eine Geodätische ( $J$  ein beliebiges nicht degeneriertes Intervall in  $\mathbb{R}$  oder ganz  $\mathbb{R}$ ). Dann ist auch  $f \circ \gamma$  eine Geodätische.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass es für jedes  $t \in J$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f \circ \gamma|_{J_\delta}$  eine Geodätische ist, wobei  $J_\delta := J \cap [t - \delta, t + \delta]$ . Sei also  $t \in J$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B := B_\varepsilon(f(\gamma(t))) \subseteq V$ . Ferner gibt es nun ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(\gamma(J_\delta)) \subseteq B$ . Seien nun  $t_1, t_2 \in J_\delta$ , so dass  $[t_1, t_2] = J_\delta$ , und

setze  $U' := f^{-1}(B)$ ,  $\hat{\gamma} := \gamma|_{J_\delta}$  und  $z := \hat{\gamma}(t_1)$ ,  $w := \hat{\gamma}(t_2) \in U'$ . Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
 E(f \circ \hat{\gamma}) &= E(\hat{\gamma}) \\
 &= \inf\{E(c) \mid c \in C_{J_\delta}^2(z, w)\} \\
 &=^\circ \inf\{E(c) \mid c \in C_{J_\delta}^2(z, w), c \subseteq U'\} \\
 &= \inf\{E(f \circ c) \mid c \in C_{J_\delta}^2(z, w), c \subseteq U'\} \\
 &= \inf\{E(\hat{c}) \mid \hat{c} \in C_{J_\delta}^2(f(z), f(w)), \hat{c} \subseteq B\} \\
 &=^\star \inf\{E(\hat{c}) \mid \hat{c} \in C_{J_\delta}^2(f(z), f(w))\}
 \end{aligned}$$

◦:  $U'$  enthält bereits den Weg  $\hat{\gamma}$  von  $z$  nach  $w$  mit minimaler Energie

⋆: Hier geht entscheidend ein, dass  $B$  konvex ist, d.h. die Geodätische von  $f(z)$  nach  $f(w)$  bereits enthält, welche der Weg minimaler Energie von  $f(z)$  nach  $f(w)$  ist.

Also muss  $f \circ \hat{\gamma}$  notwendigerweise die Euler-Lagrange'schen-DGL erfüllen und ist damit eine Geodätische.  $\square$





## 3. Klassifizierung Riemann'scher Flächen

Wie bereits angekündigt, wollen wir hier eine grobe Klassifikation von Riemann'schen Flächen angeben. Diese wird dann als Grundlage für die Betrachtung der Modulräume zu Tori in Kapitel 4 und die Überlegungen zur hyperbolischen Geometrie auf kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes bilden.

Die Primärquelle für dieses Kapitel ist [IT92, Kap. 2.4].

### 3.1. Der Uniformisierungssatz

Zunächst benötigen wir den Uniformisierungssatz, welcher eine Aussage über die möglichen universellen Überlagerungen einer Riemann'schen Fläche trifft. Mit Hilfe von Satz 1.5.9 und etwas zusätzlichem Wissen über die Decktransformationengruppen werden wir dann den Klassifizierungssatz beweisen können.

**Satz 3.1.1** (Uniformisierungssatz). *Jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche ist biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  (bzw. oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ ) oder zur Zahlenebene  $\mathbb{C}$  oder zur Zahlkugel  $\mathbb{P}^1$ .*

*Beweis.* Siehe [Fre09, S. 146]. □

Im Folgenden sei wieder  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche,  $(\tilde{R}, \pi, R)$  eine universelle Überlagerung und  $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$  bezeichne die zugehörige Decktransformationengruppe.

**Bemerkung 3.1.2.** *Sei  $R$  eine Riemann'sche Fläche und  $(\tilde{R}_1, \pi, R)$  eine universelle Überlagerung, welche biholomorph äquivalent zu  $\tilde{R}_2$  via der biholomorphen Abbildung  $\varphi : \tilde{R}_2 \rightarrow \tilde{R}_1$  ist. Dann ist auch  $(\tilde{R}_2, \pi \circ \varphi, R)$  eine universelle Überlagerung von  $R$ .*

*Beweis.* Die Eigenschaften einer Überlagerungsabbildung rechnet man für  $\pi \circ \varphi : \tilde{R}_2 \rightarrow R$  leicht nach, da  $\varphi$  biholomorph ist. Außerdem ist  $\tilde{R}_2$  offensichtlich einfach zusammenhängend, da homöomorph zu  $\tilde{R}_1$ . □

**Satz 3.1.3.**  *$\tilde{R}$  ist genau dann biholomorph äquivalent zur Riemann'schen Zahlkugel  $\mathbb{P}^1$ , wenn  $R$  selbst biholomorph äquivalent zur Riemann'schen Zahlkugel ist.*

*Beweis.* Angenommen  $\tilde{R} \cong \mathbb{P}^1$  (o.E.:  $\tilde{R} = \mathbb{P}^1$ ; vgl. Bem. 3.1.2). Da  $\Gamma \subseteq \text{Aut}(\tilde{R}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  nach Korollar 1.5.5, ist jedes  $\gamma \in \Gamma$  eine Möbiustransformation und hat daher mindestens einen Fixpunkt. Nach Lemma 1.3.13 (ii) hat aber jedes  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  keine Fixpunkte. Also muss  $\Gamma = \{id\}$  gelten und daher  $R \cong \tilde{R}/\Gamma = \mathbb{P}^1$  nach Satz 1.5.9.

Ist umgekehrt  $R \cong \mathbb{P}^1$  (o.E.:  $R = \mathbb{P}^1$ , vgl. Kor. 1.5.3), dann ist  $(\mathbb{P}^1, id, R)$  bereits die universelle Überlagerung, weil  $\mathbb{P}^1$  einfach zusammenhängend ist. □

**Lemma 3.1.4.** *Sei  $(\Lambda, +) \triangleleft (\mathbb{C}, +)$  eine abelsche Untergruppe, welche keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt. Dann gilt eine der folgenden drei Aussagen:*

- (i)  $\Lambda = \{0\}$

### 3. Klassifizierung Riemann'scher Flächen

(ii)  $\Lambda = \langle \omega_1 \rangle$  mit  $\omega_1 \in \mathbb{C}^*$

(iii)  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  mit  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass (ii) oder (iii) gilt, wenn (i) nicht gilt. Nehmen wir also an, dass es ein  $\omega \in \Lambda, \omega \neq 0$  gibt. Dann gibt es auch ein  $\omega_1 \in \Lambda, \omega_1 \neq 0$ , so dass  $|\omega_1| = \min\{|\omega| \mid \omega \in \Lambda \setminus \{0\}\}$ , da  $\Lambda$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  hat. Dann gilt  $\langle \omega_1 \rangle = \mathbb{Z}\omega_1 \subseteq \Lambda$ . Gilt hier bereits Gleichheit, so sind wir bei Aussage (ii). Angenommen es gibt also ein  $\omega \in \Lambda \setminus \langle \omega_1 \rangle$ . Da auch  $\Lambda \setminus \langle \omega_1 \rangle$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  hat, enthält die Menge ein  $\omega_2$  mit minimalem Abstand zur 0.

Wir behaupten nun, dass  $\omega_2/\omega_1$  nicht reell ist. Denn wäre dies so, dann gäbe es ein  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$\begin{aligned} n < \omega_2/\omega_1 < n+1 &\Leftrightarrow 0 < \omega_2/\omega_1 - n < 1 \\ \Rightarrow 0 < |\omega_2/\omega_1 - n| < 1 &\Leftrightarrow 0 < |\omega_2 - n\omega_1| < |\omega_1| \end{aligned}$$

Im Widerspruch zur Wahl von  $\omega_1$ , da  $\omega_2 - n\omega_1 \in \Lambda$ .

Es lässt sich nun zeigen, dass  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  gilt (Aussage (iii)). Da  $\omega_2/\omega_1$  nicht reell ist, sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig und bilden damit eine reelle Basis von  $\mathbb{C}$ , d.h. jedes  $\omega \in \mathbb{C}$  kann in der Form  $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  geschrieben werden. Sei also  $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \in \Lambda$ . Dann gibt es  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ , so dass  $|\lambda_1 - m_1| \leq 1/2, |\lambda_2 - m_2| \leq 1/2$  und wir haben für  $\omega' = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2$ :

$$\begin{aligned} |\omega'| &= |(\lambda_1 - m_1)\omega_1 + (\lambda_2 - m_2)\omega_2| <^* |\lambda_1 - m_1||\omega_1| + |\lambda_2 - m_2||\omega_2| \\ &\leq \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2| \end{aligned}$$

wobei bei  $\star$  die strikte Ungleichheit gilt, da  $\omega_1$  und  $\omega_2$  linear unabhängig sind. Nach der Wahl von  $\omega_2$  muss dann  $\omega' \in \langle \omega_1 \rangle$  sein und somit  $\omega = \omega' + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ . Weil  $\omega \in \Lambda$  beliebig war, gilt  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  und daher Aussage (iii).  $\square$

**Satz 3.1.5.**  $\tilde{R}$  ist genau dann biholomorph äquivalent zur Zahlenebene  $\mathbb{C}$ , wenn  $R$  biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$  oder einem Torus ist.

*Beweis.* Angenommen  $\tilde{R} \cong \mathbb{C}$  (o.E.:  $\tilde{R} = \mathbb{C}$ ; vgl. Bem. 3.1.2). Dann gilt wieder  $\Gamma \subseteq \text{Aut}(\tilde{R}) = \text{Aut}(\mathbb{C})$  nach Korollar 1.5.5 und jedes  $\gamma \in \Gamma$  lässt sich in der Form  $\gamma(z) = az + b$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  schreiben ( $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ ). Weiter hat jedes  $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$  keine Fixpunkte. Für solch ein  $\gamma$  muss dann aber  $a = 1$  gelten, da sonst die Fixpunktgleichung  $z = az + b$  eine Lösung hätte; nämlich  $z = b/(1-a)$ . Also lässt sich jedes  $\gamma \in \Gamma$  in der Form  $\gamma(z) = z + b$  für ein geeignetes  $b \in \mathbb{C}$  schreiben. Insbesondere ist  $\Gamma$  abelsch und man sieht leicht, dass die Abbildung

$$\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \gamma \mapsto \gamma(0)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Wir setzen nun  $\Lambda := \Phi(\Gamma)$ ; insbesondere  $\Lambda \cong \Gamma$ . Weiter behaupten wir, dass  $\Lambda$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt. Angenommen  $\Lambda$  hätte einen solchen Häufungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann gäbe es eine Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Für die kompakte Menge

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z_0| + 1\}$$

und  $\gamma_n := \Phi^{-1}(b_n)$  (d.h.  $\gamma_n(z) = z + b_n$ ) gäbe es dann aber ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\gamma_n(0) \in K$  für alle  $n > N, n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere gäbe es also unendlich viele  $\gamma \in \Gamma$ , so dass  $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$ . Im Widerspruch zu Lemma 1.5.6 (i).

Also lässt sich Lemma 3.1.4 anwenden und wir erhalten unter Verwendung des Gruppenisomorphismus  $\Phi : \Gamma \rightarrow \Lambda$ , dass  $\Gamma$  von einer der folgenden drei Formen ist:

(i)  $\Gamma = \{id\}$

- (ii)  $\Gamma = \langle \gamma_0 \rangle$  mit  $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{id\}$  und  $\gamma_0(z) = z + b_0 \forall z \in \mathbb{C}$  für ein geeignetes  $b_0 \in \mathbb{C}^*$ .
- (iii)  $\Gamma = \langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$  mit  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma \setminus \{id\}$ ,  $\gamma_0(z) = z + b_0$ ,  $\gamma_1(z) = z + b_1 \forall z \in \mathbb{C}$  für geeignete  $b_0, b_1 \in \mathbb{C}^*$ , welche über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind.

Falls (i) gilt, so ist  $R \cong \tilde{R}/\Gamma = \mathbb{C}$ .

Falls (ii) gilt, so ist induziert die Abbildung  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \exp(2\pi iz/b_0)$  eine wohldefinierte Abbildung  $\hat{\varphi} : \tilde{R}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $[z] \mapsto \exp(2\pi iz/b_0)$ . Man kann nun leicht nachrechnen, dass  $\hat{\varphi}$  sogar biholomorph ist, d.h.  $R \cong \tilde{R}/\Gamma \cong \mathbb{C}^*$ .

Falls (iii) gilt, so hat man  $R \cong \tilde{R}/\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma$ . Mit  $\Lambda = \mathbb{Z}b_0 \oplus \mathbb{Z}b_1$  sieht man nun leicht, dass  $\mathbb{C}/\Gamma$  homöomorph zu dem Torus  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  ist (vgl. Bsp. 1.3.23).

Umgekehrt nehmen wir zunächst an, dass  $R \cong \mathbb{C}$  (o.E.:  $R = \mathbb{C}$ ; vgl. Kor. 1.5.3). Eine universelle Überlagerung von  $R$  ist dann  $(\mathbb{C}, id, R)$ , d.h.  $\tilde{R} \cong \mathbb{C}$ . Als nächstes sei  $R \cong \mathbb{C}^*$  (o.E.:  $R = \mathbb{C}^*$ ; vgl. Kor. 1.5.3). Für  $\mathbb{C}^*$  ist eine universelle Überlagerung durch  $(\mathbb{C}, \hat{\pi}, \mathbb{C}^*)$  gegeben, wobei  $\hat{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \exp(z)$ , d.h.  $\tilde{R} \cong \mathbb{C}$ . Zuletzt nehmen wir an, dass  $R$  ein Torus ist. Wie wir in Beispiel 1.3.23 gesehen haben, ist die Gruppe der Decktransformationen  $\Gamma$  von  $R$  dann eine freie abelsche Gruppe über zwei Erzeugern. Wäre  $\tilde{R} \cong \mathbb{H}$  (o.E.  $\tilde{R} = \mathbb{H}$ ) so wäre  $\Gamma$  eine abelsche Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , welche die Voraussetzung des nachfolgenden Lemmas erfüllt. Dies impliziert nun aber, dass  $\Gamma$  zyklisch sein muss. Im Widerspruch dazu, dass  $\Gamma$  frei von zwei Elementen erzeugt wird. Also muss  $\tilde{R} \cong \mathbb{C}$  gelten.  $\square$

**Lemma 3.1.6.** *Sei  $\Gamma$  eine Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass jedes Element aus  $\Gamma \setminus \{id\}$  keine Fixpunkte in  $\mathbb{H}$  hat und für jedes Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{H}$  es höchstens endlich viele  $\gamma \in \Gamma$  gibt, so dass  $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$ .*

*Ist  $\Gamma$  abelsch, dann muss  $\Gamma$  auch zyklisch sein.*

*Beweis.* Zunächst behaupten wir, dass für jedes  $\tau \in \mathbb{H}$  die Menge  $\Gamma\tau$  keinen Häufungspunkt besitzt. Hätte  $\Gamma\tau$  einen Häufungspunkt  $\tau_0$  für ein  $\tau \in \mathbb{H}$ , dann würde es für das Kompaktum  $K := \overline{B_{|\tau_0+1|}(\tau)}$  unendlich viele  $\gamma \in \Gamma$  geben, so dass  $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$ . (Widerspruch!)

Diese Aussage gilt auch für alle zu  $\Gamma$  konjugierten Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ :  $\gamma\Gamma\gamma^{-1}$  mit  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ . Denn mit  $\tau \in \mathbb{H}$  ist auch  $\gamma^{-1}(\tau) \in \mathbb{H}$  und  $\gamma\Gamma\gamma^{-1}(\tau)$  hat genau dann einen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$ , wenn  $\Gamma\gamma^{-1}(\tau)$  einen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$  hat, weil  $\gamma$  ein Homöomorphismus ist.

Für  $\Gamma = \{id\}$  stimmt der Satz; nehmen wir also an, dass  $\Gamma \neq \{id\}$ , und wählen ein  $\gamma_0 \in \Gamma$ ,  $\gamma_0 \neq id$ . Da  $\gamma_0$  keine Fixpunkte auf  $\mathbb{H}$  hat muss nach Lemma 2.1.24  $\gamma_0$  entweder parabolisch oder hyperbolisch sein.

Wenn  $\gamma_0$  parabolisch ist, dann gibt es ein  $\hat{\gamma} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass

$$\gamma'_0(\tau) := (\hat{\gamma} \circ \gamma_0 \circ \hat{\gamma}^{-1})(\tau) = \tau + b_0 \quad \forall \tau \in \mathbb{H}$$

mit  $b_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b_0 \neq 0$ . Wir wollen im Folgenden die zu  $\Gamma$  via Konjugation mit  $\hat{\gamma}$  isomorphe Gruppe  $\Gamma' := \hat{\gamma}\Gamma\hat{\gamma}^{-1} \ni \gamma'_0$  betrachten. Da  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  von den Abbildungen der Form

$$\tau \mapsto \tau + \alpha, \quad \tau \mapsto \lambda\tau, \quad \tau \mapsto -1/\tau$$

erzeugt wird, wobei  $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  (vgl. Lemma 2.1.18), sieht man, dass ein  $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  nur dann mit  $\gamma'_0$  kommutieren kann, wenn es von der Form  $\tau \mapsto \tau + \alpha$  ist, d.h.

$$\Gamma' \subseteq \{\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \exists b \in \mathbb{R} \forall \tau \in \mathbb{H} : \gamma(\tau) = \tau + b\}$$

### 3. Klassifizierung Riemann'scher Flächen

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi : \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}, \gamma' \mapsto \gamma'(i) - i$$

Aus der speziellen Form der Elemente aus  $\Gamma'$  folgt dann, dass  $\Phi$  injektiv ist und somit  $\Gamma'$  isomorph zu ihrem Bild  $\Lambda = \Phi(\Gamma')$  ist. Außerdem hat wegen der zu Beginn des Beweises gemachten Beobachtung  $\Lambda$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$ . Daher ist Lemma 3.1.4 anwendbar und, weil  $\Gamma' \neq \{id\}$  und  $\Lambda \subset \mathbb{R}$ , ist  $\Lambda$  von einem Element erzeugt, d.h. zyklisch. Also gilt dies auch für  $\Gamma \cong \Gamma' \cong \Lambda$ .

Wenn  $\gamma_0$  hyperbolisch ist, dann gibt es ein  $\hat{\gamma} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass

$$\gamma'_0(\tau) := (\hat{\gamma} \circ \gamma_0 \circ \hat{\gamma}^{-1})(\tau) = \lambda_0 \tau \quad \forall \tau \in \mathbb{H}$$

mit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ . Auch hier betrachten wir die konjugierte Untergruppe  $\Gamma' := \hat{\gamma} \Gamma \hat{\gamma}^{-1}$ . Analog zu obiger Argumentation sieht man, dass

$$\Gamma' \subseteq \{\gamma' \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \forall \tau \in \mathbb{H} : \gamma'(\tau) = \lambda \tau\}$$

Ähnlich wie oben erhält man durch die Abbildung

$$\Psi : \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}, \gamma' \mapsto \log(-i\gamma'(i))$$

einen wohldefinierten injektiven Gruppenhomomorphismus. Wir betrachten dann wieder das Bild  $\Lambda := \Psi(\Gamma')$ . Analog zu obiger Argumentation erhält man nun aus Lemma 3.1.4, dass  $\Lambda \cong \Gamma' \cong \Gamma$  zyklisch sein muss.  $\square$

Aus dem Uniformisierungssatz, Satz 3.1.3 und Satz 3.1.5 folgt nun direkt der folgende Klassifizierungssatz für kompakte Riemann'sche Flächen:

**Satz 3.1.7** (Klassifizierungssatz). *Sei  $(R, \Sigma)$  eine kompakte Riemann'sche Fläche mit Geschlecht  $g$ . Dann gilt:*

- (i) *Ist  $g = 0$ , so ist  $R$  biholomorph äquivalent zur Riemann'schen Zahlkugel  $\mathbb{P}^1$ .*
- (ii) *Ist  $g = 1$ , so hat  $R$  eine universelle Überlagerung  $(\mathbb{C}, \pi, R)$  und  $R$  ist daher biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{C}/\Gamma$ , wobei  $\Gamma = \text{Deck}(\pi) \cong \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$  mit  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*, \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$*
- (iii) *Ist  $g \geq 2$ , so hat  $R$  eine universelle Überlagerung  $(\mathbb{H}, \pi, R)$  und  $R$  ist daher biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{H}/\Gamma$ , wobei  $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$ .*

*Anmerkung.* Riemann'sche Flächen der Form  $\mathbb{H}/\Gamma$  wie in (iii) nennt man auch *Fuchs'sche Modelle*.

*Beweis.* Zu (i):

Da  $g = 0$ , ist  $R$  homöomorph zu einer Kugel, insbesondere also einfach zusammenhängend. Nach dem Uniformisierungssatz muss dann  $R$  biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{P}^1$  sein, da  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{H}$  nicht kompakt sind.

Zu (ii):

Diese Aussage folgt direkt aus Satz 3.1.5, da  $R$  mit  $g = 1$  nach Definition 1.4.9 ein Torus ist.

Zu (iii):

Weil  $g \geq 2$ , ist  $R$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$  oder einem Torus. Also ist nach Satz 3.1.3 und Satz 3.1.5 jede universelle Überlagerung biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Für  $g = 1$  schreibt man, dann statt  $\mathbb{C}/\Gamma$  in Anlehnung an Beispiel 1.3.23 auch  $\mathbb{C}/\Lambda$  mit  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ . Diese Notation ist konsistent, da die im Beispiel eingeführte Äquivalenzrelation genau mit der aus Definition 1.5.7 übereinstimmt unter Verwendung des im Beispiel eingeführten Isomorphismus' zwischen  $\Gamma = \text{Deck}(\pi)$  und  $\Lambda$ . Im Unterschied zu 1.3.23 ist  $\mathbb{C}/\Lambda$  zusätzlich mit einer komplexen Struktur versehen.

## 4. Teichmüllerräume

Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, kann man alle Riemann'schen Flächen bis auf biholomorphe Äquivalenz in drei Typen einteilen: Die Riemann'sche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1$ , Tori  $\mathbb{C}/\Lambda$  und Fuchs'sche Modelle  $\mathbb{H}/\Gamma$ . Bis auf biholomorphe Äquivalenz gibt es zum Geschlecht  $g = 0$  also nur eine kompakte Riemann'sche Fläche nämlich die Riemann'sche Zahlkugel. In diesem Kapitel wollen wir nun der Frage nachgehen, wie sich dies für  $g \geq 1$  verhält. Hierzu betrachtet man klassischerweise den Modulraum  $\mathcal{M}_g$  zum Geschlecht  $g$ , d.h. die Menge aller kompakten Riemann'schen Fläche zum Geschlecht  $g$ , wobei je zwei Riemann'sche Flächen identifiziert werden, wenn diese biholomorph äquivalent zueinander sind.

Im ersten Teil dieses Kapitels betrachten wir zunächst gesondert den Fall  $g = 1$  und werden sehen, dass es hier möglich ist  $\mathcal{M}_1$  zu bestimmen. In diesem Zusammenhang werden wir dann ebenfalls den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_1$  von Tori bestimmen.

Im Fall  $g \geq 2$  ist es leider nicht mehr so leicht möglich  $\mathcal{M}_g$  zu berechnen, weshalb man sich auf die Teichmüllerräume  $\mathcal{T}_g$  konzentriert. Für diese werden wir dann im zweiten Teil dieses Kapitels die sogenannten Fenchel-Nielsen Koordinaten einführen.

### 4.1. Teichmüllerraum von Tori

Die Primärquelle für diesen Abschnitt ist [IT92, Kap. 1.2].

#### 4.1.1. Der Modulraum von Tori

Wir wollen hier nun der Frage nachgehen, wann je zwei Tori zueinander biholomorph äquivalent sind.

**Bemerkung 4.1.1.** Jeder Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  mit Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$  ist biholomorph äquivalent zu einem Torus  $R_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$  für ein  $\tau \in \mathbb{H}$ .

Hierbei definiert man für  $\tau \in \mathbb{H}$ :  $\Lambda_\tau := \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$

*Beweis.* Ohne Einschränkung, kann man verlangen, dass  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  liegen soll, da mit  $\omega_1, \omega_2$  auch  $\pm\omega_1, \pm\omega_2$  Erzeuger für  $\Lambda$  sind. Dann setzen wir  $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  und betrachten die Abbildungen

$$\psi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_\tau, z + \Lambda \mapsto z/\omega_2 + \Lambda_\tau$$

und

$$\varphi : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda, z + \Lambda_\tau \mapsto \omega_2 z + \Lambda$$

$\psi$  und  $\varphi$  sind wohldefiniert, denn:

$$\psi(z + \omega + \Lambda) = z/\omega_2 + a(\omega_1/\omega_2) + b(\omega_2/\omega_2) + \Lambda_\tau = z/\omega_2 + \Lambda_\tau = \psi(z + \Lambda)$$

mit  $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 \in \Lambda$  und

$$\varphi(z + \theta + \Lambda_\tau) = \omega_2 z + c\omega_2(\omega_1/\omega_2) + d\omega_2 + \Lambda = \omega_2 z + \Lambda = \varphi(z + \Lambda_\tau)$$

mit  $\theta = c\tau + d \in \Lambda_\tau$ . Offenbar gilt dann  $\varphi \circ \psi = id$  und  $\psi \circ \varphi = id$ . Sind  $(\mathbb{C}, \pi, \mathbb{C}/\Lambda)$  und  $(\mathbb{C}, \pi', \mathbb{C}/\Lambda_\tau)$  die korrespondierenden universellen Überlagerungen, dann kommutiert das folgende Diagramm, wobei  $\tilde{\psi}(z) := z/\omega_2$  und  $\tilde{\varphi}(z) := \omega_2 z$ :

#### 4. Teichmüllerräume

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightleftharpoons[\tilde{\varphi}]{\tilde{\psi}} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
 \mathbb{C}/\Lambda & \xrightleftharpoons[\varphi]{\psi} & \mathbb{C}/\Lambda_\tau
 \end{array}$$

Weil  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  ganze Funktionen sind und  $\pi, \pi'$  lokal biholomorph sind, überprüft man leicht auf hinreichend kleinen Umgebungen, dass  $\varphi$  und  $\psi$  holomorph sind.  $\square$

Im Folgenden bezeichne  $\pi_\tau : \mathbb{C} \rightarrow R_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau, z \mapsto [z]$  die Projektion (bzw. die universelle Überlagerung).

**Satz 4.1.2.** *Für je zwei Punkte  $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$  sind die zwei Tori  $R_\tau$  und  $R_{\tau'}$  genau dann biholomorph äquivalent, wenn es  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $ad - bc = 1$  gibt, so dass*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (4.1)$$

*Beweis.* Zunächst sei  $f : R_{\tau'} \rightarrow R_\tau$  eine biholomorphe Abbildung. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $f([0]) = [0]$  gilt, weil man ansonsten die ebenfalls biholomorphe Abbildung  $g([z]) := f([z]) - f([0])$  betrachten könnte. Dann gibt es nach dem Monodromiesatz einen Lift  $\tilde{f}$  von  $f$  mit  $\tilde{f}(0) = 0$ , d.h.  $\pi_\tau \circ \tilde{f} = f \circ \pi_{\tau'}$ . Weil  $f$  biholomorph ist, ist auch  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  biholomorph. Da alle Automorphismen von  $\mathbb{C}$  affin lineare Transformationen sind, gibt es  $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}$ , so dass  $\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta$ . Wegen  $\tilde{f}(0) = 0$ , ist  $\beta = 0$ . Ferner gilt, weil  $[\tau'] = [1] = [0]$  und  $f([0]) = [0]$ :

$$\tilde{f}(\tau') = \alpha\tau' = a\tau + b \in \Lambda_\tau$$

$$\tilde{f}(1) = \alpha = c\tau + d \in \Lambda_\tau$$

Somit erhält man:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Wendet man dasselbe Argument auf  $\tilde{f}^{-1}$  so ergibt sich

$$\tilde{f}^{-1}(\tau) = \alpha^{-1}\tau = a'\tau' + b' \in \Lambda_{\tau'}$$

$$\tilde{f}^{-1}(1) = \alpha^{-1} = c'\tau' + d' \in \Lambda_{\tau'}$$

und analog

$$\tau = \frac{a'\tau' + b'}{c'\tau' + d'}$$

Interpretiert man  $\tilde{f} : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -linearen Vektorraumisomorphismus so erhält man bzgl. der Basen  $(\tau', 1)$  bzw.  $(\tau, 1)$ :

$$1 = \det(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}) = \left| \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = (a'd' - b'c')(ad - bc)$$

Weil  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$  und  $\pm 1$  die einzigen Einheiten in  $\mathbb{Z}$  sind, muss somit  $ad - bc = a'd' - b'c' = \pm 1$  gelten. Aus

$$\operatorname{Im} \tau' = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \underbrace{(\operatorname{Im} \tau)}_{>0} > 0$$

folgt dann wie gewünscht  $ad - bc = a'd' - b'c' = 1$ .

Umgekehrt gelte nun (4.1). Betrachte die Abbildungen

$$f : R_{\tau'} \rightarrow R_{\tau}, [z] \mapsto [(c\tau + d)z]$$

$$g : R_{\tau} \rightarrow R_{\tau'}, [z] \mapsto [(c\tau + d)^{-1}z]$$

Wegen  $ad - bc = 1$  hat man  $c\tau + d \neq 0$ . Wie im Beweis zu Bemerkung 4.1.1 rechnet man dann nach, dass  $f, g$  wohldefiniert, invers zueinander und holomorph sind. Also ist  $f$  biholomorph und deshalb  $R_{\tau} \cong R_{\tau'}$ .  $\square$

Analog zu Satz 2.1.17 definieren wir nun:

**Definition 4.1.3.**

$$PSL(2; \mathbb{Z}) := SL(2; \mathbb{Z}) / \{\pm E\}$$

wobei

$$SL(2; \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid ad - bc = \pm 1 \right\}$$

**Definition 4.1.4.** Sei  $\tilde{\mathcal{M}}_1$  die Menge aller Tori. Auf  $\tilde{\mathcal{M}}_1$  ist dann durch

$$T_1 \sim T_2 :\Leftrightarrow \exists f : T_1 \rightarrow T_2 \text{ biholomorph} \quad (T_1, T_2 \in \mathcal{M}_1)$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Menge  $\mathcal{M}_1 := \tilde{\mathcal{M}}_1 / \sim$  bezeichnet man als den *Modulraum von Tori*.

Der Modulraum von Tori gibt also an "wie viele echt verschiedene" komplexe Strukturen es auf einem Torus gibt. Aus dem bisher gezeigten ergibt sich nun direkt:

**Satz 4.1.5.** *Es gibt eine Bijektion zwischen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathbb{H}/PSL(2; \mathbb{Z})$ , wobei  $PSL(2; \mathbb{Z})$  via Möbiustransformation auf  $\mathbb{H}$  operiert.*

#### 4.1.2. Der Teichmüllerraum von Tori

Wir wollen hier nun den Teichmüllerraum von Tori einführen, indem wir gewisse Erzeugendensysteme der Fundamentalgruppe eines Torus betrachten. Dies ist aufgrund der einfachen Gestalt der Fundamentalgruppe eines Torus besonders praktisch. In Abschnitt 4.2 werden wir dann jedoch eine andere Definition für Teichmüllerräume höheren Geschlechtes geben. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die beiden Definitionen sich im wesentlichen nicht unterscheiden (siehe [IT92, Thm. 1.3.]).

**Definition 4.1.6.** Sei  $R$  ein Torus,  $p \in R$  und  $[A], [B]$  die Erzeuger von  $\pi_1(R, p)$ .  $R$  lässt sich nach Satz 3.1.7 mit einem  $\mathbb{C}/\Lambda$  durch eine biholomorphe Abbildung  $\psi : R \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  identifizieren. Das Paar  $([A], [B])$  heißt nun *positiv orientiertes Erzeugendensystem* von  $\pi_1(R, p)$ , wenn  $\Xi(\psi_*([A]))/\Xi(\psi_*([B])) \in \mathbb{H}$  gilt, wobei  $\Xi$  die Gitterkorrespondenz bzgl.  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  ist.

*Anmerkung.* Apriori ist nicht klar, weshalb obige Definition wohldefiniert ist, da man sich ein  $\mathbb{C}/\Lambda$  wählt und  $\Xi$  von der konkreten Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  abhängt. Dies klärt das folgende Lemma.

**Lemma 4.1.7.** *Seien  $\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{C}/\Lambda'$  zwei Tori mit den zugehörigen Projektionen  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  bzw.  $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  und  $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  biholomorph. Weiter seien  $\Xi$  bzw.  $\Xi'$  die Gitterkorrespondenzen bzgl.  $\pi$  bzw.  $\pi'$ ,  $p_0 \in \mathbb{C}/\Lambda$  und  $([A], [B])$  ein Erzeugendensystem von  $\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda, p_0)$ . Dann gilt:*

$$\frac{\Xi([A])}{\Xi([B])} = \frac{\Xi'(h_*([A]))}{\Xi'(h_*([B]))}$$

*Insbesondere ist der Begriff eines positiv orientierten Erzeugendensystems wohldefiniert.*

#### 4. Teichmüllerräume

*Beweis.* Wir setzen  $q_0 := h(p_0) \in \mathbb{C}/\Lambda'$  und wählen  $p \in \pi^{-1}(p_0)$  und  $q \in \pi'^{-1}(q_0)$ . Nach dem Monodromiesatz gibt es einen biholomorphen Lift  $\tilde{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $h$  mit  $\tilde{h}(p) = q$ .  $\tilde{h}$  ist also ein Automorphismus von  $\mathbb{C}$  und lässt sich deshalb als  $\tilde{h}(z) = az + b$  mit  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$  schreiben. Wie in Beispiel 1.3.23 gilt nun  $\Xi([A]) = \tilde{A}_p(1) - \tilde{A}_p(0)$  und  $\Xi'(h_*([A])) = \widetilde{h(\tilde{A})}_q(1) - \widetilde{h(\tilde{A})}_q(0)$  (und analog für  $B$ ), wobei  $\tilde{A}_p$  der Lift von  $A$  bei  $p$  bzgl.  $\pi$  und  $\widetilde{h(\tilde{A})}_q$  der Lift von  $h \circ A$  bei  $q$  bzgl.  $\pi'$  ist. Dann ist auch  $\tilde{h} \circ \tilde{A}_p$  ein Lift von  $h \circ A$  bei  $q$  bzgl.  $\pi'$  und deshalb wegen der Eindeutigkeit  $\tilde{h} \circ \tilde{A}_p = \widetilde{h(\tilde{A})}_q$ . Eine analoge Argumentation für  $B$  ergibt  $\widetilde{h(\tilde{B})}_q = \tilde{h} \circ \tilde{B}_p$  mit den entsprechenden Bezeichnungen. Daraus folgt nun:

$$\begin{aligned} \frac{\Xi'(h_*([A]))}{\Xi'(h_*([B]))} &= \frac{\widetilde{h(\tilde{A})}_q(1) - \widetilde{h(\tilde{A})}_q(0)}{\widetilde{h(\tilde{B})}_q(1) - \widetilde{h(\tilde{B})}_q(0)} = \frac{\tilde{h}(\tilde{A}_p(1)) - \tilde{h}(\tilde{A}_p(0))}{\tilde{h}(\tilde{B}_p(1)) - \tilde{h}(\tilde{B}_p(0))} \\ &= \frac{a\tilde{A}_p(1) + b - a\tilde{A}_p(0) - b}{a\tilde{B}_p(1) + b - a\tilde{B}_p(0) - b} = \frac{a\Xi([A])}{a\Xi([B])} = \frac{\Xi([A])}{\Xi([B])} \end{aligned}$$

Um nun einzusehen, dass daraus die Wohldefiniertheit folgt, sei  $R$  ein Torus,  $\psi : R \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ ,  $\psi' : R \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  biholomorph,  $([A], [B])$  ein Erzeugendensystem von  $\pi_1(R, p)$  mit  $p \in R$  und  $\Xi$  bzw.  $\Xi'$  die Gitterkorrespondenzen zu  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  bzw.  $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ . Dann ist  $h := \psi' \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  biholomorph und es gilt  $\psi_*([A]) = (h_* \circ \psi_*)([A])$  und  $\psi_*([B]) = (h_* \circ \psi_*)([B])$ . Ist nun  $\Xi(\psi_*([A]))/\Xi(\psi_*([B])) \in \mathbb{H}$ , so folgt aus dem eben gezeigten:

$$\frac{\Xi'(\psi_*([A]))}{\Xi'(\psi_*([B]))} = \frac{\Xi'(h_*(\psi_*([A])))}{\Xi'(h_*(\psi_*([B])))} = \frac{\Xi(\psi_*([A]))}{\Xi(\psi_*([B]))} \in \mathbb{H}$$

Also kommt es nicht auf die Wahl der Identifikation  $\psi : R \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  in der Definition an. □

**Definition 4.1.8** (Markierung). Sei  $R$  ein Torus,  $p \in R$  und  $G_p = ([A], [B])$  ein positiv orientiertes Erzeugendensystem von  $\pi_1(R, p)$ . So ein  $G_p$  nennt man dann eine *Markierung* auf  $R$ . Zwei Markierungen  $G_p = ([A], [B])$  und  $G_{p'} = ([A'], [B'])$  ( $p' \in R$ ), heißen *äquivalent*, wenn es einen Weg  $\gamma$  von  $p$  nach  $p'$  in  $R$  gibt, so dass für den Isomorphismus  $\beta_\gamma : \pi_1(R, p) \rightarrow \pi_1(R, p')$ ,  $[C] \mapsto [\gamma^{-1} \cdot C \cdot \gamma]$  (vgl. Lemma 1.2.9) gilt:

$$\beta_\gamma([A]) = [A'], \quad \beta_\gamma([B]) = [B']$$

**Bemerkung 4.1.9.** Die obige Äquivalenz ist invariant unter Translation, d.h.:

Sei  $G_{[p]} = ([A], [B])$  eine Markierung auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  und  $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ ,  $[z] \mapsto [z] + [a]$  mit  $a \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $G_{[p]}$  äquivalent zu  $h_*(G_{[p]}) = (h_*([A]), h_*([B]))$ .

*Beweis.* Wir betrachten die kanonische Projektion/universelle Überlagerung  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ . Setze nun  $q := p + a$  und:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto p(1-t) + tq$$

Wir wollen nun zeigen, dass für  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  gilt:

$$\beta_\gamma([A]) = h_*([A]) \quad \text{und} \quad \beta_\gamma([B]) = h_*([B])$$

Sei  $\tilde{A}_p$  der Lift von  $A$  bei  $p$  und  $\widetilde{h(\tilde{A})}_q := \tilde{A}_p + a$  der Lift von  $h(A)$  bei  $q$ . Korrespondiert  $[A]$  zu  $\omega_1 \in \Lambda$  so ist  $\tilde{\gamma}' := \tilde{\gamma} + \omega_1$  ein Lift von  $\gamma$  bei  $\tilde{A}_p(1) = p + \omega_1$ . Weil  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist, gilt

$$[\tilde{A}_p \cdot \tilde{\gamma}' \cdot \widetilde{h(\tilde{A})}_q^{-1} \cdot \tilde{\gamma}^{-1}] = 1$$



Damit dann auch unter Anwendung von  $\pi$ :

$$\begin{aligned} [A \cdot \gamma \cdot h(A)^{-1} \cdot \gamma^{-1}] &= 1 \\ \Leftrightarrow h_*([A]) &= [\gamma^{-1} \cdot A \cdot \gamma] = \beta_\gamma([A]) \end{aligned}$$

Analog schließt man für  $h_*([B])$ . □

**Definition 4.1.10** (Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_1$ ). Seien  $R$  und  $S$  zwei Tori und  $G_p = ([A], [B])$  eine Markierung auf  $R$  und  $G_q = ([A'], [B'])$  eine Markierung auf  $S$ . Die Paare  $(R, G_p)$  und  $(S, G_q)$  heißen *äquivalent*, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $h : S \rightarrow R$  gibt, so dass  $h_*(G_q) := (h_*([A']), h_*([B']))$  äquivalent zu  $G_p = ([A], [B])$  ist.

Mit  $[R, G_p]$  bezeichnet man dann die Äquivalenzklasse von  $(R, G_p)$  und nennt diese einen *markierten Torus*. Der *Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_1$  von Tori* ist nun die Menge aller markierten Tori.

**Satz 4.1.11.** Für jedes  $\tau \in \mathbb{H}$  sei  $G(\tau) = (A(\tau), B(\tau))$  die Markierung auf  $R_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$  (bei  $[0]$ ), für welche  $[A(\tau)]$  zu  $\tau$  und  $[B(\tau)]$  zu 1 in  $\Lambda_\tau$  korrespondiert, d.h.  $\Xi([A]) = \tau$  und  $\Xi([B]) = 1$  für die Gitterkorrespondenz  $\Xi$  bzgl.  $\pi_\tau$ . Dann gilt für alle  $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ :

$$[R_\tau, G(\tau)] = [R_{\tau'}, G(\tau')] \Leftrightarrow \tau = \tau'$$

*Beweis.* Zunächst gelte  $[R_\tau, G(\tau)] = [R_{\tau'}, G(\tau')]$ . Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung  $h : R_{\tau'} \rightarrow R_\tau$ , so dass  $h_*(G(\tau'))$  äquivalent zu  $G(\tau)$  ist. Wieder darf man o.B.d.A. annehmen, dass  $h([0]) = [0]$  gilt, da man sonst  $h$  durch  $h_1([z]) = h([z]) - h([0])$  ersetzen könnte und Äquivalenz nach Bemerkung 4.1.9 invariant unter Translation ist. Also gibt es eine Kurve  $\gamma$  von  $[0]$  nach  $[0]$  in  $R_\tau$  (insb.  $[\gamma] \in \pi_1(R_\tau, [0])$ ), so dass  $h_*([A(\tau')]) = \beta_\gamma([A(\tau)])$  und  $h_*([B(\tau')]) = \beta_\gamma([B(\tau)])$ , d.h.:

$$h_*([A(\tau')]) = [\gamma^{-1} \cdot A(\tau) \cdot \gamma] = [\gamma^{-1}] \cdot [A(\tau)] \cdot [\gamma] =^{\text{abelsch}} [A(\tau)]$$

bzw.

$$h_*([B(\tau')]) = [\gamma^{-1} \cdot B(\tau) \cdot \gamma] = [\gamma^{-1}] \cdot [B(\tau)] \cdot [\gamma] =^{\text{abelsch}} [B(\tau)]$$

Sei nun  $\Xi$  die Gitterkorrespondenz bzgl.  $\pi_\tau$  und  $\Xi'$  die bzgl.  $\pi_{\tau'}$ . Dann können wir Lemma 4.1.7 anwenden und erhalten:

$$\tau = \frac{\Xi([A(\tau)])}{\Xi([B(\tau)])} = \frac{\Xi(h_*([A(\tau')]))}{\Xi(h_*([B(\tau')]))} = \frac{\Xi'([A(\tau')])}{\Xi'([B(\tau')])} = \tau'$$

Die andere Richtung ist trivial. □

**Korollar 4.1.12.**  $\mathcal{T}_1$  lässt sich mit  $\mathbb{H}$  identifizieren.

*Beweis.* Sei  $R$  ein Torus mit einer Markierung  $G_p = ([A], [B])$ . Es gibt nun nach Satz 3.1.7 eine biholomorphe Abbildung  $h : R \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  mit  $h(p) = [0]$  (nehme sonst  $h'(x) = h(x) - h(p)$ ). Setze  $G' := h_*(G_p)$ . Dann ist offensichtlich das Paar  $(R, G_p)$  äquivalent zu  $(\mathbb{C}/\Lambda, G')$ . Betrachte nun die Abbildung  $g : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_\tau, [z] \mapsto [z/\omega_2]$ , wobei  $h_*([B])$  zu  $\omega_2$  und  $h_*([A])$  zu  $\omega_1$  korrespondiere (vgl. Bem. 4.1.1). Dann gilt  $(g \circ h)_*([A]) \in \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, [0])$  korrespondiert zu  $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  und  $(g \circ h)_*([B]) \in \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, [0])$  korrespondiert zu 1. Wir befinden uns also in der Situation von Satz 4.1.11, welcher besagt, dass das so gefunden  $\tau$  eindeutig ist. Also erhält man eine Bijektion:

$$\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{H}$$

□

## 4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes

Die Primärquelle für diesen Abschnitt ist [Bus92] und [Jos06, § 4.3].

### 4.2.1. Motivation und Definition von Teichmüllerräumen

In diesem Abschnitt wollen wir uns dafür interessieren, wie viele "verschiedene" kompakte Riemann'sche Flächen mit Geschlecht  $g \geq 2$  gibt. Im Folgenden sei deshalb  $g \geq 2$ . Um zu präzisieren, was mit "verschieden" gemeint ist, machen wir folgende Definition (in Analogie zu Definition 4.1.4).

**Definition 4.2.1** (Modulraum  $\mathcal{M}_g$ ). Zunächst betrachten wir die Menge  $\tilde{\mathcal{M}}_g$  aller kompakten Riemann'schen Flächen. Wir führen nun folgende Äquivalenzrelation ein:

$$R \sim' S \quad :\Leftrightarrow \quad \exists h : R \rightarrow S \text{ biholomorph}$$

Zwei Riemann'sche Flächen  $R$  und  $S$  werden also miteinander identifiziert, wenn die beiden Riemann'schen Flächen biholomorph äquivalent sind. Die so entstehende Menge  $\tilde{\mathcal{M}}_g / \sim'$  nennt man den *Modulraum*  $\mathcal{M}_g$  zum Geschlecht  $g$ .

Es lässt sich nun eine Topologie auf  $\mathcal{M}_g$  einführen (siehe [Jos06, § 4.2]). Diese ist jedoch recht kompliziert, so dass  $\mathcal{M}_g$  beispielsweise keine Mannigfaltigkeit mehr ist. Aus diesem Grund wollen wir eine schwächere Identifikation zweier Riemann'scher Flächen betrachten und hoffen, dass der dabei entstehende Raum eine einfachere Struktur hat als  $\mathcal{M}_g$ .

Um diese schwächere Identifikation zu motivieren wollen wir zunächst  $\mathcal{M}_g$  etwas anders verstehen. Wir wissen bereits, dass jede kompakte Riemann'sche Fläche homöomorph zu  $S_g$  ist. Also können wir anstatt  $\mathcal{M}_g$  wie oben genauso gut die Menge aller komplexen Strukturen  $\Sigma$  auf  $S_g$  betrachten, wobei je zwei dieser Strukturen  $\Sigma_1, \Sigma_2$  miteinander identifiziert werden, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $h : (S_g, \Sigma_1) \rightarrow (S_g, \Sigma_2)$  gibt. Wir wollen nun etwas mehr fordern, um zwei komplexe Strukturen miteinander zu identifizieren. Es soll nämlich nicht nur eine biholomorphe Abbildung von  $(S_g, \Sigma_1)$  nach  $(S_g, \Sigma_2)$  existieren, sondern diese soll auch homotop zur Identität sein. Die Äquivalenzklasse eines Tupels  $(S_g, \Sigma)$  wollen wir mit  $[S_g, \Sigma]$  und die Menge aller solcher Äquivalenzklassen mit  $\mathcal{T}'_g$  bezeichnen. Dieses Konzept lässt sich nun in unseren ursprünglichen Kontext übertragen.

Hierzu betrachtet man Tupel  $(R, f)$ , wobei  $R$  eine kompakte Riemann'sche Fläche vom Geschlecht  $g$  und  $f : S_g \rightarrow R$  ein Homöomorphismus ist. Die Menge aller solcher Tupel wollen wir mit  $\tilde{\mathcal{T}}_g$  bezeichnen.  $f$  wird in diesem Zusammenhang auch *Markierung* genannt. Auf  $\tilde{\mathcal{T}}_g$  führen wir nun die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$(R, f_1) \sim (S, f_2) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k : R \rightarrow S \text{ biholomorph und } k \simeq f_2 \circ f_1^{-1}$$

Die Äquivalenzklasse eines Tupels bzgl. obiger Äquivalenzrelation bezeichnen wir mit  $[R, f]$  und die Menge aller Äquivalenzklassen mit  $\mathcal{T}_g = \tilde{\mathcal{T}}_g / \sim$ .

Diese Äquivalenzrelation stimmt insofern mit unserer Motivation überein, als dass man via der Abbildung

$$\Phi : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{T}'_g, [R, f] \mapsto [S_g, f^*(\Sigma_R)]$$

eine Bijektion erhält, wobei  $\Sigma_R$  die komplexe Struktur auf  $R$  bezeichne. Wir definieren also:

**Definition 4.2.2** (Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_g$ ).<sup>1</sup> Die oben definierte Menge  $\mathcal{T}_g$  nennt man den *Teichmüllerraum zum Geschlecht  $g$* .

<sup>1</sup>Es lässt sich zeigen, dass diese Definition von Teichmüllerräumen konsistent mit der Definition von  $\mathcal{T}_1$  im ersten Teil dieses Kapitels ist (siehe [IT92, Thm. 1.3.]).

## 4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes

Im Rest dieses Kapitels werden wir nun das Ziel verfolgen eine Bijektion zwischen  $\mathcal{T}_g$  und  $(\mathbb{R}_+)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$  zu konstruieren; die sogenannten *Fenchel-Nielsen Koordinaten*. Dazu werden wir jedoch noch etwas Geometrie benötigen.

Da wir hier kompakte Riemann'sche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  betrachten, wissen wir, dass diese von der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  überlagert werden. Wie wir bereits in Kapitel 2 gesehen haben gibt es auf  $\mathbb{H}$  die sogenannte hyperbolische Metrik, welche als Isometriegruppe gerade alle Automorphismen von  $\mathbb{H}$  hat. Wir können nun auf einer kompakten Riemann'schen Fläche  $R$  mit Geschlecht  $g \geq 2$  mittels der universellen Überlagerung  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow R$  eine Metrik definieren.  $\pi$  ist lokal biholomorph und wir finden deshalb um jeden Punkt  $p \in R$  eine offene Umgebung  $U$ , welche gleichmäßig überlagert wird. Sei nun  $V \subseteq \mathbb{H}$  ein Blatt über  $U$ , so dass  $\pi|_V : V \rightarrow U$  biholomorph ist und  $q \in V$  mit  $\pi(q) = p$ . Dann ist offenbar  $(U, \pi|_V^{-1})$  eine Karte auf  $R$  um  $p$ . Wir definieren nun auf  $T_p R$  mittels dieser Karte ein Skalarprodukt, indem wir setzen

$$\langle u, v \rangle_p := \langle u(U, \pi|_V^{-1}), v(U, \pi|_V^{-1}) \rangle_q^{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in T_p R$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q^{\mathbb{H}}$  die hyperbolische Metrik im Punkt  $q \in \mathbb{H}$  auf  $\mathbb{H}$  bezeichne. Es ist nun noch zu zeigen, dass dieses Skalarprodukt wohldefiniert ist, das heißt unabhängig von der gewählten gleichmäßig überlagerten offenen Umgebung  $U$  um  $p$  und dem gewählten Blatt  $V$  über  $p$ . Sei also  $U'$  eine weitere gleichmäßig überlagerte offene Umgebung um  $p$ ,  $V'$  ein Blatt über  $U'$  und  $q' \in V'$  mit  $\pi(q') = p$ . Dann gibt es eine eindeutige Decktransformation  $\gamma \in \text{Deck}(\pi) \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ , so dass  $\gamma(q) = q'$ . Wegen  $\pi \circ \gamma = \pi$  und  $\pi|_V, \pi|_{V'}$  biholomorph, ist dann  $\pi|_{V'}^{-1} \circ \pi|_V = \gamma$  auf  $V \cap \pi^{-1}(U')$  und daher:

$$\langle u(U', \pi|_{V'}^{-1}), v(U', \pi|_{V'}^{-1}) \rangle_{q'}^{\mathbb{H}} = \langle \gamma'(q)u(U, \pi|_V^{-1}), \gamma'(q)v(U, \pi|_V^{-1}) \rangle_q^{\mathbb{H}} = \langle u(U, \pi|_V^{-1}), v(U, \pi|_V^{-1}) \rangle_q^{\mathbb{H}}$$

Also ist dieses Skalarprodukt wohldefiniert. Wir wollen im Folgenden jede kompakte Riemann'sche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  mit dieser *hyperbolischen Metrik* versehen betrachten.

Bezüglich dieser Metrik wird nun offensichtlich die universelle Überlagerung lokal isometrisch. Hat man nun eine biholomorphe Abbildung  $f : R \rightarrow S$  zwischen zwei kompakten Riemann'schen Flächen mit Geschlecht  $g \geq 2$ , so folgt aus dem Monodromiesatz, dass sich diese zu einer biholomorphen Abbildung zwischen den universellen Überlagerungen liften lässt, d.h. zu einem Automorphismus von  $\mathbb{H}$ . Da alle Automorphismen von  $\mathbb{H}$  jedoch Isometrien bzgl. der hyperbolischen Metrik und die Überlagerungen  $\pi_1 : \mathbb{H} \rightarrow R$ ,  $\pi_2 : \mathbb{H} \rightarrow S$  lokal isometrisch sind, folgt, dass  $f : R \rightarrow S$  eine Isometrie bzgl. der oben eingeführten hyperbolischen Metriken auf  $R$  und  $S$  ist. Weil jede Isometrie nach Definition auch biholomorph sein muss, haben wir gezeigt, dass alle biholomorphen Abbildungen bereits Isometrien bzgl. der hyperbolischen Metrik sind.

**Satz 4.2.3.** *Seien  $R, S$  kompakte Riemann'sche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Dann sind die biholomorphen Abbildungen von  $R$  nach  $S$  gerade alle Isometrien von  $R$  nach  $S$ .*

Wir wollen nun sogenannte hyperbolische Flächen einführen, welche die konkrete Situation auf kompakten Riemann'schen Flächen verallgemeinern. Später werden wir sehen, dass kompakte Riemann'sche Flächen dann ähnliche wie oben auf ganz natürliche Weise zu hyperbolischen Flächen (ohne Rand) werden.

### 4.2.2. Hyperbolische Flächen

**Definition 4.2.4.** Sei  $(R, \Sigma)$  eine Riemann'sche Fläche. Einen Atlas  $\mathcal{H} \subseteq \Sigma$  von  $R$  nennt man *hyperbolisch*, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:

- (i)  $\phi(U) \subseteq \mathbb{H}$  für alle  $(U, \phi) \in \mathcal{H}$

#### 4. Teichmüllerräume

- (ii) Sind  $(U, \phi), (U', \phi') \in \mathcal{H}$ , so gibt es für jede Zusammenhangskomponente  $V$  von  $U \cap U'$  einen Automorphismus/eine Isometrie  $\Psi \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ , so dass  $\phi' \circ \phi^{-1}$  auf  $\phi(V)$  mit  $\Psi$  übereinstimmt. In diesem Fall nennt man  $(U, \phi), (U', \phi')$  *hyperbolisch kompatibel*.

Zwei hyperbolische Atlanten  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  auf  $R$  heißen *äquivalent*, wenn  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$  ebenfalls ein hyperbolischer Atlas auf  $R$  ist. Zu einem hyperbolischen Atlas  $\mathcal{H}$  auf  $R$  findet man dann auch einen maximalen hyperbolischen eindeutigen Atlas  $\mathfrak{H}(\mathcal{H})$ , der  $\mathcal{H}$  enthält. Ein maximaler hyperbolischer Atlas  $\mathfrak{H}$  auf  $R$  nennt man *hyperbolische Struktur* auf  $R$ . Das Paar  $(R, \mathfrak{H})$  nennt man dann (*unberandete*) *hyperbolische Fläche*.

**Beispiel 4.2.5.** Sei  $(R, \Sigma)$  eine kompakte Riemann'sche Fläche mit Geschlecht  $g \geq 2$ . Wie wir bereits wissen, gibt es dann eine universelle Überlagerung  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow R$ . Da  $\pi$  lokal biholomorph ist, können wir spezielle Karten auf  $R$  betrachten. Sei  $p \in R$  und  $U \subseteq R$  eine gleichmäßig überlagerte offene Umgebung von  $p$ . Wir betrachten nun ein Blatt  $V \subseteq \mathbb{H}$  über  $U$ . Dann ist  $\pi|_V : V \rightarrow U$  biholomorph und wir definieren die Karte  $\phi := \pi|_V^{-1} : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}$ .  $(U, \phi)$  ist dann bereits in der komplexen Struktur  $\Sigma$  von  $R$  enthalten, da  $\pi|_V$  biholomorph ist.

Seien nun  $\phi = \pi|_V^{-1} : U \rightarrow V$  und  $\psi = \pi|_{V'}^{-1} : U' \rightarrow V'$  zwei solche Karten um  $p$ . Wir betrachten den Kartenwechsel  $\psi \circ \phi^{-1} = \pi|_{V'} \circ \pi|_V^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \psi(U \cap U')$ . Dann gibt es ein  $\gamma \in \text{Deck}(\pi) \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ , so dass  $\gamma(\phi(p)) = \psi(p)$  gilt. Wegen  $\pi \circ \gamma = \pi$  stimmen dann  $\gamma$  und  $\psi \circ \phi^{-1}$  auf  $\phi(U \cap U')$  überein und somit sind  $(U, \phi)$  und  $(U', \psi)$  hyperbolisch kompatibel.

Die so konstruierten Karten bilden also einen hyperbolischen Atlas auf  $R$ . Dieser lässt sich dann zu einem eindeutigen maximalen hyperbolischen Atlas erweitern und wir erhalten eine hyperbolische Struktur  $\mathfrak{H}$  auf  $R$ .

Jede Riemann'sche Fläche  $(R, \Sigma)$  mit Geschlecht  $g \geq 2$  ist also in kanonischerweise auch eine hyperbolische Fläche  $(R, \mathfrak{H})$ .

Man möchte nun dieses Konzept der unberandeten hyperbolischen Fläche auch auf Flächen mit Rand übertragen. Hierzu müssen wir zunächst Prototypen für die lokale Gestalt des Randes einer solchen berandeten hyperbolischen Fläche einführen. Um dies möglichst elegant formulieren zu können, führen wir zunächst sogenannte *Polarkoordinaten* auf  $\mathbb{H}$  ein.

**Definition 4.2.6** (Polarkoordinaten). Sei  $p_0 \in \mathbb{H}$  und  $v_0 \in \mathbb{C} \cong T_{p_0}\mathbb{H}$  ein Tangentialvektor bei  $p_0$  mit hyperbolischer Länge  $\|v_0\|_{p_0} = 1$ . Wir definieren nun die Polarkoordinaten zur Basis  $(p_0, v_0)$ :

$$P_{(p_0, v_0)} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}, \quad P_{(p_0, v_0)}(r, \vartheta) := \gamma^*(r; 0, p_0, \exp(i\vartheta) \cdot v_0)$$

Hierbei ist  $t \mapsto \gamma^*(t; t_0, z_0, v_0)$  wie in Satz 2.2.17 die globale Geodätische zu den Anfangswerten  $z_0, v_0$  an der Stelle  $t_0$ .

Die Prototypen für die lokale Gestalt berandeter hyperbolischer Flächen werden nun sogenannte *Kreissectoren* sein.

**Definition 4.2.7** (Kreissector). Sei  $p_0 \in \mathbb{H}$ . Eine Menge  $V \subset \mathbb{H}$  heißt *Kreissector* um  $p_0$  mit Winkel  $\vartheta \in (0, 2\pi]$ , wenn es einen Tangentialvektor  $v_0 \in \mathbb{C} \cong T_{p_0}\mathbb{H}$  mit hyperbolischer Einheitslänge und  $R > 0$  gibt, so dass

$$V = P_{(p_0, v_0)}([0, R) \times [0, \vartheta])$$

Eine *Halbkreissscheibe* um  $p_0$  ist dann ein Kreissector um  $p_0$  mit Winkel  $\pi$  und eine *Kreissscheibe* um  $p_0$  ein Kreissector um  $p_0$  mit Winkel  $2\pi$ .

Nun sind wir in der Lage hyperbolische Karten zu definieren und aufbauend auf diesen berandete hyperbolische Flächen.

**Definition 4.2.8.** Sei  $X$  ein Hausdorffraum und  $p \in X$ . Eine *hyperbolische Karte* auf  $X$  um  $p$  ist eine Umgebung  $U$  von  $p$  und ein Homöomorphismus  $\phi : U \rightarrow \phi(U) = V \subseteq \mathbb{H}$ , so dass eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- (i)  $V$  ist ein Kreissektor um  $\phi(p)$  mit Winkel  $\vartheta \leq \pi$ .  $p$  heißt dann *Eckpunkt* bzgl.  $(U, \phi)$ .
- (ii)  $V$  ist eine Halbkreisscheibe um  $\phi(p)$ .  $p$  heißt dann *Randpunkt* bzgl.  $(U, \phi)$ .
- (iii)  $V$  ist eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $\phi(p)$ .  $p$  heißt dann *innerer Punkt* bzgl.  $(U, \phi)$ .

**Definition 4.2.9.** Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Zwei hyperbolische Karten  $(U, \phi), (U', \phi')$  um jeweils zwei beliebige Punkte  $p, p' \in X$  heißen *kompatibel*, wenn es für jede Zusammenhangskomponente  $V$  von  $U \cap U'$  einen Automorphismus/eine Isometrie  $\Psi \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$  gibt, so dass  $\phi' \circ \phi^{-1}$  auf  $\phi(V)$  mit  $\Psi$  übereinstimmt.

**Definition 4.2.10.** Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Eine Menge von hyperbolischen Karten  $\mathcal{H}$  heißt *berandeter hyperbolischer Atlas* auf  $X$ , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Zu jedem Punkt  $p \in X$  gibt es eine hyperbolische Karte aus  $\mathcal{H}$  um  $p$ .
- (ii) Es gibt mindestens eine hyperbolische Karte vom Typ (i) oder (ii) aus Definition 4.2.8.
- (iii) Zu jedem Punkt  $p \in X$  gibt es eine Umgebung, so dass es in dieser nur endlich viele Punkte gibt, welche bezüglich einer Karte Eckpunkte sind.
- (iv) Je zwei hyperbolische Karten aus  $\mathcal{H}$  sind kompatibel miteinander.

Zwei berandete hyperbolische Atlanten  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  auf  $X$  heißen *äquivalent*, wenn  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$  ebenfalls ein hyperbolischer Atlas auf  $X$  ist. Zu einem berandeten hyperbolischen Atlas  $\mathcal{H}$  auf  $X$  findet man dann auch einen eindeutigen maximalen berandeten hyperbolischen Atlas  $\mathfrak{H}(\mathcal{H})$ , der  $\mathcal{H}$  enthält. Ein maximaler hyperbolischer Atlas  $\mathfrak{H}$  auf  $X$  nennt man *berandete hyperbolische Struktur* auf  $X$ . Das Paar  $(X, \mathfrak{H})$  nennt man dann *berandete hyperbolische Fläche*.

**Definition 4.2.11.** Sei  $(X, \mathfrak{H})$  eine berandete hyperbolische Fläche und  $p \in X$ .

- (i)  $p$  heißt *Ecke* von  $X$ , wenn  $p$  bzgl. einer (dann jeder!) hyperbolischen Karte  $(U, \phi) \in \mathfrak{H}$  ein Eckpunkt ist. Der Winkel des Kreissektors bei  $\phi(p)$  heißt, dann *Innenwinkel* bei  $p$ .
- (ii)  $p$  heißt *Randpunkt* von  $X$ , wenn  $p$  bzgl. einer (dann jeder!) hyperbolischen Karte  $(U, \phi) \in \mathfrak{H}$  ein Randpunkt ist.
- (iii)  $p$  heißt *innerer Punkt* von  $X$ , wenn  $p$  bzgl. einer (dann jeder!) hyperbolischen Karte  $(U, \phi) \in \mathfrak{H}$  ein innerer Punkt ist.

Die Menge aller Eck- und Randpunkte von  $X$  bezeichnen wir mit  $\partial X$  und die Menge aller inneren Punkte von  $X$  mit  $\text{int } X$ .

*Anmerkung.* Die Eigenschaft ein Eck-, Rand- oder innerer Punkt zu sein ist unabhängig von der Wahl einer hyperbolischen Karte, da wir die Kartenwechsel als Einschränkungen von Isometrien vorausgesetzt haben.

Wir wollen nun um die in Kapitel 1 eingeführten Begriffe in naheliegender Weise auf berandete hyperbolische Flächen übertragen zu können, noch erklären, was es für eine Funktion auf  $\mathbb{H}$  bedeutet in einem Kreissektor differenzierbar/holomorph zu sein. Für die inneren Punkte eines Kreissektors verwenden wir die Standarddefinition. Für einen Randpunkt  $\tau \in \mathbb{H}$  eines Kreissektors sagen wir, dass eine Funktion in  $\tau$  differenzierbar/holomorph ist, wenn es eine Umgebung um  $\tau$  in  $\mathbb{H}$  gibt, so dass sie auf dieser Umgebung differenzierbar/holomorph ist. Nun lassen sich wirklich alle Begriffe (Tangentenraum, Differential, Metrik, etc.) aus Kapitel 1 analog auf berandeten hyperbolischen Flächen definieren und wir wollen diese im Folgenden als gegeben voraussetzen.

#### 4. Teichmüllerräume

*Anmerkung.* Dies geht so problemlos, da wir die Kartenwechselabbildungen als Einschränkungen von Automorphismen von  $\mathbb{H}$  vorausgesetzt haben, d.h. diese insbesondere biholomorph sind.

Dies erlaubt es und im Folgenden etwas ungenau einfach nur von einer hyperbolischen Fläche zu sprechen, wenn es nicht explizit darauf ankommt, ob die Fläche einen Rand besitzt oder nicht.

**Bemerkung 4.2.12.** Jede hyperbolische Fläche  $S$  (egal ob berandet oder unberandet) erhält in kanonischerweise durch  $\mathbb{H}$  eine hyperbolische Riemann'sche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Beweis.* Sei  $p \in S$  und  $(U, \phi)$  eine hyperbolische Karte um  $p$ . Wir definieren nun wie folgt auf  $T_p S$  ein Skalarprodukt:

$$\langle u, v \rangle_p := \langle u(U, \phi), v(U, \phi) \rangle_{\phi(p)}^{\mathbb{H}}$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{H}}$  die hyperbolische Riemann'sche Metrik auf  $\mathbb{H}$  bezeichne. Es ist nun zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der hyperbolischen Karte  $(U, \phi)$  abhängt. Sei also  $(U', \phi')$  eine weitere hyperbolische Karte um  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle u(U, \phi), v(U, \phi) \rangle_{\phi(p)}^{\mathbb{H}} &= \langle (\phi' \circ \phi^{-1})'(\phi(p))u(U', \phi'), (\phi' \circ \phi^{-1})'(\phi(p))v(U', \phi') \rangle_{\phi'(p)}^{\mathbb{H}} \\ &= \langle u(U', \phi'), v(U', \phi') \rangle_{\phi'(p)}^{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

da die Kartenwechsel als Einschränkungen von Isometrien von  $\mathbb{H}$  vorausgesetzt waren. Somit erhalten wir eine wohldefinierte Riemann'sche Metrik auf  $S$ . □

Im Folgenden werden wir jede hyperbolische Fläche mit der so gegebenen hyperbolischen Metrik versehen betrachten. Wir wollen nun noch Geodätische auf hyperbolischen Flächen definieren.

$S$  sei im Folgenden eine hyperbolische Fläche.

**Definition 4.2.13** (Geodätische). Sei  $\gamma : I \rightarrow S$  zweimal stetig differenzierbar, wobei  $I = \mathbb{R}$  oder ein beliebiges nicht degeneriertes Intervall in  $\mathbb{R}$  ist.  $\gamma$  heißt dann *Geodätische* auf  $S$ , wenn für jede hyperbolische Karte  $(U, \phi)$  von  $S$  mit  $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$  gilt:

Für alle nicht degenerierten Intervalle  $J \subseteq I$  mit  $\gamma(J) \subseteq U$  ist  $\phi \circ \gamma|_J : J \rightarrow \mathbb{H}$  eine Geodätische auf  $\mathbb{H}$ .

Wie auch schon in der oberen Halbebene werden wir etwas ungenau auch das Bild  $\gamma(I)$  der Geodätischen mit  $\gamma$  bezeichnen.

**Definition 4.2.14** (geschlossene Geodätische). Eine Geodätische  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$  heißt *geschlossen*, wenn es ein  $a > 0$  gibt, so dass  $\gamma(t) = \gamma(t + a)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Das kleinste  $a > 0$  mit dieser Eigenschaft heißt dann auch *Periode* von  $\gamma$ .

Alternativ wollen wir geschlossene Geodätische auch durch den Quotientenraum  $\mathbb{R}/[t \mapsto t + a]$  parametrisiert erlauben.

Für eine geschlossene Geodätische  $\gamma : \mathbb{R}/[t \mapsto t + a] \rightarrow S$  wollen wir die Länge in naheliegender Weise interpretieren als

$$L(\gamma) = \int_0^a \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

Mit dieser Definition ist es nun klar, dass die Randkurven einer berandeten hyperbolischen Fläche stückweise glatte Geodätische sind.

**Satz 4.2.15.** Seien  $R$  und  $S$  hyperbolische Flächen (evtl. mit Rand) und  $\Phi : R \rightarrow S$  eine lokale Isometrie. Dann gilt:

$\gamma : I \rightarrow R$  ist genau dann eine Geodätische auf  $R$ , wenn  $\Phi \circ \gamma : I \rightarrow S$  eine Geodätische auf  $S$  ist.

## 4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes

*Beweis.* Sei zunächst  $\gamma : I \rightarrow R$  eine Geodätische. Es genügt nun zu zeigen, dass es für jedes  $t \in I$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $\Phi \circ \gamma|_{I_\delta}$  eine Geodätische ist, wobei  $I_\delta := I \cap [t - \delta, t + \delta]$ . Sei also  $t \in I$ . Man findet nun leicht Karten  $(U, \phi)$  auf  $R$  um  $\gamma(t)$  und  $(V, \psi)$  auf  $S$  um  $\Phi(\gamma(t))$ , so dass  $\Phi|_U : U \rightarrow V$  eine Isometrie ist. Weiter gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\gamma(I_\delta) \subseteq U$ . Dann gilt mit  $\hat{\gamma} := \gamma|_{I_\delta}$ :

$$\psi \circ \Phi \circ \hat{\gamma} = (\psi \circ \Phi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \hat{\gamma})$$

Weil  $\psi$ ,  $\Phi|_U$  und mit  $\phi$  auch  $\phi^{-1}$  Isometrien sind und  $\phi \circ \hat{\gamma}$  eine Geodätische in  $\mathbb{H}$  ist, ist nach Satz 2.2.39 auch  $\psi \circ \Phi \circ \hat{\gamma}$  eine Geodätische in  $\mathbb{H}$ . Nach Definition ist also  $\Phi \circ \hat{\gamma}$  eine Geodätische auf  $S$ .

Sei umgekehrt  $\Phi \circ \gamma : I \rightarrow S$  eine Geodätische. Wieder sei  $t \in I$  und wir finden Karten  $(U, \phi)$  auf  $R$  um  $\gamma(t)$  und  $(V, \psi)$  auf  $S$  um  $\Phi(\gamma(t))$ , so dass  $\Phi|_U : U \rightarrow V$  eine Isometrie ist. Damit ist aber auch  $\Phi|_U^{-1} : V \rightarrow U$  eine Isometrie. Nun können wir analog wie oben schließen.  $\square$

**Definition 4.2.16.** Eine hyperbolische Fläche  $S$  wird nun zu einem metrischen Raum mit der üblichen Metrik  $d(.,.)$  (vgl. Kapitel 1).  $S$  heißt dann *vollständig*, wenn  $(S, d)$  als metrischer Raum vollständig ist.

Zuletzt möchten wir noch Winkel auf einer hyperbolischen Fläche definieren.

**Definition 4.2.17.** Sei  $p \in S$ ,  $v, w \in T_p S$  und  $(U, \phi)$  eine hyperbolische Karte von  $S$  um  $p$ . Dann definieren wir den orientierten Winkel zwischen  $v$  und  $w$  bei  $p$  als

$$\angle(v, w) := \angle(v(U, \phi), w(U, \phi))$$

wobei  $\angle(v(U, \phi), w(U, \phi))$  den orientierten Winkel in  $\mathbb{H}$  zwischen  $v(U, \phi), w(U, \phi) \in \mathbb{H}$  bezeichne. Dies ist wohldefiniert, da die Kartenwechsel Einschränkungen von Isometrien auf  $\mathbb{H}$  sind und deshalb Winkel erhalten.

### Konvention:

Wir wollen im Folgenden hyperbolische Flächen immer als vollständig und zusammenhängend verstehen.

### 4.2.3. Operationen auf hyperbolischen Flächen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den grundlegenden Operationen auf hyperbolischen Flächen beschäftigen, da diese bei der Konstruktion der Fenchel-Nielsen-Koordinaten von großer Bedeutung sein werden.

Zunächst möchten wir uns mit dem Verkleben zweier hyperbolischer Flächen befassen. Wir wissen bereits, wie man allgemeine topologische Räume miteinander verklebt. Allerdings ist dies hier nicht so leicht, da wir uns auf hyperbolischen Flächen auch um die hyperbolische Struktur kümmern müssen und wollen, dass die Verklebung zweier oder mehrerer hyperbolischer Flächen ebenfalls wieder eine hyperbolische Fläche ist.

Hierzu betrachtet man zunächst  $S_1, \dots, S_m$  paarweise verschiedene berandete hyperbolische Flächen und  $\gamma_1, \gamma'_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_n$  paarweise verschiedene Seiten von  $S := S_1 \sqcup \dots \sqcup S_m$ . Weiter wollen wir annehmen, dass für jedes  $k$  die Seiten  $\gamma_k$  und  $\gamma'_k$  in der Form  $\gamma_k : I_k \rightarrow S, \gamma'_k : I_k \rightarrow S$  mit derselben konstanten Geschwindigkeit parametrisiert sind. Hierbei ist  $I_k$  ein (nicht degeneriertes) Intervall. Wenn  $\gamma_k$  und  $\gamma'_k$  geschlossene glatte Geodätische sind, erlauben wir für  $I_k$  - wie oben - ganz  $\mathbb{R}$  oder den Quotientenraum  $\mathbb{R}/[t \mapsto t + a_k]$  als Parameterbereich.

Darüberhinaus möchten wir annehmen, dass die Seiten so orientiert sind, dass die Quotientenfläche unten ebenfalls wieder orientierbar ist.

#### 4. Teichmüllerräume

Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation auf  $S$  durch die *Verklebungsvorschrift*:

$$\gamma_k(t) = \gamma'_k(t), \quad t \in I_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\mathfrak{V})$$

Auf  $S$  definieren wir dann die zugehörige Äquivalenzrelation durch:

$$p \sim q :\Leftrightarrow p = q \text{ oder } \exists k \in \{1, \dots, n\}, t \in I_k : \gamma_k(t) = p \text{ und } \gamma'_k(t) = q$$

Wir staten dann den entstehenden Quotientenraum  $F := S / \sim$  mit der Quotiententopologie bzgl. der natürlichen Projektion  $\pi : S \rightarrow S / \sim, p \mapsto [p]$  aus, wobei mit  $[p]$  wie üblich die Äquivalenzklasse von  $p \in S$  bezeichnet wird.

**Definition 4.2.18.** Man schreibt dann

$$F = S_1 + \dots + S_m \mod (\mathfrak{V})$$

und nennt  $F$  die *Quotientenfläche* der disjunkten Vereinigung  $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_m$  unter der Verklebungsvorschrift  $(\mathfrak{V})$ .

Es lässt sich zeigen, dass  $F$  dann ein Hausdorffraum ist (siehe [Bus92, S.9]).

**Definition 4.2.19.** Ein *Eckenring* von  $F$  ist die Menge aller Ecken von  $S_1, \dots, S_m$ , welche zusammen denselben Punkt in  $F$  definieren.

Der nächste Satz rechtfertigt den Ausdruck "Quotientenfläche" für  $F$ , in dem er zeigt, dass man unter gewissen Voraussetzungen  $F$  mit einer hyperbolischen Struktur versehen kann.

**Satz 4.2.20.** *Es gelten die obigen Bezeichnungen. Für jeden Eckenring gelte nun weiter, dass die Summe der Innenwinkel bei der jeweiligen Ecke entweder gleich  $2\pi$  oder  $\leq \pi$  ist.*

*Dann trägt  $F$  eine eindeutige hyperbolische Struktur, so dass die natürliche Projektion  $\sigma : S_1 \sqcup \dots \sqcup S_m \rightarrow F$  eine lokale Isometrie ist.*

*Ist darüberhinaus  $F$  zusammenhängend und  $S_1, \dots, S_m$  kompakt (und vollständig), so ist auch die hyperbolische Struktur von  $F$  vollständig.*

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.13]. □

Zum Schluss dieses Abschnittes möchten wir nun noch erklären, was es im Gegensatz zum Verkleben von hyperbolischen Flächen bedeutet, hyperbolische Flächen zu zerschneiden.

**Definition 4.2.21.** Sei  $F = S_1 + \dots + S_m \mod (\mathfrak{V})$  wie oben mit der natürlichen Projektion  $\sigma : S_1 \sqcup \dots \sqcup S_m \rightarrow F$  und sei

$$C = \sigma(\gamma_1) \sqcup \dots \sqcup \sigma(\gamma_n) = \sigma(\gamma'_1) \sqcup \dots \sqcup \sigma(\gamma'_n)$$

Wir sagen dann, dass man  $S_1, \dots, S_n$  durch *Aufschneiden* von  $F$  entlang der Kurven  $C$  erhält.

#### 4.2.4. Die universelle Überlagerung

Wir möchten in diesem Abschnitt die universelle Überlagerung einer hyperbolischen Fläche näher betrachten. Zunächst möchten wir die universelle Überlagerung  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  einer hyperbolischen Fläche  $S$  mit einer hyperbolischen Struktur ausstatten. Dies geschieht wie schon im Fall komplexer Strukturen durch einen Pullback der hyperbolischen Struktur unter dem lokalen Homöomorphismus (vgl. Satz 1.4.11). In Analogie zu dem Pullback komplexer Strukturen, wird dann  $\pi$  lokal isometrisch (statt lokal biholomorph).

Darüberhinaus erhält man den folgenden Satz:



**Satz 4.2.22.** *Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche. Die universelle Überlagerung  $\tilde{S}$  von  $S$  ist isometrisch zu einem konvexen Gebiet in  $\mathbb{H}$  mit stückweise glattem geodätischen Rand. Wenn  $S$  unberandet ist, so ist  $\tilde{S}$  isometrisch zu  $\mathbb{H}$ .*

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.16]. □

**Korollar 4.2.23.** *Jede einfach zusammenhängende hyperbolische Fläche ist isometrisch zu einem konvexen Gebiet in der hyperbolischen Ebene mit stückweise glattem geodätischen Rand.*

#### 4.2.5. Kürzeste Wege

Wie schon in der oberen Halbebene möchten wir nun analoge Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit von kürzesten Wegen zwischen zwei Geodätischen herleiten. Im Gegensatz zur oberen Halbebene, welche einfach zusammenhängend ist, erhält man auf allgemeinen hyperbolischen Flächen jedoch nur dann eine eindeutige kürzeste Verbindung, wenn man eine gewisse Homotopieklasse zuvor fixiert. Wie wir diese Homotopieklasse zu verstehen haben, wollen wir deshalb zunächst definieren.

**Definition 4.2.24.** Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche und seien  $A, B \subseteq S$  abgeschlossene und zusammenhängende Teilmengen. Weiter seien  $c, \gamma : [a, b] \rightarrow S$  ( $a < b$ ) Wege mit Anfangspunkten  $c(a), \gamma(a) \in A$  und Endpunkten  $c(b), \gamma(b) \in B$ . Man sagt  $c$  ist *homotop zu  $\gamma$  mit gleitenden Endpunkten auf  $A$  und  $B$* , wenn es eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$  gibt, so dass:

(i) Für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$\begin{aligned} H(0, t) &= c(t) \\ H(1, t) &= \gamma(t) \end{aligned}$$

(ii) Für alle  $s \in [0, 1]$  gilt:

$$\begin{aligned} H(s, a) &\in A \\ H(s, b) &\in B \end{aligned}$$

Die Menge aller zu  $\gamma$  in diesem Sinn homotopen Kurven nennt man die Homotopieklasse von  $\gamma$  mit gleitenden Endpunkten auf  $A$  und  $B$ .

Man erhält nun folgenden Satz in Analogie zu den auf  $\mathbb{H}$  gezeigten Resultaten:

**Satz 4.2.25.** *Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche und  $c : [a, b] \rightarrow S$  eine Kurve mit  $c(a) \in A$  und  $c(b) \in B$ , wobei  $A$  und  $B$  disjunkte geschlossene Randgeodäten von  $S$  sind. In der Homotopieklasse von  $c$  mit gleitenden Endpunkten auf  $A$  und  $B$  gibt es dann eine eindeutige Geodätische  $\gamma$ . An den Endpunkten schneidet  $\gamma$   $A$  und  $B$  in einem rechten Winkel. Alle anderen Punkte von  $\gamma$  liegen im Inneren von  $S$ .*

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.18]. □

Wir können diesen Satz noch erweitern auf anders geartete  $A$  und  $B$ . Um den folgenden Satz besser lesbar zu machen, wollen wir eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge  $A$  einer hyperbolischen Fläche  $S$  *zulässig* nennen, wenn  $A$  entweder einpunktig ist oder  $A$  eine kompakte zusammenhängende Teilmenge von  $\partial S$  ist.

**Satz 4.2.26.** *Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche, seien  $A, B \subseteq S$  zulässig und sei  $c : [a, b] \rightarrow S$  mit  $c(a) \in A, c(b) \in B$  eine Kurve von  $A$  nach  $B$  ( $A$  und  $B$  müssen nicht verschieden oder disjunkt sein). Dann gilt:*

#### 4. Teichmüllerräume

- (i) In der Homotopieklasse von  $c$  mit gleitenden Endpunkten auf  $A$  und  $B$  gibt es eine kürzeste Kurve  $\gamma$ . Diese ist eine Geodätische.
- (ii) Wenn  $\gamma$  nicht in  $\partial S$  enthalten ist, dann schneidet  $\gamma$  den Rand  $\partial S$  höchstens in den Endpunkten.
- (iii) Wenn  $A = \{p\}, p \in S$  und  $B$  in eine der folgenden Kategorien fällt:
  - $B$  ist eine geschlossene Randgeodätische
  - $B$  ist eine Seite von  $S$ , welche einen Innenwinkel von weniger als  $\pi/2$  mit ihren angrenzenden Seiten hat
 Dann ist  $\gamma$  entweder ein Punkt oder eine Geodätische von  $p$  nach  $B$ , welche senkrecht auf  $B$  steht. Gilt letzteres, so ist  $\gamma$  die eindeutige Geodätische von  $p$  nach  $B$  in der Homotopieklasse von  $c$ .
- (iv) Wenn  $A$  und  $B$  in eine der beiden Kategorien in (iii) fallen (aber nicht notwendigerweise in dieselbe) und  $\gamma$  kein Punkt ist, dann ist  $\gamma$  die eindeutige Geodätische von  $A$  nach  $B$  in der Homotopieklasse von  $c$ , welche senkrecht auf  $A$  und  $B$  steht.
- (v) Wenn in (iv)  $c$  einfach ist und  $\gamma$  kein Punkt ist, dann ist auch  $\gamma$  einfach.
- (vi) Wenn  $A$  und  $B$  einpunktig sind, dann ist  $\gamma$  eindeutig.

*Anmerkung.* In (v) nennt man eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow S$  *einfach*, wenn  $c$  injektiv ist. Insbesondere schneidet sich eine einfache Kurve nicht selbst.

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.19]. □

##### 4.2.6. Geschlossene Geodätische

Nun möchten wir uns noch mit geschlossenen Geodätischen etwas eingehender beschäftigen. In diesem Abschnitt wollen wir ohne Einschränkung annehmen, dass eine geschlossene Geodätische entweder durch  $\mathbb{R}$  mit Periode 1 parametrisiert wird, oder durch den Quotienten/Kreislinie:

$$\mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/[t \mapsto t + 1]$$

Durch die Projektion  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}^1, t \mapsto [t]$  wird dann die universelle Überlagerung von  $\mathcal{S}^1$  gegeben.

**Definition 4.2.27.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zwei geschlossene Wege  $c, \gamma : \mathcal{S}^1 \rightarrow X$  heißen *frei homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times \mathcal{S}^1 \rightarrow X$  gibt, so dass

$$H(0, t) = c(t), \quad H(1, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathcal{S}^1$$

Eine Kurve heißt *trivial homotop*, wenn sie frei homotop zu einer konstanten Kurve/einem Punkt ist.

**Definition 4.2.28.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine geschlossene Kurve  $c : \mathcal{S}^1 \rightarrow X$  heißt *einfach*, wenn  $c : \pi([0, 1)) \rightarrow X$  injektiv ist.

**Satz 4.2.29.** Sei  $S$  eine kompakte hyperbolische Fläche und sei  $c$  eine nicht trivial homotope geschlossene Kurve auf  $S$ . Dann gilt:

- (i)  $c$  ist frei homotop zu einer eindeutigen geschlossenen Geodätischen  $\gamma$ .
- (ii)  $\gamma$  ist entweder ganz in  $\partial S$  enthalten oder  $\gamma \cap \partial S = \emptyset$ .
- (iii) Ist  $c$  einfach, dann ist auch  $\gamma$  einfach.

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.23]. □

### 4.2.7. Existenz und Eindeutigkeit von Hosen

**Definition 4.2.30** (Hose/Y-Stück). Eine hyperbolische Fläche  $Y$ , welche homöomorph zu

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, |z - 1/2| \geq 1/4, |z + 1/2| \geq 1/4\}$$

heißt *Hose* oder auch *Y-Stück*. Einen topologischen Raum homöomorph zu  $G$  wollen wir im Folgenden *Prä-Hose* nennen.

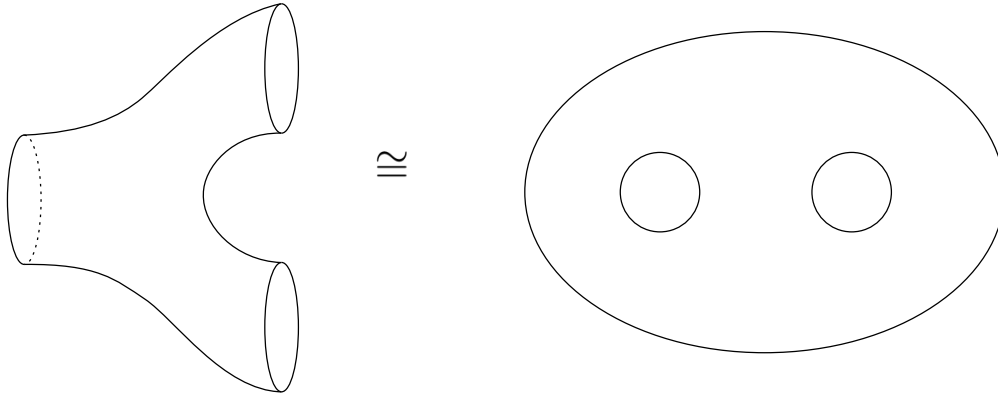


Abbildung 4.1.: Hose

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass die hyperbolische Struktur von einer Hose bereits eindeutig durch die Längen der drei Randgeodätischen bestimmt wird. Die Hosen werden wir dann als Bausteine für die Konstruktion der Fenchel-Nielsen-Koordinaten verwenden.

Um dies jedoch zeigen zu können benötigen wir zunächst noch ein paar Aussagen über hyperbolische Hexagone.

### Existenz und Eindeutigkeit von hyperbolischen Hexagonen

**Definition 4.2.31.** Eine kompakte, einfach zusammenhängende, berandete hyperbolische Fläche mit sechs Ecken nennt man ein *hyperbolisches Hexagon*.

**Lemma 4.2.32.** Jedes hyperbolische Hexagon  $S$  ist isometrisch zu einem hyperbolischen Hexagon in  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.*  $S$  ist nach Definition seine eigene universelle Überlagerung via  $id : S \rightarrow S$ . Nach Satz 4.2.22 ist damit  $S$  isometrisch zu einem einfach zusammenhängenden konvexen Gebiet in  $\mathbb{H}$  mit stückweise glattem Rand.  $\square$

**Lemma 4.2.33.** Seien  $H, H'$  zwei rechtwinklige hyperbolische Hexagone in  $\mathbb{H}$ .  $H$  bzw.  $H'$  habe die Seiten  $c_i : I \rightarrow \mathbb{H}$  bzw.  $d_i : I \rightarrow \mathbb{H}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ,  $I = [a, b], a < b$ ) in dieser Reihenfolge im mathematisch positiven Sinn. Gilt  $L(c_i) = L(d_i)$  für alle  $i = 1, \dots, 6$ , dann ist  $H$  isometrisch zu  $H'$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung seien die Ränder von  $H$  und  $H'$  im mathematisch positiven Sinn orientiert. Weil insbesondere  $L(c_1) = L(d_1)$  gilt, gibt es einen Automorphismus/eine Isometrie  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Isom}(\mathbb{H})$ , so dass  $\Phi \circ c_1 = d_1$ . Dann gilt  $\Phi(c_2(a)) = d_2(a)$ . Außerdem ist  $L(\Phi \circ c_2) = L(c_2) = L(d_2)$  und damit:

$$\frac{|(\Phi \circ c_2)'(a)|}{\text{Im } d_2(a)} = \frac{|(\Phi \circ a_2)'(a)|}{\text{Im } \Phi(c_2(a))} = \frac{|d_2'(a)|}{\text{Im } d_2(a)}$$

#### 4. Teichmüllerräume

Weil Isometrien winkelerhaltend sind, gilt damit  $(\Phi \circ c_2)'(a) = d_2'(a)$ . Somit haben beide Geodätische dieselben Anfangswerte und sind damit gleich, d.h.  $\Phi \circ c_2 = d_2$ . Iterativ kann man so für alle  $i = 1, \dots, 6$  schließen:  $\Phi \circ c_i = d_i$ . Insbesondere  $\partial H' = \Phi(\partial H)$ . Bleibt noch zu zeigen, dass  $\text{int } H' = \Phi(\text{int } H)$ . Offensichtlich teilt  $\partial H$  die obere Halbebene in zwei Zusammenhangskomponenten  $\text{int } H$  und  $H^c$ . Ebenso teilt  $\partial H'$  die obere Halbebene in zwei Zusammenhangskomponenten  $\text{int } H'$  und  $H'^c$ .  $\Phi$  erhält insbesondere Zusammenhangskomponenten, d.h. es gilt entweder  $\Phi(\text{int } H) = \text{int } H'$  oder  $\Phi(\text{int } H) = H'^c$ . Angenommen  $\Phi(\text{int } H) = H'^c$ . Dann gilt:

$$\Phi(H) = \Phi(\partial H) \cup \Phi(\text{int } H) = \partial H' \cup H'^c = (\text{int } H')^c$$

$(\text{int } H')^c$  ist jedoch nicht kompakt, aber  $\Phi(H)$  ist kompakt, weil  $H$  kompakt ist. Widerspruch!

Also muss  $\Phi(\text{int } H) = \text{int } H'$  gelten und somit  $\Phi(H) = H'$ . Damit sind dann  $H$  und  $H'$  isometrisch.  $\square$

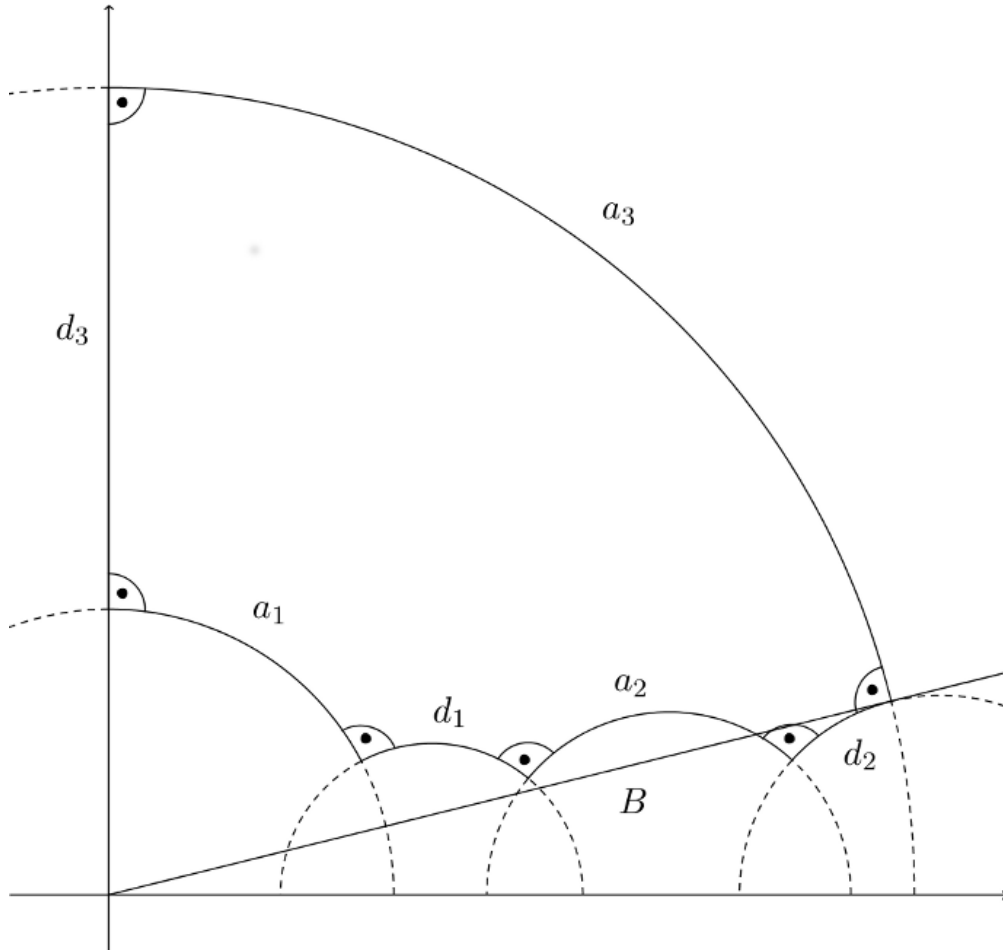


Abbildung 4.2.: Existenz eines Hexagons

**Lemma 4.2.34.** *Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ . Dann gibt es ein (bis auf Isometrie) eindeutiges rechtwinkliges hyperbolisches Hexagon in  $\mathbb{H}$  mit Seiten  $a_1, d_1, a_2, d_2, a_3, d_3$  (in dieser Reihenfolge), so dass  $L(a_i) = \lambda_i, i = 1, 2, 3$ .*

*Beweis.* Wir betrachten wie in Abbildung 4.2 die im rechten Winkel zueinander stehenden Geodätischen  $d_3, a_1$  und  $d_1$  in  $\mathbb{H}$ . Diese seien so gewählt, dass  $\text{dist}(d_3, d_1) = L(a_1) = \lambda_1$ . Sei  $B$  die Gerade

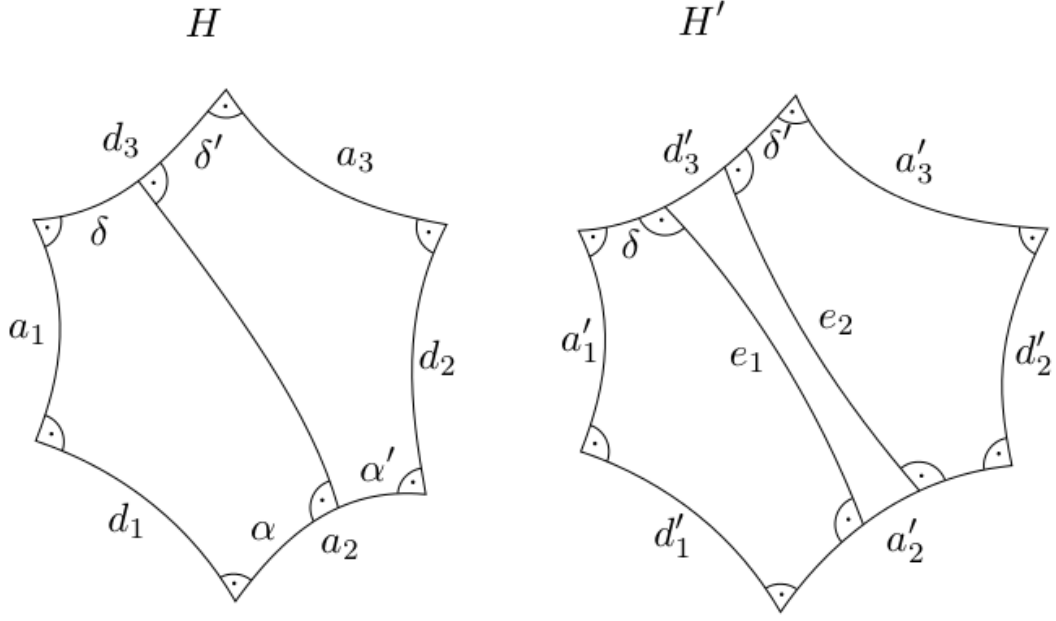


Abbildung 4.3.: Eindeutigkeit des Hexagons

aller Punkte in  $\mathbb{H}$  mit Abstand  $\lambda_3$  von  $d_3$ , welche auf derselben Seite von  $d_3$  liegen wie  $d_1$ .  $B$  ist eine Gerade, da die Abbildungen  $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$  Isometrien von  $\mathbb{H}$  sind. Wir betrachten nun eine sich bewegendende Geodätische  $d_2$ , welche tangential zu  $B$  liegt. Bewegt man  $d_2$  entlang von  $B$  bis  $\text{dist}(d_1, d_2) = \lambda_2$ , so steht die kürzeste Geodätische  $a_2$  zwischen  $d_1$  und  $d_2$  im rechten Winkel zu diesen und  $L(a_2) = \text{dist}(d_1, d_2) = \lambda_2$ . Somit erhalten wir das gewünschte hyperbolische Hexagon in  $\mathbb{H}$ .

Um zu zeigen, dass dieses bis auf Isometrie eindeutig ist, genügt es nach Lemma 4.2.33 zu zeigen, dass die Längen der Seiten  $a_1, a_2, a_3$  bereits eindeutig festgelegt sind. Seien also  $H$  und  $H'$  zwei rechtwinklige hyperbolische Hexagone in  $\mathbb{H}$  mit Seiten  $a_1, d_1, a_2, d_2, a_3, d_3$  und  $a'_1, d'_1, a'_2, d'_2, a'_3, d'_3$  jeweils, mit  $\lambda_i = L(a_i) = L(a'_i), i = 1, 2, 3$ . Angenommen es gibt eine Seite von  $H'$  deren Länge nicht mit der Länge der entsprechenden Seite in  $H$  übereinstimmt. Ohne Einschränkung können wir dann annehmen, dass  $L(d'_3) > L(d_3)$ . Es gibt nun eine eindeutige kürzeste Geodätische von  $a_2$  nach  $d_3$ , welche ganz in  $H$  enthalten ist und im rechten Winkel auf  $a_2$  und  $d_3$  steht. Diese teilt also  $a_2$  und  $d_3$  jeweils in zwei Teile der Längen  $\alpha, \alpha'$  resp.  $\delta, \delta'$ . In  $H'$  konstruieren wir nun Geodätische  $e_1$  und  $e_2$  durch  $d'_3$ , welche jeweils den Abstand  $\delta$  bzw.  $\delta'$  von den Endpunkten von  $d_3$  haben. Weil  $L(a'_i) = L(a_i), i = 1, 2, 3$  gilt, ist der Abstand von  $d'_1$  und  $e_1$  gerade  $\alpha$  und der Abstand von  $d'_2$  und  $e_2$  gerade  $\alpha'$ . Deshalb ist die Länge des Teils von  $a'_2$  zwischen  $d'_1$  und  $e_1$  mindestens  $\alpha$  und die Länge des Teils von  $a'_2$  zwischen  $d'_2$  und  $e_2$  mindestens  $\alpha'$ . Nun ist  $L(d'_3) > L(d_3)$ , d.h.  $e_1$  und  $e_2$  haben echt positiven Abstand. Daraus folgt, dass es einen dritten Teil von  $a'_2$  zwischen  $e_1$  und  $e_2$  gibt und man erhält:

$$L(a'_2) > \alpha + \alpha' = L(a_2)$$

Im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt die Eindeutigkeit.

□

Wegen Lemma 4.2.32 folgt daraus insbesondere, dass alle rechtwinkligen hyperbolischen He-

#### 4. Teichmüllerräume

xagone (nicht notwendigerweise in  $\mathbb{H}$ !) eindeutige bis auf Isometrie durch die Längen von nicht aneinander angrenzenden Seiten bestimmt sind. Diesen Umstand wollen wir uns nun zunutze machen um zu zeigen, dass die hyperbolische Struktur einer Hose eindeutig durch die Längen ihrer Randgeodätischen bestimmt ist.

#### Hosen

Zuvor jedoch noch ein Lemma, welches wir später noch benötigen werden.

**Lemma 4.2.35.** *Sei  $S$  eine Hose mit Randgeodätischen  $c_1, c_2, c_3$ . Für alle  $i \neq j$ ,  $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ , gibt es eine eindeutig bestimmte kürzeste Geodätische  $c_{ij}$  von  $c_i$  nach  $c_j$ . Dann gilt:*

- (i)  $c_{ij}$  steht senkrecht auf  $c_i$  und  $c_j$  und schneidet sich nicht selbst.
- (ii)  $c_{ij} = c_{ji}$  (als Mengen), aber unterschiedliche  $c_{ij}$  schneiden sich nicht.

*Beweis.* Wir wählen einen Weg von  $c : [0, 1] \rightarrow S$  von  $c_i$  nach  $c_j$ , welcher ohne Einschränkung einfach sein soll, also sich selbst nicht schneidet, und wenden Satz 4.2.26 an. Man bemerke, dass es aufgrund der Form von  $S$  nur eine Homotopieklasse von Kurven zwischen  $c_i$  und  $c_j$  gibt. Wir erhalten also eine Geodätische  $c_{ij}$  von  $c_i$  nach  $c_j$ . Da  $c_i$  und  $c_j$  geschlossene Randgeodätische sind, ist  $c_{ij}$  die eindeutige Geodätische zwischen  $c_i$  und  $c_j$ . Weil wir  $c$  einfach gewählt haben und  $c_{ij}$  offensichtlich nicht einpunktig ist, ist auch  $c_{ij}$  einfach und schneidet sich somit nicht selbst. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt dann auch, dass  $c_{ij} = c_{ji}$  (als Mengen). Es bleibt noch zu zeigen, dass sich verschiedene  $c_{ij}$  nicht schneiden.

Nehmen wir also an, dass es  $t_1, t_2 \in (0, 1)$  gibt, so dass  $c_{ij}(t_1) = c_{ik}(t_2)$  für  $j \neq k$ . Ohne Einschränkung ist  $L(c_{ij}|_{[0, t_1]}) \leq L(c_{ik}|_{[0, t_2]})$ . Dann verbindet die Kurve  $c'_{ik} := c_{ij}|_{[0, t_1]} \cup c_{ik}|_{[t_2, 1]}$  (man wähle hier die offensichtliche Parametrisierung dieser Menge)  $c_i$  mit  $c_k$  und erfüllt  $L(c'_{ik}) \leq L(c_{ik})$ . Daher ist  $c'_{ik}$  eine kürzeste Kurve in ihrer Homotopieklasse und somit eine glatte Geodätische. Aufgrund der Eindeutigkeit muss daher  $c'_{ik} = c_{ik}$  gelten. Jedoch stimmt  $c'_{ik}$  zu Beginn mit  $c_{ij}$  überein und da Geodätische eindeutig durch ihre Anfangswerte bestimmt sind, müsste somit auch  $c_{ij} = c_{ik}$  gelten. Diese verbinden jedoch verschiedene Randkurven von  $S$  mit  $c_i$ . Widerspruch!  $\square$

Nun können wir folgenden Satz beweisen.

**Satz 4.2.36.** *Die hyperbolische Struktur einer Hose  $S$  ist eindeutig durch die Längen ihrer drei Randgeodätischen  $c_1, c_2, c_3$  gegeben. Umgekehrt gibt es zu beliebigen  $l_1, l_2, l_3 > 0$  eine Hose  $S$  mit Randgeodätischen  $c_1, c_2, c_3$ , welche jeweils die Länge  $l_1, l_2, l_3$  haben.*

*Beweis.* Sei eine Hose  $S$  gegeben. Dann können wir  $S$  entlang der Kurven  $c_{12}, c_{23}, c_{31}$  aufschneiden und erhalten zwei hyperbolische Hexagone, welche wir nach Lemma 4.2.32 in  $\mathbb{H}$  betrachten können. Da diese an allen Ecken rechte Winkel haben und die Seiten  $c_{12}, c_{23}$  und  $c_{31}$  gemeinsam haben, sind diese isometrisch nach Lemma 4.2.34. Somit haben die übrigen Seiten die Längen  $\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{l_3}{2}$ . Wenden wir nun wieder Lemma 4.2.34 an, so erhalten wir, dass die beiden Hexagone bis auf Isometrie eindeutig bestimmt sind durch  $l_1, l_2, l_3$ , also auch ihre hyperbolische Struktur. Da  $S$  durch die Verklebung der beiden Hexagone entsteht, ist damit nach Satz 4.2.20 auch die hyperbolische Struktur auf  $S$  eindeutig durch  $l_1, l_2, l_3$  bestimmt.

Seien umgekehrt  $l_1, l_2, l_3 > 0$  gegeben. Dann können wir nach Lemma 4.2.34 zwei (isometrische) Hexagone konstruieren, welche die Längen  $\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{l_3}{2}$  an nicht aneinander angrenzenden Seiten haben. Nun können wir diese beiden Hexagone entlang der übrigen Seiten so verkleben, dass wir eine Hose  $S$  mit Randlängen  $l_1, l_2, l_3$  erhalten.  $\square$

Mit diesen Hosen können wir nun beginnen die Fenchel-Nielsen Koordinaten zu konstruieren.

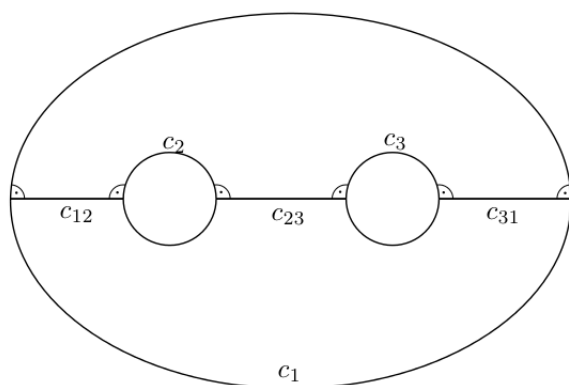


Abbildung 4.4.: Geodätische zwischen den Randkurven

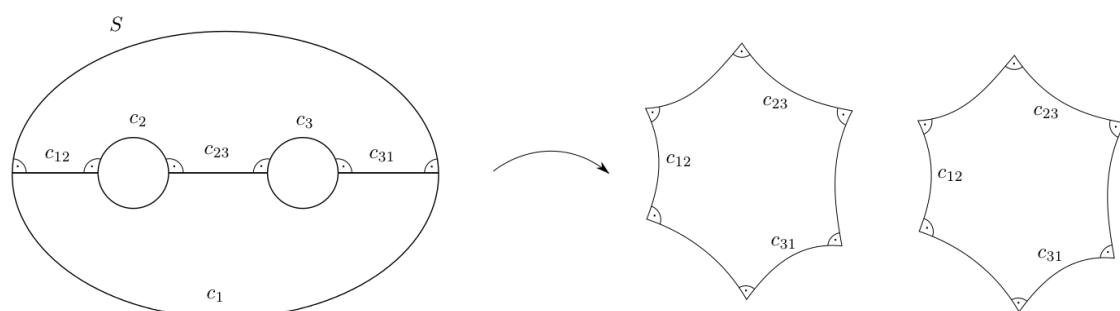


Abbildung 4.5.: Eindeutigkeit der Hose

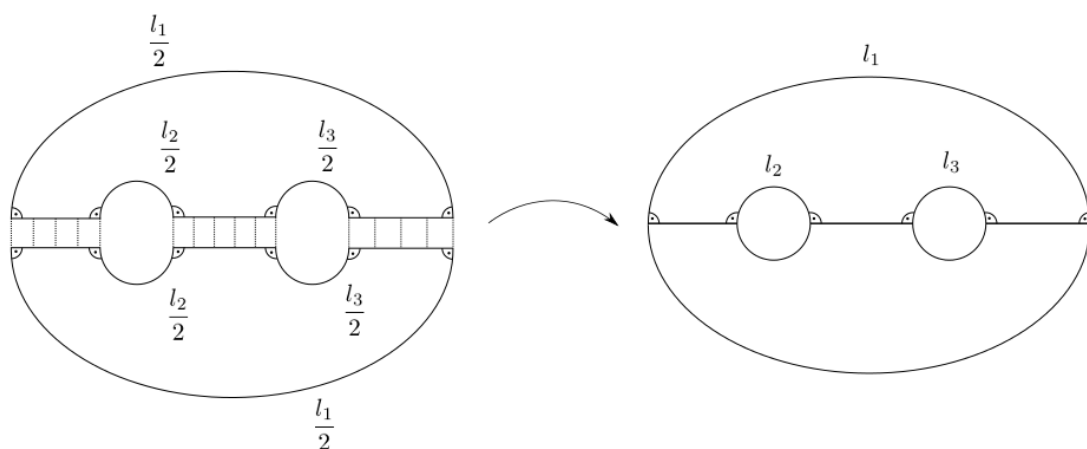


Abbildung 4.6.: Existenz der Hose

### 4.2.8. Fenchel-Nielsen Koordinaten

Wie bereits erwähnt ist es unser Ziel eine Bijektion

$$\Lambda : \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathcal{T}_g, (l, \vartheta) \mapsto \Lambda(l, \vartheta)$$

anzugeben. Dabei werden wir so vorgehen, dass wir zunächst eine kompakte Riemann'sche Fläche  $R(l, \vartheta)$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  und einen Homöomorphismus  $\varphi(l, \vartheta) : S_g \rightarrow R(l, \vartheta)$  konstruieren, und  $\Lambda(l, \vartheta) = [R(l, \vartheta), \varphi(l, \vartheta)]$  setzen. Danach werden wir zeigen, dass die so konstruierte Abbildung tatsächlich bijektiv ist.

#### Konstruktion

Zunächst möchten wir unseren Basisraum  $S_g$  der Bequemlichkeit halber ebenfalls mit einer hyperbolischen Struktur ausstatten. Dazu wählen wir einfache geschlossene Kurven  $\delta_1^0, \dots, \delta_{3g-3}^0 : \mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/[t \mapsto t+1] \rightarrow S_g$ , welche  $S_g$  in  $2g-2$  Prä-Hosen  $Y_1, \dots, Y_{2g-2}$  zerlegt, d.h. durch Aufschneiden von  $S_g$  entlang dieser Kurven erhalten wir folgende Quotientendarstellung von  $S_g$ :

$$\pi_0 : \bigsqcup_{\mu=1}^{2g-2} Y_\mu \rightarrow S_g$$

Bezeichnet man mit  $c_{i,\mu} : \mathcal{S}^1 \rightarrow Y_\mu$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Randkurve von  $Y_\mu$  und orientiert diese so, dass  $Y_\mu$  immer links von  $c_{i,\mu}$  liegt, so kann man sich  $S_g$  als Verklebung der  $Y_\mu$  entlang dieser Randkurven vorstellen ( $k = 1, \dots, 3g-3$ ):

$$\delta_k^0(t) = \pi_0(c_{i,\mu}(t)) = \pi_0(c_{j,\nu}(-t)) \quad \forall t \in \mathcal{S}^1$$

für geeignete  $i, j \in \{1, 2, 3\}, \mu, \nu \in \{1, \dots, 2g-2\}$ . Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen definieren wir die Abbildung

$$V : \{1, \dots, 3g-3\} \rightarrow (\{1, 2, 3\} \times \{1, \dots, 2g-2\})^2$$

mit  $V(k) := ((i, \mu), (j, \nu))$  für  $\delta_k(t) = \pi_0(c_{i,\mu}(t)) = \pi_0(c_{j,\nu}(-t))$ ,  $t \in \mathcal{S}^1$ .  $V$  kodiert also die Information wie  $S_g$  durch die  $Y_\mu$  zusammengeklebt wird<sup>2</sup>.

Auf den einzelnen Prä-Hosen  $Y_\mu$  lässt sich nun eine hyperbolische Struktur finden, so dass die Randkurven zu Randgeodätischen der Länge 1 werden. Wir wollen jedes  $Y_\mu$  nun mit dieser hyperbolischen Struktur versehen und machen es so zu einer Hose. Wir verkleben nun analog wie oben die Hosen  $Y_\mu$  und erhalten eine hyperbolische Fläche  $F = Y_1 + \dots + Y_{2g-2} \bmod (\mathfrak{V})$ , wobei  $(\mathfrak{V})$  die folgende Verklebungsvorschrift sei:

$$\delta_k(t) := c_{i,\mu}(t) = c_{j,\nu}(-t), \quad t \in \mathcal{S}^1, ((i, \mu), (j, \nu)) := V(k), \quad k = 1, \dots, 3g-3, \quad (\mathfrak{V})$$

$\delta_k : \mathcal{S}^1 \rightarrow F$  ist also diejenige Kurve, welche durch die Identifikation von  $c_{i,\mu}$  mit  $c_{j,\nu}$  auf  $F$  entsteht und somit zu  $\delta_k^0$  in  $S_g$  korrespondiert. Wir wollen die von dieser Verklebung induzierte Quotientenabbildung mit

$$\pi : \bigsqcup_{\mu=1}^{2g-2} Y_\mu \rightarrow F$$

bezeichnen.

Die Abbildung

$$\psi : S_g \rightarrow F, \psi := \pi \circ \pi_0^{-1}$$

<sup>2</sup>Man kann dies auch durch die Verwendung von Graphen verallgemeinern (siehe [Bus92, Ch. 3.5]).



#### 4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes

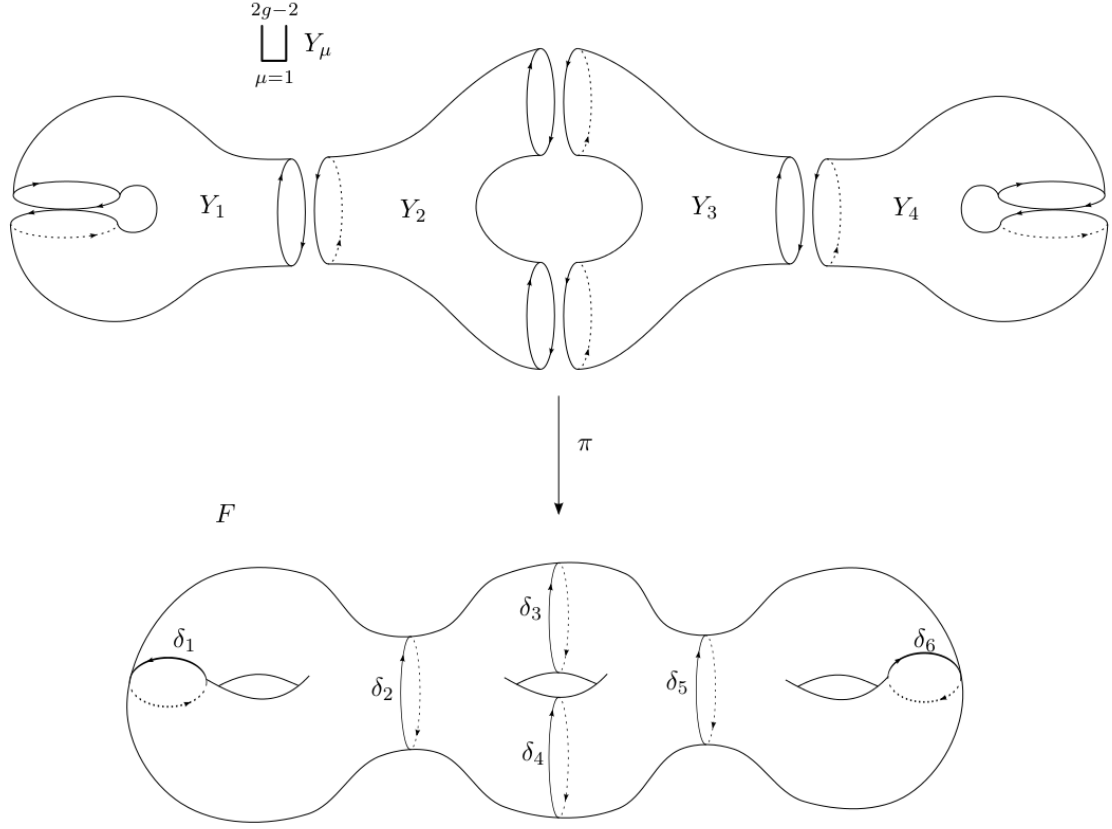


Abbildung 4.7.: Zerlegung in  $Y$ -Stücke für  $g = 3$

ist dann wohldefiniert (da wir  $F$  genauso verkleben wie  $S_g$ ) und ein Homöomorphismus. Im Folgenden können wir  $S_g$  also immer mit  $F$  identifizieren und  $S_g$  erhält auf diese Weise eine hyperbolische Struktur.

Seien nun  $l = (l_1, \dots, l_{3g-3}), \in \mathbb{R}_+^{3g-3}, \vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$  beliebig vorgegeben. Wir möchten nun anhand dieser gegebenen Daten eine kompakte Riemann'sche Fläche  $R(l, \vartheta)$  vom Geschlecht  $g$  und einen Homöomorphismus  $\varphi(l, \vartheta) : F \rightarrow R(l, \vartheta)$  konstruieren. Um die Notation etwas kürzer zu halten setzen wir  $\omega := (l, \vartheta)$  und schreiben  $R^\omega$  statt  $R(l, \vartheta)$  und  $\varphi^\omega$  statt  $\varphi(l, \vartheta)$ .

Zunächst konstruieren wir  $R^\omega$ . Hierzu wählen wir uns auf jedem der  $Y_\mu$  eine neue hyperbolische Struktur, so dass für jedes  $k \in \{1, \dots, 3g-3\}$  und  $((i, \mu), (j, \nu)) = V(k)$  gilt:

$$L(c_{i,\mu}) = L(c_{j,\nu}) = l_k$$

Diese Hosen wollen wir von den  $Y_\mu$  und deren hyperbolischer Struktur, wie sie oben bereits festgelegt wurde, unterscheiden und schreiben stattdessen  $Y_\mu^\omega$  und für die Randkurven  $c_{i,\mu}^\omega$ .

$R^\omega$  definieren wir dann als

$$R^\omega = Y_1^\omega + \dots + Y_{2g-2}^\omega \mod (\mathfrak{V}(\omega))$$

wobei  $(\mathfrak{V}(\omega))$  die Verklebungsvorschrift

$$\delta_k^\omega(t) := c_{i,\mu}^\omega(t) = c_{j,\nu}^\omega(\vartheta_k - t), \quad t \in \mathcal{S}^1, ((i, \mu), (j, \nu)) := V(k), \quad k = 1, \dots, 3g-3 \quad (\mathfrak{V}(\omega))$$

#### 4. Teichmüllerräume

Die Quotientenabbildung sei analog wie oben mit

$$\pi^\omega : \bigsqcup_{\mu=1}^{2g-2} Y_\mu^\omega \rightarrow R^\omega$$

bezeichnet. Man sagt für  $\vartheta$  in  $\omega = (l, \vartheta)$  dann auch "Twistparameter", da diese nach Konstruktion angeben, wie die einzelnen Hosen gegeneinander verdreht/"getwistet" werden.

Im Folgenden werden wir oft als Zwischenschritt die Fläche  $R^{\omega'}$  mit  $\omega' = (l, 0)$  betrachten. Abkürzend schreiben wir dann  $R^l$  statt  $R^{\omega'}$ ,  $Y_\mu^l$  statt  $Y_\mu^{\omega'}$ ,  $c_{i,\mu}^l$  statt  $c_{i,\mu}^{\omega'}$  usw.

Der Homöomorphismus  $\varphi^\omega : F \rightarrow R^\omega$  wird nun in zwei Schritten eingeführt werden, indem wir ihn als Produkt  $\varphi^\omega = \tau^\omega \circ \sigma^l$  von einer "Streckung"  $\sigma^l : F \rightarrow R^l$  und von "Twists"  $\tau^\omega : R^l \rightarrow R^\omega$  schreiben.

Zunächst definieren wir eine Streckung zwischen zwei rechtwinkligen hyperbolischen Hexagonen  $H$  und  $\tilde{H}$ .  $H$  habe die Randgeodätischen  $a_1, d_1, a_2, d_2, a_3, d_3 : [0, 1] \rightarrow H$  und  $\tilde{H}$  habe die Randgeodätischen  $\tilde{a}_1, \tilde{d}_1, \tilde{a}_2, \tilde{d}_2, \tilde{a}_3, \tilde{d}_3 : [0, 1] \rightarrow \tilde{H}$  (jeweils in dieser Reihenfolge). Es bezeichne nun  $p_0$  die gemeinsame Ecke von  $a_1$  und  $d_1$  in  $H$  und  $\tilde{p}_0$  die gemeinsame Ecke von  $\tilde{a}_1$  und  $\tilde{d}_1$  in  $\tilde{H}$ . Zu jedem  $p \in H, p \neq p_0$  gibt es dann eine eindeutige Geodätische durch  $p_0$  und  $p$ , welche sich auf ganz  $H$  fortsetzen lässt. Diese Geodätische trifft dann eine der Seiten von  $H$ , etwa  $a_i$ , in einem Punkt  $p_* = a_i(t_p)$  mit  $t_p \in [0, 1]$ . Wir setzen nun für die Streckung  $\sigma[H, \tilde{H}] : H \rightarrow \tilde{H}$ ,  $\sigma[H, \tilde{H}](p) = \tilde{p}$ . Dabei ist  $\tilde{p}$  der Punkt auf der Geodätischen durch  $\tilde{p}_0$  und  $\tilde{p}_* = \tilde{a}_i(t_p)$  mit

$$\frac{d(\tilde{p}_0, \tilde{p})}{d(\tilde{p}_0, \tilde{p}_*)} = \frac{d(p_0, p)}{d(p_0, p_*)}$$

Außerdem setzen wir  $\sigma[H, \tilde{H}](p_0) = \tilde{p}_0$ . Dieses  $\sigma[H, \tilde{H}] : H \rightarrow \tilde{H}$  definiert dann einen Homöomorphismus von  $H$  nach  $\tilde{H}$  (vgl. [Bus92, S. 68]).

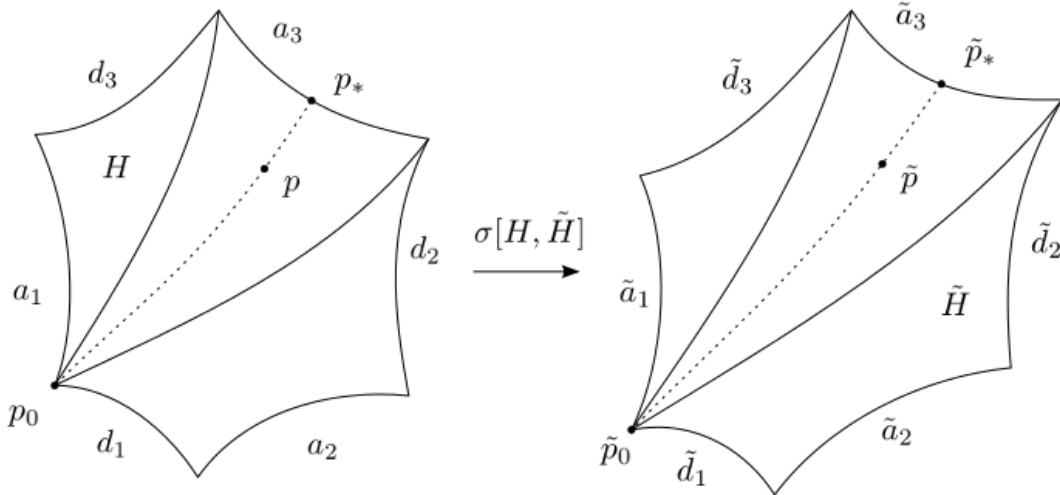


Abbildung 4.8.: Die Streckung  $\sigma[H, \tilde{H}]$

Seien nun  $Y$  und  $\tilde{Y}$  zwei Hosen. Diese lassen sich nun wie im Beweis zur Eindeutigkeit der hyperbolischen Struktur in jeweils zwei hyperbolische Hexagone  $H, H'$  bzw.  $\tilde{H}, \tilde{H}'$  zerlegen. Wir

#### 4.2. Teichmüllerräume von kompakten Riemann'schen Flächen höheren Geschlechtes

definieren dann eine Streckung  $\sigma[Y, \tilde{Y}] : Y \rightarrow \tilde{Y}$  als

$$\sigma[Y, \tilde{Y}] = \begin{cases} \sigma[H, \tilde{H}], & \text{auf } H \\ \sigma[H', \tilde{H}'], & \text{auf } H' \end{cases}$$

Man beachte, dass  $\sigma[H, \tilde{H}]$  und  $\sigma[H', \tilde{H}']$  auf  $H \cap H'$  übereinstimmen und die Orientierung der Randkurven erhalten.

Wir können diese Streckungen nun verwenden, um eine globale Streckung  $\sigma^l : F \rightarrow R^l$  anzugeben. Wir setzen hierfür  $\sigma_\mu^l := \sigma[Y_\mu, Y_\mu^l] : Y_\mu \rightarrow Y_\mu^l$ . Für die globale Streckung können wir dann

$$\sigma^l = \left\{ \pi^l \circ \sigma_\mu^l \circ \pi^{-1}, \quad \text{auf } \pi(Y_\mu), \quad \mu = 1, \dots, 2g - 2 \right.$$

setzen.  $\sigma^l : F \rightarrow R^l$  ist dann ein wohldefinierter Homöomorphismus, da alle Twistparameter null sind. Außerdem hat  $\sigma^l : F \rightarrow R^l$  die Eigenschaft:

$$\sigma^l \circ \delta_k = \delta_k^l, \quad k = 1, \dots, 3g - 3$$

Nun kommen wir zu den "Twists". Sei hierzu  $k \in \{1, \dots, 3g - 3\}$  fest und  $((i, \mu), (j, \nu)) = V(k)$ . Wir finden nun in  $Y_\mu^l = Y_\mu^\omega$  eine Röhrenumgebung  $A_{i,\mu}^l = A_{i,\mu}^\omega$  um  $c_{i,\mu}^l = c_{i,\mu}^\omega$  und in  $Y_\nu^l = Y_\nu^\omega$  eine Röhrenumgebung  $A_{j,\nu}^l = A_{j,\nu}^\omega$  um  $c_{j,\nu}^l = c_{j,\nu}^\omega$ , d.h. es gibt Homöomorphismen  $\alpha_{i,\mu} : A_{i,\mu}^l \rightarrow [0, 1/2] \times \mathcal{S}^1$  und  $\alpha_{j,\nu} : A_{j,\nu}^l \rightarrow [1/2, 1] \times \mathcal{S}^1$ , so dass gilt:

(i)

$$\alpha_{i,\mu}^{-1}(1/2, t) = c_{i,\mu}^l(t), \quad \alpha_{j,\nu}^{-1}(1/2, t) = c_{j,\nu}^l(-t), \quad \forall t \in \mathcal{S}^1$$

(ii)

$$\pi^\omega \circ \alpha_{j,\nu}^{-1}(s, t - \vartheta_k) = \pi^l \circ \alpha_{j,\nu}^{-1}(s, t), \quad \forall t \in \mathcal{S}^1, s \in [1/2, 1]$$

(iii) Die Röhrenumgebungen  $A_{i,\mu}^l$  ( $i = 1, 2, 3, \mu = 1, \dots, 2g - 2$ ) sind paarweise disjunkt.

Anschaulich gesprochen bedeutet dies gerade, dass wir beim Drehen und Wiederverkleben von  $c_{i,\mu}$  mit  $c_{j,\nu}$  gerade eine kleine Umgebung beider Randgeodätischen festhalten und diese mitdrehen. Für einen formalen Beweis der Existenz dieser Umgebungen mit den geforderten Eigenschaften verweisen wir auf [Bus92, S.66]<sup>3</sup>. Diese Röhrenumgebungen lassen sich nun in  $R^l$  zu  $A_k^l := \pi^l(A_{i,\mu}^l \sqcup A_{j,\nu}^l)$  zusammensetzen und wir erhalten den kanonischen Homöomorphismus  $\alpha_k : A_k^l \rightarrow [0, 1] \times \mathcal{S}^1$ :

$$\alpha_k = \begin{cases} \alpha_{i,\mu} \circ (\pi^l)^{-1}, & \text{auf } \pi(A_{i,\mu}^l) \\ \alpha_{j,\nu} \circ (\pi^l)^{-1}, & \text{auf } \pi(A_{j,\nu}^l) \end{cases}$$

Nun können wir zunächst einen Twist auf  $[0, 1] \times \mathcal{S}^1$  um  $\beta \in \mathbb{R}$  betrachten:

$$T_\beta : [0, 1] \times \mathcal{S}^1 \rightarrow [0, 1] \times \mathcal{S}^1, (s, t) \mapsto (s, t + \beta s)$$

Die globalen Twists  $\tau^\omega : R^l \rightarrow R^\omega$  erhalten wir dann durch:

$$\tau^\omega := \begin{cases} \pi^\omega \circ (\pi^l|_{\text{int } Y_\mu})^{-1}, & \text{auf } \pi(Y_\mu) \setminus \bigsqcup_{k=1}^{3g-3} A_k^l, \quad \mu = 1, \dots, 2g - 2 \\ \pi^\omega \circ (\pi^l)^{-1} \circ \alpha_k^{-1} \circ T_{\vartheta_k} \circ \alpha_k, & \text{auf } A_k^l, \quad k = 1, \dots, 3g - 3 \end{cases}$$

<sup>3</sup>Hier wird eine etwas andere Aussage gezeigt. Jedoch lässt sich aus dieser leicht die Existenz der von uns verlangten Röhrenumgebungen folgern (vgl. [Bus92, S.94f. und S.143f.] )

#### 4. Teichmüllerräume

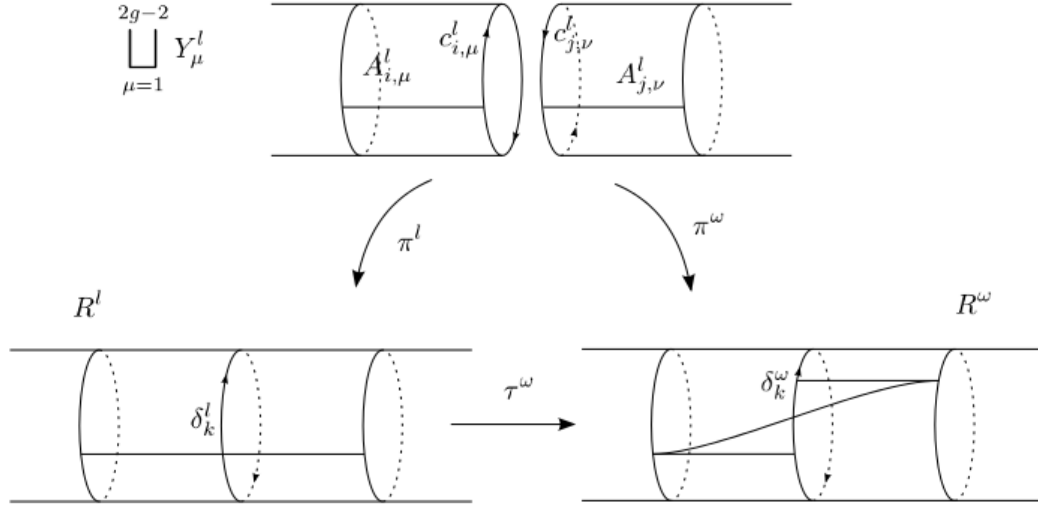


Abbildung 4.9.: Twist

Es lässt sich leicht verifizieren, dass  $\tau^\omega$  ein Homöomorphismus ist. Abbildungen dieser Art werden in der Differentialtopologie auch oft Dehn-Twists genannt. Außerdem bemerken wir, dass

$$\varphi^\omega(\delta_k(t)) = \delta_k^\omega(t + \vartheta_k/2), \quad t \in S^1, \quad k = 1, \dots, 3g - 3$$

gilt.

Wir setzen nun wie schon angekündigt  $\varphi^\omega := \tau^\omega \circ \sigma^l$  und definieren  $\Lambda(l, \vartheta) := [R^\omega, \varphi^\omega]$ . Damit ist die Konstruktion der Fenchel-Nielsen Koordinaten abgeschlossen.

#### Bijektivität

Um zeigen zu können, dass die soeben konstruierten Fenchel-Nielsen Koordinaten bijektiv sind, werden wir noch ein paar weitere Hilfsmittel benötigen.

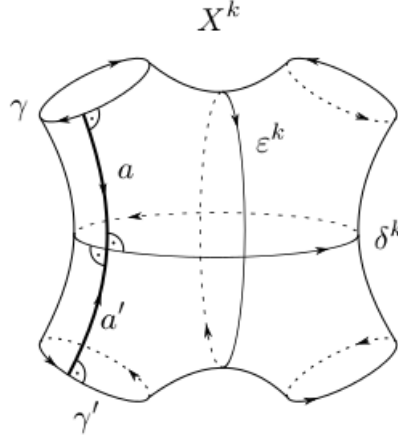
**Definition 4.2.37.** Sei  $(S, \varphi) \in \tilde{\mathcal{T}}_g$  und  $\beta$  eine nicht-trivial homotope geschlossene Kurve auf  $F$ . Wir bezeichnen dann mit  $\beta(S)$  die eindeutige geschlossene Geodätische auf  $S$  in der freien Homotopieklasse von  $\varphi \circ \beta$ . Ist  $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$  eine endliche oder unendliche Folge solcher Kurven auf  $F$ , dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B}(S) = \{\beta_1(S), \beta_2(S), \dots\}$$

die Folge der korrespondierenden geschlossenen Geodätischen auf  $S$ . Außerdem definieren wir

$$L\mathcal{B}(S) = \{L(\beta_1(S)), L(\beta_2(S)), \dots\}$$

Wir betrachten nun ein  $k \in \{1, \dots, 3g - 3\}$  und die zugehörige Verklebungsstelle entlang von  $\delta_k$  in  $F$ . Wir setzen weiter  $((i, \mu), (j, \nu)) := V(k)$ , d.h.  $Y_\mu$  und  $Y_\nu$  werden entlang von  $c_{i,\mu}$  und  $c_{j,\nu}$  verklebt. Diese Verklebung ist dann eine hyperbolische Fläche in  $F$  welche auf verschiedene Art und Weisen in  $F$  liegen kann. Um uns hier eine Fallunterscheidung zu ersparen definieren wir eine


 Abbildung 4.10.: Das X-Stück  $X^k$ 

Fläche  $X^k$  zusammen mit einer isometrischen Immersion  $\iota_k : X^k \rightarrow F$  wie folgt. Es seien hierzu  $Y^\mu$  und  $Y^\nu$  verschiedene Hosen, wobei  $Y^\mu$  eine Kopie von  $Y_\mu$  und  $Y^\nu$  eine Kopie von  $Y_\nu$  ist. Wir bezeichnen mit  $c_r^\mu$  und  $c_r^\nu$  ( $r = 1, 2, 3$ ) die entsprechenden Randgeodätischen von  $Y^\mu$  und  $Y^\nu$ , und setzen

$$X^k = Y^\mu + Y^\nu \quad \text{mod } (c_i^\mu(t) = c_j^\nu(-t) =: \delta^k(t), t \in \mathcal{S}^1)$$

Die natürlichen Isometrien  $Y^\mu \rightarrow Y_\mu, Y^\nu \rightarrow Y_\nu$  setzen sich dann auf offensichtliche Weise zu einer isometrischen Immersion  $\iota_k : X^k \rightarrow F$  zusammen. Es ist hier zu bemerken, dass dann nach Definition von  $F$  gilt:

$$\iota_k \circ \delta^k = \delta_k$$

Über diese Immersion können wir nur ein kanonisches Kurvensystem  $\Omega$  auf  $F$  definieren, welches uns später helfen wird zu erkennen, ob zwei Tupel  $(R^\omega, \varphi^\omega), (R^{\omega'}, \varphi^{\omega'})$  äquivalent sind. Dazu betrachten wir neben den Geodätischen  $\delta_k$  zwei weitere Arten von Kurven. Sei  $\gamma$  eine Randgeodätische von  $X^k$  und  $Y^\mu$ . Wir wollen mit  $a$  die eindeutige kürzeste Geodätische von  $\gamma$  nach  $\delta^k$  bezeichnen. Diese steht dann im rechten Winkel auf  $\gamma$  und  $\delta^k$ , und trifft  $\delta^k$  in einem Punkt  $p$ .  $Y^\mu$  und  $Y^\nu$  sind isometrisch, da die Längen ihrer Randgeodätischen jeweils 1 ist. Sei daher nun  $\gamma'$  die Randgeodätische von  $Y^\nu$ , so dass die kürzeste Geodätische  $a'$  von  $\gamma'$  nach  $\delta^k$  gerade  $\delta^k$  in  $p$  trifft (vgl. Abb. ...). Wir setzen nun  $d = a'a^{-1}$ . In der freien Homotopieklasse von  $d\gamma d^{-1}\gamma'$  gibt es dann genau eine einfache geschlossene Geodätische  $\varepsilon^k$ . Analog gibt es auch genau eine einfache geschlossene Geodätische  $\eta^k$  in der freien Homotopieklasse von  $\bar{d}\gamma\bar{d}^{-1}\gamma'$ , wobei  $\bar{d} = a'\delta^ka^{-1}$ . Wir setzen nun  $\varepsilon_k := \iota_k \circ \varepsilon^k$  und  $\eta_k := \iota_k \circ \eta^k$  für die entsprechenden Geodätischen auf  $F$ .

**Definition 4.2.38.** Wir definieren

$$\Omega = \{\delta_1, \dots, \delta_{3g-3}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{3g-3}, \eta_1, \dots, \eta_{3g-3}\}$$

$\Omega$  nennt man dann auch das *kanonische Kurvensystem* auf  $F$ .

Es lässt sich nun folgender Satz zeigen:

**Satz 4.2.39.** Sei  $\omega = (l, \vartheta) \in \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ . Dann ist  $\omega$  schon eindeutig durch  $L\Omega(R^\omega)$  bestimmt.

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.147]. □

#### 4. Teichmüllerräume

Darüberhinaus benötigen wir nun noch zwei kleinere topologische Aussagen, um die Bijektivität der Fenchel-Nielsen Koordinaten zu beweisen.

**Satz 4.2.40.** *Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche und  $\varphi, \varphi' : F \rightarrow S$  zwei Homöomorphismen, so dass  $\varphi \circ \delta_k$  frei homotop zu  $\varphi' \circ \delta_k$  und  $\varphi \circ \varepsilon_k$  frei homotop zu  $\varphi' \circ \varepsilon_k$  ist ( $k = 1, \dots, 3g - 3$ ). Dann sind  $\varphi$  und  $\varphi'$  homotop.*

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.141]. □

**Satz 4.2.41** (Baer-Zieschang). *Sei  $S$  eine hyperbolische Fläche. Weiter seien  $\delta_1, \dots, \delta_m$  paarweise disjunkte nicht trivial homotope einfache geschlossene Kurven in  $\text{int} S$ , welche paarweise nicht  $\pm$ -homotop sind. Sind  $\delta'_1, \dots, \delta'_m$  weitere Kurven in  $\text{int} S$ , welche die obigen Eigenschaften erfüllen, und ist  $\delta_\mu$  frei homotop zu  $\delta'_\mu$  für  $\mu = 1, \dots, m$ , dann gibt es einen Homöomorphismus  $\phi : S \rightarrow S$  mit  $\phi \circ \delta_\mu = \delta'_\mu$  für  $\mu = 1, \dots, m$ , welcher homotop zur Identität ist und die Homotopie lässt  $\partial S$  punktweise fix.*

*Anmerkung.* Zwei Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  heißen nicht  $\pm$ -homotop, wenn  $\alpha$  weder zu  $\beta$  noch zu  $\beta^{-1}$  frei homotop ist.

*Beweis.* Siehe [Bus92, S.411 ff.]. □

Nun sind wir bereit den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 4.2.42.** *Die Fenchel-Nielsen Koordinaten  $\Lambda : \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathcal{T}_g$  sind bijektiv.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Surjektivität von  $\Lambda$ .

Sei hierzu  $[S, \varphi] \in \mathcal{T}_g$ . Wir wollen nun das passende  $\omega = (l, \vartheta)$  bestimmen, so dass  $[S, \varphi] = [R^\omega, \varphi^\omega]$  gilt. Nach Satz 4.2.41 können wir davon ausgehen, dass  $\varphi(\delta_k)$  die geschlossene Geodätische  $\delta_k(S)$  ist ( $k = 1, \dots, 3g - 3$ ). Wir setzen nun

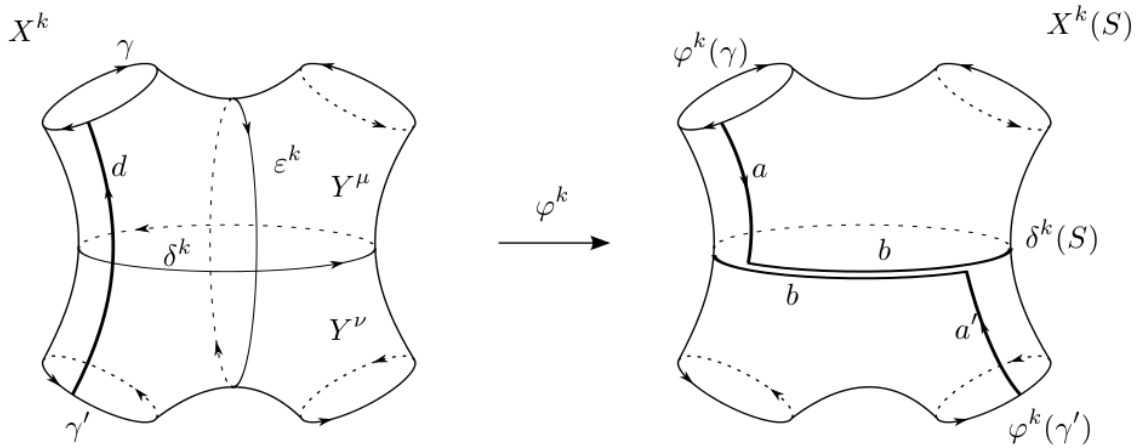
$$l := (L(\delta_1(S)), \dots, L(\delta_{3g-3}(S)))$$

Sei nun  $k \in \{1, \dots, 3g - 3\}$  beliebig und setze  $((i, \mu), (j, \nu)) = V(k)$ . Wir betrachten wie oben das  $X$ -Stück  $X^k$  mit der isometrischen Immersion  $\iota_k : X^k \rightarrow F$ .  $\iota_k$  ist dabei lokal isometrisch. Deshalb können wir die hyperbolische Struktur der Fläche  $\varphi(\iota_k(X^k))$  auf  $X^k$  zurückziehen (Pullback) und erhalten ein  $X$ -Stück  $X^k(S)$  zusammen mit einer isometrischen Immersion  $\iota'_k : X^k(S) \rightarrow S$  und einem Homöomorphismus  $\varphi^k : X^k \rightarrow X^k(S)$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} X^k & \xrightarrow{\varphi^k} & X^k(S) \\ \downarrow \iota_k & & \downarrow \iota'_k \\ F & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Man beachte, dass die Abbildung  $\varphi^k$  die Hosen  $Y^\mu$  und  $Y^\nu$  von  $X^k$  auf Hosen in  $X^k(S)$  abbildet. Auf  $X^k(S)$  setzen wir  $\delta^k(S) = \varphi^k(\delta^k)$ ,  $\varepsilon^k(S) = \varphi^k(\varepsilon^k)$  und  $\eta^k(S) = \varphi^k(\eta^k)$ . Dann gilt:

$$\iota'_k(\delta^k(S)) = \delta_k(S), \quad \iota'_k(\varepsilon^k(S)) = \varepsilon_k(S), \quad \iota'_k(\eta^k(S)) = \eta_k(S)$$


 Abbildung 4.11.: Die  $X$ -Stücke  $X^k$  und  $X^k(S)$ 

Seien  $\gamma$  und  $\gamma'$  mit  $\gamma \subset \partial Y^\mu$  und  $\gamma' \subset \partial Y^\nu$  Randgeodätische von  $X^k$ , welche nicht von  $\varepsilon^k$  separiert werden.  $d$  bezeichne dann wie oben die kürzeste Verbindung in  $X^k \setminus \varepsilon^k$  von  $\gamma'$  nach  $\gamma$ . Dann ist  $\varepsilon^k$  homotop zu der Kurve  $d\gamma d^{-1}\gamma'$ .

$\varphi^k(d)$  in  $X^k(S)$  ist nun homotop mit gleitenden Endpunkten auf  $\gamma$  bzw.  $\gamma'$  zu einer eindeutigen Kurve  $a'ba^{-1}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $a'$  ist die kürzeste Verbindung von  $\varphi^k(\gamma')$  nach  $\delta^k(S)$ .
- (ii)  $b$  ist eine Geodätische auf  $\delta^k(S)$  (im allgemeinen nicht einfach).
- (iii)  $a$  ist die kürzeste Verbindung von  $\varphi^k(\gamma)$  nach  $\delta^k(S)$ .

$\beta_k(S)$  sei nun die orientierte Länge von  $b$ , welche positiv ist, wenn  $b$  nach links von  $a'$  läuft, und negativ sonst. Wir setzen nun

$$\vartheta_k := \beta_k(S)/L(\delta_k(S)), \quad k = 1, \dots, 3g - 3$$

und

$$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{3g-3})$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $[R^\omega, \varphi^\omega] = [S, \varphi]$  für  $\omega = (l, \vartheta)$  gilt. Abkürzend verwenden wir im Folgenden  $\hat{R} = R^\omega$ .

Sei wieder  $k \in \{1, \dots, 3g - 3\}$  beliebig. Wie für  $S$  betrachten wir die isometrische Immersion  $\hat{\iota}_k : X^k(\hat{R}) \rightarrow \hat{R}$  mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X^k & \xrightarrow{\hat{\varphi}^k} & X^k(S) \\ \downarrow \iota_k & & \downarrow \hat{\iota}'_k \\ F & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & S \end{array}$$

#### 4. Teichmüllerräume

wobei  $\hat{\varphi} = \varphi^\omega = \tau^\omega \circ \sigma^l$ . Zu  $a'ba^{-1}$  sei  $\hat{a}'\hat{b}\hat{a}^{-1}$  die entsprechende Kurve. Nach Definition von  $\tau^\omega$  haben dann  $b$  und  $\hat{b}$  dieselbe orientierte Länge (wir nehmen an, dass alle Flächen so orientiert sind, dass die Markierungshomöomorphismen die Orientierung erhalten).

Somit gibt es eine Isometrie  $m^k : X^k(S) \rightarrow X^k(\hat{R})$ , welche  $a'$  auf  $\hat{a}'$ ,  $b$  auf  $\hat{b}$  und  $a$  auf  $\hat{a}$  abbildet. Weil  $\varepsilon^k$  homotop zu  $d\gamma d^{-1}\gamma'$  ist, sind auch  $m^k(\varepsilon^k(S))$  und  $\varepsilon^k(\hat{R})$  homotop. Nach der Eindeutigkeit von Geodätischen in ihrer Homotopieklasse erhält man

$$m^k \circ \varepsilon^k(S) = \varepsilon^k(\hat{R})$$

Daher ist die Einschränkung  $m^k|_{\varphi^k(Y^\mu)}$  die eindeutige Isometrie von  $\varphi^k(Y^\mu)$  nach  $\hat{\varphi}^k(Y^\mu)$  mit  $m^k(c) = \hat{\varphi}^k \circ (\varphi^k)^{-1}(c)$  für jede Randgeodätische  $c$  von  $\varphi^k(Y^\mu)$ . Somit setzen sich die einzelnen Isometrien

$$\hat{\iota}_k \circ m^k \circ (\iota'_k)^{-1} : \iota'_k(\text{int } X^k(S)) \rightarrow \hat{\iota}_k(\text{int } X^k(\hat{R})), \quad k = 1, \dots, 3g - 3$$

zu einer einzelnen Isometrie  $m : S \rightarrow \hat{R}$  zusammen, welche

$$m \circ \varepsilon^k(S) = \varepsilon^k(\hat{R}), \quad k = 1, \dots, 3g - 3$$

erfüllt. Nach Satz 4.2.40 gilt dann  $[S, \varphi] = [R^\omega, \varphi^\omega]$ .

Nun zur Injektivität: Seien  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$  mit  $[R^\omega, \varphi^\omega] = [R^{\omega'}, \varphi^{\omega'}]$ . Dann gibt es also eine Isometrie  $m : R^\omega \rightarrow R^{\omega'}$ , so dass  $m \circ \varphi^\omega$  homotop zu  $\varphi^{\omega'}$  ist. Also wird  $\Omega(R^\omega)$  durch  $m$  auf  $\Omega(R^{\omega'})$  abgebildet. Daher gilt  $L\Omega(R^\omega) = L\Omega(R^{\omega'})$ . Aus Satz 4.2.39 folgt dann  $\omega = \omega'$ .  $\square$

Wir erhalten also durch die Fenchel-Nielsen Koordinaten eine Bijektion

$$\Lambda : \mathcal{R}^{6g-6} := \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathcal{T}_g$$

Diese Bijektion hängt jedoch noch von der gewählten Zerlegung unseres Basisraumes  $S_g$  in Y-Stücke ab. Es lässt sich allerdings zeigen, dass für die Fenchel-Nielsen Koordinaten  $\Lambda, \Lambda' : \mathcal{R}^{6g-6} \rightarrow \mathcal{T}_g$  zu zwei unterschiedlichen Zerlegungen die Übergangsfunktion

$$\Lambda^{-1} \circ \Lambda' : \mathcal{R}^{6g-6} \rightarrow \mathcal{R}^{6g-6}$$

reell analytisch ist. Dies erlaubt es dann eine Topologie zusammen mit einer *analytischen Struktur* auf  $\mathcal{T}_g$  zu definieren. Im Gegensatz zum Modulraum  $\mathcal{M}_g$  besitzt  $\mathcal{T}_g$  also tatsächlich die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Dies zu zeigen ist jedoch deutlich mehr Aufwand und kann deshalb in dieser Arbeit leider nicht nachvollzogen werden. Wir verweisen deshalb auf [Bus92, Kap. 6.3].



# A. Anhang

## A.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Für eine offene Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , eine stetige Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $(t_0, u_0) \in G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ist eine Anfangswertaufgabe (AWA) in Standardform gegeben durch:

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Hierbei wird eine stetig differenzierbare Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$  Umgebung von  $t_0$ ), welche die Standard-AWA (A.1) löst, d.h.:

- (i)  $\text{Graph}(u) := \{(t, u(t)) \mid t \in I\} \subseteq G$
- (ii)  $u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I$
- (iii)  $u(t_0) = u_0$

Ein solches  $u$  heißt dann *Lösung* von (A.1).

**Definition A.1.1** (lokal Lipschitz).  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *lokal Lipschitz* in  $x$ , falls zu jedem Punkt  $(t_1, x_1) \in G$  eine Kugel  $\overline{B}_r(x_1)$  und ein  $\alpha > 0$  mit  $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha] \times \overline{B}_r(x_1) \subseteq G$ , sowie eine Konstante  $L = L(t_1, x_1) > 0$  existieren, so dass gilt:

$$|f(t, x) - f(t, \bar{x})| \leq L(t_1, x_1)|x - \bar{x}|, \quad \text{falls } |t - t_1| \leq \alpha \text{ und } x, \bar{x} \in \overline{B}_r(x_1)$$

**Bemerkung A.1.2.** Ist  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ , dann ist  $f$  auch lokal Lipschitz.

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem Mittelwertsatz. Für einen ausführlichen Beweis siehe [Wil10, S.30].  $\square$

Es gelten die folgenden Sätze über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten:

**Satz A.1.3** (Picard-Lindelöf). Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz in  $x$ , dann existiert ein  $\delta > 0$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in C^1(J_\delta, \mathbb{R}^n)$  mit  $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  von A.1.

*Beweis.* Siehe [Wil10, S.27 f.].  $\square$

Bezeichnet man mit  $u(t; t_0, y)$  die Lösung von (A.1), so gilt:

**Satz A.1.4** (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten). Die Abbildung  $(t, t_0, y) \mapsto u(t; t_0, y)$  ist stetig differenzierbar, wenn  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.* Siehe [Wil10, S.77 ff.].  $\square$

## A.2. Gruppenoperationen

Sei im Folgenden  $(G, \cdot)$  eine Gruppe mit neutralem Element 1 und  $X$  eine beliebige Menge.

**Definition A.2.1** (Gruppenoperationen). Eine (*Links-*)*Operation* von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung

$$* : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g * x$$

mit

- (i)  $1 * x = x$  für alle  $x \in X$
- (ii)  $h * (g * x) = (h \cdot g) * x$  für alle  $x \in X$  und  $g, h \in G$

Man sagt dann: Die Gruppe  $G$  operiert auf  $X$  (von links) via  $*$ .

Eine *Rechtsoperation* von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung

$$\star : X \times G \rightarrow X, (x, g) \mapsto x \star g$$

mit

- (i)  $x \star 1 = x$  für alle  $x \in X$
- (ii)  $(x \star g) \star h = x \star (g \cdot h)$  für alle  $x \in X$  und  $g, h \in G$

Man sagt dann: Die Gruppe  $G$  operiert auf  $X$  von rechts via  $\star$ .

*Anmerkung.* Der Unterschied zwischen einer Rechts- und einer Linksoperation ist kein reiner Notationsunterschied! Würde man für eine Linksoperation  $* : G \times X \rightarrow X$  einfach die "Rechtsoperation"  $\star : X \times G \rightarrow X, (x, g) \mapsto x \star g := g * x$  definieren wollen, so wäre (ii) nicht mehr erfüllt ( $x \in X; g, h \in G$ ):

$$(x \star g) \star h = (g * x) \star h = h * (g * x) = (h \cdot g) * x = x \star (h \cdot g)$$

Im Folgenden werden wir o.E. nur Linksoperationen betrachten, da sich die entsprechenden Definitionen analog für Rechtsoperationen angeben lassen. Sei also im weiteren  $* : G \times X \rightarrow X$  eine Linksoperation oder kurz Gruppenoperation.

**Bemerkung A.2.2.** Für  $g \in G$  folgt, dass die Abbildung  $\varphi_g : X \rightarrow X, x \mapsto g * x$  eine Bijektion ist ( $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ). Setzt man  $\text{Aut}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$ , dann ist  $\text{Aut}(X)$  mit der Konkatenation von Abbildungen eine Gruppe und  $G \rightarrow \text{Aut}(X), g \mapsto \varphi_g$  ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition A.2.3** (Orbit). Die Menge  $Gx = \{g * x \mid g \in G\}$  heißt *Orbit* oder *Bahn* von  $x \in X$ .

**Definition A.2.4** (Stabilisator). Die Menge  $G_x := \text{Stab}(x) := \{g \in G \mid g * x = x\}$  ist eine Untergruppe von  $G$  und heißt *Isotropiegruppe* oder *Stabilisator* von  $x \in X$ .

**Definition A.2.5** (transitiv). Die Gruppenoperation heißt *transitiv*, wenn es nur einen Orbit gibt (nämlich  $X$ ).

**Definition A.2.6** (Fixpunkt).  $x \in X$  heißt Fixpunkt, wenn  $\text{Stab}(x) = G$

**Definition A.2.7** (Orbitraum). Die Gruppenoperation definiert eine Äquivalenzrelation auf  $X$ , nämlich:

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g * x = y$$

Man bezeichnet dann mit  $X/G$  die Menge aller Äquivalenzklassen und nennt diese den *Orbitraum*.

# Literaturverzeichnis

- [Bea95] Beardon, Alan F.: *The Geometry of Discrete Groups*. Springer, 1995.
- [Bri09] Bridson, M. R.: *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer, 2009.
- [Bus92] Buser, P.: *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser, 1992.
- [FB06] Freitag, E. und Busam, R.: *Funktionentheorie 1*. Springer, 2006.
- [Fre09] Freitag, E.: *Funktionentheorie 2*. Springer, 2009.
- [Hat10] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2010.
- [IT92] Iwayoshi, Y. und Taniguchi, M.: *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer, 1992.
- [Jos06] Jost, J.: *Compact Riemann Surfaces*. Springer, 2006.
- [Jä05] Jänich, K.: *Vektoranalysis*. Springer, 2005.
- [KK07] Köcher, M. und Krieg, A.: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 2007.
- [Mas91] Massey, W.: *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [Ran11] Rannacher, R.: *Höhere Analysis*. <http://numerik.iwr.uni-heidelberg.de/~lehre/notes/ana3/analysis3.pdf>, 2011.
- [tom00] tom Dieck, T.: *Topologie*. Springer, 2000.
- [Wil10] Wilke, M.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Birkhäuser, 2010.