

# Algorytmy i struktury danych

## Lista zadań 6

### Zadanie 1

Jakie informacje przechowujemy w węźle drzewa czerwono-czarnego? Zadeklaruj strukturę **RBTnode** tak, by dziedziczyła z **BSTnode**. Podaj definicję drzewa czerwono czarnego.

```
struct NodeBST
{
    int32_t value;
    NodeBST* left;
    NodeBST* right;
};

struct NodeRBT : public NodeBST
{
    bool isBlack;
};
```

Drzewo czerwono-czarne musi przestrzegać następujące wymagania:

1. Każdy węzeł jest albo czerwony albo czarny.
2. Korzeń jest czarny.
3. Każdy liść jest czarny.
4. Czerwony węzeł ma czarnego ojca.
5. Każda ścieżka od korzenia do liścia ma tę samą liczbę czarnych węzłów.

### Zadanie 2

- (a) Jaka może być minimalna, a jaka maksymalna ilość kluczy w drzewie czerwono-czarnym o ustalonej czarnej wysokości równej  $h_B$ ?

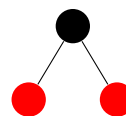
$$\begin{aligned}\min &= 2^{h_B} - 1 \\ \max &= 2^{2(h_B)} - 1\end{aligned}$$

- (b) Znajdź maksymalną i minimalną wartość stosunku ilości węzłów czerwonych do czarnych w drzewie czerwono-czarnym.

min = 0/1



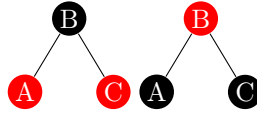
max = 2/1



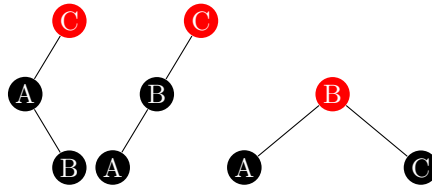
### Zadanie 3

Uzasadnij posługując się rysunkiem i opisem, że operacje wykonywane w trakcie wstawiania do drzewa czerwono-czarnego (rotacja i przekolorowanie) nie zmieniają ilości czarnych węzłów, na żadnej ścieżce od korzenia do liścia.

Operacja przekolorowania nie zmienia ilości czarnych węzłów na żadnej ścieżce od korzenia do liścia, ponieważ czarny kolor z węzła położonego bliżej korzenia czy też rodzica zostanie przetransferowany do każdego z jego dzieci których ścieżka do korzenia przechodzi przez niego, a więc czarna wysokość nie ulegnie zmianie na żadnej ścieżce.

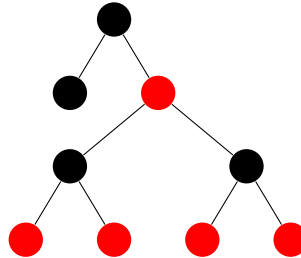


W przypadku rotacji których wyróżniamy dwa rodzaje, tylko przy jednej z nich dochodzi do zmiany kolorów węzłów i w tej sytuacji węzły które w jej trakcie zmieniają swój poziom w drzewie jednocześnie zamieniają się kolorami, co efektywnie skutkuje rezultatem analogicznym do przekolorowania, czyli czarna wysokość na żadnej ścieżce od korzenia do liścia nie ulega zmianie.



### Zadanie 4

- (a) Narysuj poprawne drzewo czerwono-czarne w którym na lewo od korzenia jest 1 węzeł a na prawo 7 węzłów.



- (b) Czy istnieje poprawne drzewo czerwono-czarne, w którym na lewo od korzenia będzie 100 razy mniej węzłów niż na prawo od korzenia?

$$100(2^{h_B-1} - 1) < 2^{2(h_B-1)} - 1$$

$h_B - 1$	min	100 min	max
1	0	0	0
2	1	100	3
3	3	300	15
4	7	700	63
5	15	1500	255
6	31	3100	1023
7	63	6300	4095
8	127	12700	16383

Istnieje takie drzewo czerwono-czarne, w którym na lewo od korzenia jest 100 razy mniej węzłów niż na prawo. Dla czarnej wysokości  $h_B = 9$  po lewej stronie minimalnie może być 127 węzłów, a po prawej 16383.

$$100 (2^{8-1} - 1) < 2^{2(8-1)} - 1$$

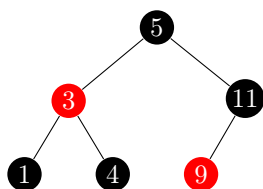
$$100 (2^7 - 1) < 2^{2(7)} - 1$$

$$100 (127) < 2^{14} - 1$$

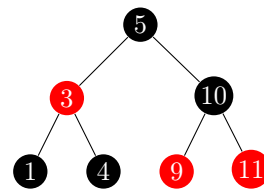
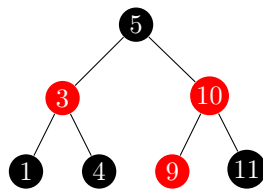
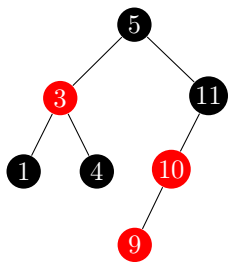
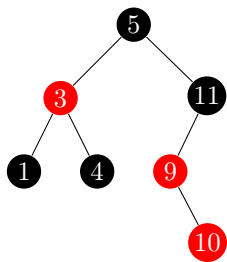
$$12700 < 16383$$

## Zadanie 5

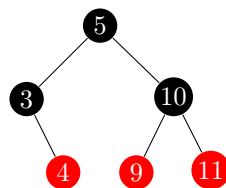
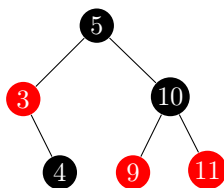
W poniższym drzewie czerwono-czarnym:



- wstaw do niego 10.



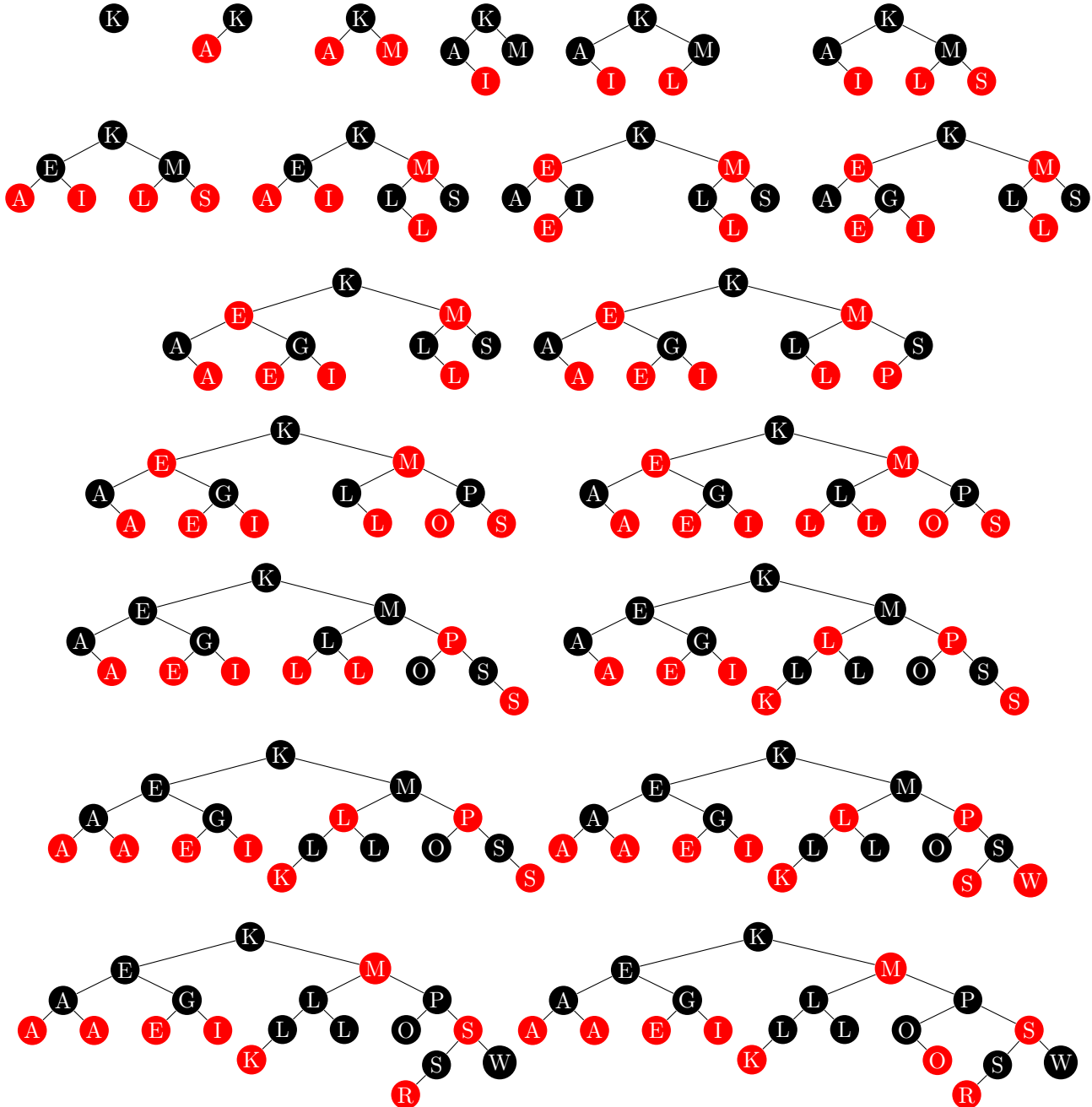
- usuń z wyjściowego drzewa 1.



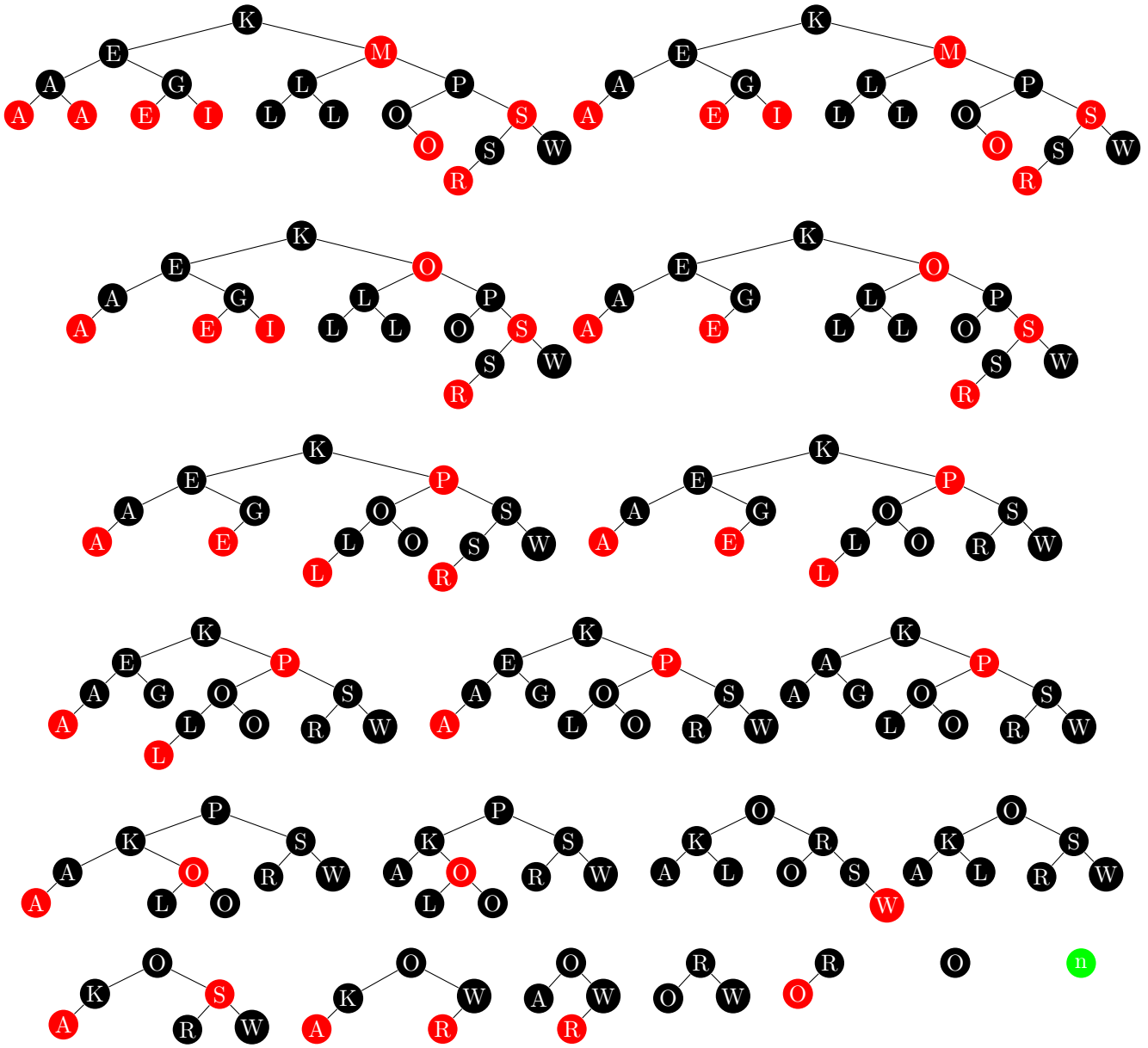
## Zadanie 6

(3 pkt.) Do pustego drzewa czerwono-czarnego wstaw kolejno 20 przypadkowych kluczy. Następnie usuń je w tej samej kolejności w jakiej wstawiałeś. Przypadkowymi kluczami są kolejne litery Twojego nazwiska, imienia i adresu. Zadanie wykonujemy na kartce (lub w pliku) i oddajemy prowadzącemu. Zadanie jest obowiązkowe.

### Wstawianie



# Usuwanie



## Zadanie 7

Analizując kod programu `RBT.h` udowodnij, że w trakcie wstawiania do drzewa czerwono-czarnego wykonają się co najwyżej dwie rotacje. Czy tak samo jest w przypadku usuwania?

Bezpośrednio w samej procedurze `insert` nie ma żadnych rotacji. Rotacje mogą wystąpić dopiero w procedurze `fix_up`, która jest wywoływana jest co najwyżej raz, zaraz po wstawieniu nowego węzła.

Wiedząc że procedura `fix_up` wykonuje się co najwyżej jednokrotnie, możemy zatem stwierdzić, że maksymalna liczba rotacji wynosi dwie, co uwiadcniają poniższe fragmenty kodu z procedury `fix_up`.

```
...
for (;;)
    if (x < t->key)
    {
        if (t->left)
            t = t->left;
        else
        {
            t->left = new node(x, t);
            fix_up(t->left);
            break;
        }
    }
    else
    {
        if (t->right)
            t = t->right;
        else
        {
            t->right = new node(x, t);
            fix_up(t->right);
            break;
        }
    }
...

...
else
{
    if (t == p->right)
        rotate_left(p);
    rotate_right(pp);
    return;
}
...
else
{
    if (t == p->left)
        rotate_right(p);
    rotate_left(pp);
    return;
}
...
```

W przypadku usuwania, istnieje możliwość wystąpienia więcej niż dwóch rotacji, dlatego że procedura `rem_fix_up` wywołana najwyżej raz zawiera pętlę `while` której ilość iteracji zależna jest od wysokości drzewa, a co za tym idzie dla większych wysokości drzewa, ilość możliwych rotacji będzie wzrastać.

## Zadanie 8

Uzasadnij, że rozmiar stosu ( $n = 100$ ) przyjęty w procedurach `insert` i `remove` w pliku `RBnpnr.h` nigdy nie okaże się za mały.

Wiedząc że na stos przyjęty w procedurach `insert` i `remove` trafiają kolejne odwiedzone węzły drzewa w trakcie szukania miejsca do wstawienia nowego węzła w przypadku procedury `insert` oraz dodatkowo w trakcie szukania następnika w przypadku procedury `remove` wiadomo że nie trafi tam więcej węzłów niż wynosi wysokość samego drzewa. Przyglądając się ilości węzłów w drzewie o takiej wysokości

$$\begin{aligned}n_{min} &= 2^{h-1} = n_{max} = 2^{99} - 1 = 633825300114114700748351602687 \\ n_{max} &= 2^h - 1 = n_{max} = 2^{100} - 1 = 1267650600228229401496703205375\end{aligned}$$

możemy zauważyć, że stos nigdy nie będzie za mały, ponieważ gdyby nawet przyjąć że każdy węzeł trzyma jeden bit informacji, to łączna pamięć tego drzewa wynosząca  $7.923 \cdot 10^{28}$  bajtów, lub inaczej 79.23 ronnabajtów jest praktycznie nieosiągalna dla współczesnych komputerów. Dla porównania taka pamięć byłaby w stanie pomieścić  $8.7 \cdot 10^{11}$  razy szacowany rozmiar deep webu, który wynosi około 91000 terabajtów, czy też  $4.7 \cdot 10^{14}$  raza szacowany rozmiar widzialnej sieci internetowej, który wynosi około 170 terabajtów.