Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 4

Zadanie 1

Skorzystaj z metody rekurencji uniwersalnej i podaj dokładne asymptotyczne oszacowania dla następujących rekurencji:

(a) $n^{1/2} = \Theta(n^{log_4 2}) \implies T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} = \Theta(n^{1/2} logn)$

(b) $n = \Omega(n^{log_4 3+\epsilon})$ dla $\epsilon < 0.2 \implies T(n) = 3T(n/4) + n = \Theta(n)$

(c) $n^{3/2} = \Theta(n^{log_4 8}) \implies T(n) = 8T(n/4) + n\sqrt{n} = \Theta(n^{3/2} logn)$

(d)

$$T(n) = 2T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$$
$$m = \log n,\, U(m) = T\left(e^m\right) = T\left(e^{\log n}\right) = T(n)$$
$$U(m) = 2T\left(e^{\log n^{\frac{1}{2}}}\right) + 1 = 2T\left(e^{\frac{1}{2}\log n}\right) + 1 = 2T\left(e^{\frac{m}{2}}\right) + 1 = 2U\left(\frac{m}{2}\right) + 1$$
$$1 = O\left(m^{log_2 2-\epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 1 \implies U(m) = \Theta(m)$$
$$T(n) = U(m) = U(\log n) = \Theta(m) = \Theta(\log n)$$

Zadanie 2

Czas działania algorytmu A opisany jest przez rekurencję $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Algorytm konkurencyjny A' ma czas działania $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$. Jaka jest największa liczba całkowita a, przy której A' jest asymptotycznie szybszy niż A?

$$n^2 = O\left(n^{log_2 7-\epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 0.80 \implies T(n) = 7T(n/2) + n^2 = \Theta\left(n^{log_2 7}\right)$$
$$n^2 = O\left(n^{log_4 a-\epsilon}\right) \implies T'(n) = aT'(n/4) + n^2 = \Theta\left(n^{log_4 a}\right)$$
$$n^{log_4 a} < n^{log_2 7}$$
$$n^{\frac{1}{2}log_2 a} < n^{log_2 7}$$

$$T'(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^2\right) & \text{dla } a \in [1, 15] \\ \Theta\left(n^2 logn\right) & \text{dla } a = 16 \\ \Theta\left(n^{log_4 a}\right) & \text{dla } a \in [17, \infty) \\ \Theta\left(n^{log_4 49}\right) = \Theta\left(n^{log_2 7}\right) & \text{dla } a = 49 \end{cases}$$

Zadanie 3

Rozważmy warunek regularności $af(n/b) \le cf(n)$ dla pewnej stałej $c \le 1$, który jest częścią przypadku 3 twierdzenia o rekurencji uniwersalnej. Podaj przykład prostej funkcji $f(n)$, które spełnia wszystkie warunki twierdzenia o rekurencji uniwersalnej z wyjątkiem warunku regularności.

$$af(n/b) \le cf(n),\ a \ge 1,\ b > 1,\ c \le 1$$
$$T(n) = T(n/2) + \sin\frac{n\pi}{2} + 2 \cdot \sqrt{n}$$
$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{n} \le c \sin(n\pi) + 2 \cdot \sqrt{2n}$$
$$(1+2) \cdot \sqrt{n} \le c(0+2) \cdot \sqrt{2n}$$

Zadanie 4

Zasymuluj działanie polifazowego mergesorta dla tablicy:

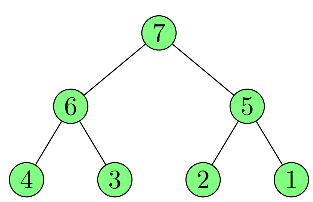
`{9,22,6,19,21,14,10,17,3,5,60,30,29,1,8,7,6,15,12}`.

W sortowaniu polifazowym na każdym etapie sortowania scala się sąsiadujące podciągi rosnące, to znaczy: w pierwszym przebiegu `{9,22}` z `{6,19,21}`, `{14}` z `{10,17}` itd..

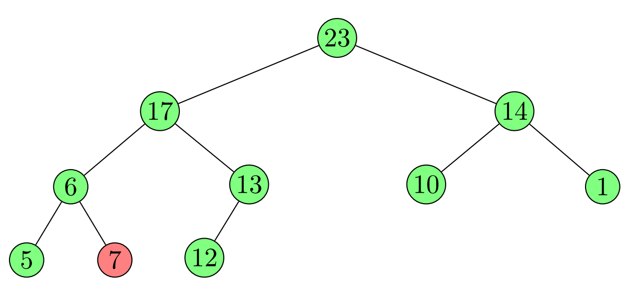
```
{9,22|6,19,21|14|10,17|3,5,60|30|29|1,8|7|6,15|12}
{6,9,19,21,22|10,14,17|3,5,30,60|1,8,29|6,7,15|12}
{6,9,10,14,17,19,21,22|1,3,5,8,29,30,60|6,7,12,15}
{1,3,5,6,8,9,10,14,17,19,21,22,29,30,60|6,7,12,15}
{1,3,5,6,6,7,8,9,10,12,14,15,17,19,21,22,29,30,60}
```

Zadanie 5

(a) Czy tablica posortowana malejąco jest kopcem?



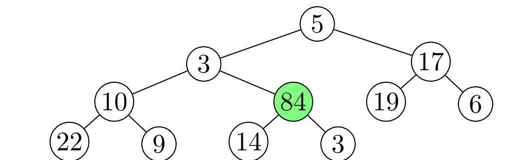
(b) Czy ciąg `{23,17,14,6,13,10,1,5,7,12}` jest kopcem?



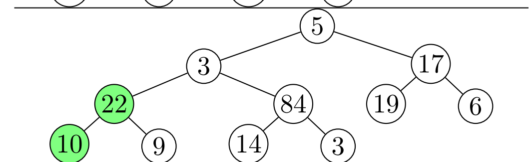
Zadanie 6

Zilustruj działanie procedury `buildheap` dla ciągu `{5,3,17,10,84,19,6,22,9,14,3}`. Narysuj na kartce wygląd tablicy i kopca po każdym wywołaniu procedury przesiej.

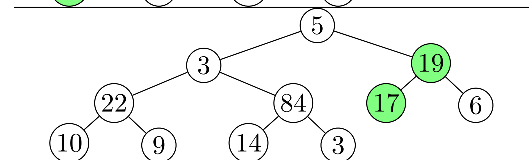
`{5,3,17,10,84,19,6,22,9,14,3}`



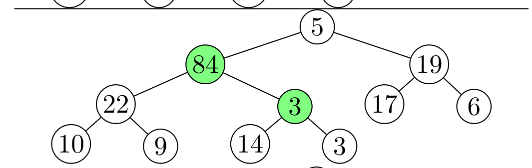
`{5,3,17,22,84,19,6,10,9,14,3}`
`{5,3,17,22,84,19,6,10,9,14,3}`

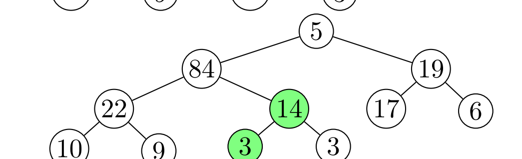


`{5,3,19,22,84,17,6,10,9,14,3}`
`{5,3,19,22,84,17,6,10,9,14,3}`

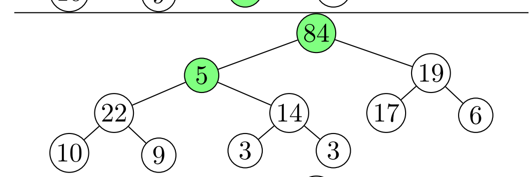


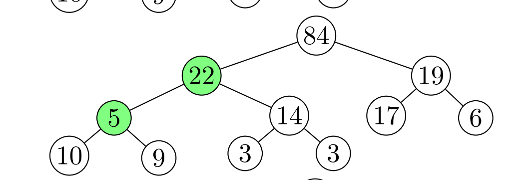
`{5,84,19,22,3,17,6,10,9,14,3}`
`{5,84,19,22,14,17,6,10,9,3,3}`
`{5,84,19,22,14,17,6,10,9,3,3}`

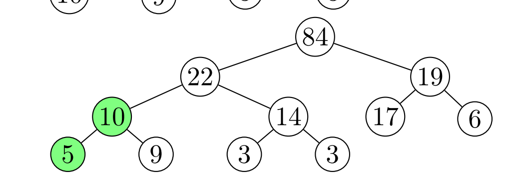




`{84,5,19,22,14,17,6,10,9,3,3}`
`{84,22,19,5,14,17,6,10,9,3,3}`
`{84,22,19,10,14,17,6,5,9,3,3}`
`{84,22,19,10,14,17,6,5,9,3,3}`







Zadanie 7

Metodą jak na wykładzie, udowodnij, że procedura `build_heap` działa w czasie $O(n)$.

$$2\left(\frac{n}{4}\cdot 1+\frac{n}{8}\cdot 2+\frac{n}{16}\cdot 3+\frac{n}{32}\cdot 4+\dots\right)$$
$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\dots\right)$$
$$\frac{n}{2}\cdot 4=2n$$

Zadanie 8

Udowodnij, że wysokość kopca n-elementowego wynosi $\lfloor \log_2 n\rfloor + 1$.

$$\text{Maksymalna ilość węzłów w kopcu o wysokości } h\text{:}$$
$$n(h)=2^h-1$$
$$n(h-1)=2^{h-1}-1$$
$$\text{Minimalna ilość węzłów w kopcu o wysokości } h\text{:}$$
$$n(h-1)+1=2^{h-1}-1+1=2^{h-1}$$
$$\text{Ilość węzłów w kopcu o wysokości } h\text{:}$$
$$2^{h-1}\le n<2^h$$
$$h-1\le \log_2 n<h$$
$$h\le \log_2 n+1<h+1$$
$$\lfloor \log_2 n\rfloor+1$$

Zadanie 11

Niech F_n oznacza ilość różnych kształtów drzew binarnych o n węzłach. Rysując drzewa, łatwo sprawdzić, że $F_0=1, F_1=1, F_2=2, F_3=5$, itd. Nie korzystając z internetu:

(a) Znajdź wzór wyrażający F_n przez $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ dla $n=2,3,4$ a potem ogólnie.

$$F_0=1, F_1=1$$
$$F_2=2=F_0F_1+F_1F_0$$
$$F_3=5=F_0F_2+F_1F_1+F_2F_0$$
$$F_4=14=F_0F_3+F_1F_2+F_2F_1+F_3F_0$$
$$F_n=\sum_{i=1}^{n}F_{i-1}F_{n-i}$$

(b) Zaprojektuj (na kartce) procedurę, która oblicza kolejne wyrazy ciągu F_n, zapisuje je w tablicy i korzysta z nich przy obliczaniu następnych wyrazów.

```
F[0] = 1
F[1] = 1
for i = 2 to n:
```

```
F[i] = 0
for j = 1 to i:
    F[i] += F[j-1] * F[i-j]
```

(c) Przeanalizuj ile mnożeń trzeba wykonać, by obliczyć wyrazy od F_1 do F_n. Czy da się ją zapisać w postaci $O(n^k)$ dla pewnego k?

$$\text{Ilośc mnożeń: } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(1+n)}{2} = O(n^2)$$

(d) Jaka byłaby złożoność algorytmu rekurencyjnego, który nie korzysta z wartości zapisanych w tablicy, tylko oblicza je ponownie. Czy da się ją zapisać jako $O(n^k)$?

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{k(1+k)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = O(n^3)$$