Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 4

Zadanie 1

Skorzystaj z metody rekurencji uniwersalnej i podaj dokładne asymptotyczne oszacowania dla następujących rekurencji:

(a) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} = \Theta(n^{1/2} logn)$, $n^{1/2} = \Theta(n^{log_4 2})$

(b) $T(n) = 3T(n/4) + n = \Theta(n)$, $n = \Omega(n^{log_4 3})$

(c) $T(n) = 8T(n/4) + n\sqrt{n} = \Theta(n^{3/2} logn)$, $n^{3/2} = \Theta(n^{log_4 8})$

(d)

$$T(n) = 2T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$$
$$m = \log n,\ U(m) = T\left(e^m\right) = T\left(e^{\log n}\right) = T(n)$$
$$U(m) = 2T\left(e^{\log n^{\frac{1}{2}}}\right) + 1 = 2T\left(e^{\frac{1}{2}\log n}\right) + 1 = 2U\left(\frac{m}{2}\right) + 1$$
$$1 = O\left(m^{log_2 2 - \epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 1 \implies U(m) = \Theta(m)$$
$$T(n) = U(m) = U(\log n) = \Theta(m) = \Theta(\log n)$$

Zadanie 2

Czas działania algorytmu A opisany jest przez rekurencję $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Algorytm konkurencyjny A' ma czas działania $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$. Jaka jest największa liczba całkowita a, przy której A' jest asymptotycznie szybszy niż A?

$$n^2 = O\left(n^{log_2 7 - \epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 0.80 \implies T(n) = 7T(n/2) + n^2 = \Theta\left(n^{log_2 7}\right)$$
$$n^2 = O\left(n^{log_4 a - \epsilon}\right) \implies T'(n) = aT'(n/4) + n^2 = \Theta\left(n^{log_4 a}\right)$$
$$n^{log_4 a} < n^{log_2 7}$$
$$n^{\frac{1}{2} log_2 a} < n^{log_2 7}$$

$$T'(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^2\right) & \text{dla } a \in \langle 1, 15 \rangle \\ \Theta\left(n^2 logn\right) & \text{dla } a = 16 \\ \Theta\left(n^{log_4 a}\right) & \text{dla } a \in \langle 17, 48 \rangle \\ \Theta\left(n^{log_4 49}\right) = \Theta\left(n^{log_2 7}\right) & \text{dla } a = 49 \end{cases}$$