Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 2

Zadanie 1

Ile trzeba porównań, by znaleźć element x w nieuporządkowanej tablicy `t` o rozmiarze n. Oblicz wartość średnią i wariancję zakładając, że element x może znajdować się z jednakowym prawdopodobieństwem, pod dowolnym indeksem tablicy.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n}\right) n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$= \frac{4n^2+6n+2}{12} - \frac{3n^2+6n+3}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Zadanie 2

Bisekcja. Ile trzeba porównań, by znaleźć element x w posortowanej tablicy `t` o rozmiarze n. Podaj minimalną wartość gwarantującą sukces i strategię, jak to zrobić. Postaraj się podać wzór ogólny, który pozwoli wyliczyć dokładną wartość dla dowolnego n. Sprawdź go dla $n = 1, \ldots, 20$.

1. Oblicz środek przedziału.
2. Jeżeli wartość w środku przedziału jest większa od x, to środek staje się lewym końcem przedziału.
3. W przeciwnym wypadku środek staje się prawym końcem przedziału.

$$n = 1 \implies 1$$
$$n = 2 \implies 2$$
$$n = 4 \implies 3$$
$$n = 8 \implies 4$$
$$n = 16 \implies 5$$
$$n = 20 \implies 6$$
$$\lceil \log_2 n \rceil + 1$$

Zadanie 3

Rozważ trzy wersje znajdowania maksimum w tablicy `int maks(int t[], int n)`. Ile porównań między elementami tablicy n-elementowej wykonuje każda z wersji? Ile pamięci wymaga każda z tych wersji? Uwzględnij fakt, że głębokość rekurencji ma wpływ na zużycie pamięci, ponieważ powstaje wiele kopii zmiennych lokalnych. Która wersja jest więc najlepsza?

(a) iteracyjna: `{int x = a[--n]; while(n--) if(t[n] > x) x = t[n]; return x;}`

$$n - 1 \text{ porównań i } 3 \text{ zmienne lokalne}$$

(b) rekurencyjnie oblicza maksimum $n - 1$ elementów i porównuje z ostatnim elementem

$$n - 1 \text{ porównań i } 3n \text{ zmiennych lokalnych}$$

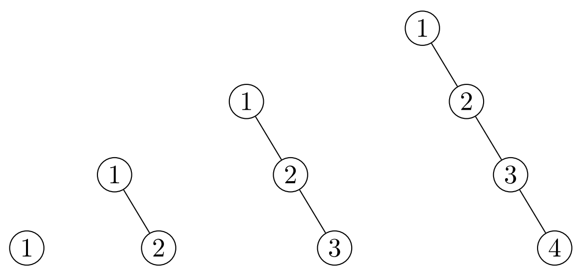
(c) dzieli tablicę na dwie części, rekurencyjnie znajduje ich maksima i wybiera większe z nich.

$$2(n/2 - 1) + 1 = n - 1 \text{ porównań i } 2(3n/2) + 2 = 3n + 2 \text{ zmiennych lokalnych}$$

Zadanie 4

Jakie drzewo powstanie po wstawieniu do pustego drzewa BST liczb od 1 do n w kolejności rosnącej? Jaka potem będzie głębokość drzewa? Ile porównań kluczy wykonano w trakcie tworzenia tego drzewa? Jaka jest złożoność w tego procesu w notacji O?

Uwaga: Element wstawiamy na pierwsze napotkane puste miejsce zaczynając od korzenia. Jeśli miejsce jest zajęte, to gdy element jest mniejszy od klucza w węźle, idziemy do lewego poddrzewa, a gdy większy lub równy – do prawego poddrzewa.



Głębokość drzewa: n

$$\text{Ilość porównań: } \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\text{Złożoność: } \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$$

Zadanie 5

Implementacja usuwania węzła X z drzewa binarnego działa wg następującego schematu:

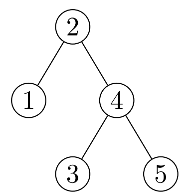
(a) jeśli X nie ma dzieci, to go usuwamy a wskaźnik na X zmieniamy na `NULL`.

(b) jeśli X ma jedno dziecko Y, to usuwamy X, a wskaźnik na X zastępujemy wskaźnikiem na Y.

(c) jeśli X ma dwoje dzieci, to znajdujemy najmniejszy element Y w jego prawym poddrzewie, dane i klucz z węzła Y kopiujemy do X i usuwamy Y.

Uzasadnij, dlaczego postępowanie wg punktu (c) nie psuje prawidłowego rosnącego porządku kluczy wypisywanych w porządku inorder i dlaczego Y ma co najwyżej jedno dziecko, więc do jego usunięcia można zastosować punkt (a) lub (b).

Zastąpienie węzła X mającego dwoje dzieci polegające na znalezieniu najmniejszego elementu w prawym poddrzewie X nie psuje porządku `inorder`, ponieważ najmniejszy element prawego poddrzewa jest idealnym kandydatem na jego miejsce, dzięki temu że jest większy od wszystkich elementów w lewym poddrzewie X, a mniejszy od wszystkich elementów w prawym poddrzewie X.



Do usunięcia węzła Y możemy zastosować punkt (a) lub (b), ponieważ Y ma co najwyżej jedno dziecko, ponieważ jeśli Y ma dwoje dzieci, to jego lewe dziecko było by mniejsze od Y, co oznacza że Y nie jest najmniejszym elementem.

Zadanie 6

Uzasadnij, że w każdym drzewie BST zawsze ponad połowa wskaźników (pól `left` i `right`) jest równa `NULL`.

Na każdy węzeł drzewa BST przypadają dwa wskaźniki, `left` i `right`, które wskazują na lewe i prawe poddrzewo. Drzewo składające się z samego korzenia ma 2 wskaźniki równe `NULL`. Każde dodanie węzła zwiększy łączną liczbę węzłów o 2 i zmniejszy liczbę węzłów równych `NULL` o 1.

$$\text{Liczba węzłów: } n$$
$$\text{Liczba wskaźników: } 2n$$
$$\text{Liczba wskaźników równych NULL: } n+1$$

$$n+1 > \frac{2n}{2}$$
$$n+1 > n$$

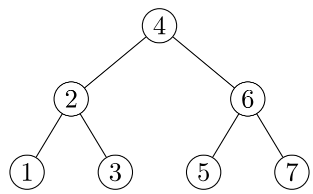
Zadanie 7

Ile maksymalnie węzłów może mieć drzewo BST o głębokości h? Wylicz dokładną wartość, przyjmując, że głębokość oznacza ilość poziomów, na których występują węzły (sam korzeń: $h = 1$, korzeń i dzieci: $h = 2 \ldots$). Skorzystaj z wzoru na sumę ciągu geometrycznego. Wywnioskuj, jaka jest najmniejsza, a jaka największa głębokość drzewa binarnego o n węzłach?

$$\begin{aligned}
\text{Maksymalna ilość węzłów: } & \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^h)}{1-2} = 2^h - 1 \\
\text{Najmniejsza głębokość: } & 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor \\
\text{Największa głębokość: } & n
\end{aligned}$$

Zadanie 8

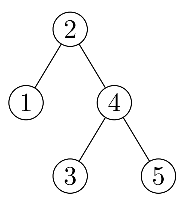
Przeanalizuj operacje `find, insert, remove` zawarte w pliku `tree-2023-recursive.cc`. Jak ich pesymistyczna złożoność czasowa $T(h)$ zależy od głębokości drzewa h?



$$\begin{aligned}
\text{find: } & T(h) = \Theta(h) \\
\text{insert: } & T(h) = \Theta(h) \\
\text{remove: } & T(h) = \Theta(h)
\end{aligned}$$

Zadanie 9

W pliku `tree-2023-recursive.cc` znajdziesz funkcję `int height(node *t)`, która wyliczy głębokość (ilość poziomów na jakich występują węzły) drzewa BST. Jak zależy czas wykonania tej funkcji od ilości n węzłów drzewa i/lub jego głębokości h? To samo zadanie wykonaj też dla funkcji `int count(node *t)`.



height	count
$T(n) = \Theta(n)$	$T(n) = \Theta(n)$
$T(h) = O(2^h - 1)$	$T(h) = O(2^h - 1)$