Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 7

Zadanie 1

Jakie informacje przechowujemy w węźle B-drzewa? Podaj definicję B-drzewa.

```
struct BTree
{
    uint32_t t;
    bool isLeaf;
    size_t n;
    int32_t *keys;
    size_t *offsets;
};
```

1. Każdy węzeł posiada n kluczy, przechowywanych w kolejności niemalejącej, a także informację o tym czy jest on liściem.
2. Dodatkowo każdy węzeł posiada $n + 1$ wskaźników do swoich dzieci.
3. Klucze węzła dzielą zbiór kluczy przechowywanych w jego dzieciach na $n + 1$ przedziałów.
4. Wszystkie liście znajdują się na tym samym poziomie równym wysokości drzewa h.
5. Każdy węzeł, z wyjątkiem korzenia, posiada co najmniej $t - 1$ kluczy.
6. Każdy węzeł może posiadać maksymalnie $2t - 1$ kluczy.

Zadanie 2

(2 pkt.) Udowodnij, że żadna z poniższych operacji wykonana na drzewie spełniającym wszystkie warunki B-drzewa, nie prowadzi do ich naruszenia.

(a) `split_child`, przesuwająca środkowy klucz (medianę) z węzła o $2t - 1$ kluczach do rodzica, który ma mniej niż $2t - 1$ kluczy, a klucze i dzieci na prawo od mediany – do nowego brata dodanego po prawej stronie dzielonego węzła.

(b) `unsplit_child` odwrotna do `split_child`, sklejająca dwa sąsiednie węzły o minimalnej liczbie kluczy $t - 1$ oraz klucz stojący w rodzicu między nimi w jeden nowy węzeł. Zakładamy, że rodzic ma co najmniej t kluczy lub jest korzeniem.

(c) `borrow_from_sibling`, rotacja przenosząca do węzła o minimalnej $t - 1$ liczbie kluczy, który ma prawego brata z co najmniej t kluczami, klucz stojący w rodzicu między braćmi i wpisująca na jego miejsce jego miejsce pierwszy klucz brata. Jakie operacje na dzieciach należy dodatkowo wykonać?

Zadanie 3

W B-drzewie o $t = 10$ podaj wzory i wyniki numeryczne określające:

(a) ile kluczy może zawierać korzeń (podaj przedział),

$$n_{minr} = 1 \qquad n_{max} = 2t - 1 = 19 \qquad \langle 1, 19 \rangle$$

(b) ile dzieci może mieć korzeń (podaj przedział),

$$nc_{minr} = 2 \qquad n_{max} = 2t - 1 + 1 = 20 \qquad \{0\} \cup \langle 2, 20 \rangle$$

(c) ile kluczy może mieć potomek korzenia (podaj przedział),

$$n_{min} = t - 1 = 9 \qquad n_{max} = 2t - 1 = 19 \qquad \langle 9, 19 \rangle$$

(d) ile dzieci może mieć potomek korzenia (podaj przedział),

$$nc_{min} = t = 10 \qquad n_{max} = 2t - 1 + 1 = 20 \qquad \langle 10, 20 \rangle$$

(e) ile maksymalnie węzłów może być na k-tym poziomie (przyjmując, że korzeń to poziom 0)

$$nc_{max}(k) = (2t)^k \qquad \text{dla } t = 10 \implies n_{max}(k) = 20^k$$

(f) ile łącznie kluczy może być na k-tym poziomie (podaj przedział).

$$nc_{min}(k) = \begin{cases} 2t^{k-1} & \text{dla } k \geq 1 \\ 1 & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$
$$n_{min}(k) = 2t^{k-1}(t-1) \qquad \langle 2t^{k-1}(t-1), (2t)^k(2t-1) \rangle$$
$$n_{max}(k) = (2t)^k(2t-1) \qquad \langle 2 \cdot 10^{k-1}9, 20^k 19 \rangle$$

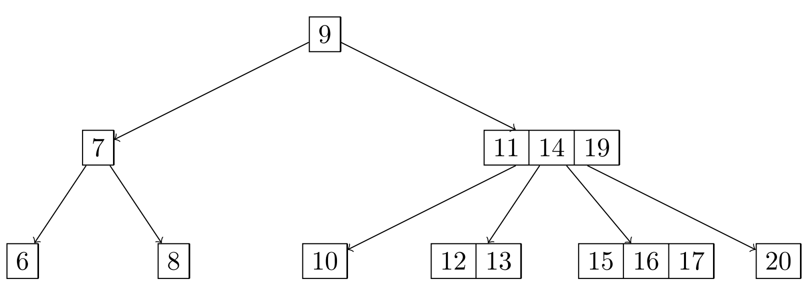
Zadanie 4

Jaka jest minimalna, a jaka maksymalna liczba kluczy w B-drzewie mającym h poziomów, przy ustalonej wartości parametru t (patrz Cormen).

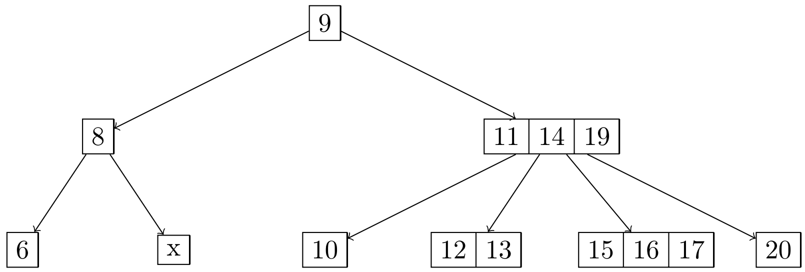
$$n_{min}(h) = 1 + \sum_{i=0}^{h-1} (2t)^{i-1}(t-1) = 1 + 2(t-1)\sum_{i=0}^{h-1} t^{i-1} = 1 + 2(t-1)\frac{t^{h-1}}{t-1} = 2t^{h-1} - 1$$
$$n_{max}(h) = \sum_{i=0}^{h-1} (2t)^i(2t-1) = (2t-1)\sum_{i=0}^{h-1} (2t)^i = (2t-1)\frac{(2t)^h - 1}{2t-1} = (2t)^h - 1$$

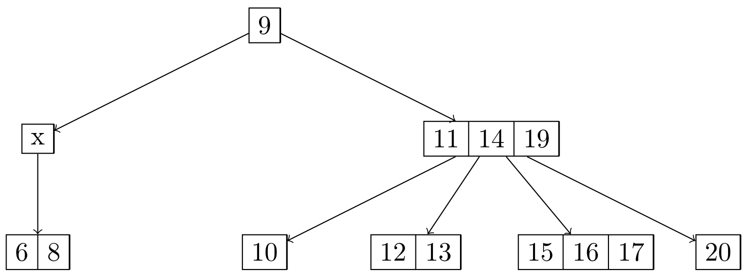
Zadanie 5

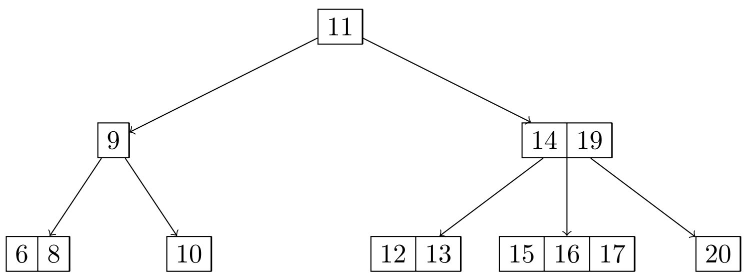
Podano na rysunku B-drzewo o $t = 2$:



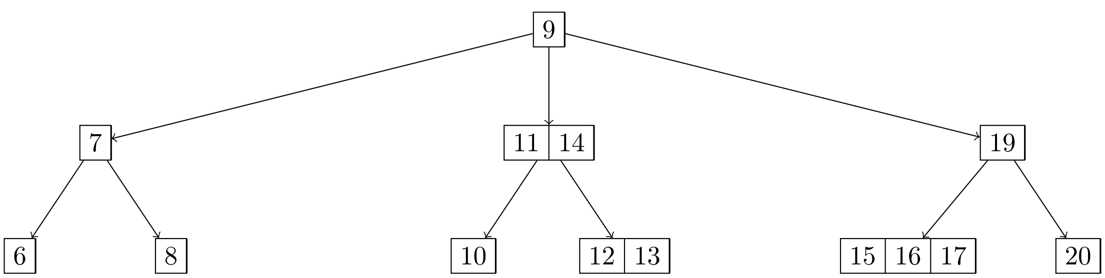
- usuń z tego drzewa 7.







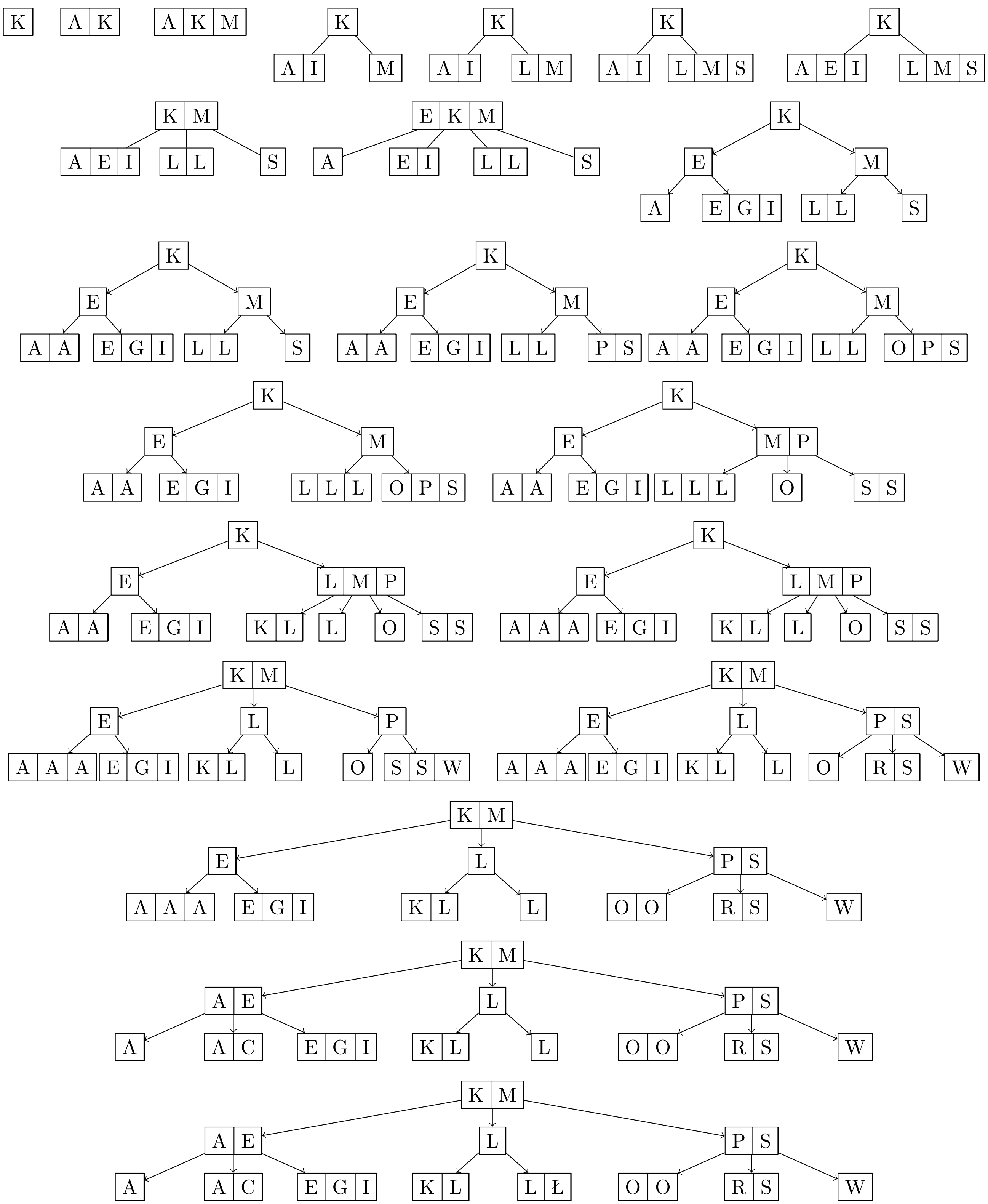
- do drzewa widocznego powyżej dodaj 18.



Zadanie 6

(2 pkt.) Do pustego B-drzewa o $t = 2$ wstaw kolejno 22 litery swojego imienia i nazwiska oraz adresu. Następnie usuń w tej samej kolejności w jakiej były wstawiane.

Wstawianie



Usuwanie

Zadanie 7

Narysuj B-drzewo o $t = 3$ zawierające dokładnie 17 kluczy na trzech poziomach: korzeń, jego dzieci i wnuki. Następnie usuń z tego drzewa korzeń.