

Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 1

Zadanie 1

Wyraż w notacji O złożoność następujących procedur:

- (a) Sprawdzenie czy liczba n ma dzielnik większy od 1 ale mniejszy od n .

$$\begin{aligned}f &< g \cdot c \\n - 2 &< n \cdot c \\n - 2 &< n \cdot 1 \text{ dla } n \geq 0 \\n - 2 &= O(n)\end{aligned}$$

- (b) Sprawdzenie czy liczba n ma dzielnik większy od 1 ale mniejszy lub równy \sqrt{n} .

$$\lceil \sqrt{n} \rceil - 1 = O(\sqrt{n})$$

- (c) Wyznaczenie wszystkich liczb pierwszych z przedziału $1..n$ algorytmem Erastotenesa (podziel wynik przez n). Skorzystaj z faktu, że

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &< \ln n + 1 \\ \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \dots + \frac{n}{k} - 1 \\ \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{k} - k \\ n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) - k &< n \ln n - k \\ f(n) = \frac{n \ln k - k}{n} &= \ln k - \frac{k}{n} < \ln n = O(\ln n)\end{aligned}$$

- (d) Wyznacz numeryczne proporcje otrzymanych wyników (a)/(b) i (b)/(c) dla $n = 10^6$.

$$\begin{aligned}(a)/(b) &= n/\sqrt{n} = 10^6 / (10^6)^{\frac{1}{2}} = 10^6 / 10^3 = 10^3 = 1000 \\ (b)/(c) &= \sqrt{n} / \ln n = (10^6)^{\frac{1}{2}} / \ln 10^6 = 10^3 / \ln 10^6 = 10^3 / 13.8 \approx 72.5\end{aligned}$$

Zadanie 2

Wyraż w notacji O ile dodawań wykonasz wyznaczając n początkowych liczb Fibonacciego:

- (a) Za pomocą procedury typowej rekurencyjnej.

$$\begin{aligned} O(Fib(0) + Fib(1) + \dots + Fib(n)) \\ Fib(n) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ O \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

- (b) Za pomocą procedury iteracyjnej wywoływanej dla każdej liczby osobno.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

- (c) Za pomocą procedury iteracyjnej wyznaczającej wszystkie liczby w jednej pętli.

$$n - 1 = O(n)$$