

Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 4

Zadanie 1

Skorzystaj z metody rekurencji uniwersalnej i podaj dokładne asymptotyczne oszacowania dla następujących rekurencji:

- (a) $n^{1/2} = \Theta(n^{\log_4 2}) \implies T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} = \Theta(n^{1/2} \log n)$
- (b) $n = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon})$ dla $\epsilon < 0.2 \implies T(n) = 3T(n/4) + n = \Theta(n)$
- (c) $n^{3/2} = \Theta(n^{\log_4 8}) \implies T(n) = 8T(n/4) + n\sqrt{n} = \Theta(n^{3/2} \log n)$
- (d)

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 \\ m &= \log n, U(m) = T(e^m) = T(e^{\log n}) = T(n) \\ U(m) &= 2T\left(e^{\log n^{\frac{1}{2}}}\right) + 1 = 2T\left(e^{\frac{1}{2} \log n}\right) + 1 = 2T\left(e^{\frac{m}{2}}\right) + 1 = 2U\left(\frac{m}{2}\right) + 1 \\ 1 &= O\left(m^{\log_2 2 - \epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 1 \implies U(m) = \Theta(m) \\ T(n) &= U(m) = U(\log n) = \Theta(m) = \Theta(\log n) \end{aligned}$$

Zadanie 2

Czas działania algorytmu A opisany jest przez rekurencję $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Algorytm konkurencyjny A' ma czas działania $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$. Jaka jest największa liczba całkowita a , przy której A' jest asymptotycznie szybszy niż A ?

$$\begin{aligned} n^2 &= O\left(n^{\log_2 7 - \epsilon}\right) \text{ dla } \epsilon \leq 0.80 \implies T(n) = 7T(n/2) + n^2 = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) \\ n^2 &= O\left(n^{\log_4 a - \epsilon}\right) \implies T'(n) = aT'(n/4) + n^2 = \Theta\left(n^{\log_4 a}\right) \\ n^{\log_4 a} &< n^{\log_2 7} \\ n^{\frac{1}{2} \log_2 a} &< n^{\log_2 7} \end{aligned}$$

$$T'(n) = \begin{cases} \Theta(n^2) & \text{dla } a \in [1, 15] \\ \Theta(n^2 \log n) & \text{dla } a = 16 \\ \Theta(n^{\log_4 a}) & \text{dla } a \in [17, \infty) \\ \Theta(n^{\log_4 49}) = \Theta(n^{\log_2 7}) & \text{dla } a = 49 \end{cases}$$

Zadanie 3

Rozważmy warunek regularności $af(n/b) \leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c \leq 1$, który jest częścią przypadku 3 twierdzenia o rekurencji uniwersalnej. Podaj przykład prostej funkcji $f(n)$, które spełnia wszystkie warunki twierdzenia o rekurencji uniwersalnej z wyjątkiem warunku regularności.

$$af(n/b) \leq cf(n), a \geq 1, b > 1, c \leq 1$$

$$T(n) = T(n/2) + \sin \frac{n\pi}{2} + 2 \cdot \sqrt{n}$$

$$\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{n} \leq c \sin(n\pi) + 2 \cdot \sqrt{2n}$$

$$(1 + 2) \cdot \sqrt{n} \leq c(0 + 2) \cdot \sqrt{2n}$$

Zadanie 4

Zasymuluj działanie polifazowego mergesorta dla tablicy:

$\{9, 22, 6, 19, 21, 14, 10, 17, 3, 5, 60, 30, 29, 1, 8, 7, 6, 15, 12\}$.

W sortowaniu polifazowym na każdym etapie sortowania scala się sąsiadujące podciągi rosnące, to znaczy: w pierwszym przebiegu $\{9, 22\}$ z $\{6, 19, 21\}$, $\{14\}$ z $\{10, 17\}$ itd..

$\{9, 22 | 6, 19, 21 | 14 | 10, 17 | 3, 5, 60 | 30 | 29 | 1, 8 | 7 | 6, 15 | 12\}$

$\{6, 9, 19, 21, 22 | 10, 14, 17 | 3, 5, 30, 60 | 1, 8, 29 | 6, 7, 15 | 12\}$

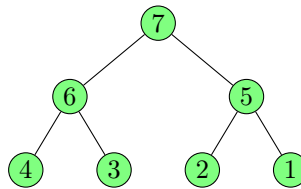
$\{6, 9, 10, 14, 17, 19, 21, 22 | 1, 3, 5, 8, 29, 30, 60 | 6, 7, 12, 15\}$

$\{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 17, 19, 21, 22, 29, 30, 60 | 6, 7, 12, 15\}$

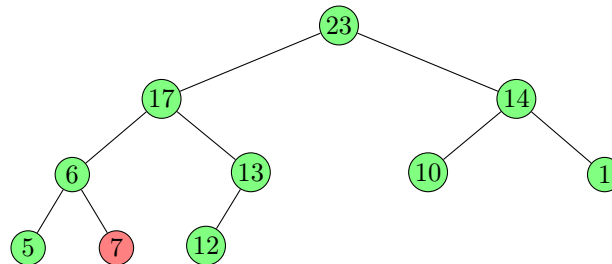
$\{1, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 29, 30, 60\}$

Zadanie 5

(a) Czy tablica posortowana malejąco jest kopcem?



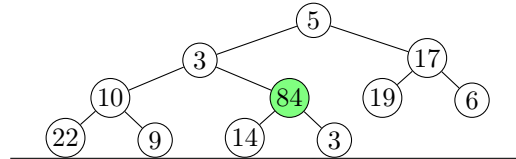
(b) Czy ciąg $\{23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12\}$ jest kopcem?



Zadanie 6

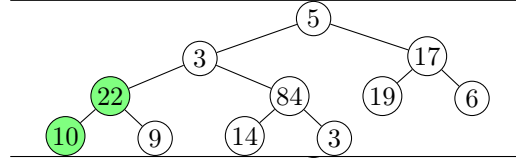
Zilustruj działanie procedury `buildheap` dla ciągu $\{5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9, 14, 3\}$. Narysuj na kartce wygląd tablicy i kopca po każdym wywołaniu procedury przesiej.

$\{5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9, 14, 3\}$



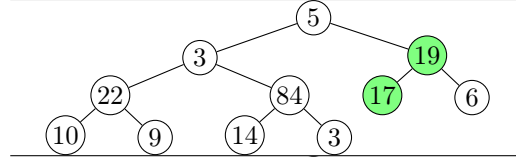
$\{5, 3, 17, 22, 84, 19, 6, 10, 9, 14, 3\}$

$\{5, 3, 17, 22, 84, 19, 6, 10, 9, 14, 3\}$



$\{5, 3, 19, 22, 84, 17, 6, 10, 9, 14, 3\}$

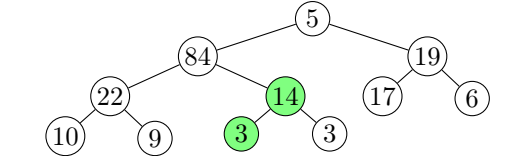
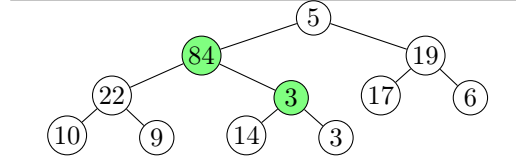
$\{5, 3, 19, 22, 84, 17, 6, 10, 9, 14, 3\}$



$\{5, 84, 19, 22, 3, 17, 6, 10, 9, 14, 3\}$

$\{5, 84, 19, 22, 14, 17, 6, 10, 9, 3, 3\}$

$\{5, 84, 19, 22, 14, 17, 6, 10, 9, 3, 3\}$

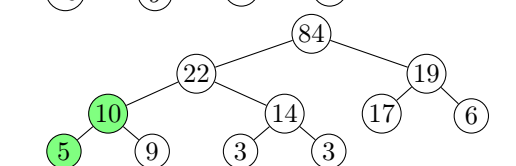
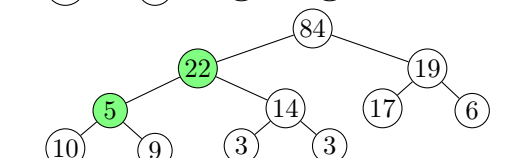
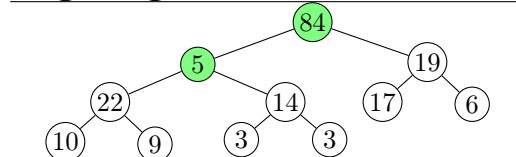


$\{84, 5, 19, 22, 14, 17, 6, 10, 9, 3, 3\}$

$\{84, 22, 19, 5, 14, 17, 6, 10, 9, 3, 3\}$

$\{84, 22, 19, 10, 14, 17, 6, 5, 9, 3, 3\}$

$\{84, 22, 19, 10, 14, 17, 6, 5, 9, 3, 3\}$



Zadanie 8

Udowodnij, że wysokość kopca n -elementowego wynosi $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

Maksymalna ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$n(h) = 2^h - 1$$

$$n(h-1) = 2^{h-1} - 1$$

Minimalna ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$n(h-1) + 1 = 2^{h-1} - 1 + 1 = 2^{h-1}$$

Ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$2^{h-1} \leq n < 2^h$$

$$h-1 \leq \log_2 n < h$$

$$h \leq \log_2 n + 1 < h+1$$

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Zadanie 11

Niech F_n oznacza ilość różnych kształtów drzew binarnych o n węzłach. Rysując drzewa, łatwo sprawdzić, że $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 5$, itd. Nie korzystając z internetu:

- (a) Znajdź wzór wyrażający F_n przez $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ dla $n = 2, 3, 4$ a potem ogólnie.

$$F_0 = 1, F_1 = 1$$

$$F_2 = 2 = F_0 F_1 + F_1 F_0$$

$$F_3 = 5 = F_0 F_2 + F_1 F_1 + F_2 F_0$$

$$F_4 = 14 = F_0 F_3 + F_1 F_2 + F_2 F_1 + F_3 F_0$$

$$F_n = \sum_{i=1}^n F_{i-1} F_{n-i}$$

- (b) Zaprojektuj (na kartce) procedurę, która oblicza kolejne wyrazy ciągu F_n , zapisuje je w tablicy i korzysta z nich przy obliczaniu następnych wyrazów.

$$F[0] = 1$$

$$F[1] = 1$$

for i = 2 to n:

$$F[i] = 0$$

for j = 1 to i:

$$F[i] += F[j-1] * F[i-j]$$

- (c) Przeanalizuj ile mnożeń trzeba wykonać, by obliczyć wyrazy od F_1 do F_n . Czy da się ją zapisać w postaci $O(n^k)$ dla pewnego k ?

$$\text{Ilość mnożeń: } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(1+n)}{2} = O(n^2)$$

- (d) Jaka byłaby złożoność algorytmu rekurencyjnego, który nie korzysta z wartości zapisanych w tablicy, tylko oblicza je ponownie. Czy da się ją zapisać jako $O(n^k)$?

$$\sum_{k=1}^n = \frac{k(1+k)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = O(n^3)$$