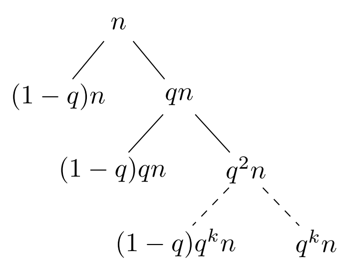
Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 5

Zadanie 1

Udowodnij, że jeśli dla pewnego ustalonego q, takiego że $\frac{1}{2} < q < 1$, podczas sortowania szybkiego, procedura partition, na każdym poziomie rekurencji podzieli elementy tablicy w stosunku $q : (1 - q)$ to algorytm wykona się w czasie $O(nlogn)$. Wskazówka: udowodnij, że głębokość rekurencji nie przekroczy - $\log n / \log q$ i zaniedbaj błędy zaokrągleń do wartości całkowitych.



$$
\begin{aligned}
q^k n &= 1 \\
q^k &= \frac{1}{n} \\
\log q^k &= \log n^{-1} \\
k \log q &= -\log n \\
k &= -\frac{\log n}{\log q}
\end{aligned}
$$

Zadanie 2

Ile porównań (zapisz wyniki w notacji O) wykona algorytm `quicksort` z procedurą `partition` w wersji Hoare'a, a ile w wersji z procedurę `partition` w wersji Lomuto dla danych: (a) posortowanych rosnąco, (b) posortowanych malejąco, (c) o identycznych kluczach?

Zadanie 3

Napisz wzór na numer kubełka, do którego należy wrzucić liczbę x w sortowaniu kubełkowym, jeśli kubełków jest n, a elementy tablicy mieszczą się przedziale (a, b). Numeracja zaczyna się od 0.

$$k = \left\lfloor \frac{n}{b - a} \cdot x - a \right\rfloor$$

Zadanie 4

Dla jakich danych sortowanie metodą kubełkową ma złożoność $O(n^2)$?

Dla danych które wszystkie trafią do pojedynczego kubełka, gdyż wywołany będzie na nich algorytm sortowania przez wstawianie o złożoności $O(n^2)$.

Zadanie 5

Jak obliczyć k-tą od końca cyfrę w liczby x? Jak obliczyć ilość cyfr liczby x? Przyjmujemy układ dziesiętny. Jak wyniki zmienią się w układzie pozycyjnym gdzie różnych cyfr jest m a ich wartości x należą do przedziału $0 \leq x < m$?

$$x_k = \left\lfloor \frac{x}{10^k} \right\rfloor \mod 10 \qquad\qquad n = \lceil \log_{10} x \rceil + 1$$
$$x_k = \left\lfloor \frac{x}{m^k} \right\rfloor \mod m \qquad\qquad n = \lceil \log_{m} x \rceil + 1$$

Zadanie 6

Posortuj metodą sortowania pozycyjnego liczby: 101, 345, 103, 333, 432, 132, 543, 651, 791, 532, 987, 910, 643, 641, 12, 342, 498, 987, 965, 322, 121, 431, 350. W pisemnym rozwiązaniu pokaż, jak wygląda zawartość kolejek, za każdym razem, gdy tablica wyjściowa jest pusta i wszystkie liczby znajdują się w kolejkach, oraz jak wygląda tablica wyjściowa, za każdym razem, gdy sortowanie ze względu na kolejną cyfrę jest już zakończone.

$$
\begin{aligned}
0 &: (910, 350)\\
1 &: (101, 651, 791, 641, 121, 431)\\
2 &: (432, 132, 532, 12, 342, 322)\\
3 &: (103, 333, 543, 643)\\
4 &: ()\\
5 &: (345, 965)\\
6 &: ()\\
7 &: (987, 987)\\
8 &: (498)\\
9 &: ()
\end{aligned}
$$

(910, 350, 101, 651, 791, 641, 121, 431, 432, 132, 532, 12, 342, 322, 103, 333, 543, 643, 345, 965, 987, 987, 498)

$$
\begin{aligned}
0 &: (101, 103)\\
1 &: (910)\\
2 &: (121, 12, 322)\\
3 &: (431, 432, 132, 532, 333)\\
4 &: (641, 342, 543, 643, 345)\\
5 &: (350, 651)\\
6 &: (965)\\
7 &: ()\\
8 &: (987, 987)\\
9 &: (791, 498)
\end{aligned}
$$

(101, 103, 910, 121, 12, 322, 431, 432, 132, 532, 333, 641, 342, 543, 643, 345, 350, 651, 965, 987, 987, 791, 498)

$$
\begin{aligned}
0 &: (12)\\
1 &: (101, 103, 121, 132)\\
2 &: ()\\
3 &: (322, 333, 342, 345, 350)\\
4 &: (431, 432, 498)\\
5 &: (532, 543)\\
6 &: (641, 643, 651)\\
7 &: (791)\\
8 &: ()\\
9 &: (910, 965, 987, 987)
\end{aligned}
$$

(12, 101, 103, 121, 132, 322, 333, 342, 345, 350, 431, 432, 498, 532, 543, 641, 643, 651, 791, 910, 965, 987, 987)

Zadanie 7

Które z procedur sortujących:

(a) insertionSort (przez wstawianie),
jest stabilny, gdyż każdy kolejny, zaczynając od początku tablicy, sortowany element jest wstawiany na koniec posortowanej części tablicy, więc w przypadku elementów o tej samej wartości, zachowana jest kolejność

(b) quickSort (szybkie),
nie jest stabilny, przykładowo dla tablicy `{2, 1, 1}` już po pierwszym wywołaniu `partition` tracimy względna kolejność elementów o tej samej wartości, a kolejne wywołanie nie ma już nawet szansy jej przywrócić bo obejmie ono elementy o indeksach większych od 0

(c) heapSort (przez kopcowanie),
nie jest stabilny, przykładowo dla tablicy `{1, 1}` sama budowa kopca nie dokona żadnych zamian elementów, ale już po pierwszym wyciągnięciu z kopca elementu o największej wartości czyli z indeksu zerowego tablicy tracimy względna kolejność elementów o tej samej wartości, gdyż jedynki zostaną wyjęte z kopca w tej samej kolejności w której były w tablicy ale trafiać będą na jej koniec przez co zamienią się miejscami

(d) mergeSort (przez złączanie),
jest stabilny, procedura `merge` zachowuje względną kolejność elementów o tej samej wartości gdyż w przypadku porównywania dwóch elementów o tej samej wartości, wstawiany jest ten, który jest w tablicy pierwotnej na mniejszym indeksie

(e) countingSort (przez zliczanie),
jest stabilny, ponieważ do tablicy wynikowej elementy są wstawiane po kolei z tablicy pierwotnej iterowanej od końca na kolejne dekrementowane indeksy na podstawie liczników

(f) radixSort (pozycyjne),
jest stabilny, dzięki temu, że elementy umieszczana są kolejno w kolejkach FIFO z których później są wyciągane do tablicy pierwotnej

(g) bucketSort (kubełkowe)
jest stabilny, ponieważ jest on połączeniem sortowania przez zliczanie i sortowania przez wstawianie, które oba są stabilne

są stabilne? W każdym przypadku uzasadnij stabilność lub znajdź konkretny przykład danych, dla których algorytm nie zachowa się stabilnie.

Zadanie 8

Napisz funkcję void `counting_sort(node* lista, int m);` sortującą przez zliczanie listę linkowaną liczb całkowitych nieujemnych mniejszych od m. Procedura nie powinna usuwać ani tworzyć nowych węzłów, tylko sprytnie zmieniać pola next wykorzystując tylko $O(m)$ dodatkowej pamięci na wskaźniki.

Zadanie 9

(algorytm Hoare'a) Korzystając funkcji `int partition(int t[], int n)` znanej z algorytmu sortowania szybkiego napisz funkcję `int kty(int t[], int n)`, której wynikiem będzie k-ty co do wielkości element początkowo nieposortowanej tablicy `t`. Średnia złożoność Twojego algorytmu powinna wynieść $O(n)$.