Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 3

Zadanie 1

Ile (dokładnie) porównań wykona algorytm `insertion_sort` w wersji z wartownikiem (liczbą zapisaną pod adresem `t[-1]`), jeśli dane $(a_1, \ldots, a_n)$ o rozmiarze n zawierają k inwersji. Liczba inwersji to liczba takich par (i, j), że $i < j$ i $a_i > a_j$. Jaka jest maksymalna możliwa liczba inwersji dla danych rozmiaru n? Wylicz "średnią" złożoność algorytmu, jaka średnią z maksymalnej i minimalnej ilości porównań jaką wykona.
Uwaga: Prawdziwą średnią złożoność oblicza się, jako średnią po wszystkich możliwych permutacjach danych wejściowych.

$$\begin{aligned}
\text{Dokładna ilość porównań: } & n - 1 + k \\
\text{Minimalna ilość porównań: } & n - 1 + 0 = n - 1 \\
\text{Maksymalna ilość porównań: } & n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2} \\
\text{Średnia ilość porównań: } & \frac{n - 1 + \frac{n^2+n-2}{2}}{2} = \frac{n^2 + 3n - 4}{4}
\end{aligned}$$

Zadanie 3

(a) Ile co najwyżej porównań wykona procedura `insertion_sort` działająca na ostatnim etapie `bucket_sort` zakładając, że `bucket_sort` korzysta z `k` pomocniczych kolejek, i że do każdej z nich wpadła taka sama ilość elementów? Zakładamy wersję z wartownikiem na pozycji `t[-1]`.

$$n - 1 + k\frac{\frac{n}{k}(\frac{n}{k} - 1)}{2}$$

(b) Podaj uproszczony wynik dla $k = n/2$, $k = n/4$, $k = n/10$ oraz $k = \sqrt{n}$. Następnie każdy z tych wyników zapisz też w notacji asymptotycznej $O(f(n))$.

$$3n/2 - 1 = O(n) \qquad 5n/2 - 1 = O(n)$$

$$11n/2 - 1 = O(n) \qquad \frac{n^{3/2} + n - 2}{2} = O(n^{3/2})$$

(c) Jaki będzie wynik, gdy wszystkie klucze wpadną do tego samego kubełka?

$$n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$