Algorytmy i struktury danych

Lista zadań 1

Zadanie 1

Wyraź w notacji O złożoność następujących procedur:

(a) Sprawdzenie czy liczba n ma dzielnik większy od 1 ale mniejszy od n.

$$\begin{gathered} f < g \cdot c \\ n-2 < n \cdot c \\ n-2 < n \cdot 1 \text{ dla } n \geq 0 \\ n-2 = O(n) \end{gathered}$$

(b) Sprawdzenie czy liczba n ma dzielnik większy od 1 ale mniejszy lub równy $\sqrt{n}$.

$$\lceil \sqrt{n} \rceil - 1 = O(\sqrt{n})$$

(c) Wyznaczenie wszystkich liczb pierwszych z przedziału $1..n$ algorytmem Erastotenesa (podziel wynik przez n). Skorzystaj z faktu, że

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln n + 1 \\ \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \cdots + \frac{n}{k} - 1 \\ \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{k} - k \\ n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) - k < n \ln n - k \\ f(n) = \frac{n \ln k - k}{n} = \ln k - \frac{k}{n} < \ln n = O(\ln n) \end{gathered}$$

(d) Wyznacz numeryczne proporcje otrzymanych wyników $(a)/(b)$ i $(b)/(c)$ dla $n = 10^6$.

$$\begin{gathered} (a)/(b) = n/\sqrt{n} = 10^6 / \left(10^6\right)^{\frac{1}{2}} = 10^6/10^3 = 10^3 = 1000 \\ (b)/(c) = \sqrt{n}/\ln n = \left(10^6\right)^{\frac{1}{2}} / \ln 10^6 = 10^3 / \ln 10^6 = 10^3/13.8 \approx 72.5 \end{gathered}$$

Zadanie 2

Wyraź w notacji O ile dodawań wykonasz wyznaczając n początkowych liczb Fibonacciego:

(a) Za pomocą procedury typowej rekurencyjnej.

$$O(Fib(0) + Fib(1) + \cdots + Fib(n))$$
$$Fib(n) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$
$$O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

(b) Za pomocą procedury iteracyjnej wywoływanej dla każdej liczby osobno.

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(a_1 + a_n)n - 1}{2} = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$$

(c) Za pomocą procedury iteracyjnej wyznaczającej wszystkie liczby w jednej pętli.

$$n - 1 = O(n)$$

Zadanie 5

Schemat Hoernera: Przed odpowiednie wyłączenia x przed nawias, pokaż, że wystarczy dokładnie n mnożeń, aby wyliczyć wartość wielomianu stopnia n?

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Wskazówka: zadanie wykonaj kolejno dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ a potem uogólnij pisząc odpowiedni algorytm

$$\begin{aligned}
&W(x) = a_0 \\
&W(x) = a_0 + x(a_1) \\
&W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2)) \\
&W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3))) \\
&W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + x a_n)))
\end{aligned}$$