

四参数坐标转换研究及应用分析

江 华, 段太生, 周 适

(中铁二局集团有限公司, 四川 成都 610031)

摘 要: 本文分析了 4 参数坐标转换常用模型, 并对模型公式的建立、误差方程式进行了详细论述, 以工程中具体实例进行计算测试可知 4 参数坐标转换可用于不同二维平面坐标之间的转换, 计算结果与拟稳平差中的自由网相似变化结果一致, 并通过实例比较 4 参数与 7 参数坐标转换模型转换后的坐标结果。

关键词: 4 参数; 坐标转换; 同名点; 手持 GPS 导航

中图分类号: P226+.3

文献标志码: A

文章编号: 2096-2789 (2019) 03-0219-02

DOI: 10.19537/j.cnki.2096-2789.2019.03.106

在工程测量中, 4 参数和 7 参数坐标转换是经常遇到的坐标转换形式。4 参数坐标转换应用范围广泛, 本文将对 4 参数坐标转换模型进行详细论述和分析, 并用 VC++ 编制 4 参数程序对工程实际数据进行演算, 分析 4 参数模型计算结果和转换参数, 从而得出一些经验和结论。

1 4 参数模型分析

4 参数坐标转换是平面二维坐标之间的转换。4 个参数包括: 2 个平移参数 X_0 、 Y_0 , 1 个旋转参数 α , 1 个缩放参数 m 。当采用 4 参数坐标转换模型计算 4 参数时, 由于有 4 个未知参数, 因而至少需要 2 个及以上的同名点才能计算 4 参数。4 参数转换模型如式 1 所示。

$$\begin{cases} X_B = X_0 + X_A \times m \cos \alpha - Y_A \times m \sin \alpha \\ Y_B = Y_0 + X_A \times m \sin \alpha + Y_A \times m \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

其中, (X_B, Y_B) 表示转换后的坐标, (X_A, Y_A) 表示转换前的坐标, m 为尺度缩放系数, α 为旋转系数。令 $C = m \cos \alpha$, $D = m \sin \alpha$, 式 1 可表示为式 2。

$$\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X_A & -Y_A \\ 0 & 1 & Y_A & X_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad (2)$$

若有 n 个 ($n \geq 2$) 待转换点坐标分别为: $P_{A1}(X_{A1}, Y_{A1})$ 、 $P_{A2}(X_{A2}, Y_{A2})$ 、 \dots 、 $P_{An}(X_{An}, Y_{An})$, 其转换中需要的同名点坐标分别为: $P_{B1}(X_{B1}, Y_{B1})$ 、 $P_{B2}(X_{B2}, Y_{B2})$ 、 \dots 、 $P_{Bn}(X_{Bn}, Y_{Bn})$ 。则可以列出误差方程式, 如式 3 所示。

$$\begin{pmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{x2} \\ V_{y2} \\ \vdots \\ V_{xn} \\ V_{yn} \end{pmatrix}_{2n \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X_{A1} & -Y_{A1} \\ 0 & 1 & Y_{A1} & X_{A1} \\ 1 & 0 & X_{A2} & -Y_{A2} \\ 0 & 1 & Y_{A2} & X_{A2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & X_{An} & -Y_{An} \\ 0 & 1 & Y_{An} & X_{An} \end{pmatrix}_{2n \times 4} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ C \\ D \end{pmatrix}_{4 \times 1} - \begin{pmatrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \\ X_{B2} \\ Y_{B2} \\ \vdots \\ X_{Bn} \\ Y_{Bn} \end{pmatrix}_{2n \times 1} \quad (3)$$

则式 3 可以表示为 $V = B \hat{x} - l$, 根据平差最小二乘原理, $\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l$, 若权阵 P 为等权单位阵, 则:

$$\hat{x} = (B^T B)^{-1} B^T l \quad (4)$$

可通过式 4 求得 4 个未知参数。当参数 C 、 D 确定后, 可根据式 5 求得尺度缩放系数 m 和旋转系数 α 。

$$\begin{cases} m = \sqrt{C^2 + D^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{D}{C}\right) \end{cases} \quad (5)$$

将计算得到的 \hat{x} 代入误差方程式 $V = B \hat{x} - l$ 可计算改正数 V , 求出每个转换点转换后的改正数, 还可以计算单位权中误差 $\sigma = \sqrt{\frac{V^T V}{R}}$, 自由度 $R = 2n - 4$ 。

作者简介: 江华 (1973—), 男, 本科, 研究方向: 工程控制测量。

2 4 参数模型实际应用

4 参数坐标转换模型主要用于平面二维坐标之间的转换, 在工程测量中具有广泛的应用。可应用于不同独立坐标系之间的平面坐标转换, 如北京 54 高斯平面坐标向 WGS-84 高斯平面坐标转换, 通过此坐标变换可以解决手持 GPS 导航的问题。下面以具体的工程实例来说明, 具体如表 1 所示。

表 1 某工程项目北京 54 高斯平面坐标

序号	点名	X	Y
1	C14	2696185.2736	464515.6662
2	C15	2692866.0109	463899.9948
.....
10	BC23	2662143.0279	450463.8971

表 1 平面坐标是北京 54 坐标, 而手持 GPS 是基于 WGS-84 坐标系下的导航, 若将表 1 平面坐标直接转换为经纬度 BL, 此时不能进行导航。因为一般导航要求精度在 10m 以内, 此时导航精度不够, 因此需要坐标转换来提高导航精度。可利用手持 GPS 现场采集 2 个及以上点的经纬度, 将经纬度 BL 转换为 WGS-84 高斯平面坐标, 将其作为 4 参数转换中需要的同名点。某工程中有两个控制点 BC16 和 C14, 其坐标分别为 BC16 (2689742.4451, 462437.4667)、C14 (2696147.2724, 464589.6612)。利用 VC++ 编制 4 参数坐标转换程序将上述 2 个点坐标作为 4 参数计算中的同名点, 将表 1 北京 54 坐标通过 4 参数进行坐标转换。4 参数结果计算及 4 参数计算转换后的坐标如表 2 所示。

表 2 4 参数转换结果

平移参数 (m)	X_0	-88.220456
	Y_0	78.858993
缩放参数	m	1.0000177872253
旋转参数 (°)	α	-1.0041894767979

从表 2 可以看出, 求得的 4 参数中缩放参数数值很接近于 1, 旋转参数也很小, 只有 -1° , 说明坐标转换前后尺度缩放、旋转角因素影响较小, 主要是坐标平移的变化。为了保证转换后的坐标精度, 如果精度要求需要很高, 应注意 4 参数中缩放参数 m 和旋转参数 α 的小数点取值。经过较多例子试算后发现, 缩放参数 m 和旋转参数 α 应至少保留小数点后 11 位, 才能保证转换后

的坐标计算误差在 0.5mm 内, 两个平移参数 X_0 、 Y_0 小数点取位时保留小数点后 6 位就可以了。由于本例子参数转换中只有 2 个同名点, 因而无法计算中误差 $\sigma = \sqrt{\frac{V^T V}{R}}$,

同名点大于 2 个时可以计算中误差 σ , σ 的大小可以表征坐标转换的精度, σ 越小, 转换精度越高。转换精度依赖于转换中需要的同名点精度, 同名点精度越高, 转换精度越高。将表 3 计算得到的平面坐标转换为经纬度 BL, 此时便可运用于手持 GPS 导航, 其导航精度完全可以满足使用要求。

3 4 参数模型与其他模型计算结果比较

事实上, 平面坐标转换模型并非只有 4 参数模型一种, 坐标转换还可以通过拟稳平差中的自由网相似变换计算。将 4 参数模型中需要用到同名点作为拟稳点, 计算的结果与 4 参数坐标转换的结果一致。另外, 7 参数模型 (主要运用于三维坐标之间的转换) 计算的结果也可以和 4 参数模型计算的结果进行比较, 如表 3 所示中一个实际工程例子说明。

表 3 7 参数转换已有资料表

点名	待转换的平面坐标		同名点的坐标	
	X	Y	X	Y
C03	3386506.8830	503152.9136	3386496.8791	503162.9085
C04	3385610.0902	498890.9068	3385600.0849	498900.9004
...
C08	3376035.6931	488954.2144	3376025.6963	488964.2179

4 参数计算结果如表 4 所示, 转换后的坐标及残差如表 5 所示。

表 4 4 参数计算结果

平移参数 (m)	X_0	-7.615855
	Y_0	10.398685
缩放系数	m	0.9999992925441
旋转系数 (°)	α	-0.0030314265049

表 5 4 参数变换后残差

序号	点名	残差 (mm)	
		V _x	V _y
1	C03	-0.4	-1.9
2	C04	1.6	2.4
3	C05	-0.9	0.3
4	C06	-0.5	-0.1
5	C07	0.4	-0.1
6	C08	-0.3	-0.3

将表 4 待转换的坐标和表 5 同名点的坐标均加上假定的高程, 所有的高程值均设为 0, 待转换的坐标和转换中需要的同名点坐标均变成了三维坐标。通过布尔莎 7 参数变换模型, 7 参数计算结果如表 6 所示, 变换后的坐标如表 7 所示。

通过表 5、表 7 中的 4 参数、7 参数变换后的坐标比较, 坐标差值最大仅 0.1mm, 可认为计算结果一致。事实上,

表 6 7 参数计算结果

平移参数 (m)	ΔX	-7.6157306594
	ΔY	10.3986599836
	ΔZ	0
旋转参数 (°)	ω_x	0
	ω_y	0
	ω_z	0.0030306313
缩放系数 (ppm)	R0	-0.707487003

表 7 7 参数变化后的坐标及残差

序号	点名	残差 (mm)		
		V _x	V _y	V _z
1	C03	-0.3	-2	0
2	C04	1.6	2.4	0
3	C05	-0.9	0.3	0
4	C06	-0.5	-0.1	0
5	C07	0.4	-0.2	0
6	C08	-0.2	-0.4	0

4 参数和 7 参数都是严密的坐标转换模型, 7 参数适用于三维坐标之间的转换, 4 参数适用于平面二维坐标之间的转换。若平面坐标加上假定的零高程后, 采用 7 参数坐标转换与 4 参数坐标转换结果一致。

4 结束语

(1) 4 参数坐标转换模型主要运用于平面二维坐标之间的转换。转换需要的同名点至少 2 个及以上, 坐标转换的精度取决于同名点的精度, 可通过计算后的残差判别同名点的精度, 若发现个别同名点精度较差时应予以剔除, 不将其作为转换中的同名点。然后再重新计算 4 参数, 转换后的坐标精度将有所提高。(2) 4 参数计算时应注意缩放参数 m 和旋转参数 α 的小数点取位。通过不同例子试算得出经验, 若需要转换后的坐标计算误差在 0.5mm 内, 缩放参数 m 和旋转参数 α 应至少保留小数点后 11 位, 两个平移参数 X_0 、 Y_0 小数点取位时应保留小数点后 6 位。(3) 衡量坐标转换的精度指标是残差 V 和中误差 σ , $\sigma = \sqrt{\frac{V^T V}{R}}$, 残差越小, 中误差越小, 转换精度越高, 转换后的坐标结果越可靠, 一般要求改正数 V 满足 $|V| < 2\sigma$ 。(4) 4 参数模型和拟稳平差中的自由网相似变换计算结果一致。若加上假定的零高程面, 将二维坐标变为三维坐标后, 用 7 参数模型计算转换后的坐标与 4 参数模型计算转换后的坐标结果一致。

参考文献:

- [1] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006.
- [2] 施一民. 现代大地控制测量[M]. 北京: 测绘出版社, 2003.
- [3] 刘大杰. 全球定位系统(GPS)的原理与数据处理[M]. 上海: 同济大学出版社, 2006.
- [4] 周适. 七参数坐标转换研究及应用[J]. 铁道勘察, 2013, 39(5): 7-11.