

建立地方独立坐标系的方法

陈士银

(国家测绘局大地测量数据处理中心 710054)

【摘 要】 本文较详细地叙述了建立地方独立坐标系的作用及建立这种坐标系的三种方法 ,并介绍了因提高归化高程面而产生新椭球后的一些椭球常数的计算方法和步骤。

1980西安坐标系启用后 ,其应用范围将逐步推广到全国各部门使用 ,各省、市、自治区将会采用这个新系统施测多种比例尺地形图 ,与这个坐标系相联系的地方独立坐标系也将不断产生。为了使建立地方独立坐标系比较正规化 ,这里简单叙述一下建立地方独立坐标系的基本方法。

一、建立地方独立坐标系的作用

在城市或工程建设地区 (如矿山、水库)布设测量控制网时 ,其成果不仅要满足 1∶ 500 比例尺测图需要 ,而且还应满足一般工程放样的需要。施工放样时要求控制网由坐标反算的长度与实测的长度尽可能相符 ,而国家坐标系的坐标成果是无法满足这些要求的 ,这是因为国家坐标系每个投影带都是按一定的间隔 (6° 或 3°)划分 ,由西向东有规律地分布 ,其中央子午线不可能刚好落在每个城市和工程建设地区的中央。再者国家坐标系的高程归化面是参考椭球面 ,各地区的地面位置与参考椭球面都有一定的距离 ,这两项将产生高斯投影变形改正和高程归化改正 ,经过这两项改正后的长度不可能与实测的长度相等。

建立独立坐标系的主要目的就是为了减小高程归化与投影变形产生的影响 ,将它们控制在一个微小的范围 ,使计算出来的长度在实际利用时 (如工程放样)不需要作任何改算。

二、长度元素高程归化改正与高斯投影长度改化计算

一个导线网观测边长的归算可分为高程归化和长度改化 ,而方向观测值也要经过方向改化后 ,才能作为平面的边与边之间的连接方向值 ,但由于其值较小 ,不作叙述。这里主要看一看高程归化和长度改化对边长带来的影响。

以下公式计算:

$$S = D + d_D$$
$$d_D = - \frac{DH_m}{R_m}, R_m = \frac{1}{MN}, H_m = h_{m1} + h_{m2}$$

式中:

- S 为归化到参考椭球体面的长度 ;
- D 为地面上的观测长度 ;
- d_D 为高程归算改正 ;
- H_m 为观测边的平均大地高 ;
- h_{m1} 为观测边相对于大地水准面的平均高程 ;
- h_{m2} 为大地水准面至参考椭球面的距离 ;
- R_m 为该地区平均曲率半径 ;
- M 为参考椭球子午圈曲率半径 ;
- N 为参考椭球卯酉圈曲率半径。

对于不同的大地高 ,长度归算的每千米相对数值见表 1 (设 R_m = 6370 km)。

表 1

$H_m (h_{m1} + h_{m2}) / m$	$- H_m / R_m$
10	± 60万
20	± 30万
50	± 10万
100	± 6万
150	± 4万
200	± 3万
300	± 2万
400	± 1.5万
500	± 1.2万
1 000	± 6 000
2 000	± 3 000
3 000	± 2 000
4 000	± 1 500

将椭球面的长度改化到高斯平面的长度按下列公式计算:

$$S_{\pi} = S_t \Delta S$$

$$\Delta S = \frac{S y_m^2}{2 R_m^2}$$

式中: $S_{\text{平}}$ 为改化到高斯平面上的长度;
 S 为在参考椭球面上的长度;
 y_m 为 S 在高斯平面上离中央子午线垂距的平均值;
 R_m 为该地区平均曲率半径.

设 $R_m = 6370\text{km}$, 边长离中央子午线垂距的相对变形见表 2

表 2

y_m/km	$\Delta S/S\%$
10	± 80万
20	± 20万
30	± 9万
40	± 5万
45	± 4万
50	± 3万
100	± 8 000
150	± 3 600
200	± 2 000
300	± 900

三、建立地方坐标系的方法

当参考椭球体面位于观测地面的下方时, 高程归化改正量为负值, 高斯投影变形恒为正值. 这两项改正是可以互相抵偿的. 在城市或工程建设地区规定高程归化改正和高斯投影变形之代数和不得超过 2.5cm/km , 即相对误差小于 $1/4$ 万. 从以上两个统计表可以看出: 当观测地面的大地高在 150m 之内或当观测点位离中央子午线垂距不超过 45km 时, 这两项改正数各自的影响都可保证相对数值小于 $1/4$ 万.

因此, 在建立地方独立坐标系时, 有以下三种方法:

1. 把中央子午线移到城市或工程建设地区中央, 归化高程面提高到该地区的平均高程面 (严格地讲, 要提高到那个地区的大地高平均面). 这样既可使该测区的高程归化改正和中央地区的投影变形几乎为零, 又可保证在离中央子午线 45km 以内的地区其投影变形的相对误差小于 $1/4$ 万. 这种独立坐标系最适合工程建设区的需要, 因为工程建设的所辖面积不会太大, 东西跨度 90km 完全可以满足需要.

2. 在建立城市独立坐标系时, 上面第一种方法对某些城市不太适合, 因为城市独立坐标系不但要满足市区的测图, 而且还要满足它所管辖的郊县地区的测

图的精度. 跨度 90km 可能对某些城市来说是不够的, 这就需要利用高程归化改正和投影变形可以相互抵消的特点, 可以把它们结合起来进行设计. 如果把中央子午线设在城市中央, 而把高程归化面设在城市地区平均高程面以下 100m 左右的地方, 可以算出在城市中央地区的长度变形小于 $1/6.4$ 万, 而离开中央子午线各 55km 左右的距离亦可保证长度变形小于 $1/4$ 万. 东西 110km 的跨度一般可以满足城市及郊县的测图精度的需要.

3. 变动高程归化面的计算是比较复杂的, 这不仅要计算出新的椭球参数和一切计算常数, 而且还要把本地区国家坐标系控制点 (作为独立坐标系的起算点) 转换到新产生的椭球面上, 工作量比较大. 为了避免这些复杂的计算, 建立新坐标系可以不变动高程归化面 (即还是把长度归算到国家坐标系的参考椭球面上), 而只移动中央子午线的办法. 根据下式可计算出中央子午线离开测区中央地带的远近:

$$y_m = \frac{2 R_m H_m}{V_s / S}$$

设某城市或工程建设地区的平均大地高为 200m , $R_m = 6370\text{km}$,

则 $y_m = \frac{2 \times 6370 \times 200}{1/000} \approx 50.5\text{km}$

这就是说将中央子午线设在西离城市或工程建设中心 50km 的地方, 可使中央地区的相对误差为零.

该坐标系控制的最大距离用下式计算:

$$y_m = \frac{2 R_m H_m + 2 R_m^2 V_s / S}{V_s / S}$$

式中: V_s / S 表示相对误差.

设 $V_s / S = 1/4$ 万, 则按上面假设数据

$$y_{m\text{最大}} = \frac{2 \times 6370 \times 200}{1/000} + \frac{2 \times 6370^2}{40000} = 67.5\text{km}$$

上例说明, 如果那个地区大地高为 200m 时, 而又不改变高程投影面, 只要将中央子午线设在西离测区中央 50km 的位置, 就可保证在测区中央东西各距 18km 范围内, 两项改正之和小于 $1/4$ 万.

以上两式可以计算任何地区独立坐标系中央子午线的位置及控制的最大范围.

在以上建立地方独立坐标系的三种方法中: 将中央子午线西移一个常数 (如 50km), 形成纵坐标轴, 其横坐标轴是在赤道处与纵坐标轴垂直相交, 如需要亦可向北移动一个常数.

四、计算新椭球常数及将国家控制点的大地坐标转换到地方坐标系

在新建地方独立坐标系时, 如果要想变动高程归

化面,这将产生一个新椭圆。这就必须计算新椭圆常数,新椭圆常数按下列方法和步骤进行。

1. 新椭圆是在国家坐标系的参考椭圆上扩大形成的,它的扁率应与国家坐标系参考椭圆的扁率相等。

$$\text{即 } T_{\text{新}} = T$$

第一偏心率和第二偏心率也与国家参考椭圆相同:

$$\text{即 } e_{\text{新}}^2 = e^2, e'_{\text{新}} = e'$$

2. 计算该坐标系中央地区的新椭圆平均曲率半径和新椭圆长半轴:

$$\text{新椭圆平均曲率半径为: } R_{\text{新}} = R_m + H_m$$

$$R_m = \frac{MN}{a(1-e^2)/W^3 a} = \frac{a^2(1-e^2)/W^4}{a(1-e^2)/W^2} = a(1-e^2)/W^2 = a(1-e^2)/(1-e^2 \sin^2 B_m)$$

式中: H_m 为该地区平均大地高;

a 为国家参考椭圆长半轴;

B_m 为城市中心地区的平均纬度。

新椭圆的长半轴按下式计算:

$$a_{\text{新}} = R_{\text{新}} \times \frac{1 - e_{\text{新}}^2 \sin^2 B_m}{1 - e_{\text{新}}^2}$$

3. 计算新椭圆常数

新椭圆确定后,全部计算工作都要在新椭圆面上或者通过新椭圆传算到高斯平面上进行。而其中进行大地坐标的正反算工作是大量的。1997年《测绘通报》第3期登载了中国测绘科学研究院顾旦生研究员的“一组高精度椭圆面电子计算实用公式”文章,其中有一部分列出了大地坐标正反算公式的全部内容,但涉及很多椭圆常数,只有计算出这些新椭圆常数,这组公式才能在地方独立坐标系中得以应用。现将这些椭圆常数的计算公式列出以供参考:

$$b = a(1-T) \text{ (轴半径)},$$

$$c = a^2 b,$$

$$c_0 = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots \right),$$

$$c_1 = 2(A_1 - 2A_2 + 3A_3 - 4A_4 + 5A_5 - 6A_6),$$

$$c_2 = 2(4A_2 - 16A_3 + 40A_4 - 80A_5 + 140A_6),$$

$$c_3 = 2(16A_3 - 96A_4 + 336A_5 - 896A_6)$$

其中:

$$A_1 = \frac{a(1-e^2)}{2} \left\{ \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \dots \right\},$$

$$A_2 = \frac{a(1-e^2)}{4} \left\{ \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots \right\},$$

$$A_3 = \frac{a(1-e^2)}{6} \left\{ \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{13072}e^{10} + \dots \right\},$$

$$A_4 = \frac{a(1-e^2)}{8} \left\{ \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \frac{99099}{1048576}e^{12} \right\},$$

$$A_5 = \frac{a(1-e^2)}{10} \left\{ \frac{693}{131072}e^{10} + \frac{9009}{524288}e^{12} \right\},$$

$$A_6 = \frac{a(1-e^2)}{12} \times \frac{3003}{2097512}e^{12};$$

另一组常数为:

$$K_0 = 1/C_0$$

$$K_1 = 2 \left\{ \frac{3}{8}e^2 + \frac{45}{128}e^4 + \dots + \frac{43659}{131072}e^{10} \right\},$$

$$K_2 = 2 \left\{ \frac{21}{64}e^4 + \frac{277}{384}e^6 + \dots + \frac{112662}{65536}e^{10} \right\},$$

$$K_3 = 2 \left\{ \frac{151}{384}e^6 + \frac{5707}{4096}e^8 + \dots + \frac{531891}{163840}e^{10} \right\},$$

$$K_4 = 2 \left\{ \frac{1097}{2048}e^8 + \frac{1687}{640}e^{10} \right\}.$$

新椭圆常数计算后就可以将属于国家大地坐标系的起算点转换为地方独立坐标系。

设某起算点在国家坐标系中的大地坐标为 B, L , 由于新椭圆的球心与旧椭圆重合,扁率不变,经度不会发生变化,即

$$L_{\text{新}} = L$$

其纬度值为:

$$B_{\text{新}} = B + d_B,$$

$$d_B = \frac{1}{M} \left(\frac{e^2}{W} \Delta a \right) \sin B \cos B$$

式中:

$$W = \frac{a}{a - e^2 \sin^2 B}, M = \frac{a(1-e^2)}{W^3},$$

Δa 为两椭圆的长半轴之差,

e 为国家参考椭圆第一偏心率。

再根据新布设的中央子午线,采用高斯投影正算公式可将 $B_{\text{新}}, L_{\text{新}}$ 化为 $X_{\text{新}}, Y_{\text{新}}$, 然后对所有观测数据均以新坐标系为准进行化算和平差。如果要将独立坐标系点的坐标化为国家坐标系,只要根据高斯投影反算公式计算出 $B_{\text{新}}, L_{\text{新}}$ 后,然后利用上列公式化为国家坐标系的 B, L , 再利用高斯投影正算公式并根据国家坐标系相应的中央子午线,即可化算为 X, Y 。

国家测绘局大地测量数据处理中心已编制了一整套建立地方独立坐标系的软件,可以供所需单位使用。