

学校代码：10491

研究生学号：博 9848

# 中国地质大学

## 博士学位论文

GPS 网络 RTK 定位原理与数学模型研究

博 士 生：吴北平

学科专业：地球探测与信息技术

导 师：李紫金

副 导 师：李征航

论文答辩日期 2003.4.20 学位授予日期 \_\_\_\_\_

答辩委员会主席 胡明安 评 阅 人 黄景湖、胡友健

二〇〇三年三月

A Dissertation Submitted to China University  
of Geosciences for the Degree of Doctor of Philosophy

Principle and Mathematical Model Research for GPS Network RTK

Ph. D. Candidate: Wu Beiping

Major: Geodetection and Information Technology

Advisor: Li Zijin

Associate Advisor: Li Zhenghang

China University of Geosciences

Wuhan 430074 P. R. China

# 作者简介

吴北平，男，1960 年元月生。1982 年 7 月毕业于武汉测绘科技大学大地测量系。中国地质大学地球探测与信息技术专业 98 级在职博士生，研究 GPS 定位技术。

在学习期间，除了完成教学任务与学位课程外，还公开发表科研与教学论文 12 篇，其中有 3 篇被 ISTP 光盘收录，完成科研项目 1 项，正在进行的科研项目 1 项，具体情况如下：

## 一、攻读学位期间发表的论文

1. 吴北平，岳迎春，胡友健，李征航：论城市 GPS 网络导航服务系统的建设，科技进步与对策，2002 年第 3 期
2. 李征航，何良华，吴北平：全球定位系统（GPS）技术的最新进展（第二讲）网络 RTK，测绘信息与工程，2002 年第 2 期
3. 吴北平，李征航：GPS 网络 RTK 线性组合法与内插法关系的讨论，已被《测绘信息与工程》编辑部录用，2003 年 3 期刊登。
4. 吴北平，李征航，徐绍铨：GPS 定位技术在三峡库区崩滑地质灾害监测中的试验分析《地球科学》，2001 年第 6 期。
5. 胡友健，吴北平等：山区地下开采影响下地表移动规律，焦作工学院学报，1999.4
6. 吴北平，胡友健等：Deformation Monitoring of the Jingzhou-Shashi High Fill Road Section of the Yichang-Huangshi Express Highway of Hubei Province., Proceedings of the International Symposium on Hydrogeology and the Environment, 17-21 October 2000, wuhan, P.R.China, China Environment Science Press.。（2001 年 ISTP 光盘收录）
7. 吴北平，李征航，徐绍铨：The Landslide Geologic Hazard in the Reservoir Area of the Three Gorges on the Yangtze: Experimental Results of Monitoring the Hazard with GPS. Proceedings of the International Symposium on Hydrogeology and the Environment, 17-21 October 2000, wuhan, P.R.China, China Environment Science Press.（2001 年 ISTP 光盘收录）
8. 胡友健，吴北平等：Reclamation of the Subsidence Land of Jiaozuo mining Area. Proceedings of the International Symposium on Hydrogeology and the Environment, 17-21 October 2000, wuhan, P.R.China, China Environment Science Press.（2001 年 ISTP 光盘收录）
9. 吴北平，胡友健等：面向 21 世纪测量工程专业的教学内容和课程体系改革探讨，《工程教学研究与实践》，中国地质大学出版社，2000 年 12 月。工程学院优秀教学论文。
10. 胡友健，吴北平等：测绘工程专业师资队伍的现状、建设目标与对策，《工程教学研究与实践》，中国地质大学出版社，2000 年 12 月。
11. 胡友健，吴北平等：关于测量工程专业本科生的能力培养，《中国地质教育》，1998 年第 2 期。

## 二、已完成的科研项目和正在进行的科研项目

1. 主持完成了湖北省宜黄高速公路“黄黄高速公路软基变形监测”横向科研项目，2001~2002。

2. 主持研究“采矿塌陷对环境的影响评价及其治理对策研究”部开放实验室基金项目 1 项，正在进行中。

---

# 摘要

GPS 网络 RTK 定位是近几年发展起来的一种高精度的 GPS 定位技术,它利用多个基准站构成一个基准站网,然后借助广域差分 GPS 和具有多个基准站的局域差分 GPS 中的基本原理和方法来消除或削弱各种 GPS 测量误差对流动站的影响,从而达到增加流动站与基准站间的距离和提高定位结果精度的目的。与常规 RTK 相比,该方法具有覆盖面广,定位精度高,可靠性强,可实时提供厘米级定位等优点,其应用前景广阔,是目前 GPS 界研究的热点。本文对当前 GPS 网络 RTK 的内插法、线性组合法和虚拟基准站法进行了较为系统的研究。主要研究内容和成果如下:

## 1. GPS 网络 RTK 内插法原理及其数学模型

当流动站与离基准站在 20km~100km 时,采用常规 RTK 定位方法将得不到厘米级的定位结果。因为与距离有关的轨道误差、电离层延迟和对流层延迟等残差项随着流动站和基准站间距离的增加都将迅速增加,从而导致难以正确确定整周模糊度。当流动站和基准站间的距离大于 50km 时,常规 RTK 的单历元解一般只能达到分米级的精度。因此,如何消除与距离有关的 GPS 测量误差,是提高流动站与基准站间距离和保证厘米级 RTK 定位的关键。

本文利用基准站坐标已知的条件,将多个基准站组成基准站网,并计算出基准站间各种误差的综合影响,在假设这些误差的影响是呈线性变化的条件下,依据基准站上这些计算出的综合误差,采用线性内插的方法求得流动站的观测误差,然后对流动站的双差载波相位观测值进行修正,消除其影响。经实验计算和理论证明,内插法在其数学模型中不仅能够消除残余的卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响,而且还能大幅度地削弱残余的对流层延迟误差和多路径误差等系统误差对流动站的影响,从而达到了增加流动站与基准站间的距离和提高 RTK 定位结果精度的目的。本文根据网络 RTK 内插法的基本原理导出了内插法的数学公式,并给出了采用内插法进行网络 RTK 定位的具体步骤。

## 2. 网络 RTK 线性组合法原理及其数学模型

如果我们近似地认为卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响是呈线性变化的,那么,消除这些误差对流动站观测值的影响,也可采用将流动站与三个或三个以上基准站的单差载波相位观测值进行线性组合的方法进行。公式推导证明,经线性组合后的流动站观测值模型能够直接消除或削弱这几项误差的影响。本文根据这一原理导出了线性组合法的数学公式,并给出了采用线性组合法进行网络 RTK 定位的具体做法。

## 3. 虚拟基准站法原理及其数学模型

当流动站离基准站较远时,由于两站间的误差相关性减小,残余的卫星轨道误差,电离

层延迟, 对流层延迟等偏差对相对定位的影响增加, 从而使常规 RTK 的定位精度降低。为解决这一问题, 可采取增设一些基准站的方法, 以使用户能利用这些基准站所提供的信息采用一定的算法来消除或大幅度地削弱这些偏差项所造成的影响。虚拟基准站法的原理就是设法在流动站附近建立一个虚拟的基准站, 并根据周围各基准站上的实际观测值算出该虚拟基准站上的虚拟观测值。由于虚拟站离流动站很近, 一般仅相距数米至数十米, 故动态用户只需采用常规 RTK 技术就能与虚拟基准站进行实时相对定位, 获得较准确的定位结果。在流动站附近建立一个虚拟基准站的目的是为了增强流动站与基准站间误差的相关性, 以提高常规 RTK 的定位结果, 所以该方法的关键在于如何构建出虚拟的观测值。本文根据虚拟基准站法的基本原理, 从内插法和线性组合法的数学模型出发, 初步建立了求虚拟基准站观测值的数学模型, 并给出了采用虚拟基准站法进行网络 RTK 定位的具体做法。

#### 4. 内插法、线性组合法及虚拟基准站法间的关系

目前在 GPS 界研究网络 RTK 定位理论时, 因内插法、线性组合法和虚拟基准站法是分别提出的, 所以对它们之间的关系缺乏讨论, 本文在这方面进行了研究。通过对三者关系的讨论, 最后得出了几点结论。(1) 线性组合法与线性函数的内插法可以互相转换, 所以线性组合可以作为内插法的一个特例;(2) 虚拟基准站法的虚拟观测值计算公式可以由内插法和线性组合法的公式导出;(3) 三种方法都能够消除残余的卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响, 都能够大幅度地削弱残余的对流层延迟误差和多路径误差对流动站的影响;(4) 这三种方法间在算法上并无本质的差别, 其定位结果的理论精度应大体相当;(5) 应用这三种方法进行网络 RTK 定位, 采用精密星历进行事后定位与采用广播星历进行实时动态定位, 其定位结果的理论精度应相同。

#### 5. 网络 RTK 数学模型系数和流动站初始位置对定位结果的影响

网络 RTK 定位结果的精度不仅受到常规的轨道误差, 电离层延迟, 对流层延迟和多路径效应等系统误差的影响, 而且还受到数学模型系数以及流动站初始位置精度的影响。本文详细讨论了这方面的问题, 得出两点结论:(1) 内插精度高于外推精度, 也即流动点应位于基准站所组成的三角形中;(2) 在一般情况下, 网络 RTK 数据处理中心根据流动站传送来的单点定位结果计算流动站的误差改正数, 就能够满足厘米级定位精度要求, 所以不需对流动站初始位置进行迭代计算。

#### 6. 理论检验

对本文所建立的数学模型和结论的正确性需要实验计算验证。本文根据某地区的 4 个 GPS 控制点坐标, 按照网络 RTK 定位原理进行实验设计, 分别用精密星历和广播星历的 GPS 观测数据, 以内插法数学模型为例进行模拟计算, 各计算了 60 个历元的 GPS 定位数据。计算结果表明,(1) 本文建立的内插法数学模型能够很好地模拟流动站与参考基准站间的测量误差;(2) 使用精密星历与使用广播星历进行网络 RTK 定位, 两者定位结果精度一致。

全文共分八大章

第一章为绪论, 首先简要地介绍了常规 RTK 技术, 然后详细地介绍了 GPS 网络 RTK 的

---

基本原理、系统组成和国内外的研究情况以及研究网络 RTK 的意义；最后列举了本文的主要研究内容以及所取得的主要研究成果。

第二章给出了 GPS 数据处理和网络 RTK 所涉及的基本理论和公式。具体包括：卫星定位原理，观测量的线性组合和广播星历卫星位置计算。本章内容为本文研究建立网络 RTK 定位数学模型从理论上作好了准备。

第三章对网络 RTK 定位中的几种常见误差，例如电离层延迟、对流层延迟和轨道误差等进行了详细地分析。本章是本文的误差理论基础，也是本文的重点内容之一。

第四章是网络 RTK 内插法的数学模型研究，是本文的最主要研究内容之一。在该章首先介绍了 GPS 网络 RTK 的基本原理，然后根据内插法的基本原理导出了内插法的数学公式，并给出了采用内插法进行网络 RTK 定位的具体做法，最后分析了流动站载波相位双差内插改正数的观测中误差，流动站在基准站网中的位置以及流动站初始位置对内插法改正数精度影响等问题。

第五章为网络 RTK 线性组合法的数学模型研究。本章首先根据基准站与流动站的单差观测值，按照一定的条件构造出了一个流动站的线性组合虚拟观测值方程，并根据虚拟观测值方程，讨论了在方程中如何消除残余的星历误差和电离层延迟等问题；接着导出了求流动站线性组合法的双差改正数误差公式；然后讨论了线性组合法与内插法的关系。本章也是本文的最主要研究内容之一。

第六章是网络 RTK 虚拟基准站法的数学模型研究。首先介绍了虚拟基准站法的基本思想，然后从内插法和线性组合法的数学模型出发，初步建立了虚拟基准站法的数学模型，最后给出了采用虚拟基准站法进行网络 RTK 定位的具体过程。

第七章为网络 RTK 模糊度解算数学模型介绍。本章首先介绍了有关模糊度搜索的基本思想和现有模糊度 OTF 解算的经典方法，然后介绍了参考文献[4]提出的基于网络 RTK 流动站单历元模糊度搜索法。

第八章为实验数据与分析。为了验证本文数学模型及理论的正确性，根据实际情况，采用模拟实验方式，以内插法数学模型为例，模拟计算了 60 个历元的 GPS 定位数据，并对模拟计算结果进行了分析。

**关键词：**GPS、网络 RTK、内插法、线性组合法、虚拟基准站法、整周模糊度 OTF 解算

## ABSTRACT

GPS network RTK positioning is a kind of high precise GPS positioning technique which has developed in recent years. It forms a GPS network from multiple reference stations and then eliminates or mitigates the influence of GPS observation errors on roving receiver, based on the basic principle and techniques of WADGPS and LADGPS with multiple reference stations so as to increase the distance between reference stations and roving receivers and enhance the accuracy of GPS real time kinematic positioning. Compared with conventional RTK, this technique has many advantages like wider action area, more accurate, more reliable positioning etc. It can also provide RTK positioning in centimeter accuracy for users. In this thesis, the concept and principle of GPS network are described and three methods --- interpolation method, linear combination method and virtual reference station method in GPS network RTK are discussed systematically. The main tasks and contributions of this research can therefore be summarized as follows:

### **The principle and mathematical model of interpolation method in GPS network RTK**

By using the condition of the known coordinates of reference stations, the residual error terms including orbit errors, ionospheric delay, tropospheric delay and multipath and observation noise are calculated comprehensively in the double-differenced mathematical model for carrier phase observations and then by using the calculated result of the mixed errors on the reference station, the observation errors on the roving receiver are estimated based on the interpolation method. According to the principle mentioned above, establishing GPS network RTK interpolation mathematical model has the characteristics of simple formula, good positioning and high precision. Through practical calculation and theoretical evidence, the orbit errors and ionospheric delay can be eliminated, and in addition, the tropospheric delay, multipath and observation noise can be significantly reduced by the interpolation method so as to increase the distance between reference stations and roving receivers and enhance the accuracy of GPS real time kinematic positioning. This thesis develops the interpolation mathematical formula based on the basic principle of GPS network RTK and lists specific procedures of how to position GPS network RTK by using interpolation method.

### **The principle and mathematical model of linear combination method in the network RTK**

If that the influence of the residual error terms mentioned above is linear is assumed, this method will be based on a linear combination model, formed from the single-differenced functional equation for baselines from the roving receiver to three or more reference receivers to eliminate or mitigate the influence of the roving receiver on these errors by using the condition of the known coordinates of base stations. Deriving from the combination model, combined observation can directly eliminate or mitigate the influence of roving receivers on these errors. This thesis introduces the mathematical formula based on the principle of linear combination method and lists the specific operations of GPS network positioning using interpolation method.

### **The principle and mathematical model of virtual reference station method**

If a roving receiver is far away from a reference station, the correlation of the errors between

---

the two stations will be decreased and the errors of residual orbit bias, ionospheric delay, tropospheric delay and multipath will increase the influence of relative positioning so as to degrade positioning precision of conventional RTK. In order to solve the problem, new reference stations should be established so that the users can use the information provided by the reference stations and adopt some algorithm to eliminate or mitigate the influence the errors. The principle of virtual reference station method is intended to establish a virtual reference station near a roving receiver and calculate the virtual observation at the virtual reference station according to the raw observation around reference stations. Because a virtual reference station is very close to a roving receiver, only several meters or 10 meters apart, roving users only need to use conventional RTK technique and can do real time relative positioning with virtual reference stations to get more accurate positioning result. The purpose of establishing a virtual reference station near a roving receiver is to enhance the error correlation between a roving receiver and a reference station so as to improve the result of conventional RTK positioning. So the method aims at how to find out virtual observations. This thesis, based on the basic principle of virtual reference station method, starting from the mathematical model of interpolation and linear combination methods, preliminarily establishes the mathematical model of finding out virtual reference station observations and lists the specific operations of GPS network RTK positioning using virtual reference stations.

#### **The relationship between interpolation, linear combination and virtual reference station methods**

In recent GPS research field, when studying network RTK positioning theory, interpolation method, linear combination method and virtual reference station method are usually discussed separately. Therefore, the relationship between them is ignored. In this thesis, it discusses their relationship and reaches some conclusions: (1) The linear combination method and the interpolation can be transformed each other and therefore linear combination can be regarded as a special example of the interpolation. (2) The virtual observation formula of the virtual reference station can be derived from the formula of interpolation and linear combination methods. (3) The orbit errors and ionospheric delay can be eliminated, and in addition, the tropospheric delay, multipath and observation noise can be significantly reduced by the mentioned three methods above so as to increase the distance between reference stations and roving receivers and enhance the accuracy of GPS real time kinematic positioning. (4) There is, in nature, no difference among the three network RTK positioning methods. In this way, the theoretical precision of the positioning result should be about the same. (5) Using the three methods to do network RTK positioning, for example, by using precise ephemeris to do post-positioning and using broadcast ephemeris to do real time kinematic positioning, in theory, the precision of both positioning results should be the same.

#### **The influence of the parameter in network RTK mathematical model and the precision in initial positions of roving stations on the positioning results**

The precision of network RTK positioning result is influenced not only by the systematic errors like conventional orbit errors, ionospheric delay, tropospheric delay and multipath, but also by



the mathematical model parameter and the initial positioning precision at roving stations. This thesis discusses this problem in details and concludes: (1) Roving stations should be located in the area of reference stations. So the simulated error information will be acceptable and good result will be achieved. (2) In general, network RTK data processing centers use point positioning results disseminated from roving stations to calculate the interpolation error correction which can meet the requirements of centimeter accurate positioning and not to calculate the point positioning results at roving stations repeatedly.

#### **Testing the theory in this thesis**

The correctness of the mathematical model established in this thesis is to be tested through experimental calculations. On the basis of the accurate coordination of the 4 GPS control points obtained from some region, according to the experimental design with the network RTK positioning principle, setting interpolation mathematical model as an example, this thesis calculates GPS positioning data of 60 epochs altogether. The result shows that the difference between both positioning results is only  $\pm 4\text{mm}$ , which proves that the interpolation mathematical model established in this thesis can simulate the observation errors between roving receivers and reference stations very well.

#### **The thesis is divided into eight chapters:**

The first chapter is an introduction. It briefly introduces conventional RTK technique and then describes the basic principle of GPS network RTK, the systematic form, the research backgrounds at home and abroad and the significance of studying network RTK. Finally, it lists the main research contents in this thesis and the main research results obtained.

The second chapter discusses the basic principle and formulae involved in GPS network data processing, mainly including satellite positioning principle, observable linear combination and the location calculation of broadcast ephemeris satellites. The contents of this chapter, in theory, has been well prepared for studying the establishment of network RTK positioning mathematical model.

The third chapter analyzes some common errors in network RTK positioning, for example, ionospheric delay, tropospheric delay, orbit error and etc. in details and also discusses how to eliminate or mitigate them.

The fourth chapter is about network RTK interpolation mathematical model, which is the most important part in this thesis. In this chapter, it first introduces the basic principle in GPS network RTK, and then it derives interpolation mathematical formula from the basic principle of interpolation and lists some specific operations of network RTK positioning using interpolation method. Finally, it analyzes the standard deviation of double-differenced mathematical model for carrier phase observations, the influence of roving receivers at reference stations on interpolation model parameters and the influence of initial locations at roving receivers on precision of interpolation correctness.

The fifth chapter is about mathematical model of linear combination method for network RTK. This chapter first establishes a virtual observable equation of linear combination at roving receivers,

---

based on single-differenced observations of reference stations and roving receivers. Next it discusses how to eliminate residual ephemeris errors, ionospheric delay and so on in that equation. Then it derives the mathematical formula based on the principle of linear combination method. Finally, it describes the relationship between linear combination and interpolation methods.

The sixth chapter talks about the mathematical model of network RTK virtual reference station method. It introduces the basic concept on virtual reference stations and then starting from the mathematical model of interpolation and linear combination methods, it preliminarily establishes the mathematical model of virtual reference stations. After that, it lists specific procedures of how to do network RTK positioning using virtual reference stations.

The seventh chapter introduces ambiguity resolution techniques for network RTK. It states the basic concept about the ambiguity search and the classic method of current ambiguity resolution OTF and then introduces the method of integer ambiguity search using single epoch for network RTK roving stations.

The eighth chapter is mainly about experimenting data and analysis. In order to test the correctness of the mathematical model and its theory in this thesis, on the basis of practical situation, according to the simulated experimental design, setting interpolation mathematical model as an example, using post-data processing method, it calculates GPS positioning data of 60 epochs altogether and meanwhile it analyzes the simulated calculating results.

**Key words:** GPS, network RTK, interpolation method, linear combination method, virtual reference station method, integer ambiguity resolution on the fly

# 目 录

第一章 绪论	1
§1.1 常规 RTK 定位技术与网络 RTK 定位技术	1
1.1.1 常规 RTK 定位技术	1
1.1.2 GPS 网络 RTK 技术	1
§1.2 国内外 GPS 网络定位技术研究现状	2
1.2.1 国内外基准站网建设发展状况	2
1.2.2 GPS 网络 RTK 定位技术软件开发现状	4
§1.3 本文研究的主要内容和成果	5
第二章 GPS 定位原理及数据处理	7
§2.1 GPS 定位原理	7
2.1.1 伪距观测量	7
2.1.2 载波相位观测方程	8
2.1.3 GPS 差分观测值	8
§2.2 GPS 观测方程的线性化	10
§2.3 不同频率观测量的线性组合	12
2.3.1 线性组合的一般形式	12
2.3.2 电离层对线性组合的影响	13
2.3.3 观测噪声对线性组合的影响	13
§2.4 GPS 卫星广播星历位置的计算及 RENIX 格式	15
2.4.1 GPS 卫星广播星历位置的计算	15
2.4.2 卫星星历 RINEX 格式	18
第三章 GPS 网络 RTK 定位误差分析	20
§3.1 轨道误差及其对单差观测值的影响	20
§3.2 电离层延迟及流动站电离层延迟内插改正模型	22
3.2.1 电离层延迟	22
3.2.2 流动站单差和双差观测值的电离层内插模型	23
§3.3 对流层延迟	24
§3.4 多路径效应	25
§3.5 其它误差改正计算	27
3.5.1 接收机钟差计算	27
3.5.2 接收机位置误差	28
3.5.3 卫星钟差计算	28
3.5.4 相对论效应计算	28
3.5.5 信号传播时间计算	29

3.5.6 地球自转改正·····	29
<b>第四章 网络 RTK 定位原理与内插法的数学模型</b> ·····	31
§4.1 网络 RTK 的基本原理·····	31
§4.2 内插法·····	31
§4.3 内插法精度分析·····	35
4.3.1 经双差改正后流动站载波相位双差观测值的中误差·····	35
4.3.2 流动站在基准站网中的位置对双差观测值的中误差影响·····	35
4.3.3 流动站初始位置对内插改正数的影响·····	36
<b>第五章 网络 RTK 线性组合法的数学模型</b> ·····	39
§5.1 流动站与基准站载波相位观测值单差线性组合的数学模型·····	39
§5.2 线性组合法与内插法的关系·····	44
<b>第六章 虚拟基准站法的数学模型</b> ·····	46
§6.1 虚拟基准站法·····	46
§6.2 虚拟基准站观测值的计算模型·····	46
6.2.1 根据内插法公式计算虚拟基准站观测值·····	46
6.2.2 根据线性组合法公式计算虚拟基准站观测值·····	47
§6.3 流动站与虚拟基准站双差观测值的计算模型·····	48
<b>第七章 网络 RTK 模糊度解算数学模型介绍</b> ·····	50
§7.1 OTF 模糊度解算的基本原理·····	50
§7.2 现有 OTF 方法介绍·····	51
7.2.1 双频 P 码伪距法·····	51
7.2.2 最小二乘搜索法·····	56
7.2.3 模糊度协方差法·····	58
§7.3 模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法·····	61
§7.4 网络 RTK 流动站的单历元整周模糊度搜索法·····	65
<b>第八章 实验数据及其分析</b> ·····	69
§8.1 试验概况·····	69
§8.2 内插法实验计算·····	70
§8.3 网络 RTK 广播星历与精密星历定位结果试验计算·····	80
<b>结束语</b> ·····	82
<b>致谢</b> ·····	84
<b>参考文献</b> ·····	85

# 第一章 绪 论

## §1.1 常规 RTK 定位与网络 RTK 定位技术

### 1.1.1 常规 RTK 定位技术

全球定位系统 GPS 是美国导航卫星定时测距全球定位系统的简称 (Navigation Satellite Timing and Ranging Global Positioning System)。它能向用户提供全球性、全天候、连续、实时、高精度的三维位置、三维速度和时间信息。该系统自 1973 年 12 月开始, 经过方案论证、工程研制和生产作业三个阶段, 历经二十余年, 耗资 200 多亿美元 (徐绍铨等, 2001), 于 1994 年全部建成 (王爱朝, 1995)。

但全球定位系统 GPS 的定位精度受美国的 AS 和 SA 政策影响, 我国的 GPS 用户收不到 P 码, 其单点定位精度已降低到 100m 左右。尽管美国已于 2000 年宣布停止实施 SA 政策, 然而 GPS 单点定位精度也难于高过  $\pm(15\sim30)\text{m}$ 。解决 GPS 单点定位精度低的办法之一, 就是发展差分 GPS 技术。

常规 RTK 定位技术就是 GPS 差分技术的一种应用。高精度的 RTK 定位技术是基于载波相位观测值的实时动态定位技术, 它能够实时地提供测站点在指定坐标系中的三维定位结果, 并达到厘米级精度。在 RTK 作业模式下, 基准站通过数据链将其观测值和测站坐标信息一起传送给流动站。流动站不仅通过数据链接接收来自基准站的数据, 还要采集 GPS 观测数据, 并在系统内组成差分观测值进行实时处理, 同时给出厘米级定位结果, 历时不到一秒钟。流动站可处于静止状态, 也可处于运动状态; 可在固定点上先进行初始化后再进入动态作业, 也可在动态条件下直接开机, 并在动态环境下完成模糊度的搜索求解。在整周未知数解固定后, 即可进行每个历元的实时处理, 只要能保持四颗以上卫星相位观测值的跟踪和必要的几何图形, 则流动站可随时给出厘米级定位结果。

### 1.1.2 GPS 网络 RTK 技术

常规 RTK 是建立在流动站与基准站误差强相关这一假设条件的基础上的。当流动站离基准站较近 (例如不超过 10~15km) 时, 上述假设条件一般均能较好地成立, 此时利用一个或数个历元的观测资料即可获得厘米级精度的定位结果。然而随着流动站和基准站间间距的增加, 这种误差相关性变得越来越差, 定位精度迅速下降, 当流动站和基准站间的距离大于 50km 时, 常规 RTK 的单历元解一般只能达到分米级的精度 (李征航等, 2002)。为了保证定位结果仍是厘米级的精度, 就产生了所谓的 GPS 网络 RTK 技术。

网络 RTK 技术的基本原理是利用多个基准站构成一个基准站网,然后借助广域差分 GPS 和具有多个基准站的局域差分 GPS 中的基本原理和方法来消除或削弱各种系统误差的影响,从而获得高精度的定位结果。与常规 RTK 相比,该方法的主要优点为覆盖面广,定位精度高,可靠性强,可实时提供厘米级定位,应用前景广阔。

网络 RTK 是由基准站网,数据处理中心,数据通信线路及用户四个部分组成的。基准站上应配备双频全波长 GPS 接收机,该接收机最好能同时提供精确的双频伪距观测值。基准站的坐标应精确已知,其坐标可采用长时间 GPS 静态相对定位等方法来确定。此外,这些站还应配备数据通信设备及气象仪器等。基准站应按规定的采样率进行连续观测,并通过数据通信链实时将观测资料传送给数据处理中心。数据处理中心根据流动站发送来的近似坐标(可根据伪距法单点定位求得)判断出该流动站位于由哪三个基准站所组成的三角形内。然后根据这三个基准站的观测资料求出流动站处所受到的系统误差,并播发给流动用户来进行修正以获得精确的结果。必要时可将上述过程进行迭代一次。基准站与数据中心间的数据通信可采用数字数据网 DON 或无线通信等方法进行。流动站和数据处理中心间的双向数据通信则可通过移动电话 GSM 等方式进行。目前网络 RTK 大体可采用内插法、线性组合法及虚拟基准站等法进行。图 1-1 所示的就是一个小型网络 RTK 服务系统。

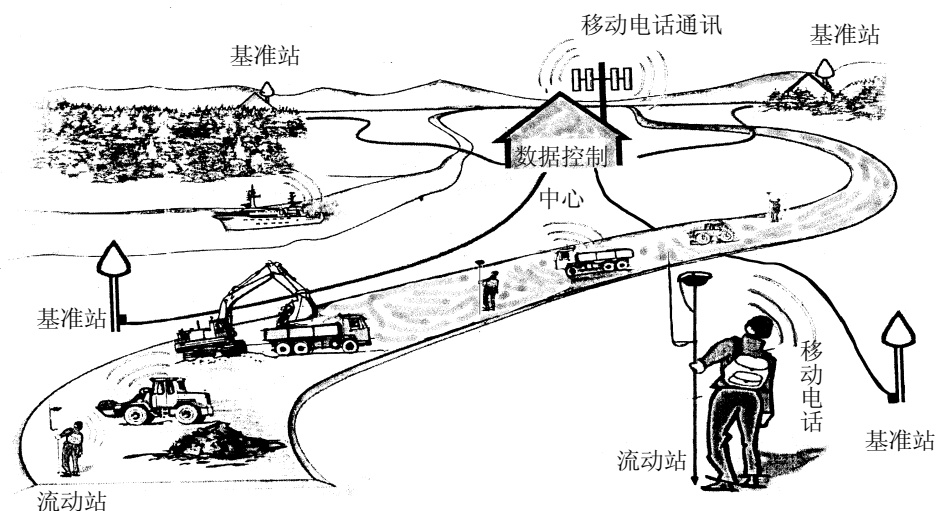


图 1-1 网络 RTK 定位

## § 1.2 国内外 GPS 网络定位技术研究现状

### 1.2.1 国内外基准站网建设发展状况

#### 1. 国外发展状况

##### 美国的连续运行参考站网系统 (CORS)

由美国国家大地测量局 (NGS) 牵头,包括 NGS 的跟踪网,美国海岸警备队 (USCG)

差分网、美国联邦航空局 (FAA) 的 WAAS 网、美国工程兵团 (USACE) 的跟踪网等 137 个 GPS 基准站组成了所谓连续运行参考站网系统 (Continuous Operation Reference Station's ---CORS)。该系统计划发展到 250 个基准站左右, 平均距离为 100~200km (个别 400km), 覆盖全美 (包括阿拉斯加), 构成新一代动态国家参考系统。系统的所有基准站都配置双频全波型 GPS 接收机, 每天一次卸载当天的数据, 数据记录格式为 30s RINEX 格式。通过 Internet 向全美和全球用户提供基准站坐标和 GPS 卫星跟踪观测站数据。

#### 美国 CUE, ACCQPOINT 公司的广域导航服务网络

CUE 和 ACCQPOINT 公司是美国、加拿大地区的两个卫星无线网络通信公司, 也是最早在北美开展商业广域差分导航服务的公司, 它们利用调频副载波 (FM) 广播广域差分修正信号。公司在美国和加拿大有 20 多个 GPS 永久跟踪站, 通过 FM 提供亚米级到十米级的广域差分有偿服务。最近, 这两个公司开发利用副载波发送 GPS 载波相位观测修正数据进行实时动态精密定位服务 (RTK FM<sup>TM</sup>) 技术, 有效作业距离可达 70km, 在 20~40km 的多条试验基线上, 2~4min 的初始化时间, 十个历元左右, 动态定位精度可达±1cm。这是一个应用前景非常广阔的技术。利用这一技术, 可以实现 GPS 广域差分 and 广域 RTK 技术的集成, 使过去分设的定位与导航系统完全有机地结合成一个系统。

此外, 美国 Satlog 等组织也有实时广域差分服务。该机构有 14 个在美国沿边境分布的永久跟踪站, 构成服务网络系统。

#### 加拿大的主动控制网系统 (CACS)

加拿大大地测量局将该国目前已建立的十几个永久性 GPS 卫星跟踪站构成一个主动控制网 (CACS), 作为加拿大大地测量的动态参考框架。其目的同样是通过 Internet 网提供网站地心坐标和相应的 GPS 卫星跟踪站观测数据, 测量、地球物理和其他用户采用 GPS 单机即可进行事后精密定位。该系统还提供精密星历、卫星钟差、电离层模型等广域差分修正, 其实时定位精度从 1 米到 10 米是可变的, 取决于用户采用的 GPS 接收机的抗干扰和抗多路径效应的性能。加拿大一些公司目前采用 FM 广播和中波信标广播网开展实时定位服务。

#### 德国的卫星定位与导航服务计划 (SAPOS)

“SAPOS”计划直译就是德国卫星定位与导航服务计划, 目的是将当前德国各部门的差分 GPS 计划协调统一起来, 建立一个长期运行的、覆盖全国的多功能差分 GPS 定位导航服务体系, 作为国家的空间数据基础设施。

德国“SAPOS”系统计划由 200 个左右的永久 GPS 跟踪站组成, 平均 40km 一个基准站, 和 CORS、CACS 一样, “SAPOS”构成了德国国家动态大地测量框架, 它正好代表了当今国家级大地测量系统的新概念。今后大地测量点不是靠埋石点来构成了, 而是靠这 200 个左右的 GPS 基准站。任意一个厘米级和毫米级精度的测量控制定位, 只要一台 GPS 接收机, 通过移动电话、市话网或 UHF 电台获取相近基准站的卫星观测数据, 在几十秒和更长一点时间内就可以确定。

#### 日本的 GPS 连续应变监测系统 (COSMOS)

日本国家地理院 (GSI) 从 90 年代初开始, 就着手布设一个点距较稀的地壳应变监测网。后来计划越来越庞大详实, 逐步发展成 COSMOS 系统。该系统的永久跟踪站平均 30km 一个, 最密的部分如关东、东京、京都等地区是 10~15km 一个站。到 1996 年底, 已建成了 800 余个永久跟踪站, 最终规划建设 1200 个站遍布日本。日本地理院的这一系统构成了一个格网式的 GPS 永久站阵列, 是日本国家的重要基础设施, 其主要任务有:

- 建成超高精度的地壳运动监测网网络系统
- 建成国家范围内的现代“电子大地测量控制网点”

系统向测量用户提供 GPS 数据作为定位服务,要求具有实时动态(RTK)能力,目的是完全取代传统的包括 GPS 静态的控制网测量和建立模式。

## 2 国内 GPS 站网定位技术发展概况

GPS 连续实时定位技术的研究和站网的建设实施,在国内也已经开始。目前主要动态和进展有:

国家测绘局从 1993 年开始着手建立国内永久性 GPS 跟踪站,用于定轨、精密定位和地球动力学监测。目前有武汉、北京、拉萨、乌鲁木齐、哈尔滨、海南、西安等连续运行基准站网服务系统。

深圳正在建立最终由 10 个 GPS 永久跟踪站组成的连续运行站网络服务系统;香港于近期已完成了第一期 6 个永久跟踪站组成的连续运行基准站网的建设,第二期 7 个永久基准站点将于 2002 年建成。

中国地壳运动观测网络。这一工程由国家地震局牵头,参加的有中科院、总参测绘局、国家测绘局。建设遍布全国的 25 个永久性 GPS 基准站(包括国家测绘局的已建站),平均站距 800km。按照 30s 采样间隔记录数据,每天传至分析中心,实现上述四个部门数据共享。目前这一系统的主要用途还是地壳运动的准实时监测与事后处理分析。

由交通部海监局负责,在中国沿海、北起大连、南至海南岛建设 21 个差分台站,开展常规差分 GPS 海上导航服务。目前已建成 10 余个基准站,采用单频 GPS 机。在可能的条件下,打算改造成广域差分导航系统。

### 1.2.2 GPS 网络 RTK 定位技术软件开发现状

网络 RTK 是目前世界 GPS 精密定位研究的一个热点,因为由网络 RTK 技术提供的产品服务不仅可以满足各类不同行业用户对精密定位、快速和实时定位、导航的要求,而且还能及时地满足城市规划、城市房地产管理、国土测绘、地籍管理、城乡建设、环境监测、防灾减灾、交通监控等多种现代化信息管理的社会需求。所以网络 RTK 技术具有广阔的市场前景。正是由于这个原因,所以国外公司对其产品的核心技术一直是保密的。

在国外,目前该领域比较成熟的产品有 Trimble 的 VRS 软件系统,由德国的 Landao 博士主持开发,该软件系统只用于商业用途,所以数学模型和处理方法一直非常保密。澳大利亚新南威尔士大学的 Han S.等(1997)对多基准站 GPS 定位技术也做过系统研究,提出了基于多个基准站相位观测值的组合模型消除或削弱多种误差,提高整周模糊度解算效率的思想。加拿大 Calgary 大学的 Raquet 等(1998)也做过多基准站的数据处理研究,他们采用的是网平差的方法,可以消除 53%以上的残余误差。德国的 GEO++公司做过与 VRS 类似的研究,与 VRS 软件不同的是他们采用所有基准站采集的同步观测值进行非差处理,整个网络产生一组称为 FKP 的区域改正参数,FKP 能够通过扩展的 RTCM 信息发送给流动站,另外,对于流动站来说,真实参考站的坐标是固定的且为流动站所已知,所以仅需单向数据传输,流动站的个数不受限制。

在国内,从事 GPS 网络 RTK 研究的学者不多,与笔者同期(2000 年开始)进行研究的有武汉大学的高星伟,后者已于 2002 年 5 月完成了“GPS/GLONASS 网络 RTK 的算法研究与



程序实践”的博士论文。但我们两人研究的着重点不完全相同,高星伟博士关于网络 RTK 的算法研究内容为内插法和整周模糊度的确定以及程序实践,本文做的工作是网络 RTK 定位原理与数学模型的研究,内容包括了网络 RTK 内插法、线性组合法和虚拟基准站法,重在理论研究。由于高星伟博士已完成了网络 RTK 整周模糊度的确定问题,所以本文对此不作研究。

### §1.3 本文研究的主要内容和成果

本文系统地研究了网络 RTK 定位原理和数学模型,对目前网络 RTK 的内插法、线性组合法和虚拟基准站法进行了较深入、细致地研究。主要研究内容和成果如下:

#### 4. GPS 网络 RTK 内插法及其误差处理理论

在 GPS 载波相位站星双差观测模型中仍然存在卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响,其中多路径效应和观测噪声残差项与站间的距离无关,而卫星轨道误差、电离层延迟和对流层延迟三项残差则与站间的距离有关。当距离较短时,这三项误差的影响一般可忽略不计,因而即使只用一个历元的观测值也可获得厘米级的定位精度。但随着距离的增加,这三项误差的影响将越来越大,从而使定位精度迅速下降。这就表明,在中长距离实时动态定位中与距离有关的误差占主导地位。如果我们能设法消除或大幅度地削弱上述三项误差的影响,则中长距离实时动态定位也可获得厘米级的定位精度。如果我们近似地认为卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响是呈线性变化的,那么我们就根据基准站坐标精确已知这一条件求出这几项残差的综合影响,并采用线性内插的方法求得流动站的这几项残差的综合影响,然后对流动站的双差载波相位观测值进行修正,消除其影响。这就是网络 RTK 线性内插法的基本原理。在内插法中,消除或削弱流动站误差的方法是对网络 RTK 的各种系统误差进行综合考虑,不加区分,所以它能够简化网络 RTK 的数学模型。通过对线性组合法与内插法关系的讨论可知,内插法不仅能够消除卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响,而且还能大幅度地削弱对流层延迟误差和多路径误差等系统误差对流动站的影响,从而达到了增加流动站与基准站之间的距离和提高 RTK 定位精度的目的。本文根据网络 RTK 内插法的基本原理导出了内插法的数学公式,并给出了采用内插法进行网络 RTK 定位的具体过程。

#### 5. 网络 RTK 线性组合法及其误差处理理论

如果我们近似地认为卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响是呈线性变化的,那么利用基准站坐标精确已知这一条件,消除或削弱这几项误差对流动站的影响,还可以采用将基准站和流动站的观测值进行线性组合的方法进行。方法是首先选定含有流动站的三个基准站组成一个三角形,并选取与流动站距离最近的基准站为参考基准站,然后通过一定的数学方式,将基准站和流动站的观测值进行线性组合,在数学模型中直接消除或削弱这几项误差对流动站的影响,这就是网络 RTK 线性组合法的基本原理。本文根据线性组合法的原理导出了线性组合法的数学公式,并给出了采用线性组合法进行网络 RTK 定位的具体过程。

#### 6. 虚拟基准站法

当流动站离基准站较远时,由于两站间的误差相关性减小,残余的卫星轨道误差,电离层延迟,对流层延迟等偏差对相对定位的影响增加,从而使常规 RTK 的定位精度降低。为解

决这一问题,就必须增设一些基准站,以使用户能利用这些基准站所提供的信息采用一定的算法来消除或大幅度地削弱这些偏差项所造成的影响。虚拟基准站法的原理就是设法在流动站附近建立一个虚拟的基准站,并根据周围各基准站上的实际观测值算出该虚拟基准站上的虚拟观测值。由于虚拟站离流动站很近,一般仅相距数米至数十米。故动态用户只需采用常规 RTK 技术就能与虚拟基准站进行实时相对定位,获得较准确的定位结果。在流动站附近建立一个虚拟基准站的目的是增强流动站与基准站间误差的相关性,以提高常规 RTK 的定位结果,所以该方法的关键在于如何构建出虚拟的观测值。本文根据虚拟基准站法的基本原理初步建立了求虚拟基准站观测值的数学模型。

#### 4. 内插法、线性组合法及虚拟基准站法间的关系

目前在 GPS 界研究网络 RTK 定位理论时,因内插法、线性组合法和虚拟基准站法是分别提出的,所以对它们之间的关系缺乏讨论,本文在这方面进行了研究。本文首次证明了线性组合法可以转化为内插法,而虚拟基准站法的虚拟观测值计算公式可以由内插法和线性组合法的公式推导出。这也从理论上证明了这三种网络 RTK 定位方法间在算法上并无本质的差别,因此,可得出三者的理论精度应大体相当的结论;另外,由于在线性组合法数学模型中,能够很好地消除卫星轨道误差项和电离层延迟项对流动站的影响,所以,在网络 RTK 定位中,采用精密星历进行事后定位与采用广播星历进行实时动态定位,在理论上,两者的定位结果应相同。

#### 5. 网络 RTK 数学模型系数 $\alpha_i$ 和流动站初始位置的精度对定位结果的影响

网络 RTK 定位结果的精度不仅受到常规的轨道误差,电离层延迟,对流层延迟,多路径效应等系统误差的影响,而且还受到数学模型系数  $\alpha_i$  以及流动站初始位置精度的影响。本文详细讨论了模型系数以及流动站初始位置精度对网络 RTK 定位结果影响的问题,通过讨论知,(1)流动点应位于基准站所包含的区域内,这样模拟的误差信息就比较理想,得到的结果也较好;(2)在一般情况下,网络 RTK 数据处理中心根据流动站传送来的单点定位结果计算出的内插误差改正数,能够满足厘米级定位精度要求,不需对流动站单点定位结果再进行迭代计算。

#### 6. 模拟实验

模拟实验的目的是为了证明本文所推导的数学模型是否正确。因我国至今还没有建立基准站间距离在 50~100Km 的基准站网络导航服务系统,所以,本文所进行的实验是模拟实验,并不是真正意义上的网络 RTK 实验。所用数据来自武汉大学在某一地区所进行的 GPS 控制测量,控制网由 4 个 GPS 点组成的,经平差后可得到这 4 个的精确坐标。实验计算中,将控制网中间的控制点作为流动站,其它点作为基准站点,以网络 RTK 内插法的数学模型为例,应用精密星历和广播星历 GPS 观测数据,采用事后数据处理方法计算出其中两个基准站与参考基准站的综合误差,并根据这些计算出的已知误差内插出流动站与参考基准站的 GPS 测量误差,共计算了 60 个历元的 GPS 定位数据。计算结果表明两者的定位结果之差仅相差  $\pm 4\text{mm}$ ,这说明,(1)本文建立的内插法数学模型能够很好地模拟流动站与参考基准站间的测量误差;(2)采用精密星历和广播星历进行网络 RTK 定位,两者结果精度一致。

## 第二章 GPS 定位原理及数据处理

### § 2.1 GPS 定位原理

不同类型的 GPS 信号接收机提供的观测量不尽相同。对于大地测量型接收机，一般可以得到以下两类观测量：伪距和载波相位，有的接收机还提供多普勒观测量（载波相位变化率）。

#### 2.1.1 伪距观测量

伪距观测量按精度可分为精码（P 码或 Y 码）伪距和粗码（C/A 码）伪距，其中 P 码码长为 29.3m，C/A 码码长 293m。

伪距观测量是通过卫星信号从发射时刻到接收机接收时刻的时延，然后乘以光速得到的距离观测量。传播时延是由接收机内部跟踪环路通过比较卫星时钟产生的测距码和接收机复制的结构完全一致的测距码而在相关系数达到最大值时得到的。由于两个测距码是根据卫星时钟和接收机时钟而分别产生的，接收机和卫星时钟又不可避免地存在时钟误差，另外由于对流层、电离层延迟等影响，伪距观测量不等于卫星和接收机之间的几何距离，其关系为：

$$P_k^i = \rho_k^i + d\rho_k^i + c * (dt^i - dT_k) + d_{ion_k}^i + d_{trop_k}^i + d_{mp_k}^i + \varepsilon_p \quad (2-1)$$

式中  $P_k^i$  为卫星  $i$  到接收机  $k$  的伪距； $d\rho$  为包括 SA 在内的星历误差影响（即轨道误差）， $dT$  为接收机钟差； $dt$  为卫星钟差； $d_{ion}$ 、 $d_{trop}$  分别为电离层和对流层传播延迟； $c$  为真空光速， $c=2.99792458 \times 10^8$  m/s； $d_{mp}$  为伪距的多路径效应影响； $\varepsilon_p$  为伪距观测噪声。上标用于区分卫星，下标用于区分测站。式中  $P$ 、 $d\rho$ 、 $\rho$ 、 $d_{ion}$ 、 $d_{trop}$  和  $\varepsilon$  以米为单位， $dT$  和  $dt$  以秒为单位。 $\rho = \|X^s - X_k\|$  为卫星发送信号时刻至接收机的几何距离， $X^s$  是卫星  $i$  的位置矢量， $X_k$  是测站  $k$  的位置矢量， $\rho$  可表示为：

$$\rho_k^i = \sqrt{(x^i - x_k)^2 + (y^i - y_k)^2 + (z^i - z_k)^2} \quad (2-2)$$

式中  $(x^i, y^i, z^i)$  为发送信号时刻卫星  $i$  的位置， $(x_k, y_k, z_k)$  为信号接收时刻接收机  $k$  天线相位中心的位置。通过对 C/A 码相位进行测量的为 C/A 码伪距，对 P 码相位进行测

量的为 P 码伪距。复制码与接收机测距码相关精度为码元宽的 1%。由于 C/A 码码元宽度为 293m, 其测量精度为 2.9m; P 码码元宽度为 29.3m, 其测量精度为 0.29m, 比 C/A 码测量精度高一个数量级。所以, 有时也称 C/A 码为粗码, P 码称为精码。

### 2.1.2 载波相位观测方程

载波相位观测量是接收机测量得到的卫星信号的载波相位与同一测量时刻接收机产生的载波相位的差值。虽然这个观测量是卫星和接收机天线之间的载波整周数和载波分数周数之和, 但问题是 GPS 接收机不能把一个整周数与另一个整周数区分开, 即 GPS 接收机只能分辨出小于 1 周的小数周数。最好的办法是量测小数周数并保持跟踪接收机相位的变化数, 因此, 初始相位周数, 即整周模糊度未被确定。利用载波相位作为观测量进行定位, 对未知整周模糊度, 必须采用某些方法进行估计或解算 (Wells, et al., 1987)。

$$\phi_k^i = \frac{f}{c} \rho_k^i + f \cdot (dt^i - dT_k) - N_k^i + \frac{f}{c} (d\rho_k^i - d_{ion_k}^i + d_{trop_k}^i + d_{mp_k}^i) + \varepsilon_\phi \quad (2-3)$$

$$\text{或 } \lambda \cdot \phi_k^i = \rho_k^i + d\rho_k^i + c \cdot (dt^i - dT_k) - \lambda \cdot N_k^i - d_{ion_k}^i + d_{trop_k}^i + d_{mp_k}^i + \varepsilon'_\phi \quad (2-4)$$

式中:  $d_{mp}^\phi$  是载波相位的多路径误差,  $\varepsilon'_\phi = \lambda \cdot \varepsilon_\phi$  是以米为单位的载波相位观测值的噪声误差,  $\lambda$  是载波相位的波长, 以米为单位;  $N$  是整周模糊度, 以周为单位。式中其它项符号与 (2-1) 式意义相同。注意的是载波相位观测值的电离层延迟与伪距的电离层延迟, 大小相等, 符号相反。

确定整周模糊度大小的数据处理方法称为模糊度解算。对运动 GPS 接收机进行整周模糊度解算的方法也称为模糊度 OTF 解算, 而把利用一个历元数据来求解整周模糊度的方法称为瞬时模糊度解算法, 或单历元模糊度解算法。

### 2.1.3 GPS 差分观测值

#### 1. 站间单差 (Single Difference between receivers or stations)

将基本相位观测量直接相减即构成单差, 它有卫星间求差、接收机间求差和历元之间求差三种方式, 考虑到星钟及轨道误差的影响, 多采用站间求差。

高精度 GPS 定位测量的最有效途径是利用高精度的载波相位观测量, 根据单差的定义, 由相位观测方程 (2-4) 知, 化为以米为单位的站间单差观测方程为:

$$\lambda \Delta \phi_{jk}^p = \Delta \rho_{jk}^p + \Delta d\rho_{jk}^p - c \cdot \Delta dT_{jk} - \lambda \cdot \Delta N_{jk}^p - \Delta d_{ion_{jk}}^p + \Delta d_{trop_{jk}}^p + \Delta d_{mp_{jk}}^p + \Delta \varepsilon'_\phi \quad (2-5)$$

其中  $\Delta$  称为单差算子, 且  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_k - (\cdot)_j$ , 如  $\Delta \phi_{jk}^p = \phi_k^p - \phi_j^p$  等。

可见, 站间单差消除了卫星钟误差的影响, 同时对轨道误差、对流层和电离层折射的影响也可大大削弱, 使得短距离内即使使用单频接收机且不加电离层折射改正, 仍可获得较高的精度。

设测站数 (包含参考站和动态站) 为  $n_i$ , 同步观测  $n^j$  颗卫星,  $n_i$  表示观测历元数, 并取一观测站为固定参考站, 则可得

$$\text{单差观测方程总数} = (n_i - 1)n^j n_i \quad (2-6)$$

$$\text{未知参数总数} = (n_i - 1)(3 + n_t + n^j) \quad (2-7)$$

为了得到确定的解, 按 (2-6) 和 (2-7) 式, 必须满足以下条件

$$(n_i - 1)n^j n_t \geq (n_i - 1)(3 + n_t + n^j)$$

而  $(n_i - 1) \geq 1$ , 故由上式可得

$$n_t \geq \frac{n^j + 3}{n^j - 1} \quad (2-8)$$

可见, 必要的观测历元数只与所测卫星数有关, 而与测站数 (流动站个数) 无关。例如, 当  $n^j = 4$  时, 求得  $n_t \geq 3$ , 这就是说, 在所述条件下, 在两个或多个观测站上, 对同一组卫星至少同步观测 3 个历元。这样按单差模型 (2-5), 进行平差计算时, 全部未知参数才能唯一确定。

应当指出, 上述单差模型的主要优点是清除了卫星钟差的影响, 同时可以明显减弱诸如轨道误差、大气折射误差等系统误差的影响。

在上述情况下, 应有

$$\text{独立基本观测方程总数} = n_i n^j n_t \quad (2-9)$$

与 (2-6) 式相比, 可知: 单差观测方程比独立观测方程减少  $n^j n_t$  个, 例如, 在两个测站于 3 个历元同步观测 4 颗卫星的情况下, 按上式可得独立观测量方程总数为 24, 单差观测方程数为 12, 单差观测方程比独立观测量方程减少 12 个。

## 2. 站星双差 (Double Difference between receivers and sations)

在上述单差观测量之间再求差即可生成双差观测量, 它亦有三种不同的求差方法, 即接收机与卫星间求差、接收机与历元间求差以及卫星与历元间求差, 常用的是站星双差。

由站间单差观测方程 (2-5) 及双差的定义可得双差的观测方程为:

$$\lambda \Delta \nabla \phi_{jk}^{pq} = \Delta \nabla \rho_{ij}^{pq} + \Delta \nabla d \rho_{ij}^{pq} - \Delta \nabla d_{ion ij}^{pq} + \Delta \nabla d_{trop ij}^{pq} - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{ij}^{pq} + \Delta \nabla d_{mp ij}^{\phi pq} + \Delta \nabla \varepsilon_{ij}^{pq} \quad (2-10)$$

其中  $\Delta \nabla$  为双差算子, 如  $\Delta \nabla \phi_{jk}^{pq} = \Delta \phi_{jk}^q - \Delta \phi_{jk}^p = \phi_k^q - \phi_j^q - \phi_k^p + \phi_j^p$  等。

可见, 双差模型在单差模型消除了卫星钟差参数的基础上, 又消除了接收机钟差参数。

显然, 该式中除含有与测站  $j$ ,  $k$  有关的基线向量待定参数外, 还包含有与整周模糊度待定参数  $\nabla \Delta N$ 。为了方便地构成双差观测方程, 可取一颗观测站为参考站, 同时取一观测卫星为参考卫星, 由此, 在  $n_i$  个测站, 同步观测的卫星数为  $n^j$ , 观测历元数为  $n_t$  个, 可组成

$$\text{双差观测方程总数} = (n_i - 1)(n^j - 1)n_t \quad (2-11)$$

$$\text{待定参数个数为 } 3(n_i - 1) + (n_i - 1)(n^j - 1) \quad (2-12)$$

(2-12) 式中第一项为待定点的坐标未知数, 第二项为在双差模型中出现的整周模糊度参数。于是, 为得到确定的解, 必须满足

$$(n_i - 1)(n^j - 1)n_i \geq 3(n_i - 1) + (n_i - 1)(n^j - 1)$$

考虑到  $(n_i - 1) \geq 1$ 、 $(n^j - 1) \geq 4$ ，故上式可写为

$$n_i \geq \frac{n^j + 2}{n^j - 1} \quad (2-13)$$

可见，这时必要的观测历元仍只与同步观测的卫星数有关，而与测站数无关。

双差观测方程的主要优点是进一步消除了接收机钟差的影响，当 A、B 两站相距不太远，测站周围的环境相似时，双差还可大大削弱大气延迟误差及卫星轨道误差的影响。同时，双差保留了模糊度的整数特征。因此，它是 GPS 定位中最主要的观测量，也是本文所用的主要观测量之一。

与单差类似，双差将使观测方程数进一步减少。在上述条件下，已知双差观测方程数如 (2-11) 式所示，与独立观测量方程总数 (2-9) 相比

$$\text{双差观测方程减少数} = (n_i + n^j - 1)n_i \quad (2-14)$$

而与单差观测方程数相比

$$\text{双并观测方程减少数} = (n_i - 1)n_i \quad (2-15)$$

由此，当  $n_i = 2$ ， $n^j = 4$ ， $n_i = 2$  时，可得独立观测量方程总数为 16，双差观测方程数为 6，双差观测量比独立观测量方程减少 10 个，比单差观测方程减少 2 个。

### 3. 三差

三差由双差观测值继续在历元之间求差得到，三差的观测方程中消除了整周模糊度。实践情况表明，用三差观测值求得的结果精度不是很高，但它不存在整周模糊度的问题，因而，通常被用来作为初次解，以协助解决整周模糊度和整周跳变等问题。

## § 2.2 GPS 观测方程的线性化

设固定站 A 和流动站 B 同步观测卫星 j、k，则历元 t 利用载波相位双差观测量进行动态相对定位的观测方程由 (2-10) 式得

$$\Delta \nabla \phi_{AB}^{jk} = \frac{f}{c} [\rho_B^k - \rho_A^k - \rho_B^j + \rho_A^j] - \Delta \nabla N_{AB}^{jk} + \varepsilon_\phi \quad (2-16)$$

设式中  $\Delta \nabla N_{AB}^{jk}$  已通过初始化确定，两站接收机钟差的双差残差以及大气折射残差均已归入观测噪声  $\varepsilon_\phi$  中，显然上式只含流动接收机天线位置  $(X_B, Y_B, Z_B)_t$  的三个未知参数，它们隐含在  $\rho_B^j$  和  $\rho_B^k$  中，故需要三个以上的形如 (2-16) 的观测方程，亦即需同步观测至少四颗卫星才可解算出以上未知参数。这种在  $\Delta \nabla N_{AB}^{jk}$  预先取整数的前提下所得的解称为双差固定解，否则，若将模糊度当作未知实数参数与测站坐标一同解算（如静态定位）则称为双差浮点解或实数解。式中略去了电离层延迟、对流层延迟和多路径等残差项的影响。

式 (2-16) 为非线性形式，设在近似动态天线位置  $(X_B^0, Y_B^0, Z_B^0)$  处展开，相应的改正

数记为  $(dx_B, dy_B, dz_B)$ , 且记

$$\Delta\nabla\tilde{\phi}_{AB}^{jk} = \frac{f}{c}[\rho_B^{0k} - \rho_A^k - \rho_B^{0j} + \rho_A^j] - \Delta\nabla N_{AB}^{jk} \quad (2-17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \rho_A^k &= [(X^k - X_A)^2 + (Y^k - Y_A)^2 + (Z^k - Z_A)^2]^{1/2} \\ \rho_B^{0k} &= [(X^k - X_B^0)^2 + (Y^k - Y_B^0)^2 + (Z^k - Z_B^0)^2]^{1/2} \\ \rho_A^j &= [(X^j - X_A)^2 + (Y^j - Y_A)^2 + (Z^j - Z_A)^2]^{1/2} \\ \rho_B^{0j} &= [(X^j - X_B^0)^2 + (Y^j - Y_B^0)^2 + (Z^j - Z_B^0)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

则得线性化的双差观测方程为

$$\begin{aligned} \Delta\nabla\phi_{AB}^{jk} &= \Delta\nabla\tilde{\phi}_{AB}^{jk} + \frac{f}{c} \left( \frac{X_B^0 - X^j}{\rho_B^{0j}} - \frac{X_B^0 - X^k}{\rho_B^{0k}} \right) dX_B \\ &+ \frac{f}{c} \left( \frac{Y_B^0 - Y^j}{\rho_B^{0j}} - \frac{Y_B^0 - Y^k}{\rho_B^{0k}} \right) dY_B + \frac{f}{c} \left( \frac{Z_B^0 - Z^j}{\rho_B^{0j}} - \frac{Z_B^0 - Z^k}{\rho_B^{0k}} \right) dZ_B + \varepsilon_\phi \end{aligned} \quad (2-19)$$

若该历元共同观测了  $n^j$  个卫星, 且取参考卫星  $j$  为同一卫星, 令  $j=1, k=2,3,\dots,n^j$ , 则有矩阵形式的误差方程

$$\underset{(n^j-1) \times 1}{\mathbf{V}} = \underset{(n^j-1) \times 3}{\mathbf{A}} \underset{3 \times 1}{\delta \mathbf{X}} - \underset{(n^j-1) \times 1}{\mathbf{L}} \quad (2-20)$$

其中

$$\delta \mathbf{X} = [dX_B \quad dY_B \quad dZ_B]^T \quad (2-21)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Delta\nabla\phi_{AB}^{12} - \Delta\nabla\tilde{\phi}_{AB}^{12} \\ \Delta\nabla\phi_{AB}^{13} - \Delta\nabla\tilde{\phi}_{AB}^{13} \\ \vdots \\ \Delta\nabla\phi_{AB}^{1n^j} - \Delta\nabla\tilde{\phi}_{AB}^{1n^j} \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

$$\text{而} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta\nabla\phi_{AB}^{jk}}{\partial X_B} &= \frac{f}{c} \cdot \frac{(X_B^0 - X^j)}{\rho_B^{0j}} - \frac{f}{c} \cdot \frac{(X_B^0 - X^k)}{\rho_B^{0k}} \\ \frac{\partial \Delta\nabla\phi_{AB}^{jk}}{\partial Y_B} &= \frac{f}{c} \cdot \frac{(Y_B^0 - Y^j)}{\rho_B^{0j}} - \frac{f}{c} \cdot \frac{(Y_B^0 - Y^k)}{\rho_B^{0k}} \\ \frac{\partial \Delta\nabla\phi_{AB}^{jk}}{\partial Z_B} &= \frac{f}{c} \cdot \frac{(Z_B^0 - Z^j)}{\rho_B^{0j}} - \frac{f}{c} \cdot \frac{(Z_B^0 - Z^k)}{\rho_B^{0k}} \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{12}}{\partial X_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{12}}{\partial Y_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{12}}{\partial Z_B} \\ \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{13}}{\partial X_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{13}}{\partial Y_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{13}}{\partial Z_B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{\ln^j}}{\partial X_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{\ln^j}}{\partial Y_B} & \frac{\partial \Delta \nabla \phi_{AB}^{\ln^j}}{\partial Z_B} \end{pmatrix} \quad (2-24)$$

其最小二乘解为

$$\delta \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (2-25)$$

其中  $\mathbf{P}$  为权阵, 由于双差观测量之间的相关性, 权阵将不是对角阵。设观测值的方差为  $\sigma^2$ , 当两个观测站在历元  $t$  时刻, 同步观测了  $n^j$  颗卫星时, 相应的权阵为

$$\mathbf{P}_{(n^j-1)(n^j-1)} = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{n^j} \cdot \begin{pmatrix} n^j-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n^j-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n^j-1 \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

## § 2.3 不同频率观测量的线性组合

前面讨论的 GPS 差分观测量是指对相同载波频率的相位观测量之间进行的各种不同线性组合, 其目的是消除大量的多余未知参数, 减小各种误差对定位的影响, 提高定位的精度。

### 2.3.1 线性组合的一般形式

若以  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  分别表示 L1、L2 载波相位观测值的周数, 则线性组合的一般形式为

$$\phi_{n,m} = n\phi_1 + m\phi_2 \quad (2-27)$$

相应的线性组合观测量  $\phi_{n,m}$  的初始模糊度及其频率为

$$N_{n,m} = nN_1 + mN_2 \quad (2-28)$$

$$f_{n,m} = nf_1 + mf_2 \quad (2-29)$$

对应波长为  $\lambda_{n,m} = c/(nf_1 + mf_2)$ 。由  $\lambda = \frac{c}{f}$  及上二式可知, 线性组合观测量亦可表示



为测相伪距的形式

$$L_{n,m} = \lambda_{n,m} \phi_{n,m} = \frac{nf_1 L_1 + mf_2 L_2}{nf_1 + mf_2} \quad (2-30)$$

由上述公式可知, 线性组合仅仅改变了与频率有关的误差项, 如电离层延迟、观测噪声、多路径效应等, 而与频率无关的误差项如星历误差、钟差、对流层延迟等, 并未因线性组合而改变。

以上线性组合形式可类似地引用到测码伪距观测量上。

### 2.3.2 电离层对线性组合的影响

为了考察电离层的影响, 记 L1、L2 测码 (或测相) 的群延迟 (或相延迟) 分别为  $d_{ion1}$  和  $d_{ion2}$ , 则由 (2-30) 式可得线性组合观测量的电离层延迟 (以长度为单位) 为

$$d_{ion\ n,m} = \frac{nf_1 d_{ion1} + mf_2 d_{ion2}}{nf_1 + mf_2} \quad (2-31)$$

若只考虑电离层延迟的一次项, 则以长度单位的延迟量为

$$d_{ion,1} = \frac{A}{f_1^2} \cdot d_{ion,2} = \frac{A}{f_2^2} \quad (2-32)$$

式中  $A = -40.28 \cdot TEC$ ,  $TEC$  为信号传播路径上的电子总量 (周忠谟等, 1993)。综合 (2-31)、(2-32) 式有

$$d_{ion\ n,m} = \frac{A}{f_1 f_2} \left( \frac{nf_2 + mf_1}{nf_1 + mf_2} \right) \quad (2-33)$$

由上式可见,  $m, n$  取值不同, 电离层影响  $d_{ion\ n,m}$  亦不一样, 为了讨论方便, 将  $d_{ion\ n,m}$  表示为  $d_{ion,1}$  的函数

$$d_{ion\ n,m} = isf \cdot d_{ion,1} \quad (2-34)$$

其中  $isf$  称为电离层比例因子, 且

$$isf = \frac{f_1}{f_2} \left( \frac{nf_2 + mf_1}{nf_1 + mf_2} \right) \quad (2-35)$$

### 2.3.3 观测噪声对线性组合的影响

线性组合对观测噪声的大小亦有改变, 若记 L1、L2 相位观测  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  的量测噪声均为  $\sigma$  (以周单位), 则  $\phi_{n,m}$  的量测噪声 (单位为周) 为:

$$\sigma_{\phi_{n,m}} = (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \sigma \quad (2-36)$$

若将  $\phi_{n,m}$  表示为距离, 其量测噪声 (单位为 m) 为:

$$\sigma_{P_{n,m}} = \lambda_{n,m} (n^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \sigma \quad (2-37)$$

表 2-1 中  $f$  和  $\lambda$  是载波相位组合  $n \cdot \phi_1 + m \cdot \phi_2$  的频率和波长;  $\alpha_i$ 、 $\alpha_\phi$  和  $\alpha_L$  分别是载波相位组合观测与 L1 载波相位观测相应的电离层延迟比值, 和以周为单位和以米为单位的观测值噪声, 且  $\alpha_i = i s f = \frac{f_1}{f_2} (\frac{n f_2 + m f_1}{n f_1 + m f_2})$ ,  $\alpha_\phi = \sqrt{n^2 + m^2}$  (周),  $\alpha_L = \frac{\lambda_2 \sqrt{n^2 + m^2}}{n \lambda_2 + m \lambda_1}$  (米);

L2 半波长的  $\alpha_\phi = \sqrt{n^2 + (m/2)^2}$  (周),  $\alpha_L = \frac{\lambda_2 \sqrt{n^2 + (m/2)^2}}{n \lambda_2 + m \lambda_1}$  (米)。ION 表示双频组合的电离层延迟与 L1 电离层延迟的比值。由表列数据可知, 当  $n = -7$ ,  $m = 9$  时, 可获得

表 2-1 某些双频载波相位  $\phi_{n,m}$  组合线性的特性 (L2 的全波长和半波长)

n	m	$\lambda(\text{m})$	ION	$\alpha_i$ 比值	L2 全波长		L2 半波长		说明
					$\alpha_\phi$ (周)	$\alpha_L$ (m)	$\alpha_\phi$ (周)	$\alpha_L$ (m)	
1	0	0.1903	1.000	1.000	1.0000	1.0000			L1
0	1	0.2442	1.283	1.6469	1.0000	1.2833			L2
0	2	0.1221		1.6469	2.0000	1.2833	1.0000	0.6417	
77	-60	0.0063	0.000	0.0000	97.6166	3.2273	82.6378	2.7324	
1	-1	0.8619	-0.283	-1.2833	1.4142	6.4056			宽巷
1	1	0.1070	2.283	1.2833	1.4142	0.7948			窄巷
-1	2	0.3408	1.567	2.8054	2.2361	4.0041	1.4142	2.5319	准宽巷
2	-2	0.4308		-1.2833	2.8284	6.4073	2.2361	5.0654	
-3	4	1.6281	2.133	18.2518	5.0000	42.6923	3.6056	30.8475	超宽巷
-7	9	14.6526	4.550	350.350	11.4018	843.7298			

长达 1465.3 厘米波长的观测值, 但它受到的电离层延迟为 L1 的 4.55 倍, 即当 L1 的电离层延迟为 0.2 周时, 它的电离层延迟为 0.91 周, 其量测噪声也最大, 达 1.67 米。这一双频组合虽然不能用于精密动态定位数据处理, 但它与伪距观测值组合却有极强的周跳探测能力 (Han 1995), 因而它具有一定的应用价值。当  $n = 77$ ,  $m = -60$  时, 电离层延迟为 0, 其波长为 0.6cm。由于组合后消除了电离层的影响, 因而常用于远距离的 GPS 定位。当  $n = 1$ ,  $m = 1$  时 (窄巷观测值), 该组合观测值有最小的量测噪声 (仅为 0.151cm), 它可用于高精度的 GPS 定位。当  $n = 1$ ,  $m = -1$  时 (宽巷观测值), 电离层延迟只有 L1 的 -0.283 倍, 即当 L1 有 1 周的电离层延迟, 宽巷的电离层延迟只有 -0.283 周, 它的波长为 86.2cm, 量测噪声只有 1.2cm。宽巷观测值广泛用于 OTF, 周跳探测与修复、动态定位等。

在 (2-27) 式中, 若取

$$n=1, \quad m=-\frac{f_2}{f_1} \quad (2-38)$$

或

$$n=\frac{f_1^2}{f_1^2-f_2^2}, \quad m=\frac{-f_1f_2}{f_1^2-f_2^2} \quad (2-39)$$

则所组成的一阶项线性组合观测量  $\phi_{1,m}$  所受电离层的时延由 (2-32) 式得

$$d_{ion,1,m}=0 \quad (2-40)$$

$\phi_{1,m}$  称为无电离层影响的线性组合观测值, 剩余的高阶项影响大约为 2~4cm (叶世榕, 2002), 此时, 由于  $m$ 、 $n$  不全为整数, 线性组合后模糊度亦不具有整数特性。

另外, 宽巷观测量  $\phi_W$  和窄巷观测量  $\phi_N$  所受电离层延迟量大小相等, 符号相反。因此, 若将两者取中数即可消除电离层折射的影响, 即  $\phi_{n,m}=\frac{1}{2}(\phi_W+\phi_N)$  也是无电离层折射的观测量。

反之, 若将  $\phi_W$ 、 $\phi_N$  相减, 考虑到 (2-31)、(2-32) 式, 则可求得电离层折射的信息

$$\frac{1}{2}(\phi_W-\phi_N)=\frac{A}{f_1f_2} \quad (2-41)$$

$$d_{ion,1}=\frac{A}{f_1^2}=\frac{f_2}{f_1}\cdot\frac{1}{2}(\phi_W-\phi_N)=\frac{30}{77}(\phi_W-\phi_N) \quad (2-42)$$

$$d_{ion,2}=\frac{A}{f_2^2}=\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{1}{2}(\phi_W-\phi_N)=\frac{77}{120}(\phi_W-\phi_N) \quad (2-43)$$

## § 2.4 GPS 卫星广播星历位置的计算及 RENIX 格式

### 2.4.1 GPS 卫星广播星历位置的计算

在利用 GPS 信号进行导航定位时, 为了解算用户在地心坐标系中的位置, GPS 接收机需要测定测站到卫星的距离, 并且要知道同一卫星在同一时刻的地心坐标。卫星的地心坐标是从卫星的导航电文中提取的开普勒轨道参数和轨道摄动修正量按一定公式计算的。本节将介绍 GPS 卫星位置计算的步骤。

#### 1. 卫星运行的平均角速度 $n$

计算卫星的平均角速度  $n_0$  用下式:

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_s^3}} \quad (2-44)$$

式中,  $GM=398600.5 \text{ (km)}^3/\text{s}^2$  是 WGS-84 坐标系中的地球引力常数。平均角速度  $n_0$  加上导航电文中给出的摄动改正数  $\Delta n$ , 便得到卫星运行的平均角速度  $n$ :

$$n = n_0 + \Delta n \quad (2-45)$$

## 2. 计算归化时间 $t'$

首先对观测时刻  $t'$  作卫星钟差改正:

$$t = t' - \Delta t \quad (2-46)$$

$$\Delta t = a_0 + a_1(t - t_{0c}) + a_2(t - t_{0c})^2 \quad (2-47)$$

在计算卫星钟差改正  $\Delta t$  时,  $t$  可近似取  $t'$ ,  $t_{0c}$  为第一数据块的参考时刻,  $a_0$  为相对于 GPS 时系的时间偏差 (钟差),  $a_1$  是相对于实际频率的频率偏差系数 (钟速), 为时钟频率的漂移系数 (钟速变化率, 即钟漂)。然后将观测时刻  $t$  归化到 GPS 时系

$$t_k = t - t_{0e}$$

式中  $t_k$  称作相对于参考时刻  $t_{0e}$  的归化时间。

$$t_{0c} = t_{0e} + \text{AODC} - \text{AODE} \quad (2-48)$$

AODC 为卫星时钟的数据龄期, 是卫星时钟改正参数的外推时间间隔。AODE 为卫星星历的数据龄期, 是预报卫星的外推时间长度。

## 3. 观测时刻 $t_k$ 的平近点角 $M_k$ 的计算:

$$M_k = M_0 + n \cdot t_k \quad (2-49)$$

式中  $M_0$  是卫星电文给出的参考时刻  $t_{0e}$  的平近点角。

## 4. 计算偏近点角 $E_k$

$$E_k = M_k + e \cdot \sin E_k \quad (2-50)$$

此式可用迭代法进行解算, 即先令  $E_k = M_k$  代入上式, 求出  $E_k$  再代入上式计算, 由于偏心率  $e$  很小 ( $e = 0.01$ ), 因此收敛很快, 只需迭代两次便可以求出偏近点。

## 5. 计算升交角距 $u_0$ 及轨道摄动改正项

$$u_0 = \omega + 2 \arctg\left(\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\left(\frac{E_k}{2}\right)\right) \quad (2-51)$$

摄动改正项:

$$\begin{cases} \delta u = C_{us} \sin 2u_0 + C_{uc} \cos 2u_0 \\ \delta r = C_{rs} \sin 2u_0 + C_{rc} \cos 2u_0 \\ \delta i = C_{is} \sin 2u_0 + C_{ic} \cos 2u_0 \end{cases} \quad (2-52)$$

## 6. 计算经过摄动改正的升交角距 $u$ 、卫星到地心距离 $r$ 、轨道倾角 $i$

$$\begin{cases} u = u_0 + \delta u \\ r = a_k(1 - e \cos E) + \delta r \\ i = i_0 + \delta i + \dot{i} \cdot t_k \end{cases} \quad (2-53)$$

## 7. 计算卫星在轨道平面坐标系中的坐标

卫星在轨道平面坐标系中坐标为

$$\begin{cases} x_0 = r \cos u \\ y_0 = r \sin u \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (2-54)$$

## 8. 计算观测时刻升交点经度 $\lambda$

升交点经度  $\lambda$  为该时刻升交点赤经  $\Omega$  与格林威治恒星时  $GAST$  之差, 即

$$\lambda = \Omega - GAST$$

观测时刻的升交点赤经为参考历元  $t_{0e}$  的升交点赤经  $\Omega_{0e}$ , 加上观测时刻与参考历元之间的升交点的赤经变化, 即

$$\Omega = \Omega_{0e} + \dot{\Omega}(t - t_{0e}) \quad (2-55)$$

另外, 卫星电文中提供了一周开始时刻(星期六子夜)以秒计算的格林威治恒星时  $GAST(t_0)$ 。由于地球的自转作用,  $GAST$  也不断增加。增加量与地球自转速率  $W_e = 7.29211567 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$  有关。所以, 观测时刻  $GAST$  用下式计算:

$$GAST = GAST(t_0) + W_e(t - t_0) \quad (2-56)$$

考虑 (2-55) 式和 (2-56) 式, 则

$$\lambda = \Omega_{0e} + \dot{\Omega}(t - t_{0e}) - GAST(t_0) - W_e(t - t_0) \quad (2-57)$$

因为  $\Omega_0 = \Omega_{0e} - GAST(t_0)$ , 所以

$$\lambda = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_{0e}) - W_e(t - t_0)$$

考虑到  $t$  和  $t_{0e}$  都是从  $t_0$  开始起算, 即  $t_0 = 0$ , 则 (2-40) 式为

$$\lambda = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - W_e) \cdot t_k - W_e t_{0e} \quad (2-58)$$

## 9. 计算卫星在地心坐标系中空间直角坐标

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \cos i & \sin \lambda \sin i \\ \sin \lambda & \cos \lambda \cos i & -\cos \lambda \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (2-59)$$

### 10. 考虑极移影响, 可求在协议地球坐标系中的空间直角坐标

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{CTS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2-60)$$

### 2.4.2 卫星星历 RINEX 格式

将不同型号 GPS 接收机采集的数据进行统一处理, 必须建立通用数据交换格式, 现在采用的卫星星历 RINEX 格式就是这样一种通用数据交换格式, 见表 2-1。

表 2-1 RINEX 导航信息文件 (GPS 数据部分)

记录	含义 (符号)	单位	格式
1	卫星 PRN 编号 ( $PRN$ )	—	12
	历元: $y$ 年, $m$ 月, 日 $d$ , $h$ 时, min 分, $s$ 秒	—	TI3, F5.1
	钟差 ( $a_0$ )	s	D19.12
	钟漂 ( $a_1$ )	s/s	D19.12
	钟漂率 ( $a_2$ )	s/s <sup>2</sup>	D19.12
2	星历数据的年龄 ( $aode$ )	s	3X, D19.12
	轨道向径的正弦调和改正数的振幅 ( $C_{rs}$ )	m	D19.12
	平均运动角速度与其计算值之差 ( $\Delta n$ )	rad/s	D19.12
	参考时刻的平近点角	rad	D19.12
3	升交距角的余弦调和改正数的振幅 ( $C_{uc}$ )	rad	3X, D19.12
	轨道偏心率 ( $e$ )	—	D19.12
	升交距角的正弦调和改正数的振幅 ( $C_{us}$ )	rad	D19.12
	轨道长半轴的平方根 ( $\sqrt{a}$ )	$m^{1/2}$	D19.12
4	星历参考时刻 (GPS 星期中的秒数) ( $t_{oe}$ )	S	3X, D19.12
	轨道倾角的余弦调和改正数的振幅 ( $C_{ic}$ )	rad	D19.12
	参考时刻的升交点赤经* ( $\Omega_0$ )	rad	D19.12
	轨道倾角的正弦调和改正数的振幅 ( $C_{is}$ )	rad	D19.12
5	参考时刻的轨道倾角 ( $i_0$ )	rad	3X, D19.12
	轨道向径的余弦调和改正数的振幅 ( $C_{rs}$ )	m	D19.12
	近地点角距 ( $\omega$ )	rad	D19.12
	升交点赤经的变化率 ( $\dot{\Omega}$ )	rad/s	D19.12

续表 2-1 RINEX 导航信息文件 (GPS 数据部分)

6	轨道倾角变化率 ( $\dot{i}$ )	rad/s	3X, D19.12
	L2 通道上的码 (coL2)	—	D19.12
	GPS 星期数 (wn)	—	D19.12
	L2 上 P 码数据标记 (Pdf)	—	D19.12
7	卫星的精试 (accuracy)	m	3X, D19.12
	卫星健康标记 (health)	—	D19.12
	电离层群延迟 (tgd)	s	D19.12
8	电文发送时间 (ttom)	s	3X, D19.12
	3 项空白	—	3 D19.12

\* 准确地说, 为参考历元  $t_{oe}$  的升交点赤经与 GPS 星期开始时的格林尼治赤经之差。

### 第三章 GPS 网络 RTK 定位误差分析

由第二章式(2-10)知,经双差计算后,该式仍有轨道误差、电离层延迟、对流层延迟和多路径误差等四个偏差残留在函数模型中。由于高精度的 RTK 定位技术依据的 GPS 观测量是载波相位,因此,要扩大流动站与最近基准站之间的定位距离,并得到高精度的 RTK 定位结果,就必须设法减弱与距离相关的误差,以提高整周模糊度解算的准确性。在短距(小于 15km)厘米级 GPS 动态定位中,已有许多 OTF 模糊度解算方法,但所有方法都是基于双差观测值方程中的轨道误差和电离层延迟可以忽略的假设。可是,对于中距离(小于 100km)长距离(大于 100km)的 RTK 定位,轨道误差和电离层延迟是不能忽略的,因此,OTF 模糊度解算成为需要克服的更为困难的问题。对厘米级中长距离定位服务,在解算整周模糊度前,需要对上述四项偏差作进一步地消除和减弱。在这一章中,将分析中长距离动态定位的误差并研究 GPS 网络 TRK 定位误差削减的方法。

#### §3.1 轨道误差及其对单差观测值的影响

卫星轨道误差也称卫星星历误差,它定义为由卫星星历所给的卫星在空间的位置与卫星的实际位置之差,在一个观测时段内卫星星历误差主要是系统误差特性(刘基余等,1993)。目前,削弱轨道误差的方法主要有,(1)通过精密星历事后消除法,即使用由国际 GPS 地球动力学服务(IGS)提供的精密星历来减少轨道误差的影。IGS 现在可以提供时延 17 小时,精度小于 5cm 的快速精密星历;(2)通过预报精密星历实时削弱法,采用 IGS 实时提供的精度为 25cm 更新率为 12 小时的预报精密星历(叶世榕,2002)来实时削弱,但目前存在该星历与接收机实时通讯的问题;(3)通过数学模型实时削弱法,即采用广播星历,通过寻求某种数学模型,来削弱或消除卫星轨道误差。第三种方法是本文研究的重点内容,将在后续几章中讨论。

轨道误差对站间单差观测值的影响,韩绍伟博士在其博士论文中进行了详细的研究。其基本思想如下:

首先假设基准站  $i$  的坐标是精确已知的,这是能够做得到的,因为采用静态定位方法,应用精密星历和适当的大地测量软件进行后处理,可以精确地测定基准站的坐标。当用户接收机( $u$ )与基准站同步观测同一卫星时,则基准站  $i$  与用户接收机之间组成的单差观测值将受到轨道误差的影响。假设轨道误差在由 GPS 卫星到用户接收机的方向上是  $\vec{\xi}$ ,它的另一个分量  $\vec{\eta}$  在垂直于由卫星(S)到用户接收机( $u$ )方向的平面(O)上。为了便于误差分析和公式推导,可将  $\vec{\eta}$  进一步分解为  $\vec{\eta}_1$  和  $\vec{\eta}_2$ ,其中  $\vec{\eta}_1$  在两个相互垂直的平面  $Siu$  和平面 O 的交线方向上,  $\vec{\eta}_2$  在平面 O 上,且与  $\vec{\eta}_1$  方向垂直。见图 3-1 所示的几何关系。



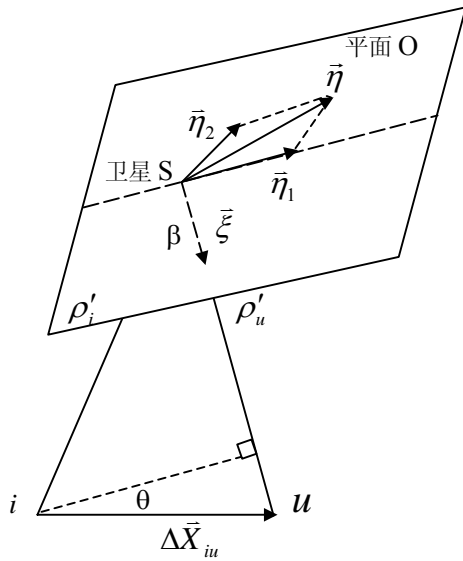


图 3-1 轨道误差

若轨道误差  $d\rho$  已知, 则带有轨道误差的计算

距离  $\rho$  可用无轨道误差的几何距离  $\rho'$  来表示, 由图 3-1 知, 用户接收机的轨道误差项可表示为:

$$d\rho_u = \rho'_u - \rho_u = |\vec{\xi}| \quad (3-1)$$

基准站  $i$  的轨道误差为:

$$d\rho_i = \rho'_i - \rho_i = |\vec{\xi}| \cdot \cos \beta - |\vec{\eta}_1| \cdot \sin \beta \quad (3-2)$$

考虑关系式

$$\rho'_i \cdot \sin \beta = |\Delta \vec{X}_{iu}| \cdot \cos \theta \quad (3-3)$$

由此, 得到下面关系式:

$$d\rho_i - d\rho_u = -|\vec{\xi}|(1 - \cos \beta)$$

$$- \frac{1}{\rho'_i} |\vec{\eta}_1| \cdot |\Delta \vec{X}_{iu}| \cdot \cos \theta \quad (3-4)$$

式中右边最后一项  $\rho'_i$ , 在作误差分析时, 一般用常数  $\rho = 20000\text{km}$  近似代替。在半径为  $100\text{km}$  的范围内, 因  $\beta = \arctan \frac{200\text{km}}{20000\text{km}} = 0.01(\text{rad}) = 0^\circ 34' 23''$  角度, 所以  $\beta$  一般小于  $1/100$  弧度, 因此, 式 (3-4) 右边第一项

$$|\vec{\xi}|(1 - \cos \beta) < 5.0 \times 10^{-5} \cdot |\vec{\xi}| = 1\text{mm} \quad (3-5)$$

计算时, 假设 (3-5) 式中由 GPS 卫星到用户接收机方向上的轨道误差  $|\vec{\xi}|$  是  $20\text{m}$ , 因此, 当两台接收机的距离小于  $200\text{km}$  时, 式 (3-4) 中的右边第一项偏差小于  $1.0\text{mm}$ 。故这一项可以忽略。第二项的最大值可达到  $0.2\text{m}$ 。因

$$\max\left(\frac{1}{\rho} |\vec{\eta}_1| \cdot |\Delta \vec{X}_{iu}| \cdot \cos \theta\right) = \frac{1}{20000\text{km}} \cdot 20\text{m} \cdot 200\text{km} = 0.2\text{m}$$

第二项中  $\theta$  是两向量  $\vec{\eta}_1$  和  $\Delta \vec{X}_{iu}$  之间的夹角, 因  $\vec{\eta}_2$  垂直于  $\Delta \vec{X}_{iu}$ 。所以

$$\frac{1}{\rho} |\vec{\eta}_1| \cdot |\Delta \vec{X}_{iu}| \cdot \cos \theta = \frac{1}{\rho} \vec{\eta}_1 \cdot \Delta \vec{X}_{iu} = \frac{1}{\rho} \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{X}_{iu} \quad (3-6)$$

最后得:

$$d\rho_i - d\rho_u = - \frac{1}{\rho} \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{X}_{iu} \quad (3-7)$$

因此, 轨道误差对单差距离影响可表示为基线矢量  $\Delta \vec{X}_{iu}$  和轨道误差矢量在平面  $O$  上的分量  $\vec{\eta}$  之间的矢量点积。这一个结论对讨论如何采用线性组合来消除卫星轨道误差很重要。

## §3.2 电离层延迟及流动站电离层延迟内插改正模型

### 3.2.1 电离层延迟

电离层是高度在 50~1000km 之间的大气层。由于太阳的强烈辐射, 电离层中的中性气体分子被电离产生大量的正离子和自由电子。当电磁波通过电离层时, 信号路径会发生弯曲, 信号的传播速度也会发生变化。若忽略折射率计算公式中的高次项, 载波相位、测距码在电离层中的速度(相速、群速)近似为(Langley, 1996):

$$n_{\phi} = 1 - \frac{\alpha N_e}{f^2} \quad (3-8)$$

适合伪距观测值的电离层群折射率近似为:

$$n_R = 1 + \frac{\alpha N_e}{f^2} \quad (3-9)$$

式中,  $\alpha$  是一常数,  $N_e$  是电子密度(每立方米中的电子数),  $f$  是无线电波的频率。若  $N_e$  的单位为立方米的倒数,  $f$  是 Hz, 则  $\alpha = 40.28$ 。

对  $n_{\phi}$  和  $n_R$  表达式为沿信号传播路径  $S$  的积分:

$$\int n_{\phi} dS = \int_S \left(1 - \frac{\alpha N_e}{f^2}\right) dS = \rho - d_{ion} \quad (3-10)$$

和

$$\int n_R dS = \int_S \left(1 + \frac{\alpha N_e}{f^2}\right) dS = \rho + d_{ion} \quad (3-11)$$

式中  $\rho$  是卫星至接收机的真几何距离,  $d_{ion}$  是由电离层延迟引起的距离误差(忽略路径弯曲), 表示为:

$$d_{ion} = \frac{\alpha}{f^2} \int_S N_e dS = \frac{\alpha TEC}{f^2} \quad (3-12)$$

式中  $TEC = \int_s N_e dS$  (总电子含量) 为沿信号传播路径对电子密度的积分, 电离层穿刺点至

接收机位置视线的 VEC (垂直电子含量) 可近似为:

$$VEC = TEC \cdot \cos(\sin^{-1}(0.94792 \cos E)) \quad (3-13)$$

式中假设电离层高度为 350km。

对双频接收机, 若它输出伪距  $R^{L1}$  和  $R^{L2}$ , 或以米为单位的载波相位伪距观测值  $\lambda_1 \cdot \phi_1$  和  $\lambda_2 \cdot \phi_2$ , 则 TEC 为:

$$TEC = \frac{1}{\alpha} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (R^{L1} - R^{L2}) \quad (3-14)$$

或

$$TEC = \frac{1}{\alpha} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} ((\lambda_1 \cdot \phi_1 - \lambda_1 \cdot N_1) - (\lambda_1 \cdot \phi_2 - \lambda_2 \cdot N_2)) \quad (3-15)$$

通过一台或几台接收机处的双频 GPS 观测值求得一组系数后, 可以得到绝对 TEC 模型, 如图 3-2 所示。这样的 TEC 模型不仅可以减少单频基线坐标误差 (Georgiadou 和 Kleusberg, 1988a, Wild 等, 1989), 也可用于提高长基线的模糊度解, 但要几个小时长的观测时段 (Meervert 等, 1994)。所以上述模型非常适合于求基准站的电离层延迟改正。

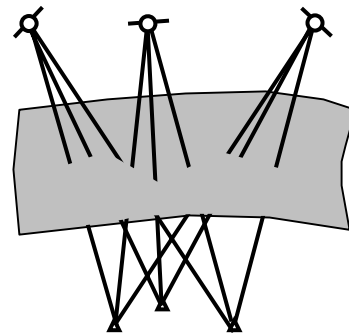


图 3-2 由所有卫星和几个小时观测时段得到的电离层模型

### 3.2.2 流动站单差和双差观测值的电离层内插模型

若测区范围内电离层延迟是呈线性变化的, 则位于三个基准站中的流动站的单差电离层延迟, 可以利用这三个基准站求得的单差电离层内插估计出来 (Han, 1997)。

根据 (3-15) 式, 相对基准站 A, 基准站的单差电离层计算公式为

$$\Delta TEC_{i,A}(k) = \frac{1}{\alpha} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} ((\lambda_1 \cdot \Delta \phi_{i,A}^{L1} - \lambda_1 \cdot \Delta N_{i,A}^{L1}) - (\lambda_2 \cdot \Delta \phi_{i,A}^{L2} - \lambda_2 \cdot \Delta N_{i,A}^{L2})) \quad (3-16)$$

式中  $i = B, C$ 。则用户接收机的单差电离层延迟可用下式内插得到[42]:

$$\Delta TEC_{u,A} = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta TEC_{B,A} \\ \Delta TEC_{C,A} \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

式中  $(x_B, y_B)$ 、 $(x_C, y_C)$  和  $(x_u, y_u)$  分别是基准站 B、C 和用户接收机相对基准站 A (坐标原点在 A 处) 在高斯平面直角坐标中的坐标。根据式 (3-12), 可得到 L1 或 L2 的单差电离层延迟:

$$d_{ion,u} - d_{ion,A} = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_{ion,B} - d_{ion,A} \\ d_{ion,C} - d_{ion,B} \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

从上式可看出,单差 TEC 内插系数与卫星无关,仅与用户接收机和基准站的位置有关。因此,对任意两个卫星,假设基准站 B 与 A 和基准站 C 与 A 的双差整周模糊度已知,则流动站的双差 TEC 可由内插后的单差 TEC 公式 (3-17) 求得:

$$\nabla \Delta TEC_{u,A} = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \nabla \Delta TEC_{B,A} \\ \nabla \Delta TEC_{C,A} \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

式中  $\nabla \Delta TEC_{B,A}$  和  $\nabla \Delta TEC_{C,A}$  可 (3-16) 式确定。

### §3.3 对流层延迟

对流层是高度 40km 以下的大气层,电磁波通过对流层时传播速度发生变化,路径也将发生弯曲,从而产生对流层延迟。对流层延迟的公式可表述为:

$$\Delta S = \int_S (n-1)ds = 10^{-6} \int_S Nds \quad (3-20)$$

式中  $n$  为对流层中大气的折射率,  $N$  为折射指数,  $S$  为传播路径。由 (3-20) 可知对流层延迟为传播路径上各点折射指数的积分。由于传播路径上各点折射指数无法测得,因而对流层延迟的计算依靠测站的气温,气压和湿度等气象要素进行模型改正。目前常用的对流层延迟改正模型有 Hopfield 模型 Saastamoinen 模型、Black 模型等。当使用相同的气象要素而采用不同的对流层模型计算时,差异大约为几毫米(高度角较大时)至几厘米(高度角较小时),大约为对流层延迟的 0.1%~0.5% (刘基余等, 1993)。这里我们选用 Hopfield 模型。

$$\begin{cases} d_{trop} = d_{trop,d} + d_{trop,w} = \frac{Kd}{\sin(E^2 + 6.25)^{1/2}} + \frac{Kw}{\sin(E^2 + 2.25)^{1/2}} \\ Kd = 77.6 \frac{Ps}{Ts} \cdot \frac{1}{5} (h_d - h_s) \cdot 10^{-6} = 155.2 \cdot 10^{-7} \frac{Ps}{Ts} (h_d - h_s) \\ Kw = 77.6 \cdot \frac{4810e_s}{Ts^2} \cdot \frac{1}{5} (h_w - h_s) \cdot 10^{-6} = 155.2 \cdot 10^{-7} \frac{4810}{Ts^2} e_s (h_w - h_s) \\ h_d = 40136 + 148.72(T - 273.16)(m) \\ h_w = 11000(m) \end{cases} \quad (3-21)$$

式中温度  $T$  为绝对温度,单位为开(K);气压  $P$  和水气压  $e$  以毫巴(mb)为单位;  $d_{trop}$ 、 $h_d$ 、 $h_w$ 、 $h_s$  均以米为单位;高度角  $E$  以度为单位。

GPS 静态定位时,测站的气象要素可以实测得到,然后采用对流层改正模型即可求得对

流层延迟。GPS 动态定位时, GPS 接收机处于运动之中, 其气象要素难以测定, 因而 GPS 动态定位时通常是一根据某一高程处或地面基准站的气象要素采用适当的模型推估动态接收机所处高程的气象要素, 然后再代入对流层延迟模型计算对流层迟改正。

下面给出根据某一已知高程  $h_0$  处的气象要素 ( $T_0, P_0, ew_0$ ), 直接计算出任一高程  $H$  处, 卫星高度为  $E$  时的对流层延迟公式。

$$K_{dH} = 155.2 \times 10^{-7} \times \frac{P_0}{T_0} \cdot \frac{1}{(h_d - h_0)^4} \times (h_d - H)^5 \quad (3-22)$$

$$K_{wH} = \begin{cases} 155.2 \times 10^{-7} \times 4810 \times \frac{ew_0}{T_0^2} \times \frac{1}{(h_w - h_0)^4} \times (h_w - H)^5 & H < 11000m \\ 0 & H \geq 11000m \end{cases} \quad (3-23)$$

$$h_d = 40136 + 148.72(T - 273.16)(m)$$

$$h_w = 11000(m)$$

则对流层延迟

$$d_{trop} = \frac{K_{dH}}{\sin(E^2 + 6.25)^{1/2}} + \frac{K_{wH}}{\sin(E^2 + 2.25)^{1/2}} \quad (3-24)$$

### §3.4 多路径效应

GPS 卫星信号经某些物体表面反射后到达接收机若和直接来自卫星的信号叠加产生干涉使测量值产生系统误差, 这就是多路径效应。多路径效应严重影响测量值的精度。无论是码观测值还是载波相位观测值都受到多路径效应的影响, 其中码观测值的多路径效应比载波相位大两个数量级。多路径效应对伪距观测的影响, 在良好的环境条件下约为 1.3m, 在反射很强的环境下约为 4~5m。在高反射环境下, 多路径效应甚至会引起卫星信号的失锁, 实践证明, 观测值中的许多周跳都是由于多路径效应引起的。

多路径效应对载波相位观测值的影响造成相位偏移, 给距离观测值带入了几个厘米的显著周期性误差。若直接和间接的信号混入天线中心, 它们可表示为 (Leick, 1995):

$$V_d = A \cos \varphi \quad (3-25)$$

$$V_i = \alpha A \cos(\varphi + \Delta\varphi) \quad (3-26)$$

测量的信号是:

$$V_m = V_d + V_i = A_m \cos(\varphi + \Delta\varphi_m) \quad (3-27)$$

式中  $A$  和  $\varphi$  表示直接信号的振幅和相位;  $\alpha$  是间接信号的阻尼因子, 它与反射面有关,

范围是  $0 \sim 1$ ,  $\Delta\varphi$  是相位移。 $A_m$  和  $\Delta\varphi_m$  可表示为:

$$A_m = A \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\Delta\varphi)} \quad (3-28)$$

$$\Delta\varphi_m = \tan^{-1} \left( \frac{\alpha \sin(\Delta\varphi)}{1 + \alpha \cos(\Delta\varphi)} \right) \quad (3-29)$$

若  $\alpha = 0$ , 表明没有多路径影响, 当  $\Delta\varphi_m = 90^\circ = 1/4$  周,

且  $\alpha = 1$ ,  $\Delta\varphi = 180^\circ$  时, 多路径对相位测量影响达到最大值。

不同的反射面和几何形状会引起不同的间接信号, 若仅来自地面的反射信号, 如图 3-6 所示, 可以求得相位移

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta R}{\lambda} \cdot 2\pi + \pi$$

$$\frac{4\pi H \sin E}{\lambda} \cdot +\pi \quad (3-30)$$

式中  $H$  是地面天线高,  $E$  是卫星高度角。反射将引起  $180^\circ$  的相位移。

Georgiadou 和 Kleusberg (1988b) 提出了通过查看  $L1$  和  $L2$  相位观测值的差值来确认多路径误差存在的方法。Axelrad 等 (1994) 则提出通过对卫星信号的信噪比 (SNR) 的分析能够鉴别和消除多路径误差。他们提出通过隔离具有强谱峰信噪比数据段 (节) 鉴别多路径反射器。根据这些峰值的频率, 然后可能产生一个引 (导) 入相位误差的模型。由于多路径的周期性特性, 若观测时段是一个小时或更长, 那么, 对静态定位多路径影响可以显著地减少。但对快速静态定位 (观测时段仅几分钟) 和动态定位, 多路径对定位结果会有几个厘米的影响。

因而  $L1$  信号 ( $\lambda=19.03\text{cm}$ ) 最大的多路径误差约为  $5\text{cm}$ , 对于  $L1$  与  $L2$  相位的线性组合, 该值可能会相应地增大或减小。由于卫星几何图形的变化, 载波相位观测值中多路径效应的影响大约为 30 分钟的典型周期。

近年来, 许多学者对多路径效应进行了研究。Axelrad 等 (1994) 利用信噪比  $SNR$  信息来改正相位差分观测值的多路径效应, 并在静态定位实验中将载波相位的多路径效应影响从 7.3 毫米减小到 5.6 毫米。Becker 等 (1994) 采用安置在一个平台上的 4 个 GPS 天线成功地探测了多路径效应及其反射点的位置。Hardwick 等 (1995) 指出在静态定位中, 多路径效应可表示为卫星高度角和方位角的 8 阶球谐函数。

在动态定位中, 由于载体在不断地运动之中, 多路径效应无法在定位处理软件中消除或削弱, 只能通过选择合适的 GPS 信号接收天线及其安设位置削弱多路径效应。

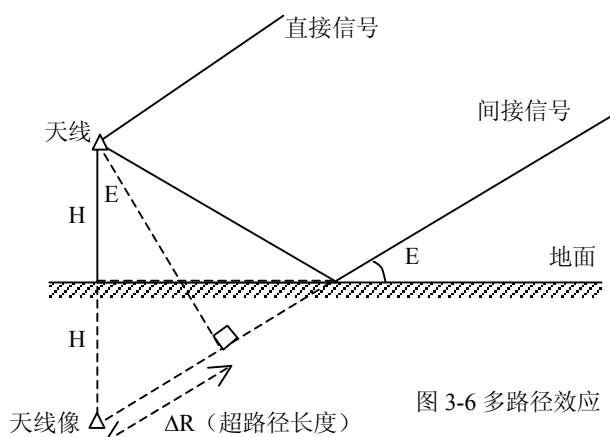


图 3-6 多路径效应

为了削弱多路径效应,一般采用性能良好的微带天线,并在天线底部安置抑径板,这种方法可使多路径效应减少约 27%。但抑径板一般较大、较重、拆卸不便,一般用于高精度静态定位或基准台站、美国宇航局的 Spitzmesser 研制的扼流圈天线,能使多路径效应减小 50% 左右,这是削弱多路径效应的一项重要研究成果。但这种天线体积大、沉重,价格昂贵,外业作业不便(谢世杰,1995)。

抑制多路径效应最为有效的办法是改进接收机的设计。1994 年,加拿大 NovArel 公司中研究出的 MET (Multipath Elimination Technology) 技术。在硬件电路设计中采取若干改进措施,将多路径效应减小 60% 左右。在 MET 技术上的基础上,该公司又开发出 MEDLL (Multipath Estimating Delay Lock Loop) 技术 (Townsend 等,1995),将几块 GPS 机芯构成一组合体,从而使多路径效应减少 90%。这无疑是近年来削弱多路径效应的一项重大突破, GPS 硬件技术的一项重大发展。

### §3.5 其它误差改正计算

其它误差改正计算主要包括接收机钟差、接收机位置误差、卫星钟差、相对论效应、信号传播时间计算和地球自转改正等。

#### 3.5.1 接收机钟差计算

接收机中一般使用精度较低的石英钟,因而钟误差比卫星钟差更为严重。该项误差主要取决于钟的质量,和使用环境也有一定关系。接收机钟误差可通过外接高精度频标的办法来消除,但由于费用高,对环境要求严格,一般仅用于少数的 GPS 地面跟踪站。由于用同一台接收机对多颗卫星进行同步观测时,接收机钟差对各相应观测值的影响是相同的,因而可在解算位置参数时一并估算,也可以通过在卫星间求差的方法来消除。

接收机钟差在 GPS 定位计算时可以作为单点定位的副产品,一般情况下该项不作为结果输出,但该误差即使在使用双差组合的情况下也是必须考虑的。主要原因是接收机钟差一般比较大,所以在求信号发射时刻卫星的位置时,要先进行接收机钟差的改正。主要有两种方法可获得接收机的钟差:一种是有的接收机在生成 RINEX 观测文件时,同时给出接收机的钟差,可直接读取;若没有,则可由伪距观测值计算得到。在接收机钟差的精度要求不是很高的情况下,忽略其它误差的影响,进行单点定位,由公式 (2-1) 可得测站坐标  $(x_u, y_u, z_u)$  和接收机钟差  $(t_r)$ ,或直接使用伪距观测值减去卫星到测站的几何距离,然后再取平均:

$$t_r = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - \rho_i)}{n \cdot C} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-31)$$

其中,  $P$  为伪距观测值,  $\rho$  为卫星到测站的几何距离,  $n$  为观测卫星数,  $C$  为光速。

由上述方法计算的接收机钟差精度不是很高,但一般情况下,该项对双差定位结果的影响可以忽略。若要得到较高精度的接收机钟差,可用迭代的方法或使用相位观测值。

### 3.5.2 接收机位置误差

在进行授时和定轨时,接收机的位置(接收机天线的相位中心)是已知值,它们的误差将使授时和定轨的结果产生系统误差。另外,在 GPS 相对定位中将基准站的坐标视为已知值,若基准站坐标有 1 米的偏差,则可能会引起  $10^{-7}$  的基线相对误差(崔希璋, 1994, 葛茂荣, 1995)。基准站高程 10 米的偏差将使尺度产生  $0.4ppm$  的变化,是平面位置旋转 1 秒(Beutte 等, 1989)。在 GPS 动态相对定位中,尤其是远距离、高精的 GPS 动态定位,应采用高精度地心坐标的基准站。基准站地心坐标未知时,可与附近具有高精度已知坐标的 NGS 站或 GPS 跟踪站进行静态联测计算得到。

### 3.5.3 卫星钟差计算

GPS 卫星钟差是指 GPS 卫星钟时标与 GPS 系统时间的差值。其系统部分(钟差、频偏、频飘)可以通过钟差多项式来改正。在 SA 实施后,卫星钟频附加了一高频随机抖动信号。频率抖动范围在几分钟内达  $\pm 2\text{Hz}$ (Rocken & Meertens, 1991)。当存在较大同步误差(接收机时间与 GPS 系统时间同步在 1 毫秒内),即使对于长达 3000km 基线,由 SA 钟频抖动引起的误差对单差观测值的影响也只与观测噪声相当(葛茂荣, 1995)。因而在测站间求差,能很好地消除 SA 频率抖动与卫星钟差的影响。

计算卫星钟时间偏差的目的,是为了使用户测得的有时间偏差的卫星钟时间校正为 GPS 系统时间。计算公式为:

$$t = t_s - \Delta t_s \quad (3-32)$$

$$\Delta t_s = a_0 + a_1(t - t_{oe}) + a_2(t - t_{oe})^2 \quad (3-33)$$

式中:

$t$  为 GPS 系统时间;

$t_s$  为电文发射时,卫星码相位(本子帧开始点)的时间;

$\Delta t_s$  是卫星钟时间相对于 GPS 时间偏差;

$t_{oe}$  是子帧 1 发布的子帧 1 数据基准时间,由星历提供;

$a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$  是子帧发布的卫星钟改正参数,由星历提供。

计算时,应该注意 GPS 系统时间间隔只有一个星期(604800 秒),所以,当  $t - t_{oe} > 302400$  (秒),则  $t$  应减去 604800; 当  $t - t_{oe} < -302400$  (秒),则  $t$  应加上 604800。

### 3.5.4 相对论效应计算

(1) 由于卫星钟被安置在高速运动的卫星中,按照狭义相对论的理论会产生时间膨胀的现象,使卫星钟相对于地面接收机钟产生了  $-0.835 \times 10^{-10} \cdot f$ ,  $f$  为同一台时钟在惯性坐标系中的频率。



(2) 按照广义相对论的观点, 卫星处的重力位与地面测站处的重力位不同, 那么同一台钟放置在卫星上和放在地面上时频率将出现差别。对 GPS 卫星而言, 广义相对论效应的影响可分为两项, 第一项为将卫星轨道当着圆形轨道时的相对论效应, 其影响可以通过制造卫星钟时, 预先把卫星钟的频率降低  $4.449 \times 10^{-10} \cdot f$  的办法来解决 (刘基余等, 1993); 第二项则是非圆轨道所引起的一个微小的附加偏差项, 需要用户计算改正。

其公式 (以距离为单位)  $\delta_{rel}$  为 (刘经南等, 1999):

$$\delta_{rel} = -\frac{2\sqrt{aGM}}{C} e \sin E \quad (3-34)$$

其中,  $a$  为轨道长半径,  $GM$  为地球引力常数,  $C$  为光速,  $e$  为卫星轨道偏心率,  $E$  为卫星的偏近点角。

或使用下面等价公式改正:

$$\delta_{rel} = \frac{2\mathbf{x}_s \cdot \dot{\mathbf{x}}_s}{C} \quad (3-35)$$

其中  $\mathbf{x}_s$ 、 $\dot{\mathbf{x}}_s$  为卫星的位置和速度向量。

### 3.5.5 信号传播时间计算

在 GPS 定位计算中, 该项计算是必不可少的, 主要用于计算卫星信号发射时刻的位置及地球自转改正。为此, 需要根据知道的信号接收时刻, 即观测数据的记录时间, 通过迭代方式计算出信号的发射时刻。忽略介质延迟, 信号的发射时刻  $t_s$ 、接收时刻  $t_r$  和传播时间  $\tau$  之间有下列关系:

$$t_s = t_r - \tau$$

$$\tau = \frac{R(t_s)}{C} \quad (3-36)$$

式中,  $C$  代表光速,  $R(t_s)$  代表  $t_s$  时刻接收机至卫星的几何距离, 卫星在  $t_s$  时刻的位置可按 2.3 节公式计算。因为 GPS 卫星的高度为 20000 公里左右, 因此, 首次迭代时可取  $\tau = 0.075$  秒, 然后用 (3-36) 式进行迭代, 直到两次求出的发射时刻相差小于  $10^{-7}$ s 时, 则最后一次所求出的卫星坐标即是所求发射时刻的卫星坐标。

### 3.5.6 地球自转改正

用地固系中的坐标计算卫星到接收机的几何距离时, 由于卫星位置和接收机位置是两个不同时刻位置矢量, 而且这两个时刻的地固系相对于惯性系是变化的, 因此要考虑地球自转的影响。设用户坐标为  $(x_u, y_u, z_u)$ , 卫星坐标为  $(x_s, y_s, z_s)$ ,  $\omega$  为地球自转角速度,  $C$  为光,

则由地球自转引起的距离改正  $\Delta R_\omega$  为:

$$\Delta R_\omega = \frac{\omega}{C} [(x_s - x_u)y_s - (y_s - y_u)x_s] \quad (3-37)$$

对卫星坐标的改正公式为:

$$\begin{bmatrix} x'_s \\ y'_s \\ z'_s \end{bmatrix} = R_z(\alpha) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

其中  $(x'_s, y'_s, z'_s)$  为改正后的卫星坐标,  $a = \omega\tau$  为地球在卫星信号传播时间内转过的角度。

## 第四章 网络 RTK 基本原理与内插法数学模型

### §4.1 网络 RTK 的基本原理

常规 RTK 是建立在流动站与基准站误差强相关这一假设条件的基础上的。当流动站离基准站不超过 10~15km 时, 此假设条件一般均能较好地成立, 此时利用一个或数个历元的观测资料即可获得厘米级精度的定位结果。然而随着流动站和基准站间间距的增加, 这种误差相关性将变得越来越差。公式 (2-10) 中的轨道误差项  $\Delta\nabla d\rho$ , 电离层延迟的残余误差项  $\Delta\nabla d_{ion}$ , 对流层传播延迟的残余误差项  $\Delta\nabla d_{trop}$  都将迅速增加, 从而导致难以正确确定整周模糊度, 无法获得固定解; 定位精度迅速下降, 当流动站和基准站间的距离大于 50km 时, 常规 RTK 的单历元解一般只能达到分米级的精度 (李征航等, 2002)。为了保证定位结果仍是厘米级的精度, 可采取两种措施, 一是缩短用户站与基准站之间的距离, 或者增加基准站网的密度; 二是采取一些特殊的方法和措施, 即所谓的网络 RTK 技术。

网络 RTK 是指在一个较大的区域内能稀疏地、较均匀地布设多个基准站 (一般为三个或三个以上), 构成一个基准站网, 并以这些基准站中的一个或多个为基准, 计算和发播改正信息, 对该地区内的卫星定位用户进行实时改正的定位方式。与常规 (即单基准站) RTK 相比, 该方法的主要优点为覆盖面广, 定位精度高, 可靠性高, 可实时提供厘米级定位, 如香港连续运行卫星定位系统和初步建成的深圳市连续运行卫星定位系统。

### § 4.2 内插法

对于基准站而言, 可将 (2-10) 式改写为下列形式:

$$\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi + \Delta\nabla N) - \Delta\nabla\rho = \Delta\nabla d\rho - \Delta\nabla d_{ion} + \Delta\nabla d_{trop} + \Delta\nabla d_{mp}^{\phi} + \varepsilon_{\Delta\nabla\phi} \quad (4-1)$$

式中,  $\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi + \Delta\nabla N)$  是由两个基准站上的载波相位观测值组成的双差观测值;  $\Delta\nabla\rho$  为已知的双差距离值, 可根据由卫星星历给出的卫星在空间的位置及已知的基准站坐标求得。

为方便起见, 令双差观测值  $\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi + \Delta\nabla N)$  与双差距离值  $\Delta\nabla\rho$  之差为  $\Delta\nabla R$ , 即

$$\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi + \Delta\nabla N) - \Delta\nabla\rho = \Delta\nabla R \quad (4-2)$$

或

$$\Delta\nabla R = \Delta\nabla d\rho - \Delta\nabla d_{ion} + \Delta\nabla d_{trop} + \Delta\nabla d_{mp}^{\phi} + \varepsilon_{\Delta\nabla\phi} \quad (4-3)$$

从(4-3)式可以看出,  $\Delta\nabla R$ 是由 $\Delta\nabla d_{mp}^\phi$ ,  $\varepsilon_{\Delta\nabla\phi}$ 以及求双差后仍未完全消除掉的残余的轨道误差 $\Delta\nabla d\rho$ 、残余的电离层延迟 $\Delta\nabla d_{ion}$ , 残余的对流层延迟 $\Delta\nabla d_{trop}$ 组成的。其中前两项 $\Delta\nabla d_{mp}^\phi$ 和 $\varepsilon_{\Delta\nabla\phi}$ 与两站间的距离无关, 此两项残差通过选择适当的站址, 采用具有抑径板或抑径圈的接收天线和高质量的接收机等措施, 可将其控制在很小的范围内。后三项 $\Delta\nabla d\rho$ 、 $\Delta\nabla d_{ion}$ 和 $\Delta\nabla d_{trop}$ 则与站间的距离有关。当距离较短时, 这三项误差的影响一般可忽略不计, 因而即使只用一个历元的观测值也可获得厘米级的定位精度。但随着距离的增加, 这三项误差的影响将越来越大, 从而使定位精度迅速下降。这就表明, 在中长距离实时动态定位中与距离有关的误差占主导地位。如果我们能设法消除或大幅度地削弱上述三项误差的影响, 则中长距离实时动态定位也可获得厘米级的定位精度。如果我们近似地认为 $\Delta\nabla R$ 是呈线性变化的, 那么我们就根据基准站上求得的 $\Delta\nabla R$ 进行线性内插, 求得流动站的 $\Delta\nabla R_u$ , 然后对流动站的双差载波相位观测值进行修正, 消除其影响。其具体做法如下:

1) 各基准站实时地将接收到的观测资料通过数据传输系统传送给数据处理中心。这些资料包括卫星导航电文、载波相位观测值、测码伪距观测值及气象资料等。

2) 流动站根据接收到的导航电文和测码伪距观测值进行单点定位, 实时求得自己的近似坐标 $(X'_u, Y'_u, Z'_u)$ , 并将它们传送至数据处理中心。

3) 数据处理中心根据流动站的近似坐标分四种情况计算 $\Delta\nabla R$ :

(1) 若流动站至某一基准站间的间距小于规定值(例如10km), 则可按常规RTK技术处理。

(2) 当流动站离最近的基准站间的间距大于规定值且流动站位于两个基准站之间时。可以利用这两个基准站对站间的带状区域的任何一处进行差分改正, 如图4-1。

对于基准站A和基准站B, 使用公式(4-2), 由于基准站坐标精确已知, 所以当双差整周模糊度 $\nabla\Delta N_{ij}^{pq}$ 确定以后, 便可得到基线AB的已知双差改正数 $\Delta\nabla R_{AB}^{ij}$ :

$$\Delta\nabla R_{AB}^{ij} = \lambda \cdot (\Delta\nabla\phi_{AB}^{ij} + \Delta\nabla N_{AB}^{ij}) - \Delta\nabla\rho_{AB}^{ij} \quad (4-4)$$

由于误差的线性相关性, 则可得直线AB上任何一点u的双差内插改正数 $\Delta\nabla R_{uA}^{ij}$ :

$$\Delta\nabla R_{uA}^{ij} = a \cdot \Delta\nabla R_{AB}^{ij} \quad (4-5)$$

其中a为一加权系数, 由于已知AB间的距离, 所以不难确定a的大小。假定基线ij的长度为 $r_{ij}$ , 测站k距基准站i的距离为 $r_{ik}$ , 则

$$\alpha = r_{ik} / r_{ij}$$

公式(4-5)为利用两个基准站估算由这两个基准站所确定的直线上各处的差分改正信息。

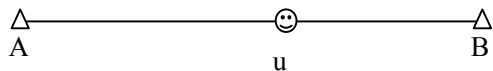


图 4-1 流动站位于两个基准站之间

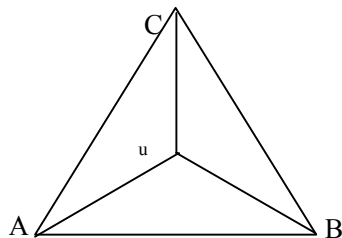


图 4-2 流动站位于三个基准站中

(3) 当流动站离最近的基准站间的间距大于规定值且用户流动站位于三个基准站组成的三角形中时。设流动站位于三角形 ABC 内, 流动站距离基准站 A 最近, 则取 A 点作为计算中的参考点, 见图 4-2。基准站 B 和 C 分别与 A 点组成双差观测值:

$$\begin{cases} \Delta\nabla\phi_{AB}^{ij} = \Delta\phi_B^{ij} - \Delta\phi_A^{ij} = \phi_B^j - \phi_B^i - \phi_A^j + \phi_A^i \\ \Delta\nabla\phi_{AC}^{ij} = \Delta\phi_C^{ij} - \Delta\phi_A^{ij} = \phi_C^j - \phi_C^i - \phi_A^j + \phi_A^i \end{cases} \quad (4-6)$$

式中  $i, j$  为卫星号。利用由卫星星历所给出的卫星在空间的位置及已知的基准站坐标, 求得双差距离值  $\Delta\nabla\rho$  并确定整周模糊度  $\Delta\nabla N$  的值后, 即可用(4-2)式求得  $\Delta\nabla R_{AB}^{ij}$  和  $\Delta\nabla R_{AC}^{ij}$ :

$$\Delta\nabla R_{AB}^{ij} = \lambda \cdot (\Delta\nabla\phi_{AB}^{ij} + \Delta\nabla N_{AB}^{ij}) - \Delta\nabla\rho_{AB}^{ij}$$

$$\Delta\nabla R_{AC}^{ij} = \lambda \cdot (\Delta\nabla\phi_{AC}^{ij} + \Delta\nabla N_{AC}^{ij}) - \Delta\nabla\rho_{AC}^{ij}$$

将基准站 A 作为参考点, 由于  $\Delta\nabla R_{AA}^{ij} = 0$ , 故在假设  $\Delta\nabla R$  是平面坐标差  $(X_i - X_A)$ ,  $(Y_i - Y_A)$  的线性函数而进行平面内插时, 有下列关系式<sup>[68]</sup>:

$$\Delta\nabla R_{Ak}^{ij} = \frac{\partial\Delta\nabla R}{\partial X}(X_k - X_A) + \frac{\partial\Delta\nabla R}{\partial Y}(Y_k - Y_A) = a_1(X_k - X_A) + a_2(Y_k - Y_A) \quad (4-7)$$

对于基准站 B 和 C 而言则有:

$$\begin{cases} \Delta\nabla R_{AB}^{ij} = a_1(X_B - X_A) + a_2(Y_B - Y_A) \\ \Delta\nabla R_{AC}^{ij} = a_1(X_C - X_A) + a_2(Y_C - Y_A) \end{cases} \quad (4-8a)$$

解得系数  $a_1$  和  $a_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta\nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix} \quad (4-8b)$$

即可代入下式求得流动站 u 处的双差内插改正数  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  值。

$$\begin{aligned} \Delta\nabla R_{Au}^{ij} &= a_1(X_u - X_A) + a_2(Y_u - Y_A) = (X_u - X_A \quad Y_u - Y_A) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= (X_u - X_A \quad Y_u - Y_A) \cdot \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta\nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-9)$$

类似地, 若假设  $\Delta\nabla R$  是平面坐标差  $(X_i - X_A)$ ,  $(Y_i - Y_A)$  的二次函数而进行曲面内插时, 有:

$$\begin{aligned} \Delta\nabla R_{Ak}^{ij} &= a_1(X_k - X_A) + a_2(Y_k - Y_A) + a_3(X_k - X_A)^2 \\ &\quad + a_4(Y_k - Y_A)^2 + a_5(X_k - X_A)(Y_k - Y_A) \end{aligned} \quad (4-10)$$

显然为了解算系数  $a_1, a_2, \dots, a_5$ , 至少需 6 个基准站 ( $a_0 = 0$  是由于选用基准站 A 为参考点而引起的)。求得上述各系数后, 将流动站近似的平面坐标  $(X_u, Y_u)$  代入后, 即可内插出该站的  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  值:

$$\Delta\nabla R_{Au}^{ij} = a_1(X_u - X_A) + a_2(Y_u - Y_A) + a_3(X_u - X_A)^2 + a_4(Y_u - Y_A)^2 + a_5(X_u - X_A)(Y_u - Y_A) \quad (4-11)$$

4) 数据处理中心将各内插值  $\Delta\nabla R_{Au}$  实时播发给动态用户后, 动态用户就能利用这些  $\Delta\nabla R_{Au}$  值对双差观测值进行改正。

由测量平差基础理论知, 观测值改正数方程  $V = AX - L$ , 比较 (2-19) 式和 (4-2) 式, 显然有双差观测值的改正数  $V_{\Delta\nabla\phi} = -\Delta\nabla R_{Au}$  这一关系式。若直接由基准站 A 和流动站 u 所组成的双差观测值为  $\Delta\nabla\phi'_{Au}$ , 那么改正后的双差观测值  $\Delta\nabla\phi_{Au}$  为:

$$\lambda \cdot \Delta\nabla\phi_{Au} = \lambda \cdot \Delta\nabla\phi'_{Au} + V_{\Delta\nabla\phi} = \lambda \cdot \Delta\nabla\phi'_{Au} - \Delta\nabla R_{Au}$$

相应的双差观测值方程为

$$\lambda \cdot \Delta\nabla\phi'_{Au} - \Delta\nabla R_{Au} = \Delta\nabla\rho'_{Au} - \lambda \cdot \Delta\nabla N'_{Au} \quad (4-12)$$

上式左边为已知值, 右边流动站的坐标隐含在  $\Delta\nabla\rho'_{Au}$  中,  $\Delta\nabla N'_{Au}$  为流动站载波相位的整周模糊度, 是未知的。由于轨道偏差  $\Delta\nabla d\rho$ , 电离层延迟的残余误差  $\Delta\nabla d_{ion}$  和对流层延迟的残余偏差  $\Delta\nabla d_{trop}$  等已得以消除或大幅削弱, 故用改正后的双差观测值  $\Delta\nabla\phi_{Au}$  来进行相对定位可获得精度好的瞬时位置。

本方法的要点是: 利用位于流动站周围的若干基准站的已知坐标及载波相位观测值, 求得 (与参考点 A 间的) 双差观测值的改正数  $V_{\Delta\nabla\phi} = -\Delta\nabla R$ , 然后再根据流动站的近似位置进行内插, 求得该处的双差观测值改正数  $V_{\Delta\nabla\phi_{Au}}$ , 并进而对双差观测值  $\Delta\nabla\phi'_{Au}$  进行改正, 以获得较精确的定位结果。如果将这种方法称作“距离改正数内插法”, 那么相应地还有一种“位置改正数内插法”。其要点为:

1) 根据基准站 A、B、C 的载波相位测量观测值解得基线向量  $\overrightarrow{AB'} = (\Delta X'_{AB}, \Delta Y'_{AB}, \Delta Z'_{AB})^T$  和基线向量  $\overrightarrow{AC'} = (\Delta X'_{AC}, \Delta Y'_{AC}, \Delta Z'_{AC})^T$ 。

2) 将求得基线向量  $\overrightarrow{AB'}$  和  $\overrightarrow{AC'}$  分别与已知基线向量  $\overrightarrow{AB_0}$  和  $\overrightarrow{AC_0}$  进行比较, 以求得改正数向量  $\vec{V}$ :

$$\vec{V}_{AB} = \begin{bmatrix} V_{\Delta X_{AB}} \\ V_{\Delta Y_{AB}} \\ V_{\Delta Z_{AB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AB}^0 \\ \Delta Y_{AB}^0 \\ \Delta Z_{AB}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X'_{AB} \\ \Delta Y'_{AB} \\ \Delta Z'_{AB} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

$$\vec{V}_{AC} = \begin{bmatrix} V_{\Delta X_{AC}} \\ V_{\Delta Y_{AC}} \\ V_{\Delta Z_{AC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{AC}^0 \\ \Delta Y_{AC}^0 \\ \Delta Z_{AC}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X'_{AC} \\ \Delta Y'_{AC} \\ \Delta Z'_{AC} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

3) 假设改正数向量中的各分量均为平面坐标差  $(X_i - X_A), (Y_i - Y_A)$  的线性函数, 就可仿照 (4-8) 式和 (4-9) 式进行平面内插, 求得流动站处的位置改正数  $\vec{V}_{Au} = (V_{\Delta X_{Au}}, V_{\Delta Y_{Au}}, V_{\Delta Z_{Au}})^T$ 。假设改正数向量中的各分量均为平面坐标差  $(X_i - X_A), (Y_i - Y_A)$  的二次函数, 则可按 (4-10) 式和 (4-11) 式进行曲面内插求得  $\vec{V}_{Au}$ 。并用它们来修正定位结果, 以获得较精确的结果:

$$\begin{bmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X'_{Au} \\ \Delta Y'_{Au} \\ \Delta Z'_{Au} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{\Delta X_{Au}} \\ V_{\Delta Y_{Au}} \\ V_{\Delta Z_{Au}} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

## § 4.3 内插法精度分析

### 4.3.1 经双差改正后流动站载波相位双差观测值的中误差

§ 4.1 节给出了所有情况下的网络 RTK 内插法改正信息计算的数学模型, 其推导过程是建立在区域误差相关的基础上的, 实际使用中可根据流动站与基准站的位置关系而确定选用公式 (4-5)、(4-9)。总的选用原则是能使用尽可能少的基准站就使用尽可能少的基准站, 即当用户站基本位于两个基准站之间的连线上时, 应当选用公式 (4-5), 而当用户站基本位于三个基准站所构成的平面上时, 应当选用公式 (4-9)。如果用户站都不符合上面两种情况, 即用户站距离三个基准站所构成的平面较远, 这时建议使用四个基准站 (不在一平面上) 进行差分计算。为什么不尽量选用多的基准站呢? 原因是在利用基准站综合误差进行差分改正消去的同时, 也将所用基准站的残余误差, 即相位的观测误差  $\sigma_0$  带入用户站, 由公式 (4-9) 和误差传播定律可得, 经过四个基准站差分改正后用户站的双差载波相位的观测中误差:

$$\sigma_u = \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sigma_0$$

当用户站基本位于三个基准站所构成的平面上时, 由公式 (4-9) 可得为:

$$\sigma_u = \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2} \cdot \sigma_0 \quad (4-16)$$

因此, 在可以很好地消去用户站综合误差的前提下, 所用的基准站个数越少越好。

### 4.3.2 流动站在基准站网中的位置对双差观测值中误差的影响

在 (4-16) 式中,  $\sigma_u$  还受模型系数  $a_i$  的影响, 而  $a_i$  的变化与流动站在基准站网中的位置有关。

为便于讨论, 假设用户接收机位于由三个基准站确定的平面上。例 1, 假设用户接收机位于等边三角形中心 (见图 4-3a); 例 2, 假设用户接收机位于等边三角形某一边的中点 (见

图 4-3b); 例 3, 假设用户接收机位于三角形外边(见图 4-3c)。并假设基准站 3 的坐标为(0,0), 则参数  $a_i$  可表示为:

$$\text{因 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ 和 } a_3 = 1 - a_1 - a_2$$

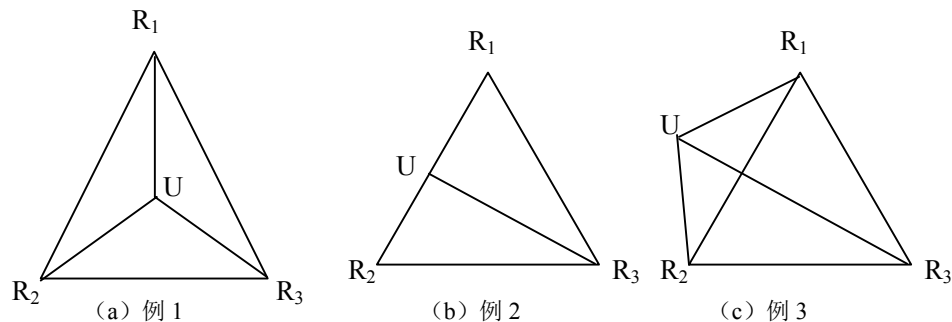


图 4-3 流动站在基准站网中的位置

双差观测值线性组合的标准差和系数参数  $a_i$  的结果列入表 4-1。

这些例子表明, 双差线性组合观测值的标准差随用户接收机在基准站网中位置的不同而变化, 位于基准站网外面, 标准差最大, 位于基准站网内, 标准差最小, 因此用户接收机应位于由基准站确定的三角形内, 即应尽量使用内插。所以在实际使用时, 利用基准站计算用户站差分信息时, 应尽量使用内插, 避免使用外推。

表 4-1 由图 4-3 例子计算的线性组合系数及中误差

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\sigma_u$
例 1	0.3333	0.3333	0.3333	$1.15 \sigma_0$
例 2	0.5000	0.5000	0.0	$1.22 \sigma_0$
例 3	1.0000	1.0000	-1.0000	$2.00 \sigma_0$

### 4.3.3 流动站初始位置对内插改正数的影响

由式 (4-9) 知, 流动站双差内插改正数  $\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$  的精度与流动站初始值精度有关, 现讨论如下:

为讨论方便, 将 (4-9) 式重写如下

$$\begin{aligned} \Delta \nabla R_{Au}^{ij} &= (X_u - X_A \quad Y_u - Y_A) \cdot \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta \nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix} \\ &= (\Delta x_{uA} \quad \Delta y_{uA}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ \Delta x_{AC} & \Delta y_{AC} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB} \\ \Delta \nabla R_{AC} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-17)$$



同时, 将坐标原点移至基准站 A, 则 (4-9) 式变为

$$\begin{aligned}\Delta\nabla R_{Au}^{ij} &= (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB} \\ \Delta\nabla R_{AC} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_B y_C - x_C y_B} (x_u \quad y_u) \begin{pmatrix} y_C & -y_B \\ -x_C & x_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB} \\ \Delta\nabla R_{AC} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta\nabla R_{AB} \cdot y_C - \Delta\nabla R_{AC} \cdot y_B}{x_B y_C - x_C y_B} x_u - \frac{\Delta\nabla R_{AC} \cdot x_B - \Delta\nabla R_{AB} \cdot x_C}{x_B y_C - x_C y_B} y_u\end{aligned}\quad (4-18)$$

因基准站坐标精确已知, 故在此假设基准站坐标没有误差,  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  只受流动站坐标初始值精度的影响。由误差传播定律可得

$$m_{R_{uA}} = \pm \sqrt{\left( \frac{\Delta\nabla R_{AB} \cdot y_C - \Delta\nabla R_{AC} \cdot y_B}{x_B y_C - x_C y_B} \right)^2 m_{x_u}^2 + \left( \frac{\Delta\nabla R_{AC} \cdot x_B - \Delta\nabla R_{AB} \cdot x_C}{x_B y_C - x_C y_B} \right)^2 m_{y_u}^2}\quad (4-19)$$

假设  $m_x = m_y$ , 则上式可化为

$$m_{R_{uA}} = \pm m_{x_u} \sqrt{\left( \frac{\Delta\nabla R_{AB} \cdot y_C - \Delta\nabla R_{AC} \cdot y_B}{x_B y_C - x_C y_B} \right)^2 + \left( \frac{\Delta\nabla R_{AC} \cdot x_B - \Delta\nabla R_{AB} \cdot x_C}{x_B y_C - x_C y_B} \right)^2}\quad (4-20)$$

下面以第八章中的控制网为例, 说明流动站初始位置对内插法改正数结果影响的情况。4 个控制点坐标及控制点之间的距离如表 4-2 所示。 $\Delta\nabla R_{AB}$  和  $\Delta\nabla R_{AC}$  的大小按不同情况直接给定, 而流动站定位误差按美国政府对不同用户的 GPS 政策给 GPS 定位结果带来的误差给定, 计算结果列入表 4-4。

模拟计算结果表明, 流动站初始位置对内插法改正数结果的影响, 随流动站单点定位精度而变化; 当基准站已知误差的精度为 0.5m, 流动站单点定位误差为 100m 时, 给  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  产生的误差约为  $\pm 1.3$  mm; 当基准站已知误差的精度为 1.0m, 流动站单点定位误差为 100m 时, 给  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  产生的误差约为  $\pm 2.6$  mm; 当基准站已知误差的精度为 10.0m, 流动站单点定位误差为 100m 时, 给  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  产生的误差约为  $\pm 26.5$  mm。

表 4-2 控制点坐标

点号	坐 标			距离 (m)	
	X (m)	Y (m)	Z (m)	uA	28760.863
u	-2153062.8161	5100870.3800	3155802.0756	uB	26252.851
A	-2139121.1956	5118128.9024	3137500.1178	uC	23037.399
B	-21 74216.5454	5101547.8878	3140269.1117	AB	38913.764
C	-21 57474.6007	5087566.3272	3174084.8493	AC	51081.915
				BC	40240.294

表 4-3

	$\Delta x$ (m)	$\Delta y$ (m)	$\Delta \nabla R_{AB}$ (m)	$\Delta \nabla R_{AC}$ (m)
AB	3844.67563	-38739.29128	0.5	0.5
AC	-42675.55106	-28109.85986	1.0	1.0
			10.0	10.0

表 4-4 流动站初始位置对内插法改正数影响  $\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$  的结果

$m_x = m_y$	$\pm 30$ (m)	$\pm 50$ (m)	$\pm 100$ (m)	$\pm 200$ (m)
$m_{R_{uA}}(0.5)$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0013$	$\pm 0.0026$
$m_{R_{uA}}(1.0)$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0013$	$\pm 0.0026$	$\pm 0.0052$
$m_{R_{uA}}(10.0)$	$\pm 0.008$	$\pm 0.0130$	$\pm 0.0261$	$\pm 0.0521$

在绪论中提到,当美国政府实施 S-A 政策时,我国用户进行 GPS 单点定位达到的精度一般为 $\pm 100\text{m}$ ,美国政府取消 S-A 政策后,用户进行 GPS 单点定位的精度要好于 $\pm 100\text{m}$ ,另外基准站已知误差的精度也好于 $\pm 0.5\text{m}$ 。所以在一般情况下, GPS 网络数据处理中心根据流动站发送来的单点定位结果计算内插改正数,其精度能够满足网络 RTK 定位要求,数据处理中心不需要对流动站的初始位置再进行精化,即迭代计算。

## 第五章 网络 RTK 线性组合法

### § 5.1 流动站与基准站载波相位观测值单差线性组合的数学模型

由第三章知, 轨道误差  $d\rho$  对单差距离的影响可表示为基线矢量  $\Delta\vec{X}_{iu}$  和轨道误差矢量在平面 O 上的分量  $\vec{\eta}$  之间的矢量点积。

设在时刻  $t_i$ , 基准站  $i$  和流动站  $u$  都对卫星  $j$  进行了同步观测, 由此可组成站间单差观测值  $\Delta\phi_{iu} = \phi_i - \phi_u$ , 那么由卫星星历所计算出来的距离单差  $\Delta\rho_{iu} = \rho_i^j - \rho_u^j$  将受到卫星星历误差的影响。由 (3-7) 式知, 其影响  $\Delta d\rho_{iu}$  为

$$\Delta d\rho_{iu} = d\rho_i - d\rho_u = (\rho_i'^j - \rho_i^j) - (\rho_u'^j - \rho_u^j) = -\frac{1}{\rho} \vec{\eta} \cdot \Delta\vec{X}_{iu} \quad (5-1)$$

同样设流动站  $u$  位于由基准站 A, B, C 所组成的三角形内, 且距基准站 A 最近。将流动站  $u$  上的载波相位观测值  $\phi_u$  分别与同一历元基准站 A, B, C 上的载波相位观测值  $\phi_A, \phi_B, \phi_C$  组成站间单差观测值:

$$\Delta\phi_{uA} = \Delta\rho_{uA} + \Delta d\rho_{uA} - c \cdot \Delta T_{uA} - \lambda \Delta N_{uA} - \Delta d_{ion,uA} + \Delta d_{trop,uA} + \Delta d_{mp,uA}^\phi + \varepsilon_{\Delta\phi_{uA}}$$

$$\Delta\phi_{uB} = \Delta\rho_{uB} + \Delta d\rho_{uB} - c \cdot \Delta T_{uB} - \lambda \Delta N_{uB} - \Delta d_{ion,uB} + \Delta d_{trop,uB} + \Delta d_{mp,uB}^\phi + \varepsilon_{\Delta\phi_{uB}}$$

$$\Delta\phi_{uC} = \Delta\rho_{uC} + \Delta d\rho_{uC} - c \cdot \Delta T_{uC} - \lambda \Delta N_{uC} - \Delta d_{ion,uC} + \Delta d_{trop,uC} + \Delta d_{mp,uC}^\phi + \varepsilon_{\Delta\phi_{uC}} \quad (5-2)$$

然后再将上述三个单差观测值, 按下列方法进行线性组合, 构成一个新的虚拟观测值  $\Sigma$ :

$$\Sigma = a_A \Delta\phi_{uA} + a_B \Delta\phi_{uB} + a_C \Delta\phi_{uC} \quad (5-3)$$

若系数  $a_A, a_B, a_C$  满足下列条件:

$$a_A \Delta\vec{X}_{uA} + a_B \Delta\vec{X}_{uB} + a_C \Delta\vec{X}_{uC} = 0 \quad (5-4)$$

那么新的线性组合观测值  $\Sigma$  不受卫星星历的影响。因在 (5-3) 式中含有  $\Delta d\rho_\Sigma$  项,

即:

$$\begin{aligned}\Delta d\rho_{\Sigma} &= a_A \Delta d\rho_{uA} + a_B \Delta d\rho_{uB} + a_C \Delta d\rho_{uC} \\ &= -(\bar{\eta} / \rho) \cdot (a_A \Delta \bar{X}_{uA} + a_B \Delta \bar{X}_{uB} + a_C \Delta \bar{X}_{uC}) = 0\end{aligned}\quad (5-5)$$

但单从 (5-4) 式中是无法给出惟一解的, 因为如果某组  $(a_A, a_B, a_C)$  适合 (5-4), 那么该组系数乘上任一常数  $C$  后,  $(Ca_A, Ca_B, Ca_C)$  也必能满足 (5-4) 式。为此我们再给定一个约束条件:

$$a_A + a_B + a_C = 1 \quad (5-6)$$

这样便能求出一组确定的解。

上面的讨论是基于流动站位于基准站确定的平面上, 但在地面上, 流动站一般不会位于基准站网组成的平面上, 因此, 有必要研究高程对单差线性组合观测值有多大的影响。

基线矢量  $\Delta \bar{X}_{iu}$  ( $i = A, B, C$ ) 可以被分成两个分量: 在高斯平面直角坐标中的分量  $\Delta \bar{X}_{iu}^P$ , 和垂直于高斯平面的分量  $\Delta \bar{X}_{iu}^H$ 。则式 (5-4) 放宽为:

$$\sum_i \alpha_i \Delta \bar{X}_{iu}^P = 0 \quad (5-7)$$

以相同的方法, 可将轨道误差分量  $\bar{\eta}$  分成两个分量 ( $\eta^P, \eta^H$ )。则等式 (5-5) 变为

$$\Delta d\rho_{\Sigma} = \sum_i \alpha_i \cdot (d\rho_i - d\rho_u) = \sum_i \alpha_i \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \cdot \bar{\eta} \cdot \Delta \bar{X}_{iu}\right) = -\frac{1}{\rho} \cdot \eta^H \cdot \Delta X_{iu}^H \quad (5-8)$$

而  $\frac{1}{\rho} \cdot \eta^H \cdot \Delta X_{iu}^H$  的最大量是:

$$\max\left(\frac{1}{\rho} \cdot \eta^H \cdot \Delta X_{iu}^H\right) = \frac{1}{20000km} \cdot 20m \cdot 1785m = 1.8mm$$

式中, 假设轨道误差是 20m, 接收机在椭球面上的高度是 1000m, 在半径为 100km 范围内由地球曲率引起的高差是 785m。因此, 在大多数情况下, 用户接收机总是可以假设为位于由基准站所形成的平面上, 并且高程分量可以忽略。于是, 我们就可以在平面上来讨论问题。

最后, 为了使计算更为方便, 我们将坐标原点平移至基准站 A。如果 A, B, C,  $u$  在老坐标系中的位置矢量分别为:  $\bar{X}'_A, \bar{X}'_B, \bar{X}'_C, \bar{X}'_u$ 。那么在新坐标系中各点的位置矢量便分别为:

$$\bar{X}_A = 0, \bar{X}_B = \bar{X}'_B - \bar{X}'_A, \bar{X}_C = \bar{X}'_C - \bar{X}'_A, \bar{X}_u = \bar{X}'_u - \bar{X}'_A。$$

在新坐标系中 (5-4) 式将变成下列形式:

$$-a_A \bar{X}_u + a_B (\bar{X}_B - \bar{X}_u) + a_C (\bar{X}_C - \bar{X}_u) = 0$$

顾及 (5-6) 式后, 上式可写为:

$$\vec{X}_u = a_B \vec{X}_B + a_C \vec{X}_C \quad (5-9)$$

设

$$\vec{X}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}; \quad \vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}; \quad \vec{X}_C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}; \quad (5-10)$$

$(x_u, y_u)^T, (x_B, y_B)^T, (x_C, y_C)^T$  分别为 u, B, C 站的高斯平面坐标。则 (5-9) 式可为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

于是有:

$$\begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \quad (5-12)$$

线性组合观测值  $\Sigma$  的观测方程为:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Sigma &= (a_A \Delta \phi_{uA} + a_B \Delta \phi_{uB} + a_C \Delta \phi_{uC}) = (a_A \Delta \rho_{uA} + a_B \Delta \rho_{uB} + a_C \Delta \rho_{uC}) \\ &+ (a_A \Delta d \rho_{uA} + a_B \Delta d \rho_{uB} + a_C \Delta d \rho_{uC}) - (a_A \Delta d_{ion uA} + a_B \Delta d_{ion uB} + a_C \Delta d_{ion uC}) \\ &+ (a_A \Delta d_{trop uA} + a_B \Delta d_{trop uB} + a_C \Delta d_{trop uC}) - \lambda \cdot (a_A \Delta N_{uA} + a_B \Delta N_{uB} + a_C \Delta N_{uC}) \\ &- c(a_A \Delta T_{uA} + a_B \Delta T_{uB} + a_C \Delta T_{uC}) + (a_A \Delta d_{mp uA}^\phi + a_B \Delta d_{mp uB}^\phi + a_C \Delta d_{mp uC}^\phi) \\ &+ (a_A \varepsilon_{\Delta \phi_{uA}} + a_B \varepsilon_{\Delta \phi_{uB}} + a_C \varepsilon_{\Delta \phi_{uC}}) \end{aligned} \quad (5-13)$$

式中  $\Delta T$  为接收机钟差。若将 (5-12) 式中所求得的一组系数  $a_B, a_C, (a_A = 1 - a_B - a_C)$  代入 (5-12) 式来组成虚拟观测值  $\Sigma$ , 那么 (5-13) 式中轨道偏差影响项  $a_A \Delta d \rho_{uA} + a_B \Delta d \rho_{uB} + a_C \Delta d \rho_{uC} = 0$ , 即  $\Sigma$  将不受星历误差的影响。根据文献[42]知, 电离层延迟项也等于零, 对流层延迟项可以大幅度地削弱。证明如下:

(1) 电离层延迟的消除。

将 (5-13) 式中单差电离层延迟项另写为

$$a_A \Delta d_{ionuA} + a_B \Delta d_{ionuB} + a_C \Delta d_{ionuC} = d_{ionu} - d_{ionA} - \begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d_{ionB} - d_{ionA} \\ d_{ionC} - d_{ionA} \end{pmatrix}$$

由第三章知, 流动站单差电离层延迟残差部分可以通过基准站电离层残差来内插, 即

$$d_{ionu} - d_{ionA} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_{ionB} - d_{ionA} \\ d_{ionC} - d_{ionA} \end{pmatrix}$$

又 (5-12) 式的转秩为

$$\begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_u & y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} a_A \Delta d_{ionuA} + a_B \Delta d_{ionuB} + a_C \Delta d_{ionuC} &= d_{ionu} - d_{ionA} - \begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d_{ionB} - d_{ionA} \\ d_{ionC} - d_{ionA} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d_{ionB} - d_{ionA} \\ d_{ionC} - d_{ionA} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_B \\ a_C \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d_{ionB} - d_{ionA} \\ d_{ionC} - d_{ionA} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(2) 对流层延迟残差部分的削减。

利用 Hopfield 模型可以对对流层延迟进行改正, 这里讨论的是由对流层延迟引起的残差部分的削弱。与电离层延迟消除过程相似, 对流层延迟残差部分可写成

$$a_A \Delta d_{tropuA} + a_B \Delta d_{tropuB} + a_C \Delta d_{tropuC} = d_{tropu} - d_{tropA} - \begin{bmatrix} a_B \\ a_C \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} d_{tropB} - d_{tropA} \\ d_{tropC} - d_{tropA} \end{bmatrix}$$

如果假设对流层延迟残差部分可以通过基准站电离层残差来内插, 即

$$d_{tropu} - d_{tropA} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_{tropB} - d_{tropA} \\ d_{tropC} - d_{tropA} \end{pmatrix}, \text{ 则在虚拟观测值 } \Sigma \text{ 中, 对流层延}$$

迟残差的影响接近为零。但对流层延迟残差主要是对流层湿分量影响造成的, 而对流层湿分量随高度、时间和地方的不同而显著地变化。所以, 在虚拟观测值  $\Sigma$  中, 对流层延迟残差的影响只能是得到了削弱, 不可能为零。

多路径误差主要依靠适当地选择测站及采用具有抑径板或抑径圈的接收天线等措施来解决, 此外上述线性组合法也有助于进一步消除其影响<sup>[42]</sup>。去掉上述四项后观测方程可简化为下列形式:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Sigma &= (a_A \Delta \phi_{uA} + a_B \Delta \phi_{uB} + a_C \Delta \phi_{uC}) = (a_A \Delta \rho_{uA} + a_B \Delta \rho_{uB} + a_C \Delta \rho_{uC}) \\ &\quad - \lambda \cdot (a_A \Delta N_{uA} + a_B \Delta N_{uB} + a_C \Delta N_{uC}) - (a_A \Delta T_{uA} + a_B \Delta T_{uB} + a_C \Delta T_{uC}) + \varepsilon_{\Delta \phi} \text{ 项} \end{aligned}$$

(5-14)

顾及下列关系式后:

$$\begin{aligned} a_A \Delta \phi_{uA} + a_B \Delta \phi_{uB} + a_C \Delta \phi_{uC} &= a_A (\phi_A - \phi_u) + a_B (\phi_B - \phi_u) + a_C (\phi_C - \phi_u) \\ &= \Delta \phi_{uA} - (a_B \Delta \phi_{AB} + a_C \Delta \phi_{AC}) \end{aligned} \quad (5-15)$$

(5-15) 式可写为:

$$\begin{aligned} \lambda (\Delta \phi_{uA} - a_B \Delta \phi_{AB} - a_C \Delta \phi_{AC}) &= \Delta \rho_{uA} - a_B \Delta \rho_{AB} - a_C \Delta \rho_{AC} - \\ &- \lambda \cdot (\Delta N_{uA} - a_B \Delta N_{AB} - a_C \Delta N_{AC}) - (a_A \Delta T_{uA} - a_B \Delta T_{uB} - a_C \Delta T_{uC}) + \varepsilon_{\Delta \nabla \phi} \text{项} \end{aligned} \quad (5-16)$$

在卫星间继续求差后得双差观测方程如下:

$$\begin{aligned} &\lambda (\Delta \nabla \phi_{uA} - a_B \Delta \nabla \phi_{AB} - a_C \Delta \nabla \phi_{AC}) \\ &= \Delta \nabla \rho_{uA} - a_B \Delta \nabla \rho_{AB} - a_C \Delta \nabla \rho_{AC} - \\ &- (\Delta \nabla N_{uA} - a_B \Delta \nabla N_{AB} - a_C \Delta \nabla N_{AC}) \lambda + \varepsilon_{\Delta \nabla \phi} \text{项} \end{aligned} \quad (5-17)$$

定义残差项:

$$\begin{cases} V_{AB} = \lambda \cdot \Delta \nabla \phi_{AB} + \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB} - \Delta \nabla \rho_{AB} \\ V_{AC} = \lambda \cdot \Delta \nabla \phi_{AC} + \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AC} - \Delta \nabla \rho_{AC} \end{cases} \quad (5-18)$$

可得双差观测方程:

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \phi'_{uA} - (a_B V_{AB} + a_C V_{AC}) = \Delta \nabla \rho'_{uA} - \lambda \cdot \Delta \nabla N'_{uA} + \varepsilon_{\Delta \nabla \phi} \text{项} \quad (5-19)$$

(5-19) 式中的  $V_{AB}, V_{AC}$  值可根据基准站上的数据求得, 故  $(a_B V_{AB} + a_C V_{AC})$  为已知值。流动站的坐标隐含在  $\Delta \nabla \rho_{uA}$  中, 由于轨道偏差, 电离层延迟误差和对流层延迟误差已在线性组合的过程中消除或大幅度地削弱, 故从 (5-19) 式中可解得较为精确的流动点坐标。

采用线性组合法时具体做法如下:

- 1) 各基准站将当前历元  $t_i$  时的观测资料通过数据通信链实时传送给数据处理中心。
- 2) 流动站先利用  $t_i$  时的伪时距观测值和卫星星历进行单点定位, 求得自己的概略坐标并将其转换成高斯平面坐标  $(x'_u, y'_u)$ , 然后再将该时刻的载波相位观测值和  $(x'_u, y'_u)$  值实时传送到数据处理中心。
- 3) 数据处理中心首先根据流动站的近似坐标判断该站位于哪个三角形内, 然后根据 (5-12) 式计算线性组合系数  $a_B$  和  $a_C$ 。
- 4) 数据处理中心利用基准站 A, B, C 的资料解算基线向量  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{AC}$ , 然后根据 (5-18) 式求出残差  $V_{AB}, V_{AC}$ , 再按 (5-19) 式计算常数项  $(a_B V_{AB} + a_C V_{AC})$ 。

5) 数据处理中心利用流动站 u 和基准站 A 上的载波相位观测值及求得的常数项  $(a_B V_{AB} + a_C V_{AC})$  组成双差观测方程 (5-19) 式进行解算, 并通过数据通信链将解算出来的

流动站坐标播发给动态用户。当然解算双差观测方程的工作也可以由动态用户来完成, 此时需将 (5-18) 式播发给用户。

## § 5.2 线性组合法与内插法的关系

内插法和线性组合法在算法上并无本质上的差别, 现讨论如下。

根据 (4-2) 式, 线性组合法的差分改正 (5-18) 式可写成

$$\begin{cases} V_{AB} = \lambda \cdot \Delta \nabla \phi_{AB} + \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB} - \Delta \nabla \rho_{AB} = \Delta \nabla R_{AB} \\ V_{AC} = \lambda \cdot \Delta \nabla \phi_{AC} + \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AC} - \Delta \nabla \rho_{AC} = \Delta \nabla R_{AC} \end{cases}$$

代入 (5-19) 式, 得线性组合法的双差观测方程为

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \phi_{uA} - (\alpha_B \Delta \nabla R_{AB} + \alpha_C \Delta \nabla R_{AC}) = \Delta \nabla \rho_{uA} - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{uA} + \varepsilon_{\Delta \nabla \phi} \text{ 项}$$

式中左边第二项可写成下式

$$\alpha_B \Delta \nabla R_{AB} + \alpha_C \Delta \nabla R_{AC} = (\alpha_B \quad \alpha_C) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB} \\ \Delta \nabla R_{AC} \end{pmatrix}$$

$$\text{因 } \begin{pmatrix} \alpha_B & \alpha_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \end{pmatrix}^T = \left( \begin{pmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \right)^T$$

所以有

$$\alpha_B \Delta \nabla R_{AB} + \alpha_C \Delta \nabla R_{AC} = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB} \\ \Delta \nabla R_{AC} \end{pmatrix} \quad (5-20)$$

令  $x_A = y_A = 0$ , 则内插法 (4-9) 式变为

$$\begin{aligned} \Delta \nabla R_{Au} &= a_1 x_u + a_2 y_u = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (x_u \quad y_u) \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB} \\ \Delta \nabla R_{AC} \end{pmatrix} \\ &= a_B \Delta \nabla R_{AB} + a_C \Delta \nabla R_{AC} \end{aligned}$$

上式左边与 (5-20) 式右边一样, 可见线性组合法可以转换为平面内线性函数的内插法。反之, 在平面上线性函数的内插法也可以转换为线性组合法。

从上面的讨论可知, 网络 RTK 内插法消除流动站误差的方法是假定网络 RTK 的各种系统误差在一定区域内具有较强的相关性, 在此基础上, 利用基准站坐标精确已知这一条件, 计算出该区域内各个基准站的综合误差, 并通过这些计算出的已知误差来内插改正任何一处流动站的 GPS 测量误差。由于该方法不需要一一区分每一种 GPS 测量误差, 从而简化了网



络 RTK 的数学模型。但内插法的弱点是在其模型中不能直观地看到流动站各种误差的消除过程。然而通过对线性组合法与内插法之间关系的讨论可知,内插法在其数学模型中不仅能够直接消除卫星星历误差、电离层延迟误差对动态用户的影响,而且还能大幅度地削弱对流层延迟误差和多路径误差等系统误差的影响。正是因为如此,所以采用内插法进行网络 RTK 定位能够达到增加流动站与基准站之间的距离以及提高 RTK 定位精度的目的。

本文虽然证明了线性组合法可以看成是内插法的一个特例,但它消除流动站误差的方法与内插法不同,线性组合法是通过一定的数学组合方式,将基准站和流动站的观测值进行线性组合,利用基准站坐标精确已知这一条件,在数学模型中直接消除或削弱各种 GPS 测量系统误差对流动站的影响,因此,线性组合法消除或削弱流动站误差的过程有较强的理论性。故采用线性组合法进行网络 RTK,其定位结果具有精度高的特点。

由于在内插法和线性组合法数学模型中,能够很好地消除卫星轨道误差项和电离层延迟项对流动站的影响,所以,在网络 RTK 定位中,采用精密星历进行事后定位与采用广播星历进行实时动态定位,在理论上,两者的定位结果精度应相同。

## 第六章 虚拟基准站法及其数学模型

### § 6.1 虚拟基准站法

虚拟基准站法是网络 RTK 中一种很有发展前途的较好的方法。从前面的讨论可知,当流动站离基准站较远时,由于两站间的误差相关性减小,残余的卫星星历误差,电离层延迟,对流层延迟等偏差对相对定位的影响增加,从而使常规 RTK 的定位精度降低。为解决这一问题,就必须增设一些基准站,以使用户能利用这些基准站所提供的信息采用一定的算法来消除或大幅度削弱这些偏差项所造成的影响。虚拟基准站法就是设法在流动站附近建立一个虚拟的基准站,并根据周围各基准站上的实际观测值算出该虚拟基准站上的虚拟观测值。由于虚拟站离流动站很近,一般仅相距数米至数十米。故动态用户只需采用常规 RTK 技术就能与虚拟基准站进行实时相对定位,获得较准确的定位结果。如果网络 RTK 的数据处理中心能按常规 RTK 中所用的数据格式来播发虚拟基准站的观测值及站坐标,那么网络 RTK 中的动态用户就可用原有的常规 RTK 软件来进行数据处理。这是虚拟基准站法的另一优点。

在虚拟基准站法中,动态用户也需要根据伪距观测值和广播星历进行单点定位,求得流动站的粗略位置并实时将它们传送给数据处理中心。数据处理中心通常就将虚拟基准站 P 设在该点上。此时虚拟站 P 离真正的流动站 u 位置可能相距 20~40m 左右。有的软件还要利用基准站上的伪距观测值对单点定位结果进行一次差分改正,并将虚拟基准站 P 设在差分改正后的位置上。此时虚拟站 P 离真正的流动站 u 的距离一般仅为数米或更近。显然数据处理中心必须在每个观测历元为每个动态用户各建立一个虚拟基准站。

### § 6.2 虚拟基准站观测值的计算模型

虚拟基准站法的关键在于如何构建出虚拟的观测值。一旦构建出虚拟的观测值,在数据处理时就可把它当作一般基准站来看待。从前面的讨论可知,基准站间的双差观测值  $\lambda[\Delta\nabla\phi + \Delta\nabla N]$  与距离双差  $\Delta\nabla\rho$  之间的差值(即内插法中的  $\Delta\nabla R_{AB}$ ,  $\Delta\nabla R_{AC}$  及线性组合法中的  $V_{AB}$ ,  $V_{AC}$ , 可根据观测值、已知站坐标及卫星星历求得,作为已知值。通过内插或线性组合后即可求得作为参考点的基准站 A 和虚拟站间两者的差值。

#### 6.2.1 根据内插法公式计算虚拟基准站观测值

求基准站 B 和 C 的误差改正数  $\Delta\nabla R_{AB}$  和  $\Delta\nabla R_{AC}$

$$\begin{cases} \Delta\nabla R_{AB}^j = a_1(X_B - X_A) + a_2(Y_B - Y_A) \\ \Delta\nabla R_{AC}^j = a_1(X_C - X_A) + a_2(Y_C - Y_A) \end{cases} \quad (6-1)$$

虚拟站 P 的误差改正数  $\Delta\nabla R_{AP}^{ij}$

$$\Delta\nabla R_{AP}^{ij} = a_1(X_P - X_A) + a_2(Y_P - Y_A) \quad (6-2)$$

根据 (6-1) 式得系数  $a_1$  和  $a_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta\nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

代入(6-2)式求得虚拟基准站处 P 处的  $\Delta\nabla R_{AP}^{ij}$  值。

$$\begin{aligned} \Delta\nabla R_{AP}^{ij} &= a_1(X_P - X_A) + a_2(Y_P - Y_A) \\ &= (X_P - X_A \quad Y_P - Y_A) \cdot \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta\nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-4)$$

类似地, 若假设  $\Delta\nabla R$  是平面坐标差  $(X_i - X_A), (Y_i - Y_A)$  的二次函数而进行曲面内插时, 有:

$$\begin{aligned} \Delta\nabla R_{Ak}^{ij} &= a_1(X_k - X_A) + a_2(Y_k - Y_A) + a_3(X_k - X_A)^2 \\ &\quad + a_4(Y_k - Y_A)^2 + a_5(X_k - X_A)(Y_k - Y_A) \end{aligned} \quad (6-5)$$

解算系数  $a_1, a_2, \dots, a_5$ , 至少需 6 个基准站。求得上述个系数后, 将虚拟基准站近似的平面坐标  $(X_P, Y_P)$  代入后, 即可内插出该站的  $\Delta\nabla R_{AP}^{ij}$  值:

$$\begin{aligned} \Delta\nabla R_{AP}^{ij} &= a_1(X_P - X_A) + a_2(Y_P - Y_A) + a_3(X_P - X_A)^2 \\ &\quad + a_4(Y_P - Y_A)^2 + a_5(X_P - X_A)(Y_P - Y_A) \end{aligned} \quad (6-6)$$

则基准站 A 与虚拟基准站的双差观测值  $\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi_{AP} + \Delta\nabla\phi_{AP})$  为:

$$\lambda \cdot (\Delta\nabla\phi_{AP} + \Delta\nabla\phi_{AP}) = \Delta\nabla\rho_{AP} + \Delta\nabla R_{AP} \quad (6-7)$$

## 6.2.2 根据线性组合法公式计算虚拟基准站观测值

计算线性组合系数:

$$\begin{bmatrix} \alpha_B \\ \alpha_C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad (6-8)$$

求基准站 B 和 C 的  $V_{AB}, V_{AC}$

$$\begin{cases} V_{AB} = \lambda \cdot \Delta\nabla\phi_{AB} + \lambda \cdot \Delta\nabla N_{AB} - \Delta\nabla\rho_{AB} \\ V_{AC} = \lambda \cdot \Delta\nabla\phi_{AC} + \lambda \cdot \Delta\nabla N_{AC} - \Delta\nabla\rho_{AC} \end{cases} \quad (6-9)$$

虚拟基准站 P 的双差观测方程:

$$\lambda \cdot \Delta\nabla\phi_{PA} + \lambda \cdot \Delta\nabla N_{PA} - \Delta\nabla\rho_{PA} = (\alpha_B V_{AB} + \alpha_C V_{AC}) + \varepsilon_{\Delta\nabla\phi} \text{ 项} \quad (6-10)$$

$$\text{令} \quad L_{PA} = a_B V_{AB} + a_C V_{AC} \quad (6-11)$$

求得两者之差之后即可根据下式计算双差观测值  $\lambda(\Delta\nabla\phi_{PA} + \Delta\nabla N_{PA})$ :

$$\lambda(\Delta\nabla\phi_{PA} + \Delta\nabla N_{PA}) = \Delta\nabla\rho_{PA} + L_{PA} \quad (6-12)$$

上式中略去了噪声项  $\varepsilon_{\Delta\nabla\phi}$ 。

需要说明的是  $\Delta\nabla R_{AP}$  和  $L_{PA}$  都是根据虚拟基准站 P 点的坐标求得的, 故严格地讲都应该是虚拟基准站上的值。但由于真正的流动点  $u$  离 P 很近, 因此在内插法及线性组合法中都把  $\Delta\nabla R_{AP}$  和  $L_{PA}$  当作是流动点上的值  $\Delta\nabla R_{uA}$  和  $L_{uA}$ 。同样 (6-7) 和 (6-12) 式中的距离双差  $\Delta\nabla\rho_{PA}$  值是可以根据基准站 A 和虚拟基准站 P 的坐标及卫星星历求得的, 也为已知值。于是  $(\Delta\nabla\phi_{PA} + \Delta\nabla N_{PA})$  可写为如下形式:

$$\Delta\nabla\phi_{PA} + \Delta\nabla N_{PA} = \Delta\phi_A - \Delta\phi_P + \Delta\nabla N_{PA} \quad (6-13)$$

式中,  $\Delta\phi_A$  为基准站在两颗卫星间求一次差, 可根据载波相位观测值求得。 $\Delta\nabla N_{PA}$  为整周模糊度, 可在初始化过程中或采用 OTF 法确定, 于是在虚拟基准站上的单差观测值  $\Delta\phi_P$  便被求出。即

$$\Delta\phi_P = \Delta\nabla\phi_{PA} - \Delta\phi_A \quad (6-14)$$

### § 6.3 流动站与虚拟基准站双差观测值的计算模型

数据处理中心将虚拟基准站上的单差观测值  $\Delta\phi_P$  发给动态用户  $u$  后, 流动站上即可与  $\Delta\phi_P$  组成双差观测值进行动态定位:

$$\Delta\nabla\phi_{uP} = \Delta\phi_P - \Delta\phi_u \quad (6-15)$$

虚拟基准站法是目前国外在网络 RTK 定位技术采用的方法。根据国外资料报道, 当站间距离为 70~100km 时, 用虚拟基准站法进行实时动态定位的精度可达到 2~3cm, 且初始化所需的时间也能大为减少。

需要说明的是, 上述关于虚拟基准站法数学的公式推导只是根据虚拟基准站法的思想所进行的一个初步讨论, 其核心内容, 我们还不得而知, 因为受商业利益的限制, 国外对虚拟基准站法的数学模型是保密的。而要对此方法做详细的研究, 需要投入大量的人力、物力和资金。

从上述虚拟基准站法数学模型建立的过程中可以看出, 虚拟基准站法同样能够消除残余的卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响, 同时能够大幅度地削弱残余的对流层延迟误差和多路径误差对流动站的影响, 从而提高了常规 RTK 流动站与基准站的距离和定位的精度。

采用虚拟基准站法进行网络 RTK 定位的具体做法如下:

- 1) 各基准站将当前历元  $t_i$  时的观测资料通过数据通信链实时传送给数据处理中心。
- 2) 流动站先利用  $t_i$  时的伪时距观测值和卫星星历进行单点定位, 求得自己的概略坐标并将其转换成高斯平面坐标  $(x_u, y_u)$ , 然后再将该时刻的载波相位观测值和  $(x_u, y_u)$  值实时传送至数据处理中心。
- 3) 数据处理中心首先根据流动站的近似坐标判断该站位于哪个三角形内, 然后根据 (6-8) 式计算线性组合系数  $a_B$  和  $a_C$ 。
- 4) 数据处理中心利用基准站 A, B, C 的资料解算基线向量  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{AC}$ , 然后根据 (6-4) 式求出  $\Delta \nabla R_{AP}^j$ , 或根据 (6-9) 式和 (6-12) 式计算常数项  $(a_B V_{AB} + a_C V_{AC})$ 。并由 (6-7) 式或 (6-13) 式计算  $\lambda(\Delta \nabla \phi_{PA} + \Delta \nabla N_{PA})$ , 求出该值后, 按 (6-14) 式计算虚拟基准站上的单差观测值  $\Delta \phi_p$ 。
- 5) 网络 RTK 数据处理中心按常规 RTK 中所用的数据格式播发虚拟基准站的观测值  $\Delta \phi_p$  及站坐标给流动站用户, 则用户就可按 (6-15) 式并利用原有的常规 RTK 软件来进行数据处理, 求得点位结果。

## 第七章 网络 RTK 模糊度解算数学模型介绍

### § 7.1 OTF 模糊度解算的基本原理

高精度 GPS 动态实时相对定位, 必须采用相位观测量。由于 GPS 信号结构的限制, 在相位观测量中总包含着一个未知的初始相位整周数  $N$ ——相位模糊度。因此, 要将相位观测值转化为站星间的距离, 以取得高精度的定位结果, 必须预先解决模糊度的大小。在进行实时动态相对定位时, 如遇到以下情况, 都必须重新解算模糊度, 即动态定位之初、观测过程中出现周跳以及跟踪新的卫星等。

理论上, 模糊度是一个整数, 但是在站星间的相位原始观测量中, 由于包含有与站钟和星钟有关的诸多偏差和误差等非整数的偏差, 这些偏差与整周模糊度混杂在一起, 很难将整数模糊度从这些误差中分离出来。解算整周模糊度, 必须消除所有非整数的偏差, 或是采用其它办法使所有偏差小于载波相位波长的二分之一 (Han, 1997)。为了消除这些钟差项的影响, 以及减弱其他残余误差的影响, 同时又能保留模糊度的整数特性, 在模糊度解算理论中, 均采用站星双差观测量。

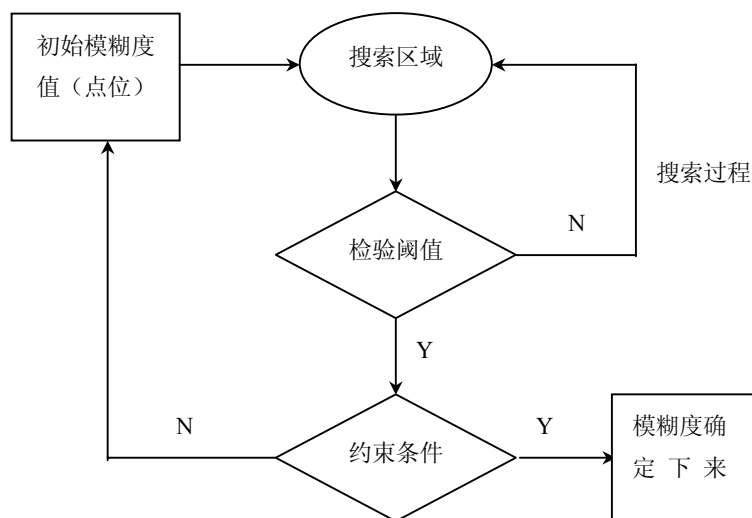


图 7-1 模糊度 OTF 解算的基本原理

求解模糊度的方法有许多种, 其中有些只适用于静态和快速静态定位, 可用于实时或准实时动态定位的 OTF 解算方法主要有双频法、卡尔曼滤波法、最小二乘搜索法、模糊度协方差法。

除了双频法和卡尔曼滤波法, 其他方法均基于搜索的原理, 基本思想是, 首先采用某种近似的方法求得模糊度的初值(或相应的初始点位); 再以此初值为中心, 建立一个适当的搜索区域, 该区域可定义于模糊度数学空间(即模糊度域中), 也可定义于模糊度物理空间(即点域中); 然后, 根据某一算法在该空间中逐组地(或逐点地)进行搜索, 直到某组待检定的模糊度(或某待定的点)满足预先设定的检验阈值和约束条件, 即可将该组模糊度(或该点所对应的那组模糊度)确定下来, 如图 7-1。

各种 OTF 模糊度解算法所采用的搜索算法、选用的检验阈值类型、数值的大小、收敛的准则以及所加的约束条件各不一样, 另外, 确定初值的方法以及搜索区域的建立方法也各有区别, 这些都将直接影响到模糊度的解算速度、所需的观测时间以及解的可靠性。

## § 7.2 现有 OTF 方法介绍

### 7.2.1 双频 P 码伪距法

该方法法基于双频双 P 码双差观测数据, 可用于静、动态定位, 其求解模糊度的过程分为五步(王爱朝, 1995)。

#### (1) 相位平滑伪距

双频 P 码伪距法通过对窄巷 P 码伪距观测量与宽巷和窄巷的载波相位观测量的综合处理确定整周相位模糊度。为了减小观测噪声和多路径反射这两项主要误差对测码伪距观测值的影响, 首先采用相位平滑伪距的算法, 计算较精确的伪距平滑值。

由于 GPS 测量的基本方程(2-1)、和(2-4)得 P 码双频测码伪距  $P_i$  与测相伪距  $L_i$  的观测方程为

$$P_i = \rho + c(dt - dT) + d\rho + d_{ion_i} + d_{trop_i} + \varepsilon_{P_i} \quad (7-1)$$

$$L_i = \lambda_i \cdot \phi_i = \rho + c(dt - dT) - \lambda_i N_i + d\rho + d_{trop_i} - d_{ion_i} + \varepsilon_{\phi_i} \quad (7-2)$$

其中  $i=1, 2$  分别代表  $f_1, f_2$  频率载波,  $\phi_i$  为  $f_i$  频率的载波相位观测值。

根据相位平滑伪距的算法(王爱朝, 1995), 可得历元时刻  $t_k$  的 P 码伪距平滑值  $\tilde{P}_i(t_k)$  为

$$\tilde{P}_i(t_k) = \omega P_i(t_k) + (1 - \omega)[\tilde{P}_i(t_{k-1}) + L_i(t_k) - L_i(t_{k-1})] \quad (7-3)$$

其中  $\omega$  为一随观测历元逐渐减小的权系数, 初始条件为

$$\tilde{P}_i(t_1) = P_i(t_1) \quad (7-4)$$

#### (2) 计算初始宽巷双差模糊度 $\Delta \nabla N_w$

经过相位平滑后的 P 码伪距观测量的精度还不能精确到足以确定 L1、L2 的整周模糊度值(L1 波长=19.03cm、L2 波长=24.42cm)。由于宽巷波长较长( $\lambda_w \approx 86.2\text{cm}$ ), 与相应的噪声相比, 确定模糊度较容易, 同时, 为了尽量消除不必要的多余参数, 简化数学模型以及减弱各类误差的影响, 故首先求解双差宽巷模糊度的初值  $\Delta \nabla N_w$ , 这可通过宽巷测相伪距  $\Delta \nabla L_w$  和平滑后的窄巷测码伪距  $\Delta \nabla \tilde{P}_N$  相组合而得到。

对于以长度为单位的测相伪距观测量的宽巷和窄巷观测值, 按 (2-30) 式知

$$\text{宽巷: } L_w = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2} = \frac{154}{34} L_1 - \frac{120}{34} L_2 \quad (7-5)$$

$$\text{窄巷: } L_N = \frac{f_1 L_1 + f_2 L_2}{f_1 + f_2} = \frac{154}{274} L_1 + \frac{120}{274} L_2 \quad (7-6)$$

类似地, 可写出相应的平滑后测码伪距观测量的宽巷和窄巷观测值为

$$\text{宽巷: } \tilde{P}_w = \frac{f_1 \tilde{P}_1 - f_2 \tilde{P}_2}{f_1 - f_2} = \frac{154}{34} \tilde{P}_1 - \frac{120}{34} \tilde{P}_2 \quad (7-7)$$

$$\text{窄巷: } \tilde{P}_N = \frac{f_1 \tilde{P}_1 + f_2 \tilde{P}_2}{f_1 + f_2} = \frac{154}{274} \tilde{P}_1 + \frac{120}{274} \tilde{P}_2 \quad (7-8)$$

由 (7-5) ~ (7-8) 式可以看出, 不论是测相伪距还是测码伪距的宽巷和窄巷观测量, 其所含与频率无关的误差, 如钟差、对流层延迟、星历误差等的影响以及几何斜距与  $f_1$  或  $f_2$  频率的原始测相伪距或测码伪距观测量中的影响及几何斜距均一致, 而与频率有关的误差, 如电离层延迟、多路径误差以及观测噪声等的影响则有所不同。尤其值得注意的是, 对于电离层延迟的影响, 它遵循 (2-31) 式的规律。故由式 (7-5) ~ (7-8) 可以看出, 不论是宽巷和窄巷, 相应的测相伪距与测码伪距所受电离层延迟量绝对值均相等, 记为  $d_{ionW/N}$ , 则有

$$d_{ionW/N} = -\frac{A}{f_1 f_2} \quad (7-9)$$

考虑到电离层对伪距和相位观测量的延迟影响大小相等, 正、负相反 (群延迟和相延迟), 故对于窄巷测码伪距  $\tilde{P}_N$  和宽巷测相伪距  $L_w$  的影响为  $d_{ionW/N}$ , 而对于宽巷测码伪距  $\tilde{P}_w$  和窄巷测相伪距  $L_N$  的影响为  $-d_{ionW/N}$ 。

根据以上分析, 即可写出相应的宽巷、窄巷测码伪距与测相伪距观测量的方程式为

$$\tilde{P}_w = \rho + d\rho + d_{trop} - d_{ionW/N} + c(dt - dT) + \varepsilon_{\tilde{P}_w} \quad (7-10)$$

$$\tilde{P}_N = \rho + d\rho + d_{trop} + d_{ionW/N} + c(dt - dT) + \varepsilon_{\tilde{P}_N} \quad (7-11)$$

$$L_w = \rho + d\rho + d_{trop} + d_{ionW/N} + c(dt - dT) - \lambda_w N_w + \varepsilon_{L_w} \quad (7-12)$$

$$L_N = \rho + d\rho + d_{trop} - d_{ionW/N} + c(dt - dT) - \lambda_N N_N + \varepsilon_{L_N} \quad (7-13)$$

相应的双差观测量方程为

$$\Delta \nabla \tilde{P}_w = \Delta \nabla \rho + \Delta \nabla d_{trop} - \Delta \nabla d_{ionW/N} + \Delta \nabla \varepsilon_{\tilde{P}_w} \quad (7-14)$$



$$\Delta \nabla \tilde{P}_N = \Delta \nabla \rho + \Delta \nabla d_{trop} + \Delta \nabla d_{ion\ w/N} + \Delta \nabla \varepsilon_{\tilde{P}_N} \quad (7-15)$$

$$\Delta \nabla L_w = \Delta \nabla \rho + \Delta \nabla d_{trop} + \Delta \nabla d_{ion\ w/N} - \lambda_w \Delta \nabla N_w + \Delta \nabla \varepsilon_{L_w} \quad (7-16)$$

$$\Delta \nabla L_N = \Delta \nabla \rho + \Delta \nabla d_{trop} - \Delta \nabla d_{ion\ w/N} - \lambda_N \Delta \nabla N_N + \Delta \nabla \varepsilon_{L_N} \quad (7-17)$$

由 (7-15)、(7-16) 解得初始双差宽巷模糊度为

$$\Delta \nabla N_w = \frac{(\Delta \nabla \tilde{P}_N - \Delta \nabla L_w) - (\Delta \nabla \varepsilon_{\tilde{P}_N} - \Delta \nabla \varepsilon_{L_w})}{\lambda_w} \quad (7-18)$$

上式中后一项是与观测噪声有关的项, 由于各个历元时刻, 其影响的大小均难以确定, 故一般在计算初始宽巷模糊度时可忽略不计 (Abidin 等, 1992)。当然, 在测站周围没有多路径影响, 且又用相位平滑了伪距, 对上述误差忽略不计是可行的。但若存在较强的多路径反射, 则忽略这一影响可能导致所解宽巷模糊度初值产生较大的偏差。为了进一步减弱这些误差的影响, 实际工作中还可取多历元的平均值来确定初始宽巷模糊度, 以尽量提高宽巷模糊度初值的计算精度。

(3) 计算窄巷双差模糊度  $\Delta \nabla N_N$

由于窄巷波长较短 ( $\approx 10.7\text{cm}$ ), 相对于各种误差和观测噪声来说, 难以直接由 (7-14)、(7-17) 式正确地确定出其双差模糊度。为此, 必须借助于所谓的虚拟电离信号观测量  $L_{is}$ 。

由上面的讨论知, 电离层对宽巷测相伪距  $L_w$  与窄巷测相伪距  $L_N$  的影响量绝对值相等, 均为  $d_{ion\ w/N}$ , 而符号相反。若定义虚拟电离信号观测量  $L_{is}$  为

$$L_{is} = L_N - L_w \quad (7-19)$$

则由 (7-12)、(7-13) 式得

$$L_{is} = -2d_{ion\ w/N} - \lambda_N N_N + \lambda_w N_w + \varepsilon_{L_N} - \varepsilon_{L_w} \quad (7-20)$$

由 (2-31) 式知

$$2d_{ion\ w/N} = d_{ion\ w} - d_{ion\ N} = \frac{f_1 d_{ion\ 1} + f_2 d_{ion\ 2}}{f_1 + f_2} - \frac{f_1 d_{ion\ 1} + f_2 d_{ion\ 2}}{f_1 - f_2}$$

即

$$2d_{ion\ w/N} = \frac{2f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} (d_{ion\ 2} - d_{ion\ 1}) \quad (7-21)$$

故

$$L_{is} = -\frac{2f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} (d_{ion\ 2} - d_{ion\ 1}) - \lambda_N N_N + \lambda_w N_w + \varepsilon_{L_N} - \varepsilon_{L_w} \quad (7-22)$$

由上式可见, 虚拟电离信号观测量  $L_{is}$  不含几何斜距, 不受与频率无关的误差如钟差、对

流层延迟、轨道误差等的影响,而又将宽巷和窄巷的模糊度联系起来,故借助它可由宽巷模糊度初值解得窄巷模糊度。

相应地记双差虚拟电离信号观测量为  $\nabla\Delta L_{is}$ , 则由 (7-22) 式可写出其双差观测方程为

$$\begin{aligned}\Delta\nabla L_{is} &= \Delta\nabla L_N - \Delta\nabla L_w \\ &= -2\Delta\nabla d_{ion\ w/N} - \lambda_N \cdot \Delta\nabla N_N + \lambda_w \cdot \Delta\nabla N_w + \Delta\nabla \varepsilon_{L_N} - \Delta\nabla \varepsilon_{L_w}\end{aligned}\quad (7-23)$$

整理得窄巷双差模糊度计算公式为

$$\begin{aligned}\Delta\nabla N_N &= \frac{\lambda_w \cdot \Delta\nabla N_w - [\Delta\nabla L_{is} + 2\Delta\nabla d_{ion\ w/N} - (\Delta\nabla \varepsilon_{L_N} - \Delta\nabla \varepsilon_{L_w})]}{\lambda_N} \\ &= 8.06\Delta\nabla N_w - \frac{\Delta\nabla L_{is} + 2\Delta\nabla d_{ion\ w/N} - \Delta\nabla \varepsilon_{L_{is}}}{\lambda_N}\end{aligned}\quad (7-24)$$

若初始宽巷模糊度  $\Delta\nabla N_w$  的估值精度可达  $\pm 2$  周 ( $0.06\Delta\nabla N_w = 0.12$  周), 且观测值中的电离层影响 (P 码双频, 一般均可对电离层进行双频改正, 多路径误差及观测噪声等均可减小到忽略不计的程度, 则由 (7-24) 式知, 此时

$$\Delta\nabla L_{is} \approx \lambda_N (8 \cdot \Delta\nabla N_w - \Delta\nabla N_N) \quad (7-25)$$

可见, 虚拟电离信号观测值  $\Delta\nabla L_{is}$  可看成具有与窄巷相同的波长  $\lambda_N$ , 且  $\Delta\nabla L_{is}$  的模糊度 ( $8\Delta\nabla N_w - \Delta\nabla N_N$ ) 亦可准确地固定为整数。因此, 只要初始宽巷模糊度的估计精度  $< \pm 2$  周, 则由 (7-24) 式就可唯一地将窄巷模糊度固定在整数值上。这里对初始宽巷模糊度  $\Delta\nabla N_w$  的估计精度要求达到  $\pm 2$  周, 在 P 码双频观测数据下, 通过相位平滑伪距, 必要时再取多个历元的平均是不难满足的。

注意, 这一步是扩频法的关键, 模糊度能否准确、快速地解算出来就取决于能否快速可靠地将虚拟电离信号观测量的模糊度固定为整数 (亦即窄巷的模糊度能否固定为整数)。因此, 将虚拟电离信号的精度, 亦即  $\Delta\nabla L_{is} / \lambda_N$  逼近某一整数的程度作为计算过程中的一个检验统计量。

#### (4) 确定宽巷双差模糊度

考虑到宽巷模糊度与窄巷模糊度之间所存在的奇偶对应关系, 为了根据所得窄巷模糊度求得较精确的宽巷模糊度, 这里可引用所谓的超宽巷技术 (Wübbena, 1989)。宽巷与窄巷模糊度可定义为

$$N_w = N_1 - N_2, \quad N_N = N_1 + N_2 \quad (7-26)$$

可见, 整数  $N_w$  与  $N_N$  的奇偶性相互对应, 即  $N_w$  为奇 (偶) 数,  $N_N$  亦必为奇 (偶) 数。这就意味着  $N_w$  和  $N_N$  中任意一个若能预先求出来, 则求解另一个模糊度时, 其有效波波长相当于又增大了两倍, 从而使模糊度的确定更加准确可靠。若宽巷模糊度  $N_w$  已预先确定, 则相应的求解窄巷模糊度所对应的窄巷有效波长相当于  $2\lambda_N \approx 21.3\text{cm}$ , 此波长已与 L2 波长

(24.4cm) 相当, 但它所受电离层与噪声误差的影响要比 L2 载波小 (见表 2-1)。同样地, 如果预先求出窄巷模糊度  $N_N$ , 则相应的求解宽巷模糊度所对应的宽巷有效波长相当于  $2\lambda_N \approx 172.5\text{cm}$ , 据此确定宽巷模糊度  $N_w$  更加容易。由于这里有效波长增大了两倍, 故称这种宽巷与窄巷的组合为超宽巷技术。

利用上述超宽巷原理中的奇偶对应关系, 即可根据窄巷双差模糊度  $\Delta\nabla N_N$  是奇数还是偶数, 而将宽巷双差模糊度固定在与初值是接近的奇数或偶数上。

(5) 确定双差模糊度  $\Delta\nabla N_1$  或  $\Delta\nabla N_2$

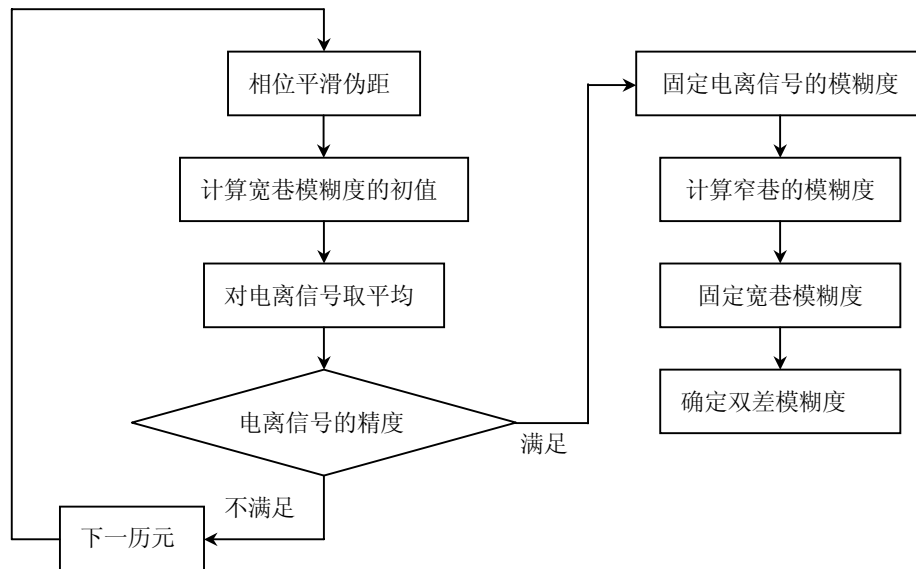


图 7-2 双频 P 码法模糊度 OTF 解算流程

求得准确的宽巷模糊度  $\Delta\nabla N_w$  后, 即可根据观测量的组合关系解算某一载波的相位模糊度。由 (2-10) 式可写出双频双差观测量模型为

$$\Delta\nabla\phi_1 = \frac{f_1}{c}\Delta\nabla\rho - \Delta\nabla N_1 + \frac{f_1}{c}(\Delta\nabla d_{trop} - \Delta\nabla d_{ion1}) + \varepsilon_{\nabla\Delta\phi_1} \quad (7-27)$$

$$\Delta\nabla\phi_2 = \frac{f_2}{c}\Delta\nabla\rho - \Delta\nabla N_2 + \frac{f_2}{c}(\Delta\nabla d_{trop} - \Delta\nabla d_{ion2}) + \varepsilon_{\nabla\Delta\phi_2} \quad (7-28)$$

将 (7-27)、(7-28) 式分别乘以  $f_1$ 、 $f_2$  并相减得消去了电离层影响后的表达式

$$f_2\Delta\nabla\phi_2 - f_1\Delta\nabla\phi_1 = \frac{1}{c}\Delta\nabla\rho(f_2^2 - f_1^2) - f_2\Delta\nabla N_2 + f_1\Delta\nabla N_1 \quad (7-29)$$

式中略去了对流层折射等残余误差的影响。将  $\Delta\nabla N_2 = \Delta\nabla N_1 - \Delta\nabla N_w$  代入 (7-29) 式并顾及  $f_w = f_1 - f_2$ , 整理得

$$\Delta\nabla N_1 = \frac{f_1}{f_w}\Delta\nabla\phi_1 + \frac{f_2}{f_w}(\Delta\nabla\phi_2 - \Delta\nabla N_w) + \frac{\Delta\nabla\rho}{c}(f_1 + f_2) \quad (7-30)$$

相应地亦可计算  $\Delta \nabla N_2$ 。

在确定  $N_w, N_N$  后, 可以求得  $\phi_1, \phi_2$  的整周模糊度:

$$N_1 = (N_w + N_N) / 2; \quad N_2 = (N_w - N_N) / 2 \quad (5-31)$$

双频 P 码法的优点在于只需利用单颗卫星的观测数据且与其它卫星无关, 计算十分简单, 当采用式 (7-23) 和式 (7-24) 分别计算  $N_w$  和  $N_N$  时, 整周模糊度的求解与测站间距离无关, 可用于数千公里相对定位的整周模糊度求解 (Blewitt, 1989)。其缺点在于需要高精度的双频伪距观测值, 对于大多数不具有双频 P (Y) 码伪距测量功能的接收机不能适用, 故该法适合于基准站的整周模糊度的解算,

双频 P 码法求解模糊度的流程如图 7-2。如前所述, 双频 P 码法中是以虚拟电离信号观测值  $L_{is}$  的精度作为确定模糊度的标准, 因此, 正确确定模糊度所需时间和可靠性取决于观测值中所含与频率有关的残余误差如电离层延迟、多路径反射以及观测噪声等的大小, 若这些误差可忽略不计, 则双频 P 码法求解模糊度可近于实时 (Seeber 等, 1989; Abidin, 1990)。

## 7.2.2 最小二乘搜索法

最小二乘搜索法最早由 Hatch (1989, 1990) 提出。这一方法的基本思想是在所有的双差模糊度中, 只有三个是独立的, 即只要能确定三个双差的整周模糊度, 则其它的双差模糊度可以唯一确定。

最小二乘搜索法可分为三个步骤

### 1) 确定未知点的初始坐标并建立模糊度搜索空间

未知点的初始坐标可采用伪距双差观测值采用最小二乘法计算得到。在求得未知点的初始坐标后, 即可以伪距差分解的精度作为指标 (一般取为各坐标分量的三倍标准差) 建立一个三维坐标搜索空间, 以该空间的八个顶点坐标和选择的三个基本双差观测值分别计算出相应的模糊度初值, 然后根据每个顶点上计算得到的模糊度初值。确定这三个双差模糊度参数各自的最大整数  $N_{\max}^i$  和最小整数  $N_{\min}^i$ 。在这一搜索空间中需要检测的模糊度组合总数为:

$$K = \prod_{i=1}^3 (N_{\max}^i - N_{\min}^i + 1) \quad (7-32)$$

### 2) 最小二乘搜索

最小二乘搜索的步骤为

(1) 从模糊度搜索空间中选取一组待检测的模糊度 (称为基本模糊度组), 利用相应的三个双差观测值计算出动态点位坐标。

(2) 利用求得的动态点位坐标计算其它双差载波相位的整周模糊度 (称为剩余模糊度组)。

(3) 根据 (1)、(2) 中得到的双差整周模糊度, 利用该历元所有的双差载波相位观测值再次进行最小二乘解算得到动态点位坐标及相应的残差向量  $V$ 。

(4) 计算方差因子  $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{n - u} \quad (7-33)$$

式中  $V$  为观测值残差向量,  $Q$  为双差观测值的协因数阵,  $n$  为双差载波相位观测值的个数,  $u$  为未知数的个数, 这里  $u=3$ 。

若  $\hat{\sigma}_0^2$  小于某一限值, 则该组模糊度参数及  $\hat{\sigma}_0^2$  值存入结果文件, 否则将该组模糊度参数剔除。

(5) 重复 (1) — (4), 直到检测完所有的模糊度组合。

### 3) 固定整周模糊度

若某历元进行第 2) 步后仅剩下一组模糊度数, 则该组模糊度为正确模糊度。否则对结果文件中保存的  $\hat{\sigma}_0^2$  进行 Ratio 检验 (Lachapelle 等, 1992)。

$$Ratio = \frac{(V^T Q^{-1} V)_{\text{sec}}}{(V^T Q^{-1} V)_{\text{min}}} = \frac{\hat{\sigma}_{0\text{sec}}^2}{\hat{\sigma}_{0\text{min}}^2} \quad (7-34)$$

若 Ratio 大于某一限值 (一般选取为大于 2 的常值), 则认为  $\hat{\sigma}_0^2$  最小所对应的模糊度参数组为正确的模糊度, 否则还需利用下一历元的数据对剩下的模糊度组进行最小二乘搜索, 直到剩下唯一的一组或 Ratio 大于某一限值为止。

在这一方法的基础上, Abidin (1992, 1993) 提出了集成 OTF 方法 (Integral OTF)。集成 OTF 方法继承了最小二乘搜索法的基本特点, 即继续了选择四颗卫星构成三个双差作为基本模糊度组的思想, 但在搜索空间的建立以及搜索方法都作了较大的改进。

集成 OTF 方法采用了顾及几何位置的时空性和模糊度之间数学相关性的椭球搜索空间替代了最小二乘搜索法的立方体搜索空间。

$$(\hat{N} - \tilde{N})^T Q_{\tilde{N}}^{-1} (\hat{N} - \tilde{N}) < \chi_{3, 1-\alpha}^2 \quad (7-35)$$

式中  $\tilde{N}$  为模糊度参数  $N$  的实数估值,  $\hat{N}$  表示双差模糊度  $N$  的整数估值,  $Q_{\tilde{N}}$  为初始基本模糊度组的协方差阵,  $\chi_{3, 1-\alpha}^2$  为 3 个自由度, 置信水平为  $1 - \alpha$  的  $\chi^2$  分布百分位值。

采用椭球搜索空间无论在初始模糊组的数量、搜索所需计算时间还是搜索正确模糊度组所需的观测历元数都比立方体搜索空间要少 (Abidin, 1992)。

集成 OTF 还设计一套理论严密、高效的搜索算法, 它包括以下 8 项检验:

- (1) 检验点坐标与由测码伪距计算得到的坐标之间的相容性检验
- (2) 闭合差向量的  $L_1$  范数检验
- (3) 检验点坐标与更新后坐标之间的相容性检验
- (4) 残差的  $L_1$  范数检验
- (5) 残差二次型的检验
- (6) 单个模糊度函数值的检验
- (7) 标准化模糊度函数值的检验

### (8) RATIO 检验

注：向量  $X$  的  $L_1$  范数是指  $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ， $x_i$  表示向量  $X$  的第  $i$  个分量（或坐标）。

这八项检验从前到后越来越严格，逐步将搜索空间中不正确的模糊度组删除，有利于减少 OTF 解算所需的历元数。

最小二乘搜索法和集成 OTF 都采用了基本模糊度组的思想，这一思想有助于减少模糊度搜索空间中模糊度组合的数量，提高搜索效率，不少文献中也给出了许多成功的例子，但它们也会存在一些问题。首先基本卫星的选择是至关重要的，为了减少基本待选模糊度组的数量，提高计算效率，同时兼顾采用基本卫星组的四颗卫星进行定位解算能有较高的精度以保证剩余双差载波相位的整周模糊度能正确解算，选作基本卫星组的四颗卫星的 PDOP 值应适中，不能太大，也不能太小。事实上选用不同的基本卫星计算效率的差异是很大的（Abidin, 1992）。因而如何选择基本卫星是 OTF 解算面临的一个首要问题。其次，如果在搜索过程中基本卫星组某一颗卫星出现失锁，则前面的搜索工作都将作废，必需重新构造搜索空间，重新开始搜索过程。再者，采用基本卫星组的思想虽然对于剩余卫星组中的周跳不敏感，但若基本卫星组中的卫星出现周跳而这一周跳又未能探测出来，则极有可能导致最后搜索到的模糊度数值是错误的。另外，采用最小二乘搜索法或集成 OTF 方法，除第一个搜索历元检测搜索空间中所有模糊度组外，后续历元均只对前一历元中通过各项检验的模糊度进行检验，这样做虽然提高了计算效率，但若某一历元中某一观测值有较大的误差则极有可能使正确模糊度组被某一检验项所拒绝，从而导致搜索失败或求得错误的整周模糊度。

### 7.2.3 模糊度协方差法

模糊度协方差法并不是指一种特定的 OTF 方法，而是一类 OTF 方法的总称。这一类 OTF 方法有着共同的特点，即将模糊度参数作为未知数向量的一部分，利用所有可用的观测值一起进行平差处理从而获得表征模糊度数间相关关系的模糊度协方差阵。此时，正确模糊度的搜索过程实际上是寻找使残差平方和最小的模糊度组合的问题。

模糊度协方差法可以混合整数最小二乘估计来描述（Wei, 1995）。设历元  $K$  的双差载波相位可用如下线性模型表述：

$$Y_k = A_k X_k + B_k N + \varepsilon_k \quad N \in Z^k \quad X_k \in R_m \quad (7-36)$$

其中：  $Y_k$  为历元  $K$  的双差载波相位观测值减去计算值向量。

$X_k$  为历元  $K$  流动站天线位置的改正数向量（实数）

$N$  为双差模糊度向量（整数）

$A_k, B_k$  分别为  $X_k, N$  的设计矩阵

$\varepsilon_k$  为量测噪声

$Z^n$  为  $n$  维整数空间， $R^m$  为  $m$  维实数空间

式（7-36）的最小二乘估计准则为

$$\Omega_k = (Y_k - A_k \hat{X}_k - B_k \hat{N})^T Q_{yy}^{-1} (Y_k - A_k \hat{X}_k - B_k \hat{N}) = \min \quad (7-37)$$

其中： $\hat{N}$ 表示双差模糊度  $N$  的整数估值， $\hat{X}_k$ 表示  $X_k$  的实数估计， $Q_{yy}$ 表示观测值向量  $Y_k$  的协方差阵。

由于在模型 (7-36) 中有模糊度参数的整数约束条件，式 (7-37) 不能用常规的最小二乘法求解，它是一个混合最小化问题，不存在解析解。通常的做法是将式 (7-37) 的混合最小化问题转化为一个普通的最小问题和一个整数最小问题 (Hatch 等, 1994)。于是式 (7-36) 改写成：

$$Y_k = A_k X_k + B_k N + \varepsilon_k \quad (7-38)$$

$$\text{及} \quad N = \hat{N} \quad (7-39)$$

其中  $X \in R^n, N \in R^n, \hat{N} \in Z^n$

这是一个附有约束条件的高斯-可马尔可夫模型。在式 (7-38)、(7-39) 中模糊度参数  $N$  将首先以实数变量进行估计，并将进一步由约束条件式 (7-39) 固定为整数。当采用约束条件 ((7-39) 求解线性模型 (7-38) 时，最小化准则为

$$\Omega_k = (Y_k - A_k \tilde{X}_k - B_k \tilde{N})^T Q_{yy}^{-1} (Y_k - A_k \tilde{X}_k - B_k \tilde{N}) + (\tilde{N} - \hat{N})^T Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1} (\tilde{N} - \hat{N}) = \min \quad (7-40)$$

其中  $\tilde{N}$  是未附加约束条件 (7-40) 时线性模型 (7-38) 对模糊度参数  $N$  的实数估值， $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}$  是其相应的协方差阵。

最小二乘法则 (7-40) 与最小二乘准则 (7-37) 是等价。根据 (7-40)，混合整数最小化问题 (7-37) 可以分解为两步求解。

第一步，首先对 (7-38) 进行无约束最小二乘平差，有

$$\Omega'_k = (Y_k - A_k \tilde{X}_k - B_k \tilde{N})^T Q_{yy}^{-1} (Y_k - A_k \tilde{X}_k - B_k \tilde{N}) = \min \quad (7-41)$$

其中  $\tilde{X} \in R^n \quad \tilde{N} \in R^n$

第二步，模糊度参数的整数值可由以下最小化问题解决

$$\Omega''_k = (\hat{N} - \tilde{N})^T Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1} (\hat{N} - \tilde{N}) = \min \quad (7-42)$$

其中  $\tilde{N} \in R^n \quad \hat{N} \in Z^n$

$$\Omega_k = \Omega'_k + \Omega''_k$$

由于式 (7-42) 中  $\hat{N}$  是整数值，因而这一最小化问题也不存在解析解。它只能用整周模糊度搜索技术来求解 (Frei 等, 1990; Euler 等, 1992; Teunissen, 1994)。

在以上讨论中，估值  $\tilde{N}$  及其协方差阵  $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}$  的估计仅利用了一个历元的观测数据，因而是一个局部解。当采集多个历元的观测数据时，可用多个历元的观测数据来求解  $\tilde{N}$  及  $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}$ ，其模型为

$$Y_i = A_i X_i + B_i N + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \cdots k \quad (7-43)$$

及

$$N = \hat{N} \quad (7-44)$$

其中  $N \in R^n$   $\hat{N} \in Z^n$   $Y_i \in R^m$

若假设各历元观测数据不相关, 与单历元求解类似, 整周模糊的求解也可分两步进行。第一步, 模糊度参数  $N$  及未知数  $X$  的实数估值由以下最小二乘准则估计

$$\Omega'_{k/k} = \sum_{i=1}^K \{(Y_i - A_i \tilde{X}_i - B_i \tilde{N})^T Q_{yy}^{-1}(i) (Y_i - A_i \tilde{X}_i - B_i N)\} = \min \quad (7-45)$$

其中  $N \in R^n$   $Y_i \in R^m$

以上最小化问题可以用序贯最小乘平差的方法求解

第二步, 根据第一步求得的模糊度实数估值  $\tilde{N}$ , 模糊度参数的整数全局解由求解以下最小化问题得到

$$\Omega''_{k/k} = (\tilde{N} - \hat{N})^T Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1}(k/k) (\tilde{N} - \hat{N}) = \min \quad (7-46)$$

其中  $\tilde{N} \in Z^n$

与单历元求解类似, 最小化问题 (7-47) 也只能由搜索的方法求解。式 (7-46) 与式 (7-42) 的区别在于式 (7-46) 中用到的模糊度浮点估计  $\tilde{N}$  及其协方差阵  $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}(k/k)$  是基于所有可用历元的观测数据, 而式 (7-44) 仅用到单历元的观测数据。

$$\text{残差平方和为 } \Omega_{k/k} = \Omega'_{k/k} + \Omega''_{k/k} \quad (7-47)$$

以上即是模糊度协方差法的基本思想, 正确整周模糊度的搜索过程实质上是使式 (7-46) 或式 (7-42) 最小化的过程。

在这一类 OTF 方法中, Frei 和 Beutler(1990)提出的用于快速静态定位整周模糊度解算的“RARF”(Fast Ambiguity Resolution Approach)被认为是最早的模糊度协方差方法, 其后又出现了一些可用于动态定位的模糊度协方差方法, 这些方法在搜索空间的定义以及加快搜索计算速度方面都取得了较大的成功。其中比较著名的方法有: 优化 Cholesky 分解算法 (Euler 等, 1992; Hatch 等, 1994), FASA (Fast Ambiguity Search Filter)方法 (Chen 等, 1994), LAMBDA (Least square AMBIGUITY Decorrelation Adjustment) 方法 (Teunissen, 1995)。其它的方法还有: 直接整周模糊搜索 DIAS (Direct Integer Ambiguity Search) 方法 (Wei 等, 1995) 以及基因法 (Li, 1995) 等。

各种模糊度协方差方法的优点在于它们都以“近似最优”的方式应用所有的观测信息, 因而往往只需要最少的搜索历元来确定正确的整周模糊度 (Hatch 等, 1994)。另外由于初始整周模糊度的实数估计及其协方差阵采用序贯最小二乘法或卡尔曼滤波解求 (Ealer 等, 1992a, 1992b; Hatch 等, 1994; Wei 等 1995), 且每一历元均对搜索空间中所有的模糊度组



合进行检验,因而不会因极个别历元的个别卫星载波相位观测值噪声稍大而拒绝正确的模糊度组,当然这一类方法也有其缺点,即当模糊度搜索失败时,难以确定导致失败的原因。例如,由于伪距和载波相位观测量的统计特性是先验给定的,如果伪距测量的噪声比正常噪声大得多,模糊度搜索则有可能失败。而且由于在解算过程中所有的伪距、载波相位观测值是混合在一起共同求解,因而难于确定导致搜索失败的具体原因,除此之外,模糊度协方差法可认为是最佳的 OTF 方法,至少对于短距离的应用 (Hatch 等, 1994)。

### §7.3 模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法

模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法步骤为:

(一) 正确整周模糊度的搜索

正确整周模糊度的搜索可分为三个步骤:

1) 确定双差模糊度初值及搜索空间

每历元按 (7-46) 式计算, 可得到相应的模糊度参数的浮点估值亦即模糊度初值  $\tilde{N} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n)^T$  及其相应的协方差阵  $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}$ 。

搜索空间中每个双差模糊度的搜索范围按如下方式定义:

搜索范围为:

$$|\hat{n}_i - \tilde{n}_i| \leq \max(d, 3\sqrt{q_{ii}}) \quad (7-48)$$

式 (5-48) 中,  $d$  为一给定的正整数,  $q_{ii}$  为该模糊度的方差,  $(n_i)_k$  为待检测的整周模糊度向量  $N_k$  (即从搜索空间中选取的一组整周模糊度参数组) 中第  $i$  个元素的数值。上式定义的单边搜索范围为一个给定正整数和该模糊度 3 倍标准差的最大值。

定义适当搜索范围有两个目的, 一是不致于因搜索范围过大而浪费搜索时间, 二是不致因搜索范围过小, 而使正确模糊度落在搜索范围之外。按式 (7-48) 定义搜索范围, 一方面在  $q_{ii}$  较大时 ( $3\sqrt{q_{ii}} > d$ ) 以 3 倍标准差为标准, 使搜索范围不致于过大, 另一方面在  $q_{ii}$  较小时 ( $3\sqrt{q_{ii}} < d$ ) 以固定正整数  $d$  为标准, 使搜索范围不致于过小, 而失去正确整周模糊度, 实用中, 可取  $d=1$ , 即搜索范围不小于  $\pm 1$  周。这样定义搜索空间完全是由出于实用的考虑, 虽然从某种意义上讲, 它所定义的搜索范围有时会偏大, 但良好的搜索方法可以弥补这一不足。

2) 优化 Cholesky 分解整周模糊度搜索

根据模糊度协方差法的思想, 搜索正确整周模糊度的过程搜索如下二次型的最小化表示

$$\Omega_{k/k}'' = (\hat{N} - \tilde{N})^T Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1} (\hat{N} - \tilde{N}) \quad \hat{N} \in Z^n \quad (7-49)$$

式中  $\hat{N}$  为从搜索空间中选取的一组模糊度参数组,  $n$  为模糊度参数的数目;  $Z^n$  为  $n$  维整数空间。

对每组模糊度参数进行式 (7-49) 的二次型计算是十分费时的。若定义每个模糊度参数的搜索范围为  $\pm 10$  周, 对于同步观测 6 颗卫星, 则需检核  $21^5=4084101$  个不同的模糊度组, 由式 (7-49) 计算往往需要花费数秒的 CPU 时间 (Euler 等, 1992a), 这样长的计算时间显

然无法用于实时动态定位, 即使对于后处理也是难以忍受的。为了提高计算效率, Euler 和 Landu (1992) 提出了优化 Cholesky 分解算法。

将正定对称阵  $Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1}$  进行 Cholesky 分解, 即:

$$Q_{\tilde{N}\tilde{N}}^{-1} = L \cdot L^T \quad (7-50)$$

式中  $L$  为一个  $n \times n$  维的下三角矩阵,  $n$  为模糊度参数的个数。Cholesky 分解在一历元解算中只需进行一次。

并将式 (7-49) 表示为

$$\begin{aligned} \Omega''_{k/k} &= (\hat{N} - \tilde{N})^T L \cdot L^T (\hat{N} - \tilde{N}) \\ &= [(\hat{N} - \tilde{N})^T L] \cdot [(\hat{N} - \tilde{N})^T L]^T \end{aligned} \quad (7-51)$$

$$\text{令} \quad f^T = [(\hat{X}_N - N_k)^T L] \quad (7-52)$$

则

$$\Omega''_{k/k} = f^T f \quad (7-53)$$

或

$$\Omega''_{k/k} = \sum_{i=1}^n f^2 \quad (7-54)$$

将  $f^T$  表示为为分量形式, 即

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 - \tilde{n}_1 \\ \hat{n}_2 - \tilde{n}_2 \\ \hat{n}_3 - \tilde{n}_3 \\ \vdots \\ \hat{n}_n - \tilde{n}_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & l_{3n} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (7-55)$$

由于矩阵  $L$  的下三角特性,  $f$  分量的计算可以从最后一个元素  $f_n$  开始, 即

$$f_n = (\hat{n}_n - \tilde{n}_n) l_{nn} \quad (7-56a)$$

$$f_{n-1} = (\hat{n}_n - \tilde{n}_n) l_{n-1,n} + (\hat{n}_{n-1} - \tilde{n}_{n-1}) l_{n-1,n-1} \quad (7-56b)$$

.....

$$f_1 = (\hat{n}_n - \tilde{n}_n) l_{1,n} + (\hat{n}_{n-1} - \tilde{n}_{n-1}) l_{1,n-1} + \cdots + (\hat{n}_1 - \tilde{n}_1) l_{11} \quad (7-56c)$$

计算量由  $f_n \rightarrow f_1$  递增。由于  $f_i^2$  总大于零或等于零, 在计算中, 式 (7-56) 和式 (7-54) 可以交替计算, 当某一检测模糊度组的  $f$  部分分量平方和已大于某一限值 (可选为前面已经

计算的 $\Omega_{k/k}''$ 的次小值), 则该模糊度组将被拒绝而不用计算 $f$ 的剩余分量及其平方和, 从而大大减少计算量。

一历元的模糊度的搜索顺序应从搜索范围的中间开始向两边进行。这是因为越靠近搜索空间中心的模糊度组为正确模糊度的可能性越大, 其 $\Omega_{k/k}''$ 数值一般较搜索空间边缘的要小, 从而在上述搜索计算过程中可以进一步减少计算量, 搜索过程中, 只需保留已搜索过的模糊度组中 $\Omega_{k/k}''$ 为最小及次小的模糊度数值及其相应的 $\Omega_{k/k}''$ 数值。

### 3) 正确整周模糊度的检验

从原理上讲, 在一历元内搜索空间中所有的模糊度进行了第2)步计算后, 对应 $\Omega_{k/k}''$ 最小的模糊度组即应是正确模糊度组。然而由于量测误差以及未能消除的残余系统误差的存在。 $\Omega_{k/k}''$ 最小的模糊度可能并不是正确的模糊度, 为此, 在 OTF 中引入了两种检验。

#### ① RATIO 检验

#### ② OVT 检验

RATIO 检验是从静态定位中引入的, 在许多 OTF 方法中也得到了广泛的应用 (Chen 等, 1994; Wei 等, 1995; Abidin, 1993; Hansen 等, 1995; Lachapelle 等, 1993; Euler 等, 1992)。RATIO 值定义为

$$RATIO = \frac{(\Omega_{k/k})_{\text{sec}}}{(\Omega_{k/k})_{\text{min}}} \quad (7-57)$$

$$R = V^T P_k^{-1} V + R_k \quad (7-58)$$

式中 $V^T P_k^{-1} V$ 为模糊度参数估计为实数时的双差载波相位残差平方和。 $\Omega_{k/k}$ 由式(7-51)、(7-53)或(7-54)计算,  $\Omega_{k/k}$ 是模糊度固定为整周时的残差平方和。RATIO 则是次小残差平方和 $(\Omega_{k/k})_{\text{sec}}$ 与最小残差平方和 $(\Omega_{k/k})_{\text{min}}$ 的比值。

当 RATIO 值大于某一限值时 (一般取为常值, 通常取值为 1.5, 2, 3), 则认为残差平方和 $\Omega_{k/k}$ 最小的模糊度组是正确模糊度组。

研究中发现, 仅用单历元的 RATIO 检验来确定正确模糊度组有时不可靠, 尤其是在卫星图形较差或观测值噪声较大时。然而, 随观测历元的增加, 通过 RATIO 检验的不正确模糊度组逐渐被正确模糊度组所取代。此时, 进一步引入 OVT (Overall Validation Test) 检验。OVT 检验是 Wei (1995) 提出的, 它所检验的是 RATIO 检验能否在一段持续的检验时间大于限值, 且 $(\Omega_{k/k})_{\text{min}}$ 的模糊度组为同一模糊度组。OVT 检验极大地提高了 OTF 的可靠性。

同以往的 OTF 方法相比, 本文提出的网络 RTK 模糊度 OTF 方法有以下特点:

- 提供了更为实用的搜索空间, 以保证不致因搜索空间过大而浪费搜索的 CPU 时间, 不致于过小而漏掉正确的模糊度组。
- 每历元均对模糊度搜索空间中所有模糊度组进行搜索, 不致因个别历元某些观测值噪声稍大而过早地排除正确模糊度组。
- 采用优化 Cholesky 分解算法进行模糊度搜索, 可极大地提高搜索效率, 节约搜索时间见表 7-1。
- 在 RATIO 检验基础上, 采用 OVT 检验能够提高了 OTF 的可靠性。

模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法流程如图 7-3。

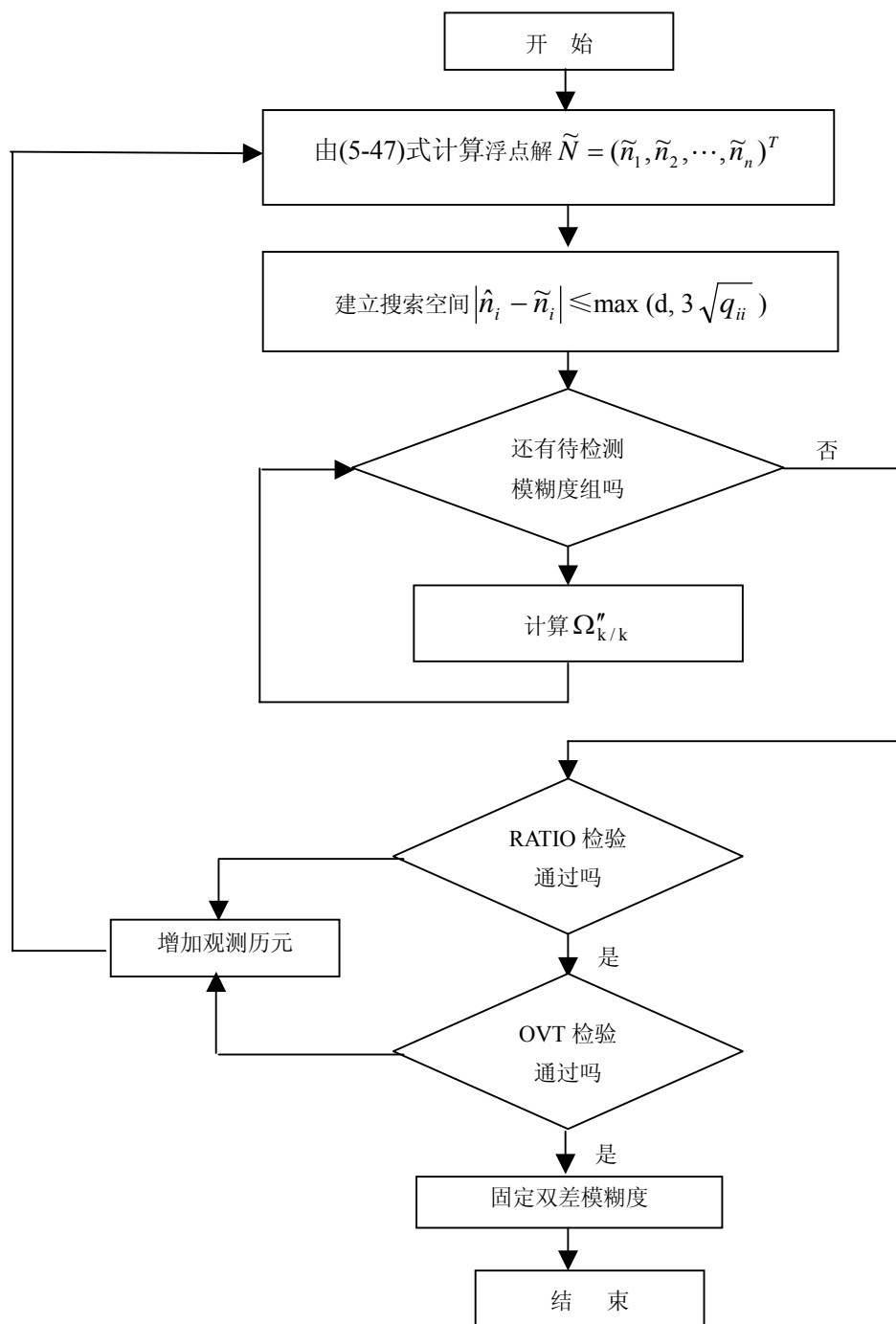


图 7-3 模糊度协方差法的 OTF 算法框图

表 7-1 不同搜索方法的搜索时间比较 (陈小明, 1997)

搜索范围	模糊度组合数	搜索所用 CPU 时间 (奔腾 60 微机)		
		不分解	Cholesky 分解	优化 Cholesky 分解
±5 周	1771561	147.5 秒	60.97 秒	0.035 秒
±10 周	85766121	1.98 小时	0.82 小时	0.18 秒
±20 周	4.75e <sup>9</sup>	4.58 天	1.89 天	0.54 秒

本文给出的模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法可用于网络 RTK 内插法和线性组合法的整周模糊度 OTF 解算。该法首先以实数参数估算出模糊度和模糊度协方差, 然后, 经过整数最小二乘估计处理并在整周模糊度搜索过程中采用优化 Cholesky 矩阵分解算法以确定整周模糊度, 在选取模糊度搜索空间大小时, 选择更为合乎实用的参数, 以及保证 OTF 解算正确性的 RATIO 检验和 OVT 检验。由于优化 Cholesky 矩阵分解算法可以大大缩短整周模糊度搜索的时间, 这使得模糊度协方差方法 OTF 解算近于实时。

## §7.4 网络 RTK 流动站的单历元整周模糊度搜索法

采用模糊度协方差方法 OTF 解算的优化 Cholesky 分解算法, 仅用单历元的 RATIO 检验来确定正确模糊度组有时不可靠, 尤其是在卫星图形较差或观测值噪声较大时。为了提高确定正确模糊度组的可靠性, 必然增加观测历元。另一方面, 该方法解算比较繁琐, 这是该方法的缺点。

实际上, 根据网络 RTK 的特点, 基于内插法和线性组合法的整周模糊度 OTF 解算方法还可以简化 (高星伟, 2002)。

由于采用内插法和线性组合法都能很好地消除轨道误差和电离层延迟误差, 对流层延迟误差也能得到大幅度削弱, 所以可以采用更简便的方法来确定流动站的整周模糊度。即所谓的“网络 RTK 流动站的单历元整周模糊度搜索法”, 它是由高星伟<sup>[4]</sup>提出的。

在方程组 (2-20) 中, 即使流动站的各种误差得到了很好地消除, 但由于方程组仍含有 3 个坐标量和双差整周模糊度等未知数, 观测方程组仍是秩亏的, 无法解算。网络 RTK 流动站的单历元整周模糊度搜索法的主要思想为: 不解方程组 (2-20) 式, 直接利用模糊度为整数和双频模糊度之间存在线性关系进行搜索, 但有一个前提条件, 就是与频率有关的误差, 主要是电离层延迟必须很好地消除, 除只含有与频率无关的误差。与传统方法相比, 该方法的主要优点有: 整周模糊度备选值个数很少, 并且各颗双差卫星的整周模糊度可以单独地进行搜索。因为是单历元模糊度搜索, 所以不受周跳的影响, 并且它还可以在差分改正后双差观测值中仍有较大的残差, 或坐标初值精度不是很高的情况下正常解算。

由第四章知, 网络 RTK 内插法的原理是通过多个基准站的已知误差来直接内插该区域内任何一处流动站的混合误差。即当正确确定了基准站的整周模糊度后, 就可按 (4-2) 式计算出基准站的  $\Delta \nabla R_{AB}^{\ddot{u}}$  和  $\Delta \nabla R_{AC}^{\ddot{u}}$ , 将这些值代入 (4-9) 式可求得流动站的差分改正  $\Delta \nabla R_{Au}^{\ddot{u}}$ 。

最后组成双差观测值方程为

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \phi'_{Au} - \Delta \nabla R_{Au} = \Delta \nabla \rho'_{Au} - \lambda \cdot \Delta \nabla N'_{Au} \quad (7-59)$$

上式左边即为改正后的双差观测值  $\Delta \nabla \phi_{Au}$ ，它由直接双差观测值为  $\Delta \nabla \phi'_{Au}$  和  $\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$  组成是已知值，右边流动站的坐标隐含在  $\Delta \nabla \rho_{Au}$  中， $\Delta \nabla N_{Au}$  为流动站载波相位的整周模糊度，是未知的。

下面以上述内插法为例，说明流动站单历元整周模糊度搜索法的原理。

### (1) 计算差分改正数 $\Delta \nabla R$

$$\text{由(4-10)式得 } \Delta \nabla R_{Au}^{ij} = \begin{pmatrix} X_u - X_A & Y_u - Y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \nabla R_{AB}^{ij} \\ \Delta \nabla R_{AC}^{ij} \end{pmatrix}$$

经差分改正后流动站与基准站 A 基线的 L1 和 L2 的双差观测方程分别为：

$$\lambda_1 \cdot \Delta \nabla \phi'_{Au,1} - \Delta \nabla R_{Au} = \Delta \nabla \rho'_{Au} - \lambda_1 \cdot \Delta \nabla N'_{Au,1} + \Delta \nabla \varepsilon_{Au,1}^\phi \quad (7-60)$$

$$\lambda_2 \cdot \Delta \nabla \phi'_{Au,2} - \Delta \nabla R_{Au} = \Delta \nabla \rho'_{Au} - \lambda_2 \cdot \Delta \nabla N'_{Au,2} + \Delta \nabla \varepsilon_{Au,2}^\phi \quad (7-61)$$

### (2) 求整周模糊度备选值

忽略式 (7-60) 和 (7-61) 中的观测噪声，则有

$$\Delta \nabla N_{Au,1} = \frac{1}{\lambda_1} \Delta \nabla \rho'_{Au} - \Delta \nabla \phi'_{Au,1} + \frac{1}{\lambda_1} \Delta \nabla R_{Au} \quad (7-62)$$

$$\Delta \nabla N_{Au,2} = \frac{1}{\lambda_2} \Delta \nabla \rho'_{Au} - \Delta \nabla \phi'_{Au,2} + \frac{1}{\lambda_2} \Delta \nabla R_{Au} \quad (7-63)$$

### (3) 确定整周模糊度备选值

由于采用网络 RTK 技术，理论上可以很好地消除流动站双差观测值的电离层影响（第三章）。

由 (7-62)、(7-63) 两式可得

$$\nabla \Delta N_{Au,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \nabla \Delta N_{Au,1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \nabla \Delta \phi_{Au,1} - \Delta \nabla \phi_{Au,2} \quad (7-64)$$

或

$$\nabla \Delta N_{Au,1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \nabla \Delta N_{Au,2} - \nabla \Delta \phi_{Au,1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \nabla \Delta \phi_{Au,2} \quad (7-65)$$

记

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{斜率: } k_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{77}{60} \\ \text{斜距: } b_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \nabla \Delta \phi_{Au,1} - \nabla \Delta \phi_{Au,2} \end{array} \right. \quad \text{和} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{斜率: } k_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{60}{77} \\ \text{斜距: } b_2 = -\nabla \Delta \phi_{Au,1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \nabla \Delta \phi_{Au,2} \end{array} \right. \quad (7-66)$$

可得直线方程:

$$\Delta \nabla N_2 = k_1 \cdot \Delta \nabla N_1 + b_1 \text{ 或 } \Delta \nabla N_1 = k_2 \cdot \Delta \nabla N_2 + b_2 \quad (7-67)$$

方程 (7-67) 给出了流动站 L1 和 L2 整周模糊度的关系式, 对于任一给定的  $\Delta \nabla N_1 (\Delta \nabla N_1 \in Z)$ , 有唯一的  $\Delta \nabla N_2$  与之对应。从方程(7-67)的示意图 (图 7-4) 可以更直观地看出: 直线  $\Delta \nabla N_2 = k_1 \cdot \Delta \nabla N_1 + b_1$  与  $\Delta \nabla N_1, \Delta \nabla N_2 \in Z$  的交点便是 L1 和 L2 整周模糊度的备选值。由于斜率  $k_1=77/60$ , 所以在理论上, L1 和 L2 整周模糊度的备选值有无穷多对, 并且具有周期性, 即 L1 ( $\lambda_1 = 19.03\text{cm}$ ) 的整周模糊度每变化 77 周, L2 ( $\lambda_2 = 24.24\text{cm}$ ) 的整周模糊度变化 60 周。假设  $\Delta \nabla N_1 = Z_1, \Delta \nabla N_2 = Z_2$  为其中一对备选值, 则  $\Delta \nabla N_1 = Z_1 + 77, \Delta \nabla N_2 = Z_2 + 60$

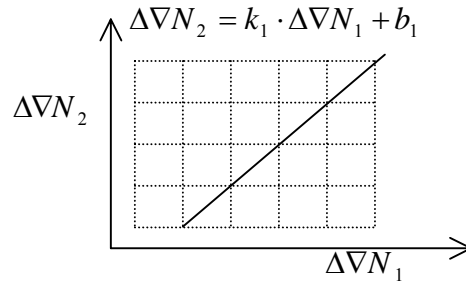


图 7-4 基准站单历元双差模糊度搜索示

( $Z_1, Z_2 \in Z$ ) 为下一组备选值。但实际应用中, 由于与频率有关的误差的残余误差的影响和相位测量精度的限制, 完全符合方程(7-68)的 L1 和 L2 整周模糊度的备选值是找不到的。例如, 假设  $\Delta \nabla N_1 = Z_1, \Delta \nabla N_2 = Z_2 (Z_1, Z_2 \in Z)$  为其中一对备选值, 而  $\Delta \nabla N_1 = Z_1 + 9, \Delta \nabla N_2 = Z_2 + 7$  也可能为其备选值。因为  $9/7 \approx 1.2857$  与斜率  $k_1=77/60 \approx 1.2833$  相差很小, 在目前的情况下, 是无法将这些多余备选值排队的。但是, 这并不影响该模糊度搜索法的使用。因为在实际使用中, 没有必要根据方程 (7-67) 找出所有的无穷多个模糊度备选值, 因为有的整数对虽然近似满足方程 (7-67), 但其根本不可能是 L1 和 L2 的整周模糊度。原因在于流动站坐标初值误差和改正后的流动站双差综合残差对双差观测方程的影响 (其中绝大多数是由前者引起的) 并不是无限大的。例如, P 码的测距噪声为  $10 \sim 30\text{cm}^{[60]}$ , 按误差传播定律可得, 双差组合后 P 码的测距噪声为  $20 \sim 60\text{cm}$ , 当假设流动站的差分改正误差最大为  $10\text{cm}^{[13]}$ , 总共对于 L1 观测的影响不超过 4 周 (高星伟, 2002), 则可由公式(7-68)计算出一个双差模糊度的初值  $\Delta \nabla N_1$

$$\Delta \nabla N_1 = \nabla \Delta \phi_{Au,1} - \nabla \Delta P_{Au} / \lambda_1 \quad (7-68)$$

式中,  $\nabla \Delta P$  表示经差分改正过的双差伪距 P 码。搜索时, 只需找出位于该初值  $\Delta \nabla N_1$  左右 4 周范围内的模糊度备选值和分别与之相对应的 L2 模糊度备选值即可。

#### (4) 确定正确整周模糊度

在理论上, 该方法不存在模糊度的确定问题, 因为对于 L1 载波来说, 整周模糊度备选值的重复周期为 77, 即在模糊度初值的左右 38.5 周范围内只有一个整周模糊度备选值, 又因为由公式(7-67)所计算的双差整周模糊度初值的精度远优于 38.5 周, 也就是说, 经过网络 RTK

差分改正后的双差 P 码精度远优于 7.3 米, 因此所求的双差模糊度备选值应是唯一的。即便在实际应用中, 考虑到与频率有关的误差的残余影响和相位测量精度等因素的影响, 假设 L1 载波的整周模糊度备选值的重复周期缩小为 9 周。如上所述, 使用改正的双差 P 码伪距所计算出的双差模糊度初值的误差不超过 4 周, 只要不超过  $\pm 4.5$  周, 都可以唯一确定出双差整周模糊度。另外, 由于网络 RTK 综合误差内插法可以很好地消除流动站的双差综合误差, 也就是说, 方程 (7-63) 和 (7-64) 中只剩下坐标参数和双差整周模糊度, 因此, 当坐标初始值具有一定精度时, 使用直接取整的方法也可以确定最终的双差整周模糊度。

假如作最坏的打算, 即由公式(7-68)所求出的双差模糊度初值的精度为  $\pm 20$  周, 约为  $\pm 4$  米的精度, 即每一颗(双差)卫星有 4 个模糊度备选值, 假如有 5 个双差观测方程, 所有的模糊度组合有  $4^5 = 1024$  种。有了这些模糊度备选值, 可以借鉴其它方法的模糊度确定标准, 如中长距离模糊度 OTF 算法, 将所有的模糊度组合作为已知值代回双差观测方程, 可得到相应点的坐标结果和残差向量  $V$ , 进一步可求出方差因子  $\hat{\sigma}_0^2$ :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{n - m} \quad (7-69)$$

$Q$  为双差观测值的协因数阵,  $n$  为双差载波相位观测方程数,  $m$  为未知数个数, 这里等于 3。采用 ratio 检验来判断出正确的模糊度:

$$\text{ratio} = \frac{\hat{\sigma}_{0\text{次小}}^2}{\sigma_{0\text{最小}}^2} \quad (7-70)$$

显然, ratio 值越大, 求解的整周模糊度越可靠。一般给 ratio 一个限值(一般为 3), 超过此限值的, 则认为  $\sigma_{0\text{最小}}^2$  所对应的模糊度参数为正确的模糊度。否则, 该历元模糊度搜索失败, 进行下一历元搜索。目前, 计算机对于 1024 种组合的搜索是轻而易举的事。但实际应用中, 每颗卫星取 2~3 个模糊度备选值就足够了, 也就是只有 243 或 16 种组合, 没必要取的更多。因为该方法所使用的双差模糊度备选值的选取与坐标参数的初值无关, 只与观测值本身有关, 从而避免了所有其它不必要因素的影响, 即使是对观测值有影响的因素, 如电离层延迟、对流层延迟, 轨道误差等, 在消除了与频率有关的误差之后, 如电离层误差, 其余与频率无关的误差, 如对流层延迟和轨道误差, 对方程 (7-67) 没有影响, 也就是说用上述方法选出的双差模糊度备选值具有很高的精度。

总结上述步骤如下:

- (1) 差分改正。利用网络 RTK 差分信号改正流动站的双差伪距和双差相位观测值。
- (2) 模糊度备选值的选取。使用公式 (7-68) 计算一个 L1 的双差模糊度初值, 然后在距离该初值一定范围内, 使用方程 (7-67) 搜索整周模糊度备选值。
- (3) 模糊度的确定。如伪距初值法, 当坐标初值具有一定精度时, 可用直接取整法, 或者使用其它常规整周模糊度判定方法。



## 第八章 实验数据及其分析

### §8.1 试验概况

为了验证本文数学模型的正确性和有效性,本文进行了模拟实验计算。严格地说,实验应在基准站网络中进行,但因我国至今还没有建立基准站间距离在50~100Km的基准站网络导航服务系统,虽然有深圳正在建立连续运行基准站网络服务系统,但该系统基准站之间的距离只有10km左右,不能满足50~100Km的中长距离的要求。按GPS网络RTK技术求解观测改正数的基本原理,本文实验设计思路是:首先依据某一地区已进行的高精度静态GPS观测网采集的数据,由平差处理得到该GPS观测网控制点的精确坐标,按网络RTK的要求,选取某些控制点作为基准站点,另一些点作为流动站点(其坐标精确已知)。然后以某一卫星作为参考卫星和某一控制点作为参考基准站,根据GPS观测数据和控制点精确坐标计算出每条已知基线的误差改正数,最后根据本文提出的网络RTK数学模型以内插法为例(因内插法和线性组合法可以相互转换),采取事后数据处理的办法内插计算出流动站的改正数,将内插计算结果代入双差误差方程求出坐标改正数,然后与根据基线的已知误差求出的坐标改正数进行比较,若两者结果相差较小,则说明本文的数学模型是正确的。尽管这个实验设计不是真正意义上的网络RTK实验,但它是严格按网络RTK的方法进行的,所以实验结果应是可信的。

本文数据来自2001年9月19号洞庭湖地区地形沉降监测的数据,由武汉大学测绘学院空间大地测量研究所提供。数据采样历元为30秒,24小时观测,接收机是可同时接收GPS卫星信号和GLONASS卫星信号的双系统兼容

JAVAD接收机。它有24个通道,能同时接收L1, L2, P1, P2等数据。

图8-1是本文所采用的四个测站组成的网形。图中共有四个监测点,分别为A、B、C和u。将A、B、C假设为基准站,u作为流动站,从图上可知,流动站u在A、B、C三个基准站所包围的区域内,流动站至三个基准站A、B、C的距离分别是28.7km、26.3km和23.0km。基准站之间的距离最长有51km,最短有38.9km。这些参数说明该模拟网基本满足网络RTK测量的技术要求。A、B、C、u四点的坐标是通过Bernse软件精确计算出,可作为已知点,

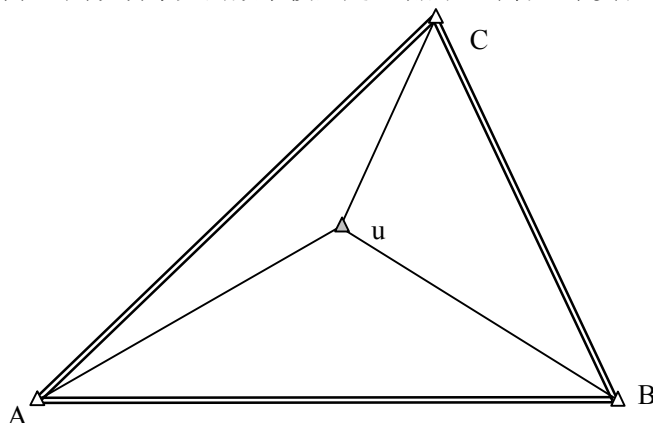


图 8-1 RTK 网形

结果列入表 8-1 和表 8-2。

表 8-1 测站点地心坐标 (WGS-84) 与距离

点号	坐 标			距离 (m)	
	X (m)	Y (m)	Z (m)	uA	
u	-2153062.8161	5100870.3800	3155802.0756	uB	28760.863
A	-2139121.1956	51 18128.9024	3137500.1178	uC	26252.851
B	-21 74216.5454	5101547.8878	3140269.1117	AB	23037.399
C	-21 57474.6007	5087566.3272	3174084.8493	AC	38913.764
				BC	51081.915
					40240.294

表 8-2 测站点高斯平面坐标与平面距离

点号	坐 标			距离 (m)	
	x (m)	y (m)	H (m)	uA	
u	3304785.30498	682118.06314	10.41618	uB	28771.2702
A	3283371.69819	662902.35509	54.96159	uC	26264.7605
B	3287216.37382	701641.64637	10.00178	AB	23047.2604
C	3326047.24925	691012.21495	8.66358	AC	38929.606
				BC	51101.535
					40259.4299

## §8.2 内插法实验计算

### 1. 基准站间的双差改正数 $\Delta \nabla R_{AB}^{ij}$ 和 $\Delta \nabla R_{AC}^{ij}$ 和基线 Au 的已知误差 $\Delta \nabla V_{Au}^{ij}$ 的计算

利用由卫星星历所给出的卫星在空间的位置及已知的基准站坐标, 由(4-2)式可求得基准站间的双差改正数  $\Delta \nabla R_{AB}^{ij}$  和  $\Delta \nabla R_{AC}^{ij}$ , 将其中的3个历元结果列入表8-3, 将  $\Delta \nabla R_{AB}^{ij}$  和  $\Delta \nabla R_{AC}^{ij}$  代入 (4-9) 式, 可求出每历元流动站的双差改正数  $\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$ , 将其中3个历元结果列入表8-4, 由(4-2)式可得到每历元流动站与参考基准站的精确  $\Delta \nabla V_{Au}^{ij}$  值, 结果列入表8-4中。

### 2. 基准站 A 和流动站 u 的内插改正数计算

将表 8-4 中第三栏的已知值与内插值之差代入由基准站 A 和流动站 u 所组成的双差误差观测值方程式表 8-7 中的  $l$  栏, 结果如表 8-8 所示。

### 3. 结果分析

将该内插计算结果代入双差误差方程求出基线 Au 的坐标改正数, 然后与基线的已知坐标改正数进行比较。按此方法采用精密星历和广播星历数据, 各共计算了 60 个历元, 其结果分别列入表 8-9 和 8-10 中。

表 8-3 与参考卫星 23 号、参考基准站 A 的基线已知误差 单位: (周)

$\Delta \nabla R_{AB}^{ij}$	卫星号	$\Delta \nabla R_{AC}^{ij}$	卫星号
2001 9 19 1 0 30.000			
-69.345675	26	-41.663132	26
26.914137	9	0.327270	6
-61.684433	6	9.367203	10
23.919245	18	-31.275241	24
31.326284	10	-49.477067	17
-125.295371	24	3.346760	18
-77.332544	17	-54.584281	9
-98.518718	15	-73.188202	15
2001 9 19 1 1 0.00000			
-69.563396	26	-41.285591	26
26.485669	9	0.673078	6
-60.993478	6	9.231752	10
24.370425	18	-31.317639	24
31.342552	10	-49.740813	17
-124.673049	24	3.164425	18
-77.622801	17	-55.241413	9
-98.392438	15	-73.608405	15
2001 9 19 1 1 30.00000			
-69.738483	26	-40.874213	26
26.101411	9	0.931939	6
-60.268454	6	9.048482	10
24.886193	18	-31.375225	24
31.421439	10	-49.986383	17
-124.052370	24	2.998918	18
-77.861385	17	-55.823710	9
-98.266669	15	-74.019516	15

求得各方向中误差:

(1) 精密星历误差

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[\Delta x \Delta x]}{n-1}} = \pm 0.0028m, \quad m_y = \pm \sqrt{\frac{[\Delta y \Delta y]}{n-1}} = \pm 0.0031m$$

$$m_z = \pm \sqrt{\frac{[\Delta z \Delta z]}{n-1}} = \pm 0.0014m, \quad m_p = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \pm 0.0044m$$

## (2) 广播星历误差

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[\Delta x \Delta x]}{n-1}} = \pm 0.0019m, \quad m_y = \pm \sqrt{\frac{[\Delta y \Delta y]}{n-1}} = \pm 0.0028m,$$

$$m_z = \pm \sqrt{\frac{[\Delta z \Delta z]}{n-1}} = \pm 0.0011m, \quad m_p = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \pm 0.0035m$$

广播星历与精密星历内插点位误差基本相等, 这说明由本文导出的内插法数学模型能够很好地模拟流动站与参考基准站间的测量误差, 模型是正确的。

表8-4 与参考卫星23号的基线Au已知误差改正数和内插误差改正数比较(精密星历) 单位:(周)

基线 Au 已知误差改正数	$\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$	已知值与内插值之差	卫星号
20019 19 1 0 30.000			
-27.578581	-30.1644	2.585778	26
36.086089	9.00303	27.08306	10
10.196593	-8.5471	18.74369	6
-36.615532	-32.9817	-3.63382	24
-36.753942	-35.1132	-1.6407	17
34.878432	5.013121	29.86531	18
-70.945067	-49.7	-21.2451	15
-29.605016	-22.8959	-6.70913	9
20019 19 1 1 0.000			
-27.258254	-30.0105	2.752197	26
35.844037	8.939083	26.90495	10
10.32403	-8.28045	18.60448	6
-36.693041	-32.9146	-3.77844	24
-37.061979	-35.2832	-1.77878	17
34.794717	4.987635	29.80708	18
-71.312615	-49.8877	-21.425	15
-30.041694	-23.2777	-6.76395	9
20019 19 1 1 30.000			
-26.884168	-29.834	2.94981	26
35.625543	8.860588	26.76496	10
10.477714	-8.0515	18.52922	6
-36.755018	-32.8552	-3.89986	24
-37.321916	-35.437	-1.88494	17
34.733423	4.979497	29.75393	18
-71.624119	-50.071	-21.5532	15
-30.416935	-23.6168	-6.80017	9

表8-5 与参考卫星23号的基线Au已知误差改正数和内插误差改正数比较（广播星历） 单位：（周）

基线 Au 已知误差改正数	$\Delta \nabla R_{Au}^{ij}$	已知值与内插值之差	卫星号
20019 19 1 0 30.000			
-41.5955	-30.1235	-11.472	26
0.363285	-8.52583	8.889114	6
9.417345	9.032505	0.38484	10
-31.2527	-32.9669	1.714179	24
-49.4439	-35.0914	-14.3525	17
3.417235	5.055855	-1.63862	18
-54.5255	-22.8606	-31.6648	9
-73.1367	-49.6694	-23.4673	15
20019 19 1 1 0.000			
-41.217957	-29.969599	-11.248358	26
0.708999	-8.25927	8.968269	6
9.281759	8.968504	0.313255	10
-31.295251	-32.899901	1.60465	24
-49.708772	-35.261959	-14.446813	17
3.234971	5.030426	-1.795455	18
-55.182831	-23.242486	-31.940345	9
-73.55693	-49.857055	-23.699875	15
20019 19 1 1 30.000			
-40.80708	-29.793372	-11.013708	26
0.968111	-8.030202	8.998313	6
9.098377	8.889954	0.208423	10
-31.352686	-32.840358	1.487672	24
-49.954505	-35.415829	-14.538676	17
3.0692	5.022178	-1.952978	18
-55.765808	-23.581836	-32.183972	9
-73.968533	-50.040599	-23.927934	15

表8-6 广播星历  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  与精密星历  $\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$  比较 单位: (周)

$\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$ 广播星历	$\Delta\nabla R_{Au}^{ij}$ 精密星历	两者之差	卫星号
20019 19 1 0 30.000			
-30.1235	-30.1644	0.040863	26
-22.8606	-22.8959	0.035275	9
-8.52583	-8.5471	0.021269	6
5.055855	5.013121	0.042734	18
9.032505	9.00303	0.029475	10
-32.9669	-32.9817	0.014828	24
-35.0914	-35.1132	0.021794	17
-49.6694	-49.7	0.030572	15
20019 19 1 1 0.000			
-29.969599	-30.010451	0.040852	26
-23.242486	-23.277745	0.035259	9
-8.25927	-8.280445	0.021175	6
5.030426	4.987635	0.042791	18
8.968504	8.939083	0.029421	10
-32.899901	-32.914605	0.014704	24
-35.261959	-35.283199	0.02124	17
-49.857055	-49.887652	0.030597	15
20019 19 1 1 30.000			
-29.793372	-29.833978	0.040606	26
-23.581836	-23.616764	0.034928	9
-8.030202	-8.051504	0.021302	6
5.022178	4.979497	0.042681	18
8.889954	8.860588	0.029366	10
-32.840358	-32.855155	0.014797	24
-35.415829	-35.436975	0.021146	17
-50.040599	-50.070957	0.030358	15

表 8-7 基准站 A 和流动站 u 所组成的双差误差观测值方程式 单位: (周)

历元: 2001/9/19/ 1/ 0/30						
a	b	c	$l$ (周)	$l'$ (周)	v (周)	卫星号
-0.68882	0.060984	-0.04836	17.899	-0.101	-27.578581	26
-1.18912	-0.5951	-0.25473	49.789	-0.211	36.086089	10
0.028679	0.398729	-0.87324	32.079	0.079	10.196593	6
-1.18748	-0.25726	-1.23846	-6.378	-0.378	-36.615532	24
-0.0351	-0.09303	0.068732	-42.033	-0.033	-36.753942	17
0.393029	-0.03787	-0.30651	4.072	0.072	34.878432	18
0.210194	-0.30162	0.024531	-109.926	0.074	-70.945067	15
-0.80462	0.172011	-1.32507	15.101	0.101	-29.605016	9

表 8-8 表 8-4 第三栏中的已知值与内插值之差所组成的双差误差观测值方程

2001/9/19/ 1/ 0/30				
a	b	c	$l$ (周)	卫星号
-0.68882	0.060984	-0.04836	2.585778	26
-1.18912	-0.5951	-0.25473	27.08306	10
0.028679	0.398729	-0.87324	18.74369	6
-1.18748	-0.25726	-1.23846	-3.63382	24
-0.0351	-0.09303	0.068732	-1.6407	17
0.393029	-0.03787	-0.30651	29.86531	18
0.210194	-0.30162	0.024531	-21.2451	15
-0.80462	0.172011	-1.32507	-6.70913	9

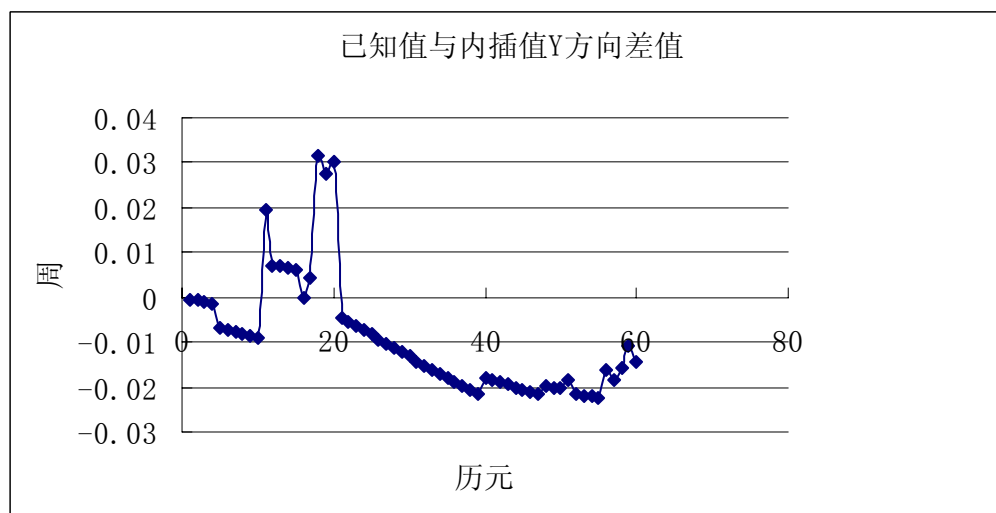
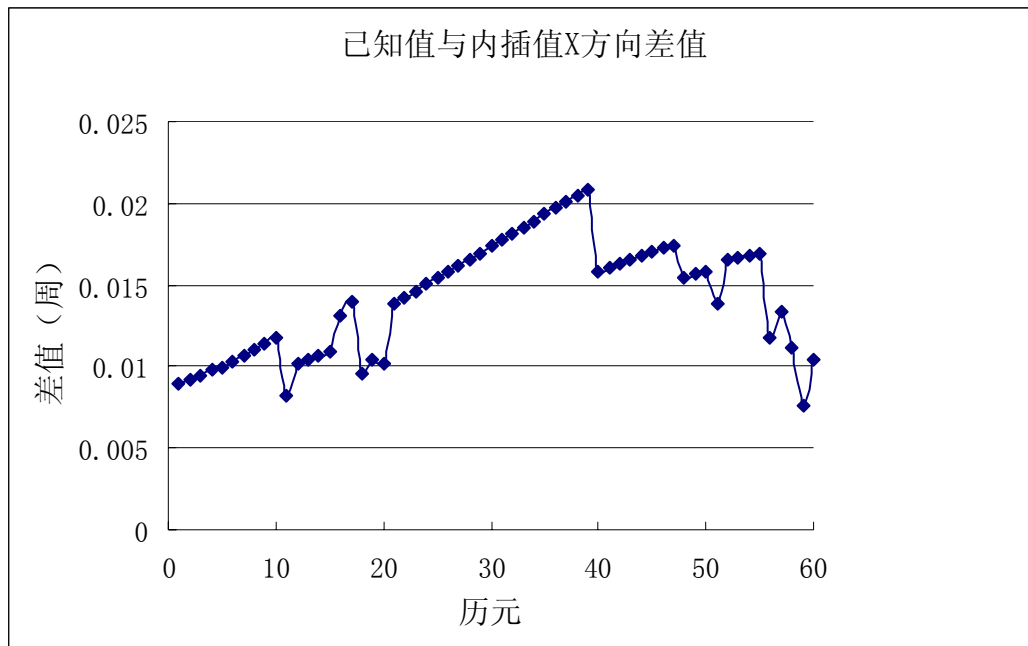
表8-9 基线Au已知坐标改正数与内插法的坐标改正数比较(精密星历)

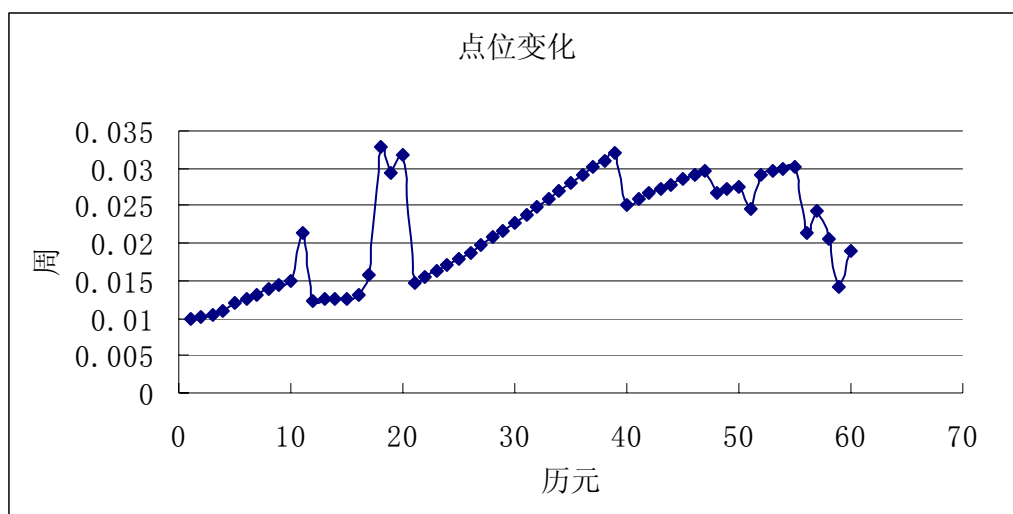
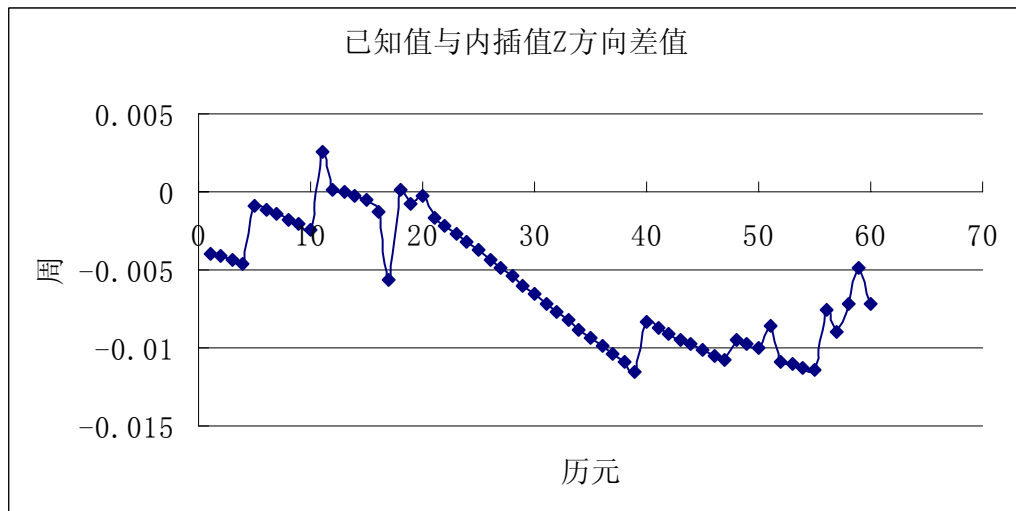
历元	Dx (周)	Dy (周)	Dz (周)	点位(m)	历元	Dx (周)	Dy (周)	Dz (周)	点位(m)
1	0.0089	-0.0004	-0.00392	0.0019	31	0.0177	-0.0142	-0.00712	0.0045
2	0.0092	-0.0008	-0.00412	0.0019	32	0.0181	-0.0152	-0.00770	0.0047
3	0.0095	-0.0012	-0.00434	0.0020	33	0.0185	-0.0162	-0.00826	0.0049
4	0.0098	-0.0015	-0.00455	0.0021	34	0.0189	-0.0171	-0.00882	0.0051
5	0.0099	-0.0067	-0.00084	0.0023	35	0.0193	-0.0181	-0.00937	0.0053
6	0.0103	-0.0071	-0.00114	0.0024	36	0.0197	-0.0190	-0.00990	0.0055
7	0.0107	-0.0076	-0.00145	0.0025	37	0.0201	-0.0199	-0.01044	0.0057
8	0.0110	-0.0081	-0.00176	0.0026	38	0.0204	-0.0208	-0.01096	0.0059
9	0.0114	-0.0086	-0.00208	0.0027	39	0.0208	-0.0217	-0.01148	0.0061
10	0.0118	-0.0090	-0.00239	0.0029	40	0.0158	-0.0178	-0.00838	0.0048
11	0.0082	0.0197	0.00256	0.0041	41	0.0161	-0.0184	-0.00876	0.0049
12	0.0101	0.0071	0.00015	0.0024	42	0.0163	-0.0190	-0.00912	0.0051
13	0.0104	0.0068	-0.00005	0.0024	43	0.0166	-0.0195	-0.00948	0.0052
14	0.0107	0.0065	-0.00026	0.0024	44	0.0168	-0.0200	-0.00981	0.0053
15	0.0110	0.0062	-0.00047	0.0024	45	0.0170	-0.0205	-0.01014	0.0054
16	0.0131	-0.0002	-0.00130	0.0025	46	0.0172	-0.0210	-0.01047	0.0055
17	0.0140	0.0044	-0.00558	0.0030	47	0.0174	-0.0215	-0.01077	0.0056
18	0.0096	0.0315	0.00014	0.0063	48	0.0155	-0.0196	-0.00946	0.0051
19	0.0105	0.0274	-0.00083	0.0056	49	0.0157	-0.0200	-0.00972	0.0052
20	0.0102	0.0302	-0.00028	0.0061	50	0.0158	-0.0203	-0.00996	0.0053
21	0.0139	-0.0045	-0.00161	0.0028	51	0.0139	-0.0183	-0.00862	0.0047
22	0.0143	-0.0055	-0.00214	0.0029	52	0.0165	-0.0215	-0.01087	0.0056
23	0.0146	-0.0064	-0.00267	0.0031	53	0.0166	-0.0218	-0.01106	0.0056
24	0.0150	-0.0074	-0.00322	0.0032	54	0.0168	-0.0220	-0.01128	0.0057
25	0.0154	-0.0083	-0.00376	0.0034	55	0.0169	-0.0222	-0.01144	0.0057
26	0.0158	-0.0093	-0.00431	0.0036	56	0.0117	-0.0162	-0.00753	0.0041
27	0.0162	-0.0103	-0.00487	0.0038	57	0.0134	-0.0182	-0.00893	0.0046
28	0.0166	-0.0113	-0.00544	0.0039	58	0.0112	-0.0156	-0.00721	0.0039
29	0.0170	-0.0122	-0.00600	0.0041	59	0.0076	-0.0110	-0.00491	0.0027
30	0.0174	-0.0132	-0.00656	0.0043	60	0.0104	-0.0144	-0.00713	0.0036



表8-10 基线Au已知改正数坐标与内插值坐标改正数比较(广播星历)

历元	Dx (周)	Dy (周)	Dz (周)	点位 (m)	历元	Dx (周)	Dy (周)	Dz (周)	点位 (m)
1	-0.004	-0.011	-0.007	0.0026	31	-0.015	0.010	0.007	0.0037
2	-0.004	-0.011	-0.007	0.0026	32	-0.015	0.011	0.007	0.0039
3	-0.004	-0.011	-0.007	0.0027	33	-0.016	0.012	0.008	0.0040
4	-0.004	-0.012	-0.007	0.0027	34	-0.016	0.012	0.008	0.0041
5	-0.006	-0.013	-0.002	0.0028	35	-0.016	0.013	0.009	0.0043
6	-0.006	-0.013	-0.002	0.0028	36	-0.016	0.014	0.009	0.0044
7	-0.006	-0.013	-0.002	0.0028	37	-0.011	0.009	0.006	0.0030
8	-0.006	-0.013	-0.002	0.0027	38	-0.011	0.010	0.006	0.0031
9	-0.006	-0.013	-0.002	0.0027	39	-0.011	0.010	0.007	0.0032
10	-0.006	-0.013	-0.002	0.0027	40	-0.012	0.011	0.007	0.0033
11	-0.002	-0.043	-0.007	0.0083	41	-0.012	0.011	0.007	0.0033
12	-0.003	-0.030	-0.005	0.0059	42	-0.012	0.011	0.007	0.0034
13	-0.003	-0.030	-0.005	0.0059	43	-0.012	0.012	0.008	0.0035
14	-0.003	-0.030	-0.005	0.0059	44	-0.012	0.012	0.008	0.0035
15	-0.003	-0.030	-0.005	0.0059	45	-0.010	0.010	0.007	0.0029
16	-0.002	-0.036	-0.005	0.0069	46	-0.010	0.010	0.007	0.0029
17	-0.001	-0.031	-0.009	0.0061	47	-0.010	0.010	0.007	0.0030
18	-0.011	0.001	0.000	0.0021	48	-0.008	0.008	0.005	0.0023
19	-0.011	0.001	0.001	0.0022	49	-0.010	0.011	0.008	0.0032
20	-0.012	0.002	0.001	0.0023	50	-0.010	0.011	0.008	0.0032
21	-0.012	0.003	0.002	0.0024	51	-0.010	0.011	0.008	0.0033
22	-0.012	0.003	0.002	0.0025	52	-0.010	0.011	0.008	0.0033
23	-0.013	0.004	0.003	0.0026	53	-0.005	0.004	0.004	0.0015
24	-0.013	0.005	0.003	0.0027	54	-0.007	0.006	0.005	0.0020
25	-0.013	0.006	0.004	0.0028	55	-0.004	0.003	0.004	0.0013
16	-0.014	0.006	0.004	0.0030	56	-0.001	0.003	0.000	0.0005
27	-0.014	0.007	0.005	0.0031	57	-0.003	0.001	0.004	0.0009
28	-0.014	0.008	0.005	0.0033	58	0.000	0.002	0.001	0.0005
29	-0.014	0.009	0.006	0.0034	59	-0.002	0.001	0.004	0.0008
30	-0.015	0.010	0.006	0.0036	60	-0.002	0.001	0.004	0.0008





### §8.3 网络 RTK 广播星历与精密星历定位结果试验计算

为了验证在网络 RTK 定位中,使用精密星历与使用广播星历进行定位,其定位结果的精度理论上两者应一致的结论,本文根据内插法数学模型,分别应用精密星历与广播星历进行了定位计算,结果列入表 8-11 中。

表 8-11 广播星历内插坐标与精密星历内插坐标结果比较

历元	$\Delta x$ (周)	$\Delta y$ (周)	$\Delta z$ (周)	历元	$\Delta x$ (周)	$\Delta y$ (周)	$\Delta z$ (周)
1	0	-0.000008	-0.000002	25	0.000003	-0.000008	-0.000004
2	0	-0.000006	-0.000002	26	0.000004	-0.000001	-0.000005
3	0.000001	-0.000007	-0.000003	27	0.000004	-0.000001	-0.000005
4	0	-0.000008	-0.000002	28	0.000004	-0.000011	-0.000005
5	-0.000003	-0.000003	0.000002	29	0.000004	-0.000011	-0.000006
6	-0.000003	-0.000004	0.000001	30	0.000005	-0.000012	-0.000005
7	-0.000002	-0.000004	0	31	0.000003	-0.000009	-0.000004
8	-0.000003	-0.000004	0.000001	32	0.000005	-0.000011	-0.000005
9	-0.000002	-0.000005	0	33	0.000005	-0.000012	-0.000005
10	-0.000003	-0.000005	0.000001	34	0.000006	-0.000013	-0.000006
11	0.000001	-0.000001	-0.000004	35	0.000006	-0.000014	-0.000006
12	0	-0.000009	-0.000003	36	0.000007	-0.000015	-0.000006
13	0	-0.000008	-0.000002	37	0.000006	-0.000014	-0.000006
14	-0.000001	-0.000008	-0.000002	38	0.000007	-0.000016	-0.000007
15	0	-0.000008	-0.000002	39	0.000007	-0.000016	-0.000007
16	0.000001	-0.000009	-0.000003	40	0.000006	-0.000015	-0.000005
17	0.000005	-0.000016	-0.000006	41	0.000007	-0.000016	-0.000007
18	0.000007	-0.000018	-0.000001	42	0.000008	-0.000016	-0.000007
19	0.000008	-0.000017	-0.000009	43	0.000008	-0.000016	-0.000007
20	0.000007	-0.000018	-0.000001	44	0.000009	-0.000017	-0.000007
21	0.000001	-0.000004	-0.000002	45	0.000009	-0.000017	-0.000007
22	0.000001	-0.000005	-0.000002	46	0.000009	-0.000017	-0.000007
23	0.000002	-0.000008	-0.000004	47	0.000009	-0.000017	-0.000007
24	0.000002	-0.000007	-0.000004	48	0.000009	-0.000018	-0.000007

续表 8-11 广播星历内插坐标与精密星历内插坐标结果比较

历元	$\Delta x$ (周)	$\Delta y$ (周)	$\Delta z$ (周)	历元	$\Delta x$ (周)	$\Delta y$ (周)	$\Delta z$ (周)
49	0.000002	-0.000007	-0.000004	55	0.000009	-0.000018	-0.000007
50	0.000003	-0.000008	-0.000004	56	0.00001	-0.000019	-0.000008
51	0.000002	-0.000008	-0.000004	57	0.000009	-0.000018	-0.000007
52	0.000003	-0.000009	-0.000005	58	0.00001	-0.000019	-0.000008
53	0.000002	-0.000006	-0.000003	59	0.000011	-0.00002	-0.000008
54	0.000002	-0.000008	-0.000004	60	0.000011	-0.000019	-0.000007

从上表 60 个历元计算结果看出, 用广播星历内插计算的坐标与用精密星历内插计算的坐标, 两者之差几乎为零。从而验证了采用广播星历与采用精密星历进行网络 RTK 定位结果精度应一致的结论。

## 结 束 语

GPS 网络 RTK 技术是最近几年在常规 RTK 技术的基础上发展起来的一项高精度的 GPS 定位技术。该定位技术的原理是利用多个基准站构成一个基准站网,然后借助广域差分 GPS 和具有多个基准站的局域差分 GPS 中的基本原理和方法来消除或削弱各种系统误差的影响,从而获得高精度的定位结果。与常规 RTK 相比,该方法的主要优点为覆盖面广,定位精度高,可靠性强,可实时提供厘米级定位,应用前景广阔,它已成为目前 GPS 界研究的热点。本文对当前 GPS 网络 RTK 的内插法、线性组合法和虚拟基准站法进行了较为系统的研究。主要研究内容和结论如下:

1. 讨论了 GPS 定位的测量误差,分析了卫星轨道误差、卫星钟差、电离层延迟、对流层延迟、接收机钟差、多路径效应及观测噪声对 GPS 定位结果的影响,并给出了计算这些误差的模型。

2. 深入地研究了网络 RTK 内插法的数学模型。该模型利用基准站坐标精确已知这一条件,将 GPS 载波相位站星双差观测模型中存在的卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响综合考虑,采用线性内插的方法估计出流动站的观测误差。根据网络 RTK 内插法的基本原理建立的数学模型具有公式简练、定位效果和精度高的优点。通过对线性组合法与内插法关系的讨论,可知内插法能够消除卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响,而且还能大幅度地削弱对流层延迟误差和多路径误差等系统误差对流动站的影响,从而达到了增加流动站与基准站之间的距离以及提高 RTK 定位精度的目的。本文还给出了采用内插法进行网络 RTK 定位的具体做法。

3. 较深入地研究了网络 RTK 线性组合法的数学模型。如果我们近似地认为卫星轨道误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和观测噪声等残差项的影响是呈线性变化的,那么利用基准站坐标精确已知这一条件,采用将基准站和流动站的观测值进行线性组合的方法也可以消除或削弱这几项误差对流动站的影响。本文详细讨论了卫星轨道误差、电离层延迟如何在线性组合中消除以及线性组合法数学模型建立的过程。该方法具有算法简练、定位效果和精度高的优点。给出了采用线性组合法进行网络 RTK 定位的具体做法。

4. 讨论了虚拟基准站法的基本原理以及消除或削弱流动站测量误差的方法,并从内插法和线性组合的法数学模型出发,较详细地推导了求虚拟基准站观测值的计算公式,初步建立了虚拟基准站法的数学模型,本文还给出了采用虚拟基准站法进行网络 RTK 定位的具体做法。从虚拟基准站法数学模型建立的过程中可以看出,虚拟基准站法同样能够消除残余的卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响,能够大幅度地削弱残余的对流层延迟误差和多路径误差对流动站的影响,从而提高了常规 RTK 流动站与基准站间的相关性和定位的精度。

5. 讨论了内插法、线性组合法及虚拟基准站法间的关系。得出了几点结论。(1) 线性组合法与平面内线性函数的内插法可以互相转换,由内插法和线性组合法的数学模型可以导出计算虚拟基准站法的虚拟基准站观测值的公式;(2) 平面内线性函数的内插法模型中是能够消除残余的卫星星历误差、电离层延迟误差对流动站的影响,同时能够大幅度地削弱残余

的对流层延迟误差和多路径误差对流动站的影响；(3)这三种网络 RTK 定位方法间在算法上并无本质的差别，其定位结果的理论精度应大体相当的结论；(4)应用这三种方法进行网络 RTK 定位，采用精密星历进行事后定位与采用广播星历进行实时动态定位，在理论上，两者的定位结果精度应相同。

6. 本文不仅讨论了常规的轨道误差，电离层延迟，对流层延迟，多路径效应等系统误差对 GPS 网络 RTK 定位结果的影响，还对内插法和线性组合法数学模型中的系数参数  $\alpha_i$  和流动站初始位置的精度对网络 RTK 定位结果的影响进行了讨论。通过讨论知，(1)流动点应位于基准站所包含的区域内，这样模拟的误差信息就比较理想，得到的结果也较好；(2)在一般情况下，网络 RTK 数据处理中心根据流动站传送来的单点定位结果计算出的内插误差改正数，能够满足厘米级定位精度要求，不需对流动站单点定位结果再进行迭代计算。

7. 对本文建立的数学模型和得出的结论的正确性进行了模拟实验计算。根据武汉大学测绘学院在某一地区所进行的 GPS 控制测量得到的 4 个 GPS 测量点的精确坐标，依据网络 RTK 定位原理进行实验设计，以内插法的数学模型为例，应用精密星历和广播星历 GPS 数据，采用事后数据处理方法计算出其中两个基准站与参考基准站的综合误差，然后通过采用本文推导出的数学模型内插出流动站与参考基准站的 GPS 测量误差，各计算了 60 个历元的结果。计算结果表明由内插法得到的基线 Au 坐标改正数与该基线的已知坐标改正数相差  $\pm 4\text{mm}$ ，这说明本文建立的内插法数学模型能够很好模拟流动站与参考基准站间的测量误差；而应用精密星历和广播星历进行网络 RTK 定位，两者定位结果相差几乎为零，这说明应用精密星历和广播星历进行网络 RTK 定位，两者定位结果精度一致的结论是正确的。

因受实验条件的限制，加之作者本人能力有限，本文存在许多不足之处，需要进一步地完成和完善，具体为：

- 虽然本文研究的是网络 RTK 的数学模型，但在整个网络 RTK 理论的深度和广度上还未形成一个系统的理论。例如，整个系统的完备性、可靠性监测以及数据传输和交换等方面；GPS 系统与 GLONASS 系统的集成等。
- 本文虽然对网络 RTK 的数学模型进行了理论分析研究，并进行了距离差分的模拟实验计算，但还缺少更多的实验验证，特别是缺少在真实的网络 RTK 系统中的验证。
- 对本文的理论实现程序化、软件化和商品化，还有待于进一步的研究。

## 致 谢

本文是在导师李紫金教授和李征航教授的悉心指导下完成的。作者攻读博士学位期间得到了两位恩师的亲切关怀、热忱鼓励和精心指导。两位恩师以他们渊博的学识和严谨的学风教诲学生,为本文确定了准确的研究方向,对论文的各个方面都给予了精辟的指点。特别是恩师李征航教授自始至终为本论文的研究给予了精心的指导和无私的帮助,他为作者提供了大量的参考资料,倾注了大量的心血,花费了大量的宝贵时间。由于两位导师的关心和精心指导,本文才得以顺利完成。在此学生向两位恩师表示最诚挚的谢意。

衷心地感谢武汉大学的徐绍铨教授、张小红博士和朱世勤博士等在论文计算过程中给予的多方面帮助。

在攻读博士学位期间,教研室全体老师给予了多方面的指教和帮助,在此表示衷心地感谢。

最后,感谢我的家人,特别是我亲爱的妻子刘惠华对我学习、工作的大力支持。



## 参 考 文 献

- [1]. 陈俊勇, 李京伟. 走向21世纪的测绘技术创新, 中国测绘2000 (2): 4~7
- [2]. 陈小明: 高精度GPS动态定位的理论与实践(博士论文), 武汉测绘科技大学, 1997
- [3]. 高星伟: GPS/GLONASS网络RTK的算法研究与程序实现(博士论文), 武汉大学, 2002
- [4]. 高精度多功能城市GPS参考站网将在香港建成. 测绘通报, 1999 (5): 36
- [5]. 葛茂荣: GPS卫星精密定轨理论及软件研究(博士论文), 武汉测绘科技大学, 1995.
- [6]. 何良华: 网络RTK研究(硕士论文), 2002-12-21
- [7]. 李征航, 何良华, 吴北平: 全球定位系统(GPS)技术的最新进展(第二讲)网络RTK. 测绘信息与工程. 2002.27(2): 22~25.
- [8]. 刘经南, 等: 广域差分 GPS原理和方法, 测绘出版社, 1999.
- [9]. 刘经南, 刘跃雄: GPS卫星定位技术进展, 2000 (2), PP. 17.
- [10]. 谢世杰, 论GPS测量的多路径误差, GPS技术应用论文集, 1995. 9, 北京, PP189~193
- [11]. 徐绍铨, 等: GPS全球定位系统及其应用, 武汉测绘科技大学出版社, 2001.
- [12]. 叶世榕: GPS非差相位单点定位理论与实现(博士论文), 武汉大学, 2002
- [13]. 王爱朝: GPS动态定位的理论研究——模糊度在线解算的综合法(博士论文), 武汉测绘科技大学, 1995
- [14]. 吴北平, 岳迎春等: 论城市 GPS 网络导航服务系统的建设, 科技进步与对策, 2002 (3), PP132~134
- [15]. 魏子卿等, 广域差分 GPS, 测绘通报, 2000 (6): 42
- [16]. 周忠谟, 等: GPS 卫星测量原理与应用(修订版), 测绘出版社, 1997 年
- [17]. **Abidin, H. A. (1993).** Computational and Geometrical Aspects of On-The-fly Ambiguity Resolution. PhD Dissertation Dept. of Surveying Eng. Tech. Rept. No.164, University of New Brunswick, Fredericton New Brunswick, Canada, 314pp.
- [18]. **Abidin. H.Z, D.E. Wells and A. Kleusberg (1992).** Some aspects of 'On the Fly' ambiguity resolution Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Columbus, Ohio, 17-20 March, Vol. 1, 660-669pp.
- [19]. **Abidin. H. A. and D. E. Wells (1990).** extrawidelaning for 'On The Fly' Ambiguity Resolution: Simulation of Ionospheric Effects. Proc. 2nd Int. Symp. on Precise Positioning with Global Positioning System Ottawa Canada 3-7 September, 1217-1232.
- [20]. **Axelrad, P., Comp, C. J. and MacDoreq P. F. (1994).** Use of Signal-to-Noise Ratio for Multipath Error Correction in GPS Differential Phase Measurements: Methodology and Experimental Results. Proc. ION GPS-94, 7th Int. Tech. Meeting of The Satellite Division of The U.S. Institute of Navigation, Salt Lake Cty, Utah 20-23 September, 655-666.
- [21]. **B-Hofmann.** GPS Theory and Practice, Third Edition, 1994, 41-42.
- [22]. **Brutler, G., I. Bauesima, S. Botton, W. Gurtner, m. Rothacher, and T. Schildknecht (1989).** Accuracy and biases in the geodetic application of the global positioning system. Manuscripta Geodaetica, Vol. 14, 28-35.
- [23]. **Blewitt. G. (1989 ).** Carrier Phase Ambiguity Resolution for the Global Positioning System Applied to Geodetic Baselines up to 2000 km. Journal of Geophysical Research, 94 (B8), 10187-10203.

- [24]. **Blewitt G. (1990)**. An Automatic Editing Algorithm for GPS Data. *Geophysical Research Letters*, 17 (3), 199-202.
- [25]. **Chen, D. (1993)**. Fast Ambiguity Search Filtering (FASF): A Novel Concept for GPS Ambiguity Resolution. Proc. ION GPS-93, 6th Int. Tech. Meeting of The Satellite Division of The U. S. Institute of Navigation, Salt Lake City, Utah, 22-24, September, 781-787.
- [26]. **Chen, D. and G. Lachapelle (1994)**. A Comparison of the FASF and Least-Squares Search Algorithms for Ambiguity Resolution Research On The Fly. Proc. Int. Symp. on Kinematic System in Geodesy, Geomatics and Navigation, Banff, Canada, 30 August -2 September, 241 - 253.
- [27]. **Chen, X- (1994)**. Analysis of Continuous GPS Data from the Western Canada Deformation Array. Proc. ION GPS-94, 7th Int. Tech. Meeting of The Satellite Division of The U.S. Institute of Navigation, Salt Lake City, Utah 20-23 September, 1339-1348.
- [28]. **Essen L, Froome KD (1951)**. The refractive indices and dielectric constants of air and its principal constituents at 24 000 Mc/s. In: *Proceedings of Physical Society*, Vol 64(B): 862-875.
- [29]. **Euler, H.-J. and H. Landau (1992)**. Fast GPS Ambiguity Resolution On The-Fly for Real-Time Applications. Proc. 6th Int. Geodetic Symp. Satellite Positioning, Columbus, Ohio, 17-20 March 1992, 650-659.
- [30]. **Frei, E. and G. Beutler (1990)**. Rapid Static Position Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach FARA: Theory and First Results. *Manuscripta Geodetica*, 15, 325-356.
- [31]. **Georgiadou, Y. and A. Kleusberg (1988a)**. On the Effect of Ionospheric Delay on Geodetic Relative GPS Positioning. *Manuscripta Geodetica*, 13, 1-9.
- [32]. **Georgiadou, Y. and A. Kleusberg (1988b)**. On Carrier Signal Multipath Effects in Relative GPS Positioning. *Manuscripta Geodetica*, 13, 172-179.
- [33]. **Hap S. and C. Rizos (1996e)**. GPS Network Design and Error Mitigation for Real-Time Continuous Array Monitoring Systems. Proc. ION GPS-96, 9th Int. Tech. Meeting of The Satellite Division of The U.S. Institute of Navigation, Kansas City, Missouri, 17-20 September, 1827-1836.
- [34]. **H. van der Marel**. Virtual GPS Reference Stations in the Netherlands, Proc. ION GPS-98, The Institute of Navigation, pp. 49-58.
- [35]. **Han S.** Quality Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real-Time GPS Kinematic Positioning, Proc. ION GPS-96, The Institute of Navigation, pp. 1419-1430, 1996.
- [36]. **Han S.** Carrier Phase-based Long-range GPS Kinematic Positioning[D], Sydney: The University of New South Wales, 1997.
- [37]. **Han S. and Rizos, C.** Improving the Computational Efficiency of the Ambiguity Function Algorithm, *Journal of Geodesy*, Vol. 70, No. 6, March 1996, pp.330-341.
- [38]. **Janes HW, Langley RB, Newby SP (1989)**. A comparison of several models for the prediction of troposphere propagation delay. In: *Proceedings of the Fifth International Geodesy Symposium on Satellite Positioning*, Las Cruces, New Mexico, March 13-17, Vol 2: 777-788.
- [39]. **Jorgensen PS (1989)**. An assessment of ionosphere effects on the GPS user. *Navigation*, 36 (2): 195--204.
- [40]. **Klobuchar J (1986)**. Design and characteristics of the GPS ionospheric time-delay algorithm for single-frequency users. In: *Proceedings of the IEEE Position Location and Navigation Symposium*, Las Vegas, November 4-7.
- [41]. **Klobuchar J. A. (1991)**. Ionosphere effects on GPS. *GPS World* 2 (4), 48-51.

- [42]. **Lachapelle, G., M.E. Cannon. C. Erickson and W. Falkenberg (1992).** High Precision C/A Code Technology for Rapid Static DGPS Surveys. Proc. 6th Int. Geodetic Symp. on Satellite Positioning, Ohio, Columbus, 17-20 March, 165-173.
- [43]. **Leick A. (1995).** GPS Satellite Surveying. Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 560PP-
- [44]. **Mader, G. L.** Rapid Static and Kinematic Global Positioning System Solutions Using the Ambiguity Function Technique, Journal of Geophysical Research, Vol. 97, No. B3, March 1992, pp. 3271-3283.
- [45]. **Mervett, L., G. Beutler. M. Rothacher and U. Wild (1994).** Ambiguity Resolution Strategies using the Results of the international GPS Geodynamics Service (IGS), Bulletin Géodésique, 68, 29-38.
- [46]. **Pratt M., et al.** Single-Epoch Integer Ambiguity Resolution with GPS L1-L2 Carrier Phase Measurements, Proc. ION GPS-97, The Institute of Navigation, pp. 1737-1746.
- [47]. **Pratt M. et al.** Single-Epoch Integer Ambiguity Resolution with GPS-GLONASS L1 Data, Proc. ION 53<sup>rd</sup> Annual Meeting, The Institute of Navigation, pp.691-699, 1997.
- [48]. **Raquet, J. (1998).** Development of a Method for Kinematic GPS Carrier-Phase Ambiguity Resolution Using Multiple Reference Receivers. Ph. D. Thesis. UCGE Report Number 20116. The University of Calgary, Calgary. May 1998.
- [49]. **Remondi BW(1984).** Using the Global Positioning System (GPS) phase observable for relative geodesy: modeling, processing, and results. University of Texas at Austin, Center for Space Research.
- [50]. **Saastamoinen J. (1973).** Contribution to the theory of atmospheric refraction. Bulletin Géodésique, 107: 13-34.
- [51]. **Seeber G (1993).** Satellite geodesy: foundation, methods, and applications. Walter de Gruyter, Berlin New York.
- [52]. **Sven Martin.** Geodetic Real-time Differential Correction Network Data Communication, Service Installation and Results, ION, 99, 227-235.
- [53]. **Teunissen, Peter J. G.** GPS for Geodesy, second version, 30-31.
- [54]. **Teunissen, P. J. G. (1996).** On the Geometry of the Ambiguity Search Space with and without Ionosphere. Zeitschrift für Vermessungswesen, 121, 332-341.
- [55]. **Teunissen, P. J. G. (1996).** An Analytical Study of Ambiguity Decorrelation Using Dual Frequency Code and Carrier Phase. Journal of Geodesy, 70 (8), 515-528.
- [56]. **Wei, M. and K. P. Schwarz (1995).** Fast Ambiguity Resolution Using an Integer Nonlinear Programming Method. Proc. ION GPS-95, 8th Int. Tech. Meeting of The Satellite Division of The U.S. Institute of Navigation, Palm Spring, California, 12-15 September, 1101-1110.
- [57]. **Wells, D. E., N. Beck D. Delikaraoglou, A. Kleusberg, E. J. Krakiwsky, G. Lachapelle, R. B. Langley, M. Nakiboglu, K. P. Schwarz, J. M. Tranquilla and P. Veníček.(1987).** Guide to GPS Positioning. Canadian GPS Associates, Fredericton, N. B., Canada.
- [58]. **Wild, U., G. Beutler, W. Gurtner and M. Rothacher (1989).** Estimating the Ionosphere using One or More Dual Frequency GPS Receivers. Proc 5th International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Las Cruces, New Mexico March 1989, Vol. II, 724-736.
- [59]. **Wu J T.** Weighted Differential GPS Method for Reducing Ephemeris Error [J]. Manuscripta Geodetica, 1994, 20: 1~7.
- [60]. **Wübbena, G. (1989).** The GPS Adjustment Software Package - GEONAP - Concepts and Models. Proc.

5th Int. Geodetic Symp. on Satellite Positioning, Las Cruces, New Mexico, 13-17 March, 452-461.

- [61]. **Wübbena. G. (1991 )**. Zur Modellierung von GPS Beobachtungen für die hochgenaue Positionsbestimmung. Wiss. Arb. Univ, Hannover, Nr. 168