中山大学《离散数学》2019-2020学年第一学期期末试卷

满分 100 分

一．判断题（共 10 小题，每题 1 分，共 10 分）

在各题末尾的括号内画✓表示正确，画×表示错误：

1．设 p、q 为任意命题公式，则$(p\wedge q)\vee p \Leftrightarrow p$ （　　）

2．$\forall x(F(y)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow F(y)\rightarrow \exists xG(x)$。 （　　）

3．初级回路一定是简单回路。 （　　）

4．自然映射是双射。 （　　）

5．对于给定的集合及其上的二元运算，可逆元素的逆元是唯一的。（　　）

6．群的运算是可交换的。 （　　）

7．自然数集关于数的加法和乘法$<N，+，\cdot>$构成环。 （　　）

8．若无向连通图 G 中有桥，则 G 的点连通度和边连通度皆为 1。 （　　）

9．设 $A=\{a,b,c\}$,则 A 上的关系 $R=\{<a,b>,<a,c>\}$是传递的。 （　　）

10．设 A、B、C 为任意集合，则 $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$。 （　　）

二、填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

11．设 p：天气热。q：他去游泳。则命题“只有天气热，他才去游泳”可符号

化为______________________。

12．设 M(x)：x 是人。S(x)：x 到过月球。则命题“有人到过月球”可符号

化为______________________。

13． $p\leftrightarrow q$ 的主合取范式是______________________。

14．完全二部图 $K_{r,s}$（$r < s$）的边连通度等于__________________。

15．设 A={a,b}，,则 A 上共有_______个不同的偏序关系。

16．模 6 加群<Z_6，⊕>中，4 是______阶元。

17．设 A={1,2,3,4,5}上的关系 R={<1,3>,<1,5>,<2,5>,<3,3>,<4,5>}，则 R 的传递闭包 t(R) = ______________________________________。.

18．已知有向图 D 的度数列为(2,3,2,3)，出度列为(1,2,1,1)，则有向图 D 的入度

列为_______________。

19．n 阶无向简单连通图 G 的生成树有________条边。

20．7 阶圈的点色数是________。

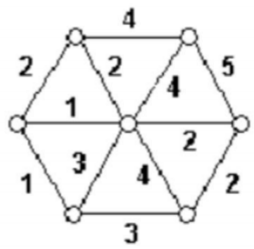
三、运算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

21．求 $\exists xF(x)\rightarrow\exists yG(x,y)$ 的前束范式。

22．已知无向图 G 有 11 条边，2 度和 3 度顶点各两个，其余为 4 度顶点，求 G 的顶点数。

23．设 A={a,b,c,d,e,f}，$R=I_A\cup\{<a,b>,<b,a>\}$，则 R 是 A 上的等价关系。求等价类 $[a]_R$、$[c]_R$ 及商集 A/R。

24．求图示带权图中的最小生成树，并计算最小生成树的权。



25．设 R^*为正实数集，代数系统$< R^*,+>$、$< R^*,\cdot>$、$< R^*,/>$中的运算依次为普通加法、乘法和除法运算。试确定这三个代数系统是否为群？是群者，求其单位元及每个元素的逆元。

四、证明题（共 3 小题，共 20 分）

26 （8 分）在自然推理系统 P 中构造下述推理的证明：

前题：$p\to(q\vee r)$，$\neg s\to\neg q$， $p\wedge\neg s$

结论：r

27 （6 分）设$<G, *>$是群，$H=\{a|\ a\in G\wedge \forall g\in G，a*g=g*a\}$,则$<H, *>$是 G 的子群

28．（6 分）设 G 是 n(≥3)阶 m 条边、r 个面的极大平面图，则 r=2n-4。

一．判断题（共 10 小题，每题 1 分，共 10 分）

在各题末尾的括号内画✓表示正确，画×表示错误：

1． (✓) 2． (×) 3． (✓) 4． (×) 5． (×)

6． (×) 7． (×) 8． (✓) 9． (✓) 10． (×)

二、填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

11． $q\to p$ 12．$\exists x(M(x)\wedge S(x))$

13．$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ 14． **r**

15． **3** 16． **3**

17．.R 18．（1,1,1,2）

19． **n-1** 20． **3**

三、运算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

21．解：$\exists xF(x)\to\exists yG(x,y)\Leftrightarrow \exists xF(x)\to\exists yG(w,y)$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\to\exists yG(w,y))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists y\ (F(x)\to G(w,y))$

22. 解：设图 G 有 n 个顶点 m 条边，则

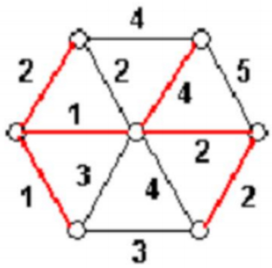
$2m=2(2+3)+4(n-4)$，即 $22=10+4(n-4)$

解之得 n=7。

23. 解：$[a]_R=\{a,b\}$，$[c]_R=\{c\}$，$[d]_R=\{d\}$，$[e]_R=\{e\}$，$[f]_R=\{f\}$，

$A/R=\{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$

24. 解：最小生成树 T 如图中红线所示，**W(T) = 12**



25. 解：仅$<R^*,\cdot>$是群。其单位元为 1。任意 $x\in R^*$，其逆元为 1/x。

四、证明题（共 3 小题，共 20 分）

26 证明：① $p\wedge\neg s$　　前提引入

② p　　①，化简

③ $p\to(q\vee r)$　　前提引入

④ $q\vee r$　　②③，假言推理

⑤ $\neg s$　　①，化简

⑥ $\neg s\to\neg q$　　前提引入

⑦ $\neg q$　　⑤⑥，假言推理

⑧ r　　④⑦，析取三段论

27 （6 分）证：设 e 是 G 的单位元，$\forall g\in G, e*g=g*e$，所以 $e\in H$,故 H 非空。

（1）$\forall a,b\in H, \forall g\in G$，有 $a*g=g*a, b*g=g*b$,那么

$(a*b)*g=a*(b*g)= a*(g*b)=(a*g)*b=(g*a)*b=g*(a*b)$

所以 $a*b\in H$。

（2）$\forall a\in H, \forall g\in G$，有 $a*g=g*a$，$a^{-1}\in G$。

$a^{-1}*g=a^{-1}*g*e=a^{-1}*g*a*a^{-1}= a^{-1}*(g*a)*a^{-1}=a^{-1}*(a*g)*a^{-1}$

$=(a^{-1}*a)*g*a^{-1}=e*g*a^{-1}=g*a^{-1}$

所以，$a^{-1}\in H$。

根据子群判定定理一，H 是 G 的子群。

28.（6 分）证：极大平面图一定是连通图，由欧拉公式

$$r=2+m-n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又因为极大平面图每面的次数皆为 3，从而

$$2m=3r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由(1)、(2)式联立解得

$$r=2n-4。$$