中山大学《离散数学》2020-2021 学年第一学期期末试卷

满分 100 分

一、单项选择题 （本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1.一个连通的无向图 G，如果它的所有结点的度数都是偶数，那么它具有一条 （ ）

A.汉密尔顿回路　　B.欧拉回路

C.汉密尔顿通路　　D.初级回路

2.设 G 是连通简单平面图， G 中有 11 个顶点 5 个面，则 G 中的边是（ ）

A.10　　B.12　　C.16　　D.14

3.在布尔代数 L 中，表达式 $(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(b\wedge c)$的等价式是（ ）

A.$b\wedge(a\vee c)$

B.$(a\wedge b)\vee(a'\wedge b)$

C.$(a\vee b)\wedge(a\vee b\vee c)\wedge(b\vee c)$

D.$(b\vee c)\wedge(a\vee c)$

4.设 i 是虚数，·是复数乘法运算，则 G=<{1,-1,i,-i}, · >是群，下列是 G 的子群是（ ）

A.<{1}, · >　　B.〈{-1}, ·〉

C.〈{i}, ·〉　　D.〈{-i}, ·〉

5.设 Z 为整数集， A 为集合， A 的幂集为 P(A),+ 、-、/为数的加、减、除运算，∩为集合的交运算，下列系统中是代数系统的有 （ ）

A.〈Z，+，/〉　　　　B.〈Z，/〉

C.〈Z，-，/〉　　　　D.〈P(A)，∩〉

6.下列各代数系统中不含有零元素的是　(　　)

A.〈Q，*〉Q 是全体有理数集，* 是数的乘法运算

B.〈Mn(R),*〉,Mn(R) 是全体 n 阶实矩阵集合，* 是矩阵乘法运算

C.〈Z，∘〉，Z 是整数集，∘定义为 x∘xy=xy，∀x,y∈Z

D.〈Z，+〉，Z 是整数集，+是数的加法运算

7.设 A={1,2,3}，A 上二元关系 R 的关系图如下：

R 具有的性质是

A.自反性

B.对称性

C.传递性

D.反自反性

8.设 A={a,b,c}，A 上二元关系 R={〈a,a〉,〈b,b〉,〈a,c〉}，则关系 R 的对称闭包 S(R)是(　　)

A.$R \cup I_A$　　B.R　　C.R∪{〈c,a〉}　　D.$R \cap I_A$

9.设 X={a,b,c},Ix 是 X 上恒等关系，要使 Ix∪{〈a,b〉,〈b,c〉,〈c,a〉,〈b,a〉}∪R 为 X 上的等价关系，R 应取(　　)

A. {〈c,a〉,〈a,c〉}　　B.{〈c,b〉,〈b,a〉}

C.{〈c,a〉,〈b,a〉}　　D.{〈a,c〉,〈c,b〉}

10.下列式子正确的是　(　　)

A. ∅∈∅　　B.∅⊆∅　　C.{∅}⊆∅　　D.{∅}∈∅

11.设解释 R 如下：论域 D 为实数集，a=0,f(x,y)=x-y,A(x,y):x<y. 下列公式在 R 下为真的是 (　　)

A.(∀x)(∀y)(∀z)(A(x,y))→A(f(x,z),f(y,z))

B.(∀x)A(f(a,x),a)

C.(∀x)(∀y)（A(f(x,y),x))

D.($\forall$x)($\forall$y)(A(x,y) → A(f(x,a),a))

12.设 B 是不含变元 x 的公式，谓词公式 ($\forall$x)(A(x) →B) 等价于 (　　)

A.($\exists$x)A(x) →B　　B.($\forall$x)A(x) →B

C.A(x) →B　　D.($\forall$x)A(x) →($\forall$x)B

13.谓词公式 ($\forall$x)(P(x,y)) →($\exists$z)Q(x,z) ∧ ($\forall$y)R(x,y) 中变元 x(　　)

A.是自由变元但不是约束变元

B.既不是自由变元又不是约束变元

C.既是自由变元又是约束变元

D.是约束变元但不是自由变元

14.若 P：他聪明； Q：他用功；则“他虽聪明，但不用功”，可符号化为 (　　)

A.P∨Q　　B.P∧┐Q　　C.P→┐Q　　D.P∨┐Q

15.以下命题公式中，为永假式的是 (　　)

A.p→(p∨q∨r)　　B.(p→┐p)→┐p

C.┐(q→q)∧p　　D.┐(q∨┐p)→(p∧┐p)

二、填空题 (每空 1 分，共 20 分)

16.在一棵根树中，仅有一个结点的入度为 __0____，称为树根，其余结点的入度均为 __1____。

17.A={1,2,3,4} 上二元关系 R={〈2，4〉,〈3，3〉,〈4，2〉}，R 的关系矩阵 M_R 中 m_{24}=___1___,m_{34}=___0___。

18.设〈s,*〉是群，则那么 s 中除 __幺元 ____外，不可能有别的幂等元；若〈 s,*〉有零元，则 |s|=___1___。

19.设 A 为集合，P(A) 为 A 的幂集，则〈P(A)，⊆〉是格，若 x,y∈P(A), 则 x,y 最大下界是 ______，最小上界是 ______。

20.设函数 f:X →Y, 如果对 X 中的任意两个不同的 x_1 和 x_2，它们的象 y_1 和 y_2 也不同，我们说 f 是___入射___函数，如果 ranf=Y，则称 f 是___满射___函数。

21.设 R 为非空集合 A 上的等价关系，其等价类记为〔x〕R。$\forall$x,y∈A，若〈x,y〉∈R，则〔x〕$_R$ 与〔y〕$_R$ 的关系是 ______，而若〈x,y〉∉R，则〔x〕$_R$∩〔y〕$_R$=______。

22.使公式 ($\exists$x)($\exists$y)(A(x) ∧ B(y)) ⇔ ($\exists$x)A(x) ∧ ($\exists$y)B(y) 成立的条件是 ______不含有 y，______不含有 x。

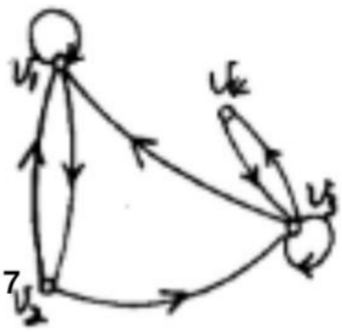
23.设 M(x):x 是人，D(s):x 是要死的，则命题“所有的人都是要死的” 可符号化为 ($\forall$x)______，其中量词 ($\forall$x) 的辖域是 ______。

24.若 H_1∧H_2∧，∧ H_n 是______，则称 H1,H2,， Hn 是相容的，若 H_1∧H_2∧，∧ H_n 是______，则称 H_1,H_2,， H_n 是不相容的。

25. 判断一个语句是否为命题，首先要看它是否为 __________，然后再看它是否具有唯一的 _______。

三、计算题 (共 30 分)

26.(4 分)设有向图 G=(V,E) 如下图所示，试用邻接矩阵方法求长度为 2 的路的总数和回路总数。



27.(5)设 A={a,b},P(A) 是 A 的幂集，$\oplus$是对称差运算，可以验证 <P(A)，$\oplus$>是群。设 n 是正整数，求 $(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^{n} \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^{n}\{a\}^{n}$

28.(6 分)设 A={1,2,3,4,5},A 上偏序关系

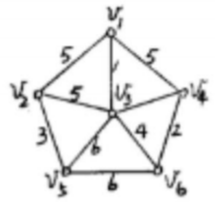
R={〈1，2〉,〈3，2〉,〈4，1〉,〈4，2〉,〈4，3〉,〈3，5〉,〈4，5〉}∪I_A；

(1)作出偏序关系 R 的哈斯图

(2)令 B={1,2,3,5}，求 B 的最大，最小元，极大、极小元，上界，下确界，下界，下确界。

29.(6 分)求$\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(P\rightarrow\neg Q)$的主合取范式并给出所有使命题为真的赋值。

30.(5 分)设带权无向图 G 如下，求 G 的最小生成树 T 及 T 的权总和，要求写出解的过程。



31.(4 分)求公式$\neg((\forall x)F(x,y)\rightarrow(\exists y)G(x,y))\vee(\exists x)H(x)$ 的前束范式。

四、证明题 (共 20 分)

32.(6 分)设 T 是非平凡的无向树，T 中度数最大的顶点有 2 个，它们的度数为 $k(k\geq 2)$,证明 T 中至少有 2k-2 片树叶。

33.(8 分)设 A 是非空集合，F 是所有从 A 到 A 的双射函数的集合，$\circ$是函数复合运算。
证明：〈F，$\circ$〉是群。

34.(6 分)在个体域 $D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 中证明等价式：
$(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$

五、应用题 (共 15 分)

35.(9 分)如果他是计算机系本科生或者是计算机系研究生，那么他一定学过 DELPHI 语言而且学过 C++语言。只要他学过 DELPHI 语言或者 C++语言，那么他就会编程序。因此如果他是计算机系本科生，那么他就会编程序。请用命题逻辑推理方法，证明该推理的有效结论。

36.(6 分)一次学术会议的理事会共有 20 个人参加，他们之间有的相互认识但有的相互不认识。但对任意两个人，他们各自认识的人的数目之和不小于 20。问能否把这 20 个人排在圆桌旁，使得任意一个人认识其旁边的两个人 ?根据是什么 ?

参考答案

一、单项选择题 （本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）

1.B	2.D	3.A	4.A	5.D
6.D	7.D	8.C	9.D	10.B
11.A	12.A	13.C	14.B	15.C

二、填空题

16.0 1

17.1 0

18.单位元 1

19.$x \cap y$ $x \cup y$

20.入射 满射

21. $[x]_R = [y]_R$

22.A(x) B(y)

23.$(M(x) \rightarrow D(x))$ $M(x) \rightarrow D(x)$

24.可满足式 永假式 (或矛盾式)

25.陈述句 真值

三、计算题

26. $M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

$M^2=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\2&1&1&1\\2&1&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$

$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} M_{ij}^{2}=18$, $\sum_{i=1}^{4} M_{ij}^{2}=6$

G 中长度为 2 的路总数为 18，长度为 2 的回路总数为 6。

27.当 n 是偶数时，$\forall x \in P(A), x^n=\varnothing$

当 n 是奇数时，$\forall x \in P(A), x^n=x$

于是：当 n是偶数，$(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^n \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^n\{a\}^n$

$=\varnothing \oplus (\{a\}^{-1})^n\{b\}^n\{a\}^n=\varnothing \oplus \varnothing=\varnothing$

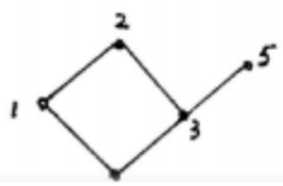
当 n 是奇数时，

$(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^n \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^n\{a\}^n$

$=\{a\}^{-1}\{b\}\{a\} \oplus (\{a\}^{-1})^n\{b\}^n\{a\}^n$

$=\{a\}^{-1}\{b\}\{a\} \oplus \{a\}^{-1}\{b\}\{a\}=\varnothing$

28.(1)偏序关系 R 的哈斯图为



(2)B 的最大元：无，最小元：无；

极大元： 2，5，极小元： 1，3

下界： 4， 下确界 4；

上界：无，上确界：无

29.原式 $\Leftrightarrow (\neg(P\to Q)\to(P\to\neg Q))\wedge((P\to\neg Q)\to\neg(P\to Q))$

$((P\to Q)\vee(P\to\neg Q))\wedge(\neg(P\to\neg Q)\vee\neg(P\to Q))$

$(\neg P\vee Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$(\neg(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q))$

$(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$P\wedge(Q\vee\neg Q)$

$P\vee(Q\wedge\neg Q)$

$(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

命题为真的赋值是 P=1,Q=0 和 P=1,Q=1

30.令 $e_1=(v_1,v_3)$, $e_2=(v_4,v_6)$

$e_3=(v_2,v_5)$, $e_4=(v_3,v_6)$

$e_5=(v_2,v_3)$, $e_6=(v_1,v_2)$

$e_7=(v_1,v_4)$, $e_8=(v_4,v_3)$

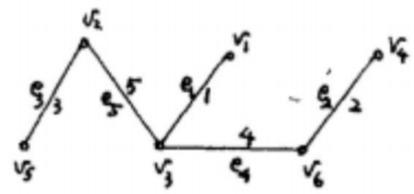
$e_9=(v_3,v_5)$, $e_{10}=(v_5,v_6)$

令 a_i 为 e_i 上的权，则

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5=a_6=a_7=a_8<a_9=a_{10}$

取 a_1 的 $e_1\in T,a_2$ 的 $e_2\in T,a_3$ 的 $e_3\in T,a_4$ 的 $e_4\in T,a_5$ 的 $e_5\in T$,即,

T.



T 的总权和 =1+2+3+4+5=15

31.原式 $\Leftrightarrow\neg(\forall x_1F(x_1,y)\to\exists y_1G(x,y_1))\vee\exists x_2H(x_2)$ （换名）

$\Leftrightarrow\neg\exists x_1\exists y_1(F(x_1,y)\to G(x,y_1))\vee\exists x_2H(x_2)$

$\Leftrightarrow\forall x_1\forall y_1\neg(F(x_1,y_1)\to G(x,y_1))\vee\exists x_2H(x_2)$

$\Leftrightarrow\forall x_1\forall y_1\exists x_2(\neg(F(x_1,y_1)\to G(x,y_1))\vee H(x_2))$

四、证明题

32.设 T 中有 x 片树叶， y 个分支点。于是 T 中有 x+y 个顶点，有 x+y-1 条边，由握手定理知 T 中所有顶点的度数之的

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i)=2(x+y-1)\text{。}$$

又树叶的度为 1，任一分支点的度大于等于 2

且度最大的顶点必是分支点，于是

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) \geq x\cdot 1+2(y-2)+k+k=x+2y+2K-4$$

从而 $2(x+y-1) \geq x+2y+2k-4$

$x \geq 2k-2$

33.从定义出发证明：由于集合 A 是非空的，故显然从 A 到 A 的双射函数总是存在的，如 A 上恒等函数，因此 F 非空

(1) $\forall f,g \in F$,因为 f 和 g 都是 A 到 A 的双射函数，故 $f\circ g$ 也是 A 到 A 的双射函数，从而集合 F 关于运算 $\circ$ 是封闭的。

(2) $\forall f,g,h \in F$,由函数复合运算的结合律有 $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ 故运算 $\circ$ 是可结合的。

(3)A 上的恒等函数 I_A 也是 A 到 A 的双射函数即 $I_A \in F$,且 $\forall f \in F$ 有 $I_A\circ f=f\circ I_A=f$, 故 I_A 是〈F, $\circ$〉中的幺元

(4) $\forall f \in F$,因为 f 是双射函数，故其逆函数是存在的，也是 A 到 A 的双射函数，且有 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$,因此 f^{-1} 是 f 的逆元

由此上知〈F, $\circ$〉是群

34.证明 $(\exists x)(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1)\vee B(a_1))\vee(\neg A(a_2)\vee B(a_2))\vee ,\vee (\neg A(a_n)\vee B(a_n)))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1)\vee A(a_2)\vee ,\vee\neg A(a_n))\vee (B(a_1)\vee B(a_2)\vee ,\vee (B(a_n))$

$\Leftrightarrow \neg (A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge ,\wedge A(a_n))\vee (\neg B(a_1)\vee B(a_2)\vee ,\vee (B(a_n))$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)$

五、应用题

35.令 p：他是计算机系本科生

q：他是计算机系研究生

r：他学过 DELPHI 语言

s:他学过 C++语言

t:他会编程序

前提：$(p\vee q)\to(r\wedge s),(r\vee s)\to t$

结论：$p\to t$

证① p	P(附加前提)
② $p\vee q$	T①I
③ $(p\vee q)\to(r\wedge s)$	P(前提引入)
④ $r\wedge s$	T②③I
⑤ r	T④I
⑥ $r\vee s$	T⑤I
⑦ $(r\vee s)\to t$	P(前提引入)
⑧ t	T⑤⑥I

36.可以把这 20 个人排在圆桌旁，使得任一人认识其旁边的两个人。

根据：构造无向简单图 G=<V,E>,其中 $V=\{v_1,v_2,, ,V_{20}\}$ 是以 20 个人为顶点的集合，E 中的边是若任两个人 v_i 和 v_j 相互认识则在 v_i 与 v_j 之间连一条边。

$\forall V_i \in V, d(v_i)$是与 v_i 相互认识的人的数目，由题意知 $\forall v_i,v_j \in V$ 有 $d(v_i)+d(v_j) \geq 20$,于是 G 中存在汉密尔顿回路。