中山大学《线性代数》2023-2024学年第一学期期末试卷

考试时间：120 分钟 满分：100 分

学校:________ 姓名:________ 班级:________ 考号:________

题号	一	二	三	四	五	总分
评分						

一、单项选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 给定矩阵 A 和 B，下列哪个条件能保证 AB=BA？（ ）
   A. A 和 B 都是对角矩阵
   B. A 和 B 都是单位矩阵
   C. A 和 B 都是对称矩阵
   D. A 和 B 都是可逆矩阵

2. 在线性代数中，下列哪个概念与矩阵的行最简形式无关？（ ）
   A. 秩
   B. 零空间
   C. 特征值
   D. 行列式

3. 向量组 $\alpha 1$, $\alpha 2$, ..., αn 线性无关的充分必要条件是？（ ）
   A. 由它们构成的矩阵的行列式不为 0
   B. 它们中没有一个向量可以由其他向量线性表示
   C. 它们构成的矩阵的秩等于向量个数
   D. 它们构成的矩阵的转置矩阵可逆

4. 给定一个 3x3 矩阵 A，若 A=2，则 2A 等于多少？（ ）
   A. 4
   B. 8
   C. 16
   D. 64

5. 矩阵 A 的特征值是 1，那么 A+I 的特征值是？（ ）
   A. 0
   B. 1

中山大学
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

It's too funny

- 表白/吃瓜
- 帮问/互助
- 二手集市
- 失物/捞人
- 组局/交友
- 吐槽/避雷

中大校园论坛

中大表白墙的微信小程序社区
你发布的帖子全校都可以看到

中大校园论坛，中大人都在玩

C. 2
D. 不确定

6. 线性方程组 AX=0 有非零解的充分必要条件是？（　）
A. A 的行列式为 0
B. A 的秩小于未知数的个数
C. A 的列向量线性相关
D. 所有选项都正确

7. 给定矩阵 A，下列哪个矩阵与 A 合同？（　）
A. A 的转置
B. A 的伴随矩阵
C. A 的逆矩阵
D. A 的特征矩阵

8. 向量组α1，α2, ...，αn 的秩等于 n，这意味着？（　）
A. 向量组线性相关
B. 向量组线性无关
C. 向量组中有 n 个向量
D. 向量组中至多有 n 个向量

9. 给定一个 n 阶方阵 A，若 AT2=0，那么 A 的秩是多少？（　）
A. n
B. 0
C. 1
D. 不确定

10. 矩阵 A 可逆的充分必要条件是？（　）
A. A 的行列式不为 0
B. A 的秩等于 n
C. A 的列向量线性无关
D. 所有选项都正确

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. 矩阵 A 的特征多项式为 p(λ)=λT36λT2+11λ6，那么 A 的迹是________。

2. 如果矩阵 A 的秩为 2，且 A 的列向量为α1，α2，α3，则α1，α2，α3 线性相关，因为________。

3. 对于一个 3x3 矩阵 A，若 A 的行列式为 2，则 A 的伴随矩阵的行列式为________。

4. 向量组 β1, β2, β3 线性无关，且 α1=2β1+β2， α2=β1+2β2+β3， α3=3β1+β2+3β3，则 α1, α2, α3 的秩为________。

5. 矩阵 A 和 B 相似，那么它们具有相同的________。

6. 若矩阵 A 可逆，则 A 的行列式与 A 的逆矩阵的行列式的乘积为________。

7. 矩阵 A 的特征值都为正，则 A 是________矩阵。

8. 矩阵 A 的列向量线性无关，则 A 的零空间只包含________。

9. 矩阵 A 和 B 等价，当且仅当存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 PAQ=________。

10. 若矩阵 A 的秩为 1，则 A 的列向量与 A 的行向量线性相关的个数为________。

三、判断题（每题 2 分，共 20 分）

1. 若矩阵 A 可对角化，则 A 的最小多项式必定无重根。（ ）

2. 对于任意矩阵 A 和 B，若 A 和 B 合同，则存在可逆矩阵 P，使得 PTTAP=B。（ ）

3. 若向量组 α1, α2, ..., αn 线性无关，则由这些向量构成的矩阵 A 的行列式必不为零。（ ）

4. 矩阵 A 的特征值全为正数，则 A 必定是正定矩阵。（ ）

5. 若矩阵 A 和 B 相似，则它们具有相同的 Jordan 标准形。（ ）

6. 矩阵 A 的秩等于其转置矩阵的秩，但它们的行列式不一定相等。（ ）

7. 若矩阵 A 是正交矩阵，则 A 的任意 n 个线性无关的列向量构成的子矩阵的行列式为 1 或-1。（ ）

8. 对于任意矩阵 A，若 AT2=0，则 A 的秩必定小于 A 的列数。（ ）

9. 若矩阵 A 和 B 可交换，即 AB=BA，则 A 和 B 必定可以同时对角化。（   ）

10. 若矩阵 A 是实对称矩阵，则 A 的任意两个不同特征值对应的特征向量必定正交。（   ）

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1.设 A 是一个 $n\times n$ 实对称矩阵，且 A 可对角化。证明 A 可以正交对角化，即存在一个正交矩阵 P 使得 $P^TAP = D$，其中 D 是对角矩阵。

提示：
利用实对称矩阵的特征向量正交性。
构造正交矩阵 P，其列向量为 A 的正交归一化特征向量。
证明 P 是正交的，即 $P^TP = I$。
证明 $P^TTAP = D$，其中 D 是对角矩阵，其对角线上的元素为 A 的特征值。

2.设 A 是一个 $n\times n$ 复矩阵，且 A 满足 $A^*A = AA^*$，其中 A^* 表示 A 的共轭转置。证明 A 和 A^* 可以同时三角化，即存在一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}A^*P$ 都是上三角矩阵。

提示：
利用 $A^*A = AA^*$ 暗示 A 是正规矩阵。
证明正规矩阵可以被一个酉矩阵对角化。
构造 P 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。
证明 $P^{-1}A^*P$ 也是上三角矩阵，可以通过考虑 A^* 的特征值和特征向量的性质。
利用 A 和 A^* 的特征向量之间的关系来完成证明。

五、综合应用题（20 分）

案例分析： 某公司想要分析其产品销售数据，以确定不同产品之间的相关性。他们收集了以下数据，表示三种产品 A、B、C 在四个不同地区的销售额（单位：万元）：

地区	产品 A	产品 B	产品 C
地区 1	100	80	60
地区 2	120	100	70
地区 3	150	120	90
地区 4	180	160	110

请使用线性代数的方法，构建一个合适的数学模型来分析这些数据，并回答以下问题：

1. 产品 A、B、C 之间是否存在线性相关性？
2. 如果存在线性相关性，它们之间的相关性强度如何？
3. 根据分析结果，公司应该如何调整产品策略以优化销售？