中山大学《高等数学》2018-2019 学年第二学期期末试卷

（满分 100 分）

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设 $f(x)=\ln x$**，且函数** $\varphi(x)$ **的反函数** $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$**，则** $f[\varphi(x)]=$ （　　）

$A.\ln\dfrac{x-2}{x+2}$　　$B.\ln\dfrac{x+2}{x-2}$　　$C.\ln\dfrac{2-x}{x+2}$　　$D.\ln\dfrac{x+2}{2-x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^0\left(e^t+e^{-t}-2\right)dt}{1-\cos x}=$ （　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ∞

3. 设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 且函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则必有（　　）

$A.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$　　$B.\Delta y=0$　　$C.dy=0$　　$D.\Delta y=dy$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 1\\ 3x-1, x>1\end{cases}$**，则** $f(x)$ **在点** $x=1$ **处（　　）**

A. 不连续　　B. 连续但左、右导数不存在　　C. 连续但不可导　　D. 可导

5. 设 $\int xf(x)\,dx=e^{-x^2}+C$**，则** $f(x)=$ （　　）

A. xe^{-x^2}　　B. $-xe^{-x^2}$　　C. $2e^{-x^2}$　　D. $-2e^{-x^2}$

二、填空题（本大题共 10 小题，每空 3 分，共 30 分）

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

6.设函数 f(x)在区间[0，1]上有定义，则函数 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$的定义域是__________.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+aq+aq^2+\cdots+aq^n\right)\left(|q|<1\right)=$ __________

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=$ __________

9. 已知某产品产量为 g 时，总成本是$C(g)=9+\dfrac{g^2}{800}$**，则生产 100 件产品时的边际成本**$MC|_{g=100}=$__

10. 函数 $f(x)=x^3+2x$ **在区间[0，1]上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 是__________.**

11. 函数 $y=2x^3-9x^2+12x-9$ **的单调减少区间是___________.**

12.微分方程 $xy'-y=1+x^3$ 的通解是__________.

13.设 $\int_a^{2\ln 2}\dfrac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$, 则 $a=$__________.

14.设 $z=\dfrac{\cos^2 x}{y}$ 则 dz=__________.

15.设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，则 $\iint\limits_D xe^{-2y}dxdy=$____________.

三、计算题（一）（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

16.设 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$，求 dy.

17.求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$

18.求不定积分 $\int\dfrac{1}{(5x+1)\sqrt{\ln(5x+1)}}dx.$

19.计算定积分 I=$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

20.设方程 $x^2y-2xz+e^z=1$ 确定隐函数 z=z(x,y)，求 z'_x, z'_y。

四、计算题（二）（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

21．要做一个容积为 v 的圆柱形容器，问此圆柱形的底面半径 r 和高 h 分别为多少时，所用材料最省？

22.计算定积分 $\int_0^\pi x\sin^2 x dx$

23.将二次积分 $I=\int_0^\pi dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi}}\frac{\sin y^2}{y}dy$ 化为先对 x 积分的二次积分并计算其值。

五、应用题（本题 9 分）

24.已知曲线 $y=x^2$，求

（1）曲线上当 x=1 时的切线方程;

（2）求曲线 $y=x^2$ 与此切线及 x 轴所围成的平面图形的面积，以及其绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x.

六、证明题（本题 5 分）

25．证明：当 x>0 时，$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}-1$

参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．**答案：B**

2．答案：A

3．答案：A

4．答案：C

5．答案：D

二、填空题（本大题共 10 小题，每空 3 分，共 30 分）

6．答案：$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

7．**答案：** $\frac{a}{1-q}$

8．答案：0

9．答案： $\frac{1}{4}$

10．答案：$\frac{1}{\sqrt{3}}$

11．答案：（1，2）

12．答案：$\frac{x^3}{2}-1+Cx$

13．答案：$a=\ln 2$

14．答案：$-\frac{1}{y}\left(\sin 2xdx+\frac{\cos^2 x}{y}dy\right)$

15．答案：$\frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right)$

三、计算题（一）（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

16. 答案：$-\left(\ln x+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)^x dx$

17．答案：-1

18．答案：$\frac{2}{5}\sqrt{\ln\left(5x+1\right)}+C$

19. 答案：$\frac{\pi}{4}a^2$

19. 答案：$\dfrac{\pi}{4}a^2$

20. 答案：$Z'_x=\dfrac{2xy-2z}{2x-e^z}$，$Z'_y=\dfrac{x^2}{2x-e^z}$

四、计算题（二）（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

21．答案：$r_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}},\ h_0=\dfrac{V}{\pi r_0^{\,2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$

22．答案：$\dfrac{\pi^2}{4}$

23．答案：1

五、应用题（本题 9 分）

24．答案：（1） y=2x−1 （2）$\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{\pi}{30}$

（2） 所求面积 $S=\int_0^1(\dfrac{y+1}{2}-\sqrt{y})dy=\left[\dfrac{1}{4}\left(y+1\right)^2-\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{12}$

六、证明题（本题 5 分）

25．证明：

$$\because f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+1$$

$$\therefore f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\because x>0$$

$$\therefore x+\sqrt{1+x^2}>1$$

$$\therefore f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$$

故当 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调递增，则 $f(x)>f(0)$, 即

$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}-1$$