中山大学 2012-2013 学年第一学期

《线性代数》期中试题（ A卷）

专业：___________ 学号：___________ 姓名：____________

一、填空题 （每小题 3 分，共 18 分）：

1. 4 阶行列式中，含有 $a_{13}a_{31}$ 的项为 ______________，______________。

2. 设 A 为 n阶矩阵，且 $A^2+3A+E=0$，其中 E 为 n阶单位矩阵，则 A+2E 的逆矩阵 = ______________ 。

3. 计算下列行列式的值，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$。

5. 设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34} = \underline{\qquad\qquad}$。

6. 计算 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1} = \underline{\qquad\qquad}$。

二、单项选择题 （每小题 3 分，共 18 分）：

1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $\tilde{D} = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11}-a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21}-a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31}-a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\qquad}$。 ( )

(A) -3D (B) 3D (C) 12D (D) -12D

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 4 & -a & 0 \end{vmatrix} > 0$ 的充要条件是 ( )

(A) a<2 (B) a>-2 (C) $|a|>2$ (D) $|a|<2$

3. 设 A，B 均为 n 阶方阵，且 $|A+AB|=0$，则 ( )

(A) $|A|=0$ (B) $|E+B|=0$

(C) $|A|=0$ 或 $|E+B|=0$ (D) $|A|=0$ 且 $|E+B|=0$

4. 设 A 为 n 阶方阵，A2-2A+3E=O，则矩阵 A 可逆，且 A-1 = ( )

(A) A-2E (B) 2E-A (C) -3-1 (A-2E) (D) 3-1 (A-2E)

5. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

则 B＝ ( )

(A) AP_1P_2 (B) P_1AP_2 (C) P_1P_2A (D) P_2AP_1

6. 设 n 阶方阵 A，B，C 满足等式 $ABC=E$（E 为单位矩阵），则等式哪个等成立？ ( )

(A) $BCA=E$ (B) $BAC=E$ (C) $ACB=E$ (D) $CBA=E$

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，问 k 为何值，可使

(1) $R(A)=1$；(2) $R(A)=2$；(3) $R(A)=3$.

2. 计算 n阶对角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ；

3. 已知矩阵

$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，设矩阵 X 满足 AX+B=2X， 求矩阵 X；

4. λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？

四、证明题（本题 12 分）

设 n 阶方阵 A, B 满足 $A + B = AB$：

(1). 证明 $A - E$ 可逆且其逆阵为 $B - E$；

(2). 若 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求 A；

(3). 等式 $AB = BA$ 是否成立？为什么？

五、

设

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -(\lambda+1),\end{cases}$$

问 λ 为何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解．