中山大学 《数值分析》
2022-2023学年第二学期期末试卷

一、填空（每空 3 分，共计 30 分）

1. 设 $f(x)=3x^2+5, x_k=kh, k=0,1,2,\cdots$，则 $f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}]$ = ________，$f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}, x_{n+3}]$ =________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(a)=$______，A 的条件数 $cond_1(A)$=________.

3. 设 $S(x)=\begin{cases}x^3+x^2, 0\le x\le 1\\ 2x^3+bx^2+cx-1, 1\le x\le 2\end{cases}$，是以 0，1，2 为节点的三次样条函数，则 b=________，c=________.

4. 设 $[q_k(x)]_{k=0}^{\infty}$ 是区间［0，1］上权函数为 $\rho(x)=x$ 的最高项系数为 1 的正交多项式族，其中 $q_0(x)=1$，则 $\int_0^1 xq_k(x)dx=$________，$q_2(x)=$________.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$，当 $a\in$________时，必有分解式 $A=LL^T$，其中 L 为下三角阵，当其对角线元素 $L_{ii}(i=1,2,3)$ 满足条件________时，这种分解是唯一的.

二、（12 分） 设 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}, x_0=\frac{1}{4}, x_1=1, x_2=\frac{9}{4}$，

（1）试求 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},\frac{9}{4}]$ 上的三次 Hermite 插值多项式 $H(x)$ 使满足 $H(x_i)=f(x_i), i=0,1,2$，$H'(x_1)=f'(x_1)$.

（2）写出余项 $R(x)=f(x)-H(x)$ 的表达式.

三、（14 分） 设有解方程 $12-3x+2\cos x=0$ 的迭代公式为 $x_{n+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_n$，

- 表白/吃瓜
- 帮问/互助
- 二手集市
- 失物/捞人
- 组局/交友
- 吐槽/避雷

中大校园论坛

中大表白墙的微信小程序社区
你发布的帖子全校都可以看到

中大校园论坛，中大人都在玩

（1） 证明 $\forall x_0 \in R$ 均有 $\lim_{x\to\infty} x_n = x^*$（$x^*$ 为方程的根）；

（2） 取 $x_0 = 4$，用此迭代法求方程根的近似值，误差不超过 10^{-3}，列出各次迭代值；

（3）此迭代的收敛阶是多少？证明你的结论.

四、(10 分) 试确定常数 A，B，C 和 a，使得数值积分公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx Af(-a) + Bf(0) + Cf(a)$$

有尽可能高的代数精度. 试问所得的数值积分公式代数精度是多少？它是否为 Gauss 型的？

五、(10 分) 设有常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，试用 Taylor 展开原理构造形如 $y_{n+1} = \alpha(y_n + y_{n-1}) + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$ 的方法，使其具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项.

六、(15 分) 已知方程组 $Ax=b$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

（1） 试讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解此方程组的收敛性.

（2） 若有迭代公式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a(Ax^{(k)} + b)$，试确定一个$\alpha$的取值范围，在这个范围内任取一个$\alpha$值均能使该迭代公式收敛.

七、（9 分） 方程组$Ax = b$，其中$\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$，A 是对称的且非奇异. 设 A 有误差$\delta\mathrm{A}$，则原方程组变化为$(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})(\mathrm{x} + \delta\mathrm{x}) = \mathrm{b}$，其中$\delta\mathrm{x}$为解的误差向量，试证明

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \le \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right| \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

其中 λ_1 和 λ_2 分别为 A 的按模最大和最小的特征值.