课室名称：________ 座位号：________ 任课教师：________ 姓名：________ 专业：________ 学号：________ 学院：________ 年级：________

装 订 密 封 线

中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一）（I）》

学年学期：2020 学年第 1 学期　　　　学院/系：数学学院

考试方式：闭卷　　　　考试时长：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
分数												
签名												

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

------- 以下为试题区域，共十一道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答。 -------

得分

一、　证明数列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}\ \ldots,$$

收敛，并求其极限.（10 分）

证明

1、设 $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}$，则 a_n 单调上升；

2、$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$；

3、$a_1\le 2$，如果 $a_{n-1}\le 2$，则 $a_n\le 2$，根据数学归纳法，$a_n\le 2$；

4、根据实数公理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设为 A；

5、$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}}$，$A=\sqrt{2+A}$，$A^2=2+A$，$A^2-A-2=0$，$A=2$；

得分

二、　求下列数列或函数的极限（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^x}+\dfrac{1}{x}\right)$.　　　　2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2+1-e^x}{x(1-e^x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2+1-e^x}{x\cdot x}\right)$$ $-x$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2x-e^x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-e^x}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$ $-\frac{1}{2}$

2. $$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}x}=e^0=1$$

得分

三、　证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.（8 分）

证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x+\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\cos t+\sin t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x+\sin x}dx$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$

得分

四、　求下列不定积分（共 **2** 小题，每小题 **5** 分，共 **10** 分）：

1、$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解

1. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin xdx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{d\cos x}{2+\cos x} - \frac{1}{6}\int \frac{d\cos x}{1-\cos x} - \frac{1}{2}\int \frac{d\cos x}{1+\cos x}$

$= \frac{1}{3}\ln|2+\cos x| + \frac{1}{6}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + C$

2、$\int 2x\arctan xdx$.

$= \int \arctan xdx^2 = x^2\arctan x - \int x^2 d\arctan x$

$= x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= x^2\arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= x^2\arctan x - x + \arctan x + C$

得分

五、　设 $f(x)=(1-x^2)\sin x$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的带皮亚诺余项的 7 阶泰勒展式，由此求 $f^{(7)}(0)$　的值.（**8** 分）

解

$$f(x)=(1-x^2)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^8\right)\right)$$

$$= x-\left(1+\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\right)x^5-\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)x^7+o\left(x^8\right)$$

所以

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!}=-\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right),$$

$$f^{(7)}(0)=-\left(\frac{7!}{5!}+1\right)=-43$$

得分

六、 过$(1,0)$作曲线$y=\ln(x-1)$的切线，求切线、x轴以及曲线$y=\ln(x-1)$所围成的图形的面积.（10 分）

解

1、设切点为$\left(x_0,\ln\left(x_0-1\right)\right)$，则

$$\frac{\ln\left(x_0-1\right)-0}{x_0-1}=\frac{1}{x_0-1},\quad \ln\left(x_0-1\right)=1,\quad x_0=1+e$$

2、

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_2^{1+e}\ln(x-1)dx\\&=\frac{e}{2}-x\ln(x-1)\Big|_2^{1+e}+\int_2^{1+e}\frac{x}{x-1}dx\\&=\frac{e}{2}-x\ln(x-1)\Big|_2^{1+e}+\int_2^{1+e}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx\\&=\frac{e}{2}-x\ln(x-1)\Big|_2^{1+e}+(e-1)+\ln(x-1)\Big|_2^{1+e}=\frac{e}{2}-1\end{aligned}$$

得分

七、 求数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$的最大项.（8 分）

解

1、 求函数$y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$的驻点。

$$y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(1-\ln x\right)$$

唯一驻点$x=e$

2、 讨论函数的单调性。

当$x<e$时，$y'>0$，函数在$\left(0,e\right]$单调上升；当$x>e$时，$y'<0$，函数在$\left[e,+\infty\right)$单调下降；

3、 $3^2>2^3$，$\sqrt[3]{3}>\sqrt[2]{2}$，所以$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$的最大项在$n=3$达到

得分

八、 求函数$y=\dfrac{x^2}{1+x}$的单调区间、凹凸性、极值和渐近线方程.（10 分）

解

$$y'=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1+x)^2}=-\frac{x(x-2)}{(1+x)^2}$$

$$y''=\frac{2(1-x)(1+x)^2-2(1+x)x(2-x)}{(1+x)^4}=\frac{2(1-2x)}{(1+x)^3}=\frac{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+x)^3}$$

得分

九、 求二元函数$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left(x^3+y^4\right)}{x^2+y^2}$的极限.（8 分）

解 $(x,y)\to(0,0)$等价于$\rho\to 0$，不妨设$\rho<1$，则

$$\left|\frac{\sin\left(x^3+y^4\right)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}=\rho\left(\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta\right)<2\rho$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^4\right)}{x^2+y^2}=0$$

得分

十、　求过点 $A(2,1,3)$，并与直线

$$L:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$$

垂直的直线方程.（8 分）

解　设垂足为$(-2+2t,2+t,-t)$，则垂线的方向为

$$(-4+2t,1+t,-t-3),$$

两直线垂直，两直线的方向的内积等于 0，所以

$$(-4+2t)\cdot 2+(1+t)+(t+3)=0,\quad t=\frac{2}{3}。$$

垂线的方向为$\left(-\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{11}{3}\right)$，垂线方程为

$$\frac{x-2}{-\frac{8}{3}},=\frac{y-1}{\frac{5}{3}}=\frac{z-3}{-\frac{11}{3}}$$

得分

十一、　设 $w=f(x+y+z,xyz)$，且 f 具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$。

（10 分）

解

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2';$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_1'+yzf_2')$$

$$\overset{\text{四则运算}}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yf_2'+yz\frac{\partial f_2'}{\partial z}$$

$$=f_{11}''+xyf_{12}''+yf_2'+yz(f_{21}''+xyf_{22}'')$$

$$=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'.$$