中山大学《线性代数》2019-2020 学年第一学期期末试卷

满分 100 分

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$ 且 $|A|=4, |B|=1$ 则 $|A+B|=$______

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-tx_2x_3+4x_3^2$ 是正定的，则 t 的取值范围__________

3. A 为 3 阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^*|=$___________

4. 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是___________

5. 设 A 为 n 阶方阵，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 为 A 的 n 个列向量，若方程组 $AX=0$ 只有零解，则向量组($\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$)的秩为 ______

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

6. 设线性方程组 $\begin{cases} bx_1-ax_2 = -2ab \\ -2cx_2+3bx_3=bc \\ cx_1 + ax_3=0 \end{cases}$，则下列结论正确的是（ ）

(A)当 a,b,c 取任意实数时，方程组均有解　(B)当 a＝0 时，方程组无解

(C) 当 b＝0 时，方程组无解　(D)当 c＝0 时，方程组无解

7. A.B 同为 n 阶方阵，则（ ）成立

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　(B) $AB=BA$

(C) $|AB|=|BA|$　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

8. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{bmatrix}, P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 则（ ）成立

(A) AP_1P_2　(B) AP_2P_1　(C) P_1P_2A　(D) P_2P_1A

9. A,B 均为 n 阶可逆方阵，则 AB 的伴随矩阵 $(AB)^*=$（ ）

(A) A^*B^*　(B) $|AB|A^{-1}B^{-1}$　(C) $B^{-1}A^{-1}$　(D) B^*A^*

10. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，$r(A)=r<n$，那么 A 的 n 个列向量中（ ）

（A）任意 r 个列向量线性无关

(B) 必有某 r 个列向量线性无关

(C) 任意 r 个列向量均构成极大线性无关组

(D) 任意 1 个列向量均可由其余 n－1 个列向量线性表示

三、计算题（每题 7 分，共 21 分）

11. 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$。求 $(A-2E)^{-1}$

12. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$

13. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，求 a 和 b 的值

四、计算题（每题 7 分，共 14 分）

14. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，求 k 的值

15. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（1）问 λ 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关（2）当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关时，将 β 表示成它们的线性组合

五、证明题（每题 7 分，共 14 分）

16. 设 3 阶方阵 $B\neq 0$，B 的每一列都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-\ x_3=0\end{cases}$ 的解

（1）求 λ 的值（2）证明：$|B|=0$

17. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 n 维线性无关向量，设

$\beta_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}\alpha_3\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}\alpha_4\\0\end{pmatrix}$，证明：向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关

六、 解答题（10 分）

18．方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$，满足什么条件时，方程组

（1） 有惟一解（2）无解（3）有无穷多解，并在此时求出其通解

七、解答题（11 分）

19. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+2x_2{}^2+3x_3{}^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，试写出二次型的矩阵，并用正交变换法化二次型为标准型。

（一）1、$\underline{20}$　2、$\underline{-4\prec t\prec 4}$　3 $\underline{-\frac{16}{27}}$　4 $\underline{\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0}$　5、$\underline{n}$

（二）ACCDB

（三）11、$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　12、(x^4)　13、($a=0,b=-2$)

（四）14、($k=-2$或$k=0$)　15、($(1)\lambda\neq-1$　$(2)\beta=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}(\lambda-1)\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$)

（五）16 （ $(1)\lambda=1$ (2)略 ）　17 略

（六）18、((1) $\lambda\neq-3$且$\lambda\neq0$;(2) $\lambda=0$;(3) $\lambda=-3$,解略)

（七）19、($\lambda=-1,2,5$,其余略)