中山大学《离散数学》2019-2020 学年第二学期期末试卷

满分 100 分

一、填空（每空 2 分）

1、P：你努力，Q：你失败。“除非你努力，否则你将失败”的翻译为 ____________________；“虽然你努力了，但还是失败了”的翻译为 ____________________ 。

2、论域 D={1，2}，指定谓词 P

P (1,1)	P (1,2)	P (2,1)	P (2,2)
T	T	F	F

则公式 $\forall x \exists y P(y,x)$ 真值为 ____________________ 。

2、设 S={a_1，a_2，…，a_8}，B_i 是 S 的子集，则由 B_{31} 所表达的子集是 ____ 。

3、设 A={2，3，4，5，6} 上的二元关系 $R=\{<x,y>|\, x<y \vee x\text{是质数}\}$，则 R= ____（列举法）。

R 的关系矩阵 M_R=

____ 。

5、设 A={1，2，3}，则 A 上既不是对称的又不是反对称的关系 R= ______________________ ；

A 上既是对称的又是反对称的关系 R= ________________________ 。

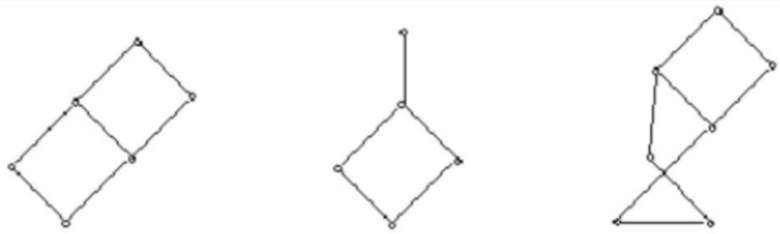
6、设代数系统<A，*>，其中 A={a，b，c}，

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

则幺元是 ________________ ；是否有幂等性 ______；是否有对称性________ 。

7、4 阶群必是 ________________ 群或 ________________ 群。

8、下面偏序格是分配格的是 ______________ 。



(A)　　　　(B)　　　　(C)

9、n 个结点的无向完全图 K_n 的边数为 ________________，欧拉图的充要条件是

____ 。

10、公式 $(P\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((\neg P\vee Q)\wedge\neg R$ 的根树表示为

____ 。

二、选择 **20%** （每小题 **2** 分）

1、在下述公式中是重言式为（　　　　）

1、在下述公式中是重言式为（　　　　　）

A. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$；B. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$；

C. $\neg(P \to Q) \wedge Q$；　　D. $P \to (P \vee Q)$ 。

2、命题公式 $(\neg P \to Q) \to (\neg Q \vee P)$ 中极小项的个数为（　　　），成真赋值的个数为（　　　）。

A. 0;　　B. 1;　　C. 2;　　D. 3 。

3、设 $S = \{\Phi, \{1\}, \{1,2\}\}$，则 2^S 有（　　　）个元素。

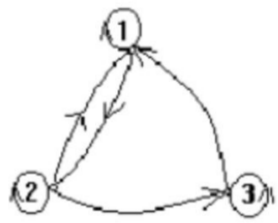
A. 3;　　B. 6;　　C. 7;　　D. 8 。

4、设 $S = \{1, 2, 3\}$，定义 $S \times S$ 上的等价关系

$R = \{<<a,b>,<c,d>| <a,b> \in S \times S, <c,d> \in S \times S, a+d = b+c\}$ 则由 R 产 生的 $S \times S$ 上一个划分共有（　　　）个分块。

A. 4;　　B. 5;　　C. 6;　　D. 9 。

5、设 $S = \{1, 2, 3\}$，S 上关系 R 的关系图为



则 R 具有（　　　）性质。

A. 自反性、对称性、传递性；　　B. 反自反性、反对称性；

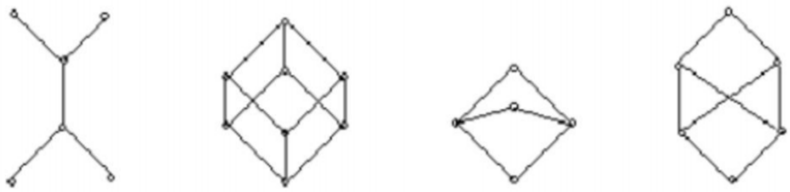
C. 反自反性、反对称性、传递性；　　D. 自反性 。

6、设 +,∘ 为普通加法和乘法，则（　　　　）$<S, +, \circ>$ 是域。

A. $S = \{x \mid x = a + b\sqrt{3},\ a,b \in Q\}$　B. $S = \{x \mid x = 2n,\ a,b \in Z\}$

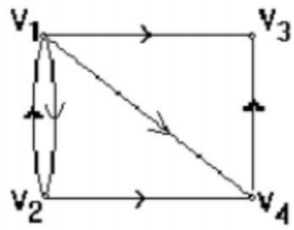
C. $S = \{x \mid x = 2n+1,\ n \in Z\}$　　D. $S = \{x \mid x \in Z \wedge x \geq 0\} = \mathrm{N}$ 。

7、下面偏序集（　　　）能构成格。



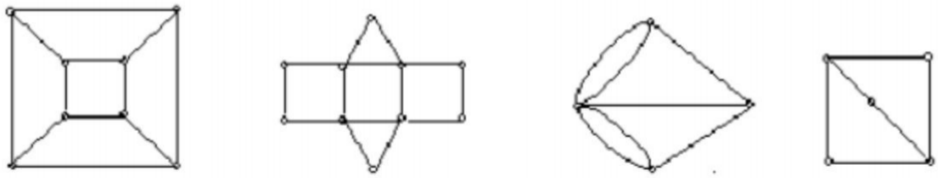
[A] [B] [C] [D]

8、在如下的有向图中，从 V_1 到 V_4 长度为 3 的道路有（　　　）条。



A．1；　　B．2；　　C．3；　　D．4 。

9、在如下各图中（　　）欧拉图。



[A] [B] [C] [D]

10、设 R 是实数集合，“×”为普通乘法，则代数系统<R ，×> 是（　　　）。

A．群；　　B．独异点；　　C．半群 。

三、证明 46%

1、设 R 是 A 上一个二元关系，

$S=\{<a,b>|(a,b\in A)\wedge(\text{对于某一个}\ c\in A,\ \text{有} <a,c>\in R\text{且} <c,b>\in R)\}$ 试证明若 R 是 A 上一个等价关系，则 S 也是 A 上的一个等价关系。(9 分)

2、用逻辑推理证明：

所有的舞蹈者都很有风度，王华是个学生且是个舞蹈者。因此有些学生很有风度。(11 分)

3、若 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数，定义一个函数 $g:B\to 2^{A}$ 对任意 $b\in B$ 有 $g(b)=\{x|(x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$，证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是从 B 到 2^{A} 的单射。(10 分)

4、若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定连通。(8 分)

5、设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 是 Hamilton 图 (8 分)

四、计算 14%

1、设 $<Z_6,+_6>$ 是一个群，这里 $+_6$ 是模 6 加法，$Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$，试求出 $<Z_6,+_6>$ 的所有子群及其相应左陪集。(7 分)

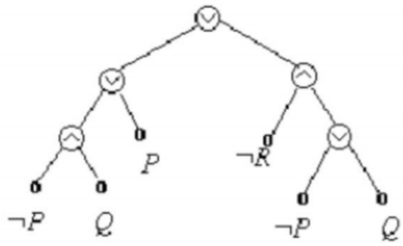
2、权数 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 构造一棵最优二叉树。(7 分)

一、 填空 **20%**（每小题 **2** 分）

1 、 $\neg P \to Q$ ； $P \wedge Q$ 2 、 T 3 、 $B_{31} = B_{00011111} = \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ 4 、 R={<2,2>,<2,3>,<2,4>,<2,5>,<2,6>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<3,6>,<4,5>,<4,6>,<5,2>,<5,3>,<5,4>,<5,5>,<5,6>}；$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5、R={<1,2>,<1,3>,<2,1>}；R={<1,1>,<2,2>,<3,3>}

6、a ；否；有 7、Klein 四元群；循环群 8、 B 9、$\frac{1}{2}n(n-1)$；图中无奇度结点且连通

10 、



二、 选择 **20%**（每小题 **2** 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、D	D；D	D	B	D	A	B	B	B	B、C

三、 证明 **46%**

1、(9 分)

（1） S 自反的

$\forall a \in A$，由 R 自反，$\therefore (<a,a>\in R) \wedge (<a,a>\in R)$，$\therefore <a,a>\in S$

（2） S 对称的

$\forall a,b \in A$

$<a,b>\in S \Rightarrow (<a,c>\in R) \wedge (<c,b>\in R)$ $\cdots S$ 定义

$\Rightarrow (<a,c>\in R) \wedge (<c,b>\in R)$ $\cdots R$ 对称

$\Rightarrow <b,a>\in S$ $\cdots R$ 传递

（3） S 传递的

$\forall a,b,c \in A$

$<a,b> \in S \wedge <b,c> \in S$

$\Rightarrow (<a,d> \in R) \wedge (<d,b> \in R) \wedge (<b,e> \in R) \wedge (<e,c> \in R)$

$\Rightarrow (<a,b> \in R) \wedge (<b,c> \in R)$ $\cdots R$ 传递

$\Rightarrow <a,c> \in S$ $\cdots S$ 定义

由（1）、（2）、（3）得；S 是等价关系。

2、11 分

证明：设 P(x)：x 是个舞蹈者； Q(x) ：x 很有风度； S(x)：x 是个学生； a：王华

上述句子符号化为：

前提：$\forall x(P(x) \to Q(x))$、$S(a) \wedge P(a)$ 结论：$\exists x(S(x) \wedge Q(x))$ ……3 分

① $S(a) \wedge P(a)$ P

② $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P

③ $P(a) \to Q(a)$ US②

④ $P(a)$ T①I

⑤ $Q(a)$. T③④I

⑥ $S(a)$ T①I

⑦ $S(a) \wedge Q(a)$ T⑤⑥I

⑧ $\exists x(S(x) \wedge Q(x)$ EG⑦ ……11 分

3、10分

证明 ：$\forall b_1, b_2 \in B, (b_1 \neq b_2) \because f$ 满射 $\therefore \exists a_1, a_2 \in A$

使$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$, 且 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 由于f是函数， $\therefore a_1 \neq a_2$

又 $g(b_1) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b_1)\}$， $g(b_2) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b_2)\}$

$\therefore a_1 \in g(b_1), a_2 \in g(b_2)$ 但 $a_1 \notin g(b_2), a_2 \notin g(b_1)$ $\therefore g(b_1) \neq g(b_2)$

由b_1, b_2任意性知 ， g为单射 。

4、8 分

证明：设 G 中两奇数度结点分别为 u 和 v，若 u，v 不连通，则 G 至少有两个连通分支 G_1、G_2，使得 u 和 v 分别属于 G_1 和 G_2，于是 G_1 和 G_2 中各含有 1 个奇数度结点，这与图论基本定理矛盾，因而 u，v 一定连通。

5、8 分

证明： 证 G 中任何两结点之和不小于 n。

反证法：若存在两结点 u，v 不相邻且$d(u)+d(v)\le n-1$,令$V_1=\{u,v\}$，则 G-V_1是具有 n-2 个结点的简单图，它的边数$m'\ge\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)$，可得$m'\ge\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$，这与$G_1$=G-$V_1$为 n-2 个结点为简单图的题设矛盾，因而 G 中任何两个相邻的结点度数和不少于 n。

所以 G 为 Hamilton 图.

四、 计算 **14%**

1、7 分

解：子群有<{[0]},$+_6$>；<{[0],[3]},$+_6$>；<{[0],[2],[4]},$+_6$>；<{Z_6},$+_6$>

{[0]}的左陪集：{[0]}，{[1]}；{[2]}，{[3]}；{[4]}，{[5]}

{[0]，[3]}的左陪集：{[0]，[3]}；{[1]，[4]}；{[2]，[5]}

{[0]，[2]，[4]}的左陪集：{[0]，[2]，[4]}；{[1]，[3]，[5]}

Z_6的左陪集：Z_6 。

2、7 分