一、填空：（每空 2 分，共 34 分）

1、n 阶行列式 D $|a_{ij}|$ 按照定义的完全展开式为 ________________ ;该行列式的展开式中共 ____ 项。

2、设向量组 $_1$ 1 1 a，$_2$ 2 1 a，$_3$ 3 2 1 线性相关，则 a ________，向量组的一个极大线性无关组为 ____________。

3、 A 为三阶矩阵，且 $|A|$ $\frac{1}{3}$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|\ 2A^3|$ ____________，$|6A^* \quad A^{1}|$ __________。

4、 n 阶矩阵 A 不可逆，且 A 的伴随矩阵 A^* 0，则线性方程组 AX b 的一个基础解系中含有 ________个解向量。

5、设矩阵 A $_1$ $_2$ $_3$ $_4$，矩阵 B $_1$ 2 $_2$ 2 $_1$ $_2$ $_2$ $_3$ 3 $_3$ $_4$，且 $|A|$ $\frac{2}{5}$，则 $|\ B^{1}|$ =______________，$|A \quad B|$ ____________。

6、 A 为三阶矩阵，将 A 的第二列与第三列交换得到矩阵 B，再把矩阵 B 的第一列加到第二列得到矩阵 C，则满足 AQ C 的可逆矩阵 Q ＝________________。

7、设向量 $(1\ 0\ 1)^T$，$(1\ 1\ 2)^T$，则矩阵 A ^{T} ________________，

A^{100} _______________。

8、若矩阵 A $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ 与对角形矩阵 B 相似，则 B ________，且 $|A^3 \quad I|$ _______。

9、设矩阵 A 的秩为 2，且 2A I，I A 均不可逆，则 A 的特征值为 _______________，实对称矩阵 B 与 A 相似，则二次型 f x_1, x_2, x_3 $X^T BX$ 的规范形是 ____________，此二次型_______（填是或不是）正定二次型。

二、计算题（要求写出计算过程）

1、计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3\ a & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3\ a & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1\ a \\ 1\ a & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2、求齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 0的一个标准正交的基础解系。

3、设矩阵 $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足方程 $AXA^* \quad 2XA^* \quad I$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，求矩阵 X。

4、设矩阵 $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值 4，求参数 a 的值，并判断矩阵 A 能否与对角形矩阵相似，说明理由。

三、设线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad 1 \\ 4x_1 \quad 3x_2 \quad 5x_3 \quad x_4 \quad 1 \\ 2x_1 \quad x_2 \quad 3x_3 \quad 3x_4 \quad a \end{cases}$，问 a 取何值时，方程组有解；有解时求出方程组的通解。

四、（14 分）已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)\quad 17x_1^2\quad 14x_2^2\quad 14x_3^2\quad 4x_1x_2\quad 4x_1x_3\quad 8x_2x_3$

1、写出二次型的矩阵 A

2、用正交变换法将二次型化为标准形，并写出所做正交变换 $X\quad TY$ 及二次型标准形。

五、证明题：

1、设矩阵 A 满足 $A^2\quad 2A\quad 5I\quad 0$，证明：$A$ 可逆，并求 A^{1}。

2、设 $_1$ 与 $_2$ 是非齐次线性方程组 $AX\quad b$ 的两个不同解，其中 A 为 $m\quad n$ 矩阵，是对应的齐次线性方程组 $AX\quad 0$ 的一个非零解，证明：

（1）向量组 $_1$，$_1\quad _2$ 线性无关；

（2）若矩

阵的秩 $r(A)\quad n\quad 1$，则向量组 ，$_1$，$_2$ 线性相关。

一、填空（每空 2 分，共 34 分）

1、$\sum_{(j_1\ \ j_n)}(\ 1)^{(j_1\ \ j_n)}a_{1j_1}\quad a_{nj_n}$；$n!$　　2　　、$\frac{1}{2}$；$_1$，$_2$

3、$\frac{8}{27}$；3　　4　　、1

5、　2；0　　6　　、$\begin{matrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{matrix}$

7、$\begin{matrix}1&1&2\\0&0&0\\1&1&2\end{matrix}$；　A　　8　　、$\frac{1}{2}$；　14

9、$0,\frac{1}{2},\ 1$；$z_1^2\quad z_2^2$；不是

二、计算题

1、解： $D\quad \begin{vmatrix} 2\ \ a & 3\ \ a & 3 & 1 \\ 2\ \ a & 3 & 3\ \ a & 1 \\ 2\ \ a & 3 & 3 & 1\ \ a \\ 2\ \ a & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ -------2 分

$(2\quad a)\begin{vmatrix} 1 & 3\ \ a & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3\ \ a & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1\ \ a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2\quad a)\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ---------4 分

$a^3(2\quad a)$ ------7 分

2、解： $A\quad \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ ---------2 分

所以方程组的一个基础解系为 $_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix},\ _2 \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ ------------4 分

标准正交化得一标准正交的基础解系为： $q_1 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix},\ q_2 \quad \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}$ ---------7 分

3、解：因为 $|A|\quad 3$，由 $AXA^*\quad 2XA^*\quad I$ 可得 $3AX\quad 6X\quad A$,

所以 $X\quad 3(A\quad 2I)^{1} A$------------------ 4 分

$A\quad 2I\quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ ，$(A\quad 2I)^{1}\quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ ----------- 6 分

$X\quad \begin{matrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$ -------------- 8 分

4、解：由 $|4I \quad A| \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \quad 4 \quad 6a \quad 0 \quad a \quad \frac{2}{3}$ -------------4 分

因为 $(4I \quad A) \quad \begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$，$r(4I \quad A) \quad 2$，只有一个线性无关的特征向量，所以矩阵不能与对角形矩阵相似。 ---------8 分

三、解：$\tilde{A} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & a \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & a \quad 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \quad 1 \end{matrix}$

所以 $a \quad 1$时，方程组有解 -----------------------2 分

方程组为 $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ & x_2 & x_3 & 5x_4 & 3 \end{matrix}$，则一般解为 $X \quad \begin{matrix} 2 \quad 2x_3 \quad 4x_4 \\ 3 \quad x_3 \quad 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$ ---4 分

方程组特解为：$_0 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0^T$，导出组的一个基础解系为 $_1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0^T$，$_2 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 1^T$ -------------10 分

所以方程组的通解为：$X \quad _0 \quad k_1 \ _1 \quad k_2 \ _2$，$k_1, k_2$为任意常数 ------------------12 分

四、1、$A \quad \begin{matrix} 17 & 2 & 2 \\ 2 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{matrix}$ ------------------2 分

2、$| \ I \quad A| \quad (\quad 18)^2 (\quad 9)$，所以 $_1 \quad _2 \quad 18, \ _3 \quad 9$ ----------5 分

对于 $_1$ $_2$ 18, 可得两个线性无关的特征向量 $_1$ $2\ \ 1\ \ 0^T$, $_2$ $2\ \ 0\ \ 1^T$,

施密特正交化可得两个标准正交的特征向量 q_1 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ $2\ \ 1\ \ 0^T$,

q_2 $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ $2\ \ 4\ \ 5^T$---9 分

对于 $_3$ 9，可得 $_3$ $1\ \ 2\ \ 2^T$，标准化得 q_3 $\frac{1}{3}1\ \ 2\ \ 2^T$---------11 分

令 T q_1 q_2 q_3，则在 X TY 下，二次型化为 f $18y_1^2$ $18y_2^2$ $9y_3^2$--------14 分

五、证明题

1、证明：因为 $(A\ \ I)(A\ \ 5I)$ I ------------------3 分

所以 A 可逆，且 $(A\ \ I)^{1}$ $A\ \ 5I$。------------------5 分

2、证明：（1）设 k_1 $_1$ $k_2(\ _1\ \ _2)$ 0，则 k_1A $_1$ $k_2A(\ _1\ \ _2)$ 0--------1 分

即 k_1b $k_2(b\ \ b)$ 0，所以 k_1 0，从而 $k_2(\ _1\ \ _2)$ 0，由 $_1$ $_2$ 推出 k_2 0

所以 $_1$ 和 $_1$ $_2$ 线性无关 -----------------3 分

（2）因为 n $r(A)$ 1，所以 和 $_1$ $_2$ 线性相关，即存在不全为零的 k_1, k_2 使得

k_1 $k_2(\ _1\ \ _2)$ 0， k_1 0，否则必有 k_2 0 与 k_1, k_2 不全为零矛盾。

所以 $\frac{k_2}{k_1}$ $_1$ $\frac{k_2}{k_1}$ $_2$，即 ，$_1$，$_2$ 线性相关。 ---------------5 分