中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一）（I）》（A 卷）

学年学期：2018 学年第 1 学期　　　　姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿

学 院/系：数学学院　　　　学院：＿＿＿＿＿　　年级专业：＿＿＿＿＿＿

考试方式：闭卷/开卷　　　　任课教师：＿＿＿＿＿＿

考试时长：120 分钟　　　　成绩评定：＿＿＿＿　　阅卷教师：＿＿＿＿＿＿

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

--------- 以下为试题区域，共 13 道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答 ---------

得分

一. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^x}-\dfrac{1}{x}\right)$.　（8 分）

得分

二．求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$.　（8 分）

得分

三．求方程 $y\sin x-\cos\left(x^2+y\right)=3$ 所确定的隐函数的导数.（8 分）

得分

四．　求不定积分 $\int\sqrt{e^x-2}dx$.（8 分）

得分

五． 求定积分 $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.（8 分）

得分

六． 求极坐标系下的封闭曲线$\rho = a\sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$的全长，其中$a>0$.（8 分）

得分

七． 求原点到曲面$(x-y)^2+z^2=1$的最短距离.（8 分）

得分

八． 求函数 $f(x)=x^3e^{-x}$ 的极值点与极值、拐点和渐近线.（8 分）

得分

九． 求通过两直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 和 $l_2:\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面方程.（8 分）

得分

十． 求函数 $F(x,y,z)=\dfrac{yz}{x^2}$ 在 $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$ 处沿曲面 $x^2+2y^2+\dfrac{1}{4}z^2=1$ 的外法线的方向导数。（8 分）

得分

十一．讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性、偏导函数的存在性及 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。（8 分）

得分

十二．求 $f(x)=(1+\cos x)^2$ 在 $x=0$ 点的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒展式，并求 $f^{(n)}(0)$ 的值.（6分）

得分

十三．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$。令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$，

证明：

1、$F^{'}(x)\geq 2$；

2、方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 上有且仅有一个根.（6分）