

# Graph : boîte à outils Matlab pour la manipulation de graphes géométriques

D. Legland

11 août 2008

## Résumé

En traitement d'images ou en modélisation, on est souvent amené à manipuler des structures de données qui sont bien représentées sous la forme de graphe. J'ai développé plusieurs fonctions sous matlab, que j'ai regroupées dans une bibliothèque relativement autonome. Ce document présente les structures de données utilisées, ainsi que les différentes fonctions disponibles.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Représentation des données</b>	<b>3</b>
2.1	Variables séparées . . . . .	3
2.2	Structure de données . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Création de graphes</b>	<b>4</b>
3.1	Création simple . . . . .	5
3.2	Graphes d'une image . . . . .	5
3.3	Graphes géométriques . . . . .	6
3.4	Diagrammes de Voronoï . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Opérations sur les graphes</b>	<b>6</b>
4.1	Extraction d'informations . . . . .	6
4.2	Opérations de bas niveau . . . . .	7
4.3	Opérations générales . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Opérations spécifiques</b>	<b>9</b>
5.1	Filtrage sur les sommets d'un graphe . . . . .	9
5.2	Opérations sur les graphes géométriques . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Fonctions d'affichage</b>	<b>11</b>
6.1	Affichage général . . . . .	11
6.2	Affichage d'informations sur le graphe . . . . .	11

# 1 Introduction

Un graphe est constitué d'un ensemble de sommets ou noeuds, et d'un ensemble d'arêtes qui décrivent les relations entre ces noeuds. J'appelle graphe géométrique un graphe dont les sommets sont des points du plan ou de l'espace (On peut généraliser à des points de  $\mathbb{R}^d$ , mais je n'en ai pas encore eu l'utilité).

Qu'attend-on d'une bibliothèque de manipulation de graphes ? On peut organiser les attentes en plusieurs types de tâches :

- Génération de graphes (quelques modèles types, mais en fait la génération se fait le plus souvent à partir de données réelles)
- Modification de graphes existants : ajout et suppression de sommets ou d'arêtes, fusion de graphes, extraction de sous-graphes...
- Algorithmes classiques sur les graphes. Par exemple, test de planarité d'un graphe, colorabilité avec un nombre donné de couleurs, mesures telles que le diamètre, algorithme de Dijkstra...
- Caractérisation d'un graphe. Cette partie est peut-être plus spécifique. L'idée est de construire une application qui à un graphe donné associe une mesure, qui peut être un scalaire, un vecteur, une matrice...
- Opérations morphologiques sur des graphes valués. En fait, on peut définir assez simplement l'érosion et la dilatation (on assigne à chaque sommet la valeur max/min trouvé sur lui ou ses voisins), et de fait l'ouverture et la fermeture. Le principe peut se généraliser au calcul de la moyenne, de la médiane... On peut aussi envisager une pondération en fonction de la distance (en nombre d'arêtes) au sommet considéré.

## 2 Représentation des données

Un graphe peut être représenté de deux manière différentes. Soit en déclarant séparément les tableaux décrivant les sommets et les arêtes, soit en les regroupant dans une stucture de données.

### 2.1 Variables séparées

Les différentes fonctions sur les graphes utilisent en général les deux premiers argument sous la forme :

**nodes** : un tableau contenant les coordonnées  $x$  et  $y$  (éventuellement  $z$  pour les graphes 3D) de chaque sommet. Chaque sommet est identifié par son indice, qui correspond à sa ligne dans le tableau des sommets.

**edges** : un tableau de 2 colonnes et d'autant de lignes que d'arêtes contenant pour chaque arête, l'indice du sommet source et l'indice du sommet cible. Pour les graphes non orientés, on prend comme convention de placer l'indice le plus faible en premier. De plus, les arêtes sont classées en fonction de la valeur du premier indice.

Enfin, il est possible de considérer un troisième tableau décrivant les faces ou les cellules solides du graphe. On s'écarte de la définition de graphe pour considérer plutôt des complexes cellulaires euclidiens, mais c'est assez pratique pour manipuler des polyèdres.

**faces** : un tableau de cellules, dans lequel chaque cellule contient les indices des **sommets** d'une face. Si le polyèdre est régulier, toutes les faces ont le même nombre de sommets, et on peut remplacer le tableau de cellules par un tableau numérique.

**cells** : un tableau de cellules, dans lequel chaque cellule contient les indices des **faces** de chaque volume.

## 2.2 Structure de données

Certaines fonctions acceptent une structure de données, qui contient les champs suivants (ceux avec une étoile sont optionnels) :

**nodes** un tableau contenant les coordonnées des sommets

**edges** un tableau contenant les indices des sommets de départ et de fin de l'arête

**\*faces** le tableau des indices de sommets pour chaque face

**\*cells** le tableau des indices de faces pour chaque cellule

## 3 Création de graphes

Quelques fonctions qui créent un graphe. Les fonctions qui créent un graphe à partir d'une image auraient besoin d'un sérieux dépoussiérage.

## 3.1 Création simple

### 3.1.1 `graphStructure`

Renvoie une structure de données à partir des différents tableaux de données du graphe

## 3.2 Graphes d'une image

Ces fonctions prennent en entrée une image, en général binaire, et renvoient une structure de graphe, qui peut être utilisée pour visualiser ou appliquer d'autres types de traitements sur l'image.

Il existe aussi la fonction `imRAG`, qui calcule le graphe d'adjacence d'une image labélisée, qui est présente dans le module `imfilters`.

### 3.2.1 `imageGraph`

Crée le graphe équivalent d'une image

### 3.2.2 `boundaryGraph`

Renvoie la frontière d'une image binaire sous la forme d'un graphe.

### 3.2.3 `gcontour2d`

Crée un graphe 2D (sommets, arêtes et faces) à partir d'une image 2D binaire. Permet de dessiner le contour des pixels de manière vectorielle.

### 3.2.4 `gcontour3d`

Crée un graphe 3D (sommets, arêtes et faces) à partir d'une image 3D binaire. Permet de dessiner le contour des voxels de manière vectorielle.

### 3.2.5 `vectorize`

Transforme un squelette binaire en un graphe, en chaînant les pixels adjacents.

### **3.3 Graphes géométriques**

#### **3.3.1 knnGraph**

Crée le graphe des  $k$  plus proches voisins d'un ensemble de points.

#### **3.3.2 euclideanMST**

Crée l'arbre couvrant de poids minimal (utilise la fonction `prim`).

#### **3.3.3 prim**

Calcule un arbre couvrant de poids minimal par l'algorithme de Prim.

### **3.4 Diagrammes de Voronoï**

Quelques fonctions d'adaptation pour manipuler des résultats de calcul de diagramme de Voronoï sous forme de graphe.

#### **3.4.1 boundedVoronoi2d**

Calcule un diagramme de Voronoï dans le plan et renvoie le résultat sous la forme d'un graphe géométrique 2D. Le diagramme est borné par une boîte (coordonnées min et max dans chaque direction), ce qui permet d'avoir un résultat contenant uniquement des faces bornées.

#### **3.4.2 centroidalVoronoi2d**

Crée un diagramme de Voronoï centroïdal dans le plan.

#### **3.4.3 voronoi2d**

Calcule un diagramme de Voronoï dans le plan et renvoie le résultat sous la forme d'un graphe géométrique 2D.

## **4 Opérations sur les graphes**

### **4.1 Extraction d'informations**

Fonctions pour calculer quelques paramètres descriptifs simples d'un graphe.

#### **4.1.1 getNodeDegree**

Renvoie le degré d'un sommet, c'est à dire le nombre d'arêtes connectées à ce sommet. On considère que le graphe n'est pas orienté.

#### **4.1.2 getNodeInnerDegree**

Renvoie le degré entrant d'un sommet, c'est à dire le nombre d'arêtes qui arrivent sur ce sommet. On considère que le graphe est orienté.

#### **4.1.3 getNodeOuterDegree**

Renvoie le degré sortant d'un sommet, c'est à dire le nombre d'arêtes qui émanent sur ce sommet. On considère que le graphe est orienté.

#### **4.1.4 getNeighbourNodes**

Renvoie l'ensemble des sommets adjacents à un sommet donné, dans un graphe non orienté.

#### **4.1.5 getNeighbourEdges**

Renvoie l'ensemble des arêtes adjacentes à un sommet donné, dans un graphe non orienté.

### **4.2 Opérations de bas niveau**

Quelques opérations élémentaires de transformations de graphes. Les sommets et les arêtes sont identifiés par leur(s) indice(s) dans les tableaux de données.

#### **4.2.1 addFace**

Ajoute une face à un graphe. La face est déterminée par l'ensemble des indices des sommets.

#### **4.2.2 removeNode**

Supprime un sommet du graphe, ainsi que l'ensemble des arêtes connectées à ce sommet.

#### **4.2.3 removeNodes**

Supprimer plusieurs sommets d'un graphe, ainsi que l'ensemble des arêtes connectées à un ou plusieurs de ces sommets.

#### **4.2.4 removeEdge**

Supprime une arête dans un graphe.

#### **4.2.5 removeEdges**

Supprime une arête dans un graphe.

#### **4.2.6 removeDoubleEdges**

Supprime les arêtes « doubles », qui partagent les mêmes sommets de départ et d'arrivée, pour n'en garder qu'une. Si on a évité d'avoir des boucles (même sommet de départ et d'arrivée), on obtient un graphe simple.

### **4.3 Opérations générales**

Plusieurs fonctions de fusion ou de simplification de graphes, qui ne font intervenir que la topologie du graphe (on n'utilise pas les coordonnées des points).

#### **4.3.1 mergeGraphs**

Fusionne deux graphes, en raboutant les différents tableaux de données, et en convertissant les indices des tableaux des arêtes et des faces.

#### **4.3.2 mergeNodes**

Fusionne plusieurs sommets dans un graphe, et convertit les références des arêtes.

#### **4.3.3 simplifyGraph**

Simplifie un graphe en supprimant les sommets multiples.



#### **4.3.4 simplifyLines**

Supprime les sommets de degré 2 dans un graphe. Utilisation : dans un graphe obtenu après une ligne de partage des eaux, remplace les frontières des cellules par des arêtes joignant les points triples.

#### **4.3.5 minGraph**

La même chose que simplifyLines, une des deux fonctions doit être de trop...

### **5 Opérations spécifiques**

#### **5.1 Filtrage sur les sommets d'un graphe**

Ces fonctions travaillent sur des graphes valués. Pour chaque sommet, elles récupèrent les valeurs du sommet et de ses voisins, et appliquent un traitement mathématique.

##### **5.1.1 grMean**

Calcule la moyenne sur les étiquettes des voisins.

##### **5.1.2 grMedian**

Calcule la médiane sur les étiquettes des voisins.

##### **5.1.3 grDilate**

Calcule une dilatation morphologique sur les étiquettes des voisins. Équivalent à calculer la valeur max.

##### **5.1.4 grErode**

Calcule une érosion morphologique sur les étiquettes des voisins. Équivalent à calculer la valeur min.

##### **5.1.5 grOpen**

Calcule une ouverture morphologique sur les étiquettes des voisins.

### **5.1.6 grClose**

Calcule une fermeture morphologique sur les étiquettes des voisins.

## **5.2 Opérations sur les graphes géométriques**

Opérations qui utilisent le fait que les sommets soient des points 2D ou 3D.

### **5.2.1 mergeNodesMedian**

Fusionne plusieurs sommets dans un graphe, en utilisant comme sommet résultat un sommet dont les coordonnées sont les médianes des coordonnées des sommets d'entrée. Convertit les références des arêtes.

### **5.2.2 removeMultiplePoints**

Supprime des configurations particulières en triangle dans un graphe.

### **5.2.3 detectePoints**

Détecte des points triples dans une image binaire.

### **5.2.4 detectePoints2**

Détecte des points triples dans une image binaire.

### **5.2.5 cleanGraph**

Retourne un graphe « nettoyé », c'est-à-dire sans points triples, sans arêtes doubles, et sans sommet de degré 2.

### **5.2.6 clipGraph**

Calcule l'intersection du graphe géométrique

### **5.2.7 findPoint**

Trouve l'indice d'un sommet à partir de ses coordonnées.

### **5.2.8 getGraphFace**

Renvoie une face dans un graphe sous la forme d'un polygone 2D ou 3D.

## **6 Fonctions d'affichage**

### **6.1 Affichage général**

#### **6.1.1 drawGraph**

Dessine un graphe dans la fenêtre courante.

#### **6.1.2 drawGraphEdges**

Dessine les arêtes d'un graphe dans la fenêtre courante.

#### **6.1.3 drawGraphFaces**

Dessine les faces d'un graphe dans la fenêtre courante.

#### **6.1.4 drawDigraph**

Dessine un graphe bipartite, donné comme deux listes de sommets, et une liste d'arêtes qui associent un sommet de la liste de départ à un sommet de la liste d'arrivée.

#### **6.1.5 drawDirectedEdges**

Dessine des arêtes orientées (avec une flèche au milieu) dans la fenêtre courante.

### **6.2 Affichage d'informations sur le graphe**

#### **6.2.1 drawEdgeLabels**

Affiche les étiquettes associées à chaque arête.

#### **6.2.2 drawNodeLabels**

Affiche les étiquettes associées à chaque sommet.

### **6.2.3 graph2Contours**

Convertit un graphe en un ensemble de contours.

### **6.2.4 drawSquareMesh**

Dessine un graphe avec uniquement des faces carrées.

### **6.2.5 patchGraph**

Transforme un graphe 3D en patch Matlab.