现代密码学实验报告

实验名称：	实验时间：2024-10-23
学生姓名：庄云皓	学号：22336327
学生班级：22级保密管理	成绩评定：

实验 2-1：有限域运算

实验目的

通过实现有限域F_{131}上的加法、乘法、平方和求逆运算，理解有限域上运算的流程，并进行性能优化。

实验内容

用C/C++ 实现有限域F_{131}上的加法、乘法、平方和求逆运算

输入:

输入由以下部分组成：

- `uint32_t` 需要进行的运算数量
- 若干个运算操作
  - `uint8_t` 进行的运算类型
    - `0x00` 加法
    - `0x01` 乘法
    - `0x02` 平方
    - `0x03` 求逆
  - `uint64_t[3][2]` 进行运算的两个有限域元素
    - 平方和求逆不是二元运算，请忽略第二个元素

  输出： 将每次运算的结果以 `uint64_t[3]`，不使用的高位需要全部设为 `0`

实验原理

加法，最简单的异或运算

乘法进行了优化。对于小学简单乘法，也就是乘数每一位与被乘数乘，将所有结果相异或，

进行优化后，采用karasuba算法将192位拆到PCLMULQDQ指令可以处理的64位然后再乘。

平方采用位运算进行优化实现,用比特串表示的话，b[2*i]=a[i],再对b取模得到结果。

求逆采用两种方法实现，扩展欧几里得算法和费马小定理算法。**提交序号分别为1228和1230**

实验步骤（源代码）

这里的代码采用bitset存，运算的过程参考了F(2^131)下有限域基本运算的实现(c++)_有限域运算编程-CSDN博客，但是做了一些改动，具体见下。

- **预处理部分**： 将输入用bitset<192>容器去存，

```
#define gf bitset<M>
#define gf2 bitset<2*M>
    gf ax,bx;
        for(int i = 0;i < 24;i++){
```

```
            fread(&byte,1,1,inputFile);
            for(int j = 0;j < 8;j++){
                ax[i * 8 + j] = (byte >> j) & 1;

            }
        }
```

例如，

```
05 20 00 00 00 00 00 00
00 00 00 00 00 00 00 00
00 00 00 00 00 00 00 00
```

对应的ax我们cout一下，bitset最低位就是多项式系数a_0,以此类推

```
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000101
```

- **加法：** 简单异或即可

```
void gf_add(gf &cx, gf ax, gf bx){
    for(int i = 0;i < ax.size();i++){
        cx[i]=ax[i] ^ bx[i];
    }
}
```

- **乘法：** naive乘法，也就是简单的小学竖式乘法

```
void gf_mul(gf &c, const gf a, const gf b)
{

    bitset<2 * M> x;
    bitset<2 * M> temp(a.to_string());
    for (int i = 0; i < 131; i++)
    {
        if (b[i])
            x ^= temp << i;
    }
    c = mod(x, p);

}
```

我们对乘法进行优化，采用karasuba算法,但是注意递归不要过深，只用递归到SIMD指令可以处理的位数就可以了:

karasuba算法的原理如下：假设两个大数x,y; a,b,c,d分别是x,y二进制表示的高n/2位和低n/2位，那么x,y可以表示为$a*2^{n/2}+b$和$c*2^{n/2}+d$

$$x*y=(a*2^{n/2}+b)*(c*2^{n/2}+d)=ac*2^n+(ad+bc)*2^{n/2}+bd=ac*2^n+[(a+b)*(c+d)-ac-bd]*2^{n/2}+bd$$

```
//使用karatsuba算法实现乘法优化
void gf_mul_karatsuba(gf &c, const gf a, const gf b, int n)
{
    bitset<2 * M> temp;
    if (n<=64)
```

```
    {

        __m128i a1 = _mm_set_epi64x(0, a.to_ullong());
        __m128i b1 = _mm_set_epi64x(0, b.to_ullong());
        __m128i c1 = _mm_clmulepi64_si128(a1, b1, 0x00);

        char data_array[16];
        _mm_storeu_si128((__m128i*)data_array, c1);


        // 将数组中的每个元素放入 bitset
        for (int i = 0; i < 16; ++i) {

            for(int j = 0; j<8;j++){
                c[i*8+j] = (data_array[i] >> j) & 1;
            }

        }


        return;
    }
    else
    {
        gf a1, a0, b1, b0;
        int n2 = n / 2 ;

        a1 = a >> n2; //取高n/2位
        for(int i = 0;i < n2;i++)
            a0[i] = a[i];
        b1 = b >> n2;
        for(int i = 0;i < n2;i++)
            b0[i] = b[i];
        gf z0;
        gf_mul_karatsuba(z0, a0, b0, n2);
        gf z1;
        gf_mul_karatsuba(z1, a1^a0, b1^b0, n-n2);
        gf z2;
        gf_mul_karatsuba(z2, a1, b1, n-n2);

        z1 = z1 ^ z2 ^ z0;

        bitset <2*M> t1(z0.to_string());
        bitset <2*M> t2(z1.to_string());
        bitset <2*M> t3(z2.to_string());
        temp = t1 ^ (t2 << n2) ^ (t3 << 2 * n2);


        c = mod(temp);

    }

}
```

- **模运算实现：**

F(2^131)下有限域基本运算的实现(c++)_有限域运算编程-CSDN博客的代码在求模运算中存在问题，我重新写了一个，思路如下：

函数 mod 实现了多项式模运算，通过不断将输入多项式 a，通过将不可约多项式r左移将最高位与a最高位对其进行异或操作，这样就可以不断消去a最高位的1，直到 a 的度数小于 r 的度数，最终返回 a 的后 M 位作为模运算的结果。

```
bitset<M> mod(bitset<2 * M> a) {


    for (int i = 2 * M - 1; i >= 131; --i) {
        if (a[i]) {
            a = a ^ (r << (i - 131));
        }
    }

    bitset<M> result;
    for (int i = 0; i < 131; ++i) {
        result[i] = a[i];
    }
    return result;
}
```

- **平方：**

方法1：直接调用乘法函数

```
void gf_pow2(gf &cx, gf ax){
    gf_mul(cx,ax,ax);
}
```

方法2：采用位运算实现

平方相当于将每个位移到原来位置的2倍，然后对不可约多项式取模

```
void gf_pow2(gf &cx, gf ax){

    bitset<2 * M> x;
    for (int i = 0; i < M; i++)
        x[i * 2] = ax[i];
    cx = mod(x);
}
```

- **求逆：**

扩展欧几里得算法：要求a(x)^-1 mod p(x)=1通过辗转相除法求求到gcd(a(x),p(x))=1,过程为gcd(a(x),p(x)) = gcd(p(x), a(x)%p(x)),然后逐步回代，最后与a(x)相乘的多项式为所求逆元

```
void gf_inv(gf &cx ,const gf a)
{

    bitset<2 * M> b, c, u, v, temp;
    bitset<M> r(p.to_string().substr(1));
    int j;
    b[0] = 1;
    u = bitset<2 * M>(a.to_string());
    v = p;
    while (degree(u))
    {
        j = degree(u) - degree(v);
        if (j < 0)
        {
            j = -j;
            temp = u;
```

```
            u = v;
            v = temp;
            temp = b;
            b = c;
            c = temp;
        }
        u = u ^ (v << j);
        b = b ^ (c << j);
    }
    cx = mod(b);
}
```

使用费马小定理求逆元，按照实验网站公式来推，推导过程在思考题部分：

```
void gf_inv1(gf &cx ,const gf a){
    //使用费马小定理求逆元
    //x1
    gf_pow2(cx,a);
    gf_mul(cx,cx,a);
    gf x1 = cx;
    //x2
    gf_pow2(cx,cx);
    gf_pow2(cx,cx);
    gf_mul(cx,cx,x1);
    gf x2 = cx;
    //x3
    for(int i = 0; i<4;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
    }
    gf_mul(cx,cx,x2);
    gf x3 = cx;
    //x4
    for(int i = 0; i<8;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
    }
    gf_mul(cx,cx,x3);
    gf x4 = cx;
    //x5
    for(int i = 0; i<16;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
    }
    gf_mul(cx,cx,x4);
    gf x5 = cx;
    //x6
    for(int i = 0; i<32;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
    }
    gf_mul(cx,cx,x5);
    gf_pow2(cx,cx);
    gf_mul(cx,cx,a);
    gf x6 = cx;

    //x7

    for(int i = 0; i<65;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
    }
    gf_mul(cx,cx,x6);
    //x7^2
    gf_pow2(cx,cx);

    return;
```

```
}
```

另一种方法实现费马小定理求逆元的代码为：

```
void gf_inv2(gf &cx ,const gf a){
    //使用费马小定理求逆元，方法2
    cx = a;
    for(int i = 1;i<130;i++){
        gf_pow2(cx,cx);
        gf_mul(cx,cx,a);
    }
    gf_pow2(cx,cx);

}
```

推导过程同样见思考题

思考题

$F_{2^{131}}$ 上求逆 $(a_0\ a_1\ a_2 a_3\ a_4 a_5 a_6 a_7)$.

$m-1=130$，二进制表示为 $(1000\ 0010)$.

$(n_0 \cdots n_k) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 65, 130)$

由 $x_{i+1} = \begin{cases} x_i x_i^{2^{n_i}} \\ x(x_i x_i^{2^{n_i}})^2 \end{cases}$

进行迭代：

$x_1 = x_0 x_0^{2^1} = x^{2^2-1}$

$x_2 = x_1 x_1^{2^2} = x^{2^4-1}$

$x_3 = x_2 x_2^{2^4} = x^{2^8-1}$

$x_4 = x_3 x_3^{2^8} = x^{2^{16}-1}$

$x_5 = x_4 x_4^{2^{16}} = x^{2^{32}-1}$

$x_6 = x(x_5 x_5^{2^{32}})^2 = x^{2^{65}-1}$

$x_7 = x_6 x_6^{2^{65}} = x^{2^{130}-1}$

$x^{-1} = x_7^2 = x^{2^{131}-2}$

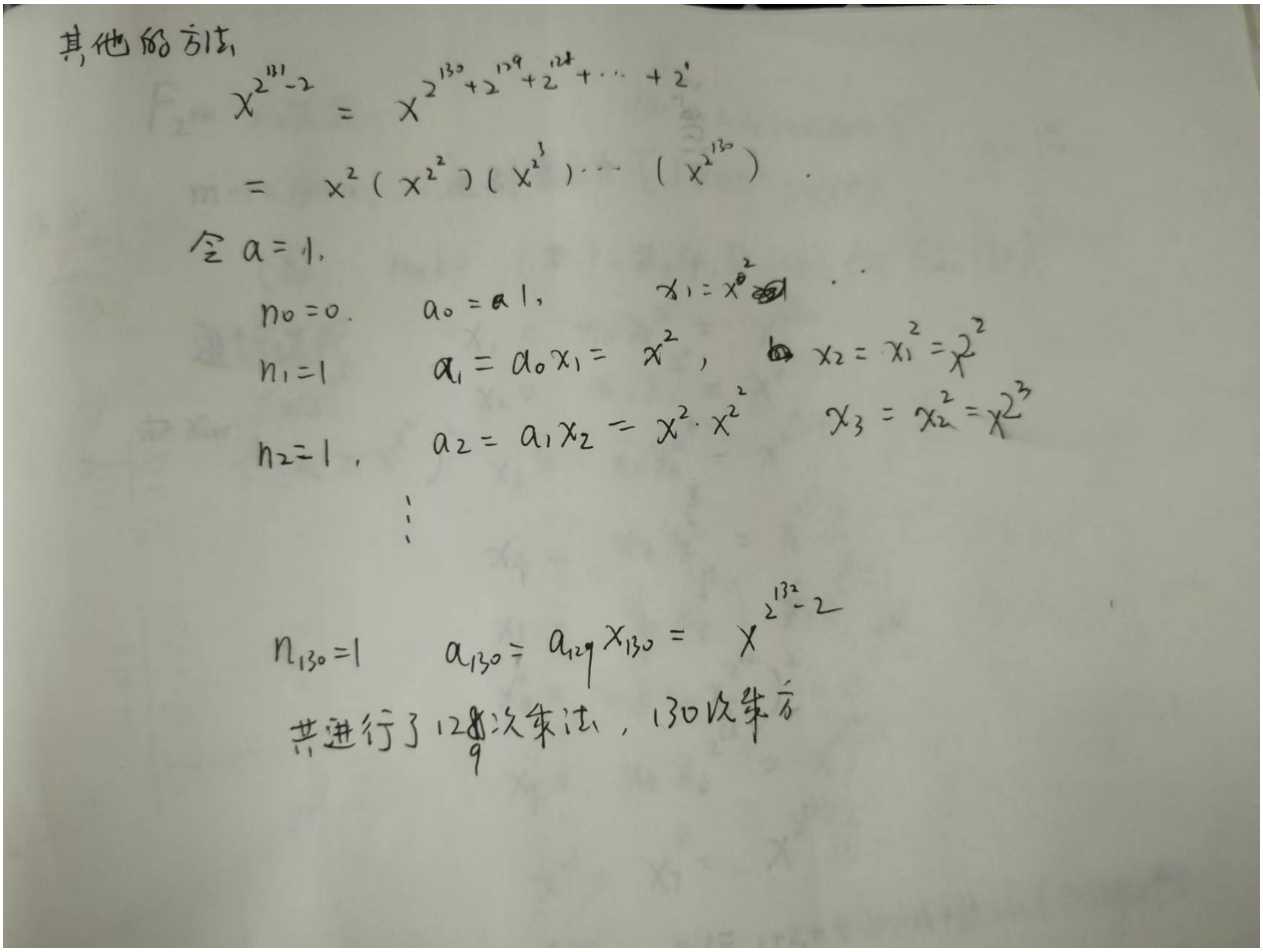
共进行8次乘法，进行 $1+2+4+8+16+33+65+1 = 130$ 次平方.

进行一次乘法平均需要 2377.601 ms/500k = 0.004755202ms

一次求平方运算需要1670.473 ms/500k = 0.003340946ms

一次求逆运算需要 6046.727ms/20k=0.30233635ms

130 * 0.003340946ms + 8 * 0.004755202ms=0.472364596ms，与一次求逆运算时间接近


其他的方法,

$x^{2^{131}-2} = x^{2^{130}+2^{129}+2^{128}+\cdots+2^{1}}$

$= x^{2}(x^{2^2})(x^{2^3})\cdots(x^{2^{130}})$.

令 $a=1$.

$n_0=0$. $a_0=1$, $x_1=x^{2}$ . .

$n_1=1$ $a_1=a_0x_1=x^2$, $x_2=x_1^2=x^{2^2}$

$n_2=1$, $a_2=a_1x_2=x^2\cdot x^{2^2}$ $x_3=x_2^2=x^{2^3}$

⋮

$n_{130}=1$ $a_{130}=a_{129}x_{130}=x^{2^{132}-2}$

共进行了12~~8~~9次乘法，130次平方

实际一次求逆时间为14615.29ms/20k=0.7307645ms

预期求逆时间为0.004755202*129+0.003340946 *130ms=1.047744038ms

实验总结

通过这次实验我了解了有限域上运算的实现，首先匹配输入输出格式就花了很长的时间，思考用什么数据结构去存多项式系数也尝试了许多种，最后使用了bitset来存，运算过程先使用了最简单的过程，然后逐步进行优化，主要优化了乘法和平方的计算。