Ingénieurs 2ème année - Dép. Info. Univ. Oran1 – Statistiques 2 – EF – Fév. 2025 – 01h40

Exercice 1 (Estimation, 4pts)

On compare les salaires de deux entreprises :

Entreprise A	303	28	128	314	265	106
Entreprise B	555	315	404	491	324	244

a) (3p) Donner l'intervalle de confiance au risque 5% pour la différence des salaires des deux entreprises.

b) (1p) Peut-on affirmer que les salaires de l'entreprise A sont meilleurs que ceux de l'entreprise B ?

Exercice 2 (Convergence, 4pts)

Nous supposons que le nombre de particules dans les gaz d'échappement d'un véhicule diesel suit la loi de Poisson de moyenne 2 000. Si on procède à une analyse de ces gaz, quelle est la probabilité de trouver moins de 1 800 particules ?

1) (1.5p) Exprimer la probabilité en utilisant la loi de Poisson ? Expliquer les difficultés pour la calculer. (N.B./ Loi de Poisson $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$)
2) (2.5p) Evaluer cette probabilité avec une approximation appropriée.

Exercice 3 (Test hypothèse, 7pts)

On étudie le rendement (en pourcentage) d'un traitement chimique. Selon une expérience antérieure liée à ce procédé, la variance du rendement est de 5 % et une moyenne de 90%, et la loi normale modélise bien la distribution. On procède avec cinq essais, car on soupçonne que le rendement a baissé.

a) (2p) Dans quelle mesure peut-on dire que le rendement moyen soit inférieur à 90 %, au seuil de 5 % ?

b) (2p) Quelle est la puissance du test si le rendement réel est de 87 % ?

c) (3p) Calculez (à partir de la définition de β) la taille de l'échantillon nécessaire pour détecter un rendement moyen réel de 87 % avec une probabilité de 0,95.

Exercice 4 (Test Khi2, 5pts)

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable X) de clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

a) (1p) Si on pouvait modéliser le nombre d'arrivées par une loi normale, quels en serait les paramètres ?

b) (4p) À l'aide d'un test du χ2 déterminer au risque 1% de rejeter à tort le modèle, si le modèle d'une loi normale est compatible avec l'observation.

Exercice 1/ Q a) Intervalle de confiance à 5% pour la différence des salaires :

Pour l'entreprise A :

$$m_A = \frac{803 + 28 + \text{——} + 106}{6} = 190.66$$

$$\sigma_A = S_A = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{803^2 + \cdots + 106^2}{6} - m_A^2\right)} = 119.08$$

Pour l'entreprise B :

$$m_B = \frac{555 + \text{——} + 244}{6} = 388.83$$

$$\sigma_B = S_B = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{555^2 + \text{——} + 244^2}{6} - m_B^2\right)} = 117.39$$

L'intervalle de confiance au risque 5% pour la différence des salaire est :

$$\left[m_A - m_B - t\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \; ; \; m_A + m_B + t\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right]$$

$$= \left[190.66 - 388.83 - 1.96 \times \sqrt{\frac{119.08^2}{6} + \frac{117.39^2}{6}} \; , \right.$$

$$\left. \text{——} + \text{——} \right]$$

$$= [-331.96 \, , \, -64.37]$$

Q b) Non, on peut affirmer le contraire : L'entreprise B a des salaire nettement meilleurs que l'entreprise B.

Exercice 2/ 1) Expression de la probabilité :

$$P(X \leq 1800) = \sum_{x=0}^{1800} \frac{e^{-2000} \times 2000^x}{x!}$$

Ce calcul est excessivement coûteux. Il est aussi instable numériquement.

2) $P(X \leq 1800) = P(X \leq 1800.5) = P\left(Z \leqslant \frac{1800.5 - 2000}{\sqrt{2000}}\right)$

$= P(Z \leqslant -4.46) = 0.5 - 0.49 = 0.01$ (ou moins).

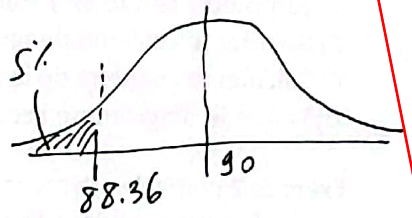
Exercice 3

Q_A) Les hypothèses : $H_0 : \mu = 90\%$ +1

$H_1 : \mu < 90\%$

Il suffit de calculer la région de rejet avec un seuil de 5% :

$$P\left(Z < \frac{k-90}{\sqrt{5/5}}\right) = 0.05 \Rightarrow k - 90 = -1.64 \Rightarrow k = 88.36$$



+1

Zone de rejet $X \leqslant 88.36$

Q_B) Puissance du test :

$$\underline{1-\beta} = P\left(\frac{\bar{X}-90}{\sqrt{5/5}} < -1.64 \,\middle|\, \mu = 87\right) = F(1.355)$$

$$= 0.912 = 91.2\%$$

Puissance du test est 91.20%.

Exercice 4

Moyenne du tableau est : $\bar{X} = 3$

$Var(X) = 1.96 \Rightarrow \sigma = 1.4$

C'est la loi normale de moyenne 3 et écart type 1.64 $\quad N(3, \sigma = 1.4)$.

X	ni	fi	ni*fi	N(3, 1.4)	Intervalle continue	Intervalle normalisé
1	15	0.15	0.15		[0.5, 1.5]	[-1.78, -1.07]
2	25	0.25	0.5		[1.5, 2.5]	[-1.07, -0.35]
3	26	0.26	0.78		[2.5, 3.5]	[-0.35, 0.35]
4	20	0.20	0.80		[3.5, 4.5]	[0.35, 1.07]
5	7	0.07	0.35		[4.5, 5.5]	[1.07, 1.78]
6	7	0.07	0.42		[5.5, 6.5]	[1.78, 2.5]

$\Rightarrow$

X	P(X=x) = P(X ∈ [x−0.5, x+0.5])	
1	0.10	×100 = 10
2	0.22	×100 = 22
3	0.27	×100 = 27
4	0.22	×100 = 22
5	0.10	×100 = 10
6	0.03	×100 = 3

$$\chi^2 \text{ observé} = \frac{(10-15)^2}{10} + \frac{(22-25)^2}{22} + \frac{(27-26)^2}{27} + \frac{(22-20)^2}{22} + \frac{(10-7)^2}{10} + \frac{(3-7)^2}{3}$$

$$= 6.45$$

Il y a nbr de degré de liberté : $6-1-2 = 3$

χ^2 de la table est : 11.35

χ^2 observé $> \chi^2$ table $\Rightarrow$ On rejette la modélisation