Table des matières

1 TD1 : Rappels (Stats. descrt. / Theo. probabilités)

1.1 Exercice : Stats. Descriptives / indicateurs, visualisation

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable X) de clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

1. Dresser le tableau statistique de la distribution de la variable X (effectifs cumulés, …).
2. Calculer les valeurs de tendance centrale de la distribution : la moyenne, le mode et les trois quartiles Q1, Q2 et Q3.
3. Calculer les valeurs de la dispersion de la distribution : variance, l'écart type et l'intervalle interquartile.
4. Tracer le diagramme en bâtons et la boite à moustaches de cette distribution.

1.2 Exercice : Notion de probabilité

Trois joueurs α, β et γ jettent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient pile a gagné. Nous admettrons que α joue d'abord, puis β et enfin γ. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire peut être décrit comme suit :

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \dots\} \cup \{0000\dots\}.$$

1. Donnez une interprétation des points de Ω.

2. Décrivez les événements suivants en terme de ces points :
a) premier événement : A = « α gagne » ;
b) deuxième événement : B = « β gagne » ;
c) troisième événement : $(A \cup B)^c$.

1.3 Exercice : Variables aléatoires discrètes

Soit X une v.a.d. telle que $\mathbb{P}([X = -1]) = \mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}([X = 1]) = 1/3$ et $\mathbb{P}([X = x]) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Soit $Y = X^2$.
Montrez que les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées. Sont-elles indépendantes ?

1.4 Exercice : Variables aléatoires continues

Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,1] \\ 2t & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

1. a) Démontrez que la fonction f est une densité de probabilité.
b) Démontrez que la loi de probabilité définie par f admet une espérance mathématique et une variance que vous préciserez.
c) Déterminez la fonction de répartition associée à f.

2. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie ci-dessus. Nous définissons $Y = 1 + X^2$. Déterminez la fonction de répartition de Y.

1.5 Exercice : Loi normale

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5{,}2; 0{,}8)$.

1. Calculez $\mathbb{P}(X \geqslant 4 | X \leqslant 5{,}2)$.

2. Une variable aléatoire Y indépendante de la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0{,}8)$.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y - 2X$?

b. Déterminez μ sachant que $\mathbb{P}(Y \geqslant 2X) = 0{,}516$.