Indication de solution des exercices « type » pour le CC de la matière « Probabilités et Statistiques »

1 Exercice : statistiques descriptives

Soient des résultats d'une enquête sur les loyers annuels des appartements dans un quartier.

Montant du loyer (x 1000)	Effectifs
[4, 6[	20
[6, 8[	40
[8, 10[	80
[10, 15[	30
[15, 20[	20
[20, 30[	10

1) Compléter le tableau statistique (valeurs centrales, effectifs cumulés, fréquence, fréquences cumulés)
2) Déterminez les valeurs de tendance centrale de la distribution : moyenne, mode et les quartiles.
3) Calculer la classe modale et la médiane Me.
4) Mesurez la dispersion de la distribution au moyen de : l'étendue, l'écart type, le coefficient de variation, et de l'intervalle interquartile.

INDICATION DE SOLUTION

Montant x 1000	n_i	x_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\ x_i$	d_i
[4; 6[	20	5	20	0.1	0.1	0.5	10
[6; 8[	40	7	60	0.2	0.3	1.4	20
[8; 10[	80	9	140	0.4	0.7	3.6	40
[10; 15[	30	12.5	170	0.15	0.85	1.875	6
[15; 20[	20	17.5	190	0.1	0.95	1.75	4
[20; 30[	10	25	200	0.05	1	1.25	1
$\sum$				1		10.375 x 1000	

$$x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

$\text{di} = \frac{ni}{a_{i+1} - a_i}$ densité parce que on a pas la même amplitude.

Mode :
La classe modale = [8; 10[x 1000 (la classe qui a la plus grande densité)
Mode M= $a_i + \frac{\Delta i}{\Delta_i + \Delta_{i+1}} (a_{i+1} - a_i)$
Δ_i = 40-20
Δ_{i+1} = 40-6

$$M == 8000 + \frac{20}{34} \times (10000\text{-}8000)$$

$$M == 8000 + \frac{20}{34} \times 2000$$

$$M == 8000 + \frac{40000}{34}$$

M = 9176,470

$Q_1 = a_i + (a_{i+1} - a_i) \times \frac{0{,}25 - F_i}{F_{i+1} - F_i}$ $(a_i = 8000 ; a_{i+1} = 10000)$

$Q_2 = a_i + (a_{i+1} - a_i) \times \frac{0{,}5 - F_i}{F_{i+1} - F_i}$ $(a_i = 8000 ; a_{i+1} = 10000)$

$Q_3 = a_i + (a_{i+1} - a_i) \times \frac{0{,}75 - F_i}{F_{i+1} - F_i}$ $(a_i = 10000 ; a_{i+1} = 15000)$

$Q_1 = 7500$

$Q_2 = 9000$

$Q_3 = 11666$

L'étendu W = (30-4) x 1000 = 26000

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 11666 - 7500 = 4166$$

Ecart type $\partial_x = \sqrt{var\ (X)}$

$var(x) = (\frac{1}{n} \sum n_i x_i^2) - \overline{x^2} = \sum f_i\, x_i^2 - \overline{x^2}$

$$= \frac{1}{200} \times 26002{,}5 .10^6 - (10375)$$

$\partial_x = \sqrt{var\ (x)} = 8062{,}25$

$Q_1 - 1{,}5\ IQ = 7500 - 1{,}5 \times 4166 = 1251$
$Q_3 - 1{,}5\ IQ = 11666 + 1{,}5 \times 4166 = 17915$
$Q_1 = 7500$
$Q_2 = 9000$ 7
$Q_3 = 11666$

Au niveau de la question 3, on applique la formule de la médiane Me :

$$M_e = x_{i-1} + k \frac{N/2 - n_{i-1} \uparrow}{n_i \uparrow - n_{i-1} \uparrow}$$

2 Exercice : Analyse combinatoire

1) Une mallette dispose d'une fermeture à cadenas secret comprenant 5 tambours identiques portant les chiffres 0, 1, 2,….9.
   Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former sur un tel cadenas ?
2) Trois joueurs A, B et C lancent chacun un dé à six faces.
   a. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   b. Combien y a-t-il de résultats où les points amenés sont tous différents ?
3) n candidats se présentent à un concours comportant r places. On suppose que la liste des candidats admis est publiée dans l'ordre de classement.
   a. Combien y a-t-il de listes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de listes possibles où figure un candidat donné indépendamment de son rang d'admission ?
4) Un échiquier rectangulaire contient n colonnes et p lignes. De combien de façons peut-on placer n objet différents dans n cases de cet échiquier de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans une même colonne (plusieurs objets peuvent être dans une même ligne) ?
5) De combien de façons peut-on répartir un groupe de n personnes :
   a. sur une rangée de n chaises ?
   b. sur une table ronde ?
6) Deux personnes désirent s'asseoir côte à côte. Quel sera le nombre de façons pour les répartir selon les deux cas précédents.

INDICATION DE SOLUTION

Une mallette dispose d'une fermeture à cadenas secret comprenant 5 tambours identiques portant les chiffres 0, 1, 2,….9.

Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former sur un tel cadenas ?

Solution :

Le code du cadenas est un nombre composé de Cinq chiffres, le code est une disposition ordonné (exemple 2 3 4 5 6 ≠ 4 5 6 3 2) et avec répétition chaque chiffre varie de 0 à 9.

Donc le code est un arrangement avec répétition de 5 éléments parmi les 10 chiffres =>

$N = A_{10}^5 = 10^5$ Codes possibles.

Trois joueurs A, B et C lancent chacun un dé à six faces.

Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Combien y a-t-il de résultats où les points amenés sont tous différents ?

Solution :

Le résultat est un triplé (a , b, c) , où a est le point amené par le joueur A, b est le point amené par le joueur B et c est le point amené par le joueur C.
Ce résultat est une disposition ordonnée (exemple 2 3 4 ≠ 4 3 2) et avec répétition. Chaque chiffre varie de 1 à 6.

Donc le résultat est un arrangement avec répétition de 3 éléments parmi 6 =>

$N = A_6^3 = 6^3 = 216$ Résultats possibles.

Ce résultat est toujours une disposition ordonnée (exemple 2 3 4 ≠ 4 3 2) mais il n y a plus de répétition (par hypothèse).

Donc le résultat est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 6 =>

$$N = \mathrm{A}_6^3 = \frac{6\,!}{(6-3)!} = 120$$ Résultats possibles

n candidats se présentent à un concours comportant r places. On suppose que la liste des candidats admis est publiée dans l'ordre de classement.

Combien y a-t-il de listes possibles ?

Combien y a-t-il de listes possibles où figure un candidat donné indépendamment de son rang d'admission ?

Solution

La liste est une disposition ordonnée (par hypothèse) et sans répétition (choix de r places distinctes) donc le nombre de listes est égal à $\mathrm{N} = \mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{r} = \frac{\mathrm{n}\,!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$

Le nombre de listes où figure un candidat donné indépendamment de son rang d'admission : donc ce candidat doit figurer parmi les r places, reste à choisir avec ordre et sans répétition (r– 1) places parmi les (n-1) candidats $\mathrm{N} = \mathrm{r} \times \mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{r}-1}$

Un échiquier rectangulaire contient n colonnes et p lignes. De combien de façons peut-on placer n objet différents dans n cases de cet échiquier de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans une même colonne (plusieurs objets peuvent être dans une même ligne) ?

Solution

Le placement d'un objet dépend du nombre de choix pour les lignes et pour les colonnes donc le nombre de façons = $\mathrm{p}^\mathrm{n} \times \mathrm{n}\,!$

De combien de façons peut-on répartir un groupe de n personnes :

sur une rangée de n chaises ?

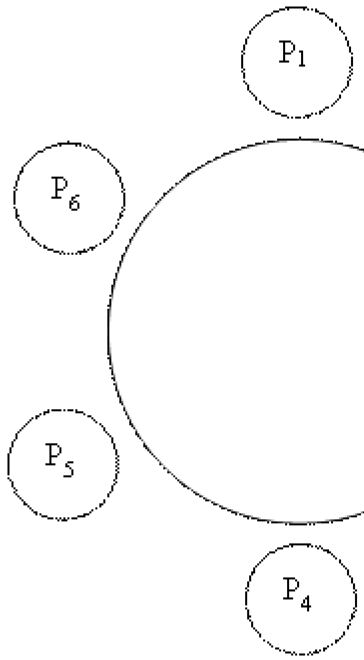
sur une table ronde ?

Deux personnes désirent s'asseoir côte à côte. Quel sera le nombre de façons pour les répartir selon les deux cas précédents

Solution

1.a) la répartition de n personnes sur une rangée de n chaises est une disposition ordonnée et sans répétition de n places parmi les n chaises donc c'est une permutation $P_n = n\,!$

1.b)
Essayons de réfléchir à une table ronde de 6 places. En numérotant P_1, P_2, …, P_6 les places autour de la table



Dans ce cas, une disposition de 6 personnes autour de la table est clairement définie par l'attribution de chacune des 6 places à une et une seule personne. Il s'agit alors de dénombrer le les permutations d'un ensemble à 6 éléments. Il y en a : 6 !

Mais dans la situation qui nous intéresse, il n'y a pas de numérotation des places !
Fondamentalement, l'élément arbitraire introduit dans la démarche ci-dessus est le choix de l'emplacement de la place P_1. Il y a 6 possibilités pour cette place et cela entraîne que le nombre obtenu ci-dessus (6 !) est 6 fois trop grand.
En définitive : on choisit une personne dans P1 et il reste à placer 5 autres personnes ➔ 5 ! Façons de disposer 6 personnes autour d'une table ronde.
Cas général :
Il y a **: (n-1) !** Façons de disposer *n* personnes autour d'une table ronde.

Deux personnes désirent s'asseoir côte à côte. Quel sera le nombre de façons pour les répartir selon les deux cas précédents.

2.a) sur une rangée de n chaises :
Soient P et Q les personnes qui doivent rester l'une à côté de l'autre (P Q OU QP) :
P aura le choix de (n-1) chaises pour se placer sauf la dernière
Q se pose devant P (sa place est désignée par celle de P
Reste (n-2) personnes à placer dans (n-2) places d'où en définitif :

Nombre de façons = 2 x (n-1) x 1 x (n-2) ! = **2 x (n-1) !**

2.b) Sur une table ronde même raisonnement que l'exercice précédent :

Nombre de façons = **2 x (n-2) !**

3 Exercice : calcul de probabilité

Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A assure 20% de la production dont 5% sont défectueuses. La machine B assure 30%de la production dont 4% sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production dont 1% sont défectueuses.

1) On choisit une ampoule au hasard. Calculer les probabilités :a)- que l'ampoule soit défectueuse et provient de A ? b)- que l'ampoule soit défectueuse ?
2) Calculer la probabilité qu'une ampoule défectueuse provient de B ?

INDICATION DE SOLUTION

<u>Soient les événements</u> :

A: « l'ampoule est produite par la machine A » ; P(A) = 0,2

B: « l'ampoule est produite par la machine B » ; P(B) = 0,3

C: « l'ampoule est produite par la machine C » ; P(C) = 0,5

D : « l'ampoule est défectueuse » P(D/A) = 0,05 ; P(D/B) = 0,04 ; ; P(D/C) = 0,01

L'ensemble des trois machines A, B et C forme un <u>système complet d'évènements</u>. (L'union est l'événement certain A U B U C = Ω et A ∩ B = $\emptyset$; A ∩ C = $\emptyset$; B∩C = $\emptyset$; A∩B∩C = $\emptyset$.

1. a) Il s'agit de calculer P(D ∩ A) = P(D) x P(A/D) = P(A) x P(D/A) = 0,2 x 0,05 = 0,01

   b)il s'agit de calculer P(D) ? Comme on a un système complet d'événements :
   P(D) = P((A ∩ D) U (B ∩ D) U (C ∩ D)) = P(A ∩ D) + P (B ∩ D) + P (C ∩ D)
   = P(A) x P(D/A) + P(B) x P(D/B) + P(C) x P(D/C) = 0,01+0,012+0,005 = 0,027

2. Il s'agit de calculer P(B/D) $= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \text{ x } P(D/B)}{P(D)}$ = 0,44

4 Exercice : calcul de probabilité

Dans un magasin un stock d'appareils est constitué d'appareils venant de deux usines A et B. 60% en provenance de A et le reste de B. 10% (resp 20%) des appareils provenant de A(resp de B) présentent un défaut.

1) Calculer le pourcentage d'appareils ayant un défaut ?
2) Parmi ces derniers, calculer le pourcentage de ceux venant de B ?
3) Parmi les appareils sans défaut, calculer le pourcentage de ceux venant de A ?
4) Vérifier l'indépendance des évènements : « Appareil provient de B » et « Appareil défectueux » ?

INDICATION DE SOLUTION

<u>Soient les événements</u> :

A: « Appareil provient de l'usine A » ; P(A) = 0,6

B: « Appareil provient de l'usine B » ; P(B) = 0,4

D : « l'appareil présente un défaut » ; P(D/A) = 0,1 ; P(D/B) = 0,2

L'ensemble des deux usines A et B forme un <u>système complet d'évènements</u>. (L'union est l'événement certain A U B = Ω et A ∩ B = $\emptyset$.

1) Il s'agit de calculer P(D), comme on a un système complet d'événements :

$P(D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D)) = P(A \cap D) + P(B \cap D) +$

$= P(A) \times P(D/A) + P(B) \times P(D/B) = 0{,}06+0{,}08= 0{,}14$ → 14%

2) Il s'agit de calculer $P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \times P(D/B)}{P(D)} = 0{,}57$ → 57%

3) Il s'agit de calculer $P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) \times P(\overline{D}/A)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}6 \times 0{,}9}{0{,}86} = 0{,}63$ → 63%

Rappelons que $P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A)$

4)Vérifions l'indépendance des évènements : « Appareil provient de B » et « Appareil défectueux » ?

Deux événements A et B sont indépendants SSi $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, dans notre cas nous avons :

$P(B \cap D) = P(B) \times P(D/B) \neq P(B) \times P(D)$ donc les événements A et B sont dépendants.