

## Table des matières

1	TD1 : Rappels (Stats. descrt. / Theo. probabilités) .....	2
1.1	Exercice : Stats. Descriptives / indicateurs, visualisation .....	2
1.2	Exercice : Notion de probabilité .....	2
1.3	Exercice : Variables aléatoires discrètes .....	2
1.4	Exercice : Variables aléatoires continues .....	2
1.5	Exercice : Loi normale.....	2
2	TD2 : lois et limites .....	3
2.1	Exercice (mise en pratique des lois) .....	3
2.2	Exercice (mise en pratique des lois) .....	3
2.3	Exercice (mise en pratique des lois) .....	3
2.4	Exercice (mise en pratique des lois) .....	3
2.5	Exercice (mise en pratique des lois) .....	3
2.6	Exercice (mise en pratique des lois) .....	4
2.7	Exercice.....	4
2.8	Exercice.....	4
2.9	Exercice.....	4

## 1 TD1 : Rappels (Stats. descrt. / Theo. probabilités)

### 1.1 Exercice : Stats. Descriptives / indicateurs, visualisation

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable  $X$ ) de clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6

1. Dresser le tableau statistique de la distribution de la variable  $X$  (effectifs cumulés, ...).
2. Calculer les valeurs de tendance centrale de la distribution : la moyenne, le mode et les trois quartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ .
3. Calculer les valeurs de la dispersion de la distribution : variance, l'écart type et l'intervalle interquartile.
4. Tracer le diagramme en bâtons et la boîte à moustaches de cette distribution.

### 1.2 Exercice : Notion de probabilité

Trois joueurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  jettent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient pile a gagné. Nous admettons que  $\alpha$  joue d'abord, puis  $\beta$  et enfin  $\gamma$ . L'univers  $\Omega$  associé à cette expérience aléatoire peut être décrit comme suit :

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \dots\} \cup \{0000, \dots\}.$$

1. Donnez une interprétation des points de  $\Omega$ .

2. Décrivez les événements suivants en terme de ces points :

- a) premier événement :  $A = \langle \alpha \text{ gagne} \rangle$  ;
- b) deuxième événement :  $B = \langle \beta \text{ gagne} \rangle$  ;
- c) troisième événement :  $(A \cup B)^c$ .

### 1.3 Exercice : Variables aléatoires discrètes

Soit  $X$  une v.a.d. telle que  $\mathbb{P}([X = -1]) = \mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}([X = 1]) = 1/3$  et  $\mathbb{P}([X = x]) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

Soit  $Y = X^2$ .

Montrez que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas corrélées. Sont-elles indépendantes ?

### 1.4 Exercice : Variables aléatoires continues

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \\ 2t & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

1. a) Démontrez que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.  
b) Démontrez que la loi de probabilité définie par  $f$  admet une espérance mathématique et une variance que vous préciserez.  
c) Déterminez la fonction de répartition associée à  $f$ .
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité de probabilité  $f$  définie ci-dessus. Nous définissons  $Y = 1 + X^2$ . Déterminez la fonction de répartition de  $Y$ .

### 1.5 Exercice : Loi normale

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(5, 2; 0, 8)$ .

1. Calculez  $\mathbb{P}(X \geq 4 | X \leq 5, 2)$ .
2. Une variable aléatoire  $Y$  indépendante de la variable  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu; 0, 8)$ .  
a. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Y - 2X$  ?  
b. Déterminez  $\mu$  sachant que  $\mathbb{P}(Y \geq 2X) = 0,516$ .

## 2 TD2 : lois et limites

### 2.1 Exercice (mise en pratique des lois)

Un questionnaire comporte dix questions. Pour chacune, il y a quatre réponses possibles. Un individu répond au hasard à toutes ces questions.

- a) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à toutes les questions ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à 5 questions ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à au moins 8 questions ?
- d) En moyenne, à combien de questions va-t-il répondre juste ?

### 2.2 Exercice (mise en pratique des lois)

Une entreprise dispose d'une machine dont la probabilité de tomber en panne en une journée est de  $1/500$ .

- a) Quelle est la probabilité que cette machine tombe en panne au moins une fois en 20 jours ?
- b) Quelle est la probabilité que cette machine tombe strictement plus d'une fois en panne sur cette période ?

### 2.3 Exercice (mise en pratique des lois)

Une entreprise dispose d'une machine dont la probabilité de tomber en panne en une journée est de  $1/500$ .

- a) Quelle est la probabilité que cette machine tombe en panne au moins une fois en 20 jours ?
- b) Quelle est la probabilité que cette machine tombe strictement plus d'une fois en panne sur cette période ?

### 2.4 Exercice (mise en pratique des lois)

Un magasin possède 4 caisses. Le nombre de clients qui attendent à chacune de ces caisses suit une loi de Poisson de paramètre 3,2. Un nombre de clients supérieur ou égal à 4 par caisse risque de ne pas plaire à la clientèle. Il faudrait alors ouvrir une nouvelle caisse.

Quelle est la probabilité d'ouvrir une nouvelle caisse ?

### 2.5 Exercice (mise en pratique des lois)

La moyenne des notes à un examen suit une loi normale de moyenne 9,5 et d'écart-type 4,5. Les étudiants ayant une moyenne inférieure à 7 ne sont pas admissibles. Les étudiants ayant une moyenne entre 7 et 9 doivent repasser une des épreuves pour être admissible. Les étudiants ayant entre 9 et 13 sont admissibles et doivent passer un oral. Les étudiants ayant plus de 13 sont directement admis.

Sur un ensemble de 400 000 étudiants qui se présentent à cet examen, déterminer une estimation du nombre d'étudiants de chaque catégorie.

## 2.6 Exercice (mise en pratique des lois)

Un avion décolle à 5h25 du matin. On note que 10 % des passagers arrivent avant l'heure d'enregistrement des bagages et 5 % d'entre eux arrivent après la fermeture de l'enregistrement et ne peuvent pas embarquer. L'heure d'ouverture de l'enregistrement est 3h50 et l'heure de fermeture de l'enregistrement est 5h.

- Déterminer les paramètres de la loi normale qui représente l'heure d'arrivée d'un passager.
- Combien la compagnie doit-elle enregistrer de réservations pour s'assurer qu'un avion de 200 places soit complet ?
- Que se passe-t-il si l'avion a 10 minutes de retard et que la fermeture de l'enregistrement prend aussi 10 minutes de retard ?

## 2.7 Exercice

Le nombre de personnes à une caisse suit une loi de Poisson de moyenne 12.

Quelle est la probabilité de trouver plus de 20 personnes à cette caisse ?

## 2.8 Exercice

Une usine a produit des pièces dont 2 % ont un défaut. On teste un ensemble de 10 000 pièces.

- Que dire de l'utilisation de la loi Binomiale pour cette étude ?
- À l'aide d'une approximation de loi, déterminer la probabilité de trouver plus de 2,2 % de pièces défectueuses dans l'ensemble des 10 000 pièces.

## 2.9 Exercice

Soit  $X_1, \dots, X_{200}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $X_i \sim \text{Poisson}(0,5)$ . Considérons la variable aléatoire  $Y$ , qui représente la somme de tous les  $X_i$ , c'est-à-dire  $Y = X_1 + \dots + X_{200}$ .

- Quelle est la loi exacte de la variable  $Y$  ?
- En utilisant la loi exacte de  $Y$ , on peut calculer les probabilités suivantes :  $P(Y = 100) = 0,0399$  et  $P(89 < Y \leq 120) = 0,831$ . Calculez une approximation de ces deux probabilités en utilisant le théorème central limite.
- Quelle est la probabilité (approximative, sans correction de continuité) que la moyenne de ces 200 valeurs soit inférieure à 0,42 ?