1 Formulation de la loi normale multidimensionnelle

Densité de probabilité de la loi normale :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\} \qquad \text{for } -\infty < x < \infty$$

Soit

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

Qu'on peut écrire :

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

Où $\boldsymbol{\Sigma}_{p\times p}$ est la matrice des variance-covariance :

La densité de probabilité de la loi normale multidimensionnelle est :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \right)$$

ou encore

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{Det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)`\Sigma^{-1}(x-\mu)\right), x \in \mathbb{R}^p.$$

Dénoté

$$\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

1.1 Exemple deux dimension

Soit p = 2 :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad E(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

and

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

1.2 Exemple trois dimensions

Considérons un échantillon de n = 5 individus, décrit par d = 3 variables réelles. Cet échantillon est représenté par la matrice X = (x1, x2, x3, x4, x5) suivante :

$$\mathbf{X} = \sqrt{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de variances-covariances :

$$\boldsymbol{\Sigma}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T = \frac{1}{n}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T = (2, 2, 2)^T$$