Table des matières

1 TD1 : Rappels (Stats. descrt. / Theo. probabilités)

1.1 Exercice : Stats. Descriptives / indicateurs, visualisation

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable X) de clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

1. Dresser le tableau statistique de la distribution de la variable X (effectifs cumulés, …).
2. Calculer les valeurs de tendance centrale de la distribution : la moyenne, le mode et les trois quartiles Q1, Q2 et Q3.
3. Calculer les valeurs de la dispersion de la distribution : variance, l'écart type et l'intervalle interquartile.
4. Tracer le diagramme en bâtons et la boite à moustaches de cette distribution.

1.2 Exercice : Notion de probabilité

Trois joueurs α, β et γ jettent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient pile a gagné. Nous admettrons que α joue d'abord, puis β et enfin γ. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire peut être décrit comme suit :

$$\Omega = \{1,01,001,0001,\ldots\} \cup \{0000\ldots\}.$$

1. Donnez une interprétation des points de Ω.

2. Décrivez les événements suivants en terme de ces points :
a) premier événement : A = « α gagne » ;
b) deuxième événement : B = « β gagne » ;
c) troisième événement : $(A \cup B)^c$.

1.3 Exercice : Variables aléatoires discrètes

Soit X une v.a.d. telle que $\mathbb{P}([X=-1]) = \mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([X=1]) = 1/3$ et $\mathbb{P}([X=x]) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.
Soit $Y = X^2$.
Montrez que les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées. Sont-elles indépendantes ?

1.4 Exercice : Variables aléatoires continues

Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,1] \\ 2t & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

1. a) Démontrez que la fonction f est une densité de probabilité.
b) Démontrez que la loi de probabilité définie par f admet une espérance mathématique et une variance que vous préciserez.
c) Déterminez la fonction de répartition associée à f.

2. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie ci-dessus. Nous définissons $Y = 1 + X^2$. Déterminez la fonction de répartition de Y.

1.5 Exercice : Loi normale

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5{,}2;\, 0{,}8)$.

1. Calculez $\mathbb{P}(X \geqslant 4 | X \leqslant 5{,}2)$.

2. Une variable aléatoire Y indépendante de la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\, 0{,}8)$.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y - 2X$?

b. Déterminez μ sachant que $\mathbb{P}(Y \geqslant 2X) = 0{,}516$.

2 TD2 : lois et limites

2.1 Exercice (mise en pratique des lois)

Un questionnaire comporte dix questions. Pour chacune, il y a quatre réponses possibles. Un individu répond au hasard à toutes ces questions.

a) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à toutes les questions ?

b) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à 5 questions ?

c) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à au moins 8 questions ?

d) En moyenne, à combien de questions va-t-il répondre juste ?

2.2 Exercice (mise en pratique des lois)

Une entreprise dispose d'une machine dont la probabilité de tomber en panne en une journée est de 1/500.

a) Quelle est la probabilité que cette machine tombe en panne au moins une fois en 20 jours ?

b) Quelle est la probabilité que cette machine tombe strictement plus d'une fois en panne sur cette période ?

2.3 Exercice (mise en pratique des lois)

Une entreprise dispose d'une machine dont la probabilité de tomber en panne en une journée est de 1/500.

a) Quelle est la probabilité que cette machine tombe en panne au moins une fois en 20 jours ?

b) Quelle est la probabilité que cette machine tombe strictement plus d'une fois en panne sur cette période ?

2.4 Exercice (mise en pratique des lois)

Un magasin possède 4 caisses. Le nombre de clients qui attendent à chacune de ces caisses suit une loi de Poisson de paramètre 3,2. Un nombre de clients supérieur ou égal à 4 par caisse risque de ne pas plaire à la clientèle. Il faudrait alors ouvrir une nouvelle caisse.

Quelle est la probabilité d'ouvrir une nouvelle caisse ?

2.5 Exercice (mise en pratique des lois)

La moyenne des notes à un examen suit une loi normale de moyenne 9,5 et d'écart-type 4,5. Les étudiants ayant une moyenne inférieure à 7 ne sont pas admissibles. Les étudiants ayant une moyenne entre 7 et 9 doivent repasser une des épreuves pour être admissible. Les étudiants ayant entre 9 et 13 sont admissibles et doivent passer un oral. Les étudiants ayant plus de 13 sont directement admis.

Sur un ensemble de 400 000 étudiants qui se présentent à cet examen, déterminer une estimation du nombre d'étudiants de chaque catégorie.

2.6 Exercice (mise en pratique des lois)

Un avion décolle à 5h25 du matin. On note que 10 % des passagers arrivent avant l'heure d'enregistrement des bagages et 5 % d'entre eux arrivent après la fermeture de l'enregistrement et ne peuvent pas embarquer. L'heure d'ouverture de l'enregistrement est 3h50 et l'heure de fermeture de l'enregistrement est 5h.

a) Déterminer les paramètres de la loi normale qui représente l'heure d'arrivée d'un passager.

b) Combien la compagnie doit-elle enregistrer de réservations pour s'assurer qu'un avion de 200 places soit complet ?

c) Que se passe-t-il si l'avion a 10 minutes de retard et que la fermeture de l'enregistrement prend aussi 10 minutes de retard ?

2.7 Exercice

Le nombre de personnes à une caisse suit une loi de Poisson de moyenne 12.

Quelle est la probabilité de trouver plus de 20 personnes à cette caisse ?

2.8 Exercice

Une usine a produit des pièces dont 2 % ont un défaut. On teste un ensemble de 10 000 pièces.

a) Que dire de l'utilisation de la loi Binomiale pour cette étude ?

b) À l'aide d'une approximation de loi, déterminer la probabilité de trouver plus de 2,2 % de pièces défectueuses dans l'ensemble des 10 000 pièces.

2.9 Exercice

Soit $X_1, \ldots, X_{200}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $X_i \sim \text{Poisson}(0{,}5)$. Considérons la variable aléatoire Y, qui représente la somme de tous les X_i, c'est-à-dire $Y = X_1 + \cdots + X_{200}$.

a) Quelle est la loi exacte de la variable Y ?

b) En utilisant la loi exacte de Y, on peut calculer les probabilités suivantes : $P(Y = 100) = 0{,}0399$ et $P(89 < Y \leq 120) = 0{,}831$. Calculez une approximation de ces deux probabilités en utilisant le théorème central limite.

c) Quelle est la probabilité (approximative, sans correction de continuité) que la moyenne de ces 200 valeurs soit inférieure à 0,42 ?