Table des matières

1 Statistique descriptive

1.1 Exercice (terminologie)

La variable statistique "couleur de maisons d'un quartier" est-elle : qualitative, quantitative, discrète, continue ?
La variable statistique "revenu brut" est-elle : qualitative, quantitative, discrète, continue ?
La variable statistique "nombre de maisons vendues par ville" est-elle : qualitative, quantitative, discrète, continue ?
Parmi ces assertions, préciser celles qui sont vraies, celles qui sont fausses :

1. On appelle variable, une caractéristique que l'on étudie.
2. La tâche de la statistique descriptive est de recueillir des données.
3. La tâche de la statistique descriptive est de présenter les données sous forme de tableaux, de graphiques et d'indicateurs statistiques.
4. En Statistique, on classe les variables selon différents types.
5. Les valeurs des variables sont aussi appelées modalités.
6. Pour une variable qualitative, chaque individu statistique ne peut avoir qu'une seule modalité.
7. Pour faire des traitements statistiques, il arrive qu'on transforme une variable quantitative en variable qualitative.
8. La variable quantitative poids d'automobile peut être reclassée en compacte, intermédiaire et grosse.
9. En pratique, lorsqu'une variable quantitative discrète prend un grand nombre de valeurs distinctes, on la traite comme continue.

Proposer des exemples de variable quantitative transformée en variable qualitative. Préciser les modalités de cette dernière.
Pour chacune des variables suivantes, préciser si elle est qualitative, quantitative discrète ou quantitative continue : (a) Revenu annuel. (b) Citoyenneté. (c) Distance. (d) Taille. (e) Lieu de résidence. (f) Age. (g) Couleur des yeux. (h) Nombre de langues parlées.
Pour les sujets d'étude qui suivent, spécifier : l'unité statistique, la variable statistique et son type :

1. Étude du temps de validité des lampes électriques.
2. Étude de l'absentéisme des ouvriers, en jours, dans une usine.
3. Répartition des étudiants d'une promotion selon la mention obtenue sue le diplôme du Bac.
4. On cherche à modéliser 1 le nombre de collisions impliquant deux voitures sur un ensemble de 100 intersections routières choisies au hasard dans une ville. Les données sont collectées sur une période d'un an et le nombre d'accidents pour chaque intersection est ainsi mesuré.

1.2 Exercice (indicateurs)

1) Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur la pratique du sport par mois de ses employés ; des observations sur 88 employés tirés au sort sont les suivantes :
2)

x_i = Nombre de séances par mois	8	12	16	20	24	28
n_i = effectifs	7	20	23	19	14	5

1) Donner la population, le caractère, la nature du caractère et son type.
2) Représenter graphiquement la série statistique.
3) Calculer le mode (Mo), la médiane (Me) et l'écart interquartile IQ.
4) Calculer la moyenne, la variance, l'écart type et le coefficient de variation.

1.3 Exercice (indicateurs)

La répartition d'un groupe de 20 étudiants classés par degré de lecture est donnée dans le tableau suivant :

xi = Degré de lecture	Peu	Moyen	Beaucoup	Exceptionnel
ni = Nombre d'étudiants	3	5	10	2

1) Quelle est la population étudiée ; le caractère étudié ainsi que sa nature?

Représenter cette série par un graphe adéquat.

2) Si le caractère est mesuré par le nombre de livres lus, comment seprésenterait le tableau statistique.

1.4 Exercice (indicateurs)

On dispose des résultats d'une enquête concernant l'âge et les loisirs d'une population de 20 personnes (S : sport, C : cuisine, V : voyager, L : lecture) :

Age	12	14	40	35	26	30	30	50	75	50	30	45	25	55	28	25	50	40	25	35
Loisir	S	S	C	C	S	V	V	L	L	L	V	C	C	C	S	L	L	C	V	V

1. Faire l'étude du caractère « âge » : dresser le tableau statistique (effectifs[1], effectifs cumulés), calculer les valeurs de tendance centrale et ceux de la dispersion et tracez le diagramme en bâtons et la boite à moustaches de cette distribution.
2. Faire l'étude du caractère « Loisir » dresser le tableau statistique, déterminer le mode et tracez le diagramme en bâtons et le diagramme à secteurs.

1.5 Exercice (indicateurs, visualisation)

On observe 100 fois le nombre d'arrivées (variable X) de clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (10 minutes) et on obtient les valeurs suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

1. Dresser le tableau statistique de la distribution de la variable X (effectifs cumulés, …).
2. Calculer les valeurs de tendance centrale de la distribution : la moyenne, le mode et les trois quartiles Q1, Q2 et Q3.
3. Calculer les valeurs de la dispersion de la distribution : variance, l'écart type et l'intervalle interquartile.
4. Tracer le diagramme en bâtons et la boite à moustaches de cette distribution.

1.6 Exercice

3) Voici les résultats obtenus dans un exercice par des étudiants lors d'un examen :

4)

14	10.1	17.3	14.8	16	9	12.3	7.9	7	15	6	19
6.3	10.7	5	8.4	7	12	9.6	2.4	13	10.6	17	15
8	3.1	10.5	11	18	3.5	12	9.4	3.4	13.2	11	14
14	5	6	11	11	12	16	8	4			

5) Compléter le tableau suivant :

6)

xi = note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	Total
ni = effectifs						

[1] n_i : le nombre d'individus qui ont le même x_i, ça s'appelle effectif partiel de x_i. L'effectif cumulé N_i d'une valeur est la somme de l'effectif de cette valeur et de tous les effectifs des valeurs qui précèdent.

1) Représenter graphiquement la série statistique.
2) Calculer la classe modale et la médiane Me.
3) Calculer la moyenne, la variance, l'écart type et le coefficient de variation

1.7 Exercice

Dans un centre de renseignements téléphoniques, une enquête est effectuée sur un échantillon de 320 clients, afin de diminuer le temps d'attente subi par la clientèle. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Temps secondes	[0 ; 5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20[	[20 ;25[	[25 ;30[	[30 ;35]	Total
Nb clients n_i	32	56	74	78	36	30	14	
Effectif cumulé								
Centre de classe								

1) Quelle est la population étudiée?
2) Quel est le caractère étudié?
3) Déterminer la classe modale de cette série.
4) Quelle est l´étendue de cette série?
5) Calculer le temps d'attente moyen.
6) Construire l'histogramme de cette série et calculer la valeur de la variance.
7) Quel est le pourcentage de clients qui attendent au moins 20 secondes?
8) Quel est le pourcentage de clients qui attendent moins de 10 secondes?

1.8 Exercice

Soient des résultats d'une enquête sur les loyers annuels des appartements dans un quartier.

Montant du loyer (x 1000)	Effectifs
[4, 6[	20
[6, 8[	40
[8, 10[	80
[10, 15[	30
[15, 20[	20
[20, 30[	10

1) Compléter le tableau statistique (valeurs centrales, effectifs cumulés, fréquence, fréquences cumulés)
2) Déterminez les valeurs de tendance centrale de la distribution : moyenne, mode et les quartiles.
3) Mesurez la dispersion de la distribution au moyen de : l'étendue, l'écart type et de l'intervalle interquartile.
4) Tracez l'histogramme et la boite à moustaches de cette distribution.

1.9 Exercice (mise en œuvre avec R)

Mettre en œuvre l'ensemble de toutes les solutions des exercices de la fiche TD avec R.

2 Analyse combinatoire et introduction à la théorie des probabilités

2.1 Exercice : Analyse combinatoire

1) Une mallette dispose d'une fermeture à cadenas secret comprenant 5 tambours identiques portant les chiffres 0, 1, 2,….9.
   Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former sur un tel cadenas ?
2) Trois joueurs A, B et C lancent chacun un dé à six faces.
   a. Combien y'a-t-il de résultats possibles ?
   b. Combien y'a-t-il de résultats où les points amenés sont tous différents ?
3) n candidats se présentent à un concours comportant r places. On suppose que la liste des candidats admis est publiée dans l'ordre de classement.
   a. Combien y'a-t-il de listes possibles ?
   b. Combien y'a-t-il de listes possibles où figure un candidat donné indépendamment de son rang d'admission ?
4) Un échiquier rectangulaire contient n colonnes et p lignes. De combien de façons peut-on placer n objet différents dans n cases de cet échiquier de façon qu'il n'y ait pas deux objets dans une même colonne (plusieurs objets peuvent être dans une même ligne) ?
5) De combien de façons peut-on répartir un groupe de n personnes :
   a. sur une rangée de n chaises ?
   b. sur une table ronde ?
6) Deux personnes désirent s'asseoir côte à côte. Quel sera le nombre de façons pour les répartir selon les deux cas précédents.

2.2 Exercice : Notion de probabilité

1) Nous lançons une pièce de monnaie.
   a. Décrivez les résultats possibles.
   b. Décrivez l'univers Ω associé au lancer d'une pièce de monnaie.
   c. Donnez deux événements associés à cette expérience aléatoire.
2) Nous lançons un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   a. Décrivez les résultats possibles.
   b. Décrivez l'univers Ω associé au lancer d'un dé cubique.
   c. Donnez trois événements associés à cette expérience aléatoire.
3) Nous jetons trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   Décrivez l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

2.3 Exercice : Notion de probabilité

Nous jetons simultanément deux dés cubiques de couleur différente dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Nous notons par *E* l'événement « la somme des deux dés cubiques est un nombre impair », par F l'événement « au moins l'un des deux dés cubiques a une face égale à 1 », et par G « la somme des deux dés cubiques est égale à 5 ». Décrivez E ∩ F, E ∪ F, F ∩ G, E ∩ F c et E ∩ F ∩ G.

2.4 Exercice : Notion de probabilité

Trois joueurs α, β et γ jettent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient pile a gagné. Nous admettrons que α joue d'abord, puis β et enfin γ. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire peut être décrit comme suit :

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \ldots\} \cup \{0000\ldots\}.$$

1. Donnez une interprétation des points de Ω .
2. Décrivez les événements suivants en terme de ces points :
   a. premier événement : A = « α gagne » ;
   b. deuxième événement : B = « β gagne » ;
   c. troisième événement : (A ∪ B) c .

2.5 Exercice

La probabilité pour qu'une personne donnée contracte la grippe en un an est 0.40. La probabilité pour que cette personne soit atteinte d'une maladie M, autre que la grippe, pendantla même période de un an est 0.20. On suppose que contracter la grippe et la maladie M sont deux événements indépendants.

1) Quelle est la probabilité que cette personne contracte la grippe et la maladie M la même année ?
2) Quelle est la probabilité qu'elle contracte au moins l'une des deux maladies en un an ?
3) quelle est la probabilité pour qu'elle n'en contracte aucune des deux en un an ?

2.6 Exercice

Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A assure 20% de la production dont 5% sont défectueuses. La machine B assure 30%de la production dont 4% sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production dont 1% sont défectueuses.

1) On choisit une ampoule au hasard. Calculer les probabilités :a)- que l'ampoule soit défectueuse et provient de A ? b)- que l'ampoule soit défectueuse ?
2) Calculer la probabilité qu'une ampoule défectueuse provient de B ?

2.7 Exercice

Dans un magasin un stock d'appareils est constitué d'appareils venant de deux usines A et B. 60% en provenance de A et le reste de B. 10% (resp 20%) des appareils provenant de A(resp de B) présentent un défaut.

1) Calculer le pourcentage d'appareils ayant un défaut ?
2) Parmi ces derniers, calculer le pourcentage de ceux venant de B ?
3) Parmi les appareils sans défaut, calculer le pourcentage de ceux venant de A ?
4) Vérifier l'indépendance des évènements : « Appareil provient de B » et « Appareil défectueux » ?

2.8 Exercice : Notion de probabilité

	Vrai	Faux
1. On peut associer deux ensembles fondamentaux différents à une même expérience.	☐	☐
2. L'égalité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ implique que les événements A et B sont incompatibles.	☐	☐
3. L'information apportée par la connaissance de la réalisation d'un événement B augmente la probabilité d'un autre événement A, *i.e.* $P(A\|B) \geq P(A)$.	☐	☐
4. Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	☐	☐
5. Si deux événements sont indépendants, alors leurs complémentaires le sont aussi.	☐	☐
6. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ avec équiprobabilité des événements élémentaires sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, c\}$ sont dépendants car ils sont réalisés simultanément quand l'événement élémentaire a est réalisé.	☐	☐

2.9 Exercice : Variables aléatoires

	Vrai	Faux
1. Une variable aléatoire est une valeur numérique.	☐	☐
2. Toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{N}$ est une variable aléatoire discrète.	☐	☐
3. L'espérance mathématique d'une v.a. discrète est la valeur qu'elle prend le plus fréquemment.	☐	☐
4. L'espérance mathématique d'une somme de deux v.a. discrètes est toujours la somme de leurs espérances.	☐	☐
5. Si deux v.a. ont la même espérance, alors elles ont la même variance.	☐	☐
6. La variance d'une somme de deux v.a. discrètes est toujours la somme de leurs variances.	☐	☐

2.10 Exercice : Variables aléatoires

Un joueur dispose d'un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'apparition d'un numéro est proportionnelle à ce dernier. Nous supposons que les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire réelle associée au lancer de ce dé.

1) Déterminez la loi de X.
2) Nous posons $\mathrm{Y} = \frac{1}{X}$. Déterminez la loi de Y.

2.11 Exercice : Variables aléatoires

Soit X une v.a.d. telle que $\mathrm{P([X = -1]) = P([X = 0]) = P([X = 1]) = 1/3)}$ et $\mathrm{P([X = x])} = 0$pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.
Soit $\mathrm{Y} = X^2$. Montrez que les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées. Sont-elles indépendantes ?

2.12 Exercice : Variables aléatoires continues

Soit f la fonction définie par : $\mathrm{f(t)} = \begin{cases} 0 \; si \; t \; \notin [0,1] \\ 2t \; si \; t \in [0,1] \end{cases}$

1) Démontrez que la fonction f est une densité de probabilité.
2) Démontrez que la loi de probabilité définie par f admet une espérance mathématique et une variance que vous préciserez.
3) Déterminez la fonction de répartition associée à f.
4) Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie ci-dessus. Nous définissons $\mathrm{Y} = 1 + X^2$. Déterminez la fonction de répartition de Y.

3 Lois de probabilité

3.1 Exercice (discret)

Un questionnaire comporte dix questions. Pour chacune, il y a quatre réponses possibles. Un individu répond au hasard à toutes ces questions.

1) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à toutes les questions ?
2) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à 5 questions ?
3) Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à au moins 8 questions ?
4) En moyenne, à combien de questions va-t-il répondre juste ?

3.2 Exercice (continu)

Soit X une variable qui suit une loi normale centrée réduite.

a) Calculer : $P(X < 0)$, $P(X < 1.34)$, $P(1 < X < 2)$, $P(X > 3.45)$ et $P(X < -2.67)$.
b) Trouver u tel que $P(X < u) = 0.75$, $P(X < u) = 0.23$ et $P(-u < X < u) = 0.1$.

3.3 Exercice (discret)

Le nombre de personnes à une caisse pendant une heure suit une loi de Poisson de moyenne 12.

a) Quelle est la probabilité de trouver plus de 2 personnes à cette caisse ?
b) Quelle est la probabilité de trouver plus de 2 personnes à cette caisse pendant 4 heures ?

3.4 Exercice (continu)

En moyenne, le temps de réaction des conducteurs à un signal d'arrêt d'urgence est de 1.5 seconde. On sait de plus que ce temps, mesuré en secondes, est normalement distribué avec une variance de 0.16.

a) Quelle est la proportion des conducteurs (en %) dont le temps de réaction est compris entre 1 et 2.5 secondes ?
b) Quelle est la proportion des conducteurs (en %) dont le temps de réaction est inférieur à 1 seconde ?
c) Quelle est la proportion des conducteurs (en %) dont le temps de réaction est compris entre 2 et 2.5 secondes ?
d) Au-dessus de quel temps de réaction (en secondes) un conducteur fait-il partie des 20% les plus lents (càd ayant les plus longs temps de réaction) ?

3.5 Exercice

Un certain matériel a une probabilité $p = 0.01$constante de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne.

a) Le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne est une variable aléatoire suivant une loi à définir.
b) Calculer la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au 5$^{\text{ième}}$ essai ? et au 7$^{\text{ième}}$ essai ?

3.6 Exercice

Dans une assemblée de 30 étudiants, il y a 20 de la promotion Ingénieurs 1$^{\text{ière}}$ année et 10 de la promotion Ingénieurs 2$^{\text{ième}}$ année. On tire un échantillon de 15 étudiants (tirage sans remise).
Soit X la variable aléatoire « nombre d'étudiants ingénieurs 1$^{\text{ière}}$ année » dans cet échantillon.

a) Calculer la probabilité d'avoir 10 étudiants des ingénieurs 1$^{\text{ière}}$ année dans un échantillon de taille 15.

3.7 Exercice

On suppose que le temps, en heures, nécessaire à un mécanicien pour réparer un véhicule est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.7$.

a) Quelle est la probabilité pour que le temps de réparation dépasse 4 heures ?
b) Sachant que la réparation a déjà dépassé 5 heures, quelle est la probabilité qu'elle prenne au moins 7 heures ?